



# UMA EXPERIÊNCIA FASCINANTE EM APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

ESTER PILLAR GROSSI

Há dois anos, em Porto Alegre, um grupo de professores de Matemática fundou uma agremiação cujo objetivo é o de contribuir para a melhoria do ensino da Matemática em todos os níveis de escolaridade.

Com um objetivo tão vasto, vem trabalhando desde a sua fundação e entre suas muitas iniciativas figura a organização de oito classes-piloto para uma experiência ainda mais avançada em ensino-aprendizagem de Matemática.

O esforço de renovação do ensino da Matemática em Porto Alegre data de alguns anos, havendo escolas cujos alunos já estão no 7º ano de trabalho, totalmente modificado neste sentido. Para que isto pudesse ser feito, a preparação dos professores vem sendo realizada desde 1966, havendo cursos de até dois anos de duração, para atualização dos que se ocupam dos alunos na faixa dos 7 aos 15 anos. Somente professores primários com esta formação estão engajados nas experiências do Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (GEEMPA), denominação da agremiação a que nos referimos acima.

Em agosto de 1972, estive durante 17 dias em Porto Alegre o Prof. Zoltan P. Dienes, Presidente do Grupo Internacional para o Estudo do Ensino da Matemática e Diretor do Centro de Pesquisas Psico-Matemáticas da Universidade de Sherbrooke (Canadá) e autor de numerosa obra sobre Didática da Matemática. Durante os 17 dias em que estive em Porto Alegre, o Prof. Dienes trabalhou todas as manhãs com um grupo restrito de professores (50), estudando a abordagem de novos conteúdos matemáticos na escola primária, naturalmente com uma metodologia completamente renovada e, à tarde, na presença de 1.000 professores, orientou aulas-demonstração com alunos desde 6 até 15 anos.

Em seqüência a este trabalho, foram organizadas as oito-classes-piloto, cuja experiência passamos a relatar.

**Bases da experiência com as classes-piloto**  
Em seis escolas de Porto Alegre, onde já havia

uma garantia de 'continuidade, porque eram escolas que tinham bom número de professores com curso de atualização em Matemática, foram escolhidas as oito turmas de alunos.

As bases do trabalho, ou seja, suas idéias-fonte, foram duas:

- 1) A liberdade é fator de motivação.
- 2) O aluno só abstrai a partir do concreto.

Essas idéias-fonte foram aplicadas a partir do fato de os alunos terem liberdade de escolher a sua tarefa escolar, pois o professor punha a sua disposição muitos materiais didáticos concretos, com os quais eles podiam trabalhar livremente. Junto com os materiais, havia fichas de trabalho que os alunos podiam utilizar.

Os alunos situavam-se na faixa etária de 6 a 12 anos, distribuídos em uma primeira série, três segundas séries, duas terceiras séries, uma quinta série e uma sexta série, todas de 1º grau.

Em geral, durante o trabalho, eles se agrupavam em pequenas equipes de duas, três ou quatro pessoas.

A experiência teve a duração de somente pouco mais de três meses e não houve preocupação de modificar o conteúdo matemático que já era atualizado nas seis escolas escolhidas.

A didática é que teria o maior peso de alterações, pois o uso de muitos materiais didáticos concretos para trabalho livre dos alunos tinha como objetivo seguir as seis etapas do processo de aprendizagem em matemática segundo Piaget-Dienes, que são:

- jogo livre com materiais;
- jogos estruturados, ou seja, introdução de regras para o uso de materiais;
- comparação dos jogos estruturados, com vistas à descoberta da abstração;
- representação da abstração através de um esquema, diagrama ou gráfico;
- análise das propriedades de abstração e criação de uma simbologia para expressá-la;
- descoberta de novas propriedades a partir



## UMA EXPERIÊNCIA...

de outras, ou seja, aplicação matemática. Desejávamos que os alunos fizessem suas descobertas a partir de problemas propostos nos jogos estruturados em forma de regras. Para isso foi necessário usar muitos e variados materiais, assim como vários tipos de jogos estruturados conduzindo aos conceitos visados, o que levou os alunos a uma tal profundidade de aprendizagem que, ao fim de três meses, eles apresentavam grande diferença dos seus colegas das outras turmas da mesma série na sua escola, como veremos adiante.

### Formação dos professores

Os professores destas classes-piloto tinham certa formação matemática, adquirida mediante cursos de atualização destinados a professores de 1º grau, de no mínimo dois anos de duração, e muitos de seus colegas em cada escola também a tinham, estando toda a escola numa linha de renovação. Além disso possuíam estudos no GEEMPA.

### Encontros de orientação

Os professores encontravam-se semanalmente sob nossa orientação durante quatro horas de estudo, para revisão e planejamento do trabalho de classe. Integravam esta equipe uma psicóloga e uma professora de ciências naturais.

### Observação da experiência

Cada classe possuía uma observadora que, uma vez por semana, exercia sua função preenchendo uma ficha detalhada com as atividades realizadas em classe, atitude dos alunos e do professor etc. A

### Crianças trabalhando com blocos lógicos.



observadora participava das reuniões de estudo com os professores-regentes das classes.

### Ficha-controle

Para que um trabalho escolar seja diversificado é exigido do professor que ele tenha uma ficha de registro do que cada aluno realizou e o que cada um deles já descobriu. Era a ficha-controle, peça importantíssima da experiência. A partir desta ficha, o professor podia planejar o progresso de cada aluno através da confecção de novos materiais, assim como da elaboração de novas fichas de trabalho.

### Reação dos pais

Os pais dos alunos aprovaram unanimemente a experiência e eram postos ao corrente da sua evolução em reuniões periódicas promovidas pela escola.

### Experiência na primeira série

Como é impossível abordar em um só artigo o trabalho das cinco séries das classes-piloto, vamos detalhar especialmente a partir de agora, o trabalho da primeira série, que contava com 27 alunos de 6 a 7 anos de idade, sendo 11 meninas e 16 meninos. Foi-lhes aplicado o Teste de Raven, cujos resultados foram:

|                  |     |
|------------------|-----|
| Inferior à média | — 3 |
| Médio            | — 6 |
| Acima da média   | — 4 |
| Superior à média | — 5 |
| Superior         | — 9 |

Isto nos permitiu ter uma turma bem significativa, uma vez que possuía representantes de todos os níveis do Teste.

### Conteúdos matemáticos

Os conteúdos matemáticos trabalhados com estes alunos, desde o início do ano, isto é, no primeiro semestre, foram:

Noções de topologia do espaço e do plano (aberto e fechado — dentro e fora — região) — Atributos e valores — conjuntos (universo vazio, unitário — determinação por propriedade característica ou por extensão) — Representação de conjuntos em Diagramas de Venn e de Carroll — Direção e sentido (caminhos e uso de flechas) — Medidas de massa, volume e tempo.

Durante os três meses da experiência, foram trabalhados:

Relação de equivalência — Ordens — Funções — Propriedades (reflexiva, simétrica e transitiva) — Lei — Conjunto de partida e de chegada — Produto cartesiano — Pares ordenados — Igualdade — Diferença — Bijecção — Classes de





Alunos da 1ª série do Grupo Escolar D. Leopoldina, da classe piloto do GEEMPA, em atividade numa aula.

equivalência — Número cardinal — Ordem nos números.

### Materiais didáticos

Estes últimos conteúdos foram manipulados na forma de jogos, com os seguintes materiais didáticos concretos:

— Blocos lógicos — Conjunto de autinhos, aviõezinhos, panelinhas, de brinquedo, estruturados segundo cor, tamanho, forma etc. — Bolas de diversos tamanhos e cores, que se encaixavam — Fitas com casas e botões — Conjuntos de conjuntos com três atributos cada um com dois valores  $2 \times 2 \times 2$ ; ou  $3 \times 3$ ,  $3 \times 3 \times 3$ ,  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  — Um conjunto de fichas gráficas.

### Exemplos de jogos estruturados

Com estes materiais, os alunos faziam:

- 1) O jogo de descobrir a peça que fora escondida, explicitando os valores de atributos.
- 2) A separação em classes de equivalência, explicitando o atributo pensado na classificação.
- 3) Fila, usando critérios de ordem.
- 4) O jogo do «vale mais», a partir da presença ou não de um elemento nos conjuntos de conjuntos  $2 \times 2 \times 2 \times 2$ , conduzindo às ordens parciais.

### Perguntas conducentes às descobertas

Enquanto os alunos jogavam, a professora fazia perguntas, como:

(Classes de equivalência)

- Tu és capaz de separar este brinquedo em três montes (três grupos) pensando em alguma coisa?
- Tu és capaz de separar este material em cinco grupos, pensando em alguma coisa?
- Separei em «x» grupos este brinquedo pensando em uma coisa. Podes descobrir no que eu pensei?

(Explicitação da lei)

- Por que estes dois vieram para o mesmo grupo?
- Este pode dizer: eu sou da mesma ... que tu?
- Este pode dizer: eu sou maior do que?

Análise das propriedades de equivalência)

- É verdade que «x» é da mesma cor que «y»?
- «y» também pode dizer a mesma coisa a «x»?
- Pode-se dizer para ele — eu sou da mesma cor que eu?

(Ordem)

- Tu podes fazer uma fila pensando em alguma coisa?
- Tu sabes bem quem vem antes do «x»?

Organizar os blocos lógicos em fila, deixando uns três claros e pedir que eles preencham.

Organizar uma fila com carrinhos, com dois fora de ordem e pedir que assinalem os que não estão no lugar certo.

(Explicitação da lei nas ordens e análise das propriedades.)

- O que este bloco pode dizer para aquele?
- Aquele pode dizer o mesmo para este?
- Este pode dizer — ... eu estou na frente de mim ... ?

(Correspondências)

- Será que há um garfinho para cada faca?
- Será que há duas colheres para cada prato?
- Será que há uma casa para cada botão?
- O que será que o garfo diz para a faca?
- Fazer o brinquedo do amigo secreto por grupos. Será que vai haver um papelzinho para cada criança?

(Sugestão para o uso de flechas)

- Cada um se represente no quadro-verde e mostre, sem falar, que nome estava escrito no seu papel.

(Identificação dos diferentes tipos de relações)

Na aula ao lado, as crianças estão fazendo trabalho de matemática. Uma menina diz: «No meu trabalho, através da lei — este bloco disse àquele: eu sou da mesma cor que tu — será que ela está fazendo fila ou separando em grupos?»

Em outro grupo, ouve-se: «Este vem atrás daquele. Este outro ainda vem mais atrás». Eles estão fazendo fila ou separando em grupos?

É muito importante a condução, por meio de estímulos orais do professor, em direção aos conceitos que se busca. Só o jogo livre com os materiais não terá força de conduzir às descobertas.

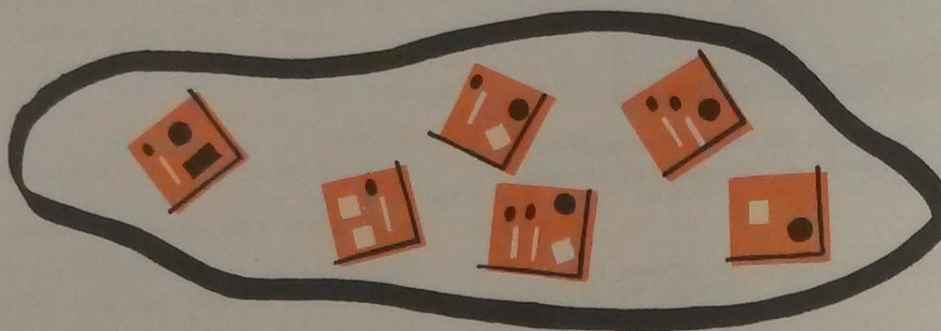


Sugestões de atividades gráficas

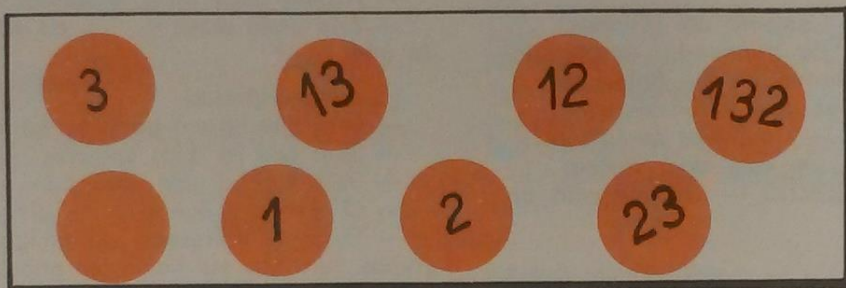
Quando os alunos responderam satisfatoriamente aos testes acima, foi a hora de passar à representação e ao estudo do número cardinal. Passando à quarta fase, da representação da abstração, foram realizadas atividades gráficas sobre relações.

Fazer muitas fichas, pô-las à disposição dos alunos e deixar que escolham as que querem.

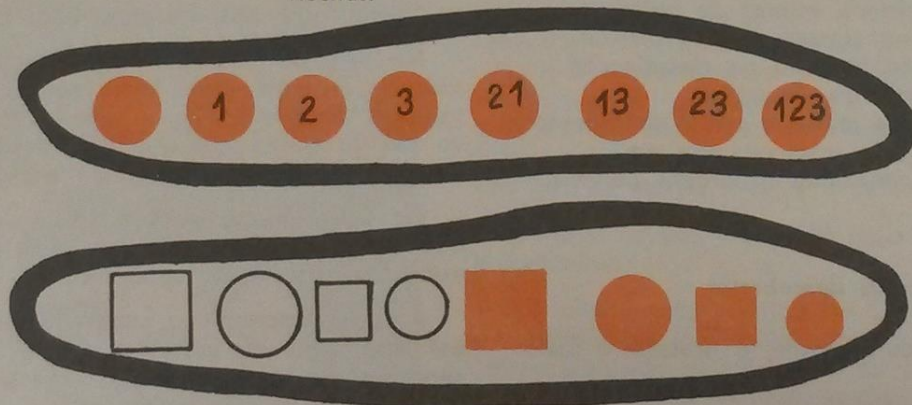
1) Diante de um conjunto de conjuntos  $3 \times 3 \times 3$ , e após uma atividade de classificação, supondo que a classificação tenha sido feita pelo número de palitos, pedir às crianças que cada conjunto mostre, com flechas, quais estavam na mesma pilha que ele.



2) Diante de um material  $2 \times 2 \times 2$  e realizada uma ordenação parcial na base do ... vale mais ... pedir que as crianças mostrem o que vale mais que ... no esquema. Analisar: quantas flechas chegaram no (12) e quantas saíram dele? Em qual chegaram mais flechas? De qual saíram menos flechas?

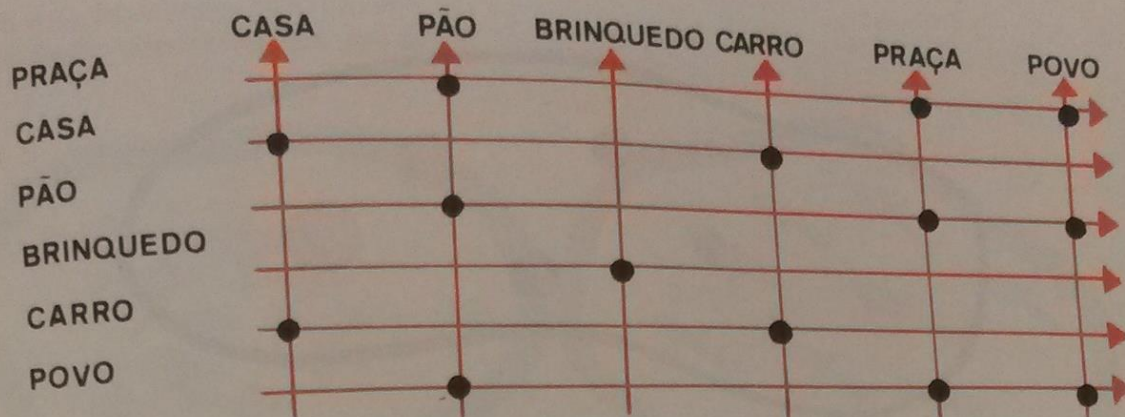


3) Diante de dois materiais  $2 \times 2 \times 2$ , um conjunto de conjuntos e um conjunto de objetos, e realizada uma correspondência entre os elementos de ambos, pedir que mostrem essa correspondência com flechas.

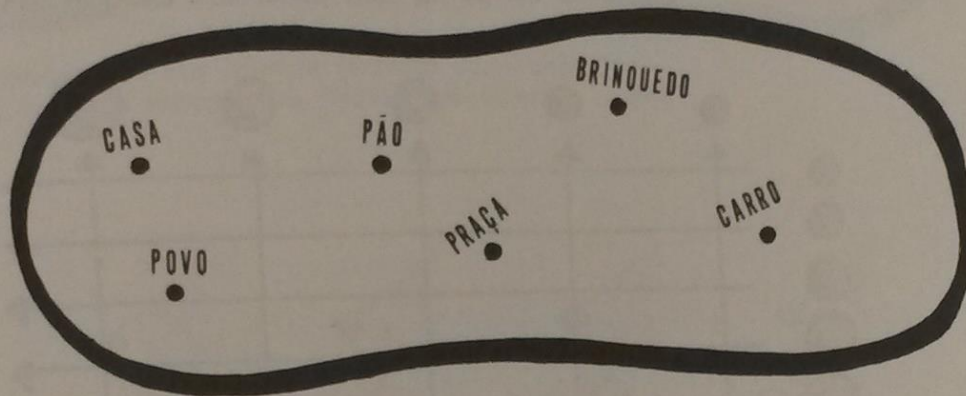




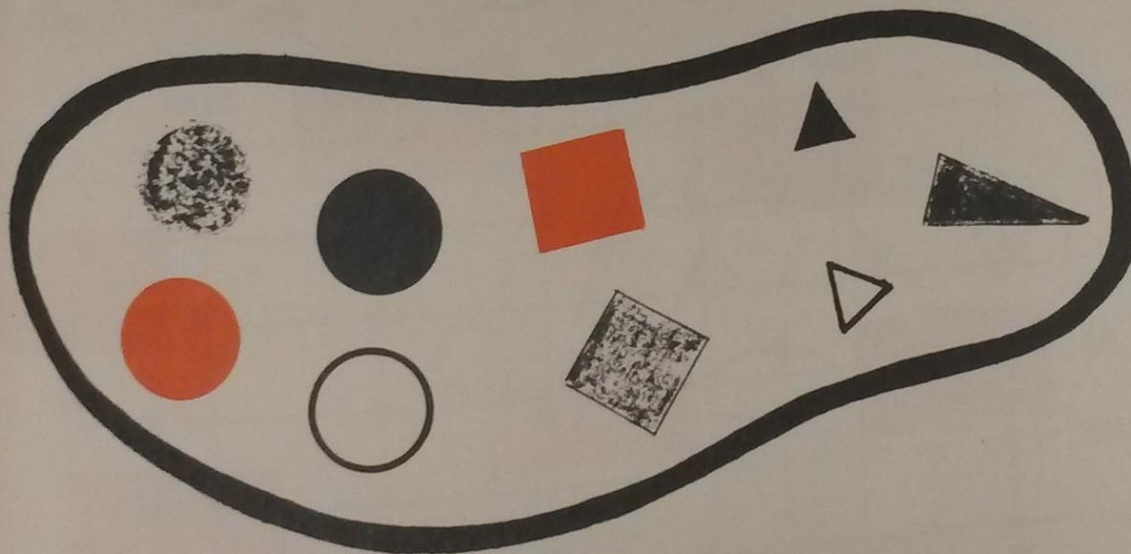
4)a) Casa vai com casa, mas não vai com pão, brinquedo etc.  
 Pão vai com pão, com praça e com povo. Em que será que se pensou  
 para fazer este jogo do ratinho? O que será que uma palavra  
 diz para a outra?



b) Faze aqui as flechas que há lá em cima. Quantas flechas  
 saíram de pão? Quantas chegaram em carro?



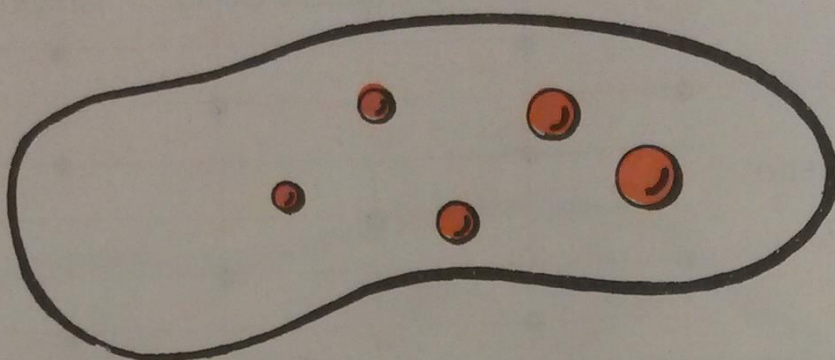
5) Faze flechas pensando em alguma coisa. Em que pensaste?  
 O que uma flecha diz para a outra? Analisar se todos pensaram na  
 mesma coisa.



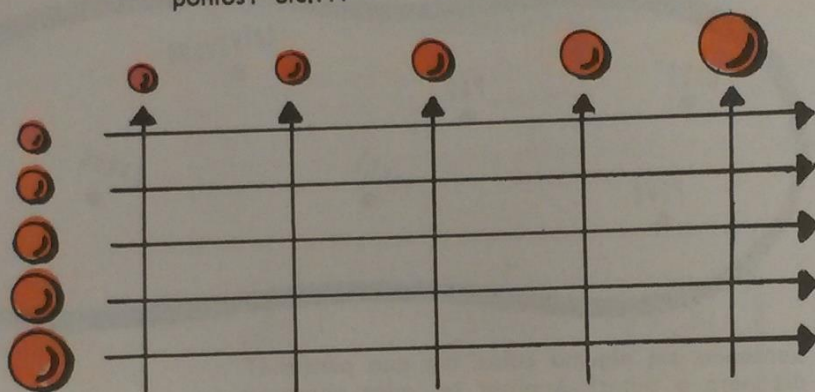


UMA EXPERIÊNCIA...

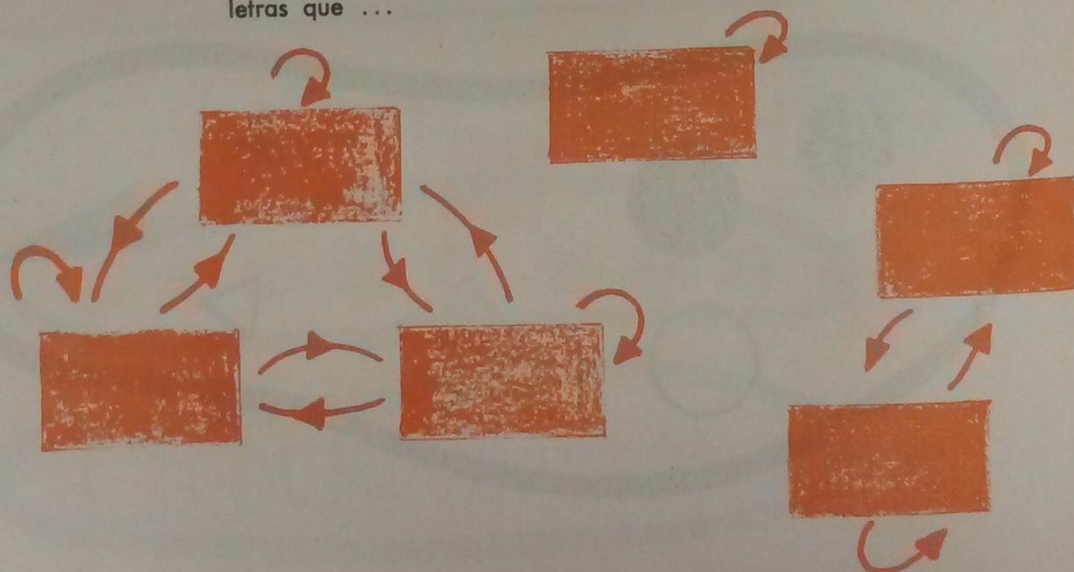
6 a) Pensa em alguma coisa e faz flechas entre estes desenhos. O que as flechas querem dizer no seu desenho? O que as flechas dizem dá para separar as bolas em pilhas ou fazer uma fila com elas? Em qual bola chegaram mais flechas? Quantas flechas saíram da bola menor?



b) Marca os pontinhos das flechas do esquema de cima. Em qual linha em pé há mais pontinhos? Em qual linha deitada há dois pontos? etc...

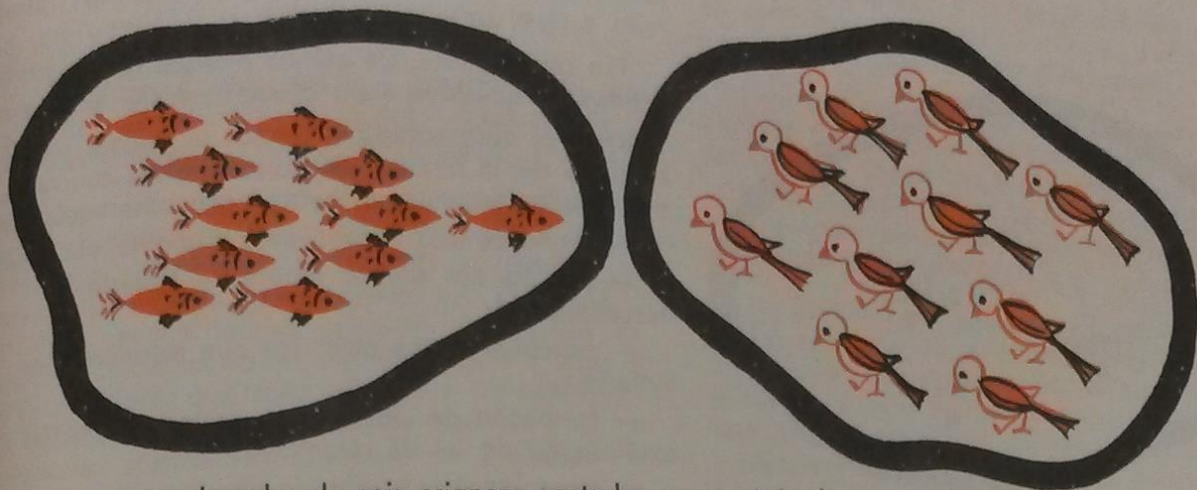


7) Inventa palavras que possam ser postas nos retângulos e que sirvam para as flechas que dizem: ... tem mesmo número de letras que ...

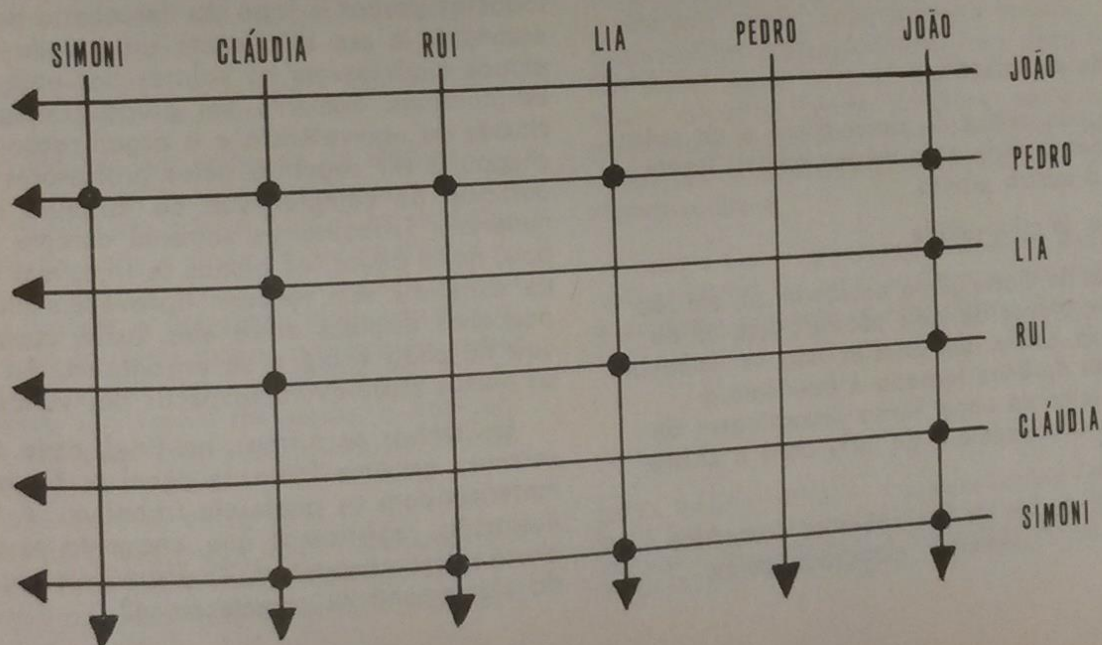




- 8) Põe uma cruz nas frases que servem para os conjuntos ao lado, porém sem contar nem os passarinhos nem os peixes.
- ( ) Há menos peixes que passarinhos.
  - ( ) Há tantos peixes quantos passarinhos
  - ( ) Há mais peixes que passarinhos
  - ( ) Há mais passarinhos que peixes
  - ( ) Há menos passarinhos que peixes



- 9) a) Faze um desenho de seis crianças sentadas umas atrás das outras. O pontinho marca a esquina das flechas que dizem: ... está na frente de ...





## UMA EXPERIÊNCIA...

b) Faça aqui as mesmas flechas do quadro do ratinho. Elas dizem: ...está na frente de...

Em qual criança chegaram mais flechas? Quantas flechas saíram de Cláudia? etc...



Muitas fichas gráficas foram utilizadas neste momento, sob a inspiração dos livros de Mme. Picard, M. Dienes, Mme. Papy e Mme. Clausard.

### Generalização das relações

Os alunos realizaram também muitas atividades que conduziram à consciência de que nem todas as relações são de um dos três tipos mais trabalhados: equivalência, ordens e funções. Em especial, as dramatizações familiares em que havia os avós com filhos casados e netos, permitiam o estabelecimento de relações baseadas em leis como: ... tem como pai. ... é irmão de ... é esposo de ... tem como tio ... etc.

### Avaliação da experiência

Após isto, os alunos da classe-piloto e da outra classe (da mesma série e da mesma escola) foram submetidos a quatro provas.

#### 1ª) Teste de criatividade

Os alunos da classe-piloto acusavam já, em tão pouco tempo, atitude de mais abertura que os da classe-controle, sendo que aqueles não se limitavam aos contornos da linha fechada e trocavam a posição da folha de papel numa percentagem de 40% para a classe-piloto e de 10% para a classe-controle.

2ª) Prova de fim de ano sobre os conteúdos trabalhados no 2º semestre, elaborada pelas

professoras das outras três classes de 1ª série da escola. Os conteúdos, como já dissemos, foram os mesmos, na classe-piloto e na classe-controle. A diferença dos resultados foi a seguinte:

98% de acertos na classe-piloto para 70% de acertos na classe-controle.

3ª) Prova elaborada pela equipe do GEEMPA, tendo em vista as expectativas em termos de desenvolvimento de raciocínio, a partir do trabalho feito e dos conteúdos visados.

Na classe-piloto, os alunos tiveram 80% de acertos às questões e na classe-controle, 47%.

4ª) Foi apresentado a ambas as classes um conjunto de 15 novos materiais didáticos concretos, estruturados segundo atributos, para observação de:

- dinâmica das turmas para trabalho em grupo;
- reação dos alunos diante de materiais desconhecidos;
- descoberta dos atributos que estruturam os materiais;
- formação de classes de equivalência com explicitação da lei de relação;
- organização de filas (ordens totais) e discriminação dos critérios para organizá-las.

A situação de apresentação foi idêntica em ambas as turmas, porém as reações foram completamente diferentes.

Na classe-piloto, os alunos trabalharam imediatamente por grupos, formando classes de equivalência e filas segundo os atributos que estruturavam os materiais, o que haviam descoberto e expresso no jogo de «esconde uma peça», proposto pelos apresentadores. Trabalharam durante 75 minutos em ordem, ao final guardando todo o material, precisamente.

Na classe-controle, os alunos não trabalharam em grupo e muitos deles se demoraram vários minutos para iniciar o manuseio dos materiais, isto é, diante de uma situação nova ficaram sem saber o que fazer. Nesta, os professores apresentaram em todos os grupos o jogo da descoberta da peça escondida e era com muita dificuldade que os alunos explicitavam os valores dos atributos estruturantes. Somente um grupo conseguiu formar classes de equivalência e a organização de fila nem chegou a ser sugerida pelos professores, dada a ausência de compreensão da estrutura dos materiais. Trabalharam somente durante 45 minutos, pois, nesta altura, os alunos se trocavam rapidamente de materiais sem nenhum aproveitamento, havendo pequenas disputas entre eles, assim como peças a cair no chão e até a se estragarem. Ao recolhê-los, os alunos misturavam as peças dos vários materiais.

Em ambas as turmas, no final, cada aluno escreveu em uma folha de papel os nomes dos materiais com os quais ele trabalhou. A título de ilustração, registramos que, enquanto os alunos da classe-piloto cometeram 23 erros de ortografia, os da classe-controle cometeram 62.



## Comentários finais

Para nós, que acompanhamos de perto este trabalho, foi uma experiência fascinante que será continuada, melhorada e ampliada neste ano.

Fala-se muito em trabalho escolar ativo, em auto-descoberta pelos alunos, em individualização da aprendizagem. Todos os bons educadores são unânimes em ressaltar a experiência destes aspectos, porém, em geral, só se fica em palavras. Nossa experiência, teoricamente, não traz à luz uma grande novidade. Porém, ela é a concretização, em nosso meio, dessas idéias há muito vislumbradas como importantíssimas em aprendizagem.

Não se compreende mais que uma turma de alunos, aproximadamente 30 crianças ou adolescentes, trabalhem nas mesmas atividades, durante todos os dias do ano letivo, isto é, que se proponham sempre tarefas idênticas para todos os alunos no mesmo momento. Aprendizagem é algo de dentro para fora, que cada aluno faz ou não faz, individualmente, na dependência de suas experiências particulares. Compete ao professor oportunizar experiências, sondar as descobertas de cada aluno, propondo atividades, isto é, conduzir a aprendizagem real de cada aluno.

Em Matemática, isto só se fará se o aluno dispuser de muito material didático, planejado e construído para a aprendizagem de cada conceito e, com ele, jogar numa atividade agradável. Aprender algo é imensa fonte de prazer. Agrada ao homem aprender; portanto, se a escola realmente ensinar, ela será para os alunos uma fonte de alegria. Eles gostarão de freqüentá-la, não só pelo aspecto social de estar entre companheiros da mesma idade, mas pela própria atividade discente.

É necessário que aos alunos sejam propostos variados jogos com regras, usando os mesmos materiais com os quais eles jogaram livremente. Implicitamente, nestas regras estão os conceitos que se quer ensinar. A partir da variedade destes jogos, os alunos, ao compará-los, vão abstrair o conceito. É um momento emocionante, quando um aluno descobre a regularidade, o que há em comum nos diversos jogos, ou seja, vislumbra o conceito.

A oportunização de um ambiente de efetiva aprendizagem é que foi buscada em nossas classes-piloto. Porém, isto não é fácil. Com toda a nossa bagagem de anos e anos de escola-treino, é difícil mudar. Nós repetimos com nossos alunos o que fizemos conosco e resistimos violentamente à modificação. Não foi fácil iniciar o trabalho nestes novos moldes. Os professores, consciente ou inconscientemente, têm receio de perder o domínio da classe, quando cada aluno ou grupo de alunos faz uma atividade diversificada. Enfrenta-se claramente, num trabalho em grupo, os conflitos sociais das turmas, o que pode passar despercebido numa classe do tipo tradicional, onde até a disposição das mesas em filas é individualizante.

É necessário preparar uma certa quantidade de materiais didáticos concretos, o que exige tempo e disponibilidade do professor, apesar de que, uma vez construídos, servirão no futuro.

É necessário que o professor estude mais, pois o êxito de sua atividade docente está no seu preparo.

É necessário que o professor trabalhe mais antes de cada aula, preparando materiais, fichas e analisando a ficha-controle detidamente.

Para realizar uma reforma, não basta só a boa vontade do professor. É preciso montar todo um esquema de apoio. Isto foi buscado pelo GEEMPA, constituindo uma equipe de execução do projeto das classes-piloto, onde havia reuniões semanais, observadores e assessores.

As reuniões em equipe, cada semana, dos professores das classes-piloto, foram de capital importância para a execução do projeto. O apoio mútuo pela troca de estímulos, que se viveu nestas reuniões, foi estupendo e indispensável. Nossos professores, nos primeiros 15 dias, encontraram bastante dificuldade em atender simultaneamente vários grupos de alunos, fazendo jogos diferentes e quase se sentiram perdidos. Alguns chegaram a achar impossível a continuação. Entretanto, diante do êxito e do entusiasmo dos demais, não esmoreceram e prosseguiram. No final da experiência, estes mesmos professores afirmavam não conceberem trabalhar mais de outro modo, pois, após o primeiro impacto de orientar uma classe com atividades diferenciais, o que é difícil, o professor começa a se desgastar menos, porque os alunos se tornam mais independentes, tomam gosto pelos jogos, se relacionam melhor com os colegas. Os nossos professores apalparam as vantagens, sentiram os alunos aprendendo verdadeiramente, pesquisando com ela, «quebrando a cabeça» com interesse, concentrando-se nos jogos durante um tempo muitíssimo superior ao que podia ocupar os alunos com os exercícios tradicionais da matemática.

Em três meses, nesta primeira investida, as classes-piloto proporcionaram, num clima de liberdade, maior criatividade, maior socialização, maior responsabilidade, simultaneamente com um rendimento de aprendizagem muitíssimo superior, constatado claramente pela comparação com as classes-controle.

É para nós viva satisfação divulgar entre colegas nosso esforço de atualização que, sabemos, encontrará eco entre muitos deles. ■

ESTER PILLAR GROSSI — Presidente do Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (GEEMPA) — é professora do Laboratório de Matemática do I. E. "Gen Flores da Cunha" — Porto Alegre — RS.