Waldemiro Motta.

1500

ARITHMETICA

ELEMENTAR

PELO PROFESSOR

Antonio Monteiro de Souza

EX-DIRECTOR E LENTE DE MATHEMATICA ELEMENTAR DO GYMNASIO AMAZONENSE E CURSOS ANNEXOS, PROFESSOR DE EDUCAÇÃO PHYSICA DA INSTRUCÇÃO PUBLICA DO ESTADO

Para uso do Instituto Benjamin Constant e Escolas primarias do Estado do Amazonas e adoptada no 1º anno do curso normal do Amazonas e de Pernambuco

Approvada pelos Conselhos Superiores de Instrucção Publica dos Estados do Amazonas, Pará, Pernambuco e Districto Federal

---

4.ª EDIÇÃO

CORRECTA E MELHORADA

Premiada na Exposição Universal de S. Luiz dos E. U. da A. do Norte e na Exposição Nacional do Rio de Janeiro de 1908

RIO DE JANEIRO

Typ. do "Jornal do Commercio", de Rodrigues & C

1910

GHEMAT DIGITALIZADO

N. 3545

Serão considerados contrafeitos os exemplares sem minha rubrica.

Alcoutinho

Pertence ao Waldemiro Motta

PARECER

DO

Dr. Augusto Olavo R. Ferreira, lente do Gymnasio Amazonense e Escola Normal, ex-Director Geral das Obras Publicas de S. Paulo

Sou do numero daquelles que entendem que, simplesmente a publicação de um livro de ensino ainda mesmo que elle não traga as vantagens de uma melhor exposição e de um melhor methodo devidos á capacidade e ao esforço de quem o fez publicar, é já um relevante serviço prestado á instrucção. Tanto maior serão, no caso, o serviço e o merito de um autor quando houver, e o que no presente livro existe, grande somma de trabalho proprio, quer na exposição quer no methodo, pelos quaes certamente muito será facilitado o estudo da Arithmetica.

O compendio que é destinado ás escolas primarias, ao Instituto Benjamin Constant e ao primeiro anno da Escola Normal (estabelecimentos do Estado do Amazonas) satisfaz completamente o fim a que se propõe.

Todas as questões são expostas de modo conciso e claro, seguindo-se immediatamente exemplos que vêm confirmar a verdade do exposto e logo após, a regra que então já se impõe naturalmente ao espirito do alumno, que só por si póde chegar a deduzil-a.

Referentes a cada regra, são propostas questões para exercicios do alumno, que resolvendo-as terá assim a expensas dos seus propriós esforços gravado de vez no espirito o modo de resolver os diversos actos arithmeticos apresentados.

Destaco especialmente no presente livro os capitulos referentes á numeração, numeros complexos e systema metrico decimal, que são expostos com grande methodo e muita clareza, sendo que ao ultimo dá o autor certo desenvolvimento, tendo-se em vista a amplitude do objectivo que visa este compendio.

Estou convencido que a *Arithmetica do Sr. professor Monteiro de Souza* virá servir como bom preparo ao alumno para abordar arithmeticas mais completas e mais desenvolvidas, vencendo então sem grande esforço maiores difficuldades.

Eis o que penso.

Manáos, 8 de Agosto de 1898.

Augusto Olavo Roiz Ferreira,
Engenheiro civil.

Prefacio da 4ª Edição

Mais uma edição desta obra vem demonstrar a sua aceitação por parte da mocidade brazileira e especialmente dos membros do magisterio primario.

Não ha mais necessidade de recommendal-a, só me resta agradecer aos collegas a propaganda deste livrinho, que tanto lhes facilita a sua ardua e nobilissima missão.

Começando o seu ensino pelo meu compendio — Arithmetica do Principiante — passando em seguida a fazel-o por este, estou certo de que seus discipulos jámais dirão:—"eu não dou para a mathematica" — porque terão formado uma base solida, firme, para os mais elevados estudos deste importantissimo ramo de conhecimento humano: — o primeiro degráo das sciencias.

Junho de 1909.

A. Monteiro de Souza.

AO LEITOR

(PREFACIO DA TERCEIRA EDIÇÃO)

Entra o presente livro didactico na terceira edição. Apresentando-a aos Srs. professores primarios e á mocidade do meu paiz, é dever meu agradecer o favor com que acolheram as duas primeiras edições.

A' imprensa do Amazonas, Pernambuco, Bahia e Capital da Republica, bem como aos Conselhos Superiores de Instrucção Publica do Amazonas, Pará, Pernambuco e Capital Federal, e diversos collegas, o meu reconhecimento pelas palavras de louvor com que receberam o meu livro e pelos pareceres favoraveis com que honraram-n-o.

Antes de transcrever esses pareceres devo dizer algumas palavras relativamente a dois delles aliás dos mais honrosos. São elles emittidos pela "REVUE BIBLIOGRAPHIQUE UNIVERSELLE" — POLYBIBLION — e pelo *Conselho Superior de Instrucção Publica do* DISTRICTO FEDERAL da Republica.

Um e outro extranharam a falta do methodo da *reducção á unidade* no compendio. Realmente foi uma lacuna bem sensivel, sanada, porém, na presente edição. Essa falta que devia ser reparada na 2ª edição não o sendo por ter esta sido impressa logo em seguida á primeira, não foi consequencia de um esquecimento, mas de circumstancias que não vêm a pello referir. Tiveram, pois, razão, em notar a ausencia do methodo hoje universalmente usado nos compendios didacticos de arithmetica.

O segundo parecer notou ainda a deficiencia de definição de *quociente completo*. De facto essa definição não abrange todo o definido. Em um livro destinado a principiantes, o que se deve ter muito em vista é tornal-o o mais claro, o mais comprehensivel possivel, afim de facilitar a tarefa do mestre. E' por isso que muitas vezes dá-se uma noção que só mais tarde vai-se completar. Si tivessemos dado a definição completa, poderiamos não ser bem comprehendidos pelos jovens estudantes, de passos ainda mal seguros na arithmetica, por isso demos a noção da pag. 31, a qual implicitamente completamos com as ultimas linhas da pag. 36: de sorte que ao tratarmos da regra de extracção de inteiros de uma fracção impropria não commettemos uma contradicção, fallamos de um assumpto já conhecido.

Neste ponto, portanto, não alteramos o compendio. Com certeza o trecho da pag. 36 passou despercebido ao illustrado professor que deu o parecer, parecer que demonstra o seu zelo e o seu empenho em bem cumprir com o seu dever de membro do Conselho e por isso mesmo para o autor mais honroso ainda.

Na apreciação feita pela revista bibliographica — "POLYBIBLION" — ha ainda o seguinte trecho: — ..."l'auteur n'a pas evité la faute commune: *Deca* qui signifie 10; exemple, un decamètre carré" —, no qual o illustre escriptor que redigiu o parecer, refere-se, parece-me, ao facto de chamar-se decametro quadrado, á medida de superficie que tem dez metros de cada lado, por consequencia tendo 100 metros quadrados e não 10, como indica o prefixo *deca*. Si é isso, o autor continúa com a mesma technologia porque já está por tal fórma universalisada, que qualquer alteração hoje não seria com certeza bem aceita.

Eis o que tinha a dizer como esclarecimento ás pequenas objecções feitas pelos dous dos mais honrosos pareceres. Passo agora a transcrever todos os que me chegaram ás mãos; pedindo ao terminar ás pessoas e jornaes que se dignarem de emittir suas opiniões o obsequio de m'as enviarem.

Janeiro de 1902.

A. MONTEIRO DE SOUZA.

Caixa do Correio 67, Manáos — Amazonas.

PARECERES

DE

Conselhos Superiores de Instrucção Publica

Do Pará:

"Secretaria Geral da Instrucção Publica do Estado do Pará, Belém, 20 de Novembro de 1899. — Sr. professor Antonio Monteiro de Souza. — Remetto-vos por cópia o parecer emittido pela respectiva commissão nomeada pelo conselho superior, sobre o vosso trabalho denominado Compendio de ARITHMETICA ELEMENTAR, o qual foi approvado unanimemente pelo conselho superior em sessão de 30 do mez findo. — Saude e fraternidade. — *Heraclyto Pinheiro*, secretario."

PARECER (copia). — Srs. membros do conselho superior de instrucção publica do Estado. — O Compendio de ARITHMETICA ELEMENTAR do professor *Antonio Monteiro de Souza* é um trabalho completo no genero, exposto com clareza e methodo racional sufficientemente theorico e abundantemente pratico, constituindo um verdadeiro livro de maxima utilidade para o ensino dessa materia nas escolas primarias. Sou de opinião que o conselho approvando-o fará a acquisição de um bom methodo de um dos mais necessarios estudos, de que tanto precisa a nossa mocidade, a quem nunca é demais um bom compendio de Arithmetica, seja elle elementar ou superior. — Sala das sessõeõs do conselho superior da instrucção publica, em 30 de Outubro de 1899. — (Assignados): Sabino Henrique da Luz. — *H. Barjona de Miranda*. — *Ernesto Mattoso*. — Confere, *Heraclyto Pinheiro*.

De Pernambuco:

"Em cumprimento do despacho supra certifico ser o seguinte o theor do parecer a que se refere o peticionario: — Pernambuco, Recife, 5 de Abril de 1899. — A primeira commissão do conselho superior da instrucção publica do Estado, a quem foi apresentada a ARITHMETICA ELEMENTAR do professor *Antonio Monteiro de Souza*, depois da leitura e exame attencioso a que procedeu, é de parecer que o alludido compendio acha-se em condições de ser adoptado com aproveitamento para aquelles que procuram adquirir os primeiros conhecimentos de Arithmetica. — (Assignados) *Antonio de Barros Vieira Cavalcanti*. — *Pedro Lessa* — *Uchôa Cavalcanti*. — *H. Peregrino*. — Approvado em sessão desta data. — Inspectoria geral da instrucção publica, 1 de Maio de 1899. — (Assignado) *Regueira Costa*. — Eu, Manoel Cavalcanti de Mello Filho passei a presente certidão aos 15 de Junho de 1899."

Da Capital Federal:

"Parecer approvado em sessão de 12 de Dezembro de 1900. — O Sr. *Antonio Monteiro de Souza* publicou um compendio de ARITHMETICA ELEMENTAR para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas, compendio que é adoptado no primeiro anno da Escola Normal do mesmo Estado. O compendio é precedido de um lisongeiro parecer do Sr. Dr. Augusto Olavo Rodrigues Ferreira, lente do Gymnasio Amazonense e Escola Normal. Esta circumstancia é bastante poderosa para predispor o espirito a favor do livro aos que tenham de examinal-o tratando-se de um julgador emerito e professor muito competente na materia. Li com attenção todo o livro e a impressão que me causou foi a melhor possivel. E' UM TRABALHO METHODICO, CLARO E AO ALCANCE DAS INTELLIGENCIAS MENOS FAVORECIDAS. Os reparos que tenho a fazer sobre o compendio são limitados e faceis de correcção em nova edição. Tratando-se de um compendio de Arithmetica com o desenvolvimento que lhe deu o seu auctor, não comprehendo o motivo que o levou a collocar logo em começo do seu livro uma série de taboadas para o estudo do calculo mental. Em primeiro logar ensinar o calculo mental pelo uso da taboada é um processo abandonado, pesado. A pedagogia moderna indica uma série de meios faceis, intuitivos em que as crianças de um modo suave adquirem taes conhecimentos. Ainda mais, quem se propõe a estudar arithmetica já deve estar preparado no calculo mental. Entregar um compendio de arithmetica com a extensão deste a um alumno que não sabe as quatro operações praticamente, é um erro. Aconselhariamos ao digno professor a retirada de taes taboadas do seu livro. Não aceitamos a definição que o autor dá de quociente completo que no seu modo de ver é o que resulta de uma divisão que não deixa resto. E' verdade que os quocientes das divisões exactas são quocientes completos, mas não são só estes. E tanto isto é verdade que o proprio autor na pagina quarenta e duas, dando a regra para extrahir os inteiros de uma fracção impropria diz o seguinte:........................ e o quociente completo si houver resto na divisão, representa o numero mixto. Comprehende-se facilmente que esta contradicção é filha de um pequeno descuido. Outra lacuna que encontro no livro, e a meu ver importante, é a do auctor só resolver as regras de tres e suas applicações pelo methodo de proporções, excluindo de um modo absoluto e sem ao menos fazer qualquer referencia ao methodo da reducção á unidade, processo moderno, racional, aconselhado por todas as auctoridades do ensino e exigido até nos programmas officiaes. A não ser o que venho de expor, acho que todas as outras theorias ESTÃO BEM EXPOSTAS E MUITO EXEMPLIFICADAS, MORMENTE A DO SYSTEMA METRICO A QUE O AUCTOR DEU DESENVOLVIMENTO E CLAREZA QUE A TORNA SUPERIOR AO QUE SE ENCONTRA NO COMMUM DOS COMPENDIOS PUBLICADOS. Julgo portanto que o livro está nas condições de ser approvado. — (Assignado), *José Rodrigues de Azevedo Pinheiro*. — E por ser verdade passei a presente certidão que assigno. — Directoria geral da instrucção publica, 10 de Janeiro de 1902. — *Abeilard G. de Almeida Feijó*, secretario geral."

OPINIÕES DA IMPRENSA

ARITHMETICA ELEMENTAR

Por A. Monteiro de Souza. Rio de Janeiro, Companhia Typ. do Brasil, 1899, in-8" de 180 pags., cartonné.

"Ce livre pourrait servir de modèle à bien des auteurs français qui ont composé des arithmetiques à l'usage de l'enseignement élémentaire. Nous nous préoccupons trop du côté scientifique et pas assez de la pratique. Ici, les définitions montrent le but pratique de chaque opération, les règles sont simples et précises, et les exemples, bien choisis, indiquent nettement la disposition du calcul. De bonnes remarques pratiques, des conseils pédagogiques aux professeurs, la suppression de toute explication théorique, une impression correcte et élégante permettent une étude rapide et sérieuse du calcul. Dans les operations sur les fractions, nous avons revu avec plaisir une règle très commode pour trouver le plus petit dénominateur commun; nous regrettons que cette règle ne soit plus en usage en France. Dans le système métrique, l'auteur n'a pas évité la faute commune: "Déca" qui signifie 10; exemple, un decamètre carré. Il fait connaître le franc quoique ce ne soit pas l'unité monetaire du Brésil. Le "real" est une bien petite unité mais l'unité commercial de "mil réis" est commode. D'ailleurs, les monnaies étant du système décimal, le seul inconvénient de ne pas avoir adopté le franc consiste à ne pouvoir pas faire des pesées avec la monnaie. Le volume se termine par les règles de trois, d'intérêt, etc.; l'emploi constant des proportions ne nous paraît pas heureuse; nous préférons la méthode de réduction à l'unité.

E. CHAILAN.

"POLYBIBLION" — *Revue Bibliographique Universelle de Paris*, partie littéraire de Agosto de 1900.

*
* *

BIBLIOGRAPHIA

"Recebemos um compendio da ARITHMETICA ELEMENTAR do professor Antonio Monteiro de Souza.

E' um livro nitidamente impresso na Companhia Typographica do Brasil.

Do seu texto apenas podemos dizer que é um dos bons compendios, no seu genero, que as definições são claras e simples, os exemplos bem empregados e problemas bem feitos."

(Da *Imprensa* da Capital Federal, de 13 de Julho de 1899).

*
* *

LIVROS E LETTRAS

"Temos sobre a mesa um excellente trabalho, que PRESSUROSOS E COM PRAZER, RECOMMENDAMOS AOS SRS. DIRECTORES DE COLLEGIOS é a ARITHMETICA ELEMENTAR do professor *Antonio Monteiro de Souza* do Estado do Amazonas.

Compilada com inteiro methodo, estudada de um modo especial, cheia de desenvolvimentos muito claros, a Arithmetica que temos presente torna-se muito recommendavel e digna de admissão até nas nossas escolas normaes.

Dando parecer sobre ella o Sr. Dr. Augusto Olavo Rodrigues Ferreira, disse o seguinte que fazemos nosso:

"Destaco especialmente no presente livro os capitulos referentes á numeração, numeros complexos e systema metrico decimal, que são expostos com grande methodo e muita clareza, sendo que ao ultimo dá o auctor certo desenvolvimento, tendo-se em vista a amplitude do objectivo que visa este compendio".

Diversos institutos brasileiros têm adoptado a Arithmetica do Sr. professor Antonio Monteiro de Souza, a quem agradecemos o exemplar que nos enviou".

(Do *Jornal de Noticias* da Bahia, de 19 de Setembro de 1899).

*
* *

"Accusando, ha poucos dias, o recebimento de uma Arithmetica escripta pelo Sr. Vieira, tivemos occasião de lastimar que o referido trabalho nos fosse vasado em moldes mais novos, mais de accôrdo com a orientação que nestes ultimos tempos se tem imprimido ás obras didacticas.

Hoje temos a satisfação de noticiar a publicação de um livro destinado tambem ás escolas, e que, em nossa humilde opinião, preenche cabalmente os fins que teve em mira seu intelligente auctor.

Referimo-nos á ARITHMETICA ELEMENTAR do distincto professor *Antonio Monteiro de Souza*, a qual acaba de ser adoptada no 1º anno do curso normal do Amazonas e no Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do mesmo Estado. Em parecer firmado pelo illustrado Sr. Dr. Augusto Olavo Rodrigues Ferreira, lente do Gymnasio Amazonense e ex-Director Geral das Obras

Publicas de S. Paulo, vêm apontadas nos termos seguintes as vantagens e excellencias do trabalho que noticiámos: (*Segue-se o parecer do Dr. Olavo*).

....

Conclue o illustre cathedratico o seu conciso e auctorisado parecer affirmando que a Arithmetica do Sr. Monteiro satisfaz completamente o fim a que se propõe".

(Da *Bahia* de S. Salvador, de 15 de Maio de 1899).

*
* *

ARITHMETICA ELEMENTAR

"Recebemos um exemplar da 1ª edição da ARITHMETICA ELEMENTAR do professor *Antonio Monteiro de Souza*, para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas.

E' escripto em linguagem accessivel a todas as intelligencias e é um livro que, nos parece, servirá com vantagem aos fins a que é destinado."

(Do *Correio de Noticias* da Bahia, 12 de Abril de 1899).

*
* *

Temos sobre a mesa um exemplar da 1ª edição da ARITHMETICA ELEMENTAR pelo professor *Antonio Monteiro de Souza*, para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas e adoptada no 1º anno do curso normal.

E' um trabalho que preenche satisfactoriamente o fim a que se destina, tendo, sobretudo, a preciosa vantagem de ser escripto numa LINGUAGEM CLARA, FACILMENTE COMPREHENSIVEL.

O livro está impresso com toda a nitidez.

Agradecemos a remessa do exemplar."

(D'*A Provincia* de Pernambuco, de 10 de Junho de 1899).

*
* *

ARITHMETICA ELEMENTAR

"Um livro de grande utilidade nos foi offerecido hontem pelo Sr. Dr. Placido Serrano.

E' um tratado de Arithmetica cuidadosamente organizado pelo intelligente professor *Antonio Monteiro de Souza*.

Para salientarmos o valor desse excellente compendio de mathematica, basta dizermos que adoptado officialmente no Instituto Benjamin Constant e na Escola Normal de Manáos, é geralmente procurado por ser considerado como UM DOS MAIS INTUITIVOS ATE' ENTÃO CONHECIDOS.

Agradecemos ao Dr. Serrano a gentileza da offerta de um exemplar."

(Do *Jornal do Recife*, de 10 de Junho de 1899).

*
* *

ARITHMETICA ELEMENTAR

"O Sr. Dr. Placido Serrano foi portador de um exemplar do compendio de Arithmetica Elementar, que nos enviou o habil professor *Antonio Monteiro de Souza*, por elle publicado para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas.

Contém o referido volume 178 paginas, havendo nellas provas de um acurado trabalho em que demonstra o seu auctor, habilidade profissional.

Escripta em moldes intuitivos, a Arithmetica do professor Monteiro está nos casos de ser adoptada para o ensino ás crianças.

Agradecemos o offerecimento a que acima alludimos."

(*Pequeno Jornal* de Pernambuco, de 9 de Junho de 1899).

*
* *

ARITHMETICA ELEMENTAR

"Foi-nos enviado um exemplar da Arithmetica Elementar que, para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Amazonas, adoptada igualmente para o 1º anno do curso normal, acaba de publicar o Sr. professor *Antonio Monteiro de Souza.*

A nova Arithmetica Elementar parece-nos preencher plenamente o fim a que se destina, EXPONDO TODAS AS QUESTÕES DE MODO SYNTHETICO E CLARO e illustrando-as com exemplos que se expõem á comprehensão do enunciado.

Agradecemos penhorados o exemplar que nos foi remettido."

(*Diario de Pernambuco*, de 10 de Junho de 1899).

*
* *

"Offerecido pelo nosso illustre amigo Dr. Placido Serrano, recebemos um compendio de Arithmetica Elementar, proficientemente escripto pelo professor *Antonio Monteiro de Souza.*

O referido livro está adoptado no Instituto Benjamin Constant e na Escola Normal de Manáos e é um trabalho que attesta sobremodo o valor intellectual de seu auctor.

A prova disso está no facto de ter sido, a Arithmetica Elementar do professor Monteiro de Souza adoptada officialmente naquellas casas de ensino da capital Amazonica.

Agradecemos a gentileza do nosso bom amigo Dr. Placido Serrano.

(*Diario da Tarde* de Pernambuco, de 10 de Junho de 1899).

*
* *

ARITHMETICA ELEMENTAR

"Acabamos de receber um exemplar dessa obra da lavra do Sr. *Antonio Monteiro de Souza* que a destinou ao Instituto Benjamin Constant e ás escolas primarias do Amazonas.

E' um volume de 180 paginas muito bem impresso, onde o seu auctor revela bastante competencia na materia.

Somos agradecidos á delicadeza da offerta."

(*Commercio de Pernambuco*, de 11 de Junho de 1899).

*
* *

"Temos sobre a banca o compendio de Arithmetica Elementar pelo professor *Antonio Monteiro de Souza*, para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas.

Pelo pouco que delle lemos reconhecemos logo que satisfaz perfeitamente as exigencias do ensino primario.

O Sr. professor *Antonio Monteiro de Souza* foi feliz escrevendo um livrinho claro e adequado aos que se dedicam ao estudo dos numeros.

Que seja coroado do melhor exito o seu trabalho, a que presidiu a mais pura intenção, são os nossos sinceros votos."

(Da *Patria* de Manáos, 6 de Janeiro de 1899).

*
* *

BIBLIOGRAPHIA

"Recebemos.

Arithmetica Elementar, pelo professor *Antonio Monteiro de Souza*, para uso do Instituto Benjamin Constant e escolas primarias do Estado do Amazonas e adoptada no 1º anno do Curso Normal do Gymnasio Amazonense. Trabalho de grande utilidade e que attesta que no Amazonas muito se tem desenvolvido ultimamente o gosto pelo ensino, a Arithmetica do professor Monteiro não precisa de recommendação entre nós, pelo muito conhecido que é o seu auctor como preceptor e estudioso cultor das mathematicas.

Entretanto, para echoar *extramuros*, fazemos nossas as palavras do parecer que sobre tal obra deu o illustrado engenheiro Dr. Olavo Ferreira:

.... (Segue-se o parecer do Dr. Olavo) ....
....

(Do *Amazonas Commercial*, de 8 de Janeiro de 1899).

*
* *

"Está adoptada no 1º anno do curso normal do Estado a Arithmetica Elementar do professor *Antonio Monteiro de Souza*, que igualmente destina a sua utilissima obra ao ensino nas escolas primarias e Instituto Benjamin Constant.

Dissemos utilissima, e esta convicção nos veiu da rapida leitura que fizemos da *Arithmetica* do professor Monteiro, que expõe as suas questões com a maior clareza, exemplificando-as seguidamente, tornando-as assim de facil comprehensão para os que começam o complicado estudo da sciencia dos numeros.

Do merecimento desta obra dil-o melhor, e com mais com-
petencia do que nós, o illustrado engenheiro Dr. Olavo Ferreira,
no seguinte trecho com que a prefacia:
"Todas as questões estão expostas de modo conciso e claro,
seguindo-se immediatamente exemplos que vêm confirmar a verda-
de do exposto, e logo após a regra, que então já se impõe natural-
mente ao espirito do alumno, que só por si póde chegar a dedu-
zil-a".
Depois do que, só nos resta recommendar a Arithmetica Ele-
mentar do professor Monteiro de Souza, a qual já se acha á venda
nas livrarias desta cidade, agradecendo ao seu auctor a delicada
offerta que nos fez de um exemplar do seu livro."

(Do *Amazonas*, de 14 de Janeiro de 1899).

OPINIÃO DO ILLUSTRE PROFESSOR DR. OLAVO FREIRE

Lente da Escola Normal e da Casa de S. José da Capital Federal, Auto
da "Geometria Pratica" e outros trabalhos didacticos

Meu caro amigo Sr. professor Antonio Monteiro de Souza. Li
com a maior attenção o seu precioso compendio de Arithmetica
Elementar e antes de aqui deixar a minha opinião aceite os meus
sinceros parabens!
O seu livrinho em ambas as partes em que se acha dividido é
elaborado com a maxima precisão, clareza e methodo; este em
particular, sobremaneira me agrada.
Os capitulos referentes á NUMERAÇÃO, OPERAÇÕES FUNDAMEN-
TAES E FRACÇÕES SÃO TÃO BEM ENCAMINHADOS, TÃO CLAROS E EXPLI-
CITOS QUE BASTARIAM PARA DAR VALOR AO METHODICO COMPENDIO que
tive o prazer de ler.
O trabalho a que me refiro é, em summa, UMA VERDADEIRA JOIA
OFFERECIDA A' MOCIDADE ESTUDIOSA.
Que os meus illustrados collegas saibam delle se aproveitar.
Rio, 26 de Abril de 1899.

OLAVO FREIRE.

ARITHMETICA ELEMENTAR

DEFINIÇÕES

Arithmetica é a parte da mathematica, que ensina a calcular por meio de numeros.

Quantidade ou grandeza é tudo o que póde ser augmentado ou diminuido; assim, o *comprimento*, o *tempo*, o *peso*, etc., são quantidades.

As quantidades dividem-se em *continuas* e *descontinuas*, *homogeneas* e *heterogeneas*.

Quantidades continuas são aquellas, cujas partes estão ligadas formando um todo sem interrupção, como, por ex.: *o comprimento de uma fita, o tempo, um pouco de agua*, etc.

Quantidades descontinuas são aquellas, cujas partes estão por natureza separadas, como *uma porção de laranjas, uma reunião de meninos*, etc.

Quantidades homogeneas ou da mesma especie, são as que se referem á mesma cousa; por ex.: 8 *homens*, 24 *homens*; duas quantidades referindo-se ambas a *homens*.

Heterogeneas, ou de especies diversas, são as quantidades que se referem a cousas differentes, como 3 *caixões* e 8 *mesas*.

Para avaliar as quantidades, é necessario medil-as.

Medir uma quantidade é comparal-a com outra da mesma especie, que seja conhecida. Assim, para medir o comprimento de uma peça de fazenda, comparamol-a com o metro ou com a braça, por exemplo, que são quantidades conhecidas e da mesma especie por que são comprimentos.

Essa quantidade conhecida, com que se comparam as quantidades que se medem, chama-se *unidade*; portanto:

Unidade é uma quantidade conhecida, que serve para medir as quantidades da mesma especie.

A unidade póde ser arbitraria e natural ou determinada. Nas quantidades continuas a unidade póde ser arbitraria, como por ex.: na medição do comprimento de uma rua, podemos tomar para unidade a braça, o palmo, o metro, etc.

Nas quantidades descontinuas, porém, a unidade é sempre uma das partes da quantidade, como por ex.: numa reunião de cadeiras, a unidade é forçosamente uma cadeira.

OBSERVAÇÃO.—Nas quantidades descontinuas a unidade póde ser tambem uma reunião das partes da quantidade, como por ex.: numa reunião de cadeiras, a unidade póde ser uma duzia de cadeiras ou um cento de cadeiras, mas isto em nada altera a designação de *determinada*, que se deu á unidade, conforme se poderá observar fazendo um detido exame sobre a natureza desta unidade.

Portanto, a unidade é *arbitraria*, quando podemos escolhel-a á nossa vontade, e *natural* ou *determinada*, quando é marcada pela natureza da quantidade.

O resultado da comparação da quantidade com a unidade, chama-se *numero*; assim

Numero é a expressão das vezes que a unidade ou parte della acha-se contida na quantidade.

Na medição de uma quantidade tres casos podem se dar: 1º, *a unidade póde conter-se na quantidade um numero exacto de vezes*; 2º, *a quantidade póde ser menor do que a unidade e então só conter partes da unidade*; 3º, *a unidade póde conter-se um certo numero de vezes e ficar um resto que só contenha partes da unidade*.

No primeiro caso, o numero que resulta da medição chama-se *inteiro*; no segundo — *fracção* ou *quebrado*; e no terceiro — *mixto* ou *fraccionario*.

Logo:

Numero inteiro é o que só se compõe de unidades inteiras, como 5, 7, 50, etc.

Fracção ou quebrado — o que se compõe sómente de partes da unidade, como: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, etc.

Mixto ou fraccionario - o que se compõe de unidades e de partes de unidade, como: $2\frac{1}{2}$, $3\frac{4}{5}$. etc.

O numero póde ser *simples* ou *digito*, *composto*, *par*, *impar*, *abstracto* e *concreto*.

Numero simples ou digito é o que se escreve com um só algarismo; são nove: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Numero composto é o que se escreve com mais de um algarismo; são todos os numeros de 10 em diante, como: 20, 56, 118, etc.

Numero par é o que se póde dividir exactamente por dois, como o numero 8 que — dividido por 2 — dá 4. Todos os numeros-pares terminam em 0, 2, 4, 6 e 8: taes são os numeros 20, 32, 44, 56 e 68, etc.

Numero impar é o que não se póde dividir exactamente por dois; como por exemplo, o numero 5, que—dividido por 2—, dá 2, ficando 1 de resto. Os numeros impares terminam em 1, 3, 5, 7 e 9; taes são os numeros 11, 13, 25, 37 e 49, etc.

Numero abstracto é o que não determina a especie da unidade, como por ex.: 5, 25, 32, etc.

Numero concreto é o que determina a especie de sua unidade, como os numeros 25 *cadeiras*, 8 *casas*, 131 *homens*, etc., nos quaes vem determinadas as suas unidades que são—*cadeiras*, *casas* e *homens*.

Vimos que a Arithmetica ensina a calcular por meio de numeros.

Calcular por meio de numeros é compor e decompor os numeros.

Para compor e decompor os numeros, a Arithmetica tem seis operações, que são: *addição, subtracção, multiplicação, divisão, potenciação* e *radiciação*.

As quatro primeiras são chamadas fundamentaes.

Servem para compor numeros a *addição*, a *multiplicação* e a *potenciação*; servem para decompor, a *subtracção*, a *divisão* e a *radiciação*.

OPERAÇÕES

FUNDAMENTAES

Addição, Subtracção, Multiplicação e Divisão

COMPOSIÇÃO	DECOMPOSIÇÃO
Addição	Subtracção
Multiplicação	Divisão
Potenciação	Radiciação

NUMERAÇÃO

Numeração é a arte de enunciar e escrever todos os numeros com uma pequena quantidade de palavras e signaes.

Divide-se em numeração fallada e numeração escripta.

NUMERAÇÃO FALLADA

Numeração fallada é a arte de exprimir os numeros por meio de palavras.

Os numeros são illimitados: formam-se, juntando uma unidade ao antecedente. Uma só unidade chama-se **um**; juntando-se uma unidade a um, temos o numero **dois**; juntando-se uma unidade a este numero, temos o numero **tres**; juntando-se uma unidade a este, temos o numero **quatro**, e assim por diante.

Para se exprimirem os numeros por poucas palavras, consideram-se os numeros compostos de *classes*, as classes compostas de *ordens*, e as ordens compostas de *unidades*, e assentou-se que, *dez unidades de uma ordem formassem uma de ordem immediatamente superior*, e que tres destas ordens formassem uma classe.

Á's unidades da primeira ordem deu-se o nome de *unidades simples*, ás da segunda ordem — o de *dezenas*, e ás da terceira ordem — o de *centenas*. A' primeira classe deu-se o nome de **unidades**, á segunda — o de **milhares**, á terceira — o de **milhões**, á quarta — o de **bilhões**, á quinta — o de **trilhões**, á sexta — o de **quatrilhões**, á setima — o de **quintilhões**, á oitava — o de **sextilhões**, á nona — o de **septilhões**, á decima — o de **oitilhões**, e á undecima — o de **nonilhões**.

As nove unidades simples receberam os nomes seguintes: *um, dois, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito* e *nove*. A's dezenas deram-se os nomes: *dez* para uma dezena, *vinte* para duas, *trinta* para tres, e assim — *quarenta, cincoenta, sessenta, setenta, oitenta* e *noventa*. A's centenas deram-se os nomes seguintes: para uma centena — *cem*, para duas — *duzentos*, para tres — *trezentos*, e assim *quatrocentos, quinhentos, seiscentos, setecentos, oitocentos* e *novecentos*.

Em qualquer classe são sempre estes mesmos nomes, accrescentando-se apenas a designação da classe. Assim, na classe das unidades conta-se: *uma, duas, tres*... etc., *vinte, trinta*... etc., *cem, duzentas, trezentas*... etc., **unidades**. Na dos milhares conta-se: *um, dois, tres*... etc., *vinte, cincoenta*... etc., *cem, duzentos, trezentos*... etc., **mil** ou **milhares**.

Da mesma fórma em todas as outras classes.

Entre uma dezena e outra intercalam-se as nove unidades simples; assim entre dez e vinte temos nove unidades, da mesma maneira entre vinte e trinta, entre trinta e quarenta, etc. Portanto contar-se-ha: *dez* e *um* ou *onze*; *dez* e *dois* ou *doze*; *dez* e *tres* ou *treze*; *dez* e *quatro* ou *quatorze*; *dez* e *cinco* ou *quinze*; *dez* e *seis* ou *dezeseis*; *dezesete, dezoito* e *dezenove*. Igualmente contar-se-ha *vinte e um, vinte e dois, vinte e tres, vinte e quatro*, etc., e assim até chegarmos ao numero *noventa e nove*.

Entre uma centena e outra já se intercalam estas noventa e nove unidades. Assim, contaremos entre cem e duzentos: *cento e um, cento e dois*..., *cento e dez, cento e onze*..., *cento e vinte, cento e vinte um, cento e trinta*, etc., até *cento e noventa e* *nove*, quando passamos para duzentos. Da mesma maneira se fará entre duzentos e trezentos, entre trezentos e quatrocentos, entre quatrocentos e quinhentos, etc., chegando assim a *novecentos e noventa e nove*.

Entre uma unidade de milhar e outra já se intercalam estes *novecentos e noventa e nove numeros*, e desta fórma chegamos a *nove mil novecentos e noventa e nove*, passando então para dez mil. Entre uma dezena de milhar e outra, por ex.: entre dez mil e vinte mil, já se intercalam os nove mil novecentos e noventa e nove numeros enunciados. Portanto, entre uma unidade qualquer e outra immediata *intercalam-se todas as unidades inferiores já enunciadas*. Por ex.: entre uma dezena de milhão e outra intercalaremos nove milhões novecentos e noventa e nove mil novecentos e noventa e nove unidades; e assim por diante.

Logo, para saber-se enunciar um numero, basta saber-se enunciar a primeira classe; pois as outras todas se enunciam como a primeira.

Os numeros, portanto, se formam segundo esta lei ou convenção, que é chamada — Lei da numeração fallada.

Dez unidades de uma ordem formam uma ordem immediatamente superior.

DISTRIBUIÇÃO DAS CLASSES E ORDENS

etc.	Trilhões			Bilhões			Milhões			Milhares			Classe das unidades		
....	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades	Centenas	Dezenas	Unidades

NUMERAÇÃO ESCRIPTA

Numeração escripta é a arte de escrever os numeros com uma pequena quantidade de signaes.

Os signaes, com que se representam os numeros, são dez, os quaes chamam-se *algarismos arabicos*.

Eil-os:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Um	Dois	Tres	Quatro	Cinco	Seis	Sete	Oito	Nove	Zero ou cifra

Portanto, algarismos são os signaes que servem para representar os numeros.

Os nove primeiros chamam-se *significativos* e o ultimo que é o zero chama-se *insignificativo*.

Os primeiros chamam-se significativos porque tem valor proprio, isto é, representam sempre um numero. O ultimo é chamado insignificativo, porque por si só não representa nenhum numero, isto é, não tem valor.

Assim, o zero escripto isoladamente, como se segue

0

não tem valor algum nada representa. E' necessario que elle esteja junto de um dos algarismos significativos para exprimir alguma cousa, como por ex.: em o numero

20

O zero foi inventado para ter duas serventias, que mais adiante veremos.

Para que com estes dez signaes se representassem na escripta todos os numeros, foi preciso convencionar, que **todo o algarismo escripto á esquerda de outro tivesse um valor dez vezes maior do que si estivesse no lugar desse outro.**

Assim, em o numero

25

o algarismo 2 escripto á esquerda de 5 tem um valor dez vezes maior do que si estivesse no lugar de 5.

De facto, o algarismo 2 no lugar de 5 escrever-se-ha da seguinte fórma

.2

e vale sómente duas unidades; mas na segunda casa, como no dito numero 25 vale vinte, portanto tem um valor dez vezes maior.

Logo um mesmo algarismo póde ter uma infinidade de valores, á proporção que fôr mudando de casa para a esquerda; cada casa que muda, tem um augmento de dez no seu valor.

Em a numeração fallada vimos que dez unidades formam uma dezena, dez dezenas formam uma centena, dez centenas — um milhar, dez milhares — uma dezena de milhar, etc.; logo, uma dezena vale dez unidades, uma centena — dez dezenas ou cem unidades, um milhar — dez centenas ou cem dezenas ou mil unidades, e uma dezena de milhar — dez milhares ou cem centenas ou mil dezenas ou dez mil unidades, etc.

Vejamos agora como é que com aquelles dez signaes representamos todos os numeros.

Para escrever as nove unidades simples temos os nove algarismos. Para escrever o numero dez, que é uma unidade de segunda ordem, basta fazer que o algarismo 1 occupe a segunda casa ou tenha um valor dez vezes maior; e então escreveremos

10

isto é: 1 na segunda casa e 0 na primeira para dizer que nesta casa não ha nenhuma unidade.

Da mesma fórma, para escrever o numero trinta, que é tres dezenas, escreveremos o algarismo 3 na segunda casa, onde elle tem um valor dez vezes maior ou vale trinta; e, como não ha nenhuma unidade na primeira casa, nella põe-se 0:

30

Portanto, todas as dezenas representar-se-hão assim:

10—20—30—40—50—60—70—80—90

Seja agora escrever o numero *vinte e quatro*.

Ora, vinte e quatro são duas dezenas e quatro unidades; logo escreveremos o algarismo 2 na segunda casa, e o 4 na primeira, da seguinte fórma

24

Seja agora escrever o numero *cem*: Como cem é uma unidade de terceira ordem, temos que escrever o algarismo 1 na terceira casa e preencher as outras com zeros; assim:

100

Do mesmo modo escreveremos

200 — 300 — 400 — 500 — 600 — 700 — 800 — 900.

Para escrever-se o numero *trezentos e cincoenta e dois*, escreve-se o algarismo 3 na terceira casa, 5 na segunda e 2 na primeira: desta fórma:

352

Por identico motivo escreveremos os milhares assim:

1000—2000—3000—4000—5000—6000
7000—8000—9000

e as dezenas de milhares:

10000—20000—30000—40000—50000—60000
70000—80000—90000

e os milhões:

1000000—2000000—3000000—4000000—5000000—6000000
7000000—8000000—9000000, etc.

Pelo que acabamos de ver, segue-se que, da direita para a esquerda as unidades occupam a primeira casa, as dezenas — a segunda, as centenas — a terceira, as unidades de milhar — a quarta, as dezenas de milhar — a quinta, etc., ficando dispostas da fórma seguinte:

Quatrilhões	Trilhões	Bilhões	Milhões	Milhares	Unidades simples
Centenas...... 18ª »	Centenas...... 15ª »	Centenas...... 12ª »	Centenas...... 9ª »	Centenas...... 6ª »	Centenas...... 3ª »
Dezenas...... 17ª »	Dezenas...... 14ª »	Dezenas...... 11ª »	Dezenas...... 8ª »	Dezenas...... 5ª »	Dezenas...... 2ª »
Unidades...... 16ª »	Unidades...... 13ª »	Unidades...... 10ª »	Unidades...... 7ª »	Unidades...... 4ª »	Unidades...... 1ª casa

etc.

Vimos que em o numero 10 o zero faz com que o algarismo 1 occupe a segunda casa e mostre tambem que na casa em que elle está escripto não tem unidade dessa ordem.

Assim, em o numero 305, elle faz com que o 3 occupe a casa das centenas, como mostra que esse numero não contém dezena alguma.

Portanto, o *zero tem duas serventias*: uma é fazer com que um mesmo algarismo occupe todas as casas possiveis, e outra é mostrar que na casa em que se acha escripto, não ha unidade alguma.

Todo algarismo significativo tem dois valores: um chama-se *absoluto*, e outro — *relativo* ou *local*.

Valor absoluto é o que o algarismo tem pela sua fórma; assim o valor do algarismo 1 é *um*, de 2 é *dois*, de 3 é *tres*, etc.

Valor relativo ou local é o que o algarismo adquire conforme a casa, que occupa; assim o algarismo 5 na casa das unidades vale cinco, na casa das dezenas vale cincoenta, na casa das centenas vale quinhentos, etc.

O nosso systema de numeração chama-se *decimal*.

Chama-se *decimal* porque dez unidades de uma ordem formam outra de ordem immediatamente superior, e todos os numeros se escrevem com *dez* signaes.

A numeração tem dois problemas, que são: 1º, enunciado um numero, escrevel-o; 2º, estando escripto um numero, lel-o.

Escrever um numero **Regra.**—Escreve-se da esquerda para a direita, collocando-se os algarismos nas casas que forem enunciadas e pondo-se zeros nas que faltarem. Seja

o numero — *duzentos e sete trilhões quinhentos e quarenta e tres bilhões novecentos e doze mil oitocentos e seis unidades*.

2	0	7	5	4	3	0	0	0	9	1	2	8	0	6
Centenas	Dezenas	Trilhões	Centenas	Dezenas	Bilhões	Centenas	Dezenas	Milhões	Centenas	Dezenas.	Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades

Ler um numero

Regra. — Divide-se o numero em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, podendo a ultima da esquerda constar de um, dois ou tres algarismos; vê-se o nome da ultima classe, a esquerda, de onde se começa a ler, dando a cada classe o nome respectivo.

Assim, o numero

Q T B M m U
14,372,720,000,358,720

ler-se-ha: *quatorze quatrilhões trezentos e setenta e dois trilhões setecentos e vinte bilhões trezentos e cincoenta e oito mil setecentos e vinte unidades.*

Quando o numero exprime dinheiro em réis, costuma-se separar as unidades dos milhares por um cifrão ($), os milhares dos milhões por dois pontos (:), em vez de dizer-se milhões, diz-se contos.

Assim, o seguinte numero

270:324$750

ler-se-ha: *duzentos e setenta contos trezentos e vinte quatro mil setecentos e cincoenta réis.*

Exercicios

Ler os seguintes numeros:

1370890478630 — 600000078500075890458 — 630 — 8789065110006З

6:370$000 — 125:890$000 — $630 — 1$580 — 12.350:298$380 — 158$500 — 1.870:680$000

Escrever os seguintes :

Um milhão trezentos e setenta mil e oito unidades.

Cento e trinta bilhões novecentos mil e quinze unidades.

Vinte e cinco quintilhões trinta trilhões novecentos e dezoito mil e setenta unidades.

Vinte e quatro contos trezentos e cincoenta mil réis.

Mil novecentos e trinta contos e quinhentos mil réis.

Setecentos e quarenta mil réis.

Decompor um numero em suas diversas ordens de unidades

Todo o numero composto se póde decompor em suas diversas ordens de unidades.

Assim o numero

$$375427$$

póde ser decomposto do seguinte modo :

$$375427=300000+70000+5000+400+20+7$$

Um numero se póde escrever de tres maneiras differentes : por meio de letras, algarismos arabicos, e letras romanas ; ex. : quinze, 15 e XV.

Esta ultima fórma só se usa em casos especiaes, como na marcação dos capitulos de um livro, de uma lei, na enumeração dos seculos, etc.

Por isso vamos aprender a numeração romana.

NUMERAÇÃO ROMANA

Os Romanos, para representarem os numeros, empregavam as sete letras maiusculas I, V, X, L, C, D e M, cujos valores em algarismos são como segue :

1 — 5 — 10 — 50 — 100 — 500 — 1000
I — V — X — L — C — D — M

As unidades que constituem a primeira classe, são representadas da fórma seguinte :

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	unidades simples
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	dezenas
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	centenas

As unidades da segunda classe são representadas, como as da primeira, com a pequena differença de levarem as letras respectivas um traço horizontal por cima.

$\overline{I}$	$\overline{II}$	$\overline{III}$	$\overline{IV}$	$\overline{V}$	$\overline{IV}$	etc.	
1000	2000	3000	4000	5000	6000		unidades de milhar.
$\overline{X}$	$\overline{XX}$	$\overline{XXX}$	$\overline{XL}$	$\overline{L}$	$\overline{LX}$	etc.	
10000	20000	30000	40000	50000	60000		dezenas de milhar.
$\overline{C}$	$\overline{CC}$	$\overline{CCC}$	$\overline{CD}$	$\overline{D}$	$\overline{DC}$	etc.	
100000	200000	300000	400000	500000	600000		centenas de milhar.

Por anomalia, em vez de $\overline{I}$ $\overline{II}$ $\overline{III}$, costuma-se escrever M MM MMM.

Assim : $1898 = MDCCCXCVIII$

$$578634 = \overline{DLXXVIII}\ DCXXXIV$$

As unidades da terceira classe representam-se tambem como as da primeira, com dois traços parallelos por cima.

$\overline{\overline{I}}$	$\overline{\overline{II}}$	$\overline{\overline{III}}$	$\overline{\overline{IV}}$	$\overline{\overline{V}}$	$\overline{\overline{VI}}$	$\overline{\overline{VII}}$	
1000000	2000000	3000000	4000000	5000000	6000000	7000000	unidades de milhões.
$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{XX}}$	$\overline{\overline{XXX}}$	$\overline{\overline{XL}}$	$\overline{\overline{L}}$	$\overline{\overline{LX}}$		
10000000	20000000	30000000	40000000	50000000	60000000		dezenas de milhões
$\overline{\overline{C}}$	$\overline{\overline{CC}}$	$\overline{\overline{CCC}}$	$\overline{\overline{CD}}$	$\overline{\overline{D}}$	$\overline{\overline{DC}}$		
100000000	200000000	300000000	400000000	500000000	600000000		centenas de milhões.

Tambem póde-se escrever, em vez de $\overline{\overline{I}}$ $\overline{\overline{II}}$ $\overline{\overline{III}}$, etc.; $\overline{M}$ $\overline{MM}$ $\overline{MMM}$; por exemplo :

$$98459037 = \overline{\overline{XCVIII}}\ \overline{IVLIX}\ XXXVII$$

$$1325619 = \overline{MCCCXXV}\ DCXIX \text{ ou}$$

$$\overline{\overline{I}}\ \overline{CCCXXV}\ DCXIX$$

Analysando o modo simples porque se obtem a representação das differentes classes e ordens, vê-se que a numeração romana baseia-se nos seguintes principios:

1.° Um algarismo de menor valor, escripto depois de outro de valor igual ou superior, deve ser addicionado a este:

2.° Um algarismo escripto antes de outro de valor superior deve ser subtrahido deste;

3.° Tendo-se um numero, para se ter outro mil vezes maior, basta passar por cima daquelle um traço horizontal.

Exercicios

Escrever em algarismos arabicos os seguintes numeros:

$\overline{\overline{II}}\overline{CDXXVIII}DCCXXIX$ — $\overline{XXIV}DCCXCIV$ — $\overline{CCCXCV}DCIV$ — MDCCCXXXIV — CCLIX — $\overline{CCCXCV}DCXIX$ — CCCLXXVII — $\overline{CM}DCCC$ — $\overline{\overline{CLXIV}}\overline{CCCXXVIII}CXCIII$.

Escrever em algarismos romanos os seguintes numeros:

1200325 — 7546935 — 68433 — 11 — 654387970 — 35 — 1924 — 120000 — 86 — 1328960424 — 237812 — 95 — 200000 — 1000000000 — 101.

Signaes arithmeticos

Para abreviadamente se indicarem as operações da Arithmetica e as relações existentes entre dois ou mais numeros, usam-se os seguintes signaes:

De operações

$+$, que quer dizer *mais:* indica a somma;

$-$, que quer dizer *menos:* indica a subtracção;

$\times$, ou . ( ), que quer dizer *multiplicado por:* indica a multiplicação;

$\div$, ou :, que quer dizer *dividido por:* indica a divisão.

De relações

$=$, que quer dizer *igual a:* exprime igualdade;

$>$, que quer dizer *maior que* ⎫
$<$, que quer dizer *menor que* ⎭ exprimem desigualdade.

Observação. — Além destes signaes, ha ainda outros que iremos conhecendo á medida que os tivermos de usar.

OPERAÇÕES FUNDAMENTAES

ADDIÇÃO

Addicionar ou sommar é reunir o valor de dois ou mais numeros em um só.

Assim: $3+4+8=15$ é uma addição, porque foram reunidos os valores dos numeros 3, 4 e 8 em um só, que é 15.

Os numeros, que se sommam, chamam-se *addições* ou *parcellas*, e o resultado — *somma* ou *total*. No exemplo dado, os numeros 3, 4 e 8 são as parcellas, e 15 é a somma ou total.

O problema, que a addição resolve, é o seguinte: *sendo dados dois ou mais numeros, formar com elles um todo.*

Dois casos temos a considerar na addição: 1°, sommar dois ou mais numeros digitos ou um composto e outro digito; 2°, sommar dois ou mais numeros compostos.

O primeiro caso aprende-se pela taboada de sommar, que vem no principio deste livro, e o 2° caso é o que vamos estudar aqui.

Regra. — Escrevem-se as parcellas umas em baixo das outras, de sorte que as unidades da mesma ordem fiquem todas em linhas verticaes; passa-se um traço horizontal para separar as parcellas da somma ou total, e começa-se a sommar cada columna por sua vez, principiando da direita para a esquerda, tendo o cuidado de ajuntar á columna seguinte as reservas da precedente, si houver.

Exemplo

$$2715 + 365 + 2947 + 1800 + 12709$$

$$\begin{array}{cr l}
 & 2715 & \\
 & 365 & \\
\frac{7}{7} & 2947 & \text{addições ou parcellas} \\
 & 1800 & \\
 & 12709 & \\
\hline
 & 20536 & \text{somma ou total}
\end{array}$$

No exemplo acima, depois de escriptas as parcellas, segundo manda a regra, começamos a sommar da columna das unidades, que é a da direita e dizemos : 5 e 5 — dez, e sete, dezesete, e nove, vinte e seis ; escrevemos 6, e levamos dois de reserva, que juntamos á columna seguinte; passando á segunda columna, dizemos : 2 (os 2 da reserva) e um, tres, e seis, nove, e quatro, treze ; escrevemos tres e levamos 1 de reserva para a columna immediata, e assim por diante.

Provas. — Prova é um meio de verificar si o resultado da operação está certo.

Ha muitas provas, porém as mais usadas são as chamadas — *real* e dos *noves*. Destas, a mais infallivel é a *prova real*.

Prova dos noves da addição. — Tiram-se os noves das parcellas e depois da somma ; si os dois restos forem iguaes, suppõe-se a conta certa.

No exemplo precedente, tira-se a prova dos noves da seguinte fórma : dois e sete — nove, noves fóra nada, um e cinco seis e tres nove, noves fóra nada, seis e cinco onze, noves fóra dois, dois e dois quatro e quatro oito e sete quinze, noves fóra seis ; seis e um sete e dois nove, noves fóra nada, e ficam sete. Passando-se á somma, diz-se : dois e cinco sete e tres dez, noves fóra um, um e seis sete. Sendo o resto — sete —, suppõe-se que a conta está certa.

Observação. — Os noves não se sommam.

Exercicios

Effectuar as seguintes sommas :

1573985 + 3700 + 895 + 126428 + 1398525 + 5 + 98 + + 123787 + 45 = ?

384$570 + 1:570$900 + 12:858$596 + 8:500$000 + + 1.580:680$780 + 150$110 + 1$800 + 520 = ?

A Europa tem 168 milhões de habitantes, a Asia 580 milhões, a Africa 52 milhões, a America 150 milhões e a Oceania 10 milhões. Qual é a população da terra ?

Um pai distribuiu uma certa importancia pelos seus tres filhos, da seguinte fórma : Ao primeiro deu 920$500 réis, ao segundo tanto quanto ao primeiro e mais 396$825 réis e ao terceiro tanto como aos dois primeiros, mais 1:134$200 réis ; pergunta-se quanto distribuio elle e quanto coube a cada um ?

SUBTRACÇÃO

Subtrahir ou **diminuir** é achar o resto, excesso ou differença entre dois numeros.

Assim, subtrahir 4 de 7 é ver o resto, excesso ou differença entre 7 e 4, o que dá 3, isto é : 7 — 4 = 3.

O numero maior, ou aquelle de que se subtrahe, chama-se *minuendo*; o menor, ou que se subtrahe, — *subtrahendo* : e o resultado da operação — *resto*, *excesso* ou *differença*.

No exemplo acima, 7 é o minuendo, 4 é o subtrahendo, 3 é o resto, excesso ou differença. O termo mais usado é *resto*.

O problema, que a subtracção resolve, é o seguinte : *sendo dada a somma de dois numeros e um delles, achar o outro*. Por exemplo : a somma de dois numeros é 7, um delles é 3 ; quer-se saber qual é o outro. Tem-se, portanto : 7 — 3 = 4 : por conseguinte 4 e o outro numero, e de facto 4 + 3 = 7.

Dois casos ha tambem a considerar na subtracção : 1°, tirar um numero digito de outro, ou um digito de um composto ; 2.°, tirar um numero composto de outro composto.

O primeiro caso aprende-se igualmente na taboada, e o segundo pela seguinte

Regra. — Escreve-se o minuendo em baixo o subtrahendo, de sorte que as unidades fiquem embaixo das unidades, as dezenas em baixo das dezenas, etc. : depois passa-se um traço horizontal, e subtrahe-se, a começar da direita, cada algarismo do subtrahendo do seu correspondente no minuendo.

Quando o algarismo do minuendo fôr maior que o seu correspondente no subtrahendo, toma-se a differença quando fôr igual, escreve-se 0 ; e, quando fôr menor, vai-se á ordem immediata, á esquerda, toma-se uma unidade que se decompõe em unidades da ordem em que se estiver fazendo a subtracção, considerando a ordem immediata diminuida da unidade que se tirou ; si na ordem immediata estiver um zero, bem assim nas outras, vai-se onde houver unidades, considerando-se todos os zeros valendo nove.

Exemplo

Minuendo	5 0 0 2 4 9 6		
Subtrahendo	3 2 8 3 5 9 1	8	
Resto	1 7 1 8 9 0 5	8	prova dos nove
Prova real	5 0 0 2 4 9 6		

No exemplo acima, escripto o subtrahendo embaixo do minuendo, começa-se a operação da seguinte fórma: 6 menos 1 *cinco* e escreve-se 5 ; 9 menos 9, *nada* e escreve-se 0 ; 4 menos 5 não póde ser, por isso vai-se á ordem immediata, onde ha duas unidades; destas tira-se uma, que vale dez das da ordem á direita, e juntando-se ás quatro que ahi estão, tem-se 14, menos 5 *nove* ; depois tem-se 1 menos 3, o que tambem não póde ser, pelo que vai-se á casa da esquerda, e como ahi não ha unidades, nem na seguinte, vai-se á casa que as tem, isto é, onde está 5 ; tira-se uma que vale dez da immediata á direita, ahi deixa-se nove, e leva-se a outra para a casa seguinte, em que vale dez; deixa-se ainda nove, e leva-se a outra que vale dez para a casa immediata, que tem uma unidade ; a esta juntando-se as dez que vieram, tem-se 11, menos 3 *oito* ; 9 menos 8 *um* ; nove menos 2 *sete*, e 4 menos 3 *um*.

Observação. — Póde-se tambem fazer a subtracção dest'outro modo :

Quando o algarismo do minuendo fôr menor do que o seu correspondente no subtrahendo, considera-se o do minuendo augmentado de dez unidades e o seguinte do subtrahendo augmentado de uma.

O exemplo dado póde ser feito assim :

		10	10	12	14	
5	0	0	2	4	9	6
4	3	9	4			
3	2	8	3	5	9	1
1	7	1	8	9	0	5

Diz-se, portanto : 6 menos 1 *cinco*, 9 menos 9 *nada* ; como 4 menos 5 não póde ser, augmenta-se 4 de dez unidades, ficando quatorze, e considera-se

o seguinte do subtrahendo augmentado de uma unidade, isto é, 3 ficará sendo 4, effectuando-se a subtracção, tem-se 14 menos 5 *nove* ; e como 2 menos 4 tambem não póde ser, faz-se o mesmo que ficou dito e tem-se 12 menos 4 *oito* ; da mesma fórma far-se-ha 10 menos 9 *um*, 10 menos 3 *sete* e 5 menos 4 *um*.

Na pratica costuma-se proceder da seguinte maneira : 1 para 6 *cinco*, 9 para 9 *nada*, 5 para 4 não póde ser, mas 5 para 14 *nove*, vai um e tres quatro, 4 para 2 não póde ser, mas 4 para 12 *oito* ; vai um e oito nove, 9 para 10 *um* ; vai um e dois tres para 10 *sete* ; vai um e tres quatro para 5 *um*.

Prova dos noves. — Tiram-se os noves do minuendo, depois os do subtrahendo juntamente com os do resto : si as duas sobras forem iguaes, a conta se suppõe certa.

Prova real da addição. — Sommam-se as parcellas da esquerda para a direita, e á medida que se fôr obtendo a somma de uma columna, subtrahe-se da somma total ; si o resto da ultima columna fôr zero, a conta está certa.

Exemplo		Abreviadamente
4 9 2 7		4 9 2 7
3 5 2 8	ou	3 5 2 8
6 3 5 9		6 3 5 9
2 0 7 1		2 0 7 1
1 6 8 8 5		1 6 8 8 5
1 5 0 0 0		0 1 1 2 0
0 1 8 8 5		0 0 0
1 7 0 0		
0 1 8 5		
1 6 0		
0 2 5		
2 5		
0 0		

Começando a sommar da esquerda, encontra-se para a primeira columna 15 que se escreve embaixo da somma total, preenchendo-se as outras casas com zeros ; faz-se uma subtracção, tendo-se como resto 1885 ; somma-se a segunda columna, que dá 17, e feita a subtracção, tem-se 185; somma-se a terceira columna e tem-se 16; subtrahindo-se, fica de resto 25; finalmente somma-se a ultima columna que deu 25; e feita a subtracção, tem-se 0, pelo que a conta está certa.

Prova real da subtracção. — Somma-se o resto com o subtrahendo, si a somma fôr igual ao minuendo, a conta está certa.

Exercicios

$1654987 - 1421377 = ?$

$251384957 - 193495965 = ?$

$85003000620 - 49638524718 = ?$

$1000000 - 975428 = ?$

— Tendo uma pessoa nascido em 1839 em 1898 quantos annos tem?

— Em 1500 foi descoberto o Brazil, em 1889 foi proclamada a Republica; quantos annos decorreram entre as duas datas?

— Um commerciante depois de pagar as suas contas verificou ter um saldo de 12:725$000, antes do pagamento tinha elle 75:959$800, quanto pagou?

— Qual é a importancia que falta a 7:250$000 para completar 12:865$900?

— Qual é o numero que sommado com 358978 dá 1969398?

— Qual é o numero que subtrahido de 1650935 dá 1230987?

— Quer saber-se qual é o numero do qual subtrahindo se 1560693 dá 2385437?

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicação de numeros inteiros é a operação que tem por fim repetir um numero tantas vezes quantas são as unidades de outro numero dado.

Por exemplo, multiplicar 6 por 3 é repetir 6 tres vezes, assim $6 \times 3 = 6 + 6 + 6 = 18$.

Vê-se por este exemplo que a multiplicação não é mais do que um caso de sommar, pois $6 \times 3 = 6 + 6 + 6$, e $7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$, e $214 \times 4 = 214 + 214 + 214 + 214 = 856$.

O numero, que se multiplica, chama-se *multiplicando*; o numero, pelo qual se multiplica, chama-se *multiplicador*, e o resultado chama-se *producto*. Os dois primeiros, o multiplicando e multiplicador, chamam-se *factores do producto*.

No ultimo exemplo, 214 é o multiplicando, 4 é o multiplicador, e 856 é o producto.

O problema da multiplicação é o seguinte: *sendo dados dois numeros, formar com elles um producto*.

Ha tres casos na multiplicação: 1º, multiplicação de um numero simples por outro, como 3×7; 2º, de um numero composto por um simples, como 214×4; 3º, ambos os factores numeros compostos, como 214×65.

1.º CASO

O primeiro caso aprende-se pelo seguinte quadro, que é chamado tabella de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para achar-se um producto nesta tabella, procede-se da seguinte fórma, procurando-se por exemplo: o producto de 7 por 6, vai-se a primeira linha horizontal e procura-se o numero 7; nesta casa desce-se verticalmente até encontrar a linha horizontal do outro numero, que no exemplo é 6, e acha-se que o producto é 42.

Quasi nunca, porém, se recorre a esta tabella, porque os productos dos numeros digitos devem ser guardados de memoria.

2.º CASO

Regra.—Escreve-se o numero menor embaixo do maior, sublinha-se para separar os factores do producto, e multiplica-se o numero simples do multiplicador por cada algarismo do multiplicando a começar da direita, levando as reservas, se houver, a juntar ao producto do algarismo seguinte;

Multiplicando	12931
Multiplicador	8
Producto	103448

$12931 \times 8 = 103448$

3.º CASO

Regra.—Collocam-se os factores como no segundo caso; multiplica-se, a começar da direita cada um dos algarismos do multiplicador, por todo o multiplicando, tendo-se o cuidado de escrever os productos parciaes, de modo que o primeiro algarismo de cada um fique embaixo do segundo do antecedente; depois sommam-se os productos parciaes; e a somma será o producto total.

EXEMPLO

	12729
	315
Producto parcial	63645
»	12729
»	38187
Producto total	4009635

Assim, $12729 \times 315 = 4009635$

OBSERVAÇÕES. — 1.ª quando o multiplicador é um numero composto, a multiplicação tem tantos productos quantos forem os algarismos significativos do multiplicador, e estes productos chamam-se *productos parciaes.*

N. B. — O professor fará ver que, quando houver um zero intercalado no multiplicador, não é preciso fazer-se o producto desse zero pelo multiplicando, bastando afastar o seguinte producto parcial duas casas em vez de uma.

2.ª Quando um ou ambos os factores terminam em zeros, faz-se a multiplicação somente dos algarismos significativos, como si não existissem os zeros, e depois accrescentam-se ao producto tantos zeros quantos os factores tiverem.

EXEMPLOS

1º

```
  2460      3 | 0
    12      3 | 0
  ----
   492
  246
 -----
 29520
```

2º

```
   389500      7 | 0
      270      0 | 0
   ------
   27265
  7790
 ---------
 105165000
```

O producto está na razão directa dos factores. Quer isto dizer que, quanto maior for um factor, tanto maior será o producto, ou que — augmentando os factores — augmenta o producto; e diminuindo os factores, diminue tambem o producto, isto é, quanto menor fôr o factor tanto menor o producto.

N. B. — O professor ensinará quando duas quantidades se acham na razão directa ou inversa.

Prova dos noves. — Tiram-se os noves do multiplicando, e em seguida os do multiplicador, multiplicam-se os dois restos e do resultado tiram-se os noves, si este novo resto fôr igual ao que se obtiver, tirando-se os noves do producto total, a conta suppõe-se certa.

No primeiro dos ultimos exemplos, tiraram-se os noves do multiplicando e o resto foi 3; feito o mesmo ao multiplicador, o resto foi igualmente 3; multiplicados estes dois restos 3×3, o producto é 9; de 9 tirando-se 9 fica 0, e tirados os noves do producto total, fica tambem 0; pelo que suppõe-se que a conta está certa.

Quanto a prova real da multiplicação, será estudada depois da divisão.

DIVISÃO

Dividir ou repartir numeros inteiros é achar quantas vezes um numero contém outro.

Assim, dividir 12 por 4 é achar quantas vezes 4 está contido em 12; portanto:

$$12-4=8;\quad 8-4=4;\quad 4-4=0 \quad \text{ou}$$

$$\begin{array}{rl} 12 & \\ \underline{4} & \text{uma vez} \\ 8 & \\ \underline{4} & \text{duas vezes} \\ 4 & \\ \underline{4} & \text{tres vezes} \\ 0 & \end{array}$$

Conseguintemente, havendo-se tirado tres vezes o numero 4 do numero 12, aquelle está contido neste tres vezes, pelo que $12 \div 4 = 3$.

O numero que se divide, chama-se *dividendo*; o numero pelo qual se divide, *divisor*, e o resultado — *quociente*. No exemplo acima, 12 é o dividendo, 4 é o divisor e 3 é o quociente.

Nem sempre um numero se contém em outro exactamente, como por exemplo: o numero 4, que não se contém em 14

exactamente, mas acha-se nelle contido tres vezes, e sobram duas unidades, conforme pode-se ver effectuando-se a operação:

$$\begin{array}{rl} 14 & \\ \underline{4} & \text{uma vez} \\ 10 & \\ \underline{4} & \text{duas vezes} \\ 6 & \\ \underline{4} & \text{tres vezes} \\ 2 & \end{array}$$

A este numero que sobra, dá-se o nome de *resto*.

Portanto, chama-se *resto* em divisão o numero que fica por dividir. Si tivessemos 17 laranjas a dividir por 5 meninos, caberiam 3 laranjas a cada um, e sobrariam 2; 2 será pois, o resto desta divisão.

O problema da divisão é o seguinte: *Sendo dados o producto de dois factores e um delles, achar o outro.*

Exemplo:

O producto de dois factores é 24, um delles é 8; qual é o outro?

Divide-se, pois, o producto 24 pelo factor 8, o que dá 3, isto é $24 \div 8 = 3$; logo 3 é o factor que se procurava, e na verdade $3 \times 8 = 24$.

Por este exemplo vê-se que o producto vai para o dividendo, o factor dado para o divisor, e o factor que se busca é o quociente da divisão. Vê-se tambem que o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente. Si a divisão deixar resto, o dividendo será igual ao divisor multiplicado pelo quociente mais o resto.

Ha duas especies de quocientes: *completo* e *incompleto*.

Quociente completo é o que resulta de uma divisão, que não deixa resto.

Quociente incompleto ou *parte inteira do quociente* é o que resulta de uma divisão que deixa resto.

Na divisão ha tres casos:

1.º Dividir um numero menor que 90 por um numero simples, quando o quociente é simples;

2.º Dividir um numero composto por um simples;
3.º Dividir um numero por outro.

Observação — Para saber-se quando um quociente vai ser simples ou composto, accrescenta-se um zero ao divisor. Si depois disto o divisor fôr maior do que o dividendo, o quociente será simples: si permanecer menor o quociente será composto.

Por exemplo, tendo-se que dividir 72 por 9: deseja-se saber si o quociente é simples ou composto. Accrescentando um zero a 9, tendo-se 90 que, é maior do que 72, logo o quociente é simples: $72 \div 9 = 8$. Si se tiver, porém, de dividir 70 por 5, o quociente será composto, porque accrescentando-se 0 ao divisor 5, tem-se 50 que é menor que 70; assim $70 \div 5 = 14$.

1.º CASO

O primeiro caso de divisão aprende-se pela taboada, que é preciso saber de cór.

Pela tabella de Pithagoras póde-se achar os quocientes no primeiro caso, e para isto procede-se da seguinte maneira:

Querendo-se achar por exemplo, o quociente de 56 dividido por 7, vai-se á primeira linha horizontal e ahi procura-se o divisor 7; achado este desce-se verticalmente até encontrar o dividendo 56, e então vê-se a que numero corresponde na primeira linha vertical, que neste caso é 8. Si entre os productos da tabella não se encontrar o dividendo, o quociente será o numero correspondente ao immediatamente inferior ao numero dividendo, como, por exemplo, dividir 44 por 7. Descendo-se na linha de 7, não se encontra o dividendo 44, mas encontra-se o numero 42 e depois 49; portanto o quociente será o numero que corresponde a 42, isto é, 6.

2.º CASO

Regra. — Escreve-se o divisor á direita do dividendo, separados por uma linha vertical: tomam-se á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos sejam precisos para conter o divisor ao menos uma vez, e nunca mais de nove; vê-se quantas vezes elle ahi se contém (1º caso), e o resultado será o primeiro algarismo do quociente, que se escreve por

baixo do divisor, delle separado por uma linha horizontal; multiplica-se este algarismo por todo o divisor, e o producto subtrahe-se dos algarismos separados no dividendo; á direita do resto, si houver, escreve-se o algarismo seguinte do dividendo, e o numero assim formado divide-se pelo divisor; obtendo-se deste modo o segundo algarismo do quociente; com este algarismo faz-se o mesmo que com o primeiro, e assim por diante até abaixar o ultimo algarismo do dividendo. Quando, porém, o resto com o algarismo, que se juntar, não contiver o divisor nem uma vez, escreve-se um zero no quociente, baixa-se o algarismo seguinte e continua-se a operação. Quando o resto que apparecer no dividendo, fôr maior que o divisor, o quociente está errado, e portanto é preciso augmental-o. Quando o producto de um algarismo do quociente, multiplicado pelo divisor não se puder subtrahir do dividendo respectivo por ser maior do que este, o quociente está tambem errado, pois é preciso diminuil-o.

Exemplo

Dividendo	3 5'9'7'6'3'	9	Divisor
Producto que se tem de subtrahir	2 7	3 9 9 7 3	Quociente
Dividendo parcial	8 9		
	8 1		
Dividendo parcial	8 7		
	8 1		
Dividendo parcial	6 6		
	6 3		
Dividendo parcial	3 3		
	2 7		
Resto	6		

Na pratica não se costuma escrever os productos, que se tem de subtrahir.

EXEMPLO

	Dividendo	Divisor / Quociente
	359763	9
Dividendos parciaes	89	39973
	87	
	66	
	33	
Resto	6	

EXPLICAÇÃO. — Neste exemplo, separados á esquerda do dividendo os al garismos 35, vê-se quantas vezes contém o divisor 9, e achando-se que é 3, multiplica-se 3 por 9 e subtrahe-se o producto de 35. á direita do resto es creve-se o algarismo seguinte 9, formando-se o numero 89, que dividido por 9 dá 9 para o quociente: multiplica-se este 9 pelo 9 do divisor e o producto 81 subtrahe-se de 89, dando de resto 8, á direita do qual escreve-se o algarismo seguinte 7 e procede-se, como ficou dito, e assim por diante.

EXERCICIOS

Dividir..........	23	por	5
»	127	»	4
»	97	»	9
»	72	»	8
»	1587	»	6
»	156975	»	5
»	2937965	»	9
»	1358600	»	7

3.º CASO

A regra do terceiro caso é a mesma do segundo; convindo porém, observar que — sendo composto o divisor — não é facil saber-se logo quantas vezes o dividendo contém o divisor. Para este fim usa-se o seguinte processo: depois de separados á esquerda do dividendo tantos algarismos quantos sejam precisos para conter o divisor ao menos uma vez, experimenta-se a divisão do primeiro ou dos

dois primeiros algarismos do dividendo pelo primeiro do divisor, sendo o quociente achado quasi sempre o que se procura.

EXEMPLOS

Dividendo	Divisor / Quociente		Dividendo	Divisor / Quociente
93065	815		93177	261
1156	114		1487	357
3415			1827	
154			000	

Nesfe primeiro exemplo, separados tres algarismos do dividendo, experimenta-se a divisão do primeiro delles 9 pelo primeiro do divisor 8, e tem-se para quociente 1: multiplica-se 1 por 815 e o producto 815 subtrahe-se de 930, tendo-se o resto 115; forma-se novo dividendo parcial 1156 e para se achar o quociente, experimenta-se a divisão dos dois primeiros 11 por 8, visto o primeiro algarismo, que é 1, não conter o divisor nem uma vez, e procede-se da mesma fórma, para com os outros.

No outro exemplo, experimentando-se a divisão do primeiro algarismo do dividendo que é 9, pelo primeiro do divisor que é 2, tem-se 4 para quociente, mas multiplicando-se 4 por 261, vê-se que esse numero é forte, pois o producto delle pelo divisor não se póde subtrahir do dividendo 931, por isto passa-se ao numero 3, vendo-se então que elle serve.

EXERCICIOS

Dividir..........	8459635	por	125
»	1500900	»	25
»	9800000	»	372
»	12945872	»	8240

OBSERVAÇÕES. — O quociente está na razão directa do dividendo e inversa do divisor, o que quer dizer que, quanto maior fôr o divisor, tanto menor o quociente.

Ha resto na divisão, sempre que o dividendo não fôr multiplo do divisor. O resto é a differença entre o dividendo e o producto do divisor multiplicado pelo quociente.

O resto de uma divisão nunca póde ser maior que o divisor nem igual.

Divide-se um numero por 10, 100 e 1000, etc., separando-se com uma virgula á direita do numero, uma, duas, tres casas, etc. O que ficar á esquerda da virgula, será o quociente; o que ficar á direita será o resto.

EXEMPLO

	Quociente	Resto
3245 ÷ 100 =	32,	45
65723 ÷ 10000 =	6,	5723
625 ÷ 10 =	62,	5

A suppressão de igual numero de zeros á direita do dividendo e do divisor não altera o quociente.

EXEMPLOS

```
17550ØØ | 325ØØ
 1300   |------
  000   | 54

954Ø | 9Ø
054  |----
 00  | 106
```

Querendo-se saber qual é o verdadeiro resto de uma divisão, em que se supprimiram zeros ao dividendo e ao divisor, é preciso accrescentar-se ao resto achado tantos zeros quantos tiverem sido os zeros cortados no dividendo ou no divisor.

EXEMPLO

```
6542Ø | 9Ø
 24   |----
  62  | 726
   8
```

Resto achado — 8; resto verdadeiro — 80.

Completa-se o quociente de uma divisão, accrescentando-se ao quociente uma fracção, que tem para numerador o resto da divisão e para denominador o divisor. Assim, no exemplo precedente, o quociente incompleto é 726, e o completo é 726 $\frac{8}{9}$.

Prova real da multiplicação. — Tira-se a prova real da multiplicação, dividindo-se o producto total por um dos factores; si o quociente for igual ao outro factor, a conta está certa.

Provas da divisão

Prova dos noves. — Tiram-se os noves do divisor e do quociente; multiplicam-se os dois restos; ao producto junta-se o resto da divisão, si houver, depois de extrahidos os noves; tiram-se tambem os noves do dividendo; este resultado deve ser igual ao outro, si a conta estiver certa.

Prova real. — Multiplica-se o quociente pelo divisor, juntando-se ao producto o resto, si houver; si este resultado fôr igual ao dividendo, a operação está certa.

EXERCICIOS

Multiplicação e divisão

Multiplicar............	3975806	por	158
	11576300	»	250
	8935674	»	3208

— Custando 2$750 réis um metro de fazenda, quanto custarão 72?

— Um viajante anda por dia 12 kilometros, em 17 dias quantos andou?

— A luz gasta 8 minutos e 18 segundos para vir do sol a terra, quer saber-se que distancia ha entre o sol e a terra, sabendo-se que a luz anda por segundo 300.000 kilometros approximadamente.

— Quantos metros andou por dia um viajante que em 18 dias percorreu 64404 metros?

— Qual é o numero que multiplicado por 328 dá 1252350?

— Qual o numero que dividido por 1354 dá 912?

— Qual é o dividendo de uma divisão cujo divisor é 325, o quociente é 1279 e o resto é 39?

— Qual é o divisor da divisão cujo dividendo é 37298000 e o quociente 125?

— Qual é o multiplicador da multiplicação cujo producto é 275493 e o multiplicando 92

IGUALDADES E DESIGUALDADES

Chama-se igualdade a duas quantidades do mesmo valor separadas pelo signal *igual a*: ex: $3 + 7 = 10$.

Desigualdade é a expressão de duas quantidades com valores differentes e separadas pelos signaes *maior que* > ou *menor que* <, que se chamam *signaes de desigualdade*; ex: $36 > 20$; $20 > 36$; $8 + 5 > 15$.

Todas as quantidades, que ficarem á esquerda do signal de igualdade ou desigualdade, chamam-se primeiro membro, e as que ficarem á direita — segundo membro.

Os membros podem se compôr de *termos*; termos são as quantidades separadas pelos signaes *mais* ou *menos*; ex:

$$\overbrace{\overset{1^{\circ}\text{ termo}}{37} + \overset{2^{\circ}\text{ termo}}{3}}^{1^{\circ}\text{ membro}} = \overbrace{40}^{2^{\circ}\text{ dito}} \qquad \overbrace{\overset{\text{um termo só}}{65}}^{1^{\circ}\text{ membro}} = \overbrace{\overset{2\text{ termos}}{60 + 5}}^{2^{\circ}\text{ dito}}.$$

$$32 = \overbrace{8 \times 4}^{\text{um termo só}} \qquad \overbrace{63 \div 9}^{\text{um termo só}} = 7$$

Chama-se identidade uma igualdade em que os dois membros têm a mesma fórma: Ex: $8 = 8$; $26 = 26$; $7 + 12 = 7 + 12$; $4 \times 5 = 4 \times 5$; $8 \div 2 = 8 \div 2$ ou $\frac{8}{2} = \frac{8}{2}$.

Axiomas sobre as igualdades e desigualdades

1.° Sommando-se ou subtrahindo-se a ambos os termos de uma igualdade a mesma quantidade, os resultados ainda formam igualdade.

Seja, por ex: a igualdade $3 + 5 = 8$; juntando-se 2 aos dois membros, tem-se

$$3 + 5 + 2 = 8 + 2 \text{ ou } 10 = 10$$

Si, em vez de se juntar, tirar-se 2 a ambos os termos tem-se

$$3 + 5 - 2 = 8 - 2 \text{ ou } 6 = 6$$

2.° Multiplicando-se ou dividindo-se todos os termos de uma igualdade pelo mesmo numero, os resultados ainda formam igualdade.

Seja a igualdade $3 + 7 = 10$.

Multiplicando-se ambos os membros, isto é, todos os termos por 4, tem-se

$$3 \times 4 + 7 \times 4 = 10 \times 4$$

ou effectuadas as operações

$$12 + 28 = 40 \text{ ou } 40 = 40$$

Seja agora a igualdade $12 + 15 = 45 - 18$, que se tem de dividir por 3. Dividindo-se os seus termos pelo mesmo numero 3, tem-se

$$12 \div 3 + 15 \div 3 = 45 \div 3 - 18 \div 3$$

ou effectuadas as operações

$$4 + 5 = 15 - 6 \text{ ou } 9 = 9$$

Estes principios applicam-se tambem ás desigualdades.

FRACÇÕES

Fracção ou quebrado é o numero que se compõe sómente de partes da unidade.

Ha duas especies de fracções: *ordinarias e decimaes*.

Fracções ordinarias são aquellas que representam partes da unidade dividida em qualquer numero; ex.: *um terço, um sexto*, etc., nas quaes a unidade se acha dividida em *tres* e em *seis* partes.

Fracções decimaes são aquellas que representam partes da unidade dividida sómente na razão decupla, isto é, de *dez* em *dez* partes; ex.: *um decimo, cinco decimos*, etc., nas quaes a unidade se acha dividida em dez partes.

FRACÇÕES ORDINARIAS

As fracções ordinarias representam-se por dois numeros separados por um traço horizontal; ex.: $\frac{3}{4}$ $\begin{matrix}\text{numerador}\\ \text{denominador}\end{matrix}$

O numero de cima chama-se *numerador*, e o de baixo *denominador*, e ambos tem o nome commum de — *termos da fracção*.

O denominador mostra em quantas partes a unidade está dividida, e o numerador representa o numero de partes, que se toma para a fracção.

Assim na fracção $\frac{3}{4}$ o denominador 4 indica que a unidade está dividida em quatro partes, e o numerador 3 mostra que tomaram-se tres dessas partes.

Para se ter, portanto, $\frac{4}{6}$ de uma laranja, tem-se de dividil-a em seis partes, e tirar-se destas quatro.

Os termos de uma fracção representam tambem os termos de uma divisão não effectuada, em que o numerador é o dividendo, e o denominador o divisor; a fracção fica sendo o quociente dessa divisão.

Seja, por exemplo: $6 \div 8$.

Representando-se esta divisão em fórma de fracção, tem-se $\frac{6}{8}$, isto é: $6 \div 8 = \frac{6}{8}$. A fracção $\frac{6}{8}$ é o quociente da divisão.

Todas as vezes que se tiver de dividir um numero menor por outro maior, pode-se obter o quociente em forma de fracção dando-se o dividendo para numerador e o divisor para denominador.

Exemplo: dividir 24 por $36 = \frac{24}{36}$

dividir 9 por $10 = \ldots\ldots\ldots \frac{9}{10}$.

Ha duas especies de fracções ordinarias: *proprias* e *improprias*.

Fracção propria é a que tem o numerador menor que o denominador; exemplos: $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9}, \frac{8}{24}, \frac{18}{95}$

Fracção impropria ou *apparente* é aquella que tem o numerador igual ou maior que o denominador; exemplos: $\frac{2}{2}$, $\frac{8}{4}, \frac{5}{3}, \frac{9}{9}, \frac{12}{6}$, etc.

Uma fracção impropria é sempre igual a um numero inteiro ou a um numero mixto, como veremos mais adiante.

Escrever uma fracção

Regra. — Passa-se um traço horizontal, escreve-se em cima o numerador e em baixo o denominador.

Ler uma fracção

Ha tres casos na leitura de uma fracção:

1.° Si o denominador fôr 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, lê-se primeiro o numerador e em seguida o denominador, dando-se os nomes de *meios, terços, quartos, quintos, sextos, setimos, oitavos e nonos*.

2.° Si o denominador fôr a unidade seguida de zeros, como 10, 100, 1000, 10000, etc., lê-se do modo indicado, dando-se ao denominador os nomes de *decimos, centesimos, millesimos, decimos-millesimos, etc.*

3.° Si o denominador fôr outro numero qualquer lê-se tambem o numerador, e depois o denominador accrescentando-se a este a terminação *avos*.

EXEMPLOS:

1.° Caso — $\frac{3}{4}$, que se lê *tres quartos*.

2.° Caso — $\frac{2}{100}$, que se lê *dois centesimos*.

3.° Caso — $\frac{9}{25}$, que se lê *nove e vinte cinco avos*.

Extrahir os inteiros de uma fracção impropria

Toda a fracção impropria ficou dito atraz, é sempre igual a um numero inteiro ou mixto.

Vamos aprender a achar um numero inteiro ou mixto que uma fracção impropria representa.

Regra. — Para se extrahir os inteiros de uma fracção impropria, divide-se o numerador pelo denominador, o quociente representa os inteiros contidos na fracção; e o quociente completo, si houver resto na divisão, representa o numero mixto.

Exemplos:

Seja a fracção $\frac{13}{5}$, da qual se quer extrahir os inteiros.

Dividindo-se 13 por 5, o quociente é 2; portanto a fracção $\frac{13}{5}$, contém dois inteiros, e completando-se o quociente, tem-se $2\frac{3}{5}$, logo a fracção $\frac{13}{5}$ é igual ao numero mixto $2\frac{3}{5}$.

Exemplos:

$$\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3};\quad \frac{15}{5} = 3;\quad \frac{16}{2} = 8;\quad \frac{95}{12} = 7\frac{11}{12};$$

$$\frac{24}{3} = ?\quad \frac{8}{3} = ?\quad \frac{65}{8} = ?\quad \frac{327}{65} = ?$$

Reduzir um numero mixto a fracção impropria

Si se tivesse o numero mixto $2\frac{3}{5}$ para reduzir a fracção impropria, ter-se-hia que fazer o seguinte raciocinio: uma unidade tem cinco quintos, logo as duas terão duas vezes cinco quintos, isto é, dez quintos; a estes juntando-se os tres, que

formam o numero mixto, o resultado será $\frac{13}{5}$ logo, para se reduzir um numero mixto a fracção impropria, observa-se a seguinte

Regra. — Multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção e ao producto junta-se o numerador, e ao resultado que será o numerador dá-se o mesmo denominador.

Exemplo:

$$8\frac{2}{5} = \frac{8 \times 5 + 2}{5} = \frac{40 + 2}{5} = \frac{42}{5}$$

Reduzir a fracções improprias os seguintes numeros mixtos:

$$5\frac{3}{4} = ?\quad 6\frac{1}{5} = ?\quad 12\frac{9}{25} = ?\quad 7\frac{6}{8} = ?$$

$$8\frac{1}{6} = ?\quad 12\frac{5}{8} = ?\quad 68\frac{31}{142} = ?\quad 15\frac{20}{49} = ?$$

Dar a um numero inteiro a fórma de fracção impropria

Seja, por exemplo, o numero 5 ao qual se quer dar a fórma de fracção impropria com o denominador 4, isto é, quer converter-se cinco numeros inteiros a quarto. Como um inteiro tem quatro quartos, cinco inteiros terão cinco vezes quatro quartos ou vinte quartos, $\frac{20}{4}$; logo, para se converter um inteiro fracção, pratica-se a seguinte

Regra. — Multiplica-se o inteiro pelo denominador que se quizer dar, e ao resultado dá-se esse denominador.

Exemplos:

Converter 6 a nonos: $\frac{6 \times 9}{9} = \frac{54}{9}$

3 a meios: $\frac{3 \times 2}{2} = \frac{6}{2}$

5 a oitavos: $\frac{40}{8}$

Quando não se faz questão do denominador, ha outro meio mais rapido que é o seguinte: Dá-se para denominador do inteiro a unidade.

EXEMPLOS

$$8 = \frac{8}{1};\quad 6 = \frac{6}{1};\quad 12 = \frac{12}{1};\quad 27 = \frac{27}{1},\ \text{etc.}$$

Alteração das fracções

1.ª Multiplicando-se o numerador de uma fracção por um numero inteiro, sendo conservado o denominador, a fracção resultante é tantas vezes maior, quantas são as unidades do numero, pelo qual se multiplicou.

2.ª Multiplicando-se o denominador, e sendo conservado o numerador, a fracção resultante é tantas vezes menor, quantas são as unidades do numero inteiro, pelo qual se multiplicou.

3.ª Dividindo-se o numerador de uma fracção por um numero inteiro, e sendo conservado o denominador, a resultante é menor tantas vezes quantas são as unidades do numero, pelo qual se dividiu.

4.ª Dividindo-se o denominador, sendo conservado o numerador, a fracção que resulta é tantas vezes maior, quantas são as unidades do numero inteiro, pelo qual se dividiu.

Destes quatro principios segue-se que uma fracção fica multiplicada, quando se multiplica o seu numerador ou quando se divide o seu denominador; e fica dividida quando se divide o seu numerador ou quando se multiplica o seu denominador.

Portanto, uma fracção está na razão directa numerador e na inversa do denominador.

Tornar a fracção $\frac{3}{4}$ duas vezes maior: $\frac{3 \times 2}{4} = \frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$.

Tornar a fracção $\frac{8}{13}$ quatro vezes menor: $\frac{8 \div 4}{13} = \frac{2}{13}$ ou $\frac{8}{13 \times 4} = \frac{8}{52}$

EXERCICIOS:

$$\frac{2}{3} \times 4 = ?\qquad \frac{3}{5} \div 4 = ?\qquad \frac{9}{13} \div 3 = ?$$

$$\frac{12}{54} \div 4 = ?\qquad \frac{6}{35} \times 5 = ?\qquad \frac{7}{8} \times 6 = ?$$

Principio fundamental das fracções ordinarias

Os quatro principios que acabamos de estudar, se reunem em um só, que é o principio fundamental das fracções ordinarias:

Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, o valor da fracção não se altera:

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{10}{20}\qquad \frac{3}{7} = \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{6}{14}$$

$$\frac{24}{32} = \frac{24 \div 8}{32 \div 8} = \frac{3}{4}\qquad \frac{10}{20} = \frac{10 \div 10}{20 \div 20} = \frac{1}{2}$$

Transformações das fracções

As fracções podem soffrer duas transformações sem mudar de valor: a simplificação e a reducção ao mesmo denominador,

Simplificação

Quando se tem de operar sobre fracções, é muito melhor que ellas tenham termos os mais simples possiveis, ou tambem quando se quer fazer idéa do seu valor.

Assim, é mais facil fazer-se idéa do $\frac{1}{3}$ de uma laranja do que de $\frac{31}{93}$, e entretanto esta fracção tem o mesmo valor que a precedente —

$$\frac{31}{93} = \frac{1}{3}$$

Desde que se póde dividir ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, sem que ella se altere, segue-se que — para *simplificar uma fracção* — dividem-se ambos os seus termos pelo mesmo numero.

Simplificar uma fracção é, pois, *reduzil-a a termos menores sem alterar o seu valor*.

Ha dois methodos para simplificar uma fracção: o dos *divisores simples* e o do *maximo divisor commum*.

Methodo dos divisores simples

Este methodo consiste em dividir os termos da fracção successivamente por 2, 3, 5, 7, etc.

Para isto é necessario conhecer os caracteres da divisibilidade dos numeros, isto é, saber á simples vista si o numero é ou não divisivel por outro.

Chama-se *divisibilidade* a propriedade que tem certos numeros de serem exactamente divisiveis por outros. Um numero se diz que é *divisivel* por outro, quando a divisão se faz sem deixar resto.

Antes de se estudar os caracteres de divisibilidade, convém saber se — o que é um numero — *multiplo*, *submultiplo* e *primo*.

Multiplo de um numero é o producto desse numero multiplicado por outro qualquer numero inteiro maior que 1. Assim, 30 é um multiplo de 6, por que é o producto de 6 multiplicado por 5.

Um producto é *multiplo* de qualquer dos seus factores. Assim, 42 é *multiplo* de 2. 3 e 7, porque $2 \times 3 \times 7 = 42$.

Submultiplo ou **factor** é o numero, que multiplicado por outro numero inteiro, produz o multiplo. Assim, 6 e 5 são submultiplos ou factores de 30, porque $6 \times 5 = 30$; do mesmo modo 2, 3 e 7 são submultiplos ou factores de 42. Os factores de um producto são submultiplos delle.

Todo o multiplo é sempre exactamente divisivel pelos seus factores ou submultiplos; dahi—o chamar-se tambem um numero submultiplo; dahi —*divisor* ou *parte aliquota*.

Isto posto, póde-se definir do seguinte modo:

Submultiplo, factor, divisor ou *parte aliquota* de um numero inteiro é todo o numero, que dividir exactamente esse numero inteiro.

Numero primo é o que só é divisivel por si mesmo e pela unidade. Assim, 11 é numero primo porque só tem por divisor a si e a unidade.

Pela mesma razão 1, 3, 5, 7, 13, 17, 23, etc., são numeros primos.

Eis a lista dos numeros primos, de 1 a 101 ·

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 e 101.

Caracteres de divisibilidade

1.º Um numero é divisivel por 2, quando é par; por ex.: 16, 30, 128, etc.

2.º Um numero é divisivel por 3, quando a somma dos valores absolutos de seus algarismos der 3 ou multiplo de 3. Assim, o numero 396 é divisivel por 3, porque a somma de seus algarismos ($3 + 9 + 6 = 18$) é multiplo de 3 : ($18 = 3 \times 6$)

$$\begin{array}{r|l} 396 & 3 \\ \cline{2-2} 09 & 132 \\ 06 & \\ 0 & \end{array}$$

3.º Um numero é divisivel por 4, quando o algarismo das unidades mais o dobro do das dezenas der zero, 4 ou multiplo de 4. Assim, o numero 1316 é divisivel por 4, porque o algarismo das unidades mais o dobro do das dezenas $6 + 2 \times 1 = 6 + 2 = 8$, dá 8 que é multiplo de 4, isto é, 4×2

$$\begin{array}{r|l} 1316 & 4 \\ \cline{2-2} 11 & 329 \\ 36 & \\ 0 & \end{array}$$

4.º Um numero é divisivel por 5, quando terminar em 0 ou 5. Assim, os numeros 230 e 1425 são divisiveis por 5.

$$\begin{array}{r|l} 230 & 5 \\ \cline{2-2} 30 & 46 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1425 & 5 \\ \cline{2-2} 42 & 285 \\ 25 & \\ 0 & \end{array}$$

5.º Um numero é divisivel por 6, quando fôr par e a somma dos valores absolutos de seus algarismos fôr 3 ou multiplo de 3. Assim, o numero 450 é divisivel por 6, pois é par e a somma de seus algarismos absolutos dá 9, que é multiplo de 3.

$$\begin{array}{r|l} 450 & 6 \\ \cline{2-2} 30 & 75 \\ 0 & \end{array}$$

Observação.—Para se ver si um numero é divisivel ou não por 7, é preferivel experimentar a divisão, do que empregar o caracter, que nos conduz a operação mais trabalhosa.

6.º Para um numero ser divisivel por 8 é preciso que o algarismo das unidades mais o dobro do das dezenas mais quatro vezes o das centenas dê zero, 8 ou multiplo de 8. O numero 14312 é, pois, divisivel por 8, porque o algarismo das unidades.... 2

mais o dobro do das dezenas.......................... $2 \times 1 = 2$

mais quatro vezes o das centenas................ $4 \times 3 = 12$

16

dá um multiplo de 8, isto é 2×8.

$$\begin{array}{r|l} 14312 & 8 \\ \cline{2-2} 63 & 1789 \\ 71 & \\ 72 & \\ 0 & \end{array}$$

7.º Para que um numero seja divisivel por 9, é preciso que a somma dos valores absolutos de seus algarismos dê 9 ou multiplo de 9. O numero 972 é divisivel por 9, porque a somma de seus algarismos dá 18 que é um multiplo de 9 ; isto é :

$$9 + 7 + 2 = 18.$$

$$\begin{array}{r|l} 972 & 9 \\ \cline{2-2} 072 & 108 \\ 0 & \end{array}$$

8.º Para um numero ser divisivel por 10, é preciso que termine em zero ; ex : 510, 250, etc.

9.º Para um numero ser divisivel por 11, é preciso que a somma dos algarismos das casas impares menos a somma dos algarismos das casas pares dê *zero*, 11 ou multiplo de 11. O numero 5764 é divisivel por 11, porque a somma dos algarismos das casas impares (1^a e 3^a) menos a somma dos algarismos das casas pares (2^a e 4^a) dá 0.

$$\begin{array}{ll} \text{Casas impares,} & 4 + 7 = 11 \\ \text{Casas pares,} & 6 + 5 = 11 \\ \hline & \quad\quad\; 00 \end{array}$$

Tambem, o numero 13607 é divisivel por 11, porque a somma dos algarismos das casas impares $1 + 6 + 7 = 14$ menos a dos algarismos das casas pares $0 + 3 = 3$ dá 11 $\quad \overline{11}$

$$\begin{array}{r|l} 13607 & 11 \\ \cline{2-2} 26 & 1237 \\ 40 & \\ 77 & \\ 00 & \end{array}$$

Observação.—Quando a somma dos algarismos das casas pares fôr maior do que a somma dos das casas impares, para se poder fazer a subtracção, junta-se a somma menor, 11 ou um multiplo de 11.

Exemplo: 548691

$$\begin{array}{cc} \text{Casas impares} & \text{Casas pares} \\ 1 & 9 \\ 6 & 8 \\ 4 & 5 \\ \hline 11 & 22 \end{array}$$

Não podendo ser 11 menos 22 addiciona-se 11 ao numero menor, e tem-se $11 + 11 = 22$. Effectuando a subtracção temos $22 - 22 = 0$; portanto o numero 548691 é divisivel por 11.

$$\begin{array}{r|l} 548691 & 11 \\ \cline{2-2} 108 & 49881 \\ 096 & \\ 089 & \\ 011 & \\ 00 & \end{array}$$

10. Para um numero ser divisivel por 25, é necessario que os dois ultimos algarismos da direita

formem um numero divisivel por 25; exemplos: 3425, 2150, etc.

11. Para um numero ser divisivel por 125, é necessario que os tres ultimos algarismos da direita formem um numero divisivel por 125, como: 6125, 19250, etc.

Conhecidos os caracteres de divisibilidade, vamos simplificar a fracção $\frac{1080}{1440}$.

$$\frac{1080}{1440} = \frac{540}{720} = \frac{270}{360} = \frac{135}{180} = \frac{45}{60} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Examinando-se os termos da fracção, vê-se que ambos são divisiveis por 2; feita a divisão, tem-se $\frac{540}{720}$, cujos termos ainda são divisiveis por 2: effectuada a divisão, tem-se a fracção resultante $\frac{270}{360}$, cujos termos igualmente se dividem por 2, dando a fracção $\frac{135}{180}$. Não sendo os termos desta divisiveis por 2, e sim por 3, faz-se a divisão delles por este ultimo numero tendo-se a fracção $\frac{45}{60}$, cujos termos são ainda divisiveis por 3, pelo que — operada a divisão — tem-se $\frac{15}{20}$. Deixando esta fracção de ser divisivel por 3 mas sendo por 5, faz-se a divisão e resulta a fracção $\frac{3}{4}$, que representa a expressão mais simples da fracção dada.

Exercicios para simplificar

$$\frac{24}{96},\ \frac{27}{153},\ \frac{1936}{9812},\ \frac{3270}{4320},\ \frac{3525}{49215},\ \frac{4260}{7455},\ \frac{13585}{27690},\ \frac{272611}{393917}$$

Methodo do maximo commum divisor

Divisor commum é um numero, que divide exactamente dois ou mais outros numeros, como por ex.; 3, que é divisor commum de 6, 9, 12 e 24.

Maximo divisor commum é o *maior numero* que divide exactamente dois ou mais outros numeros. Assim, o maximo divisor commum dos numeros 12, 24, 36 é o numero 12. Aquelles tres numeros tem outros divisores communs, como: 2, 3, 4, 6 e 12, porém o maior delles, isto é, o *maximo* é o numero 12.

Para se achar o *maximo divisor commum* entre dois numeros, procede-se da seguinte fórma:

Regra.—Divide-se o numero maior pelo menor; si a divisão fôr exacta, o menor será o maximo commum divisor; si houver resto, divide-se o menor pelo primeiro resto, o primeiro resto pelo segundo, o segundo pelo terceiro, etc., até chegar-se a uma divisão, cujo resto, seja 0 ou 1. Si o resto fôr zero, o ultimo divisor será o maximo commum divisor; si fôr 1, os numeros são primos entre si, e só tem por divisor commum a unidade.

Seja, por ex.: procurar o maximo commum divisor dos numeros 936 e 684.

Quocientes		1	2	1	2	2	
Divisores	936	684	252	180	72	36	maximo
Restos	252	180	72	36	00		commum divisor

O maximo commum divisor procurado é, portanto, 36:

936	36
216	26
000	

684	36
324	19
000	

Para simplificar-se uma fracção por meio do maximo commum divisor, *dividem-se ambos os termos da fracção pelo seu maximo commum divisor; a fracção resultante será a primeira reduzida á sua expressão mais simples.*

Exemplos: Sejam as fracções $\frac{1080}{1440}$ e $\frac{65}{230}$, que se deseja simplificar.

Procurando-se o maximo divisor commum entre os dois termos da primeira, tem-se 360, e querendo-se o mesmo com relação á segunda tem-se o numero 5, como se vê do que segue:

	1	3
1440	1080	360
360	000	0

	3	1	1	6
230	65	35	30	5
35	30	05	0	

Dividindo-se agora ambos os termos de cada uma dessas fracções, pelo respectivo maximo commum divisor tem-se

$$\frac{1080}{1440} = \frac{3}{4} \qquad \frac{65}{230} = \frac{13}{46}$$

Exercicios

Simplificar pelo methodo do M. C. D. as seguintes fracções:

$$\frac{360}{591} = ? \quad \frac{415380}{825220} = ? \quad \frac{350}{9075} = ? \quad \frac{954}{4344} = ?$$

$$\frac{756}{6435} = ? \quad \frac{1365}{3185} = ? \quad \frac{224}{397} = ?$$

Simplificar as mesmas fracções pelo outro methodo.

Observações. — Dois ou mais mais numeros, que só tem por maximo commum divisor a unidade, chamam-se *numeros primos entre si.*

As fracções, cujos termos são numeros primos entre si, chamam-se *irreductiveis*, isto é, não podem ser simplificadas.

Assim, toda a fracção — depois de reduzida a sua expressão mais simples — é *irreductivel*:

Reducção de fracções ao mesmo denominador

Quando se tem de sommar ou subtrahir fracções, é necessario que ellas tenham o mesmo denominador; porque — não sendo o mesmo denominador — são quantidades differentes ou *heterogeneas*, e já sabemos que só se podem sommar ou subtrahir quantidades *homogeneas* ou da mesma especie.

Assim, não se póde sommar $\frac{2}{3}$ com $\frac{3}{8}$, porque *terços* e *oitavos* são de especies differentes; porém, si multiplicarem-se ambos os termos da primeira pelo denominador da segunda, (o que não altera o seu valor), e bem assim ambos os termos da segunda pelo denominador da primeira, as duas ficam com o mesmo denominador, e sendo então quantidades homogeneas podem-se sommar.

Portanto, tem-se

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} + \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{25}{24}.$$

Si se tiver tambem de comparar o valor de duas ou mais fracções, só se poderá fazel-o com segurança, si ellas tiverem o mesmo denominador ou o mesmo numerador.

Assim, si se quizer saber qual das duas fracções $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{5}$ é a maior, é preciso — para se responder com segurança — reduzil-as ao mesmo denominador. EXEMPLO :

$$\frac{3}{8},\ \frac{2}{5},= \frac{3 \times 5}{8 \times 5},\ \frac{2 \times 8}{5 \times 8}, = \frac{15}{40},\ \frac{16}{40}$$

Feito o que, pode-se dizer que *dezeseis e quarenta avos* é maior que *quinze e quarenta avos*, isto é :

$$\frac{16}{40} > \frac{15}{40} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{5} > \frac{3}{8}$$

Portanto, reduzem-se fracções ao mesmo denominador para se poder *sommal-as*, *subtrahil-as* ou *comparal-as*.

Reduzir fracções ao mesmo denominador é transformal-as em outras, que tenham o mesmo denominador, sem alterar o seu valor.

Ha dois methodos para reduzir fracções ao mesmo denominador.

1.º METHODO

O primeiro methodo, que se póde chamar methodo geral, tem a grande vantagem de reduzir as fracções ao *minimo denominador commum*; porém, para se empregar este processo, é preciso saber achar o *minimo multiplo commum* de dois ou mais numeros.

Minimo multiplo commum

Multiplo commum de dois ou mais numeros é todo o numero, que fôr exactamente divisivel por esses dois ou mais numeros. Assim 36 é multiplo commum de 2, 3, 4, 6 e 9, porque é divisivel por 2, 3, 4, 6 e 9; 45 é multiplo commum de 5 e 9, porque é divisivel por 5 e 9.

Minimo ou *menor multiplo commum* de dois ou mais numeros é o menor numero exactamente divisivel por esses outros numeros. O numero 36 é multiplo commum de 2 e 3, porém não é o *minimo*; o minimo multiplo commum de 2 e 3 é 6.

Dois ou mais numeros podem ter uma infinidade de *multiplos communs*, mas só tem um *minimo multiplo*.

Póde-se tambem definir, e esta definição é preferivel, o multiplo commum de dois ou mais numeros — *um outro numero que contem aquelles como factores*. Assim, 36 é multiplo de 2 e 3 porque os contém como factores : $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$. *Minimo multiplo commum* de dois ou mais numeros é o menor numero que contenha aquelles como factores : — $6 = 2 \times 3$.

Para achar-se o *minimo multiplo commum* de dois ou mais numeros, procede-se da maneira seguinte :

Regra. — Escrevem-se todos os numeros em linha, separados por virgulas, e sublinha-se; acha-se o menor divisor primo, que divida exactamente ao menos um desses numeros e escreve-se á direita;

depois dividem-se por elle todos os numeros, que forem divisiveis, escrevendo-se por baixo de cada um o respectivo quociente, e bem assim os numeros que não forem por elle divisiveis. Esta nova linha torna-se a dividir pelo menor numero, que divida ao menos um delles e assim por diante até que não haja nos quocientes senão o algarismo 1. Formando-se depois o producto de todos os divisores, que foram escriptos á direita dos numeros, tem-se o minimo multiplo commum.

Observação. — Quando todos os numeros são primos entre si, o seu menor multiplo é formado do producto de todos elles. Assim, o menor multiplo commum de 5, 3, 2 é $5 \times 3 \times 2 = 30$.

Seja, agora, procurar o minimo multiplo commum de 21, 45 e 14.

Applicando-se a regra acima exposta, tem-se:

21,	45,	14	2
21,	45,	7	3
7,	15,	7	3
7,	5,	7	5
7,	1,	7	7
1,	1,	1	

Minimo multiplo commum
$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

Outro exemplo

8,	12,	20	2
4,	6,	10	2
2,	3,	5	2
1,	3,	5	3
1,	1,	5	5
1,	1,	1	

Minimo multiplo commum
$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$

Exercicios

Achar o m. m. c. dos seguintes numeros:
99, 66 e 462. 28, 16, 44 e 30. 66, 36, 210 e 600.

Applicação do minimo multiplo commum

Agora, que já se sabe achar o minimo multiplo commum, pode-se aprender a reduzir fracções ao mesmo denominador.

Para isto observa-se a seguinte

Regra. — Procura-se o minimo multiplo commum de todos os denominadores das fracções dadas; achado aquelle, divide-se por todos os denominadores e os quocientes vão-se multiplicando por ambos os termos de cada fracção.

Sejam as seguintes fracções para reduzir ao mesmo denominador:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$$

Procurando-se o menor multiplo commum dos denominadores

3,	6,	8.	12	2
3,	3,	4,	6	2
3,	3,	2.	3	2
3,	3,	1,	3	3
1,	1,	1,	1	

m. m. c $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 =$ [illegible]

Assim, o minimo multiplo commum é $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

Dividindo-se este menor multiplo commum pelos denominadores, tem-se os seguintes quocientes:

$$24 \div 3 = 8;\ 24 \div 6 = 4;\ 24 \div 8 = 3;\ 24 \div 12 = 2$$

Escripto por cima de cada fracção o quociente respectivo da fórma seguinte:

$$\overset{8}{\frac{1}{3}},\ \overset{4}{\frac{5}{6}},\ \overset{3}{\frac{3}{8}},\ \overset{2}{\frac{7}{12}}$$

e effectuadas as multiplicações, tem-se o seguinte resultado final:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}, = \frac{1 \times 8}{3 \times 8}, \frac{5 \times 4}{6 \times 4}, \frac{3 \times 3}{8 \times 3}$$

$$\frac{7 \times 2}{12 \times 2}, = \frac{8}{24}, \frac{20}{24}, \frac{9}{24}, \frac{14}{24}$$

Conseguintemente as fracções ficaram com os mesmos denominadores, e sem alteração em seus valores, porque os seus termos foram multiplicados pelo mesmo numero,

EXERCICIOS

Reduzir as seguintes fracções ao mesmo denominador:

$$\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{4}{15} = ?$$

$$\frac{1}{7}, \frac{3}{6}, \frac{2}{9} = ?$$

$$\frac{3}{8}, \frac{7}{10}, \frac{2}{15}, \frac{11}{18} = ?$$

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3} = ?$$

$$\frac{5}{17}, \frac{9}{34}, \frac{55}{68} = ?$$

2.° METHODO

Este methodo tem na maioria dos casos o inconveniente de dar ás fracções termos muito compostos.

Quando forem duas fracções, faz-se do seguinte modo:

Regra. — Multiplicam-se ambos os termos de cada uma pelo denominador da outra.

EXEMPLO:

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{7}, = \frac{1 \times 7}{4 \times 7}, \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{7}{28}, \frac{20}{28}$$

Por este processo reduzir as fracções que seguem:

$$\frac{7}{15}, \frac{12}{20}; \frac{1}{8}, \frac{3}{5}; \frac{6}{9}, \frac{3}{10}; \frac{8}{11}, \frac{9}{12}$$

Sendo mais de duas fracções

Regra. — Multiplicam-se ambos os termos de cada uma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

EXEMPLO

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} = \frac{1 \times 7 \times 4 \times 8}{5 \times 7 \times 4 \times 8}, \frac{2 \times 5 \times 4 \times 8}{7 \times 5 \times 4 \times 8},$$

$$\frac{3 \times 5 \times 7 \times 8}{4 \times 5 \times 7 \times 8}, \frac{7 \times 5 \times 7 \times 4}{8 \times 5 \times 7 \times 4} = \frac{224}{1120}, \frac{320}{1120}$$

$$\frac{840}{1120}, \frac{980}{1120}$$

Dissemos que este methodo tem o inconveniente de, na maioria dos casos, dar ás fracções termos muito compostos.

Para proval-o, basta reduzir ao mesmo denominador, por este methodo, as fracções $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$, as quaes pelo methodo chamado geral, o primeiro, deram o seguinte:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12} = \frac{8}{24}, \frac{20}{24}, \frac{9}{24}, \frac{14}{24}$$

Applicando, porém, o segundo methodo, ter-se-ha:

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12} = \frac{1 \times 6 \times 8 \times 12}{3 \times 6 \times 8 \times 12}, \frac{5 \times 3 \times 8 \times 12}{6 \times 3 \times 8 \times 12},$$

$$\frac{3 \times 3 \times 6 \times 12}{8 \times 3 \times 6 \times 12}, \frac{7 \times 3 \times 6 \times 8}{12 \times 3 \times 6 \times 8} = \frac{576}{1728}, \frac{1440}{1723},$$

$$\frac{648}{1728}, \frac{1008}{1728}$$

Vê-se, portanto, que o segundo methodo de reduzir fracções ao mesmo denominador conduziu-nos a fracções de termos mais compostos, do que o primeiro.

EXERCICIOS

Reduzir ao mesmo denominador pelo 2º methodo as seguintes fracções

$\frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{8}{13} = ?$ $\frac{6}{15}, \frac{3}{12}, \frac{9}{10}, \frac{4}{50} = ?$

$\frac{5}{36}, \frac{2}{8}, \frac{3}{45}, \frac{2}{18} = ?$ $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{13}, \frac{5}{17} = ?$

$\frac{12}{150}, \frac{35}{45}, \frac{12}{270} = ?$ $\frac{7}{28}, \frac{6}{21}, \frac{3}{360}, \frac{12}{90} = ?$

Reduzir estas mesmas fracções pelo 1º methodo.

Reducção de fracção ao mesmo numerador

Já vimos que, para comparar o valor de duas ou mais fraccoes, era preciso que ellas tivessem o mesmo *denominador* ou o mesmo *numerador*; por isso vamos aprender a reduzir fracções ao mesmo numerador.

Regra. — Para reduzir-se duas fracções ao mesmo numerador, multiplicam-se, ambos os termos de cada uma pelo numerador da outra.

Assim:

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3}, \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{6}{15}, \frac{6}{14}$$

Sendo mais de duas fracções:

Regra. — Multiplicam-se ambos os termos de cada uma por todos os numeradores das outras.

EXEMPLO

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 5 \times 3}{4 \times 2 \times 5 \times 3}, \frac{2 \times 1 \times 5 \times 3}{3 \times 1 \times 5 \times 3},$$
$$\frac{5 \times 1 \times 2 \times 3}{7 \times 1 \times 2 \times 3}, \frac{3 \times 1 \times 2 \times 5}{4 \times 1 \times 2 \times 5} =$$
$$= \frac{30}{120}, \frac{30}{45}, \frac{30}{42}, \frac{30}{40}$$

De duas ou mais fracções, que tenham o mesmo numerador, é **maior** aquella que tiver *menor denominador*. Assim, das quatro ultimas fracções a maior é $\frac{30}{40}$.

EXERCICIOS

Reduzir as seguintes fracções ao mesmo numerador:

$\frac{2}{3}, \frac{5}{8} = ?$ $\frac{3}{7}, \frac{2}{10}, \frac{4}{9} = ?$ $\frac{5}{16}, \frac{26}{115} = ?$

$\frac{9}{12}, \frac{3}{50}, \frac{8}{9} = ?$ $\frac{2}{4}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9}, \frac{5}{3} = ?$

Comparar as seguintes fracções:

$\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{9}$ e $\frac{5}{4}$ $\frac{8}{90}$ e $\frac{37}{236}$ $\frac{24}{35}$ e $\frac{18}{159}$

Collocar em ordem crescente as seguintes fracções:

$\frac{7}{8}, \frac{9}{11}, \frac{17}{19}$. $\frac{7}{11}, \frac{12}{19}, \frac{23}{36}, \frac{32}{41}, \frac{27}{35}$

OPERAÇÕES SOBRE AS FRACÇÕES ORDINARIAS

Addição

A addição de fracções tem por fim reunir valor de duas ou mais fracções em uma só.

Ha tres casos que estudar na addição de fracções:

1.º *Sommar duas ou mais fracções;*

2.º *Sommar um numero inteiro com fracções e* **vice-versa**;

3.º *Sommar numeros mixtos ou mixtos e fracções.*

1.° CASO

Regra geral. — Sommam-se duas ou mais fracções sommando os numeradores e dando á somma o denominador commum.

Desta regra se vê que é preciso que as fracções tenham o mesmo denominador; pelo que, quando ellas não o tiverem reduzem-se ao mesmo denominador antes de sommal-as.

Sejam as fracções $\frac{2}{6} + \frac{5}{6}$, que tem-se de sommar.

Tendo estas duas fracções o mesmo denominador, faz-se conforme a regra, como segue:

$$\frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6} = 1\ \frac{1}{6}$$

Observação.—Toda a vez que a somma der uma fracção impropria, é conveniente extrahir os inteiros, como se fez com a fracção $\frac{7}{6}$ que deu $1\ \frac{1}{6}$. Tambem se deverá simplifical-a, quando a fracção fôr reductivel.

Outros exemplos

$$\frac{6}{13} + \frac{4}{13} + \frac{9}{13} + \frac{8}{13} = \frac{6+4+9+8}{13} =$$

$$= \frac{27}{13} = 2\,\frac{1}{13}$$

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{10}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2\,\frac{1}{4}$$

6, 3, 4	2
3, 3, 2	2
3, 3, 1	3
1, 1, 1	

Como as fracções não tinham o mesmo denominador, reduzimol-as, empregando o processo do minimo multiplo commum. Sommada então deram a fracção $\frac{27}{12}$, que sendo reductivel foi simplificada dando a fracção $\frac{9}{4}$, da qual — extrahidos os inteiros — resultou $2\frac{1}{4}$.

2.° CASO

Este caso é o mesmo que converter um numero mixto a fracção impropria. Assim, $3 + \frac{2}{4}$ é o mesmo que $3\ \frac{2}{4}$.

Como já vimos, *multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção e junta-se o numerador, dando ao resultado o mesmo denominador*.

Exemplos

$$3 + \frac{2}{4} = \frac{3 \times 4 + 2}{4} = \frac{14}{4} = 3\ \frac{2}{4}$$

$$\frac{3}{8} + 5 = \frac{5 \times 8 + 3}{8} = \frac{43}{8} = 5\ \frac{3}{8}$$

3.° CASO

Regra. — Convertem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e pratica-se a regra do primeiro caso.

Exemplos

$$6\ \frac{1}{3} + 5\ \frac{3}{4} = \frac{6 \times 3 + 1}{3} + \frac{5 \times 4 + 3}{4} = \frac{19}{3} + \frac{23}{4} =$$

$$= \frac{19 \times 4}{3 \times 4} + \frac{23 \times 3}{4 \times 3} = \frac{76}{12} + \frac{69}{12} = \frac{145}{12} = 12\ \frac{1}{12}$$

$$3\ \frac{1}{4} + \frac{6}{8} + 2\ \frac{1}{3} + 4\ \frac{2}{2} = \frac{13}{4} + \frac{6}{8} + \frac{7}{3} + \frac{10}{2} =$$

$$= \frac{78}{24} + \frac{18}{24} + \frac{56}{24} + \frac{120}{24} = \frac{272}{24} = \frac{136}{12} =$$

$$= \frac{68}{6} = \frac{34}{3} = 11\ \frac{1}{3}$$

Observação.—Pode-se tambem sommar os numeros inteiros, e depois as fracções em separado, e juntar os resultados, mas é preferivel aos principiantes o methodo que empregamos.

Exercicios

Effectuar as sommas seguintes :

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}=?$$

$$\frac{1}{5}+6=\ldots\ldots?$$

$$\frac{12}{16}+8\,\frac{5}{3}+7=?$$

$$\frac{1}{5}+\frac{9}{10}+\frac{12}{24}=?$$

$$6+\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=?$$

$$12\,\frac{5}{8}+18\,\frac{31}{32}=?$$

I — Uma pessoa comprou 3 retalhos de fazenda: um tinha $\frac{1}{3}$, outro $\frac{2}{7}$ e o ultimo $1\,\frac{2}{3}$ do metro, quantos metros de fazenda comprou a pessoa ?

II — Um viajante no 1° dia andou $\frac{1}{5}$, no 2° $\frac{1}{4}$, no 3° $\frac{3}{7}$ e no 4° $\frac{2}{9}$ do caminho. Pergunta-se que porção do caminho andou nos 4 dias?

III — Um trabalhador em um dia fez um aterro de 2 metros cubicos e $\frac{1}{3}$, e no 2° $3\,\frac{2}{4}$ e no 3° e ultimo $5\,\frac{1}{6}$; pergunta-se quantos metros cubicos de aterro foram feitos nos 3 dias ?

Subtracção

A subtracção de fracções tem por fim tirar uma fracção de outra.

Tres casos tambem ha que estudar na subtracção de fracções :

1.° Subtrahir uma fracção de outra ;

2.° Subtrahir uma fracção de um numero inteiro ;

3.° Subtrahir numeros mixtos.

1.° CASO

Regra. — Para subtrahir uma fracção de outra toma-se a differença entre os numeradores, e ao resultado dá-se o denominador commum.

Como para addição, quando as fracções não tiverem o mesmo denominador, será necessario reduzil-as.

Exemplos

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4} \qquad \frac{8}{15}-\frac{3}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{10}-\frac{3}{7}=\frac{56}{70}-\frac{30}{70}=\frac{26}{70}=\frac{13}{35}$$

2.° CASO

Regra. — Para se subtrahir uma fracção de um numero inteiro, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e do producto subtrahe-se o numerador, dando ao resultado o mesmo denominador.

Exemplos

$$4-\frac{2}{5}=\frac{4\times5-2}{5}=\frac{20-2}{5}=\frac{18}{5}=3\,\frac{3}{5}$$

$$6-\frac{3}{10}=\frac{6\times10-3}{10}=\frac{57}{10}=5\,\frac{7}{10}$$

$$18-\frac{4}{9}=\frac{158}{9}=17\,\frac{5}{9}$$

3.° CASO

Regra. — Para se subtrahir um numero mixto de outro, reduzem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e pratica-se a regra de subtrahir fracções.

Exemplos

$$3\,\frac{1}{4}-2\,\frac{2}{4}=\frac{13}{4}-\frac{10}{4}=\frac{3}{4}$$

$$2\,\frac{3}{5}-1\,\frac{3}{7}=\frac{13}{5}-\frac{10}{7}=\frac{91}{35}-\frac{50}{35}=\frac{41}{35}=1\,\frac{6}{35}$$

$$8\,\frac{11}{16}-\frac{4}{10}=\frac{139}{16}-\frac{4}{10}=\frac{695}{80}-\frac{32}{80}=\frac{663}{80}=8\,\frac{23}{80}$$

EXERCICIOS

Effectuar-se as seguintes subtracções:

$\frac{1}{8} - \frac{2}{15} = ?$

$8 - \frac{3}{7} = ?$

$\frac{1}{4} - \frac{2}{13} + 1\frac{1}{5} + 6 = ?$

$2\frac{5}{3} - 1\frac{2}{5} = ?$

$\frac{4}{6} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} = ?$

$1\frac{1}{3} - \frac{2}{4} = ?$

$12 - \left(\frac{8}{10} + \frac{1}{3}\right) = ?$

$3\frac{2}{3} + 5 - \frac{12}{18} = ?$

I — Um vaso cheio de agua pesa 1 kilo e $\frac{1}{5}$, vasio pesa $\frac{1}{3}$ de kilo, qual era o peso da agua contida?

II — De uma peça de fazenda tirou-se $\frac{1}{5}$ mais $\frac{2}{7}$, quanto resta?

III — De 150 laranjas tirou-se 12 $\frac{1}{4}$, mais 20 $\frac{7}{32}$, mais 15 $\frac{12}{60}$, quantas ficaram?

Multiplicação

A multiplicação de fracções é a operação, que tem por fim achar um numero chamado *producto*, que seja do multiplicando o que o multiplicador fôr da unidade.

Tem-se tres casos a considerar:

1.° *Multiplicar uma fracção por outra;*

2.° *Multiplicar um inteiro por fracção ou* **vice-versa**;

3.° *Multiplicar numeros mixtos.*

1.° CASO

Regra. — Multiplica-se uma fracção por outra, multiplicando-se os numeradores entre si, e da mesma sorte os denominadores.

EXEMPLOS

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\ \frac{2 \times 3}{5 \times 7} = \frac{6}{35} \qquad \frac{2}{8} + \frac{7}{9} = \frac{14}{72} = \frac{7}{66}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$$

OBSERVAÇÃO. — Quando o numerador de uma fracção fôr igual a algum dos denominadores, cancella-se esse numero em ambos os termos; e os que ficarem, representarão o producto.

EXEMPLOS

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{\cancel{5}}{8} \times \frac{3}{\cancel{5}} = \frac{3}{8} \qquad \frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{3}$$

2.° CASO

Regra. — Multiplica-se uma fracção por um inteiro ou um inteiro por uma fracção, multiplicando-se o inteiro pelo numerador da fracção, e dando-se ao resultado o mesmo denominador.

EXEMPLOS

$$6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5} \qquad \frac{3}{7} \times 4 = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$$

$$5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} \qquad \frac{8}{10} \times 9 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = 7\frac{1}{5}$$

Quando o denominador fôr divisivel pelo inteiro, pode-se fazer a multiplicação do modo seguinte:

Regra especial. — Divide-se o denominador da fracção pelo inteiro e conserva-se o mesmo numerador.

EXEMPLO

$$3 \times \frac{2}{6} = \frac{2}{6 \div 3} = \frac{2}{2} = 1$$

Pela primeira regra, tinha-se $3 \times \frac{2}{6} = \frac{3 \times 2}{6} = \frac{6}{6} = 1$; resultado igual ao outro.

$$\frac{5}{8} \times 2 = \frac{5}{4}.$$

3.º CASO

Regra. — Convertem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e pratica-se a regra de multiplicar fracções.

Exemplos

$$2\,\frac{3}{5} \times 5\,\frac{3}{4} = \frac{13}{5} \times \frac{23}{4} = \frac{299}{20} = 14\,\frac{19}{20}$$

$$6\,\frac{2}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{26}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{52}{28} = \frac{26}{14} = \frac{13}{7} = 1\,\frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{11} \times 3\,\frac{2}{4} = \frac{5}{11} \times \frac{14}{4} = \frac{70}{44} = \frac{35}{22} = 1\,\frac{13}{22}$$

Observação. — Um pequeno exame sobre a definição de multiplicação de fracções, mostrará que nem sempre esta traz a idéa de augmento, como na multiplicação de numeros inteiros.

De facto, devendo o producto ser do multiplicando o que o multiplicador fôr da unidade e sendo este sempre uma fracção da unidade, o producto será tambem uma parte ou uma fracção do multiplicando, e portanto menor que elle.

Isto se observa mesmo no caso de ser o multiplicador um numero inteiro; porque se a ordem dos factores não altera o producto, pode-se considerar a fracção como multiplicador, e neste caso tem-se que notar o mesmo raciocinio.

Exemplo

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

Vamos reduzir ao mesmo denominador as fracções $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{35}$ para comparal-as:

$$\frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \frac{6}{35} = \frac{14}{35},\ \frac{15}{35},\ \frac{6}{35}$$

Vê-se que $\frac{6}{35}$, ou o producto, é menor do que cada um dos factores $\frac{14}{35}$ e $\frac{15}{35}$.

Outros exemplos

$$\frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5}\quad \frac{12}{5} \text{ ou } 2\,\frac{2}{5} \text{ menor do que o factor 6.}$$

N. B. — Quando fallamos em fracção, referimo-nos sempre á fracção impropria.

Exercicios

Effectuar as seguintes multiplicações:

$\frac{2}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = ?$	$2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = ?$
$3\,\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = ?$	$4\,\frac{1}{5} \times 6 = ?$
$1\,\frac{2}{3} \times 2\,\frac{1}{4} = ?$	$\left(3\,\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right)\,\frac{1}{4} = ?$
$3\left(\frac{2}{4} - \frac{3}{14}\right) + \frac{1}{5} = ?$	$\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{12}\right)\left(\frac{12}{15} - \frac{1}{6}\right) = ?$
$\frac{3+4}{16} + \frac{5 \times 6}{45} \times \frac{1}{8} = ?$	$\frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)}{6} \times \frac{5}{8} = ?$

I — Custando 1 metro de fazenda 3$500 quanto custarão $\frac{2}{5}$ do metro?

II — $\frac{1}{3}$ de certa obra custa 3:520$000 quer saber-se quanto custarão $\frac{5}{8}$ da mesma?

III — Um operario faz em um dia $3\,\frac{2}{7}$ de certa obra, em 8 dias e $\frac{3}{4}$ que porção fará?

Divisão

Dividir é compor com o dividendo um numero chamado quociente, que seja d'aquelle o que a unidade for do divisor.

Ha quatro casos na divisão das fracções:

1.º Dividir fracção por fracção;
2.º Dividir inteiro por fracção;
3.º Dividir fracção por inteiro;
4.º Dividir numeros mixtos.

1.º CASO

Regra. — Para se dividir uma fracção por outra, invertem-se os termos da fracção divisor, e pratica-se a regra de multiplicar fracções.

EXEMPLOS

$$\frac{2}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{2}{4} \times \frac{8}{5} = \frac{2 \times 8}{4 \times 5} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{9} \div \frac{3}{7} = \frac{2}{9} \times \frac{7}{3} = \frac{14}{27}$$

2.º CASO

Regra. — Invertem-se os termos da fracção divisor, e pratica-se a regra de multiplicar inteiro por fracção.

EXEMPLOS

$$3 \div \frac{2}{4} = 3 \times \frac{4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$4 \div \frac{3}{8} = 4 \times \frac{8}{3} = \frac{32}{3} = 10\,\frac{2}{3}$$

$$5 \div \frac{10}{15} = 5 \times \frac{15}{10} = \frac{15}{10 \div 5} = \frac{15}{2} = 7\,\frac{1}{2}$$

3.º CASO

Regra. — Para se dividir uma fracção por um inteiro, multiplica-se o inteiro pelo denominador, e ao resultado dá-se o mesmo numerador.

EXEMPLOS

$$\frac{2}{4} \div 3 = \frac{2}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{8} \div 7 = \frac{5}{56}$$

OBSERVAÇÕES. — Quando o numerador da fracção fôr divisivel pelo inteiro, pode-se fazer a divisão, segundo a seguinte

Regra especial. — Divide-se o numerador da fracção pelo inteiro, e ao resultado se dá o mesmo denominador.

EXEMPLO

$$\frac{8}{13} \div 4 = \frac{8 \div 4}{13} = \frac{2}{13}$$

Pelo primeiro processo, ter-se-hia $\frac{8}{13} \div 4 = \frac{8}{52} = \frac{4}{26} =$

$= \frac{2}{13}$, resultado identico ao outro.

2.º O segundo e o terceiro casos podem tambem ser resolvidos pela seguinte

Regra especial. — Para se dividir fracção por inteiro ou *vice-versa*, converte-se o inteiro á fórma de quebrado com o denominador 1, e pratica-se a regra de dividir fracções.

EXEMPLOS

$$2 \div \frac{7}{9} = \frac{2}{1} \div \frac{7}{9} = \frac{2}{1} \times \frac{9}{7} = \frac{18}{7} = 2\,\frac{4}{7}$$

$$\frac{3}{5} \div 6 = \frac{3}{5} \div \frac{6}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

4.º CASO

Regra. — Convertem-se os numeros mixtos a fracções improprias, e pratica-se a regra de dividir fracções.

EXEMPLOS

$$3\frac{2}{7} \div 4\frac{2}{4} = \frac{23}{7} \div \frac{18}{4} = \frac{23}{7} \times \frac{4}{18} = \frac{92}{126} = \frac{46}{63}$$

$$5\frac{1}{3} \div 8 = \frac{16}{3} \div \frac{8}{1} = \frac{16}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{16}{24} =$$

$$= \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$6\frac{1}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{25}{4} \times \frac{4}{2} = \frac{100}{8} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$$

EXERCICIOS

$$\frac{1}{4} \div \frac{2}{7} = ?$$

$$6 \div \frac{2}{5} = ?$$

$$3 + \frac{2}{3} \div 4\frac{6}{7} = ?$$

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times 2 = ?$$

$$\frac{2\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7}\right) \times \frac{2}{8} + 3\frac{1}{2}}{6\frac{2}{5} - \left(3\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)} = ?$$

$$\frac{130\frac{1}{5} - \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{7}\right)}{1\frac{2}{3} - \frac{2}{4}} = ?$$

$$\frac{3}{6} \div \frac{8}{10} = ?$$

$$\frac{3}{8} \div 6 = ?$$

$$\frac{2}{3} \div 2 = ?$$

$$\frac{\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{5}}{\frac{2}{7} \times \frac{3}{4}} = ?$$

$$\frac{\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{8}}{4 \div 2\frac{1}{2} + \frac{1}{5}} = ?$$

I — Uma bica d'agua em uma hora fornece 2 litros e $\frac{1}{3}$, em quantas horas encherá um tanque da capacidade de 120 l $\frac{2}{4}$?

II — 25 trabalhadores fizeram 258 braças e $\frac{1}{2}$ de uma picada em uma matta, quer saber-se quantas braças fez cada um?

III — Um operario fez em um dia 8 metros e $\frac{7}{9}$ de uma obra, quantos dias são precisos para fazer $76\frac{5}{7}$?

IV — Repartir 63$000 entre duas pessoas de modo que uma dellas tenha $\frac{3}{4}$ dessa importancia e a outra tenha o resto.

FRACÇÕES DECIMAES

Fracções decimaes, como já tivemos occasião de dizer, *são partes da unidade successivamente menores na razão decupla.*

Segundo o systema decimal, que é o adoptado por ser simples e commodo, com a reunião de dez unidades primitivas formou-se uma superior ou *uma dezena*, de dez destas formou-se outra mais superior, etc., e assim constituiu-se a serie decimal dos numeros inteiros.

Procedendo de modo inverso, temos uma *centena*, por exemplo, se divide em dez unidades inferiores ou dez *dezenas*, uma dezena em dez *unidades simples*, uma unidade em dez partes iguaes, as quaes por serem dez vezes menores do que uma unidade — se deu o nome de *decimos*. Este decimo, por ter um valor dez vezes menor do que a unidade, em virtude de uma lei da numeração tem que ser escripto immediatamente á direita das unidades.

Da mesma fórma, dividido um *decimo* em dez partes iguaes, cada uma destas é dez vezes menor que um decimo, ou cem vezes menor que a unidade, e por isto foi ella chamada *centesimo*, que deverá ser escripto na casa immediata á direita dos *decimos*. Semelhantemente se obtem os *millesimos*, os *decimos-millesimos*, *centesimos-millesimos*, *millionesimos*, etc.

As *fracções decimaes* não são mais do que fracções ordinarias que tem por denominadores 10, 100, 1000, etc., sempre a unidade seguida de zeros, como $\frac{3}{100}$, $\frac{28}{1000}$, $\frac{40}{100000}$, $\frac{65}{1000000}$ etc., trazendo a grande vantagem de poderem ser escriptos como os numeros inteiros, pois seguem a mesma lei da numeração decimal, o que facilita as operações.

As *fracções decimaes* são escriptas a direita dos numeros inteiros, destes separadas por meio de uma *virgula*. Quando não ha numero inteiro, escreve-se um zero antes da virgula, isto é, na casa das unidades.

Assim	$\frac{4}{10}$	representar-ha	0,4
	$\frac{3}{100}$	»	0,03
	$\frac{25}{1000}$	»	0,025
	$\frac{1}{1000000}$	»	0,000001
	$3\frac{5}{10}$	»	3,5
	$28\frac{4}{1000}$	»	28,004

Inteiros										Decimaes								
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Bilhão	Centena de milhão	Dezena de milhão	Milhão	Centena de milhar	Dezena de milhar	Milhar	Centena	Dezena	Unidade	*Decimo*	*Centesimo*	*Millesimo*	*Decimo-millesimo*	*Centesimo-millesimo*	*Millionesimo*	*Decimo-millionesimo*	*Centesimo-millionesimo*	*Billionesimo*

Leitura de numero decimal

Ha dois modos de ler um numero decimal.

1.° Lê-se em primeiro lugar a parte inteira, si houver, e em seguida a decimal, como si fosse um numero inteiro, dando no fim o nome da ultima subdivisão decimal.

Seja o numero 534,6428 para ler.

Dir-se-ha: *quinhentos e trinta e quatro unidades e seis mil quatrocentos e vinte e oito decimos millesimos.*

2.° Lê-se todo o numero, como si fosse inteiro e não existisse a virgula, dando no fim o nome da ultima casa decimal.

Por este modo, o numero precedente ler-se-ha da seguinte fórma: *cinco milhões trezentos e quarenta e seis mil, quatrocentos e vinte e oito decimos millesimos.*

Observação. — Não tendo o numero decimal parte inteira, está visto que só se póde ler do segundo modo:

Exemplo: o decimal 0,49762 ler-se-ha — quarenta e nove mil setecentos e sessenta e dois centesimos millesimos.

Dos dois modos apontados é preferivel seguir o segundo, por facilitar a escripta do numero decimal.

Lêr as seguintes fracções:

0,630 — 92,758432875 — 63,000048 — 0,5 —
0,1287000006 — 8,7006580 — etc.

Escrever um numero decimal

Regra.—Escreve-se um numero decimal, como si fosse um numero inteiro, e separam-se com a virgula, da direita para a esquerda, tantas casas para a dizima, quantas sejam precisas para se obter a ultima subdivisão, em que a fracção foi expressa.

Exemplo: escrever *trinta e dois mil quatrocentos e vinte e oito millesimos.*

Escrevendo este numero, como si fosse inteiro, tem-se 32428; depois, a partir de 8 vem-se contando — *decimos, centesimos, millesimos*; obtida a subdivisão enunciada, que foi *millesimos*, colloca-se a virgula á esquerda dessa casa, e assim se tem:

32,428

Observação. — Quando o numero enunciado não tem casas sufficientes, vão-se collocando zeros á esquerda do numero até se obterem todas as casas.

Exemplo:

Seja para escrever o numero decimal *quinhentos e setenta e dois decimos millionesimos*. Escrevendo-se como numero inteiro tem-se 572. Contando-se as casas da direita para a esquerda, tem-se: *decimos*, *centesimos*, *millesimos*, e como nas casas de *decimos-millesimos*, *centesimos-millesimos*, *millionesimos*, *decimos-millionesimos*, bem como na casa das *unidades*, não ha algarismos, escreve-se zero em cada uma dellas, separando-se a ultima das outras por meio da virgula.

Assim, o numero *quinhentos e setenta e dois decimos-millionesimos* fica escripto do seguinte modo:

0,0000572

EXERCICIOS

Escrever as seguintes fracções decimaes:

I—Dois mil quinhentos e vinte e oito centesimos millesimos.
II—Trinta e sete mil novecentos e quarenta e nove millionesimos.
III—Quarenta e cinco bilionesimos.
IV—Novecentos e vinte seis decimos.
V—Trezentos e cincoenta e oito mil duzentos e vinte e nove centesimos-millionesimos.

Propriedade das fracções decimaes

1.ª Uma fracção decimal não se altera quando á sua direita se accrescentam ou se tiram zeros.

EXEMPLOS

$$0,5 = 0,50 = 0,500$$
$$6,300 = 6,30 = 6,3$$

De facto, na primeira fracção o algarismo 5 occupa a casa dos decimos e accrescentando-se-lhe um zero continuou na mesma casa; portanto a fracção não soffreu alteração nenhuma. Da mesma fórma, na segunda 6,300, o algarismo 6 acha-se na casa das unidades, e o algarismo 3 — na dos decimos; eliminando-se dois zeros da direita, aquelles algarismos permaneceram nas mesmas casas; logo o valor da fracção não soffreu tambem neuhuma alteração.

2.ª Para se multiplicar uma fracção decimal por 10, 100, 1000, 10000, etc., basta mudar-se a virgula uma, duas, tres, quatro, etc., casas para a direita. *Vice-versa*, para se dividir uma fracção decimal por 10, 100, 1000, etc., basta mudar-se a virgula uma, duas, tres, etc., casas para a esquerda.

EXEMPLOS

$$2,5 \times 10 = 25,0$$
$$2,5 \div 10 = 0,25$$
$$0,143 \times 100 = 14,3$$
$$14,3 \div 100 = 0,143$$

Quando se muda a virgula uma casa para a direita, todos os algarismos andam uma casa para a esquerda, e por um principio de numeração cada um delles torna-se dez vezes maior portanto, todo o numero fica multiplicado por dez, e assim por diante. Reciprocamente, quando se muda a virgula uma casa para a esquerda, todos os algarismos andam uma casa para a direita; portanto, em vista do mesmo principio, tornam-se dez vezes menores e assim todo numero fica dividido por dez.

EXERCICIOS

Effectuar as seguintes operações:

$3,75 \times 10 = ?$	$270,4306 \times 1000 = ?$
$0,358 \div 100 = ?$	$2,6 \times 10000 = ?$
$50,368 \div 1000 = ?$	$3,58 \div 1000 = ?$
$0,73 \div 10000 = ?$	$0,0006 \times 100000 = ?$

Reduzir fracção decimal á fracção ordinaria

Regra. — Dá-se para numerador da fracção o decimal sem a virgula e para denominador a unidade seguida de tantos zeros, quantas forem as casas da dizima.

Exemplos

$0{,}5 = \frac{5}{10}$ $\qquad 0{,}45 = \frac{45}{100}$

$$3{,}25 = \frac{325}{100} = 3\,\frac{25}{100}$$

$$63{,}284 = \frac{63284}{1000} = 63\,\frac{284}{1000}$$

Exercicios

Reduzir a fracções ordinarias os seguintes decimaes.

$0{,}372 = ?$

$30{,}735 = ?$ $\qquad 0{,}456789 = ?$

$638{,}9656 = ?$

$0{,}0000006 = ?$

Converter fracção ordinaria em fracção decimal

Regra. — Divide-se o numerador pelo denominador; havendo resto, colloca-se um zero á sua direita, uma virgula no quociente, e continua-se a operação sempre accrescentando-se zeros aos restos, até chegar-se a uma divisão exacta ou a um numero de casas de dizima que se queira.

Exemplo

Reduzir $\frac{9}{8}$ a fracção decimal.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 00 & \end{array}$$

Assim, $\frac{9}{8} = 1{,}125$

Reduzir a fracção $\frac{25}{16}$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 16 \\ \cline{2-2} 90 & 1{,}5625 \\ 100 & \\ 40 & \\ 80 & \\ 00 & \end{array}$$

$$\frac{25}{16} = 1{,}5625$$

Observação. — Quando o dividendo fôr menor que o divisor, colloca-se zero e virgula (0,) no quociente, accrescenta-se o zero ao dividendo e continua-se a divisão, conforme a regra anterior.

Exemplo

Reduzir $\frac{3}{5}$ a fracção decimal

$$\begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \cline{2-2} 00 & 0{,}6 \end{array} \qquad \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Seja $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 0{,}333 \text{ etc....} \\ 10 & \\ 10 & \end{array}$$

A fracção $\frac{1}{3} = 0{,}3333....$

Seja ainda $\frac{4}{15}$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 15 \\ \cline{2-2} 100 & 0{,}2666.... \\ 100 & \\ 100 & \\ 10 & \end{array}$$

A fracção $\frac{4}{15} = 0{,}2666....$

EXERCICIOS

Converter a numeros decimaes as seguintes fracções ordinarias:

$\frac{2}{4} = ?$ $\frac{355}{113} = ?$ $\frac{350}{1240} = ?$ $\frac{22}{7} = ?$ $\frac{1}{7} = ?$ $\frac{5}{12} = ?$ $\frac{315}{112} = ?$ $\frac{18}{125} = ?$

FRACÇÕES PERIODICAS

Póde acontecer que, convertendo-se uma fracção ordinaria em decimal, a divisão nunca termine, como foi o caso da fracção $\frac{1}{3}$, que convertida a fracção decimal deu 0,3333..

Esta especie de dizima chama-se *periodica*, porque os algarismos se reproduzem periodicamente.

Assim:

Fracção decimal periodica ou *dizima periodica* é aquella, em que um ou mais algarismos se reproduzem numa ordem constante.

Chama-se *periodo* o numero que se reproduz indefinidamente. Póde constar de um ou mais algarismos.

Na dizima $0,\overbrace{63}^{\text{Periodo}}\,\overbrace{63}^{\text{Periodo}}\,\overbrace{63}^{\text{Periodo}}\ldots$, o periodo consta de dois algarismos, formando o numero 63.

Ha duas especies de fracções periodicas: *simples* e *compostas* ou *mixta*.

Fracção periodica simples é aquella em que o periodo começa logo depois da virgula.

EXEMPLOS

0,63636... 0,4444... 3,125125125...
0.771477147714...

Fracção periodica composta ou *mixta* é aquella, em que entre o primeiro periodo e a virgula existem algarismos não periodicos, ou que não se reproduzem.

EXEMPLO

0,266666. 0,42575757... 0,0354354354...

As dizimas periodicas se originam da conversão de uma fracção ordinaria em decimal.

Reducção de fracções periodicas a fracções ordinarias

1º CASO

PERIODICA SIMPLES

Regra. — Dá-se para numerador um dos periodos e para denominador tantos noves quantos forem os algarismos de um periodo.

EXEMPLOS

$0,6666\ldots = \frac{6}{9}$ $0,353535\ldots = \frac{35}{99}$

$0,124124124\ldots = \frac{124}{999}$

OBSERVAÇÃO.—Si a fracção periodica tiver algum inteiro, este colloca-se antes da fracção ordinaria, formando com ella um numero mixto.

EXEMPLOS

$3,2222\ldots = 3\frac{2}{9}$; $16,315315315\ldots = 16\frac{315}{999}$

2º CASO

PERIODICA COMPOSTA

Regra.—Dá-se para numerador os algarismos não periodicos multiplicados por tantos noves quantos forem os algarismos de um periodo e mais um periodo; e para denominador tantos noves quantos algarismos tiver um periodo, seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos não periodicos.

EXEMPLOS

$$0,29545454\ldots = \frac{29\times 99 + 54}{9900} = \frac{2925}{9900}$$

Convertendo-se esta fracção ordinaria a decimal, tem-se

2925∅	99∅∅
945∅	0,295454..
540	
450	
540	
450	
54	

$$0,6343434\ldots = \frac{6\times 99 + 34}{990} = \frac{628}{990}$$

Outra regra.— Dá-se para numerador a parte não periodica unida com um periodo menos a parte não periodica, e para denominador tantos noves quantos forem os algarismos de um periodo, seguidos de tantos zeros quantos algarismos tiver a parte não periodica.

EXEMPLO

$$0,6343434\ldots = \frac{634-6}{990} = \frac{628}{990}$$

$$0,15267267267\ldots = \frac{15267-15}{99900}$$

Reducção de fracções decimaes á mesma denominação

Regra.— Para reduzir fracções decimaes á mesma denominação decimal, igualam-se as casas da dizima, collocando zeros á direita da que tiver menos casas.

EXEMPLOS

Para reduzir

0,22375	= 0,22375	0,4	= 0,4000
0,45	= 0,45000	0,128	= 0,1280
0,302	= 0,30200	0,23	= 0,2300
0,6	= 0,60000	0,6287	= 0,6287

OPERAÇÕES

Addição

Regra.—Dispõem-se as parcellas e faz-se a somma como a dos numeros inteiros, de sorte que as virgulas das parcellas e da somma estejam em linha vertical.

EXEMPLOS

$$0,314 + 0,14 + 3,7598 + 8,40025 + 2,5 + 0,35$$

0,31400		0,314
0,14000		0,14
3,75980		3,7598
8,40025	ou	8,40025
2,50000		2,5
0,35000		0,35
15,46405		15,46405

EXERCICIOS

$$0,215 + 0,37825 + 24,86593 + 0,25 + 6,32 + 12,46 = ?$$
$$10,33 + 65,9428 + 3,929 + 125,387654 + 68,393 = ?$$

I — Uma senhora comprou 28m,30 de fita de seda azul, 125m,15 côr de rosa, 15m,38 violeta, 36m,1 de velludo preto, quantos metros comprou ao todo?

Subtracção

Regra.—Reduz-se o minuendo ou o subtrahendo á mesma denominação decimal, e pratica-se a operação como a de numeros inteiros.

EXEMPLOS

$$8,63451 - 2,8439376 = 5,7905724$$

$$\begin{array}{r} 8,6345100 \\ 2,8439376 \\ \hline 5,7905724 \end{array}$$

$$0,451 - 0,08765 = 0,36335$$

$$\begin{array}{r} 0,45100 \\ 0,08765 \\ \hline 0,36335 \end{array}$$

$$3,432568 - 1,364 = 2,068568$$

$$\begin{array}{r} 3,432568 \\ 1,364000 \\ \hline 2,078568 \end{array}$$

EXERCICIOS

$$4,35 - 2,36594 = ? \qquad 0,3965 - 0,063 = ?$$
$$358 - 63,527 = ? \qquad 3,712 - 0,39856 = ?$$

I — Um vaso cheio pesa 36kg,65, o conteúdo 12kg,6353; qual é o peso do vaso?

II — Uma liga de ouro e cobre pesa 365kg,20, contém 158kg,235 de cobre, que quantidade de ouro tem?

Multiplicação

Regra.— Multiplicam-se os factores como numeros inteiros, fazendo abstracção das virgulas, e no producto separam-se com a virgula para a direita tantos algarismos, quantas forem as casas decimaes dos factores.

EXEMPLOS

$$6,54 \times 7 = 45,78 \qquad \begin{array}{r} 6,54 \\ 7 \\ \hline 45,78 \end{array}$$

$$8,615 \times 0,3 = 2,5845 \qquad \begin{array}{r} 8,615 \\ 0,3 \\ \hline 2,5845 \end{array}$$

$$629 \times 0,5 = 314,5 \qquad \begin{array}{r} 629 \\ 0,5 \\ \hline 314,5 \end{array}$$

$$19,453 \times 1,25 = 24,31625$$

$$\begin{array}{r} 19,453 \\ 1,25 \\ \hline 97265 \\ 38906 \\ 19453 \\ \hline 24,31625 \end{array}$$

OBSERVAÇÃO.— Si o producto tiver menos algarismos do que os decimaes a separar, completam-se as casas que faltam com zeros á esquerda do producto.

EXEMPLOS

$$0,326 \times 0,04 = 0,01304$$

$$\begin{array}{r} 0,326 \\ 0,04 \\ \hline 0,01304 \end{array}$$

$$0,065 \times 0,03 = 0,00195$$

$$\begin{array}{r} 0,065 \\ 0,03 \\ \hline 0,00195 \end{array}$$

Exercicios

375,301 × 13,075 = ?
0,47059 × 3,704 = ? 0,258 × 372 ?
39,478 × 0,354 × 6,917 = ?

I — Um metro de fazenda custa 3$570 réis, 25ᵐ,38 quanto custarão ?

II — Quantos metros andará um individuo no intervallo de uma hora, dando 120 passos por minuto; sendo o comprimento do passo 0,65 do metro ?

Divisão

Regra. — Igualam-se as casas decimaes do dividendo e do divisor, e faz-se a divisão como si não existissem virgulas.

Exemplo

3426 ÷ 0,25

Igualando-se as casas, tem-se 3426,00 ÷ 0,25
Agora effectua-se a divisão como si não existissem virgulas.

```
342600 | ø25
 92    |------
 176   | 137 4
  100  |
    ø  |
```

Assim 3426 ÷ 0,25 = 13704
157,2 ÷ 0,15 = 1048

```
15720 | ø15
 072  |-----
  120 | 1048
   0  |
```

Observações: 1.ª — Quando houver resto, colloca-se uma virgula no quociente e um zero no resto, e assim se continua a divisão até que não haja mais resto, ou até chegar-se á casa decimal que se queira.

Exemplo

18964 ÷ 19,5 = 972,52

```
18964,14 | 19,50
-14141   |--------
 --4914  | 972,32
  10140  |
   --390 |
     -00 |
```

Effectuar a seguinte divisão até obter decimos-millesimos no quociente :

106,52 ÷ 0,143 = 744,8951...

```
106520   | ø143
--442    |-------------
 -700    | 744,8951 ...
  1280   |
  -1360  |
   --730 |
    -150 |
     --7 |
```

2ª — Quando o divisor terminar em zeros, em vez de accrescentarem-se zeros aos restos, é melhor cortar os do divisor.

Exemplo

157,235 ÷ 6,3 = 24,9579...

```
157,235   | 6,3øø
-31235 *  |-------------
 -6035 ** | 24,9..79 ...
   -365   |
    -50   |
```

* Aqui, em lugar de accrescentar-se um zero ao resto, corta-se um ao divisor.

** Aqui, em lugar de accrescentar-se o zero, corta-se o segundo do divisor.

EXERCICIOS

$0{,}3528 \div 2{,}5 = ?$

$0358 \div 1{,}8 = ?$

$4907{,}060575 \div 13{,}075 = ?$

$435.75 \div 12{,}37 = ?$

$378 \div 0{,}5 = ?$

$0{,}398 \div 75 = ?$

$0{,}258 \div 3{,}125 = ?$

I — Uma machina gasta 3187,95 kilogrammas por dia; quanto consome por hora e por minuto?

II — Compraram-se $3^m{,}54$ de panno por 3$825 réis: qual é o preço de $2^m{,}45$ do mesmo panno?

III — Um navio andou 222 milhas em $18^h{,}56$; qual é a sua velocidade por hora?

COMPLEXOS

O numero concreto póde ser *complexo* ou *incomplexo*.

Numero complexo é o que exprime uma certa unidade e as suas subdivisões, quando estas não procedem na razão decupla.

Assim 4 @, 6 lb, 8 onç, é um numero complexo, porque exprime uma unidade principal *arrobas* — e as suas subdivisões — *libras* e *onças*, não sendo estas subdivisões na razão decupla; pois 1 @ se divide em 32 lb., e a libra em 16 onças.

Numero incomplexo é o que é formado de uma só especie de unidade.

Ex.: 84 arrobas; 25 alqueires; 14 leguas.

O numero $82^m{,}15$ que se lê *oitenta e dois metros e quinze centimetros*, tambem é um numero incomplexo, si bem que *quinze centimetros* seja subdivisão da unidade principal *metro*, mas aqui esta subdivisão é na razão decupla: 1 metro se divide em dez *decimetros* e este em dez *centimetros*.

Pelo nosso systema de numeração toda vez que as divisões e subdivisões da unidade principal forem na razão decupla não ha complexidade no numero que representa estas unidades e suas partes como no numero $86^m{,}15$ ou $15^{kg}{,}12$.

Pode-se fazer sobre os numeros complexos as 4 operações fundamentaes.

Para isso é necessario conhecer as relações que existem entre as medidas antigamente usadas e saber effectuar duas conversões indispensaveis.

Relações

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Legua de sesmaria		tem	3.000 braças.
Legua maritima		»	3 milhas.
Milha		»	841 $^3/_4$ braças.
Braça	(br.)	»	2 varas.
Vara	(v.)	»	5 palmos.
Palmo	(p.)	»	8 pollegadas.
Pollegada	(pp.)	»	12 linhas.
Linha	(l.)	»	12 pontos.
Toeza	(t.)	»	3 covados.
Covado	(c.)	»	3 pés
Pé	(p'.)	»	1 $^1/_2$ palmos ou 12 pollegadas.
Passo geometrico		»	5 pés geometricos.
Jarda	(yd.)	»	36 pollegadas inglezas.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Geira (*)	tem	400 braças quadradas.
Braça quadrada	»	100 palmos quadrados.
Palmo quadrado	»	64 pollegadas quadradas.

MEDIDAS DE CAPACIDADE

Para liquidos

Tonel	tem	2 pipas.
Pipa	»	25 almudes.
Almude	»	2 potes.
Pote	»	6 canadas ou medidas.
Canada ou medida	»	4 quartilhos ou garrafas.
Garrafa	»	4 martelinhos.

(*) E' um quadrado formado sobre 20 braças.

Para seccos

Moio	tem	15 fangas.
Fanga	»	4 alqueires.
Sacco	»	2 alqueires
Alqueire	»	4 quartas
Quarta	»	2 oitavas.
Oitava	»	4 salamins.
Salamim	»	2 pratos.

MEDIDAS DE PESO

Tonelada	tem	13 quintaes e meio.
Quintal	»	4 arrobas.
Arroba @	»	32 libras ou arrateis.
Libra (lb.)	»	4 quartas ou 16 onças.
Marco	»	8 onças (1/2 da libra).
Onça	»	8 oitavas.
Oitava	»	3 escropulos.
Escropulo	»	6 quilates.
Quilate	»	4 grãos.

MEDIDAS DE TEMPO

Seculo	tem	10 decennios.
Decennio	»	2 lustros.
Lustro	»	5 annos.
Anno	»	12 mezes ou 365 dias.
Dia (d.)	»	24 horas.
Hora (h.)	»	60 minutos.
Minuto (m.)	»	60 segundos.
Semana	»	7 dias.

Outras divisões do tempo

Cyclo solar	tem	28 annos.
Quatrienio	»	4 annos.
Biennio	»	2 annos.
Anno bissexto	»	366 dias.
Semestre	»	6 mezes ou 2 trimestres.
Trimestre	»	3 mezes.

Mezes de Janeiro,
» Março,
» Maio,
» Julho,
» Agosto,
» Outubro,
» Dezembro
} tem 31 dias.

Mezes de Abril,
» Junho,
» Setembro,
» Novembro
} tem 30 dias

Fevereiro tem 29 dias nos annos bissêxtos, nos outros 28 dias.

MEDIDAS MONETARIAS

Moeda ingleza

Libra (£)	tem	20 shillings.
Shillings (sh.)	»	12 pence (*)
Penny (d.)	»	4 farthings.

Moeda brazileira

Ouro	moeda de	20$000
	» »	10$000
	» »	5$000
Prata	» »	2$000
	» »	1$000
	» »	$500
	» »	$200
Nickel	» »	$200
	» »	$100
	» »	$050
Cobre	» »	$040
	» »	$020
	» »	$010

MEDIDA DE CIRCUMFERENCIA

Circumferencia	tem	360 grãos.
Grão (°)	»	60 minutos.
Minuto (')	»	60 segundos.
Quadrante	»	90 grãos, quarta parte da circumferencia.

De papel

Resma de papel de impressão tem	20 mãos.
Mão tem	25 folhas
Resma de papel almaço	17 mãos
Mão tem	5 cadernos.
Caderno	5 folhas

(*) Pence é o plural de penny.

São estas as principaes relações existentes entre as medidas antigas.

Agora que já as conhecemos vamos aprender as duas conversões indispensaveis para todas as operações sobre esta especie de numeros:

1.ª *Reduzir um numero complexo a fracção ordinaria da unidade principal.*

2.ª *Dada uma fracção ordinaria de uma certa unidade principal convertel-a a numero complexo.*

Reduzir numero complexo a fracção ordinaria

Si tivessemos o numero 8 @, 15 lb, 1^{m}, 6^{onç} e 3^{oit} para converter, teriamos em primeiro lugar que reduzir todo este numero a unidade da menor especie, que ahi é *oitavas*, o que se faz do modo seguinte:

Uma *arroba* tem 32 *libras*, logo as 8 @ terão 8 × 32 lb o que dá 256 *libras*, com as 15 lb do numero, temos 271 lb; cada *libra* tem 2 *marcos*, portanto 271 lb tem 271 × 2^{m}, o que dá 542^{m} com 1^{m} que existe no numero perfaz 543 *marcos*; cada *marco* tem 8 *onças*, donde se conclue que 543^{m} terão 543 × 8^{onç} ou 4344 *onças*, com as 6 do numero, teremos 4350 *onças*; cada *onça* tendo 8 *oitavas*, 4350 *onças* terão 4350 × 8^{oit} ou 34800^{oit} que, reunidas ás 3^{oit}, dão 34803 *oitavas*.

Temos assim o numero, 8 @, 15 lb, 1^{m}, 6^{onç}, 3^{oit} reduzido á unidade de infima especie, isto é, a *oitavas*. Este numero vai occupar o numerador da fracção ordinaria.

Para denominador dá-se uma só unidade principal reduzida tambem á infima especie, ou no caso em questão, 1 @ convertida em *oitavas*: 1 @ tem 32 lb, cada libra tem 2 *marcos*, portanto 1 @ ou 32 lb tem 32 × 2^{m} = 64^{m}, 1 *marco* tem 8 *onças*, logo 1 @ ou 32 lb ou 64^{m} tem 64 × 8 *onças* = 512 *onças*, como 1 *onça* tem 8 *oitavas*, teremos que 1 @ ou 32 lb ou 64^{m} ou 512 *onças* terão 512 × 8 *oitavas* = 4096 *oitavas*

Assim temos 1 @ reduzida á *oitavas* ou 1 @ = 4096 *oitavas*. Este numero é o que vai para o denominador da fracção. Logo

$$8 \text{ @ } 15 \text{ lb } 1^{m}\ 6^{onç}\ 3^{oit} = \frac{34803}{4096}$$

Na pratica a operação se faz desta maneira.

$$\begin{array}{rl}
 & 8 \text{ @} \\
\times & 32 \text{ lb} \\
\hline
 & 256 \text{ lb} \\
+ & 15 \\
\hline
 & 271 \text{ lb} \\
\times & 2^{m} \\
\hline
 & 542^{m} \\
+ & 1 \\
\hline
 & 543^{m} \\
\times & 8^{onç} \\
\hline
 & 4344^{onç} \\
+ & 6 \\
\hline
 & 4350^{onç} \\
\times & 8^{oit} \\
\hline
 & 34800^{oit} \\
+ & 3 \\
\hline
 & 34803
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & 1 \text{ @} \\
 & 32 \text{ lb} \\
\times & 2 \\
\hline
 & 64^{m} \\
\times & 8^{onç} \\
\hline
 & 512^{onç} \\
\times & 8^{oit} \\
\hline
 & 4096
\end{array}$$

$$\frac{34803}{4096}$$

Do exposto deduz-se a seguinte regra para converter um numero complexo a fracção ordinaria da unidade principal.

Regra. — Dá-se para numerador da fracção todo o numero complexo dado, reduzido a unidades de infima especie, e para denominador uma só unidade principal, tambem reduzida a unidades de infima especie.

Exemplo: 24 £ 3 s 8 d para converter

```
  2 4 £
× 2 0 s
-------
  4 8 0 s
+     3 s
-------
  4 8 3 s
× 1 2 d
-------
  9 6 6
4 8 3
-------
5 7 9 6 d
+     8 d
-------
5 8 0 4 d
```

```
    1
  2 0 s
× 1 2 d
-------
2 4 0 d
```

$$24\,£\;3\,s\;8\,d = \frac{5804}{240}$$

Converter uma fracção de certa unidade á numero complexo

Seja a fracção da arroba $\frac{34803}{4096}$ que queremos converter a complexo. Como o denominador é uma arroba convertida á oitavas, e o numerador tambem é o numero de oitavas que tem o complexo, segue-se que, quantas vezes o denominador estiver contido no numerador tantas arrobas teremos, por isso vamos dividir o numerador pelo denominador, o que dá 8 @ e sobram 2035 resto de arrobas que se converte a libras, multiplicando por 32, porque 1 @ tem 32 lb, o que dá 65120; divide-se este numero pelo divisor, dando de resultado 15 lb e sobram 3680 que se convertem a marcos, multiplicando por 2, dando 7360 marcos que dividindo dá 1 marco e sobram 3264 que são convertidos a onças, dando 26112 onças, dividindo produz 6 onças, restando 1536; convertendo estas em oitavas dão 12288 oitavas; effectuada a divisão dá o quociente 3 oitavas, sem deixar resto.

```
 3 4 8 0 3 | 4 0 9 6
-  2 0 3 5 | 8 @ 1 5 lb 1 m 6 onç 3 oit
×      3 2
----------
   4 0 7 0
 6 1 0 5
----------
 6 5 1 2 0 lb
 2 4 1 6 0
   3 6 8 0
×        2
----------
   7 3 6 0 m
   3 2 6 4
×        8
----------
 2 6 1 1 2 onç
   1 5 3 6
×        8
----------
 1 2 2 8 8 oit
   0 0 0 0
```


Logo

$$\frac{34803\ @}{4096} = 8\ @\ 15\ lb\ 1^{m}\ 6^{onç}\ 3^{oit}$$

Outro Exemplo

$$\frac{5804}{240} = 24\,£\,3^{s}\,8^{d}$$

```
5 8 0 4 | 2 4 0
1 0 0 4 | 2 4 £ 3 s 8 d
    4 4
    2 0
-------
  8 8 0
  1 6 0
    1 2
-------
    3 2
  1 6
-------
  1 9 2
    0 0
```

Do que acabamos de expôr deduz-se a seguinte

Regra. — Divide-se o numerador pelo denominador, o quociente representa as unidades principaes, o resto converte-se em unidade da subdivisão immediata, pratica-se a divisão, mostrando o novo quociente as unidades da mesma subdivisão; continua-se a converter os restos nas subdivisões immediatas até a menor.

Si na divisão da menor especie de unidade ainda houver resto, este se exprime em fracção ordinaria ou decimal.

Exemplo

Converter a complexo $\frac{6009^{br.}}{320}$ não indo além de pollegadas.

6009	320
2809	$18^{br}\ 7^{p}\ 6^{pp}\ \frac{8}{32}$ ou $18^{br}, 7^{p}, 6^{pp}, 25$
249	
10	
249$\cancel{0}$	p
25	
8	
200	p
8	

OBSERVAÇÃO. — A regra e a explicação que damos para a conversão de
uma fracção ordinaria de certa unidade a numero complexo, são as que
costuma dar a maioria dos compendios, no que tem razão; pois o que visa
principalmente um compendio didactico é clareza, afim de tornar-se com-
prehensivel. Comtudo vamos expor outra demonstração que nos parece
estar mais proxima da verdade, e tomemos aquelle mesmo exemplo. Divi-
dindo o numero 31803 que é o complexo reduzido a *oitavas* por 4096 que
é 1 @, tambom reduzida oitavas — achamos para quociente 8 @ — portanto
no resto 2035 já não existe mais uma só arroba, mas libras e suas subdi-
visões, reduzidas a oitavas.

Para termos no quociente libras teremos que dividir o resto 2035 por
uma libra convertida em oitavas: mas, para termos 1 libra em oitavas bas-
ta-nos dividir o divisor 4096 por 32, o quociente será uma libra reduzida a
oitavas, isto porque na conversão da @ em oitavas fez-se o seguinte calculo.

$$1\,@ \times 32\,lb \times 2^{m} \times 8^{onç} \times 8^{oit} = 4096$$

dividindo agora 4096^{oit} por 32. o quociente será 1 @ reduzida a oitavas isto é

$$\frac{4096}{32} = \frac{1 \times \cancel{32} \times 2 \times 8 \times 8}{\cancel{32}} = 1 \times 2 \times 8 \times 8$$

resultado este que é $1\,lb \times 2^{m} \times 8^{onç} \times 8^{oit}$ como se desejava provar. Porém,
em vez de se dividir o divisor 4096 por 32, preferiu-se, por offerecer maior
facilidade, multiplicar o dividendo 2035 por 32, o que vem a dar no mesmo
resultado, pois tanto faz dividir o divisor por um certo numero, como mul
tiplicar o dividendo pelo mesmo numero, para obter um certo quociente.

Por identico raciocinio se demonstrará o resto da operação.

EXEMPLOS PARA PRATICAR

Converter os seguintes numeros:

$$35£\ \ 15^{s}\ \ 8^{d} = ?$$

$$115^{br}\ \ 1^{v}\ \ 8^{p}\ \ 6^{pp}\ \ 2^{l} = ?$$

$$3^{an}\ \ 6^{d}\ \ 14^{h}\ \ 6^{m}\ \ 12^{s} = ?$$

$$\frac{2957£}{240} = ? \qquad \frac{18975\,@}{4096} = ?$$

$$12^{p}\ \ 9^{alm}\ \ 10^{can}\ \ 3^{quart} = ?$$

$$\frac{3428^{pip}}{800} = ? \qquad \frac{1502^{br}}{80} = ?$$

OPERAÇÕES SOBRE COMPLEXOS

Sommar

Regra. — Convertem-se as parcellas á fracções ordinarias e sommam-se; o resultado reduz-se a numero complexo.

EXEMPLO

$$24£\ \ 8^{s}\ \ 6^{d} + 3£\ \ 15^{s}\ \ 7^{d} + 13£\ \ 5^{s}\ \ 8^{d} = ?$$

Convertendo as parcellas á fracções ordinarias e sommando teremos:

$$\frac{5862}{240} + \frac{907}{240} + \frac{3188}{240} = \frac{9957£}{240}$$

Convertendo agora $\frac{9957£}{240}$ a complexo, vem $\frac{9957}{240} = 41£\ \ 9^{s}\ \ 9^{d}$ que e a somma daquellas tres parcellas.

Subtracção

Regra. — Convertem-se o minuendo e subtrahendo á fracção e faz-se a operação.

Multiplicação

Regra. — Convertem-se os factores á fracções e pratica-se a multiplicação.

Divisão

Regra. — Convertem-se o dividendo e divisor á fracções e pratica-se a divisão.

Exemplo

$$12^{br}\ 5^{P}\ 3^{pp}\ 6^{l} - 5^{br}\ 6^{P}\ 4^{pp}\ 2^{l}$$

$$\frac{12042}{960} - \frac{5426}{960} = \frac{6616}{960} = 6^{br}\ 8^{P}\ 7^{pp}\ 4^{l}$$

Custando uma braça de cordão de seda 2 £ 5 shillings, 4 dinheiros, quanto custarão 25 braças, 1 vara, 6 palmos e 3 pollegadas?

Devemos attender que o producto é sempre da especie do multiplicando, por isso o multiplicando deve ser £, s. e d.

$$2£\ 5^{s}\ 4^{d} \times 25^{br}\ 1^{v}\ 6^{P}\ 3^{pp} \text{ ou}$$

$$\frac{544£}{240}\ \frac{2091}{80} = \frac{1137504£}{19200} = 59£\ 4^{s}\ 10^{d}\ 3{,}2\ farth.$$

Portanto as 25 ^{br}, 1 ^{v}, 6 ^{P}, 3 ^{pp} custarão 59 £ 4 ^{s}, 10 ^{d} 3, 2 farth.

Andando a lua por dia 13°, 10' e 35" em quantos dias percorre ella 278°, 40' e 15"? (*)

$$278°\,40'\,15'' \div 13°\,10'\,35'' = \frac{1003215}{360} \div$$

$$\frac{47435}{360} = \frac{1003215}{360} \times \frac{360}{47435} = \frac{1003215 \times 3\cancel{6}0}{3\cancel{6}0 \times 47435} =$$

$$= \frac{1003215}{47435} = 21^{d}\ 8^{h}\ 57^{m},32$$

(*) Na divisão de complexos deve attender-se ao seguinte principio. Quando o dividendo e divisor são da mesma especie o quociente é de especie differente dos dois; quando o dividendo e divisor são de especie diversa o quociente é sempre da especie do dividendo.

Custando 12 ^{T}, 2 ^{c}, 1 ^{P} e 6 ^{pp} de certa obra 35 £ 12 ^{s} e 6 ^{d} quanto custará uma toeza?

$$35£\ 12^{s}\ 6^{d} \div 12^{T}\ 2^{c}\ 1^{P}\ 6^{pp} =$$

$$= \frac{855\cancel{0}}{24\cancel{0}} \div \frac{1386}{108} = \frac{855}{24} \times \frac{108}{1386} = \frac{92340}{33264}$$

$$= 2£\ 15^{s}\ 6^{d}\ \frac{18}{77}$$

Quando um dos termos da divisão fôr numero incomplexo basta converter á fracção o termo que for complexo. (*)

Exemplo

65 toezas de uma obra importaram em 126 £ 18 ^{s} e 4 ^{d} quanto custou cada toeza?

$$126£\ 18^{s}\ 4^{d} \div 65^{t} = \frac{3046\cancel{0}}{24\cancel{0}} \div 65 = \frac{3046}{1560}$$

$$= 1£\ 19^{s}\ 0^{d}\ 2\frac{6}{13}\ farth$$

Exercicios

$$15^{br}\ 1^{v}\ 2^{P}\ 5^{pp} + 28^{br}\ 0^{v}\ 3^{P}\ 4^{pp}\ 2^{l}$$

$$+ 150^{br}\ 1^{v}\ 3^{P}\ 2^{pp}\ 1^{l} = ?$$

$$32@\ 16\,lb\ 2^{onç}\ 5^{oit} - 15@\ 20\,lb\ 1^{onç}\ 7^{oit} = ?$$

$$2428£ \times 2^{br}\ 4^{P}\ 6^{pp} = ?$$

$$230°\ 28'\ 34'' \times 2^{h}\ 35^{m}\ 24^{s} = ?$$

$$46^{moios}\ 8^{fang}\ 3^{alq}\ 2^{quart} \times 3\ 450 = ?$$

Tendo uma circumferencia 360°; quantos arcos de 8 gráos 28 minutos e 45 segundos contem uma circumferencia?

Quantos gráos, minutos e segundos tem um arco que fôr a 17 ^{a} parte de uma circumferencia?

(*) Esta mesma observação tem lugar na multiplicação

Uma fonte gasta 2 horas, 58 minutos e 51 segundos para encher um almude, quantos almudes encherá em 29 horas, 14 minutos e 25 segundos ?

Outro meio de effectuar as operações de complexo

Este processo que acabamos de estudar, para effectuar as operações sobre complexos é indirecto.

Vamos estudar o meio directo para a somma, subtracção, alguns casos da multiplicação e da divisão que é mais simples que o exposto.

Sommar

Regra.—Escrevem-se as parcellas uma debaixo das outras de modo que as unidades da mesma especie fiquem em columnas verticaes e começa-se a operação pela direita. Si a somma de uma columna chegar para formar unidades de ordem superior, extrahem-se estas, levam-se para a columna seguinte, deixando na outra as que sobrarem.

Exemplo

12 @	6 ℔	1 m	3 onç	4 oit
7	12	1	2	7
10	8	0	5	1
24	23	1	4	2
54	19	0	7	6

No exemplo acima a somma da 1ª columna foi 14, porém cada 8 oitavas, formam uma onça, logo as 14 formam uma onça e ficam ainda 6 oitavas que se escrevem em baixo da respectiva columna, levando uma onça para juntar a casa seguinte. A somma da columna das onças deu 15, comò 8 onças formam um marco, nas 15 está um marco que se leva á columna seguinte e ficam 7 que escrevemos no lugar competente

Sommando a columna dos marcos obtivemos 4. como 2 marcos formam uma libra, os 4 formam 2, não restando nenhum marco ; por isso escreve-se zero na casa respectiva e levam-se as 2 libras para juntar á columna seguinte. Sommando as libras obtivemos 51, das quaes se tira 32 que formam uma arroba e deixa-se 19 na respectiva columna.

Exercicios para sommar

12°	25′	15″	26^d	15^h	10^m	3^s
43°	16′	32″,5	18^d	22^h	18^m	13^s
130°	48′	24″	120^d	21^h	6^m	40^s
180°	37′	15″,52	200^d	17^h	49^m	$53^s,2$
215°	40′	59″,38	153^d	12^h	36^m	17^s
8°	59′	36″,7	12^d	0^h	16^m	$24^s,3$

Subtracção

Regra — Dispõe-se os termos e faz-se a operação como a de numeros inteiros, devendo ter-se em vista o seguinte :

Quando alguma casa do minuendo tiver menor numero que o seu correspondente no subtrahendo, toma-se na casa esquerda uma unidade que decompõe-se em unidades inferiores que juntam-se com as que lá estiverem, considerando a casa donde tirou-se a unidade diminuida de um.

Exemplo

65^{pip}	15^{al}	8^{can}	2^{quart}
26	17	10	1
32	22	10	1

Na primeira columna podemos effectuar a operação, isto é, $2^{quart} - 1 = 1^{quart}$; na segunda temos 8 canadas menos 10 o que não se póde fazer ; vai-se aos almudes, toma-se um que vale 12 canadas que juntos as 8 fazem 20, agora já se póde tomar a differença que é 10. Na columna immediata temos 14 almudes menos 17, tambem não póde tomar-se a differença ; vamos ás pipas e tomamos uma que vale 25 almudes, sommando com as 14 temos 39 : 39 — 17 = 22.

Finalmente 64 pipas menos 26 dá 38.

EXERCICIOS

$13^{br}\ 1^{c}\ 4^{p}\ 3^{pp} - 8^{br}\ 0^{c}\ 4^{p}\ 7^{pp} = ?$

$35 @\ 12\,lb\ 0^{m}\ 5^{onç} - 26 @\ 18\,lb\ 1^{m}\ 6^{onç}\ 3^{oit} = ?$

$315^{\circ}\ 28'\ 32'' - 164^{\circ}\ 50'\ 42' = ?$

$360^{\circ} - 49^{\circ}\ 36'\ 49'' = ?$

Multiplicação

Na multiplicação será sempre conveniente empregar o methodo indirecto, isto é, das fracções ordinarias ; entretanto quando um dos factores fôr um numero incomplexo, o modo directo facilita a operação ; por isso vamos estudal-o.

Regra. — Para multiplicar um numero complexo por um incomplexo dispõe-se os factores como nos numeros inteiros, feito isto, a começar pela direita, multiplica-se cada especie de unidade do multiplicando pelo multiplicador, extrahindo de cada producto as reservas nelle contidas, afim de juntal-as ao producto da classe seguinte.

EXEMPLO

$128£\ 15^{s}\ 9^{d} \times 25 = 3219£\ 13^{s}\ 9^{d}$

$$\begin{array}{r} 128£\ \ 11^{s}\ \ 9^{d} \\ 25 \\ \hline 3219£\ \ 13^{s}\ \ 9^{d} \end{array}$$

Multiplicando 25 por 9 dinheiros obtivemos 225 dinheiros ; cada 12 dinheiros formando um soldo, 225 dinheiros formam 18 soldos e sobram 9 dinheiros, que escrevemos no logar competente. Multiplicando 25 por 15 soldos obtivemos 375 soldos, juntando os 18 que vieram de reserva da multiplicação dos dinheiros temos 393 soldos ; como 20 soldos formam uma libra dividimos 393 soldos por 20, afim de vermos quantas libras tem, o que feito nos mostra haver no referido numero 19 £ ficando de resto 13 soldos que escrevemos na casa dos soldos e levamos as 19 £ para juntar ao producto das libras.

Multiplicando 128 £ por 25 obtemos 3200 £, addicionando as 19 que vieram do producto antecedente obtemos 3219 £ que escrevemos.

EXERCICIOS

I — Um homem ganha por dia 219 £, 12 soldos e 8 dinheiros, quanto ganhará em um anno?

II — Uma braça de certa obra custa 8$754 quanto custarão 25 braças, 9 palmos, 7 pollegadas e 8 linhas?

III — Achar um arco 138 vezes maior que 54 grãos, 35 minutos e 19 segundos.

Divisão

Na divisão só podemos empregar o modo directo, quando o divisor fôr um numero incomplexo. Para os outros casos emprega-se o methodo das fracções ordinarias.

Regra. — Para dividir um numero complexo por incomplexo, dividem-se as unidades principaes do dividendo pelo divisor, obtem-se assim as unidades principaes do quociente ; converte-se o resto em unidades da primeira subdivisão, juntam-se as da mesma especie que estiverem no dividendo, divide-se o numero resultante pelo mesmo divisor, o quociente exprimirá unidades tambem da 1ª subdivisão ; havendo ainda resto será convertido em unidades da subdivisão immediata ; procedendo do mesmo modo que anteriormente obtem-se a parte respectiva do quociente, e assim se continua a divisão até chegar a infima classe das unidades do numero complexo.

EXEMPLO

Vamos dividir um arco de 318° 39′ e 42″ em 28 partes iguaes.

318° 39′ 42″	28
038	11° 22′ 50″ $\frac{22}{28}$
10	
×60′	
600	
+39	
639′	
079	
23	
×60″	
1380	
+42	
1422″	
022	

Dividindo 318 gráos por 28 obtivemos do quociente 11 gráos, ficando de resto 10 gráos que se convertem em minutos multiplicando por 60 o que dá 600 minutos, juntando a estes os 39 minutos do dividendo temos 639 minutos, effectuando a divisão obtemos 22 minutos, de quociente, ficando um resto do 23 minutos que é convertido em segundos e dá 1380 segundos, juntando os 42 segundos do dividendo formou-se o numero 1422 que dividido dá de quociente 50 segundos ou completando o quociente $50'' \frac{22}{28} = 50'' \frac{11}{14}$

EXERCICIOS

258 metros de certa obra custaram 3728 £, 6s 9d pergunta-se o preço de cada metro?

Uma fonte gastou 12 dias, 13 horas, 15 minutos e 28 segundos para encher 8 tanques iguaes; emquanto tempo encherá um só?

Uma locomotiva em 23 horas andou 64 leguas de sesmaria, 159 braças, 8 palmos, 7 pollegadas, e 9 linhas, qual era a sua velocidade por hora?

NOÇÕES SOBRE POTENCIAS E RAIZES DO 2° E 3° GRÃOS

QUADRADO E RAIZ QUADRADA

Chama-se quadrado de um numero, o producto desse numero por si mesmo.

Assim: 16 é o quadrado de 4, porque $16 = 4 \times 4$; 81 é o quadrado de 9 porque $81 = 9 \times 9$.

A este numero que se multiplica por si mesmo para dar o quadrado chama-se raiz quadrada do numero; portanto:

Raiz quadrada de um numero é o numero que multiplicado por si mesmo produz o quadrado.

Assim: 9 é a raiz quadrada de 81, porque $9 \times 9 = 81$, 12 é a raiz quadrada de 144, porque $12 \times 12 = 144$, e 144 é o quadrado de 12.

Para indicar que o numero deve ser elevado ao quadrado, usa-se escrever no alto do numero e um pouco á direita o algarismo 2.

EXEMPLO

$6^2 = 6 \times 6 = 36$ ou $36 = 6^2$, que se lê: 36 é igual a 6 *elevado a dois*.

$4^2 = 16$ ou $16 = 4^2$.

$15^2 = 225$ ou $225 = 15^2$.

A' este algarismo que se escreve no alto e a direita do numero que se deseja elevar ao quadrado e em geral a outra qualquer potencia chama-se *expoente*.

Na expressão $15^2 = 225$, 15 é a *raiz*, 225 é o *quadrado* e 2 é o *expoente*.

O *quadrado* de um numero tambem se chama 2ª *potencia* desse numero.

Para indicar que de um numero se deve extrahir a raiz quadrada, usa-se do signal $\sqrt{\ }$ que se chama *radical*.

Assim para extrahir a raiz quadrada de 64 usaremos da seguinte notação:

$$\sqrt{64} = 8$$

Lê-se: *raiz quadrada de 64 é igual a 8.*

EXEMPLOS

$$\sqrt{144} = 12 \qquad \sqrt{1225} = 35$$

Algumas vezes escreve-se o algarismo 2 dentro da abertura do signal radical; ex.: $\sqrt[2]{49} = 7$, mas é pouco usado.

Neste caso o algarismo 2 tem o nome de *indice* do radical.

Para elevar-se um numero ao quadrado multiplica-se esse numero por si mesmo uma vez.

EXEMPLOS

$$13^2 = 13 \times 13 = 169$$

$$27^2 = 27 \times 27 = 729$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ \hline 189 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

Tabella dos quadrados dos numeros de 1 a 20

Raizes....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

CUBO E RAIZ CUBICA

Cubo de um numero é o producto desse numero tomado como factor tres vezes.

Assim: 27 é o cubo de 3, porque 27 é igual a $3 \times 3 \times 3$

Raiz cubica de um numero é o numero que tomado como factor 3 vezes produz o cubo.

Assim: 4 é a raiz cubica de 64, porque tomado como factor 3 vezes produz 64, isto é, $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Para indicar que um numero deve ser elevado ao cubo, faz-se como para indicar o quadrado, mudando porém o *expoente* que em vez de ser 2 é 3.

Assim: 3^3 que lê-se — *tres elevado a tres*, quer dizer que 3 tem de ser elevado ao cubo, isto é, tem de ser tomado como factor tres vezes, portanto:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

$$4^3 = 64$$

$$12^3 = 1728$$

etc.

O cubo de um numero tambem se chama 3ª *potencia desse numero.*

Para indicar que de um numero se deve extrahir a raiz cubica, usa-se do signal radical sobre o numero, escrevendo-se na abertura do mesmo o algarismo 3.

EXEMPLO

$\sqrt[3]{512} = 8$. Lê-se: *raiz cubica de 512 é igual a 8.*

Para elevar-se ao numero ao cubo ou a 3ª potencia, multiplica-se o dito numero por si mesmo duas vezes.

EXEMPLOS

$$12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$$

$$25^3 = 25 \times 25 \times 25 = 15625$$

```
  12
  12   1ª vez
 ----
  24
 12
 ----
 144
  12   2ª vez
 ----
 288
144
 ----
1728
```

```
   25
   25   1ª vez
 -----
  125
  50
 -----
  625
   25   2ª vez
 -----
 3125
1250
 -----
15625
```

Tabella dos cubos dos numeros de 1 a 20

Raizes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3975	4096	4913	5832	6859	8000

ADDITAMENTO (*)

Regras para extrahir raizes quadradas e cubicas

RAIZ QUADRADA

Temos dois casos na extracção da raiz quadrada de um numero.

O 1° caso consiste na *extracção da raiz quadrada de um numero menor que* 100, o 2° *na de um numero maior que* 100.

O 1° caso se faz pela tabella dos quadrados dos numeros digitos que se deve ter em memoria.

Seja por exemplo o numero 81 do qual queremos extrahir a raiz quadrada. Vai-se á tabella e na linha correspondente aos quadrados encontramos esse numero cuja raiz se acha em cima, é 9. Se o numero dado não se encontrasse na tabella a sua raiz inteira seria a raiz do numero immediatamente inferior. Ex.: $\sqrt{72}$.

(*) Este capitulo é destinado á Escola Normal.

Procurando nos quadrados da tabella não acha-se o numero 72, neste caso se diz que o numero não é um quadrado perfeito, e a sua raiz será a do quadrado immediatamente inferior, que é 64, cuja raiz é 8; portanto a raiz quadrada de 72 é 8. Esta raiz, porém não é exacta, é apenas approximada, pois 8 é a raiz quadrada de 64 que é um numero menor que 72, logo a sua raiz tambem será menor; mas esta raiz tambem não póde ser 9, porque este numero é raiz de 81 que já é maior que 72; logo a raiz quadrada de 72 tem de ser maior que 8 e menor que 9, só póde ser 8 mais uma fracção. Esta fracção tambem se póde calcular approximadamente, porém por processo que não convém neste trabalho apresentar.

2° CASO. — A extracção da raiz quadrada de um numero maior que 100, se faz pela seguinte

Regra. — Divide-se o numero dado em classes de dois algarismos da direita para a esquerda, podendo a ultima classe da esquerda conter um só algarismo.

Vê-se qual é o maior quadrado que se acha contido na 1ª classe da esquerda, a raiz deste quadrado se escreve á direita do numero, delle separada por uma chave de divisão, eleva-se esta raiz ao quadrado e o resultado subtrahe-se da referida classe; á direita do resto, se houver, escreve-se a classe seguinte; do numero assim formado separa-se por um ponto o ultimo algarismo da direita e divide-se a parte restante á esquerda pelo dobro da raiz já achada (que é o numero que está na chave da divisão). O quociente obtido se escreve á direita da raiz e tambem á direita do numero que serviu de divisor; o numero assim formado se multiplica pelo mesmo quociente e o producto se subtrahe do numero que serviu do dividendo, juntamente com o algarismo separado; á direita do resto escreve-se a secção seguinte e faz-se o mesmo que fez-se para obter o 2° algarismo da raiz; assim se procede até a ultima secção com a qual se obterá o ultimo da raiz.

EXEMPLO

$$\sqrt{65536} = 256$$

```
6.55.36  | 256
 4       |---------------------
-----    | 45         25 ÷ 2 × 2
25.5     |  5
22.5     |----
------   | 225    303 ÷ 2 × 25
 303 6   |  506
 303.6   |    6
------   |----
    0    | 3036
```

A raiz é 256.

No exemplo acima — dividido o numero em classes de dois algarismos, viu-se que o maior quadrado que a 1ª secção continha era 4, cuja raiz 2 escrevemos na chave; esta raiz elevada ao quadrado da 4, numero que se subtrahe de 6, dando de resto 2, a direita deste resto escrevemos a classe seguinte formando deste modo o numero 255, do qual separamos o ultimo algarismo por um ponto, ficando á parte á esquerda 25; para dividir por 4 que é o dobro da raiz achada — o quociente 6 que é forte, como se verá da *1ª observação* que se segue, desprezou-se, tomando-se 5, numero que se escreveu a direita da raiz, ou a direita de 2 e, tambem á direita do divisor 4, formando-se o numero 45, o qual se multiplicou pelo mesmo quociente 5; portanto : 45 × 5, cujo producto 225 se subtrahiu do numero 255 que é o mesmo que serviu de dividendo, junto com o algarismo separado.

1.ª Observação.—Quando depois de ter escripto o quociente á direita do numero que serviu de divisor se faz a sua multiplicação pelo mesmo quociente e o producto não se póde subtrahir do numero que serviu de dividendo, junto com o algarismo separado, diminue-se o algarismo achado para raiz.

Foi o que se fez no exemplo acima.

O quociente 6, escripto á direita de 4 e multiplicado por elle mesmo deu de producto 276, isto é, 46×6=276, numero que não se póde subtrahir de 255, por ser maior, então em vez de 6, tomamos o numero menor 5 que serviu.

2ª Observação — Quando o algarismo tomado para raiz é menor do que deve ser, o resto que fica depois daquella subtracção, é maior ou igual ao dobro de toda a raiz, mais uma unidade ; portanto toda a vez que se se quizer verificar se o algarismo da raiz está certo multiplica-se por 2 toda a raiz e augmenta-se o producto de uma unidade ; se o resto da operação fôr menor que aquelle resultado, o algarismo achado está certo ; se fôr maior ou igual está errado, deve ser augmentado o algarismo da raiz.

6.55.36	255
4	
255	
225	
3036	
2525	
511	

No exemplo dado, se em vez de 6 para ultimo algarismo da raiz, tivessemos posto 5, teriamos : 505 × 5 = 2525 que subtrahido de 3036 dá de resto 511, numero este que é igual a 2 × 255 + 1 ou o dobro da raiz mais uma unidade donde se conclue que a raiz 255 deve ser augmentada, dando 256.

3ª Observação — Quando no decorrer do calculo o numero que serve de dividendo não póde conter o numero que serve de divisor, escreve-se *zero* na raiz, abaixa-se nova classe, separa-se o ultimo algarismo á direita, forma-se novo divisor e continua-se a operação.

Exemplo

$\sqrt{93025}$

9.30.25	305
9	$3 \div 2 \times 3 = 0$
03.02.5	$302 \div 2 \times 30 = 5$
3 02 5	605
0	5
	3025

4ª Observação — A raiz de um numero se compõe de tantos algarismos quantas forem as classes em que se dividir o numero.

5ª Observação.—Todo o numero terminado em 2. 3. 7 e 8 não é quadrado perfeito.

Exercicios

$\sqrt{365} = ?$ $\sqrt{169} = ?$ $\sqrt{61009} = ?$ $\sqrt{151276} = ?$

$\sqrt{737881} = ?$ $\sqrt{913894} = ?$ $\sqrt{5800945589} = ?$

$\sqrt{15164} = 123,\ldots$

1.51.64	123	
1		$5 \div 5 = 2$
051	22	
44	2	
76.4	44	$76 \div 24 = 3.$
72 9	243	
35	3	
	729	

RAIZ CUBICA

Como na raiz quadrada, tambem na raiz cubica ha dois casos.

1º caso — *Extracção da raiz de um numero menor que 1000.*

2º caso—*Extracção da raiz de um numero maior que 1000.*

O 1º caso se faz pela tabella dos cubos dos numeros digitos, que tambem se deve ter de memoria. Se o numero fôr um cubo perfeito, a sua raiz se acha na tabella, como $\sqrt[3]{27}$ que é 3.

Se o numero não estiver entre os cubos, não será um cubo perfeito, e então a sua raiz inteira será a do cubo que fôr immediatamente inferior Ex.: $\sqrt[3]{631}$. Indo á tabella não se encontra este numero, então a parte inteira da sua raiz será a raiz do numero 512 que é 8 ; logo $\sqrt[3]{631} = 8,\ldots$

2.º CASO

Regra. — Divide-se o numero em classes de três algarismos da direita para a esquerda, podendo a ultima ter sómente um ou dois algarismos ; extrahe-se a raiz do maior cubo contido na 1ª classe da esquerda e escreve-se essa raiz á direita do numero, delle separada por uma chave de divisão ; eleva-se essa raiz ao cubo e subtrahe-se da referida classe ; á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separam-se os dois ultimos algarismos da direita e divide-se a parte restante á esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada ; escreve-se o quociente obtido á direita da raiz, e eleva-se ao cubo toda a raiz achada, este cubo subtrahe-se das duas primeiras classes da esquerda do numero dado ; á direita do resto escreva-se a classe seguinte, e faz-se o mesmo que anteriormente, e assim se obtem o 3º algarismo da raiz, a qual se eleva tambem ao cubo e subtrahe-se já das tres primeiras classes do numero e assim consecutivamente.

EXEMPLO

$$\sqrt[3]{132651} = 51$$

132.651	51
125	$76 \div 3 \times 5^2 = 76 \div 75 = 1$
76.51	51 = 51
1326 51	51
0000 00	51
	255
	2601
	51
	2601
	13005
	132651

No exemplo: dividido o numero em classes de tres algarismos viu-se que o maior cubo contido na 1ª classe era 125, cuja raiz 5 escrevemos na chave; o seu cubo 125 subtrahiu-se da dita classe, ficando de resto 7, á direita do qual se escreve a classe seguinte, formando-se assim o numero 7651; separou-se os dois ultimos algarismos por um ponto 76.51 e dividiu-se a parte da esquerda ou 76, pelo triplo do quadrado da raiz ou 3×5^2 dando de quociente 1, que se escreveu na raiz.

A raiz toda ou 51 elevou-se ao cubo e subtrahiu-se das duas classes do numero, não deixando resto, donde se conclue que o numero é cubo perfeito.

OBSERVAÇÕES

1ª OBSERVAÇÃO — Quando o algarismo achado para a raiz é maior do que deve ser, o cubo de toda a raiz não se póde subtrahir das classes respectivas do numero.

2ª OBSERVAÇÃO — Quando o algarismo achado é menor do que deve ser, o resto que fica depois de subtrahir-se o cubo da raiz, é maior ou igual ao triplo do quadrado da raiz achada, mais o triplo da mesma raiz, mais uma unidade.

No exemplo passado, se em vez de 1 para ultimo algarismo da raiz tivessemos achado 0, a raiz 50 elevada ao cubo dava 125000 que subtrahido das duas classes do numero dá um resto de 7651 que é igual ao triplo do quadrado da raiz, mais o triplo da mesma raiz, mais uma unidade, isto é.

$$7651 = 3 \times 50^2 + 3 \times 50 + 1.$$
$$7651 = 3 \times 2500 + 3 \times 50 + 1$$
$$7651 = 7500 + 150 + 1.$$
$$7651 = 7651$$

132651	50
125	
7651	50
125000	50
7651	2500
	50
	125000

O que prova que a raiz deve ser augmentada para 51.

3ª OBSERVAÇÃO — Quando apparecer — 0 — para raiz, faz-se como na raiz quadrada. baixa-se á classe seguinte e continua-se a operação.

4ª OBSERVAÇÃO — A raiz cubica de um numero se compõe de tantos algarismos, quantos forem as classes em que se dividir o numero.

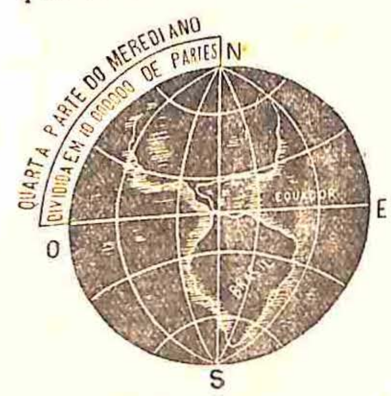
EXERCICIOS

$$\sqrt[3]{592704} = ?$$
$$\sqrt[3]{5725732069} = ?$$
$$\sqrt[3]{1124864} = ?$$
$$\sqrt[3]{375524} = ?$$
$$\sqrt[3]{12565948} = ?$$

SYSTEMA METRICO DECIMAL

Systema metrico é o systema de pesos e medidas que tem por base o *metro*.

Metro é a decima millionesima parte de um quarto do meridiano da terra.



A parte do meridiano que foi medida e dividida em 10.000,000 de partes, foi a que vai do polo do Norte ao Equador, no meridiano de Paris. A medição achou que esse comprimento era de 5.130,740 toezas, 4 pés, 5 pollegadas, e 4 linhas.

Esta extensão dividida em 10.000,000 de partes dá

$$\frac{5130740^{T}\,4^{p}\,5^{pp}\,4^{l}}{10\,000,000} = 3 \text{ pés, } 0 \text{ pollegadas, } 11 \text{ linhas, } 296 \text{ do pé}$$

francez, comprimento este a que se deu o nome de *metro*, unidade fundamental e base do novo systema de pesos e medidas.

Os 3 pés, 0 pollegadas, 11 linhas, 296 do pé francez equivalem a 4 palmos, 4 pollegadas, 4 linhas, 4 pontos do palmo portuguez; portanto o metro tem 4 palmos, 4 pollegadas, 4 linhas e 4 pontos, ou approximadamente 4 palmos e meio.

O systema metrico é *decimal*, porque as suas differentes unidades crescem ou diminuem na razão decupla, isto é, de dez em dez.

O systema comprehende as seguintes medidas: de *comprimento*, de *superficie* ou *áreas*, de *volumes*, *de capacidade para seccos e liquidos*, de *peso* e de *moeda*.

Cada uma tem a sua unidade principal, juntamente com multiplos e submultiplos della. Estas unidades são:

Metro................	para as medidas de		comprimento
Are..................	»	»	superficie.
Litro................	»	»	capacidade
Gramma...............	»	»	peso.
Stereo...............	»	»	volumes
Franco...............	»	»	moeda.

Chamam-se *multiplos* as medidas 10, 100, 1.000, 10.000 vezes maiores do que a unidade.

Submultiplos são as medidas 10, 100, 1.000 vezes menores que a unidade.

Para se designar os multiplos antepõe se ás ditas unidades os prefixos gregos:

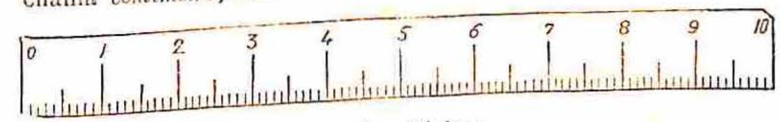
Deca	que quer dizer....................	10
Hecto	» » »	100
Kilo	» » »	1.000
Myria	» » »	10.000

Para designar-se os submultiplos antepõe-se os prefixos latinos.

Deci	que quer dizer...........	(0,1)	decimo.
Centi	» » »	(0,01)	centesimo
Milli	» » »	(0,001)	millesimo.

DO METRO

O metro que já sabemos o que é, obedecendo á lei do systema, divide-se em 10 partes iguaes e cada uma se chama *decimetro*, o decimetro se divide em 10 partes iguaes e cada parte se chama *centimetro*, etc.



Eis os seus multiplos e submultiplos:

Multiplos

Decametro	(Dm.) ou...........	10	metros
Hectometro	(Hm.) »	100	»
Kilometro	(Km.) »	1.000	»
Myriametro	(Mm.) »	10.000	»

Submultiplos

Decimetro	(dm.) ou	$0^m,1$	decima	parte	do	metro.
Centimetro	(cm.) »	$0^m,01$	centesima	»	»	»
Millimetro	(mm.) »	$0^m,001$	millesima	»	»	»

Observação.—A abreviatura dos multiplos se escreve com lettras maiusculas para differençar dos submultiplos que se escreve com lettras minusculas.

Escrever um numero metrico decimal

Regra. — Escreve-se primeiro a parte inteira com a designação da unidade e depois a parte decimal; não havendo inteiros, escreve-se zero e virgula na casa das unidades.

Exemplos

$215^m,03$

$0^{km},0258$

$0^m,26$

$10^{km},36$

Ler um numero metrico decimal

De tres modos póde-se ler os numeros que representam as diversas unidades do systema metrico decimal.

1.º MODO

Lê-se primeiramente a parte inteira, se houver, em seguida a decimal, dando no fim a designação da ultima subdivisão metrica ou decimal.

EXEMPLO

$10358^{m},704$

Conforme o exposto temos que ler assim: 10358 *metros* 704 *millimetros*.

2.º MODO

Lê-se todo o numero como se fosse um numero inteiro, dando no fim a designação da ultima casa.

Assim aquelle numero seria lido do seguinte modo: 10 *milhões*, 358 *mil*, 704 *millimetros*.

3.º MODO

Lê-se destacadamente cada ordem de unidades de que se compõe o numero, dando a cada uma a designação metrica respectiva.

Por este modo aquelle numero será lido como se segue 1 *myriametro*, 0 *kilometros*, 3 *hectometros*, 5 *decametros*, 8 *metros*, 7 *decimetros*, 0 *centimetros*, e 4 *millimetros*.

Destes tres modos o mais usado é o primeiro

Converter um numero de metros em seus multiplos e submultiplos

Regra. — Convertem-se metros em *decametros*, *hectometros*, *kilometros* e *myriametros*, recuando a virgula *uma*, *duas*, *tres* ou *quatro* casas para a esquerda o que equivale a dividir o numero por 10, 100 1000 ou 10000.

Seja o numero $52^{m},41$ para converter a *decametros*.
Como dez metros formam um decametro segue-se que quantas vezes 10 estiver contido no dito numero, tantos decametros havemos de ter, logo temos de dividir o numero por 10, o que se faz mudando a virgula uma casa para esquerda e portanto

$$.41 = 5^{Dm},241$$

Seja ainda $6574^{m},35$ para referir a *kilometros*.
Como 1000 metros constituem um kilometro, segue-se que temos de dividir o numero por 1000; logo

$$6574^{m},35 = 6^{Hm},57435$$

EXEMPLOS

$$3852^{m},5 = 385^{Dm},25 = 38^{Hm},525 = 3^{Km},8525 = 0^{Mm},38525$$

$$25^{m},30 = 2^{Dm},53 = 0^{Hm},253 = 0^{Km},0253 = 0^{Mm},00253$$

Regra. — Para reduzir metros a *decimetros*, *centimetros* e *millimetros*, anda-se com a virgula uma, duas, tres casas para a direita; o que é o mesmo que multiplicar o numero de metros por 10, 100, 1000.

Seja o numero $32^{m},58$ que desejamos converter a decimetros. Como um metro tem 10 decimetros, 2 terão 2×10, 3 terão 3×10 e portanto $32^{m},58$ terão $32^{m},58 \times 10$, isto é, temos de multiplicar o numero por 10, o que se faz mudando a virgula uma casa para a direita.

$$32^{m},58 = 325^{dm},8$$

Seja o numero $35^{m},875$ para converter á centimetros, temos que multiplicar por 100, porque um metro tem cem centimetros

$$35^{m},875 = 3587^{cm},5$$
$$3^{m},486 = 34^{dm},86 = 348^{cm},6 = 3486^{mm},0$$
$$3^{m},5 = 35^{dm},0 = 350^{cm},0 = 3500^{mm},0$$

Observação. — Estas divisões e multiplicações que se fazem para a conversão de metros a seus multiplos e submultiplos, em nada alteram o valor do numero, mudam apenas a designação.

1ª. CONSEQUENCIA

Dado preço de um metro para ter-se o preço de um *decametro, hectometro*, *kilometro*, *myriametro*, accrescenta-se ao preço de um metro, um, dois, tres ou quatro zeros, isto é, multiplica-se o preço do metro por 10, 100, 1000 ou 10000, porque o decametro é 10 metros, hectometro, cem, etc.

Exemplos

Custando um metro de fazenda.................. $520

1 decametro ou	10 metros custará	....	5$200
1 hectometro ou	100 » »	....	52$000
1 kilometro ou	1000 » »	....	520$000
1 myriametro ou	10000 » »	....	5:200$000

2.ª CONSEQUENCIA

Dado o preço de um metro, para obter-se o de um *decimetro, centimetro* ou *millimetro*, separa-se com a virgula *um, dois* ou *tres* algarismos á direita do numero que exprimir o preço de um metro; a parte que ficar á esquerda da virgula será o preço pedido, por consequencia divide-se este numero por 10, 100 ou por 1000, porque o *decimetro*, o *centimetro*, o *millimetro* são respectivamente a *decima*, a *centesima*, e a *millesima* parte do metro.

Exemplos

Custando 1 metro de cadeia de ouro............. 153$500

1 decimetro custará	....	15$350,0
1 centimetro »	....	1$535,0
1 millimetro »	....	$153^{rs},5$

Dos multiplos do metro só é usado como unidade, o *kilometro* nas medidas *itinerarias*, de estrada de ferro, etc., nas *geographicas*, não se usando por isso referir um numero a myriametros, hectometros ou decametros.

Nas pequenas distancias toma-se para unidade o *metro*. O numero 258^{m} lê-se 258 *metros* ; 9345^{m} lê-se 9345 *metros* ou 9 *kilometros* e 345 *metros*; 25436^{m} lê-se 25436 *metros* ou 25 *kilometros* e 436 *metros*.

Nas medidas que não vão muito além de um metro, usa-se do centimetro.

Assim dir-se-ha que um muro tem de largura 115 *centimetros* ou que uma porta tem de largura 85 *centimetros*.

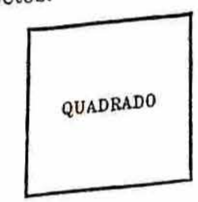
Nas medidas *scientificas*, toma-se por unidade o *millimetro*.

Assim diremos que o diametro de uma carabina ou o corpo de uma lettra, etc. é de tantos *millimetros*.

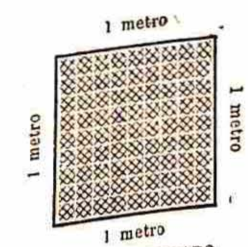
Para medidas ainda menores toma-se para unidade uma fracção do millimetro.

Do metro quadrado

Quadrado é uma figura plana fechada que tem 4 lados iguaes e 4 angulos rectos.



Metro quadrado é o espaço comprehendido em um quadrado, cujos lados têm um metro cada um.



METRO QUADRADO

Os metros quadrados dividem-se de 100 em 100. Por isso um metro quadrado se compõe de 100 *decimetros quadrados*, o decimetro quadrado de 100 *centimetros quadrados*, o centimetro quadrado de 100 *millimetros quadrados*; um kilometro quadrado tem 100 *hectometros quadrados*, o hectometro quadrado tem 100 *decametros quadrados*, o decametro quadrado 100 *metros quadrados*, etc.

Divisão do metro quadrado em 100 decimetros quadrados

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(Centesima parte da grandeza real ou um *decimetro* quadrado).

E' preciso não confundir as subdivisões do metro quadrado com as do metro linear; porque o metro linear divide-se em 10 decimetros e o metro quadrado, como se vê da figura, em 100 decimetros quadrados; o decimetro linear divide-se em

10 centimetros lineares, emquanto que o decimetro quadrado divide-se em 100 centimetros quadrados. O decimetro linear é a decima parte do metro linear, o centimetro a decima parte do decimetro, emquanto que o decimetro quadrado é a centesima parte do metro quadrado, o centimetro quadrado a centesima parte do decimetro quadrado ou a decima millesima parte do metro quadrado. Do exposto se vê que qualquer unidade quadrada inferior é a centesima parte da sua immediatamente superior. Por isso o decimetro quadrado, por exemplo, não é a decima parte do metro quadrado, porque a decima parte do metro quadrado (0^{m2}, 1 ou 0^{m2}, 10) tem dez decimetros quadrados e o decimetro quadrado é um centesimo do metro quadrado : 0^{m2}, 01.

Os multiplos do metro quadrado são:

O **decametro**	quadrado	(Dm^2)	que tem	100^{m2}
O **hectometro**	»	(Hm^2)	» »	10000^{m2}
O **kilometro**	»	(Km^2)	» »	1000000^{m2}
O **myriametro**	»	(Mm^2)	» »	100000000^{m2}

Os submultiplos são:

O *decimetro* quadrado (dm^2) que tem (0^m;01) a *centesima* parte do metro².

O *centimetro* quadrado (cm^2) que tem (0,0001) a *decima millesima* parte do metro².

O *millimetro* quadrado (mm^2) que tem (0^{m2},00000[illegible]) a *millionesima* parte do metro².

Ler um numero de metros quadrados

Para ler um numero de metros quadrados, ha dois modos:

1.° MODO.

Regra. — Divide-se mentalmente o numero em classes de dois algarismos, á começar da virgula para a direita e para a esquerda, depois lê-se da esquerda para a direita dando a cada classe a denominação competente.

Observação. — Quando os algarismos da direita da virgula, não forem em numero par, completa-se a ultima classe a direita com um zero.

Seja para ler..

$$2\,0\,6\,3\,5\,7\,0\,2\,3^{m^2},0\,5\,1\,2\,5$$

Mm²	Kil²	Hm²	Dm²	m²	dm²	cem²	mm²

Eis como teremos de ler : 2 *myriametros* quadrados, 6 *kilometros* quadrados, 35 *hectometros* quadrados, 70 *decametros* quadrados, 23 *metros* quadrados, 5 *decimetros* quadrados, 12 *centimetros* quadrados e 50 (*) *millimetros* quadrados.

2.° MODO

Regra. — Lê-se toda a parte inteira como se fosse um numero inteiro, dando no fim a designação de metros quadrados e em seguida a parte decimal tambem como se fosse um numero inteiro, dando no fim a designação da subdivisão decimal metrica competente.

Por este modo aquelle numero será lido : 206 *milhões* 357 *mil* 23 *metros* quadrados e 51 *mil* 250 *millimetros* quadrados ou 5125 *centesimos millesimos* do metro quadrado.

Destes dois modos o mais usado é o segundo.

Escrever um numero de metros quadrados

Regra. — Escreve-se o numero tendo em vista que cada classe de unidades deve constar de dois algarismos, excepto a 1ª a esquerda, si tiver inteiros;

(*) Completa-se esta classe com um zero e lê-se cincoenta e não cinco, ainda que o zero não se ache escripto no numero.

que pode constar de um só ; as casas que faltarem serão preenchidas com zeros, collocando-se a virgula no lugar competente.

Vamos escrever o numero : 2 *myriametros* quadrados, 35 *kilometros* quadrados, 86 *hectometros* quadrados, 4 *decametros* quadrados, 20 *metros* quadrados, 12 *decimetros* quadrados, 6 *centimetros* quadrados e 90 *millimetros* quadrados.

Escreveremos

$$2\,3\,5\,8\,6\,0\,4\,2\,0^{m^2},\,1\,2\,0\,6\,9\,0$$

2	35	86	04	20	12	06	90
myriametros ²	kilometros ²	hectometros ²	decametros ².	metros ²	decimetros ²	centimetros ²	millimetros ²

Conversão do metro quadrado em seus multiplos

Regra. — Convertem-se metros quadrados em seus multiplos, fazendo a virgula mudar de duas, quatro, seis, etc., casas para a esquerda.

Exemplos.

$204372960^{m^2},50 = 2043729^{Dm^2},6050 =$
$20437^{Hm^2},296050 = 204^{Km^2},37296050 =$
$2^{Mm^2},0437296050.$

Conversão do metro quadrado em seus submultiplos

Regra. — Reduzem-se metros quadrados a seus submultiplos, fazendo a virgula mudar de duas quatro, seis, etc., casas para a direita.

EXEMPLOS

$3^{m2}.015645 = 301^{dm2},5645 = 30156^{cm2},45 = 3015645^{mm2},00$

$2^{m2},50 = 250^{dm2},00 = 25000^{cm},= 250000^{mm2},000$

1.ª CONSEQUENCIA

Tendo-se o preço de um metro quadrado, para ter o de um decametro quadrado, de um hectometro quadrado, de um kilometro quadrado ou de um myriametro quadrado, basta accrescentar ao preço do metro quadrado dois, quatro, seis ou oito zeros.

EXEMPLOS.

Custando um metro quadrado de terras		....	$530
Um decametro quadrado	$(100^{m2},00)$	custará.	53$000
Um hectometro	» $(100000^{m2},00)$	»	5:300$000
Um kilometro	» $(1000000^{m2},00)$	»	530:000$000
Um myriametro	» $(100000000^{m2},05)$	»	53.000:000$000

2.ª CONSEQUENCIA

Dado o preço de um metro quadrado, para obter-se o de um decimetro quadrado, centimetro quadrado, millimetro quadrado, separa-se com a virgula dois, quatro, seis algarismos, a direita do numero que exprimir o preço de um metro quadrado, a parte que ficar a esquerda da virgula será o preço pedido.

EXEMPLOS.

Custando um metro quadrado de terras		....	1:350$000
Um decimetro quadrado	$(0^{m2},01)$	custará.......	13$500,00
Um centimetro	» $(0^{m2},0001)$	»	$135,00
Um millimetro	» $(0,000001)$	»	1,35

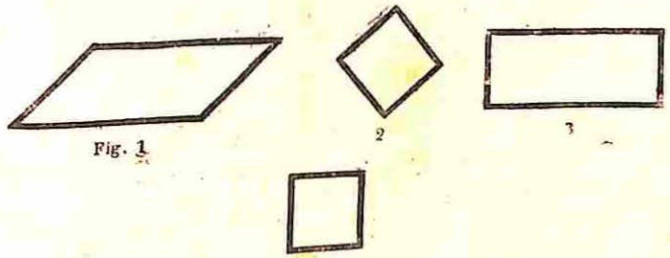
Dos multiplos do metro quadrado o mais usado como unidade é o *kilometro quadrado*, por isso não é usado referir um numero, quer na escripta, quer na leitura a *myriametros*, *hectometros* ou *decametros* quadrados.

O *metro quadrado* e seus submultiplos *decimetro* e *centimetro* quadrados servem para avaliar as pequenas superficies que pelo antigo systema de pesos e medidas eram avaliadas em braças, palmos e pollegadas quadradas.

Chama-se *superficie* a extensão que tem duas dimensões: *comprimento* e *largura*.

Chama-se *parallelogrammo* a figura que tem quatro lados e, parallelos dois a dois.

EXEMPLO

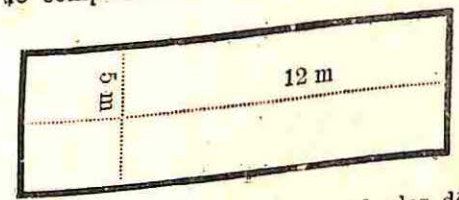


Quando os quatro angulos do parallelogrammo forem rectos como nas figuras ns. 3 e 4, o parallelogrammo tem o nome de *rectangulo*.

Para avaliar uma superficie que tenha a forma de um parallelogrammo, multiplica-se o comprimento pela largura.

EXEMPLO

Vamos avaliar a superficie de uma sala que tem 12 metros de comprimento e 5 de largura,

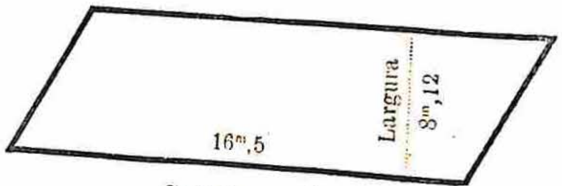


$12 \times 5 = 60^{m2}$

A sala tem 60 metros quadrados de superficie.

Outro exemplo

Vamos avaliar a superficie de um terreno que tem a forma de um parallelogrammo de $16^m,5$ de comprimento e $8^m,12$ de largura



Comprimento

$16^m,5 \times 8^m,12 = 133^{m2},98.$

$$\begin{array}{r} 16.5 \\ 8.12 \\ \hline 330 \\ 165 \\ 1320 \\ \hline 133,980 \end{array}$$

Logo o terreno tem uma superficie de $133^{m2},98$

Observação. — As superficies que tenham formas differentes das que tratamos tambem são avaliadas, porém exigem calculo diverso do que acabamos de empregar

Nas grandes superficies, nas medidas geographicas e topographicas emprega-se como unidade o *kilometro quadrado*. Tendo-se de medir a superficie de um continente, paiz, estado, provincia ou municipio, a unidade será o kilometro quadrado.

Assim diremos que o Estado do Amazonas tem 1897020 *kilometros quadrados*; que o Brazil tem 8338074 *kilometros quadrados*, etc.

Nas medidas de avaliar propriedades territoriaes, campos de lavoura, roças, etc., que se chamam *agrarias*, serve de unidade o *decametro quadrado* que toma então o nome de *are*, o qual substitue a *geira* de 400 braças quadradas, o *alqueire*, etc.

DO ARE

Are é um quadrado que tem de cada lado 10 metros de comprimento ou 100 metros quadrados.

$10^m \times 10^m = 100^{m2}$ (fig)

10 metros

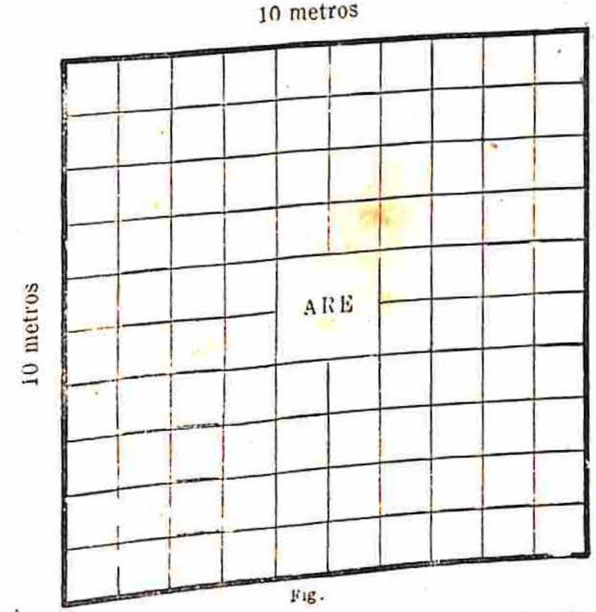


Fig.

O *are* serve para medir os terrenos de cultura, campos, fazendas, etc.; é pouco mais que 20 1/2 braças quadradas

Dos multiplos do are só é usado o *hectare* ou 100 ares; dos submultiplos o *centiare* (0ª, 01) ou a centesima parte do are.

Em vez do *centiare* é mais usado o metro quadrado que é igual ao centiare.

O centiare é igual ao metro quadrado, porque um are tendo 100^{m2}, a centesima parte é um metro quadrado. ($100^{m2} \div 100 = 1^{m2},00$).

As abreviaturas do are são: *a* para o are, *Ha* para o hectare e *ca* para o centiare.

Conversões

Convertem-se *ares* em hectares mudando a virgula duas casas para a esquerda, e em *centiare* ou *metros quadrados* mudando duas casas para a direita.

EXEMPLOS

$324^{a},12 = 3^{Ha},2412$
$12^{a},50 = 1250^{ca},00$ ou $1250^{m2},00$
$1^{a},48 = 0^{Ha},0148$
$1^{a},48 = 148^{ca},00 = 148^{m2}$
$135^{a} = 13500^{m2}$ ou 13500^{ca}.

Convertem-se *metros quadrados* em *ares* e *hectares* andando com a virgula duas, quatro casas para a esquerda do numero que representar *metros quadrados*.

EXEMPLOS

$3728^{m2} = 37^{a},28 = 0^{Ha},3728$
$158412^{m2} = 1584^{a},12 = 15^{Ha},7412$

OBSERVAÇÃO. — Torna-se desnecessario converter ares em *decares, kiloares, myriares, deciares e milliares*, porque absolutamente não são usados esses multiplos e submultiplos.

Nas medidas quadradas ou de superficie, a parte decimal dos numeros é sempre formada de classes de dois algarismos ; havendo um só accrescenta-se um zero.

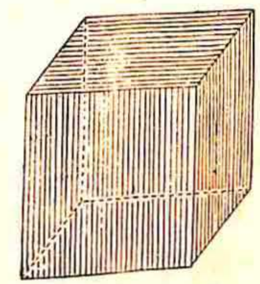
EXEMPLOS

$396^{a},5 = 396^{a},50 = 39650^{ca}$

DO METRO CUBICO

Cubo é o corpo geometrico que tem seis faces quadradas e iguaes entre si.

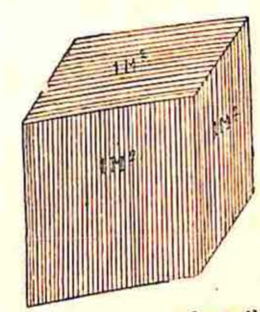
EXEMPLO



Cubo

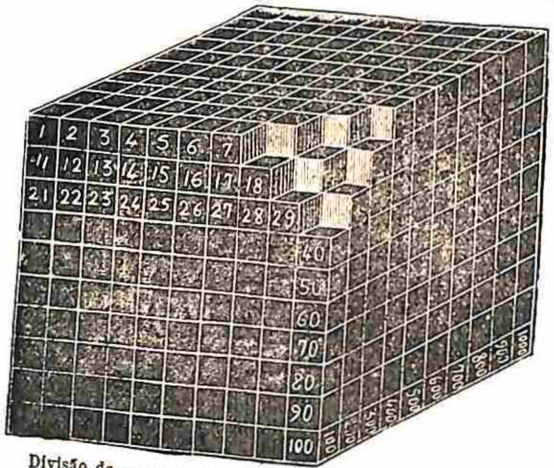
Metro cubico é o volume de um cubo cujas faces tem cada uma um metro quadrado.

EXEMPLO



O *decimetro cubico* tem de cada face um decimetro quadrado.
O *centimetro cubico* tem de cada face um centimetro quadrado.
O *millimetro cubico* tem de cada face um millimetro quadrado.

Os metros cubicos dividem-se de 1000 em 1000 partes : visto isso, o *metro cubico* divide-se em 1000 *decimetros cubicos* ; o decimetro cubico em 1000 *centimetros cubicos* e assim por diante.



Divisão do metro cubico em 1000 decimetros cubicos.

As unidades cubicas usadas são sómente :

O *metro cubico* (m^3) que tem 1000 decimetros cubicos.

O *decimetro cubico* (dm^3) que tem 1000 centimetros cubicos.

O *centimetro cubico* (cm^3) que tem 1000 millimetros cubicos.

Observação. — E' preciso tambem não confundir o decimetro e o centimetro cubicos com o decimetro e o centimetro lineares; porque dividindo-se o metro cubico em 1000 decimetros cubicos e o decimetro cubico em 1000 centimetros cubicos, vê-se que cada unidade inferior é sempre a millesima parte da immediatamente superior, donde se conclue que o decimetro cubico é a millesima parte do metro cubico ($0^{m3},001$) ; o centimetro cubico, a millesima parte do decimetro cubico ($0^{dm3},001$) ou a millionesima parte do metro cubico ($0^{m3},000001$), etc., emquanto que o decimetro e o centimetro lineares, como já vimos, são a decima e centesima parte do metro linear, ($0^{m},1$ e $0^{m},01$).

Tambem é preciso(notar que o decimetro cubico, por exemplo, não é igual a decima parte do metro cubico, porque a decima parte do metro cubico ($0^{m3},100$) lê-se, e é, cem decimetros cubicos, emquanto que um decimetro cubico á a millionesima parte do metro cubico ($0^{m3},0001$).

Ler um numero de metros cubicos

Regra. — Divide-se o numero em classes de tres algarismos, da virgula para a direita, lê-se a parte inteira, si houver como se fosse um numero inteiro, dando no fim a designação de metros cubicos depois a decimal dando a 1ª classe a designação de *decimetros cubicos*, a 2ª a de *centimetros cubicos* e a 3ª a de *millimetros cubicos*.

Observação. — Si a ultima classe da direita não contiver tres algarismos, completar-se-ha accrescentando-lhe os zeros precisos.

Exemplo

3 5 7 6^{m3}, 0 6 5 8 0 0 4

Lê-se : 3576 *metros cubicos*, 65 *decimetros cubicos*, 800 *centimetros cubicos*, e 400 *millimetros cubicos*, (*) ou 3576 *metros cubicos* e 65800400 *millimetros cubicos*, ou ainda 3576 *metros cubicos* e 6580004 *decimos millionesimos* do metro cubico.

Escrever um numero de metros cubicos

Regra. — Escreve-se primeiro a parte inteira, si houver, e em seguida a decimal, tendo em vista que cada classe de unidades decimaes deve constar de tres algarismos. As ordens que faltarem serão preenchidas com zeros.

Exemplo

Vamos escrever o numero 6 5 0 9 2 8 metros cubicos, dois decimetros cubicos, 3 7 0 centimetros cubicos e 9 6 millimetros cubicos.

(*) Completou-se a classe accrescentando 2 zeros.

Escreveremos :

$$650928^{m3},002370096$$

metros cubicos — decimetros cubicos — centimetros cubicos — millimetros cubicos

Conversão do metro cubico a seus submultiplos

Reduzem-se metros cubicos a seus submultiplos, fazendo a virgula mudar de tres, seis, nove, casas para a direita.

Exemplo

$$152^{m3},025300 = 152025^{dm3},3002 = 152025300^{cm3},2$$
$$= 152025300200^{mm3},000$$

$$0^{m3},157481 = 157^{dm3},482 = 157482^{cm2},000$$
$$= 157482000^{mm3}$$

Conversão do millimetro cubico a unidades superiores

Convertem-se *millimetros cubicos* em centimetros e decimetros e metros cubicos, mudando a virgula tres, seis, nove, casas para a esquerda.

Exemplo

$$154200302660^{mm3} = 154200302^{cm3},660 =$$
$$154200^{dm3},302660 = 154^{m3},200302660.$$

Consequencias

Tendo-se o preço de um metro cubico para obter o de um decimetro, centimetro ou millimetros cubicos, basta separar com uma virgula, 3, 6, 9 algarismos á direita do numero que representar

o preço do metro cubico ; a parte que ficar á esquerda da virgula será o preço pedido.

Reciprocamente. — Tendo-se o preço de um millimetro cubico, e querendo-se o de um centimetro, decimetro ou metro cubico, accrescenta-se 3, 6, 9 zeros ao preço do millimetro cubico, é o mesmo que multiplicar por 1000, 1000000, etc.

Exemplo

Custando o metro cubico de um muro...	2:500$000
Um decimetro cubico ($0^{m3},001$) custará.	2$500
Um centimetro » ($0^{m3},000001$) »	$2^{réis},5$
Um millimetro » ($0^{m3},000000001$) custará... . . .	$0^{réis},0025$
Custando um millimetro cubico de certa parede . .	$0^{réis},000032$
Um centimetro cubico custará....	$0^{réis},032$
Um decimetro cubico »	$32^{réis}$
Um metro cubico custará..	$32.000^{réis}$

O *metro cubico* serve para medir os volumes que eram avaliados em braças cubicas, palmos cubicos, etc., como o volume das pedras, barro, madeiras, etc., das construcções.

O *volume* de um corpo é a porção do espaço limitada pela superficie do corpo.

O volume do corpo tem tres dimensões *comprimento, largura e altura* ou profundidade

Chama-se *parallelipipedo* a um corpo cujas faces são parallelogrammos, exemplos .

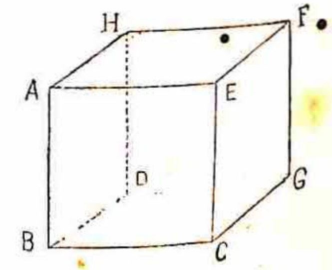


Fig A

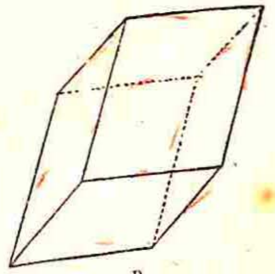


Fig. F

O parallelipipedo é *rectangulo*, quando as suas faces são todas rectangulos como a fig *A*

O *tubo* é um parallelipipedo rectangulo cujas faces são todas quadradas iguaes.

Para avaliar o volume de um corpo que tenha a fórma de um parallelipipedo, multiplica-se entre si as suas tres dimensões.

Se quizessemos avaliar o volume da figura *A* teriamos de multiplicar a sua altura *AB* pelo comprimento *BC* e pela largura *BD*.

Para maior clareza, supponha-se que desejamos avaliar o volume de um caixão que tenha a fórma da figura *A*, tendo as seguintes dimensões: *altura* $2^m,2$, *comprimento* $1^m,5$ e *largura* $0^m,8$.

Teremos $2^m,2 \times 1^m,5 \times 0,8 = 2^m,640 = 2640^{dm3}$

OUTRO EXEMPLO

Quantos metros cubicos de ar conterá uma sala que tenha de comprimento 10 metros, de largura 5, e de altura $6^m,5$?

$$10^m \times 5^m . 6^m,5 = 325^{m3}$$

Tem 325 metros cubicos de ar.

Uma viga de madeira tem as seguintes dimensões:

Comprimento	$= 4^m,25$
Largura	$= 22^{cm}$
Grossura	$= 82^{mm}$

Chamando *V* o volume teremos:

$$V = 4^m,25 \times 0^m,22 \times 0^m,82 = 0^{m3},076970$$

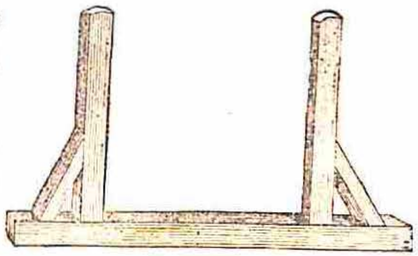
N. B. — O professor fará ver ao alumno que, no caso de ser o parallelipipedo obliquo, a sua altura, comprimento e largura, não são tres quaesquer arestas que concorrem em um ponto, como o exemplo que demos.

OBSERVAÇÃO. — Os volumes de corpos de formas differentes da que fallamos tambem são avaliados, porém para isso temos de empregar calculos diversos dos que ensinamos.

— Nos pequenos volumes toma-se por unidade o *decimetro* e *centimetros cubicos*.

O metro cubico equivale a 1000 *litros* ou a 1000 *kilogrammas* como veremos mais adiante.

DO STEREO



Stereo é o cubo de um metro que servia para medir lenha.

Esta medida não foi adoptada no Brazil; prevaleceu o uso de contar a lenha por feixes ou centos e milheiros de achas.

Mesmo na Europa nos paizes que seguem o systema metrico decimal já não se usa o *stereo*. O carvão e a lenha são vendidos a peso. Os multiplos e submultiplos do *stereo* que a principio estiveram em uso, são:

O *decastereo* (Dst) ou 10 *stereos* e o *decistereo* (dst) ou a decima parte do stereo ($0^{st},1$)

Um numero de *stereos* é lido e escripto da mesma maneira que se lê e escreve um numero de metros lineares.

EXEMPLO

$25^{st},7$ lê-se: 25 stereos e 7 decistereos

Convertem-se stereos em decastereos mudando a virgula uma casa para a esquerda, e em decistereos uma casa para a direita.

EXEMPLO

$$37^{st},20 = 3^{dst},720 = 372^{dst},9$$

Convertem-se stereos a metros cubicos, mudando a designação da unidade — de stereos a metros cubicos.

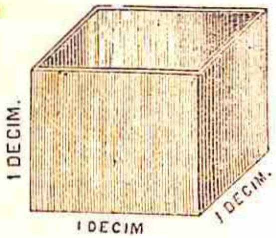
EXEMPLO

$$35^{st},6 = 35^{m3},6$$

Por isso — $2^{st},5$ de lenha é o mesmo que $2^{m3},500$, isto é, 2 metros cubicos e 500 decimetros cubicos.

Faz-se isto porque um stereo é um metro cubico.

DO LITRO

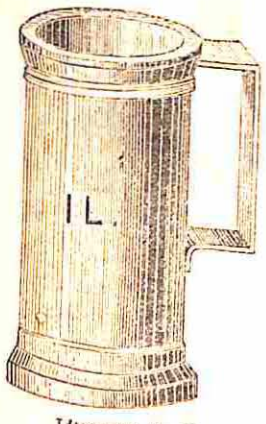


O litro — um decimetro cubico

Litro é a capacidade de um decimetro cubico.

O litro serve para se medirem os liquidos e seccos, como: o leite, vinho, azeite, feijão, milho, farinha, etc.

As medidas de litro tem a fórma cylindrica, variando na altura, segundo são destinadas a medir liquidos ou seccos, porém tendo sempre a mesma capacidade.



Litro para liquidos

O litro para *liquidos* é de estanho, folha de flandres, etc., e a sua altura deve ser o dobro do seu diametro.

As medidas para oleo, e leite tem a altura o diametro iguaes.

Litro para seccos

O litro para seccos é de ferro, madeira, etc., e a sua altura interior deve ser $^2/_3$ do seu diametro.

Multiplos do litro que são usados

Decalitro. (Dc) que vale 10 litros.
Hectolitro. (Hl) que vale 100 litros.

Os submultiplos, são:

Decilitro (dc) ou a decima parte do litro........ (0^l,1)
Centilitro (cl) ou a centesima parte do litro..... (0,01)

Para facilitar o commercio adoptou-se tambem as medidas duplas e metades de medida.

Os duplos usados são:

Duplo decalitro	que é igual a	20 litros.........	(20^l,0)
Duplo litro	» »	2 »	2^l,0
Duplo decilitro	» »	2 decilitros.......	0^l,2
Duplo centilitro	» »	2 centilitros......	0^l,02

As metades de medidas, são:

Meio decalitro	que é igual a	5 litros...........	5^l,0
Meio litro	» »	5 decilitros........	0,5
Meio decilitro	» »	5 centilitros.......	0^l,05

A numeração dos litros é a mesma que a dos metros lineares.

O numero 23 hectolitros, 2 decalitros, 5 litros, 3 decilitros e 8 centilitros, é escripto:

$$2325^l38$$

Lê-se 2325 litros e 38 centilitros.

Para converter litros em seus multiplos e submultiplos, procede-se como na conversão de metros lineares em seus multiplos e submultiplos, e as consequencias são as mesmas.

EXEMPLOS

$$3428^l,35 = 342^{dl},835 = 34^{hl},2835 = 34283^{dl},5 = 342835^{cl},0.$$

2.°

Custando um litro de vinho...........	2$500
Um hectolitro custará..................	250$000
Um decilitro »	250
Um centilitro »	25

Relações do litro com o metro cubico

Sendo um litro a capacidade de um decimetro cubico, um litro será a millesima parte de um metro cubico, (0^{m3},001) porque um decimetro cubico é a millesima parte do metro cubico, portanto são precisos mil litros ou um kilolitro para formar um metro cubico. Dahi se deduz as seguintes relações entre as duas especies de unidades.

Relações do litro para o metro cubico

1 litro = 0^{m3},001 (1 decimetro cubico)
1 decalitro = 0^{m3},010 (10 decimetros cubicos)
1 hectolitro = 0^{m3},100 (100 decimetros cubicos)
1 kilolitro = 1^{m3},000 (1 metro cubico)
1 decilitro = 0^{m3},000100 (100 centimetros cubicos)
1 centilitro = 0^{m3}, 000010 (10 centimetros cubicos)
1 millimetro = 0^{m3},000001 (1 centimetro cubico)

Relações do metro cubico para o litro

1 metro cubico = 1000^{l} (1000 litros ou 1 kilolitro)
1 decimetro » = 1 (1 litro)
1 centimetro » = 0^{l}001 (1 millilitro)

Se quizessemos converter 3^{m3},020 dagua a litros, fariamos da seguinte fórma:

Como um litro é igual a um decimetro cubico, vamos converter 3^{m3},020 a decimetros cubicos, o que feito produz 3020^{dm3}, isto é, 3^{m3},020 = 3020^{dm3}. Depois disto muda-se a designação de decimetros cubicos para litros.

Logo: 3^{m3},020 = 3020^{dm3} = 3020, portanto:

3^{m3},020 = 3020^{l}

Seja agora 24 decalitros para referir a metros cubicos.

Em primeiro lugar convertem-se os 24 ^{Dl} a litros, isto é, 24 ^{Dl} = 240^{l}.

Feito isto muda-se a designação de litros para decimetros cubicos: 24 ^{Dl} = 340^{l} = 240^{dm3}.

Depois de obtermos decimetros cubicos, convertem-se estes a metros cubicos:

24 ^{Dl} = 240^{l} = 240^{dm3} = 0^{m3},240

Do exposto deduzimos as seguintes regras para

Referir um numero de litros a metros cubicos

Regra. — Substitue-se a denominação de litros pela de decimetros cubicos, depois convertem-se estes em metros cubicos ou nos seus multiplos e submultiplos.

Si o numero dado exprimir um multiplo ou submultiplo do litro, serão convertidos primeiramente a litros.

EXEMPLO

3580^{l} para referir a metros cubicos
3580 = 3580^{dm3} = 3^{m3},580
3580^{l} = 3^{m3},580.

250^{Hl} para referir a metros cubicos
250^{Hl} = 25000^{l} = 25000^{dm3} = 25^{m3},000
250^{Hl} = 25^{m3}

32^{Dl}, 12 = para referir a centimetros cubicos
32^{Dl},12 = 321^{l},2 = 321^{dm3},2 = 321200^{cm3}
32^{Dl},12 = 321200^{cm3}

186^{Hl},5 para referir a millimetros cubicos
186^{Hl},5 = 18650^{l} = 18650^{dm3} = 18650000000^{mm3}
186^{Hl},5 = 18650000000^{mm2}

Referir um numero de metros cubicos a litros

Regra — Reduz-se primeiro o numero de metros cubicos a decimetros cubicos, feito isto, muda-se a designação de *decimetros cubicos* para *litros*, podendo-se depois converter estes em seus multiplos ou submultiplos.

Si o numero dado exprimir unidades superiores ao metro cubico ou inferiores ao decimetro cubico, póde-se logo converter directamente a decimetros cubicos.

EXEMPLO

240^{m3} para referir a litros

$$240^{m3} = 240000^{dm3} = 240000^{l}$$
$$240^{m3} = 240000^{l}$$

$358^{m3},100$ para referir a decilitros

$$358^{m3},100 = 358100^{dm3} = 358100^{l} = 3581000^{dl}$$
$$358^{m3},100 = 3581000^{dl}$$

357800^{cm3} para referir a litros

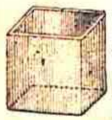
$$357800^{cm3} = 357^{dm3},800 = 557^{l},8$$
$$357800^{dm3} = 357^{l},8$$

350^{mm3} para referir a centilitros

$$350^{mm3} = 0^{dm3},000350 = 0^{l},000350 = 0^{cl},035$$
$$350^{mm3} = 0^{cl},035$$

DA GRAMMA

Gramma é o peso dagua distillada a 4 gráos centigrados, contida na capacidade de um centimetro cubico. (*)



A gramma serve para se pesarem as pequenas quantidades.

No commercio está adoptado o *kilogramma* como unidade de peso, e por isso as suas fracções e multiplos.

Assim diz-se : meio kilogramma ($0^{kg},5$) 5 kilogrammas, 15 kilogrammas, etc.

Usa-se mais commummente da palavra *kilo* abreviadamente, exprimindo a palavra kilogramma.

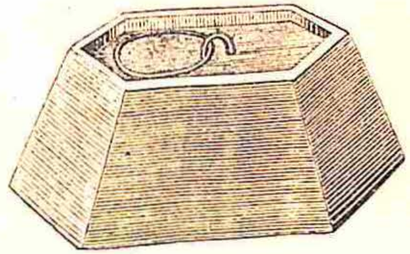
(*) A agua na temperatura superior ou inferior a 4 gráos torna-se menos densa, portanto a 4 gráos está na sua *maxima* densidade, por isso escolheu-se esta temperatura para a determinação da *gramma*.

Assim diz-se : *meio kilo* em vez de *meio kilogramma*, 25 kilos ($25^{k},0$) em vez de 25 kilogrammas ($25^{kg},0$).

Os pesos em uso no commercio formam uma serie de 24 pesos — desde 50 kilogrammas até um milligramma.

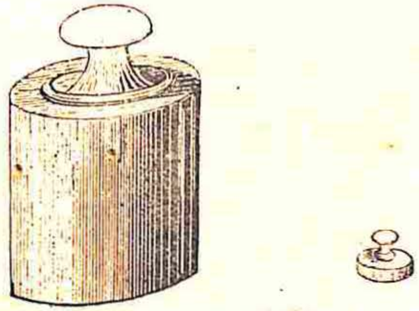
Cinco, geralmente de ferro tem a forma de pyramides truncadas, com uma argola na parte superior.

São . 50, 20, 10, 5 e 2 kilogrammas.



Forma dos pesos de ferro.

Dez, geralmente de latão, tem a forma cylindrica e são de 1 *kilogramma*, 500 *grammas* ou *meio kilogramma*, 200 *grammas*, 100 *grammas*, 50 *grammas*, 20 *grammas*, 10 *grammas*, 5 *grammas*, 2 *grammas* e 1 *gramma*,

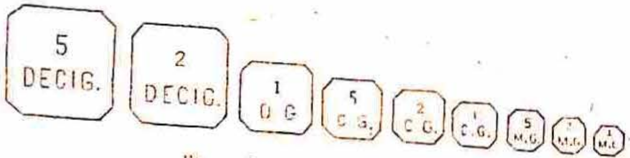


Forma dos pesos de latão.

Os outros 9 são laminas de cobre, platina. etc.

Servem para pesar objectos preciosos, como : ouro prata diamantes, as drogas, etc.

5 *decigrammas* 5 *centigrammas* 5 *milligrammas*
2 » 2 » 2 »
1 » 1 » 1 »



Forma dos pesos em laminas.

Os multiplos da gramma, são:

Decagramma (Dg) ou 10 grammas.
Hectogramma (Hg) ou 100 grammas.
Kilogramma (Kg) ou 1000 grammas.
Myriagramma (Mg) ou 10000 grammas.
Ha tambem dois multiplos nominaes.
Quintal metrico que tem 100 kilogrammas.
Tonelada metrica que tem 1000 kilogrammas.

Os submultiplos, são:

Decigramma (dg) ou a 10ª parte da gramma.... $(0^g,1)$
Centigramma (cg) ou a 100ª » » .... $(0^g,01)$
Milligramma (mg) ou a 1000ª » » .... $(0^g,001)$

A numeração de grammas e mais unidades de peso é a mesma que a de metros lineares.

As conversões da gramma em seus multiplos e submultiplos se fazem como as de metros lineares.

EXEMPLO

$$3578^g,12 = 357^{Dg},812 = 35^{Hg},7812 = 3^{Kg},57812 = 0^{Mg},357812$$
$$37^g,25 = 372^{dg},5 = 3725^{cg},0 = 37250^{mg},0$$

Relação da gramma com o metro cubico

Sendo uma gramma a capacidade de um centimetro cubico, e tendo o metro cubico 1000000 de centimetros cubicos, a gramma será a millionesima parte do metro cubico $1^g = 0^{m^3},000001$.

São precisos pois um milhão de grammas ou 1000 kilogrammas para formar um metro cubico. Do exposto se obtem as seguintes relações:

Da gramma com o metro cubico

A *gramma* corresponde a 1 centimetro^3 ou a millionesima parte do m^3 ($0^{m^3},000001$)

O *decagramma* corresponde a 10 centimetros^3 ou a centesima millesima parte do m^3 ($0^{m^3},00001$)

O *hectogramma* corresponde a 100 centimetros^3 ou a decima millesima parte do m^3 ($0^{m^3},0001$)

O *kilogramma* corresponde a 1 decimetro^3 ou a millesima parte do m^3 ($0^{m^3},001$)

O *myriagramma* corresponde a 10 decimetros^3 ou a centesima parte do m^3 ($0^{m^3},01$)

O *quintal metrico* corresponde a 100 decimetros^3 ou a decima parte do m^3 ($0^{m^3},1$).

A *tonelada metrica* corresponde a 1 metro^3

O *decigramma* corresponde a 100 millimetros^3 ou a decima millionesima parte do m^3 ($0^{m^3},0000001$)

O *centigramma* corresponde a 10 millimetros^3 ou a centesima millionesima parte do m^3 ($0^{m^3},00000001$)

O *milligramma* corresponde a 1 millimetro^3 ou a billionesima parte do metro^3 ($0^{m^3},000000001$)

Do metro cubico com a gramma

O *centimetro* cubico corresponde a 1 gramma.
O *decimetro* » » a 1000 grammas ou kilog.
O *metro* » » a 1000000 grammas ou 1 tonelada metrica (1000 kil.)

Si quizessemos converter $5^{m^3},138$ a grammas, procederiamos deste modo: Como uma gramma é igual a um centimetro cubico, temos que reduzir $5^{m^3},138$ a centimetros cubicos, reduzido dá: $5^{m^3},138 = 5138000^{cm^3}$. Obtido centimetros cubicos muda-se esta designação pela de grammas, isto é: $5138000^{cm^3} = 5138000^{gr}$. Portanto $5^{m^3},138 = 5138000^{gr}$.

Temos agora $1250^{kg},5$ para referir a metros cubicos. De dois modos podemos proceder:

1.º Como sabemos que um kilogramma equivale a um decimetro cubico, basta mudar a designação de kilos para dm^3: $1250^{kg},5 = 1250^{dm^3},5$. Feito isto convertem-se os decimetros cubicos a metros cubicos e então resulta:

$$1250^{kg},5 = 1250^{dm3},5 = 1^{m3},250500$$

2.º Reduz-se primeiramente os kilogrammas a grammas, em seguida muda-se a designação de grammas pela de centimetros cubicos e por ultimo converter os centimetros cubicos a metros cubicos:

$$1250^{kg},5 = 1250500^{gr} = 1250500^{cm3} = 1^{m3},250500$$

Do que acabamos de ver deduzimos as seguintes regras para

Referir grammas a metros cubicos

Regra. — Substitue-se a designação de grammas pela de centimetros cubicos e destes se passa a decimetros e metros cubicos. Si o numero dado exprimir um multiplo ou submultiplo da gramma, são antecipadamente convertidos a grammas.

EXEMPLO

Referir a metros cubicos $370^{gr},25$

$370^{gr},25 = 370^{cm3},25 = 0^{dm3},370 25 = 0^{m3},000370250$

$370^{gr},25 = 0^{m3},000370250$

Referir $280^{kg},35$ a metros cubicos.

$280^{kg},35 = 280350^{gr} = 280350^{cm3} = 280^{dm3},350 =$
$= 0^{m3},280350$

ou então:

$280^{kg},35 = 280^{dm3} = 0^{m3},280350$

$280^{kg},35 = 0^{m3},280350$

Referir $25^{Tm},12$ a decimetros cubicos.

$25^{Tm},12 = 25120^{kg} = 25120^{dm3}$

Referir $153^{Qm},5$ a centimetros cubicos.

$153^{Qm},5 = 15350^{kg} = 15350000^{gr} = 15350000^{cm3}$

Referir um numero de metros cubicos a grammas

Regra. — Reduz-se o numero de metros cubicos a centimetros cubicos e muda-se a designação de centimetros cubicos para grammas.

EXEMPLO

Referir $36^{m3},18$ a grammas

$36^{m3},18 = 36180^{dm3} = 36180000^{cm3} = 36180000^{g},0$

$36^{m3},18 - 36180000^{g}$

Referir $125^{m3},200$ a kilogrammas

$125^{m3},200 = 125200^{dm3} = 125200^{kg}$

$125^{m3},200 = 125200^{kg}$

Referir $297^{m3},538$ a toneladas metricas

$297^{m3},538 = 297538^{dm} = 297538^{kg} = 297^{Tm},538$

Converter grammas em litros

Como o litro é a capacidade de um decimetro cubico e um decimetro cubico tem 1000 centimetros cubicos, segue-se que um litro equivale a 1000 grammas ou um kilogramma e que uma gramma é a millesima parte de um litro, isto é, um millilitro $(0^{l},001)$.

Do que ficou dito se deduz as seguintes relações:

A gramma corresponde a 1 millilitro $(0^{l},001)$.

O decagramma corresponde a 1 centilitro $(0^{l},01)$.

O hectogramma corresponde a 1 decilitro $(0^{l},1)$.

O kilogramma corresponde a 1 litro $(1^{l},0)$.

O myriagramma corresponde a 1 decalitro $(10^{l},0)$ ou 10 litros.

O quintal metrico corresponde a 1 hectolitro $(100^{l},0)$ ou 100 litros.

A tonelada metrica corresponde a 1 kilolitro (1000^{l}) ou 1000 litros.

Vamos saber 3520^{gr} de agua distillada quantos litros são, isto é, queremos converter grammas a litros.

Como uma gramma corresponde a um centimetro cubico temos: $3520^{gr.} = 3520^{cm3}$. Sendo o litro equivalente a um decimetro cubico vamos converter 3520^{cm3} a decimetros cubicos, o que dá $3520^{cm3} = 3^{dm3},520$; agora só temos a mudar a designação de decimetros cubicos para litros.

Portanto $2520^{g} = 3520^{cm3} = 3^{dm3},520 = 3^{l},520$

$$3520^{g} = 3^{l},520$$

$35^{hl},2$ quantas grammas dá?

Primeiramente reduzimos hectolitros a litros:

$35^{hl},2 = 3520^{l}$; feito isto, mudamos a designação de litros para decimetros cubicos $3520^{l} = 3520^{dm3}$; convertem-se decimetros cubicos a centimetros cubicos e muda-se a designação de centimetros cubicos para grammas:

$$3520^{dm3} = 3520000^{cm3} = 3520000^{gr.}$$

$$35^{hl},2 = 3520^{l} = 3520^{dm3} = 3520000^{cm3} = 3520000^{gr}$$

$$35^{hl},2 = 3520000^{gr}$$

Portanto temos para se referir grammas a litros a seguinte

Regra. — Substituem-se a designação de grammas pela de centimetros cubicos, convertem-se estes a decimetros cubicos, e em seguida muda-se a designação decimetros cubicos pela de litros. Si o numero dado for maior ou menor que a gramma, reduz-se primeiramente a grammas.

Si o numero que se quizer converter a litros, representar kilogrammas, basta substituir a designação de kilogrammas pela de litros.

Exemplo

Converter $320^{g},2$ a hectolitros.

$320^{g},2 = 320^{cm3},2 = 0^{dm3},3202 = 0^{l},3202 = 0^{hl},003202$

$$320^{g},2 = 0^{hl},003202$$

Converter $375^{kg},200$ a litros.

$$375^{kg},200 = 375^{l},2$$

Para converter litros a grammas temos a seguinte

Regra. — Substitue-se a designação de litros pela de kilogrammas e reduzem-se estes a grammas.

Exemplo

Converter $879^{l},25$ a grammas.

$$879^{l},25 = 879^{kl},250 = 879250^{g},0$$

$$879^{l},25 = 879250^{gr}$$

DO FRANCO

O franco é uma moeda composta de 9 partes de prata e uma de liga de cobre tendo 5 grammas de peso.

O franco subdivide-se em 100 partes que se chamam *centimos*.

Não se dão denominação aos multiplos e submultiplos do franco.

Assim não se dirá: um deca franco e sim 10 francos, nem tão pouco 5 centi francos, e sim 5 *centimos*.

A abreviatura do franco é *fr* ou *f* e do centimo é *c*.

Assim: $729^{fr},35^{c}$ ou $729^{f},35^{c}$, lê-se 729 francos e 35 centimos.

O Brazil não adoptou o franco como unidade monetaria, que continuou a ser o *real*.

O franco vale na nossa moeda 357 réis.

Conversões das medidas antigas em modernas e vice-versa

Para representar uma certa medida do systema antigo no *systema metrico decimal*, ou vice-versa, temos necessidade de conhecer os coefficientes de reducção.

Coefficiente de reducção: e o valor de uma certa unidade de um systema representado nas unidades correspondentes do outro systema. Ou a relação entre as unidades de um systema e ás do outro.

Assim 1 braça tem $2^m,2$, portanto $2^m,2$ será o coefficiente de reducção da braça a metros.

Temos para as conversões dois coefficientes : um que é a relação entre uma unidade do systema antigo e o moderno; e o outro a relação entre o systema moderno e o antigo.

Para as conversões que vamos dar, só usaremos de um delles.

Eis as relações entre as unidades do systema antigo e o moderno

MEDIDAS LINEARES

SYSTEMA ANTIGO	VALORES NO MODERNO	
	Metros	MEDIDAS DE COMPRIMENTO OU LINEARES
Legua brazileira de 3000 braças......	6600	
» portugueza de 18 ao grão.....	6172,84	
» maritima de 20 ao grão.......	5555,55	
» ingleza de 3 milhas inglezas...	4827,9	
» de correio ou metrica.........	4000	
Milha 841 $\frac{3}{4}$ braças................	1851,85 ($\frac{1}{3}$ de 5555,55)	
Tocza 6 pés..........................	1,98	
Passo geometrico....................	1,65	
Pé portuguez—12 pollegadas........	0,33	
Yard............................	0,91	
Braça 2 varas........................	2,2	
Vara 5 palmos..................	1,1	
Covado..............................	0,68	
Palmo 8 pollegadas..................	0,22	
Pollegada 12 linhas..................	0,0275	
Linha...............................	0,002291	
	Metros quadrados	MEDIDAS DE SUPERFICIE
Geira 400 braças²..................	1396	
Braça quadrada $(2,2)^2$..................	$4^{m2},84$	
Palmo quadrado $(0,22)^2$..................	$0^{m2},0484$	
Pé quadrado $(0,33)^2$..................	$0^{m2},1089$	
etc.		

SYSTEMA ANTIGO	VALORES NO MODERNO	
	Metros cubicos	MEDIDAS DE VOLUMES
Braça cubica = $(2,2)^3$..	10,648	
Palmo cubico = $(0,22)^3$.	0.010648	
Pé cubico = $(0,33)^3$.	0,035937	
etc.		
	Litros	MEDIDAS DE CAPACIDADE PARA SECCOS
Moio — 15 fangas — 60 alqueires..	2176,20	
Fangas — 4 alqueires	145,08	
Alqueire — 4 quartas..	36,27	
Quarta — 8 selamins	9,07	
Selamim......	1,13	
	Litros	MEDIDAS DE CAPACIDADE PARA LIQUIDOS
Tonel — 2 pipas	1597,45	
Pipa — 25 almudes...............	798,725	
Almude — 12 canadas............	31,944	
Canada — 4 quartilhos..........	2,662	
Quartilho ou garrafa — 4 martellos..	0,665	
Martellinho......................	0,166	
	Grammas	MEDIDAS PARA PESOS
Tonelada — 54 @..................	793238,4	
Quintal — 4 @....................	58758,4	
Arroba — 32 lb......	14689,6	
Libra — 2 marcos	459,05	
Marco — 8 onças..................	229,52	
Onça — 8 oitavas.................	28,69	
Oitava — 72 grãos..	3,586	
Grão	0,0498	
	Francos	MONETARIA
Um mil réis ou 1000............	2,60	

Conhecidos os coefficientes de reducção, vamos aprender as conversões.

Regra. — Para se converter uma medida do systema antigo para o moderno, multiplica-se o respectivo numero pelo coefficiente de reducção; quando fôr do moderno para o antigo divide-se pelo respectivo coefficiente

Exemplo

Converter 358 ^{br} a metros.

$358^{br} \times 2^{m},2 = 786^{m},60$

Si 1 braça tem $2^{m},2$, 2 terão 2 vezes $2^{m},2$, 3 terão 3 vezes $2^{m},2$, 4 terão 4 vezes $2^{m},2$, portanto 358 terão $358^{br} \times 2^{m},2$.

$$\begin{array}{r} 358 \\ \underline{2,2} \\ 716 \\ \underline{716} \\ 787,6 \end{array}$$

Converter 3257 metros a braças.

$3257 \div 2^{m},2 = 1480^{br}\,4^{p}\,4^{pp}\,4^{l}\,\frac{4}{11}$

$$\begin{array}{l|l} 32570 & 22 \\ \cline{2-2} 105 & 1480^{br}\,4^{p}\,4^{pp}\,4^{l}\frac{4}{11} \\ 177 & \\ 10 & \\ \underline{\times 10^{p}} & \\ 100 & \\ 12^{pp} & \\ \underline{\times 8} & \\ 96 & \\ 8^{l} & \\ \underline{\times 12} & \\ 96 & \\ -8 & \end{array}$$

Outros exemplos

Reduzir 375 varas a metros.

$375^{v} \times 1^{m},1 = 412^{m},5$

Reduzir $25^{m2},80$ a palmos quadrados.

$25^{m2},80 \div 0^{m2},0484 = 533\,\frac{7^{p2}}{121}$

Achar o *coefficiente* de reducção de legua da 20 ao grão. (Legua de 20 ao grão quer dizer que cada grao de um meridiano terrestre tem 20 leguas).

Como um quadrante terrestre tem 10000000 de metros, um grão terá $\frac{10000000}{90} = 111111^{m},11$.

Si um grão tem $111111^{m},11$ e cada grão se compõe de 20 leguas, segue-se que uma legua terá $\frac{111111^{m},11}{20} = 5555^{m},55$ que é o *coefficiente* de reducção da legua.

Obtido o coefficiente de reducção da legua póde-se obter a da milha, sabendo-se que a legua tem 3 milhas, portanto o *coefficiente* será $\frac{5555,55}{3} = 1851^{m},85$.

Obtido este, póde achar-se o da braça, sabendo-se que uma milha tem 841 $\frac{3}{4}$ braças, portanto o seu coefficiente será

$1851^{m},85 \div 841\,\frac{3}{4} = 2^{m},2$.

Por identico processo obtem-se os coefficientes de reducção da vara, do palmo, da pollegada, etc.

Exercicios

Reduzir	8.972	leguas de 20 ao grão á metros
»	12.520	» brazileiras a metros.
»	3.590	» inglezas »
»	7.895	metros a leguas de 20 ao grão.
»	18.496	» » brazileiras.
»	2.520	kilometros a leguas inglezas.
»	240	yards a metros.
»	98,5	metros a yards.
»	28	covados a metros.
»	200	metros a covados.
»	2.596	braças a metros.
»	3700,5	metros a braças.
»	250	kilometros ² a braças quadradas
»	340	libras a grammas.
»	38,5	kilogrammas a libras.
»	48 @	12 lb 1^{m} gonç. a kilogrammas.
»	45	toneladas a toneladas metricas.

SEGUNDA PARTE

RAZÕES E PROPORÇÕES

Relação ou **razão** é o resultado da comparação entre dois numeros da mesma especie.

EXEMPLO

$6 - 3,\ 15 \div 5{,}9 - 5{,}35 \div 4$, etc.

Ha duas especies de *razões* : *razão por differença* ou *arithmetica, razão por quociente ou geometrica*.

Razão por differença é a differença entre dois numeros.

Assim : 13—8 é a razão por differença entre 13 e 8.

Esta razão se representa de dois modos : 13 — 8 que se lê 13 *menos* 8, ou 13 . 8 que já se lê 13 *está para* 8.

Razão por quociente é o quociente da divisão de um numero por outro.

Assim : $15 \div 3$ é uma razão por quociente entre 15 e 3.

Esta razão tambem póde ser representada de dois modos

$\frac{15}{3}$, que se lê 15 *dividido por* 3 ou 15 : 3 que é lida: 15 *está para* 3.

Os dois numeros que são comparados nas razões tem o nome de *termos* da razão; o primeiro é chamado *antecedente* e o segundo *consequente*.

Nas duas razões : 12 — 7 e $25 \div 5$, 12 e 7 são os termos da razão por differença e 25 e 5 são os termos da razão por quociente ; 12 e 25 são os *antecedentes* e 7 e 5 são os *consequentes*.

Proporção é a igualdade entre duas razões.

Ha duas especies de proporções : por *differença* e por *quociente*.

Proporção por differença ou *equidifferença* é a igualdade entre duas razões por differença.

Assim : as duas razões iguaes 9 — 3 e 14 — 8 formam uma proporção, isto é, os quatro numeros estão em *proporção*.

Esta proporção indica-se de duas maneiras :

Em geral, 9—3=14—8 ou por convenção 9 . 3 : 14 . 8

No primeiro caso le-se : 9 *menos* 3 *é igual a* 14 *menos* 8 ; no segundo : 9 *está para* 3 *assim como* 14 *está para* 8.

Uma equidifferenca se compõe de quatro termos : o primeiro e o ultimo são chamados *extremos*, 2º e 3º *meios* ; o 1º e o 3º *antecedentes*, o 2º e o 4º *consequentes*.

Na ultima equidifferença 9 e 8 são os *extremos*, 3 e 14 os *meios* ; 9 e 14 são *antecedentes*, 3 e 8 *consequentes*.

Propriedades das equidifferenças

Propriedade fundamental. — *A somma dos meios é sempre igual á somma dos extremos*.

EXEMPLO

Na equidifferença 12 . 7 : 18 . 13 temos

$$7 + 18 = 12 + 13$$

Reciproca. — Si a somma de dois numeros fôr igual a somma de outros dois, esses quatro numeros constituem uma equidifferença cujos extremos são as parcellas de uma somma e os meios as da outra.

Seja por ex.: 17 + 9 = 20 + 6. Formarão a equidifferença

17 . 20 : 6 . 9

CONSEQUENCIAS DAS PROPRIEDADES

Achar um termo desconhecido de uma equidifferença

Regra.—Para achar um extremo desconhecido, sommam-se os meios e do resultado subtrahe-se o extremo conhecido ; para achar um meio desconhecido sommam-se os extremos e do resultado subtrahe-se o meio conhecido ; os restos serão os termos procurados.

Seja a equidifferença 12 . 8 : 9 . x

(O termo desconhecido é representado por x). Vamos provar que o termo desconhecido $x = 8 + 9 - 12$.

Pela propriedade fundamental :

$$12 + x = 8 + 9$$

Sabe-se que uma igualdade não se altera quando a ambos os membros se addiciona ou subtrahe a mesma quantidade ; em sendo assim, vamos subtrahir o numero 12, que está junto a x, de ambos os membros da igualdade :

$$12 - 12 + x = 8 + 9 - 12$$

No primeiro membro temos que, *mais* 12 e *menos* 12 é *zero*, e diz-se então que destroem-se e por isso costumam ser cancellados, como se vê :

$$\cancel{12} - \cancel{12} + x = 8 + 9 - 12$$

Então fica como se queria provar : $x = 8 + 9 - 12$

Fazendo agora as operações : $x = 17 - 12$

$$x = 5$$

Portanto a equidifferença será, substituindo x pelo seu valor :

12 . 8 : 9 . 5

Do mesmo modo se provaria se em vez de um extremo, o termo a procurar fosse um meio.

Em uma equidifferença póde-se *alternar*, *inverter* e *transpor* os seus termos sem que ella se altere.

Alternar é mudar a collocação dos meios ou dos extremos.

Seja a equidifferença :

18 . 6 : 14 . 2

Alternando teremos :

18 . 14 : 6 . 2

ou 2 . 14 : 6 . 8

Inverter é passar os antecedentes para os consequentes e vice-versa.

Invertendo-se o exemplo precedente achamos

14 . 18 : 2 . 6

Transpor é trocar os lugares das razões.

Transpondo o exemplo dado encontramos :

$$14 . 2 : 18 . 6$$

Estas tres transformações não alteram a equidifferença por que continuou a existir a propriedade fundamental, isto é, depois das transformações a somma dos meios continuou a ser igual a dos extremos.

Equidifferença continua é aquella em que os meios são iguaes.

EXEMPLO

$$9 . 5 : 5 . 1$$

Neste caso o meio se chama *meio differencial.*

Em toda equidifferença continua, o meio differencial é igual a metade da somma dos extremos.

EXEMPLO

$$15 . x : x . 9$$

$$x = \frac{15 + 9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x = 12$$

Isto porque $x + x = 15 + 9$ pela propriedade fundamental ; porém $x + x = 2\,x$, logo

$$2\,x = 15 + 9$$

Si dois x é igual a $15 + 9$, segue-se que um só x será igual a metade de $15 + 9$ ou

$$x = \frac{15 + 9}{2}$$

EXERCICIO

Achar a *incognita* da equidifferença $15 . 6 : x . 7$.
Pôr em proporção $13 + 8 = 16 + 15$.
Achar os meios differenciaes entre 27 e 13, 15 e 21, 19 e 33.
Achar o valor de x na seguinte equidifferença $x . 9 : 7 . 5$
Alternar, *inverter* e *transpor* $12 . 35 : 7 . 30$

PROPORÇÃO

Proporção por quociente ou simplesmente **proporção** é a igualdade entre duas razões por quociente.

Assim : as duas razões iguaes $40 \div 8$ e $25 \div 5$, formam uma proporção, isto é : os quatro numeros estão em proporção.

Esta proporção, é representada de duas maneiras :

Em geral. $\frac{40}{8} = \frac{25}{5}$ ou tambem $40 : 8 :: 25 : 5$.

No primeiro caso lê-se : 40 *divididos por* 8 *é igual a* 25 *divididos por* 5 ; no segundo : 40 *está para* 8 *assim como* 25 *está para* 5.

Esta especie de proporção tambem chama-se *geometrica*.

Propriedades das proporções

Propriedade fundamental. — *Em toda a proporção o producto dos meios é sempre igual ao producto dos extremos.*

EXEMPLO

Na proporção $10 : 5 :: 8 : 4$
temos $5 \times 8 = 10 \times 4$

Reciproca. — Se o producto de dois numeros fôr igual ao de outros dois, esses quatro numeros constituem uma proporção cujos *extremos* são os factores de um producto e *meios* os factores do outro.

Seja por ex. : $6 \times 5 = 2 \times 15$
formam a proporção : $6 : 2 = 15 : 5$

Consequencias das propriedades

Achar um termo desconhecido de uma proporção

Regra. — Para achar um extremo desconhecido, multiplicam-se os meios e o producto divide-se pelo extremo conhecido ; para achar um meio desconhecido, multiplicam-se os extremos. o resultado, divide-se pelo meio conhecido; os quocientes serão os termos procurados.

Seja a proporção $24 : 8 :: x : 9$

Vamos provar que o termo desconhecido $x = \frac{24 \times 9.}{8}$

Pela propriedade fundamental temos $8 \times x = 24 \times 9$.

Um igualdade não se altera quando se divide ambos os membros pelo mesmo numero, por isso vamos dividir ambos os membros desta igualdade por 8 que é o termo que está multiplicando a incognita x e assim teremos:

$$\frac{8 \times x}{8} = \frac{24 \times 9}{8}$$

Porém, no primeiro membro, nós temos 8 que multiplica e 8 que divide, simplifica-se, isto é, o quociente sendo a unidade, corta-se este numero do dividendo e divisor o que dá:

$$\frac{\cancel{8} \times x}{\cancel{8}} = \frac{24 \times 9}{8}$$

ou $x = \frac{24 \times 9}{8}$ como se queria provar.

Effectuando as operações indicadas: $x = \frac{216}{8}$

$x = 27$

Portanto a proporção será:

$24 : 8 :: 27 : 9$

Da mesma maneira se provaria, se em vez de um meio fosse a incognita um extremo.

Uma proporção não se altera, quando:

1.° Se multiplica ou divide pelo mesmo numero ambos os antecedentes ou ambos os consequentes.

Seja a proporção: $12 . 4 :: 30 : 10$

Multiplicando os antecedentes por 2: $12 \times 2 : 4 :: 30 \times 2 : 10$

teremos: $24 : 4 :: 60 : 10$

Dividindo-se os consequentes por 2: $12 : 4 \div 2 :: 30 : 10 \div 2$

teremos: $12 : 2 :: 30 : 5$

2.° Se multiplica ou divide pelo mesmo numero os termos de uma razão ou todos os termos da proporção.

Waldemar Motta

EXEMPLO

Seja aquella mesma proporção: $12 : 4 :: 30 : 10$

Multiplicando os termos da primeira razão por 3 teremos:

$12 \times 3 : 4 \times 3 :: 30 : 10$

ou $36 : 12 :: 30 : 10$

Multiplicando todos os termos por 5 teremos:

$12 \times 5 : 4 \times 5 :: 30 \times 5 : 10 \times 5$

ou $60 : 20 :: 150 : 50$

Estas transformações não alteram a proporção, porque subsistiu nella a propriedade fundamental, isto é, depois das transformações o producto dos meios continuou a ser igual ao producto dos extremos.

As proporções tambem podem ser *alternadas*, *invertidas* e *transpostas* sem soffrerem alteração.

Proporção continua é aquella em que os meios são iguaes.

EXEMPLO

$8 : 4 :: 4 : 2$

Neste caso o *meio* é chamado *meio proporcional*. Em toda a proporção continua o *meio proporcional é igual á raiz quadrada do producto dos extremos*.

EXEMPLO

$16 : x :: x : 4$

$x = \sqrt{16 \times 4}$

$x = \sqrt{64}$

$x = 8$

Isto porque pela propriedade fundamental: $x \times x = 16 \times 4$

Porém $x \times x = x^2$, logo.

$x^2 = 16 \times 4$

Extrahindo a raiz quadrada de ambos os membros da igualdade, o que não altera o seu valor, vem

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16 \times 4}$$

mas $\sqrt{x^2} = x$ logo

$x = \sqrt{16 \times 4}$ como se queria provar.

EXERCICIOS

Achar o valor de x nas seguintes proporções:

$$8 : 2 :: x : 7;\ x : 15 :: 25 : 12;\ 3\frac{1}{4} : x :: 8 : 2\frac{1}{2}$$

Qual é o meio proporcional entre 16 e 9?

» » » entre 48 e 12?

Multiplicar as proporções seguintes termo a termo e provar que o producto ainda é uma proporção

$$8 : 2 :: 12 : 6$$
$$15 : 3 :: 30 : 6$$
$$16 : 4 :: 8 . 2$$

REGRA DE TRES

Regra de tres é a operação que tem por fim a resolução de uma questão dependente de uma ou muitas proporções.

Quando a questão depende de uma só proporção, a regra de tres é *simples*, quando depende de mais de uma é *composta*. Portanto, a regra de tres póde ser *simples* ou *composta*. Neste compendio só estudaremos a primeira especie.

Desde que a *simples* só depende de uma proporção póde definir-se:

Regra de tres simples: é aquella na qual se dão tres numeros conhecidos e pede-se um quarto que forme porporção com os outros tres.

A regra de tres simples póde ser *directa* ou *inversa*.

Directa: é aquella em que, augmentando um dos termos principaes, augmenta o seu relativo, diminuindo aquelle, diminue tambem este.

Inversa: é aquella na qual augmentando um dos termos principaes diminue o seu relativo, diminuindo aquelle augmenta este.

Termos principaes: são os dois termos conhecidos da mesma especie.

Termos relativos: são os outros dois tambem *homogeneos* entre si, sendo um conhecido e o outro desconhecido.

Vamos agora aprender a resolver um problema por meio da *regra de tres simples*.

Seja o seguinte problema:

Em certa hora do dia uma torre faz uma sombra de 120 metros de comprimento, á mesma hora uma varinha de 5 metros, posta em pé, projecta uma sombra de 8 metros, qual será a altura da torre?

Em primeiro lugar dispõe-se os dados da questão de modo que os dois principaes fiquem por baixo do outro e os relativos á direita e na mesma linha dos respectivos principaes.

De sombra

8^m. . . . . . 5^m

120^m. . . . . . x^m

Fazendo este raciocinio: si 8 metros de sombra são feitos por 5 metros de altura; quer se saber 120^m de sombra porque altura será feita?

As quantidades principaes são 8^m e 120^m as relativas são 5^m e x^m.

Passemos agora a ver se está regra é directa ou inversa. Se a sombra de 8^m é produzida por 5^m de altura, a sombra de 120^m, maior sombra, será produzida por uma altura maior, que 5^m, logo x é maior que 5, então esta regra é directa, porque crescendo os principaes crescem os relativos.

Depois de sabermos se a regra é directa ou inversa, fica sabido se x é maior ou menor que o outro relativo da sua especie e então arma-se a proporção segundo esta regra.

Regra. — Maior termo principal está para o outro menor da mesma especie, assim como maior relativo está para menor relativo da mesma especie ou menor para maior, assim como menor para maior.

Pondo-se aquelle problema em proporção, vem:

$$8 : 120 :: 5 : x.$$

isto é, *menor* 8 está para *maior* 120, assim como *menor* 5 está para *maior* x.

Tirando o valor de x, teremos:

$$x = \frac{120 \times 5}{8} = \frac{600}{8} = 75$$

$$x = 75$$

Portanto, para armar uma regra de tres com os dados de um problema, em primeiro lugar procura-se saber se ella é directa ou inversa; em segundo, se x, o termo desconhecido, é maior ou menor que o outro relativo da sua especie, o que feito arma-se a proporção segundo aquella regra.

2.° PROBLEMA

Estando o cambio entre o Brazil e a Inglaterra a 7 1/2 ; pergunta-se quanto valerá neste paiz 1:520\$000 da nossa moeda?

Observação.—Quando se diz que a taxa do cambio é 7 1/2, isto significa que 1000 réis de nossa moeda vale 7 1/2 pence inglezes.

Solução. — Si 1000 réis nossos valem 7 1/2 pence, 1:520\$000 quanto valerão?

réis		pence
1000	....	7 1/2 ou 7,5
1:520\$000	....	x

Regra directa, porque quanto maior a importancia em moeda brazileira, tanto maior valor, logo x maior que 7 1/2.

Armando a proporção, temos:

$$1000 : 1{:}520\$000 :: 7{,}5 : x = \frac{1{:}520\$000 \times 7{,}5}{1000} = \frac{11{:}400\$000}{1000} = 11400$$ Pence

Reduzindo os 11400 pence a £, s e d ou p teremos.

$$\begin{array}{r|l} 11400 & 240 \\ \cline{2-2} -180 & 47\ £\ 10^s \\ -12 & \\ 20^s & \\ \hline 240 & \end{array}$$

Logo: $x = 47\ £\ 10^s\ 0^p$

3.° PROBLEMA

Si 24 trabalhadores fazem certa obra em 36 dias, 30 trabalhadores em quantos dias farão a mesma obra?

24 tr	....	36 d.
30	....	x

Esta regra é inversa porque sendo maior o numero de trabalhadores, menor será o tempo a empregar na construcção da obra, isto é, si 24 trabalhadores fazem a obra em 36 dias, 30 trabalhadores farão em menos dias, logo x é menor do que 36.

Armando a proporção temos:

$$24 : 30 :: x : 36$$

Menor 24 está para maior 30, assim como menor x está para maior 36

Tirando o valor de x obteremos:

$$x = \frac{24 \times 36}{30} = \frac{864}{30} = 28^d\ 19^h\ 6^m$$

Portanto os 30 trabalhadores farão a obra em 28 *dias*, 19 *horas* e 6 *minutos*.

4.° PROBLEMA

Um tanque tem quatro torneiras, uma só estando aberta esvasia o tanque em 8 horas e 20 minutos, as quatro estando abertas, em quantas horas o esvasiarão?

Solução.—Si uma torneira esvasia em 8^h e 20^m, quatro em quantas horas o esvasiarão?

1 t	....	8^h e 20^m
4	....	x

Esta regra é inversa, porque augmentando as torneiras abertas, diminue o tempo preciso para esvasiar o tanque, logo x é menor que 8^h e 20^m.

Armando a proporção, teremos:

$$1 : 4 :: x : 8^h 20^m$$

$$\text{d'onde } x = \frac{8^h\ 20^m \times 1}{4} = \frac{500^m}{4} = 125^m = 2^h\ 5^m$$

Portanto, as quatro torneiras estando todas abertas esvasiarão o tanque no fim de 2h e 5^m.

PROBLEMAS

I — 40^{kg} de agua salgada contem $3^{kg},5$ de sal, quantos kilogrammas de agua serão precisos para termos $24^{kg},25$ de sal?

II — Um homem trabalhando 9 horas por dia ganha 25\$000 diarios, quantas horas deverá trabalhar para ganhar sómente 18\$000?

III — Para ser coberta uma mesa são precisos $3^m,5$ de oleado que tem $1^m,5$ de largura, quer saber-se, sendo o oleado de $1^m,90$ de largura quantos metros serão precisos?

IV — Quantos homens serão precisos para fazer uma casa em 248 dias, sabendo-se que 39 a podem fazer em 365?

REGRA DE JUROS SIMPLES

Regra de juros simples é a questão que tem por fim determinar o rendimento que produz um capital emprestado segundo uma taxa qualquer durante um determinado tempo, ou determinar um dos elementos: *capital, taxa* ou *tempo* quando os outros forem conhecidos.

Juro é o rendimento produzido pela quantia que se empresta.

Capital é a quantia emprestada.

Taxa é o juro de uma quantia fixa em um tempo tambem fixo.

Esta quantia fixa geralmente é 100 e o tempo 1 anno ou 1 mez.

Assim 8 % que lê-se : 8 *por cento*, quer dizer que cada 100 mil réis rende 8 mil réis ou cada cem réis rende 8 réis na unidade de tempo, 8 vem a ser a taxa.

A taxa do juro é variavel, depende da abundancia ou variedade do capital a emprestar.

A regra de juros é uma applicação da regra de tres.

Seja o seguinte problema :

Qual será o juro de 186$500 a 7 % *ao anno em 3 annos?*

Faremos o seguinte raciocinio para estabelecer as regras de tres :

Si 100 em 1 anno rende 7, 186$500 quanto renderão ?

Regra de tres directa porque quanto maior fôr o capital, tanto maior será o seu rendimento.

Logo :

$$\begin{array}{lr} 100 \ldots\ldots\ldots\ldots & 7 \\ 186\$500 \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

Portanto 100:186$500 :: 7 x

$$x = \frac{186\$500 \times 7}{100}$$

Determinado o juro de 1 anno vamos determinar de 3 annos, teremos.

Si em 1 anno aquelle capital rende o juro de $\frac{186\$500 \times 7}{100}$ em 3 annos quanto renderá ?

Outra regra de tres directa, logo :

$$\begin{array}{lr} 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{186\$500 \times 7}{100} \\ 3 \ldots\ldots\ldots\ldots & x \end{array}$$

Portanto $1 : 3 :: \frac{186\$500 \times 7}{100} : x$

donde $x = \frac{186\$500 \times 7}{100} \times 3$

ou $x = \frac{186\$500 \times 7 \times 3}{100}$

Como x representa os juros, temos que :

$$\text{O juro} = \frac{186\$500 \times 7 \times 3}{100} = 39\$165$$

Isto quer dizer que o juro de um certo capital é igual a esse *capital* multiplicado pelo *tempo* e pela *taxa* e dividido por 100.

Generalisando, isto é, substituindo esses elementos por lettras do alphabeto, que podem ter qualquer valor, temos, que sendo :

$$j = \frac{c \times i \times t}{100} \qquad \begin{array}{l} j = \text{juros} \\ c = \text{capital} \\ i = \text{taxa} \\ t = \text{tempo} \end{array}$$

Esta é a formula de juros. Toda vez que tivermos de determinar os juros, de uma certa importancia, substituimos as lettras pelos valores dados do problema. Ex.: Qual será o juro de 1:520$000 emprestados por 5 annos e 6 mezes a razão de 6 % ao anno ?

A formula $j = \frac{c \times i \times t}{100}$ vae-nos dar a solução, substituindo c por 1:520$000, t por $5 \frac{1}{2}$ ou 5a,5 (5 annos e 6 mezes) e i por 6.

Substituindo vem : $j = \frac{1:520\$000 \times 5,5 \times 6}{100} = \frac{50.160000}{100} =$ 501$600.

$$\begin{array}{r} 1:520\$000 \ \textit{capital} \\ \underline{5,5 \ \textit{tempo}} \\ 760 \\ \underline{760} \\ 8360000 \\ \underline{6 \ \textit{taxa}} \\ 50:160\$000 \end{array} \div 100 = 501\$600$$

Portanto os juros de 1.520$000 a 6 % no fim de 5 annos e 6 mezes importam em 501$600.

Do exposto deduz-se a seguinte regra para achar os juros de um capital emprestado, segundo uma taxa e um tempo determinado.

Regra.—Multiplica-se o capital pela taxa e pelo tempo e o producto divide-se por 100.

Daquella fórmula se deduz outras para achar qualquer um dos elementos *capital*, *taxa* ou *tempo*, sendo conhecidos os outros tres.

FORMULAS

De juros........................ $j = \dfrac{c \times i \times t}{100}$

Do capital........................ $c = \dfrac{100 \times j}{i \times t}$

Do tempo......................... $t = \dfrac{100 \times j}{c \times i}$

Da taxa........................... $i = \dfrac{100 \times j}{c \times t}$

Vamos fazer applicações destas differentes fórmulas.

PROBLEMAS

1.° Qual será o *capital* que posto a juros de 8 % por 9 annos e 2 mezes produz o juro de 2:582$000 ?

Substituido na fórmula do *capital* as lettras pelos valores, teremos:

$$c = \frac{100 \times j}{i \times t} = \frac{100 \times 258\$000}{8 \times 9\frac{1}{6}\,(^*)} = \frac{2.58200000}{8 \times \frac{55}{6}} = \frac{258200000}{\frac{440}{6}} =$$

$$= \frac{258200000 \times 6}{440} = \frac{1549200000}{440} = 3:520\$909$$

O capital é 3:520$909

2.° Quanto *tempo* será preciso para que o capital de 3 150$000 posto a juros de 12 1/2 % ao anno renda 850$000 ?

Applicando a fórmula de tempo, teremos.

$$t = \frac{100 \times j}{c \times i} = \frac{100 \times 850\$000}{3 \cdot 150\$000 \times 12,5} = \frac{850000\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{393750\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = \text{2 annos, 1 mez e 11 dias.}$$

Serão precisos 2 *annos*, 1 *mez*, 11 *dias* e uma fracção do dia que desprezamos.

(*) Dois mezes são $\frac{2}{12}$ do anno ou $\frac{1}{6}$

3° — Qual deverá ser a *taxa* precisa para que um capital de 450$000 no fim de 3 annos produza o juro de 81$000 ?

Fazendo applicação da formula da taxa, temos:

$$i = \frac{100 \times j}{c \times t} = \frac{100 \times 81\$000}{450\$000 \times 3} = \frac{8.100000}{1.350000} = 6$$

A taxa será 6 %.

Estas formulas podem ser obtidas directamente pela regra de tres composta. Dellas se vê que para obter um dos elementos, *capital*, *taxa* ou *tempo* sendo conhecidos os outros tres, faz-se o seguinte:

Regra. — Multiplica-se sempre o juro por 100 e divide-se o resultado pelo producto dos outros dois factores.

OBSERVAÇÕES. — Convencionou-se que para os calculos de juros o anno seja de 360 dias e o mez de 30 dias.

Quando se tiver, no calculo mezes e dia, será conveniente referir os mezes e dias em fracção do anno, convertendo os mezes a dias.

Assim se tivessemos 6 annos, 3 mezes e 15 dias fariamos o seguinte: *Um* mez commercial tem trinta dias, logo tres terão 90, com os 15 fazem 105. Estes dias em fracção do anno representar-se-hão dividindo por 360, numero de dias que tem o anno commercial, pela seguinte fracção: $\frac{105}{360}$, logo 6 annos, 3 mezes e 15 dias serão representados no calculo por $6\frac{105}{360}$

PROBLEMA PARA EXERCICIO

1° — A quanto se elevarão os juros de 5:350$000 emprestados á razão de 18 % anno, no fim de 7 annos e 11 mezes ?

2° Qual deve ser o capital empregado em certo negocio para que no fim de 4 annos 9 mezes e 15 dias a 8 1/2 %, renda 18:300$000 ?

3° — Que tempo será preciso para que 1:618$000 a 12 % ao anno renda 1:580$000 ?

4° — Que taxa deverá se empregar para que 1:500$000 em 2 annos e 1 mez produza o juro de 187$500 ?

5° — Achar os 10 % de 1:250$000.

6° — Achar os 35 2/4 % de 12:350$000.

JUROS COMPOSTOS OU CAPITALISADOS

Diz-se que um capital está collocado a *juros compostos*, quando no fim de cada prazo convencionado *um anno*, *um semestre*, *um mez*, somma-se o capital com o juro vencido, para formar um novo capital, que continúa a vencer juros.

Para sabermos a que capital se eleva uma quantia emprestada a *juros compostos* no fim de um tempo estipulado, teremos a seguinte

Regra. — Calculam-se os juros do capital do 1° anno; estes juros addicionados á quantia emprestada formam o capital do 2° anno. Calculam-se depois os juros do novo capital no 2° anno e sommam-se ao mesmo para formar o capital do 3° anno e assim se continúa até ter chegado a calcular os juros do ultimo tempo.

EXEMPLO

Qual é o capital accumulado de 420$000 em 3 annos e 6 mezes a 5 % ao anno?

Capital emprestado.............	420$000
Taxa de............... ..	5 %
Juros de 1 anno...............	21.000(00
Capital primitivo a juntar.... ..	420:000
Capital do 2° anno.....	441$000
Taxa de.........	5 %
Juros do 2° anno.......	22:050(00
	441:000
Capital do 3° anno	463$050
Taxa de............	5 %
Juros do 3°.......... ...	23:152(50
	463:050
Capital do semestre............	486:202
Taxa de.................	5 %
Juros de 1 semestre, metade de um anno..................	24:310(10
	12:155
Sommando o capital precedente.	486$202
CAPITAL ACCUMULADO de 3a e 6m	498$357

Querendo saber-se qual foi o rendimento, subtrahe-se do capital accumulado o capital emprestado.

No problema precedente o rendimento ou os juros compostos são

498$357 — 420$000 = 78$357

2.° Problema:

As caixas economicas da Republica do Brazil recebem depositos desde 1$000 em diante até 10:000$000, garantindo o juro de 5 % ao anno. capitalisando de 6 em 6 mezes. a quanto montara um deposito de 240$000 no fim de 1 anno, 1 mez e 12 dias?

SOLUÇÃO

Capital depositado..................	240$000
Taxa de 5 % ao anno será por semestre 2 $\frac{1}{2}$ % ou...................	2,5 %
	1200000
	480000
	6000(000
Juros do 1° semestre................	240000
	246000
Capital do 2° semestre................	2,5 %
Taxa do 2° semestre.......	1230000
	492000
	6150(000
Juros do 2° semestre................	246000
	252150

Capital e juros dos dois semestres....

Resta calcular os juros de um mez e 12 dias ou 41 dias: Para isto, póde-se calcular os juros de um semestre, multiplicar por 42 dias e o resultado dividir por 180, numero de dias que tem um semestre.

Assim capital e juros dos dois semestres....	252$150
Taxa do semestre.................	2. 5 %
	1260750
	504300
	6303(75,0
Juros do semestre.......................	1470
Juros de 42 dias $= \frac{6303 \times 42}{180} =$	252150
Capital e juros de 1 anno, 1 mez e 12 dias...	253620

PROBLEMAS PARA EXERCICIO

1.° A quanto montará um capital de 1:250$000 posto a juros compostos de 12 % ao anno no fim de 6 annos e 4 mezes?

2.° Um operario deposita na caixa economica as suas economias no valor de 560$000, no fim de 3 annos, 2 mezes e 8 dias vae retirar o seu deposito; quanto recebeu?

REGRA DE DESCONTO

Desconto é o abatimento que soffre uma letra ou uma divida, quando se deseja pagal-a antes do prazo do seu vencimento.

Uma letra tem dois valores: *nominal* e *actual*.

Nominal é a quantia que está inscripta na letra.

Actual é aquelle a que fica reduzida uma *letra* depois de feito o abatimento ou desconto; portanto o que a letra vale na época actual.

Ha duas especies de descontos: *desconto por fóra* e *desconto por dentro*.

Desconto por fóra é aquelle em que o abatimento é feito sobre o valor nominal da letra.

Desconto por dentro é aquelle em que o abatimento é feito sobre o valor actual da letra.

Regra de desconto é aquella que ensina a calcular o abatimento que deverá soffrer um titulo de divida quando se deseja resgatal-o antes do prazo combinado.

A taxa do juro sobre 100 na regra de desconto toma o nome de *taxa de desconto*

DESCONTO POR FORA

A *regra* para o desconto *por fóra* consiste em calcular o juro do valor nominal da letra e diminuil-o da quantia que representa o referido valor.

EXEMPLO

Que abatimento soffrera uma letra de 850$000 cujo pagamento se antecipa 6 mezes, com o desconto de 1/2 % ao mez?

Calculando o juro pela respectiva formula temos:

$$j \text{ ou } d = \frac{850\$000 \times 0,5 \times 6}{100} = 25\$500$$

Portanto o desconto que a letra tem de soffrer é de 25$500. Effectuando o desconto a divida fica reduzida a 824$500. Effectuou:

$$850\$000 - 25\$500 = 824\$500$$

Este modo de descontar é geralmente seguido no commercio, por isso tambem é chamado *desconto commercial*.

PROBLEMAS

1.º Calcular o desconto por fóra de uma letra de 3:235$000 vencivel no fim de 3 1/2 annos, sendo a taxa de desconto 9 %.

2.º Quanto terá de descontar uma letra de 12:800$000, cujo vencimento será no fim de 5 annos, a razão de 1 1/2 % ao mez, querendo-se antecipar o seu pagamento?

3. Qual foi a taxa de desconto que soffreu uma letra de 300$000 cujo pagamento antecipou-se 8 mezes, sabendo-se que o desconto foi de 12$000?

4.º Qual é o valor nominal de uma letra que antecipando-se 2 1/2 annos o seu pagamento produziu um desconto de 300$000, sob a taxa de 8 % ao anno?

DESCONTO POR DENTRO

Para achar-se o desconto por dentro de um titulo de divida qualquer procede-se da seguinte maneira:

Regra. — *Multiplicam-se, o valor nominal, a taxa de desconto, o tempo e o resultado divide-se pelo producto da taxa multiplicada pelo tempo e augmentado de* 100.

EXEMPLO

Qual deverá ser o desconto por dentro de uma letra de 700$000 a 3% ao mez, antecipando-se o seu pagamento 6 mezes:

Teremos segundo a regra: $\frac{\text{Valor n.} \times \text{taxa} \times \text{tempo}}{\text{taxa} \times \text{tempo} + 100}$ ou $\frac{c \times i \times t}{it + 100} =$

$$= \frac{700\$000 \times 3 \times 6}{3 \times 6 + 100} = \frac{12600000}{118} = 106\$779.$$

O desconto será de 106$779 réis.

A letra por isso fica reduzida a 593$221.

Isto é: 700$000 — 106$779 = 593$221.

OBSERVAÇÃO — O desconto por dentro é menor que o desconto por fóra e por isso mais vantajoso para o possuidor da letra. Para melhor conhecimento vamos resolver este problema ultimo pela regra de desconto por fóra.

$$\frac{700\$000 \times 3 \times 6}{100} = \frac{12600000}{100} = 126\$000$$

Vê-se, que a letra de 700$000 a 3 % ao mez vencivel a 6 mezes, pelo desconto por dentro paga 106$779, emquanto que pelo desconto por fóra paga 126$000

Problemas para resolver pelos dois modos de descontos:

1.º A que importancia ficará reduzida uma divida de 1:590$000 antecipando-se 7 1/2 annos o seu pagamento, na razao de 9 1/2 % ao anno?

2.º Que desconto soffre uma letra de 7:300$000 vencivel a 2 annos e 4 mezes, na razão de 2 % ao mez?

3.º Quanto deve receber o portador de um credito de 3:250$000 pagavel a 6 mezes e descontando a taxa de 10 % ao anno?

REGRA DE DIVISÃO PROPORCIONAL

Esta regra tem por fim dividir um numero em partes proporcionaes a dois ou mais numeros dados.

EXEMPLO

Deseja-se dividir o numero 420 em 3 partes proporcionaes a 3, 4, e 8.

Para resolvermos o problema faremos o seguinte raciocinio :

Sendo o numero a dividir 420, e a somma das partes proporcionaes 15, isto é : $3+4+8$, teremos que se 15 é a somma das partes em que desejamos dividir o numero 420, uma dessas partes seria $\frac{420}{15}$, isto é : $\frac{420}{3+4+8}$, portanto 3, 4, e 8 dessas partes serão 3, 4, e 8 vezes mais que uma parte proporcional ou :

$$\frac{420}{3+4+8} \times 3 = 84 \text{ primeira parte.}$$

$$\frac{420}{3+4+8} \times 4 = 112 \text{ segunda parte.}$$

$$\frac{420}{3+4+8} \times 8 = 224 \text{ terceira parte}$$

$$\overline{420} \text{ numero a dividir.}$$

PROBLEMA II

Um pai legou a seus tres filhos uma herança de 28:200$000 devendo ser dividida a começar pelo mais velho em partes proporcionaes a 5, 6 e 7; quanto teve cada um ?

$$\frac{28:200\$000}{5+6+7} \times 5 = 7:833\$330 \text{ parte do mais velho.}$$

$$\frac{28:200\$000}{5+6+7} \times 6 = 9:399\$996 \text{ parte do segundo.}$$

$$\frac{28:200\$000}{5+6+7} \times 7 = 10:966\$662 \text{ parte do mais moço.}$$

$$\overline{28:199\$988}$$

Do exposto se deduz a seguinte

Regra. — Divide-se o numero dado pela somma das partes proporcionaes e o quociente multiplica-se separadamente pelos numeros proporcionaes, para ter as partes pedidas.

Quando a regra de divisão em partes proporcionaes se applica ao commercio afim de dividir entre associados os lucros e perdas do seu negocio, toma o nome da Regra de Companhia.

REGRA DE COMPANHIA

Regra de companhia ou de sociedade é a operação que tem por fim dividir os lucros ou perdas proporcionalmente entre as pessoas associadas.

Entrada é a quantia com que entra cada socio.

Capital ou *fundo social* é a somma das entradas de todos os socios.

Socio de industria é o que não entra com capital, mas tem parte nos lucros, pelo seu trabalho ou industria.

Socio commanditario é o que só entra com capital não se occupando com o negocio.

O *lucro* de uma sociedade tambem é chamado *dividendo*.

Ha duas especies de regra de companhia : regra de companhia simples e regra de companhia composta.

Regra de companhia simples é aquella em que os tempos são iguaes, sendo as entradas differentes, ou sendo diversos os tempos mas as entradas são iguaes.

Regra de companhia composta é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.

OBSERVAÇÕES. — Aqui vamos apenas dar as regras para as duas especies de regra de companhia, deixando de parte a demonstração que os alumnos irão aprender mais tarde em curso superior ao de que trata o presente livrinho.

REGRA DE COMPANHIA SIMPLES

Tempos iguaes, entradas diversas

Regra. — Divide-se o lucro ou perda total pela somma das entradas e o quociente é multiplicado separadamente pela entrada de cada socio para ter o lucro ou perda de cada um.

EXEMPLO

Tres negociantes associaram-se para uma empreza commercial, entrando o 1° com 20:000$000, o 2° com 15:000$000 e o 3° com 10:000$000, na dissolução da sociedade deram balanço achando um lucro de 36·495$000. Quer saber-se quanto ganhou cada um.

Fazendo applicação da regra teremos:

$$\text{Lucro do 1°}\quad \frac{36:495\$000}{20:000\$000+15.000\$000+10\cdot 000\$000}\times 20:000\$000=$$

$$=\frac{36:495\$000}{45:000\$000}\times 20:000\$000=0{,}811\times 20:000\$000=16:220\$000$$

$$\text{Lucro do 2°}\quad \frac{36:495\$000}{20:000\$000+15:000\$000+10:000\$000}\times 15:000\$000=$$

$$0{,}811\times 15:000\$000=12:165\$000$$

$$\text{Lucro do 3°}\quad \frac{36:495\$000}{20:000\$000+15:000\$000+10:000\$000}\times 10:000\$000=$$

$$0{,}811\times 10:000\$000=8:110\$000$$

Lucro do 1°	16:220$000
do 2°	12:165$000
» do 3°	8:110$000
Lucro da sociedade....	36:195$000

Do exposto se viu que tivemos de dividir o numero 36:495 $000 em partes proporcionaes ás entradas 20:000$000, 15:000$000 e 10:000$000.

Entradas iguaes, tempos diversos

Regra. — Divide-se o lucro ou perda total pela somma dos tempos e multiplica-se o quociente successivamente pelo tempo de cada socio para ter a parte de cada um.

EXEMPLO

Uma pessoa principiou um negocio com o capital de 5:000$000; mezes depois admittio um socio que entrou com igual quantia; 8 mezes depois entrou para a sociedade um 3.° com igual capital. No fim de um anno tinha a sociedade um prejuizo de 12:000$000; qual a perda de cada um?

Pela exposição do problema vê-se que as entradas são iguaes, e os tempos differentes. O 1.° socio esteve com o seu capital em gyro durante

12 mezes, o 2.° que entrou 3 mezes depois esteve 9 mezes e o 3.° que entrou 8 mezes depois esteve 4 mezes sómente. Fazendo applicação da regra precedente teremos:

$$\text{Perda do 1.°}=\frac{12:000\$000}{12+9+4}\times 12=\frac{12:000\$000}{25}\times 12=$$

$$=480\$000\times 12=\;\ldots\ldots\ldots\quad 5:760\$000$$

$$\text{Perda do 2°}=\frac{12:000\$000}{12+9+4}\times 9=480\$000\times 9=\quad 4:320\$000$$

$$\text{Perda do 3°}=\frac{12:000\$000}{12+9+4}\times 4.480\$000\times 4=\ldots\quad 1:920\$000$$

Somma das perdas, prejuizo da sociedade....... 12:000$000

REGRA DE COMPANHIA COMPOSTA

Regra. — Divide-se o lucro ou perda total pela somma das entradas, multiplicadas, cada uma pelo respectivo tempo, e o quociente se multiplica successivamente pela entrada multiplicada pelo tempo de cada um para ter a parte correspondente.

EXEMPLO.

Um negociante começou uma empreza com 25:000$000; cinco mezes depois se lhe associou um capitalista com 40:000$000; e um mez depois deste outro capitalista concorreu com 60:000$000. Dois annos depois liquidou-se um lucro de 73:200$000 · pede-se o lucro de cada um.

Do exposto vê-se que é uma regra de companhia composta, porque as entradas e tempos são differentes; o 1° socio teve o seu capital em gyro durante 24 mezes, o 2° durante 19 e o 3° durante 18. Fazendo as operações indicadas na regra teremos

$$\text{Lucro do 1.°}$$

$$=\frac{73:200\$000}{25:000\$\times 24+40:000\$\times 19+60:000\$\times 18}\times 25.000\$000\times 24=$$

$$=\frac{73:200\$000}{600:000\$+760:000\$000+1.080:000\$}\times 600:000\$=$$

$$=0.03\times 600\cdot 000\$=18:000\$000$$

$$\text{Lucro do 2°}$$

$$=\frac{73:200\$000}{25:000\$\times 24+40:000\$\times 19+60:000\$\times 18}\times 40:000\$\times 19$$

$$=\frac{73:200\$000}{2.440.000\$000}\times 760.000\$000=0{,}03\times 760\$000\$=22:800\$000$$

Lucro do 3º

$$= \frac{73:200\$000}{25:000\$\times 24+40:000\$\times 19+60:000\$\times 18}\times 60:000\$\times 18$$

$$\frac{73:200\$000}{2.440:000\$000}\times 1.080:000\$ = 0,03\times 1.080\$ = 32:400\$000$$

nma dos lucros

Do 1º...........	18:000$000
» 2º...........	22:800$000
» 3º...........	32:400$000
Lucro total.......	73:200$000

EXERCICIOS

Tres negociantes fundaram uma sociedade com o capital de 10:000$, tendo o 1º entrado com $\frac{1}{5}$ do fundo social, o 2º com o triplo do 1º e o 3º com o resto, ganharam 8:500$000 ; pergunta-se quanto cabe a cada um.

Quatro pessoas dissolveram uma sociedade no fim de 3 annos, com um lucro de 18:000$000 pergunta se quanto teve cada socio, sabendo-se que o 2º entrou para sociedade 8 mezes depois do 1º, que o 3º, entrou 1 anno depois que o 2º e o quarto entrou 5 mezes depois que o 3º ?

Um negociante começou uma empreza com 12.000$000, 3 mezes depois deu sociedade a outro com o capital de 9:000$000, os quaes 9 mezes mais tarde admittiram novo socio com o capital de 21:000$000 ; 2 annos depois de começada a empreza, dissolveu-se a sociedade com um lucro de 18:000$000 ; pergunta-se quanto ganhou cada um ?

REGRA DO TERMO MEDIO

O termo *medio* entre dois numeros é o quociente da somma desses dois numeros dividida por 2 ; entre tres, o quociente da somma dos tres dividido por 3 ; entre quatro, o quociente da somma dos quatro dividida por 4 e assim por diante. Portanto

Regra.—Para achar o termo medio entre dois ou mais numeros divide-se a sua somma pelo numero delles.

EXEMPLO

Qual é o termo medio entre os numeros 7, 5 e 12 ?

OPERAÇÃO

$$\frac{7+5+12}{3}=\frac{24}{3}=8, \text{ termo medio.}$$

PROBLEMA II

Em uma escola, na 2ª feira compareceram 8 alumnos, na 3ª 15, na 4ª 13, na 5ª 12, na 6ª 20 e no sabbado 16, qual foi a frequencia media diaria da semana ?

OPERAÇÃO

2ª feira.............	1º dia —	8 alumnos
3ª »	1º » —	15 »
4ª »	1º » —	13 »
5ª »	1º » —	12 »
6ª »	1º » —	20 »
Sabbado.................	1º » —	16 »
	6 dias	84 alumnos.

$$\frac{84 \text{ alumnos}}{6 \text{ dias}} = 14 \text{ alumnos}$$

Portanto a media da frequencia diaria foi de 14 alumnos.

PROBLEMA III

Um commerciante mistura 5 litros de vinho bom do preço de 1.000 réis o litro, 4 de 700 réis e 6 de 500 réis, pergunta-se, qual deve ser o preço de 1 litro da mistura ?

OPERAÇÃO

$$5^l \times 1000 = 5\$000$$
$$4^l \times 700 = 2\$800$$
$$6^l \times 500 = 3\$000$$
$$15^l \qquad = 10\$800$$

$$\frac{10800}{15} = 720 \text{ réis}$$

Preço do litro da mistura 720 réis.

PROBLEMAS PARA RESOLVER

I—Um viajante no 1º dia da jornada andou 10 leguas, no 2º 15, no 3º 16, no 4º 18 e finalmente no 5º 17 ; pergunta-se, quantas leguas na media andou por dia ? 15

II—Uma pessoa comprou 8 kilos de farinha a 800 réis, 5 a 400 réis e 12 a 300 réis ; qual o preço medio de 1 kilogramma ?

III—Em um porto entraram no mez de Janeiro 150 embarcações, em Fevereiro 112, em Março 130, em Abril 95, em Maio 73 e em Junho 120 ; qual é a media das embarcações entradas mensalmente durante o semestre ? 113

METHODO DA REDUCÇÃO A UNIDADE

As questões de *regra de tres, juros* etc. que precederam, foram resolvidas por meio das proporções. Vamos agora tratar das mesmas questões empregando o methodo analytico chamado da — *reducção á unidade* — que sob muitos pontos de vista avantaja-se ao methodo empregado até aqui.

Afim de que os estudantes possam bem notar as vantagens deste methodo, comparando-o com o outro, vamos resolver os mesmos problemas que já nos serviram de exemplos.

1.ª QUESTÃO

Regra de tres

1.º PROBLEMA

Em certa hora do dia uma torre faz uma sombra de 120 metros de comprimento, á mesma hora uma varinha de 5 metros posta em pé, projecta uma sombra de 8 metros, qual é a altura da torre?

Resolução:

Eis como devemos proceder para a resolução do problema:

Si a sombra de 8^m é produzida por uma varinha de.............................. 5^m

A sombra de 1 metro será produzida por uma altura 8 vezes menor, ou.............. $\frac{5}{8}$

Por consequencia a sombra de 120^m, será produzida por uma altura 120 vezes maior, ou... $\frac{5}{8} \times 120$

Effectuando-se a operação acharemos que

$$\frac{5}{8} \times 120 = \frac{5 \times 120}{8} = \frac{600}{8} = 75^m$$

Portanto a torre terá 75 metros de altura.

2.º PROBLEMA

Estando o cambio entre o Brazil e Inglaterra a $7^1/_2$; pergunta-se, quanto valerá neste paiz 1:520$000 da nossa moeda?

Resolução:

Si 1.000 rs. brazileiros valem .... Pences $7\,^1/_2$ ou 7, 5

1 real valerá 1.000 vezes menos ou. $\frac{7,5}{1.000}$

Logo 1.520:000 rs. valerão 1.520.000 vezes mais do que 1 real, ou $\frac{7,5}{1.000} \times 1.520{:}000$

Effectuando as operações teremos que

$$\frac{7,5 \times 1.520{:}000}{1000} = \frac{11{:}400{:}000}{1000} = 11400 \text{ pences.}$$

Convertendo os 11400 pences a £, s. e p. teremos

114'0'0	240
−180	47 £ 10^s
−−12	
20^s	
$24'0^s$	
000	

Portanto, ao cambio de $7\,^1/_2$, 1.520$000 valem 47£ — 10^s

3.º PROBLEMA

24 trabalhadores fazem uma certa obra em 36 dias, 30 trabalhadores em quantos dias farão a mesma obra?

Resolução:

Si 24 trabalhadores gastam.............. 36 dias

1 só trabalhador gastará 24 vezes mais, ou.. 36×24

Por consequencia 30 trabalhadores gastarão 30 vezes menos dias do que um só, ou.. $\frac{36 \times 24}{30}$

Fazendo as operações teremos:

$$\frac{36 \times 24}{30} = \frac{864^d}{30} = 28^d\ 19^h\ 12^m$$

2.ª QUESTÃO

Juros simples

1.º PROBLEMA

— *Qual será o juro de 186$500 a 7 °/o ao anno em 3 annos?*

Resolução:

Si 100 em um anno rendem........ 7

1 renderá 100 vezes menos, ou..... $\frac{7}{100}$

Portanto 186$500 renderão 186.500 vezes mais, ou............... $\frac{7\times 186.500}{100}$

Porém $\frac{7\times 186.500}{100}$ é o rendimento de um anno, logo o rendimento de 3 annos será 3 vezes maior ou........................ $\frac{7\times 186.500\times 3}{100}$

Effectuando as operações indicadas acharemos

$$\frac{7\times 186.500\times 3}{100} = 39\$165$$

2.º PROBLEMA

PROCURAR OS JUROS DE UM CERTO NUMERO DE MEZES

Quanto renderão em 7 mezes 2:596$000 emprestados a 9 °/o ao anno?

Solução:

Si 100 rendem em um anno........ 9

1 renderá 100 vezes menos, ou..... $\frac{9}{100}$

Portanto 2.596.000 renderão 2.596.000 vezes mais ou................. $\frac{9\times 2.596.000}{100}$

Porém $\frac{9\times 2.596\ 000}{100}$ é o juro de um anno ou 12 mezes; como queremos sómente o rendimento de 7 mezes temos de continuar o raciocinio:

Si em 12 mezes 2.596.000 rendem.. $\frac{9\times 2.596.000}{100}$

em um mez renderão 12 vezes menos, ou.................. $\frac{9\times 2.596.000}{100\times 12}$

Por consequencia em 7 mezes renderão 7 vezes mais, ou.......... $\frac{9\times 2.596.000\times 7}{100\times 12}$

Effectuando as operações indicadas acharemos

$$\frac{9\times 2.596.000\times 7}{100\times 12} = \frac{163.548.0\cancel{0}\cancel{0}}{1.2\cancel{0}\cancel{0}} = 136\$290$$

Portanto 2:596$000, á 9 °/o ao anno, em 7 mezes renderão 136.290.

3.º PROBLEMA

PROCURAR OS JUROS PARA UM CERTO NUMERO DE DIAS

Quanto renderão em 78 dias 3:450$000 emprestados á razão de 12/o ao anno?

Solução:

Si 100 rendem em um anno........ 12

1 renderá 100 vezes menos, ou..... $\frac{12}{100}$

portanto 3:450$000 renderão 3.450.000 vezes mais do que 1 ou. ...... $\frac{12\times 3.450.000}{100}$

Este rendimento, porém, é na supposição de ser o rendimento em um anno; como nós queremos sómente de 78 dias, continuaremos a raciocinar e armar o nosso calculo:

Visto que em *um anno*, ou 360 dias, 3:450$000 rendem.......... $\frac{12\times 3.450.000}{100}$

Em 1 dia renderão 360 vezes menos, ou .... $\dfrac{12 \times 3.450:000}{100 \times 360}$

Por consequencia em 78 dias renderão 78 vezes mais, ou.......... $\dfrac{12 \times 3.450:000 \times 78}{100 \times 360}$

Effectuando as operações teremos:

$$\frac{12 \times 3.450.000 \times 78}{100 \times 360} = \frac{3.229.200.\cancel{000}}{36.\cancel{000}} = 89\$700$$

Observação — Quando os dias do calculo vierem acompanhados de mezes, por exemplo: *4 mezes e 25 dias*; convertem-se os mezes a dias e pratica-se a operação já indicada Assim os 4 mezes e 25 dias ficariam reduzidos: 4 mezes = 120 dias; sommando estes com 25: teremos 145 dias ao todo.

Este problema, assim como o 2.º não foram tratados pelas proporções. São problemas novos.

4.º PROBLEMA (*)

DEDUCÇÃO DA FÓRMULA GERAL DE JUROS

Para a determinação da fórmula geral de juros, cuja applicação já fizemos anteriormente, raciocinaremos empregando lettras, exactamente como si tratassemos de numeros.

PROBLEMA GERAL

Qual será o juro **j** *do capital* **c** *emprestado á taxa de* **i** º/ₒ *em* **t** *annos?*

Solução:

Si 100 rende em um anno........ i

1 renderá 100 vezes menos, ou... $\dfrac{i}{100}$

Portanto **c** renderá **c** vezes mais ou $\dfrac{c \times i}{100}$

(*) Este problema só deverá ser dado quando os alumnos já estiverem sufficientemente praticos nos raciocinios e já possam fazer as abstracções que ahi se exigem

Isto porém é suppondo que o capital só esteve empregado em um anno logo em **t** annos, renderá **t** vezes mais, ou....... $\dfrac{c \times i \times t}{100}$

Portanto os juros do capital **c** em **t** annos á taxa de **i** será igual: — AO CAPITAL MULTIPLICADO PELA TAXA E PELO TEMPO TUDO DIVIDIDO POR 100. Eis ahi como se traduz a fórmula geral

$$i = \frac{c \times i \times t}{100}.$$

— A regra de descontos por fóra usada no commercio não é mais do que uma regra de juros como já sabemos. A regra de divisão proporcional foi dada analyticamente e a regra de companhia não é mais do que uma applicação daquella regra, por isso não tratamos dellas neste logar.

Fim

Waldemiro Motta

INDICE