

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA**

Willian Goulart Gomes Velasco

ORBIFOLDS - VIA CARTAS E COMO GRUPOIDES

Florianópolis

2015

Willian Goulart Gomes Velasco

ORBIFOLDS - VIA CARTAS E COMO GRUPOIDES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Martin Weilandt

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor através do
Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

A ficha de identificação é elaborada pelo próprio autor

Maiores informações em:
<http://portalbu.ufsc.br/ficha>

Willian Goulart Gomes Velasco

ORBIFOLDS - VIA CARTAS E COMO GRUPOIDES

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 10 de Agosto 2015.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Martin Weilandt
Orientador

Prof. Dr. Cristian Andres Ortiz Gonzalez

Prof. Dr. Abdelmoubine Amar Henni

Prof. Dr. Eliezer Batista

Prof. Dr. Ivan Pontual Costa e Silva

Este trabalho é dedicado à Jenifer Grieger, à
minha querida família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família e companheira Jenifer por todo apoio, paciência e tempo que me dedicaram ao longo deste projeto.

Ao Professor Martin Weilandt por ter me aceitado como seu primeiro orientando e aos membros da banca por aceitarem o convite e suas sugestões, assim como correções.

Aos professores do departamento pelas disciplinas, conversas de corredor e pós colóquio (comendo um pedaço de bolo ou vários). Obrigado por tornarem minha passagem pela UFSC mais significativa e edificante.

Aos meus amigos, muito obrigado pelas conversas, risadas, conselhos e apoio. Vocês são parte fundamental deste trabalho.

Por fim gostaria de agradecer à UFSC que me acolheu e me instruiu durante estes anos e à CAPES por me agraciar com uma bolsa de estudos e permitir sustento através de meus estudos.

The mind is the limit. As long as the mind can envision the fact that you can do something, you can do it, as long as you really believe 100 percent.

(Arnold Schwarzenegger)

RESUMO

Orbifolds podem ser vistos como generalizações de variedades. Podemos defini-los por cartas e atlas, quocientes de variedades por ações de grupos ou grupoides de Lie. Nosso objetivo neste trabalho é caracterizá-los por estas maneiras distintas e ver as relações existentes entre cada definição.

Palavras-chave: Orbifolds. Variedades. Atlas. Quocientes. Grupoides.

ABSTRACT

Orbifolds can be seen as generalizations of manifolds. We can define them through charts and atlases, quotients of manifolds by group actions or Lie groupoids. Our goal in this work is to study these different approaches characterize them accordingly and see the relationships between these settings.

Keywords: Orbifolds. Manifolds. Atlases. Quotients. Groupoids.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	19
1 ORBIFOLDS VIA CARTAS	21
1.1 AÇÕES DE GRUPOS	21
1.2 CARTAS E ATLAS DE ORBIFOLDS	23
1.3 GRUPO LOCAL, ATLAS ORTOGONAL E PROPRIEDADES DAS INJEÇÕES	28
2 ORBIFOLDS VIA QUOCIENTES	35
2.1 QUOCIENTE E AÇÕES DE GRUPO	35
2.2 AÇÕES PRÓPRIAS E PROPRIAMENTE DESCONTÍNUAS .	36
2.3 TEOREMA DO SLICE	41
2.4 ORIBFOLDS EFETIVOS VIA QUOCIENTES.....	43
2.4.1 Ações propriamente descontínuas	43
2.4.2 Ações próprias	45
3 ORBIFOLDS VIA GRUPOIDES	55
3.1 GRUPOIDES DE LIE	55
3.2 GRUPOIDES ORBIFOLD	63
3.3 MORFISMOS E EQUIVALÊNCIA DE MORITA	65
3.4 BIJEÇÃO ENTRE GRUPOIDES ORBIFOLDS EFETIVOS E GRUPOIDES DE ATLAS DE ORBIFOLDS	67
CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
REFERÊNCIAS	73

INTRODUÇÃO

Orbifolds, originalmente chamados *V-manifolds*, foram introduzidos em topologia e geometria diferencial na década de 1950 por Ichirô Satake nos artigos '*On a generalization of the notion of manifold*' (SATAKE, 1956) e '*The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds*' (SATAKE, 1957), como uma generalização de variedades diferenciáveis. Nestes artigos Satake provou para esta nova estrutura teoremas clássicos de geometria diferencial, como por exemplo, o Teorema de de Rham e o Teorema de Gauss-Bonnet. Podemos pensar em um orbifold como um par formado por um espaço topológico, e uma estrutura de cartas semelhantes às das variedades, formando um atlas. Esta foi a abordagem usada por Satake em seus artigos.

Na década de 1970, William Thurston, de maneira independente, definiu orbifolds e fez uso desta nova estrutura para seu programa de estudo sobre geometria de 3-variedades. Orbifolds aparecem no décimo terceiro capítulo das notas de aula: '*The geometry and topology of three-manifolds*' (THURSTON, 2002). Em particular ele cunhou o nome *orbifold* e descobriu características desta nova estrutura.

Mais recentemente orbifolds vêm sendo representados por *grupoides*. Dentre os que desenvolveram esta abordagem, se destacam Ieke Moerdijk e Dorotea Pronk em '*Orbifolds, sheaves and groupoids*' (MOERDIJK; PRONK, 1997).

Gostaríamos de ressaltar que a visão histórica aqui exposta diz respeito somente ao trabalho iniciado por Satake, isto é, pelo viés da geometria diferencial. Entretanto orbifolds aparecem em diversas áreas da matemática, incluindo geometria algébrica, topologia, álgebra e a teoria física de cordas. Caso o leitor deseje saber mais sobre a história dos orbifolds e seus desdobramentos por diversas áreas e abordagens, indicamos a introdução do livro '*Orbifolds and stringy topology*', (ADEM; J.; RUAN, 2007), na qual seus autores discorrem sobre vários aspectos de suas origens.

Nosso trabalho é composto de três capítulos, cada um dedicado a uma forma de se caracterizar orbifolds. No Capítulo 1 os definiremos via cartas e atlas, analogamente ao feito quando se estuda variedades, por exemplo como em (LEE, 2013). Na sequência demonstraremos que orbifolds podem ser obtidos como quocientes de variedades por grupos de Lie. O Capítulo 3, e último, se preocupa em estudarmos grupoides, e como a partir destes uma estrutura de orbifolds surge de forma intuitiva e se relaciona com a primeira abordagem.

1 ORBIFOLDS VIA CARTAS

Neste capítulo, estudaremos orbifolds como espaços localmente vistos como conjuntos abertos de espaços euclidianos quocientados por grupos finitos.

Nossa intenção neste capítulo é definir cartas e atlas de orbifolds dentre outros conceitos. Desta forma, gostaríamos de introduzir este novo objeto de estudo de forma análoga à utilizada em variedades.

Todas as variedades neste trabalho são Hausdorff, segundo contáveis e diferenciáveis (C^∞). Para resultados básicos de variedades, usaremos como referência (LEE, 2013).

1.1 AÇÕES DE GRUPOS

Definição 1.1.1 (*Ações de grupos*): Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Uma *ação suave* (ou *diferenciável*) de G em M é uma função diferenciável $\theta: G \times M \rightarrow M$ tal que:

- (i) $\theta(e, p) = p$ para todo $p \in M$;
- (ii) $\theta(g \cdot h, p) = \theta(g, \theta(h, p))$ para todo $g, h \in G$ e $p \in M$.

O elemento e representa a unidade do grupo G . Como usual, denotaremos $\theta(g, p)$ por $g \cdot p$.

Nossas ações neste trabalho sempre serão suaves, e desta forma sempre diremos apenas *ação de grupo* e queremos dizer ação de grupo suave.

Observação 1.1.2 Dada uma ação de grupo como acima e fixado um elemento do grupo, isto é, $\theta: G \times M \rightarrow M$ e $g_0 \in G$ fixado, podemos definir a função $\theta_{g_0}: M \rightarrow M$ por $\theta_{g_0}(p) = \theta(g_0, p) = g_0 \cdot p$.

Agora se fixarmos um ponto $p_0 \in M$ e permitirmos que $g \in G$ varie, podemos definir a função: $\theta^{p_0}: G \rightarrow M$, por $\theta^{p_0}(g) = (g, p_0) = g \cdot p_0$.

Pode-se mostrar que se $\theta: G \times M \rightarrow M$ é ação, então para todo $(g, p) \in G \times M$ e $(X, Y) \in T_{(g,p)}(G \times M) \cong T_g G \oplus T_p M$:

$$d\theta_{(g,p)}(X, Y) = d\theta^p|_g(X) + d\theta_{g|_p}(Y).$$

Uma ideia para demonstrar este fato é utilizar a caracterização de vetores nos planos tangente $T_g G$ e $T_p M$ por curvas. Desta forma, verifica-se que $d\theta_{(g,p)}(X, 0) = d\theta^p|_g(X)$ e analogamente que $d\theta_{(g,p)}(0, Y) = d\theta_{g|_p}(Y)$.

Para o que faremos nestes primeiros parágrafos, dois tipos de ações nos serão muito importantes. São elas as ações efetivas e ações livres.

Definição 1.1.3 (*Ação efetiva, livre*): Uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M é chamada *efetiva* se o único elemento em G que fixa todos os $p \in M$ é o elemento unidade e . Dizemos que a ação é *livre* se nenhum $p \in M$ é fixado por algum $g \in G \setminus \{e\}$.

Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade M . Como vimos, denotamos a ação por $\theta: G \times M \rightarrow M$ e escrevemos $g \cdot p = \theta(g, p)$. A *órbita* de um ponto $p \in M$ consiste do conjunto de imagens de p pelos elementos do grupo e é denotada por $G \cdot p := \{g \cdot p; g \in G\}$. Denotamos o grupo de isotropia de $p \in M$ por $\{g \in G; gp = p\} =: G_p$.

Nos próximos capítulos, o seguinte tipo de ação será necessária.

Definição 1.1.4 (*Ação quase livre*): Uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M é *quase-livre* quando cada grupo de isotropia é finito.

Definimos uma relação de equivalência em M , cujas classes de equivalência serão exatamente as órbitas da ação do grupo que age neste espaço, da seguinte forma. Sejam $p, q \in M$, $p \sim_{orb} q$ se existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$.

Note que a classe de um ponto de $p \in M$ é dada por $[p] = \{q \in M; \exists g \in G : q = g \cdot p\} = \{g \cdot p; g \in G\}$. Mas este conjunto é a órbita de p , isto é, $[p] = G \cdot p$. Então as classes de equivalência de \sim_{orb} são as órbitas de cada ponto pela ação do grupo G . O conjunto das órbitas $M/G := M/\sim_{orb}$ munido da topologia quociente é chamado de *espaço orbital*.

1.2 CARTAS E ATLAS DE ORBIFOLDS

Feitas estas definições preliminares, vamos definir *cartas de orbifold*.

Definição 1.2.1 (*Carta de orbifold*): Seja X um espaço topológico e $n \in \mathbb{N}$. Uma *carta de orbifold n -dimensional* em X é uma tripla (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) onde:

- (i) $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e conexo;
- (ii) G_U é um grupo finito que age em \tilde{U} efetivamente;
- (iii) $\phi_U: \tilde{U} \rightarrow X$ é uma função contínua e G_U -invariante tal que $U := \phi_U(\tilde{U}) \subset X$ é aberto e a aplicação induzida $\bar{\phi}_U: \tilde{U}/G_U \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Por G_U -invariante, queremos dizer que $\phi_U \circ \theta_g = \phi_U$ para todo $g \in G_U$. Vamos nos referir às cartas de orbifolds apenas por *cartas*.

Exemplo 1.2.2 (*Carta de orbifold*): Adaptado de (AMENTA, 2013, Exemplo 1.1.3). Sejam $B := B_0(1)$ a bola aberta unitária em \mathbb{R}^2 e \mathbb{Z}_n o grupo cíclico. Vamos identificar \mathbb{R}^2 com o conjunto dos números complexos \mathbb{C} e \mathbb{Z}_n com o grupo das n -ésimas raízes da unidade, isto é, $\mathbb{Z}_n = \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle$. Tal grupo age em $B \subset \mathbb{C}$ via multiplicação e esta ação é suave. Sejam $X = B/\mathbb{Z}_n$ e $\phi: B \rightarrow X$ a projeção canônica de X . Como ϕ induz um homeomorfismo de B/\mathbb{Z}_n em X , temos que (B, \mathbb{Z}_n, ϕ) é uma carta 2-dimensional de X .

A imagem seguinte ilustra o caso $n = 3$. □

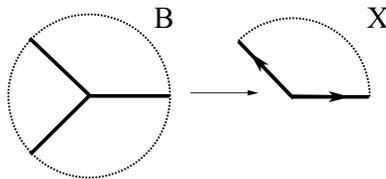


Figura 1 – Carta para o Exemplo 1.2.2 no caso $n=3$.

Assim como na teoria de variedades, para definir orbifolds temos de introduzir condições sobre os pontos que 'vivem' na interseção de duas (ou mais) cartas. Para variedades exigimos que as funções de transição entre cartas sejam C^∞ . Como cartas de orbifolds não necessariamente são homeomorfismos, precisamos duma outra abordagem.

Lembremos que se $f: M \rightarrow N$ uma função diferenciável e injetora entre duas variedades diferenciáveis, se para todo ponto de M sua derivada é injetora e $f: M \rightarrow f(M)$ é um homeomorfismo, dizemos que f é um *mergulho*.

Definição 1.2.3 (*Injeções*): Seja X espaço topológico. Seja (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) e (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) cartas em X , da mesma dimensão. Uma *injeção* $\lambda: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$ é um mergulho $\lambda: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\phi_V \circ \lambda = \phi_U$.

Observe que injeções podem ser compostas, isto é, se temos duas injeções dadas por $\lambda: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$ e $\mu: (\tilde{V}, G_V, \phi_V) \rightarrow (\tilde{W}, G_W, \phi_W)$, então a composição $\mu \circ \lambda: \tilde{U} \rightarrow \tilde{W}$ é uma injeção $(\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{W}, G_W, \phi_W)$. Também note que se (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) é uma carta, então cada $g \in G_U$ é uma injeção $(\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$.

Definição 1.2.4 (*Compatibilidade e Atlas de orbifold*): Seja X um espaço topológico.

(A) Seja $x \in X$. Sejam $(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$ e $(\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$ cartas de X da mesma dimensão n , tais que $x \in U_i \cap U_j$. Se existem carta n -dimensional (\tilde{W}, G_W, ϕ_W) de X com $x \in W$ e injeções $\lambda_{U_i}: (\tilde{W}, G_W, \phi_W) \rightarrow (\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$ e $\lambda_{U_j}: (\tilde{W}, G_W, \phi_W) \rightarrow (\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$, dizemos que as cartas $(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$ e $(\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$ são *compatíveis* em x .

(B) Um *atlas de orbifold n -dimensional* é uma coleção de cartas n -dimensionais $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$, tais que: $\cup_{i \in I} U_i = X$ e as cartas de \mathcal{A} são compatíveis, isto é, para todo $i, j \in I$ as cartas $(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$ e $(\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$ são compatíveis em cada $x \in U_i \cap U_j$.

No que segue, quando dissermos *atlas n -dimensional* estaremos nos referindo a um atlas de orbifold.

Observação 1.2.5 : Note que para todo espaço topológico, a noção de compatibilidade entre cartas em um ponto fixo de X define uma relação de equivalência. Este fato pode ser conferido em (WEILANDT, 2007, Proposição 2.9).

Exemplo 1.2.6 (*Atlas de orbifold*): Vimos no Exemplo 1.2.2 uma carta (B, \mathbb{Z}_n, ϕ) em um espaço $X \cong B/\mathbb{Z}_n$. Através desta carta podemos definir um atlas, muito simples, que será formado apenas por esta carta, isto é, $\mathcal{A} := \{(B, \mathbb{Z}_n, \phi)\}$.
□

Assim como no estudo das variedades diferenciáveis, temos o seguinte resultado para orbifolds.

Lema 1.2.7 (*Atlas maximal*): Seja X um espaço topológico e \mathcal{A} um atlas n -dimensional para X . Então existe um único atlas maximal \mathcal{B} contendo \mathcal{A} para X .

A demonstração para este fato pode ser encontrada em (WEILANDT, 2007, Lema 2.11). A ideia é mostrar que a coleção de todas as cartas n -dimensionais em X compatíveis com as cartas de \mathcal{A} formará o candidato a atlas \mathcal{B} . A compatibilidade das cartas que formam \mathcal{B} decorre da Observação 1.2.5.

Até o momento sabemos os conceitos de carta e atlas de orbifolds. O próximo passo é definir uma estrutura de orbifold. Ela será definida em analogia a uma estrutura em uma variedade. Uma forma de fazer isto é através de uma classe de equivalência de atlas. Antes disso, precisamos saber quando um atlas refina outro e quando dois atlas são compatíveis.

Definição 1.2.8 (*Refinamento*): Sejam X um espaço topológico e \mathcal{A} e \mathcal{B} dois atlas em X . Um *refinamento* \mathcal{A} de \mathcal{B} é uma função $r: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, tal que para cada carta (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) de \mathcal{A} existe uma injeção $\lambda_U: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow r(\tilde{U}, G_U, \phi_U)$.

Definição 1.2.9 (*Equivalência*): Dados um espaço topológico X , conjuntos de índices I e J e dois atlas n -dimensionais $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ e $\mathcal{B} = \{(\tilde{V}_j, H_{V_j}, \psi_{V_j})\}_{j \in J}$ em X , dizemos que estes atlas são *equivalentes em $x \in X$* se dadas (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) carta em \mathcal{A} e (\tilde{V}, H_V, ψ_V) em \mathcal{B} tais que $x \in U \cap V$ existe uma carta $(\tilde{W}, J_W, \gamma_W)$, não necessariamente em \mathcal{A} ou \mathcal{B} , ao redor de x e injeções $\lambda_U: (\tilde{W}, J_W, \gamma_W) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$ e $\lambda_V: (\tilde{W}, J_W, \gamma_W) \rightarrow (\tilde{V}, H_V, \psi_V)$.

Dois atlas em X são *equivalentes* se eles são equivalentes em todos os seus pontos.

Pode-se mostrar que a definição anterior nos fornece uma relação de equivalência, ver (TOMMASINI, 2012, Lema 1.34).

Observação 1.2.10 (*Equivalência entre atlas de espaços diferentes*): Baseada na definição (TOMMASINI, 2012, Definição 1.41). Suponha que temos um atlas $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ de X , um espaço topológico. Seja X' um espaço topológico, diferente de X e $f: X \rightarrow X'$ um homeomorfismo. Então a coleção $f_*(\mathcal{A}) := \{(\tilde{U}_i, G_{U_i}, f \circ \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ é um atlas para X' . Temos então a seguinte definição de equivalência entre atlas \mathcal{A} e \mathcal{B} de espaços topológicos X e X' (resp.) distintos.

Definição 1.2.11 : Seja \mathcal{A} é um atlas de X e \mathcal{B} um atlas para X' . Dizemos que \mathcal{A} e \mathcal{B} são *equivalentes* caso sejam satisfeitas as seguintes condições:

- (i) existe um homeomorfismo $f: X \rightarrow X'$ e
- (ii) os atlas $f_*(\mathcal{A})$ e \mathcal{B} são equivalentes, no sentido da Definição 1.2.9.

Definição 1.2.12 (*Estrutura*): Uma *estrutura de orbifold* em um espaço topológico X é uma classe de equivalência $[\mathcal{A}]$ de atlas em X .

Diremos apenas *estrutura* para nos referirmos a uma estrutura de orbifolds.

Agora já estamos com todas as 'ferramentas em mãos' e podemos definir um orbifold efetivo.

Definição 1.2.13 (*Orbifold efetivo*): Seja X um espaço topológico Hausdorff e segundo contável com estrutura $[\mathcal{A}]$. Um *orbifold efetivo* é um par $(X, [\mathcal{A}]) =: \mathcal{O}$. Chamamos X o *espaço suporte* de \mathcal{O} e o denotamos por $|\mathcal{O}|$.

Nossos orbifolds serão sempre efetivos, por este motivo diremos apenas *orbifolds*.

Exemplo 1.2.14 (*Variedade como um orbifold*): Já afirmamos que um orbifold é uma generalização de uma variedade. Vamos verificar este fato.

Seja M uma variedade n -dimensional com atlas $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$, lembre-se que por definição M é Hausdorff e segundo contável. Cada $U_\alpha \subset M$ é um conjunto aberto e cada $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha$ é um homeomorfismo que tem como contradomínio um conjunto aberto $\tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Desta forma, temos que para todo α o grupo $G = \{e\}$ age em \tilde{U}_α . Assim podemos definir um atlas de orbifold para M pela família de triplas $\{(\tilde{U}_\alpha, \{e\}, (\phi_\alpha)^{-1})\}$. Tal família é de fato um atlas de orbifold. Para verificarmos isto precisamos analisar dois itens: para o primeiro, relativo à cobertura de M , basta notar que M já é coberta pelas cartas da variedade e nosso candidato a atlas de orbifold é formado a partir destas. A compatibilidade das cartas decorre das mudanças de coordenadas entre as cartas da variedade, isto é, as injeções serão dadas pelas funções $\lambda := \phi_{\alpha'} \circ (\phi_\alpha)^{-1}: \phi_\alpha(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_{\alpha'}) \rightarrow \phi_{\alpha'}(\tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_{\alpha'})$, em que (U_α, ϕ_α) e $(U_{\alpha'}, \phi_{\alpha'})$ são cartas em \mathcal{A} . Portanto toda variedade n -dimensional pode ser vista como um orbifold que sofre ações do grupo trivial. \square

Exemplo 1.2.15 (*Orbifold*): No Exemplo 1.2.2, construímos uma carta chamada (B, \mathbb{Z}_n, ϕ) para o espaço topológico $X \cong B/\mathbb{Z}_n$; no Exemplo 1.2.6 vimos que $\{(B, \mathbb{Z}_n, \phi)\}$ é um atlas para este espaço. Como X é Hausdorff, um espaço segundo contável e \mathbb{Z}_n age efetivamente em X , temos que $\mathcal{O} = (X, [\mathcal{A}])$ é um orbifold. \square

Finalizando esta seção, vamos definir aplicações diferenciáveis entre orbifolds, a fim de generalizarmos o conceito de variedades para orbifolds.

Definição 1.2.16 (*Aplicações entre orbifolds*): Sejam \mathcal{O} e \mathcal{O}' dois orbifolds que possuem espaços suporte, respectivamente, X e Y . Uma aplicação contínua $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ é dita *diferenciável* se para todo $x \in \mathcal{O}$ existem cartas (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) ao redor de x e (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) ao redor de $f(x)$ tal que $f(U) \subset V$ e existe uma aplicação diferenciável $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ com $\phi_V \circ \tilde{f} = f \circ \phi_U$.

Pode-se demonstrar que a composição de aplicações diferenciáveis entre orbifolds é diferenciável.

Definição 1.2.17 (*Difeomorfismo entre orbifolds*): Dois orbifolds $\mathcal{O} = (X, [\mathcal{A}])$ e $\mathcal{O}' = (Y, [\mathcal{B}])$ são ditos *difeomorfos* se existem aplicações diferenciáveis entre orbifolds $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ tais que $f \circ g = \text{id}_Y$ e $g \circ f = \text{id}_X$. Nesta situação f é chamado um *difeomorfismo*.

1.3 GRUPO LOCAL, ATLAS ORTOGONAL E PROPRIEDADES DAS INJEÇÕES

Nas seções seguintes faremos uso de algumas propriedades que as injeções possuem, a seguir vamos enunciar e demonstrar algumas destas propriedades. Também definiremos o grupo local de um orbifold, alguns resultados envolvendo tal conceito, e atlas ortogonais.

Os próximos resultados exibem algumas propriedades das injeções.

Lema 1.3.1 (*Homomorfismo induzido por injeção*): Sejam (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) e (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) duas cartas em um espaço topológico X . Então cada injeção $\lambda: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$ define uma única aplicação $\lambda_*: G_U \rightarrow G_V$ tal que $\lambda(gx) = \lambda_*(g)\lambda(x)$. Além disso λ_* é um monomorfismo de grupos.

Demonstração: Usaremos nesta demonstração um resultado técnico de (MOERDIJK; PRONK, 1997, Proposição A.1), este nos diz que: 'Dadas duas injeções λ e μ de (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) para (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) , existe um único $h \in G_V$ tal que $\mu = h \circ \lambda$.'

Seja $g \in G_U$. Definimos uma injeção $g: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$, via ação de G_U em U . Pelo resultado acima, para a injeção dada pela composição

$\lambda \circ g$ e a injeção λ , existe um único $h \in G_V$ tal que $\lambda \circ g = h \circ \lambda$. Agora, definimos $\lambda_*(g) := h$ e desta forma obtemos a aplicação desejada. Pelo resultado citado e pela definição de λ_* , esta aplicação é única. Vamos verificar que λ_* é um morfismo de grupos. Sejam $g_1, g_2 \in G_U$, $h_{12} := \lambda_*(g_1 g_2)$. Por outro lado, defina $h_1 := \lambda_*(g_1)$ e $h_2 := \lambda_*(g_2)$. Daí

$$h_{12} \circ \lambda = \lambda \circ g_1 \circ g_2 = h_1 \circ \lambda \circ g_2 = h_1 \circ h_2 \circ \lambda,$$

temos $h_{12} = h_1 h_2 = \lambda_*(g_1) \lambda_*(g_2)$. Por fim vamos verificar que λ_* é injetiva. Seja $g \in G_U$, suponha que $\lambda_*(g) = e$. Logo

$$\lambda = e \circ \lambda = \lambda \circ g \implies \lambda(x) = \lambda(gx) \implies x = gx$$

para todo $x \in \tilde{U}$. Como G_U age efetivamente, $g = e$. Portanto a aplicação λ_* é injetiva. Concluimos assim a demonstração da proposição. ■

O próximo resultado caracteriza a imagem do homomorfismo anterior.

Lema 1.3.2 (*Imagem do homomorfismo λ_**): Sejam $\lambda: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$ uma injeção e $h \in G_V$. Então $h \in \text{Im}(\lambda_*)$ se, e somente se, $\lambda(\tilde{U}) \cap h \circ \lambda(\tilde{U}) \neq \emptyset$.

Demonstração: Suponhamos que $h \in \text{Im}(\lambda_*)$, logo $h = \lambda_*(g)$ e

$$h \circ \lambda_*(\tilde{U}) = \lambda_*(g) \circ \lambda(\tilde{U}) = \lambda g(\tilde{U}) = \lambda_*(\tilde{U}).$$

Agora, se $u \in \tilde{U}$

$$h \circ \lambda(u) = \lambda_*(g) \lambda(u) = \lambda(g \cdot u) \in \lambda(\tilde{U}).$$

Logo temos um sentido da demonstração completo. Para o outro sentido, suponhamos que $h \notin \text{Im}(\lambda_*)$ e que $\lambda(\tilde{U}) \cap h \circ \lambda(\tilde{U})$ é não vazio. Seja $\lambda(x) \in \lambda(\tilde{U}) \cap h \circ \lambda(\tilde{U})$, um ponto que não é fixado por nenhum elemento não trivial de G_V (tal ponto existe porque \mathcal{O}^{reg} é denso, o que segue do Lema 1.3.6). Desta forma dado $x \in \tilde{U}$, $\lambda(x) \in h \circ \lambda(\tilde{U})$, assim existe $y \in \tilde{U}$ tal que $\lambda(x) =$

$h \circ \lambda(y)$. Como λ é injeção segue que

$$\phi_U(x) = \phi_V(\lambda(x)) = \phi_V(h \circ \lambda(y)) = \phi_V(\lambda(y)) = \phi_U(y).$$

Então existe $g \in G_U$ tal que $y = gx$. Desta forma

$$\lambda(x)h \circ \lambda(gx) = h\lambda_*(g)\lambda(x).$$

Uma vez que $\lambda(x)$ não é fixado por G_V , devemos ter $h\lambda_*(g) = \text{id}_{G_V}$. Logo $h = \lambda_*(g)^{-1} = \lambda_*(g^{-1}) \in \text{Im}(\lambda_*)$ o que nos gera um absurdo.

Portanto temos que $h \in \text{Im}(\lambda_*)$ se, e somente se, $\lambda(\tilde{U}) \cap h \circ \lambda(\tilde{U}) \neq \emptyset$, finalizando a demonstração do teorema. ■

Corolário 1.3.3 : Sejam (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) e (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) duas cartas no espaço topológico X , $\lambda: (\tilde{U}, G_U, \phi_U) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$ uma injeção e $x \in U$. Então para qualquer escolha de $x_U \in \tilde{U}$ e $x_V \in \tilde{V}$ tais que $\phi_U(x_U) = x = \phi_V(x_V)$, temos que os grupos de isotropia $(G_U)_{x_U}$ e $(G_V)_{x_V}$ são isomorfos.

Demonstração: Sejam $x_U \in \tilde{U}$ e $x_V \in \tilde{V}$ como no enunciado. Dado $g \in (G_V)_{\lambda(x_U)}$ temos que $g\lambda(x_U) = \lambda(x_U)$. Logo, lema anterior, o conjunto $(G_V)_{\lambda(x_U)}$ é contido na imagem de λ_* . Isto significa que λ_* mapeia isomorficamente $(G_U)_{x_U}$ em $(G_V)_{\lambda(x_U)}$. Como $\phi_V(\lambda(x_U)) = \phi_U(x_U) = \phi_V(x_V)$, existe $h \in G_V$ tal que $\lambda(x_U) = hx_V$. Portanto $(G_V)_{\lambda(x_U)} = h(G_V)_{x_V}h^{-1}$. Em particular os grupos $(G_V)_{x_V}$ e $(G_V)_{\lambda(x_U)}$ são isomorfos. Por fim, como λ_* mapeia isomorficamente $(G_U)_{x_U}$ em $(G_V)_{\lambda(x_U)}$, temos que $(G_U)_{x_U}$ e $(G_V)_{x_V}$ são grupos isomorfos. ■

Observe que se \mathcal{O} é um orbifold e (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) , (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) são cartas ao redor de um ponto x , então $(G_U)_{x_U} \cong (G_V)_{x_V}$ em que $x_U \in \phi_U^{-1}(x)$ e $x_V \in \phi_V^{-1}(x)$. Pois as cartas são compatíveis, logo podemos usar o resultado anterior.

Vamos definir o grupo local de um orbifold.

Definição 1.3.4 (*Grupo local*): Sejam $\mathcal{O} = (X, [\mathcal{A}])$ um orbifold e $x \in X$. Dada uma carta (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) em \mathcal{A} com $x \in \phi_U(\tilde{U}) = U$, escolha $x_U \in \tilde{U}$

tal que $\phi_U(x_U) = x$. Definimos o *grupo local (isotropia)* de x , denotado por $\text{Iso}(x)$, como a classe de isomorfismos do grupo $(G_U)_{x_U}$.

Definição 1.3.5 (*Conjuntos singular e regular*): Seja $\mathcal{O} = (X, [\mathcal{A}])$ um orbifold. Um ponto $x \in X$ é *singular* se $\text{Iso}(x) \neq \{e\}$ e $\Sigma(\mathcal{O}) := \{x \in X; \text{Iso}(x) \neq \{e\}\}$ é denominado *conjunto singular* de x . Se $\text{Iso}(x)$ é trivial, x é chamado *regular* e o conjunto dos pontos regulares é denotado por \mathcal{O}^{reg} .

Na sequência, vamos demonstrar um resultado sobre atlas de orbifolds. Mostraremos a existência de atlas ortogonais.

Antes precisamos introduzir o seguinte conceito: uma ação de grupo G numa vizinhança aberta U de \mathcal{O} em \mathbb{R}^n é dita *ortogonal* quando o grupo G é um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$ e age pela ação canônica, isto é, multiplicação por matrizes.

Primeiro faremos um lema para existência de cartas ortogonais.

Lema 1.3.6 Se (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) é uma carta num espaço topológico X , $W \subset U$ é aberto e $x \in W$, então existem uma carta (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) tal que $x \in V \subset W$, $G_V \cong \text{Iso}(x)$ age ortogonalmente e uma injeção $\lambda: (\tilde{V}, G_V, \phi_V) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$.

Demonstração: Esta demonstração é adaptada de (CARTAN, 1953-54, Lema 1) e (BORZELLINO; BRUNSDEN, 2008, Proposição 8).

Seja $\tilde{x} \in \phi_U^{-1}(x)$. Substituindo \tilde{U} pela componente conexa de \tilde{x} em $\bigcap_{g \in (G_U)_{\tilde{x}}} g\phi_U^{-1}(W)$ e G_U por $(G_U)_{\tilde{x}}$, e usando que a composição de injeções é uma injeção, podemos assumir que $G_U \cong \text{Iso}(x)$. Note que esta ação é efetiva, pois se N denota seu núcleo, então o Corolário 1.3.3 implica

$$(G_U)_{\tilde{x}}/N = ((G_U)_{\tilde{x}}/N)_{\tilde{x}} \cong (G_U)_{\tilde{x}},$$

e portanto N é trivial.

Por meio de uma traslação podemos fazer com que $\tilde{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Definamos $F: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow T_0\tilde{U} \cong \mathbb{R}^n$ por

$$F(y) = \frac{1}{|G_U|} \sum_{g \in G_U} d\theta_{g|_0}(g^{-1}y),$$

em que $T_0\tilde{U}$ representa o espaço tangente no ponto 0; $|G_U|$ representa a ordem do grupo (finito) G_U e θ_g é a função que associa a cada $y \in \tilde{U}$ o elemento $\theta_g(y) = g \cdot y$, como na Observação 1.1.2. Então para todo $x \in T_0\tilde{U}$ temos

$$F(x) = \frac{1}{|G_U|} \sum_{g \in G_U} d\theta_{g|_0} \circ \theta_{g^{-1}}(x).$$

Segue pela regra da cadeia e pela linearidade de $d\theta_{g|_0}$ que $dF_0(x) = x$.

Pelo Teorema da aplicação inversa, existe uma vizinhança $\tilde{W} \subset \tilde{U}$ do ponto 0 em \mathbb{R}^n tal que $\bar{F} := F|_{\tilde{W}}: \tilde{W} \rightarrow F(\tilde{W})$ é um difeomorfismo. Substituindo \tilde{W} pela componente conexa de 0 em $\bigcap_{g \in G_U} g\tilde{W}$, podemos assumir que \tilde{W} é G_U -invariante.

Temos, por uma verificação direta, que

$$\begin{aligned} \bar{F}(g \cdot y) &= F|_{\tilde{W}}(g \cdot y) \\ &= \frac{1}{|G_U|} \sum_{h \in G_U} d\theta_{h|_0}(h^{-1}(g \cdot y)) \\ &= \frac{1}{|G_U|} \sum_{h \in G_U} d\theta_{h|_0}((g^{-1}h)^{-1} \cdot y) \\ &= \frac{1}{|G_U|} \sum_{h \in G_U} d\theta_{gk|_0}(k^{-1} \cdot y) \quad k := g^{-1}h \\ &= \frac{1}{|G_U|} \sum_{h \in G_U} d\theta_{g|_0}(d\theta_{k|_0}(k^{-1} \cdot y)) \\ &= d\theta_{g|_0} \left(\frac{1}{|G_U|} \sum_{h \in G_U} d\theta_{k|_0}(k^{-1} \cdot y) \right) \\ &= d\theta_{g|_0}(F|_{\tilde{W}}(g \cdot y)) = d\theta_{g|_0}(\bar{F}(g \cdot y)) \end{aligned}$$

para todo $g \in G_U$ e todo $y \in \tilde{W}$. Podemos usar $\tilde{V}_1 = F(\tilde{W})$, $\phi_{V_1} = \phi_U \circ \bar{F}^{-1}$ e $G_{V_1} = \{d\theta_{g|_0}; g \in G_U\}$ para obtermos carta $(\tilde{V}_1, G_{V_1}, \phi_{V_1})$, em que G_{V_1} age linearmente. Como a ação é efetiva, assumimos que $G_{V_1} \subset GL(n, \mathbb{R})$. Observe que $\lambda := i \circ \bar{F}^{-1}: \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{U}$, define uma injeção $(\tilde{V}_1, G_{V_1}, \phi_{V_1}) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$.

Considere a extensão linear única da ação de G_{V_1} para \mathbb{R}^n e, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, defina

$$B(x, y) = \frac{1}{|G_{V_1}|} \sum_{g \in G_{V_1}} \langle gx, gy \rangle,$$

em que \langle , \rangle denota o produto interno usual. Como B é um produto interno $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $B(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle$.

Definamos $\tilde{V}_2 := A\tilde{V}_1$ e para $g \in G_{V_1}$, $\tilde{g} := AgA^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$. Como B é G_{V_1} -invariante, temos

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}x, \tilde{g}y \rangle &= \langle AgA^{-1}x, AgA^{-1}y \rangle \\ &= B(gA^{-1}x, gA^{-1}y) \\ &= B(A^{-1}x, A^{-1}y) \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Logo $\tilde{g} \in O(n)$.

Assim, com $\tilde{V}_2 := A\tilde{V}_1$, $\phi_{V_2}: \tilde{V}_2 \rightarrow X$ com $\phi_{V_2} = \phi_{V_1} \circ A^{-1}$ e $G_{V_2} = AG_{V_1}A^{-1}$ obtemos a carta $(\tilde{V}_2, G_{V_2}, \phi_{V_2})$ do espaço topológico X com uma ação ortogonal. ■

Proposição 1.3.7 (*Atlas ortogonal*): Dado um atlas $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})\}_{i \in I}$ num espaço topológico X , existe um atlas equivalente $\mathcal{B} = \{(\tilde{V}_j, G_{V_j}, \phi_{V_j})\}_{j \in J}$ tal que cada G_V age ortogonalmente.

Demonstração: Seja $x \in X$. Então existe uma carta $(\tilde{U}, G_U, \phi_U) \in \mathcal{A}$ ao redor de x . Pelo Lema 1.3.6, acima, existe carta $(\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x})$ tal que G_{V_x} age ortogonalmente em \tilde{V}_x e $\lambda: (\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x}) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$ é uma injeção.

Definamos $\mathcal{B} := \{(\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x})\}_{x \in X}$, coleção de cartas ortogonais. Vamos mostrar que \mathcal{B} é o atlas procurado, mas para isso temos que verificar que é de fato um atlas e que é equivalente ao atlas \mathcal{A} .

Primeiramente, temos que \mathcal{B} cobre o espaço topológico X , no sentido de estar contido na união de todas as cartas. Sejam $(\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x})$ e $(\tilde{V}_y, G_{V_y}, \phi_{V_y})$ duas cartas em \mathcal{B} tais que $z \in V_x \cap V_y$ e $(\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$, $(\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$ cartas do atlas \mathcal{A} . Existem injeções $\lambda_x: (\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x}) \rightarrow (\tilde{U}_i, G_{U_i}, \phi_{U_i})$ e $\lambda_y: (\tilde{V}_y, G_{V_y}, \phi_{V_y}) \rightarrow (\tilde{U}_j, G_{U_j}, \phi_{U_j})$. Para concluir que \mathcal{B} é atlas, precisamos construir injeções $(\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x}) \rightarrow (\tilde{V}_y, G_{V_y}, \phi_{V_y})$ e $(\tilde{V}_y, G_{V_y}, \phi_{V_y}) \rightarrow (\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x})$. Vamos construir estas injeções. Como \mathcal{A}

é atlas, existe $W \subset U_i \cap U_j$ e injeções

$$\tilde{V}_x \xrightarrow{\lambda_x} \tilde{U}_i \xleftarrow{\lambda_i} \widetilde{W} \xrightarrow{\lambda_j} \tilde{U}_j \xleftarrow{\lambda_y} \tilde{V}_y.$$

Compondo λ_i e λ_j por elementos de G_{U_i} e G_{U_j} , respectivamente e diminuindo W se necessário, podemos assumir que $\lambda_i(\widetilde{W}) \subset \lambda_x(\tilde{V}_x)$ e $\lambda_j(\widetilde{W}) \subset \lambda_y(\tilde{V}_y)$. Desta forma, $(\lambda_x)^{-1} \circ \lambda_i$ e $(\lambda_y)^{-1} \circ \lambda_j$ são as injeções que desejamos.

Agora vejamos a equivalência dos atlas. Seja $(\tilde{U}, G_U, \phi_U) \in \mathcal{A}$ e $(\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x}) \in \mathcal{B}$ tais que $U \cap V_x \neq \emptyset$ e seja $z \in U \cap V_x$. Para mostrar a equivalências entre os atlas, precisamos exibir uma carta (\widetilde{W}, G, ϕ) ao redor de z e injeções $(\widetilde{W}, G, \phi) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$ e $(\widetilde{W}, G, \phi) \rightarrow (\tilde{V}_x, G_{V_x}, \phi_{V_x})$. Seja W vizinhança aberta em torno de z suficientemente pequena. Pelo Lema 1.3.6 e um raciocínio análogo ao do parágrafo anterior, podemos definir as injeções desejadas. Portanto \mathcal{A} é equivalente a \mathcal{B} . ■

Observação 1.3.8 As cartas construídas no Lema 1.3.6 são chamadas de *cartas ortogonais* e o atlas construído a partir destas cartas é chamado de *atlas ortogonal*.

Neste capítulo definimos um orbifold via cartas e atlas, e também vimos algumas propriedades das injeções e conceitos recorrentes no estudo dos orbifolds.

2 ORBIFOLDS VIA QUOCIENTES

Nosso próximo objetivo será nos preparar para uma outra forma de caracterizar um orbifold. Para isso precisaremos estudar ações de grupos chamadas próprias e as propriamente descontínuas e também será necessário o Teorema do Slice. Com estes resultados em mãos, mostraremos que orbifolds podem ser obtidos através de variedades quocientadas por grupos de Lie, com certas exigências sobre a ação deste grupo.

Até o momento vimos alguns exemplos de orbifolds pela definição. Nas próximas seções veremos como obter orbifolds via quocientes de variedades por ações de grupos, desta forma poderemos produzir uma vasta gama de exemplos.

2.1 QUOCIENTE E AÇÕES DE GRUPO

Vamos nos desviar por alguns momentos das cartas e dos atlas. Nesta seção discutiremos um tópico importante no estudo de orbifolds, *ações de grupos de Lie em variedades diferenciáveis*. Alguns resultados sobre esta teoria nos auxiliarão, pois veremos que sob certas hipóteses o quociente duma tal ação nos fornece um orbifold.

Lema 2.1.1 (*Projeção canônica é aberta*): Para qualquer ação contínua de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M , a projeção canônica $\pi: M \rightarrow M/G$ é aberta.

Demonstração: Seja $U \subset M$ um conjunto aberto e consideremos $\pi(U)$. Este conjunto será aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto. Note que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{gx; g \in G, x \in U\} \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U.\end{aligned}$$

Como U é aberto $g \cdot U$ é aberto para todo $g \in U$, logo $\pi^{-1}(\pi(U))$ é união de abertos e portanto aberto. Desta forma $\pi(U)$ é aberto. Portanto a projeção canônica é aberta. ■

Estudaremos a seguir as *ações próprias* e as *ações propriamente descontínuas*.

2.2 AÇÕES PRÓPRIAS E PROPRIAMENTE DESCONTÍNUAS

Esta seção tem como alvo definirmos dois tipos de ações de grupo. Feito isto, estabeleceremos algumas propriedades que nos serão muito úteis na caracterização de orbifolds via quocientes.

Vamos iniciar pela ação chamada própria. Antes de defini-la precisamos do conceito de funções próprias.

Definição 2.2.1 (*Função própria*): Dados X e Y dois espaços topológicos e uma função contínua $f: X \rightarrow Y$, dizemos que f é *própria* se para cada $K \subset Y$ conjunto compacto, temos que $f^{-1}(K) \subset X$ é um conjunto compacto.

Observação 2.2.2 (*Fato técnico*): Pode-se mostrar, (LEE, 2013, Teorema A.57), que se X é um espaço topológico e Y é um espaço localmente compacto e Hausdorff, então toda função própria $f: X \rightarrow Y$ é fechada.

Definição 2.2.3 (*Ação própria*): Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade M por meio da ação $\theta: G \times M \rightarrow M$, em que $(g, p) \mapsto g \cdot p$. Dizemos que θ é uma *ação própria* se a função $\Theta: G \times M \rightarrow M \times M$ dada por $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$ é própria.

Como dissemos na motivação, queremos saber quando um espaço orbital tem estrutura de variedade diferenciável. Se a ação for própria temos alguns resultados auxiliares que nos facilitarão esta tarefa.

Um primeiro resultado com esta hipótese adicional sobre o grupo nos garante que o espaço orbital é Hausdorff ao espaço orbital. Lembramos que todas as nossas ações de grupos de Lie são suaves.

Lema 2.2.4 : Se um grupo de Lie age propriamente em uma variedade, então o espaço orbital é Hausdorff.

Demonstração: Sejam G grupo de Lie agindo propriamente em uma variedade M e $\pi: M \rightarrow M/G$ a projeção canônica. Pela definição de ação própria, temos que $\Theta: G \times M \rightarrow M \times M$ com $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$ é própria.

Definamos agora, o conjunto

$$O := \Theta(G \times M) = \{(g \cdot p, p) \in M \times M; p \in M, g \in G\} \subset M \times M.$$

Note que, se $(p, q) \in O$ então existe $(g, m) \in G \times M$ tal que $\Theta(g, m) = (p, q)$. Logo $g \cdot m = p$ e $m = q$. Desta forma, $g \cdot q = p$. A recíproca é direta. Dai temos que $(p, q) \in O$ se, e somente se, p e q estão na mesma órbita da ação de G .

Por hipótese Θ é própria. Como Θ é contínua, pela Observação 2.2.2 acima, Θ é uma função fechada. Como $G \times M$ é um conjunto fechado, temos que $O = \Theta(G \times M)$ é um conjunto fechado em $M \times M$.

Agora, dados pontos p e q em M , se supusermos que $\pi(p) \neq \pi(q)$ em M/G , então p e q estão em orbitas distintas. Desta forma $(p, q) \notin O$. Como O é fechado, seu complementar é aberto. Logo existe uma vizinhança aberta $U \times V$ para $(p, q) \in (M \times M) \setminus O$. Então $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$. Como π é uma função aberta, $\pi(U)$ e $\pi(V)$ são vizinhanças abertas e disjuntas de $\pi(p)$ e $\pi(q)$ em M/G . Portanto M/G é Hausdorff. ■

Observação 2.2.5 (*Caraterizações de ações próprias*): Às vezes pode ser um pouco complicado de verificar se uma ação é própria apenas pela definição. Mas pode-se mostrar, (LEE, 2013, Proposição 21.5), que quando G é um grupo de Lie agindo em uma variedade M , são equivalentes:

- (1) A ação é própria;
- (2) Se (p_i) é uma sequência em M e (g_i) é uma sequência em G tais que tanto (p_i) quanto $(g_i p_i)$ convergem, então uma subsequência de (g_i) converge;

(3) Para todo subconjunto compacto $K \subset M$, o conjunto $G_K := \{g \in G; (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ é compacto.

Através destas outras duas formas de caracterização de uma ação própria, podemos demonstrar dois resultados interessantes sobre ações próprias em grupos de Lie com certa facilidade.

Proposição 2.2.6 : Toda ação de um grupo de Lie compacto em uma variedade é própria.

Demonstração: Sejam G um grupo de Lie compacto agindo em uma variedade M e (p_i) e (g_i) sequências como no item 2 da observação acima. Como o grupo é compacto então é sequencialmente compacto. Dai, a sequência (g_i) possui uma subsequência convergente. Portanto a ação é própria. ■

A outra proposição diz respeito aos grupos de isotropia de cada ponto do conjunto.

Proposição 2.2.7 : Se um grupo de Lie G age propriamente em uma variedade M , então cada grupo de isotropia é compacto.

Demonstração: Vamos usar a caracterização 3 feita na Observação 2.2.5. Seja $p \in M$. Definamos $K := \{p\}$. Note que

$$G_K = \{g \in G; \{g \cdot p\} \cap \{p\} \neq \emptyset\} = \{g \in G; g \cdot p = p\} = G_p.$$

Logo o conjunto G_K é o grupo de isotropia de p . Como a ação é própria e K é compacto temos que G_K é compacto. Portanto o grupo de isotropia de p é compacto. ■

Assim como motivado anteriormente, as ações próprias nos são de grande valia. Pois, um grupo que age desta forma livremente em uma variedade diferenciável gera um espaço orbital com uma estrutura de variedade diferenciável. O resultado seguinte nos garante isto.

Proposição 2.2.8 : Seja G um grupo de Lie agindo suave, livre e propriamente em uma variedade M . Então o espaço orbital M/G possui única estrutura diferenciável (de variedade) de $\dim(M) - \dim(G)$ tal que a projeção canônica $\pi: M \rightarrow M/G$ é uma submersão.

De forma resumida, o ponto mais importante da demonstração é definir as cartas para o espaço orbital. Esta construção é feita usando um tipo especial de cartas chamadas *cartas adaptadas*. A definição precisa destas cartas e a prova com detalhes pode ser conferida em (LEE, 2013, Teorema 21.10).

Agora, veremos uma outra ação definida a partir da ação própria que será uma ferramenta muito útil para se 'criar' orbifolds; vamos definir o conceito de ação propriamente descontínua. Um grupo discreto é um grupo de Lie 0-dimensional, isto é, um grupo finito ou enumerável com a topologia discreta.

Definição 2.2.9 (*Ação propriamente descontínua*): Uma ação própria $\theta: G \times M \rightarrow M$ de um grupo de Lie discreto G em uma variedade M é chamada de *propriamente descontínua*.

Observação 2.2.10 : Seja G um grupo discreto que age propriamente descontinuamente em uma variedade M . Pela Proposição 2.2.7, as isotropias são finitas.

A seguir, uma condição necessária e suficiente para uma ação em um espaço Hausdorff ser propriamente descontínua.

Proposição 2.2.11 : Uma ação de um grupo discreto G em um espaço Hausdorff X é propriamente descontínua se, e somente se, para todos $x, y \in X$ existem vizinhanças V_x de x e V_y de y tais que o conjunto $\{g \in G; g \cdot V_x \cap V_y \neq \emptyset\}$ é finito.

A ideia principal da demonstração deste fato é mostrar que dado G um grupo topológico agindo em X um espaço Hausdorff a ação é própria se, e somente se, para todo $x, y \in X$, existem vizinhanças abertas V_x de x e V_y de y tais que o conjunto $\{g \in G; g \cdot V_x \cap V_y \neq \emptyset\} \subset G$ é compacto. A demonstração deste fato, com todos os detalhes encontra-se em (BRAKKEE, 2013, Teorema 1.1.16).

Lema 2.2.12 : Seja M uma variedade e G um grupo de Lie discreto agindo de maneira descontínua em M . Então para cada vizinhança aberta V de $x \in M$ temos:

- (a) Existe uma vizinhança aberta e conexa $U \subset V$ de x tal que U é invariante por G_x e $U \cap g \cdot U = \emptyset$ para todo $g \notin G_x$ e
- (b) Se U é vizinhança aberta e conexa de x tal que U é invariante por G_x e $U \cap g \cdot U = \emptyset$ para todo $g \notin G_x$ então a aplicação canônica $U/G_x \rightarrow X/G$ é um mergulho topológico.

Demonstração:

- (a) Seja $x \in V$. Pela Proposição 2.2.11, existe uma vizinhança U_0 de x tal que o conjunto $H = \{g \in G; g \cdot U_0 \cap U_0 \neq \emptyset\}$ é finito. Substituindo U_0 por $U_0 \cap V$, garantimos que $U_0 \subset V$. Note que $G_x \subseteq H$. Se $H = G_x$, seja U a componente conexa de x em $\bigcap_{g \in G_x} g \cdot U_0$. Logo U é invariante por G_x e para $g \notin G_x$ por construção $U \cap g \cdot U = \emptyset$. Suponha agora que $G_x \subsetneq H$. Como H é finito, $H \setminus G_x = \{g_1, \dots, g_n\}$ é finito. Seja $y_i := g_i x$ para $i = 1, \dots, n$. Então nós temos que $y_i \neq x$ para $i = 1, \dots, n$. Como M é Hausdorff, existem vizinhanças abertas V_i de x e V'_i de y_i para cada i , tais que $V_i \cap V'_i = \emptyset$. Então $U_i := V_i \cap g_i^{-1} \cdot V'_i$ é uma vizinhança aberta de x tal que $U_i \cap g_i \cdot U_i = \emptyset$. Seja agora, $\tilde{U} := U_1 \cap \dots \cap U_n$, logo \tilde{U} é vizinhança de x com $\tilde{U} \cap g \cdot \tilde{U} = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus G_x$. Finalmente, a componente conexa U de x em $\tilde{U} \cap U_0$ tem as propriedades desejadas.

- (b) Seja U definido com em (a) e $f: U/G_x \rightarrow M/G$ definida por $f([x]) = [x]$. Pela construção do conjunto U acima teremos que f é injetiva. De fato, suponha $G \cdot p = G \cdot q$ para $p, q \in U$ e seja $r \in G$ tal que $q = rp$. Como $U \cap g \cdot U = \emptyset$ para $g \in G \setminus G_x$, temos que $r \in G_x$ logo $G_x \cdot p = G_x \cdot q$.

Note que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ U/G_x & \xrightarrow{f} & X/G, \end{array}$$

onde i é a inclusão e $U \rightarrow U/G_x$ e $M \rightarrow M/G$ são as projeções canônicas. Como estas três aplicações são contínuas e abertos, teremos que f é contínua e aberta. Desta forma, temos que f é um homeomorfismo na sua imagem. ■

2.3 TEOREMA DO SLICE

Veremos nesta seção um resultado que nos permitirá estudar uma ação de um grupo de uma forma local. Ele nos ensina como podemos interpretar a ação sofrida pelo grupo em uma vizinhança aberta da órbita de um ponto.

Começamos com a definição de um slice de (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2010, Definição 3.33).

Lembre-se que dada uma ação de grupo $\theta: G \times M \rightarrow M$ e $g_0 \in G$ fixado, podemos definir a função $\theta_{g_0}: M \rightarrow M$ por $\theta_{g_0}(p) = \theta(g_0, p) = g_0 \cdot p$. Agora se fixarmos um ponto $p_0 \in M$ e permitirmos que $g \in G$ varie, podemos definir a função: $\theta^{p_0}: G \rightarrow M$, por $\theta^{p_0}(g) = (g, p_0) = g \cdot p_0$, como na Observação 1.1.2.

Definição 2.3.1 (*Slice*): Sejam M uma variedade, G um grupo de Lie e $\theta: G \times M \rightarrow M$ uma ação. Um *slice* em $p_0 \in M$ é uma subvariedade mergulhada S_{p_0} contendo p_0 e satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $T_{p_0}M = d\theta|_e^{p_0}(T_eG) \oplus T_{p_0}S_{p_0}$ e $T_pM = d\theta|_e^p(T_eG) + T_pS_{p_0}$, para todo $p \in S_{p_0}$;
- (ii) se $p \in S_{p_0}$ e $g \in G_{p_0}$, então $g \cdot p \in S_{p_0}$;
- (iii) se $p \in S_{p_0}$ e $g \in G$ são tais que $g \cdot p \in S_{p_0}$, então $g \in G_{p_0}$.

A próxima definição será utilizada no teorema a seguir.

Definição 2.3.2 (*Produto cruzado*): Sejam G um grupo de Lie agindo em um M uma variedade e H um subgrupo mergulhado de G . Se H age em $G \times M$ por $h(g, x) = (g \cdot h^{-1}, h \cdot x)$ com $h \in H$, denotamos o espaço orbital $(G \times M)/H := G \times_H M$. Este espaço é denominado *produto cruzado de G em M por H* . A órbita de um par $(g, x) \in G \times M$ é denotada por $[g, x]$.

Lembremos que se temos ações $\theta: G \times M \rightarrow M$ e $\theta': G \times N \rightarrow N$, do grupo G em variedades M e N , uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é dito *G -equivariante* se para todo $x \in M, g \in G: \theta'(g, f(x)) = f(\theta(g, x))$;

Agora podemos enunciar o Teorema do Slice.

Teorema 2.3.3 : Sejam M uma variedade, G um grupo de Lie, $\theta: G \times M \rightarrow M$ uma ação própria (e suave) e U uma vizinhança aberta de p_0 em M . Então

- (A) existe um slice S_{p_0} em p_0 contido em U ;
- (B) existe um difeomorfismo G -equivariante entre $\theta(G, S_{p_0})$ e o produto cruzado $G \times_{G_{p_0}} S_{p_0}$.

A demonstração destes resultados é bem técnica e envolve alguns lemas. Confira em (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2010, Teoremas: 3.35 e 3.40). Observe que primeira parte do teorema anterior, garante que podemos encontrar uma vizinhança, o slice, contida em U arbitrariamente pequena. Na literatura sobre ações de grupos de Lie, costuma-se chamar a parte (A) de Teorema do Slice e a parte (B) de Teorema da Vizinhança Tubular equivariante.

Este resultado será importante num futuro próximo quando demonstrarmos o Teorema do quociente por ações próprias, Teorema 2.4.6, para orbifolds. Pois ele nos ajudará a definir nossas cartas.

2.4 ORIBFOLDS EFETIVOS VIA QUOCIENTES

Começaremos mostrando que se um grupo age propriamente descontinuamente em uma variedade, o espaço orbital possui uma estrutura de orbifold. Este resultado é apresentado no artigo precursor de (SATAKE, 1956) como uma observação. Uma demonstração é feita em (THURSTON, 2002, Proposição 13.2.1) onde o autor apenas constrói as cartas. Nosso objetivo é fazer uma demonstração na qual vamos construir as cartas e as injeções. Aqui seguiremos as ideias expostas em (BRAKKEE, 2013, Teorema 2.1.9), com algumas adaptações. Na sequência como em (AMENTA, 2013, Proposição 1.2.1), generalizaremos esta construção para certas ações próprias usando o Teorema 2.3.3, do Slice.

2.4.1 Ações propriamente descontínuas

Teorema 2.4.1 : Seja M uma variedade n -dimensional na qual G um grupo discreto age suave, efetiva e propriamente descontinuamente. Então M/G possui uma estrutura de orbifold com dimensão $\dim(M/G) = n$.

Demonstração: Sejam M uma variedade e G um grupo discreto agindo em M suave, efetiva e propriamente descontinuamente. A fim de mostrar que M/G tem uma estrutura de orbifold precisamos verificar que este espaço é Hausdorff e segundo contável; construir cartas e um atlas. De fato, o quociente será Hausdorff pois a ação é propriamente descontínua e logo é própria. Como a projeção canônica $M \rightarrow M/G$ é uma função aberta e M é segundo contável, temos que o espaço orbital será segundo contável. A construção das cartas e do atlas nos demandam mais esforços.

Vamos construir as cartas: sejam $\pi: M \rightarrow M/G$ a projeção canônica e $x \in M/G$. Seja também, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \subset M$. Pelo Lema 2.2.12 existe uma vizinhança aberta conexa \tilde{U}_x de \tilde{x} que é invariante por $G_{\tilde{x}}$ tal que $\tilde{U}_x \cap g \cdot \tilde{U}_x = \emptyset$ para todo $g \notin G_{\tilde{x}}$. Além disso, temos que $f_x: \tilde{U}_x/G_x \rightarrow M/G$ definida por $f([\tilde{y}]) = [y]$ é um homeomorfismo em sua imagem.

Seja $\phi_x: V_x \rightarrow \tilde{V}_x$, $V_x \subset M$ e $\tilde{V}_x \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de M ao redor do ponto \tilde{x} . Agora definamos U'_x como a parte conexa de $\bigcap_{g \in G_{\tilde{x}}} g \cdot (\tilde{U}_x \cap V_x)$. Note que $U'_x \subset V_x$. Como $G_{\tilde{x}}$ é finito e a aplicação $y \mapsto g \cdot y$ é um homeomorfismo, então U'_x é aberto. Observando a construção de U'_x , temos que este conjunto é invariante por $G_{\tilde{x}}$ e que $U'_x \cap g \cdot U'_x = \emptyset$, para todo $g \notin G_{\tilde{x}}$. A aplicação f_x é um mergulho topológico que leva $U'_x/G_{\tilde{x}}$ em $U_x := f_x(U'_x/G_{\tilde{x}}) \subset M/G$.

Seja $W_x = \phi_x(U'_x) \subset \mathbb{R}^n$. O grupo $G_{\tilde{x}}$ age em W_x por: $g \cdot w = \phi_x(g \cdot \phi_x^{-1}(w))$, note que esta ação é efetiva. Como $\phi_x^{-1}: W_x \rightarrow U'_x$ é G -equivariante, induz um homeomorfismo $\overline{\phi_x^{-1}}: W_x/G_{\tilde{x}} \rightarrow U'_x/G_{\tilde{x}}$. Temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} W_x & \xrightarrow{\phi_x^{-1}} & U'_x & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ W_x/G_{\tilde{x}} & \xrightarrow{\overline{\phi_x^{-1}}} & U'_x/G_{\tilde{x}} & \xrightarrow{f_x} & U_x \end{array}$$

em que setas verticais são as projeções canônicas. Seja $\psi_x: W_x \rightarrow M/G$ definida por $\psi_x(y) := f_x([\phi_x^{-1}(y)]) = f_x(\overline{\phi_x^{-1}}[y])$. Então a tripla $(W_x, G_{\tilde{x}}, \psi_x)$, onde $\psi_x(W_x) = U_x$, é por construção uma carta para M/G .

Vamos agora construir uma atlas a partir destas cartas construídas anteriormente. Note que para cada ponto em M/G podemos criar uma carta como acima. Então a coleção de todas essas cartas, digamos \mathcal{A} , cobrirá este espaço. Precisamos verificar a compatibilidade entre as cartas do nosso candidato a atlas $\mathcal{A} = \{(W_x, G_{\tilde{x}}, \psi_x)\}_{x \in M}$. Sejam $(W_x, G_{\tilde{x}}, \psi_x)$ e $(W_y, G_{\tilde{y}}, \psi_y)$ cartas em \mathcal{A} e seja $z \in U_x \cap U_y \subset M/G$, $\phi_x: U'_x \rightarrow W_x$ e $\phi_y: U'_y \rightarrow W_y$ onde $U'_x, U'_y \subset M$ e $\phi_x(U'_x) = \tilde{U}_x \subset \mathbb{R}^n$ e $\phi_y(U'_y) = \tilde{U}_y \subset \mathbb{R}^n$, respectivamente. Sejam $\tilde{z}_x \in \pi^{-1}(z) \cap U'_x \subset M$ e $\tilde{z}_y \in \pi^{-1}(z) \cap U'_y \subset M$. Então existe $g \in G$ tal que $\tilde{z}_x = g\tilde{z}_y$. Então $U'_x \cap gU'_y$ é vizinhança aberta de \tilde{z}_x . Pelo Lema 2.2.12 existe $\tilde{U} \subset U'_x \cap gU'_y$ vizinhança de \tilde{z}_x que é $G_{\tilde{z}_x}$ -invariante e a aplicação canônica $f_{\tilde{z}_x}: \tilde{U}/G_{\tilde{z}_x} \rightarrow M/G$ é mergulho topológico. Definimos $\psi: \phi_x(\tilde{U}) \rightarrow M/G$ por $\psi(p) := f_{\tilde{z}_x}([\phi_x^{-1}(p)])$. Assim obtemos carta $(\phi_x(\tilde{U}), G_{\tilde{z}_x}, \psi)$ com imagem uma vizinhança de z em $U_x \cap U_y$ e injeções para $(W_x, G_{\tilde{x}}, \psi_x)$ e $(W_y, G_{\tilde{y}}, \psi_y)$ dadas por λ_x a inclusão de $\phi(\tilde{U})$ para W_x

$$e \lambda_y = \phi_y \circ g^{-1} \circ \phi_x^{-1}.$$

Concluimos que M/G tem uma estrutura de orbifold. ■

Exemplo 2.4.2 : Seja $\mathcal{O} := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_3$, onde \mathbb{Z}_3 age em \mathbb{R}^2 via rotação de $2\pi/3$, análogo ao feito no Exemplo 1.2.1. Note que \mathbb{Z}_3 é um grupo discreto e que a ação é própria, basta usar o item (2) da Observação 2.2.5. Desta forma o teorema anterior nos garante que \mathcal{O} é um orbifold. □

2.4.2 Ações próprias

Agora queremos caracterizar orbifolds como quocientes por ações próprias. Precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 2.4.3 : Dado um grupo de Lie G e um subconjunto finito $F \subset G$, existe uma vizinhança aberta C de e tal que se $g_1, g_2 \in C$, então $g_1^{-1}g_2 \notin F \setminus \{e\}$.

Demonstração: Seja $f: G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1}g_2 \in G$ contínua. Como $G \setminus (F \setminus \{e\})$ é aberto, $U := f^{-1}(G \setminus (F \setminus \{e\}))$ é vizinhança aberta de (e, e) . Logo existe vizinhança aberta $C \subset U$ de e . Desta forma, se $g_1, g_2 \in C$ então $g_1^{-1}g_2 \notin F \setminus \{e\}$. ■

A demonstração do próximo lema pode ser encontrada em (ALEXANDRINO; BETTIOL, 2010, Proposição 3.28).

Lema 2.4.4 : Seja $\theta: G \times M$ uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M . Seja $\overline{\theta^p}: G/G_p \rightarrow M$ definida por $\overline{\theta^p} \circ \pi = \theta^p$, em que $\pi: G \rightarrow G/G_p$ é a projeção canônica. Então $\overline{\theta^p}$ é uma imersão injetiva, cuja imagem é $G \cdot p$. Em particular, $G \cdot p$ é uma variedade imersa de M . Também, se a ação é própria, então $\overline{\theta^p}$ é um mergulho e $G \cdot p$ é uma subvariedade mergulhada de M .

Observação 2.4.5 : O lema anterior implica se a ação é quase livre, isto é, cada grupo de isotropia é finito, todos os slices têm dimensão $\dim(M) - \dim(G)$ e a condição (i) da Definição 2.3.1 é equivalente a $T_p M = T_p(G \cdot p) \oplus T_p S_{p_0}$ para todo $p \in S_{p_0}$.

Teorema 2.4.6 : Seja G um grupo de Lie k -dimensional agindo suave, efetiva, propriamente e quase livremente em M uma variedade diferenciável n -dimensional. Então M/G possui estrutura canônica de orbifold de dimensão $n - k$.

Demonstração: Seja M/G como no enunciado. Para verificarmos que existe uma estrutura de orbifold, precisamos mostrar que este espaço é Hausdorff e segundo contável e exibir um atlas.

Como G é um grupo de Lie que age propriamente em M , o espaço orbital é Hausdorff. Também, este espaço é segundo contável pois a projeção canônica é aberta.

Vamos às cartas. Seja $p \in M$. Pelo Teorema do Slice existe um slice S_p em p contido no domínio de uma carta adaptada da subvariedade S_p . Em particular, a vizinhança $N_p = GS_p$ da órbita $G \cdot p$ e Np é equivariantemente difeomorfa a $G \times_{G_p} S_p$. Como a ação é quase-livre, o grupo G_p é finito e $\dim(S_p) = n - k$. Seja $K_p \subset G_p$ dado pelo núcleo do homomorfismo $\tilde{\theta}: G_p \rightarrow \text{Diffeo}(S_p)$ definido por $\tilde{\theta}(g)(q) = \theta(g, q)$. Desta forma G_p/K_p age efetivamente em S_p . Para simplificar nossa notação, vamos cometer um abuso de notação e escrever apenas G_p ao invés de G_p/K_p . Nossa intenção é construir uma carta para M/G da seguinte forma: (S_p, G_p, ϕ_p) , em que $\phi_p: S_p \rightarrow M/G$ é a projeção canônica. Note que S_p não é um subconjunto de \mathbb{R}^{n-k} , mas localmente é homeomorfo a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n-k} , pois esta contido no domínio de uma carta de M . Falta apenas verificar que ϕ_p induz um homeomorfismo de S_p/G_p em $\phi_p(S_p)$. Note que N_p é difeomorfo, por um difeomorfismo G -equivariante, a $(G \times_{G_p} S_p)$ pelo Teorema do Slice, logo $N_p/G \cong (G \times_{G_p} S_p)/G$. Agora, temos que $(G \times_{G_p} S_p)/G_p \cong S_p/G_p$ via $G_p/S_p \ni [x] \mapsto [[e, x]] \in (G \times_{G_p} S_p)/G_p$ e $(G \times_{G_p} S_p)/G_p \ni [[g, x]] \mapsto [x] \in S_p/G_p$. Note que ambas as funções estão bem definidas, são contínuas e uma é a inversa da outra. Logo, por transitividade, N_p/G é homeomorfo a S_p/G_p .

Desta forma (S_p, G_p, ϕ_p) é uma carta para o espaço orbital M/G ;

Falta apenas o atlas. Devemos verificar duas coisas para que as cartas anteriores formem um atlas para M/G : (i) as cartas de $\mathcal{A} := \{(S_p, G_p, \phi_p)\}_{p \in M}$ devem cobrir o espaço orbital (no sentido de união) e (ii) compa-

tibilidade entre tais cartas. De fato, para qualquer $[q] \in M/G$ existe um $p \in M$ tal que $\pi(p) = q$ e existe uma carta $(S_p, G_p, \phi_p) \in \mathcal{A}$. Assim $M/G = \bigcup_{p \in M} N_p/G$.

Precisamos verificar a compatibilidade entre as cartas do nosso candidato a atlas, este é um raciocínio bem técnico e envolve algumas etapas. Sejam $\phi_1: S_1 \rightarrow S_1/G_{p_1}$ e $\phi_2: S_2 \rightarrow S_2/G_{p_2}$ duas cartas da coleção \mathcal{A} e $p \in M$ tal que $[p] \in U_1 \cap U_2$, em que $U_1 = \phi_1(S_1)$ e $U_2 = \phi_2(S_2)$ em M/G . Logo temos que $p \in GS_1 \cap GS_2$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $p \in S_1$. Pelo Lema 2.4.3 existe uma vizinhança aberta invariante por inversão C de $e \in G$ tal que se $g_1, g_2 \in G$ então $g_1^{-1}g_2 \notin (G_{p_1} \cup G_{p_2}) \setminus \{e\}$. Definimos então $f_i = \theta|_{C \times S_i}: C \times S_i \rightarrow CS_i$ com $i = 1, 2$, que é uma bijeção. Este fato decorre da definição do conjunto C e o Lema 2.4.3 e do item (iii) da Definição 2.3.1 de slice.

Fixe $i \in \{1, 2\}$. Vamos verificar que f_i é um difeomorfismo. Seja $(g, p) \in C \times S_i$ e seja $Y \in T_{gp}(CS_i)$. Temos que CS_i é aberto, logo $T_{gp}(CS_i) = T_{gp}M$. Vamos definir o seguinte vetor

$$X := d\theta_{g^{-1}|_{gp}} Y \in T_pM = d\theta|_e^p T_eM \oplus T_pS_i,$$

decorrente da definição de Slice, em Definição 2.3.1 e Observação 2.4.5. Portanto, existem $Z_1 \in T_gC = T_gG$ e $Z_2 \in T_pS_i$ tais que $X = d\theta|_e^p dL_{g^{-1}|_g} Z_1 + Z_2$, em que $L_{g^{-1}}$ denota a translação à esquerda que a cada $h \in G$ associa $L_{g^{-1}}(h) = g^{-1}h$. Então

$$d\theta_{(g,p)}(Z_1, Z_2) = d\theta|_g^p(Z_1) + d\theta_{g|_p}(Z_2).$$

Note que, pela caracterização de X e pela relação $\theta^p \circ L_{g^{-1}} = \theta_{g^{-1}} \circ \theta^p$.

$$\begin{aligned} d\theta_{g|_p}(Z_2) &= d\theta_{g|_p}(X - d\theta|_e^p dL_{g^{-1}|_g} Z_1) \\ &= d\theta_{g|_p}(X - d\theta_{g|_p}^{-1} d\theta|_g^p Z_1) \\ &= d\theta_{g|_p}(X) - d\theta_{g|_p}(d\theta_{g|_p}^{-1} d\theta|_g^p Z_1) \\ &= d\theta_{g|_p}(d\theta_{g^{-1}|_{gp}} Y) - d\theta|_g^p(Z_1) \\ &= Y - d\theta|_g^p(Z_1) \end{aligned}$$

Portanto $d\theta_{(g,p)}(Z_1, Z_2) = Y$. Logo f_i é bijeção e $d\theta_{(g,p)}$ é sobrejetiva e as dimensões de $C \times S_i$ e CS_i são iguais, assim f_i é difeomorfismo.

Pelo Teorema 2.3.3, do Slice, existe um slice S_3 em p tal que $S_3 \subset CS_1$.

Defina $\lambda_1: S_3 \xrightarrow{i_{S_3}} CS_1 \xrightarrow{f_1^{-1}} C \times S_1 \xrightarrow{\pi_{S_1}} S_1$, vamos verificar que esta função é injetora e uma imersão:

- λ_1 é injetora: sejam $q_1, q_2 \in S_3$ tais que $\lambda_1(q_1) = \lambda_1(q_2) =: s$.

$$\pi_{S_1}(f_1^{-1}(q_1)) = \pi_{S_1}(f_1^{-1}(q_2)).$$

Implicando que existem $g_1, g_2 \in C$ tais que $f_1^{-1}(q_1) = (g_1, s)$ e $f_1^{-1}(q_2) = (g_2, s)$. Aplicando f_1 temos $g_1 s = q_1$ e $g_2 s = q_2$, logo $g_2 g_1^{-1} q_1 = q_2$. Como S_3 é um Slice em p , temos que $g_2 g_1^{-1} \in G_p \subset G_{p_1}$, decorrente da definição de slice (2.3.1 (iii)). Agora pela definição do conjunto C temos que $g_2 g_1^{-1} = e$. Portanto $q_1 = q_2$.

• λ_1 é imersão: sejam $q \in S_3$ e $X \in \text{Nuc } d\lambda_1|_q$. Como $q \in S_3 \subset CS_1$, existem únicos $g \in C, y \in S_1$ tais que $q = f_1(g, y) = gy$. Segue pela regra da cadeia que

$$d\pi_{S_1}|_{(g,y)} \cdot df_1^{-1}|_q(X) = 0.$$

Então

$$df_1^{-1}|_q(X) \in T_g C \oplus \{0\} \implies X \in df_1|_{(g,y)}(T_g C \oplus \{0\}).$$

Pela Observação 1.1.2 temos

$$df_1|_{(g,y)}(T_g C \oplus \{0\}) = d\theta^y|_g(T_g C) = T_{gy}(G \cdot y) = T_q(G \cdot y)$$

e $X \in T_q S_3$, implicando assim que $X = 0$.

Vimos acima que λ_1 é uma imersão injetora. Como $\dim(S_1) = \dim(S_3)$, concluímos que λ_1 é um difeomorfismo local. Desta forma, λ_1 é um mergulho.

Assim construímos uma das injeções entre as cartas. Na sequência construiremos a outra.

Seja $h \in G$ tal que $hp \in S_2$. Reduzindo o tamanho de S_3 caso necessário, podemos assumir que $hS_3 \subset CS_2$. Defina $\lambda_2: S_3 \xrightarrow{h} CS_2 \xrightarrow{f_2^{-1}} C \times S_2 \xrightarrow{\pi_{S_2}} S_2$, vamos verificar que esta função é injetora. Para se mostrar que λ_2 é uma imersão, faz-se um raciocínio análogo ao usado em λ_1 .

• λ_2 é injetora: sejam $q_1, q_2 \in S_3$ tais que $\lambda_2(q_1) = \lambda_2(q_2)$, logo

$$\pi_{S_2}(f_2^{-1}(hq_1)) = \pi_{S_2}(f_2^{-1}(hq_2)).$$

Como $hS_3 \subset CS_2$, existem $g_1, g_2 \in C$ e $s \in S_2$ tais que $g_1s = hq_1$ e $g_2s = hq_2$. Segue que

$$g_1^{-1}hq_1 = g_2^{-1}hq_2 \implies h^{-1}g_2g_1^{-1}hq_1 = q_2.$$

Logo $h^{-1}g_2g_1^{-1}h \in G_p = h^{-1}G_{hp}h$. Como $hp \in S_2$, temos que $G_{hp} \subset G_{p_2}$ (da definição de Slice item (iii)). Segue que $g_2^{-1}g_1 \in G_{hp} \subset (G_{p_1} \cup G_{p_2})$, implicando que $g_2^{-1}g_1 = e$ pelo Lema 2.4.3. Desta forma $q_1 = q_2$.

Como h é difeomorfismo, um argumento análogo a λ_1 mostra que λ_2 é imersão. Portanto λ_2 é um mergulho.

Concluimos então que $\lambda_1: S_3 \rightarrow S_1$ e $\lambda_2: S_3 \rightarrow S_2$ são injeções e portanto, as cartas $\phi_1: S_1 \rightarrow S_1/G_{p_1}$ e $\phi_2: S_2 \rightarrow S_2/G_{p_2}$ são compatíveis.

Portanto M/G é um orbifold. ■

Este resultado pe uma ferramenta muito útil para construir orbifolds. O Teorema 2.4.11, a seguir, implica que cada orbifold porde ser escrito nesta forma.

Observação 2.4.7 : Note que uma ação propriamente descontínua e quase livre é em particular uma ação própria, desta forma o Teorema 2.4.6, acima, generaliza o Teorema 2.4.1.

Vamos mostrar agora que dados M e G como no enunciado do Teorema 2.4.6 em que $\pi: M \rightarrow M/G$ é a projeção canônica, existe uma única estrutura de orbifold em M/G tal que $\pi \in C^\infty$ e uma aplicação $f: M/G \rightarrow \mathcal{O}$ em um orbifold \mathcal{O} é diferenciável se, e somente se, $f \circ \pi$ é diferenciável. Precisaremos primeiramente do seguinte lema.

Lema 2.4.8 : Seja $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ um difeomorfismo entre orbifolds da mesma dimensão e $x \in \mathcal{O}$. Então existem cartas (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) e (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) ao redor de x e $f(x)$, respectivamente, e um mergulho $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\phi_V \circ \tilde{f} = f \circ \phi_U$.

Demonstração: Como f^{-1} é C^∞ , existem cartas (\tilde{V}, G_V, ϕ_V) e (\tilde{W}, G_W, ϕ_W) ao redor de $f(x)$ e x , respectivamente, e $\tilde{f}^{-1}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{W}$ suave tal que $\phi_W \circ \tilde{f}^{-1} = f^{-1} \circ \phi_V$. Como f é C^∞ , existem cartas (\tilde{U}, G_U, ϕ_U) e $(\tilde{U}', G_{U'}, \phi_{U'})$ em torno de x e $f(x)$, respectivamente, e $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ suave tal que $\phi_{U'} \circ \tilde{f} = f \circ \phi_U$. Diminuindo U' e U (e substituindo os domínios das cartas correspondentes por imagens de injeções adequadas), podemos assumir que $U \subset W$, $\tilde{U} \subset \tilde{W}$, $U' \subset \tilde{V}$, $\phi_U = \phi_{W|_{\tilde{U}}}$ e $\phi_{U'} = \phi_{V|_{\tilde{U}'}}$. Portanto,

$$\phi_w \circ \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f} = \phi_{W|_{\tilde{U}}}: \tilde{U} \rightarrow W.$$

Pelo Lema (MOERDIJK; MRCUN, 2003, Lema 2.11), existe $g \in G_W$ tal que $\tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}|_{\tilde{U}} = g|_{\tilde{U}}$. Portanto \tilde{f} e todo $d\tilde{f}|_{\tilde{y}}$, $\tilde{y} \in \tilde{U}$, são injetores. Como \tilde{U} e \tilde{V} têm a mesma dimensão, o teorema da aplicação inversa implica que $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ é um mergulho. Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{U}' \subset \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{f}^{-1}} & \tilde{W} \\ \phi_U \downarrow & & \phi_{U'} \downarrow & & \downarrow \phi_W \\ U & \xrightarrow{f} & U' \subset V & \xrightarrow{f^{-1}} & W. \end{array}$$

Em particular,

$$f \circ \phi_U = \phi_{U'} \circ \tilde{f} = \phi_V \circ \tilde{f}^{-1}.$$

Concluimos assim a demonstração. ■

Vamos agora demonstrar a unicidade.

Teorema 2.4.9 : Seja G um grupo de Lie k -dimensional agindo suave, efetiva, propriamente e quase livremente em M uma variedade diferenciável n -dimensional em que $\pi: M \rightarrow M/G$ é a projeção canônica. Existe uma única estrutura de orbifold em M/G tal que π é C^∞ e uma aplicação $h: M/G \rightarrow \mathcal{O}$ em um orbifold é diferenciável se, e somente se, $h \circ \pi$ é diferenciável.

Demonstração: Em M/G considere a estrutura definida na demonstração do Teorema 2.4.6.

Primeiro, vamos verificar que $\pi: M \rightarrow M/G$ é C^∞ . Seja $p \in M$. Sejam $S_p \subset M$ slice em p contido numa carta da subvariedade S_p e C vizinhança aberta de e tal que se $g_1, g_2 \in C$ então $g_1^{-1}g_2 \notin G_p \setminus \{e\}$. Sejam $f^{-1} = \theta|_{CS_p}^{-1}: CS_p \rightarrow C \times S_p$, $\pi_2: C \times S_p \rightarrow (C \times S_p)/S_p$, a projeção natural, e $\phi_p: (C \times S_p)/S_p \rightarrow S_p/G_p$. Como $\pi_2 \circ f^{-1}$ é C^∞ e $\phi_p(\pi_2 \circ f^{-1}) = \pi$, temos que π é C^∞ .

Em seguida verificaremos a existência. Seja $h: M/G \rightarrow \mathcal{O}$ diferenciável. Vimos que a composição de duas aplicações diferenciáveis é diferenciável. Sabemos que se h é diferenciável, então $h \circ \pi$ também é diferenciável. Por outro lado, $h \circ \pi$ é função C^∞ . Seja $x \in M/G$. Se $p \in M$ tal que $\pi(p) = x$, então suponha que existem uma vizinhança U de p em M , uma carta $\phi: \tilde{V} \rightarrow V$ de \mathcal{O} em de torno de $f(x)$ e uma aplicação diferenciável $\widetilde{h \circ \pi}: U \rightarrow \tilde{V}$ tal que $\phi \circ \widetilde{h \circ \pi} = h \circ \pi$ em U . Agora, note que se $S \subset U$ é um slice em torno de p então $\phi \circ \widetilde{h \circ \pi} = h \circ \pi$ em S . Assim concluímos que h é diferenciável.

Quanto à unicidade. Sejam $(M/G)_1$ e $(M/G)_2$ duas estruturas com a propriedade do teorema. Escrevemos $\pi_i: M \ni p \mapsto \pi(p) \in (M/G)_i$ e $\text{id}_{ij}: (M/G)_i \ni x \mapsto x \in (M/G)_j$, para $i \in \{1, 2\}$. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\
 (M/G)_1 & \xleftrightarrow[\text{id}_{12}]{\text{id}_{21}} & (M/G)_2
 \end{array}$$

Note que $\text{id}_{12} \circ \pi_1 = \pi_2$ é C^∞ , logo id_{12} é C^∞ . Analogamente vemos que id_{21} é C^∞ . Portanto id_{12} e id_{21} são difeomorfismos. Agora, sejam $(\tilde{U}_1, G_{U_1}, \phi_{U_1})$ e $(\tilde{U}_2, G_{U_2}, \phi_{U_2})$ cartas de $(M/G)_1$ e $(M/G)_2$, respectivamente, e $x \in U_1 \cap U_2 =: V$. Como id_{12} é C^∞ , Lema 2.4.8 implica que existem carta $\phi_W: \tilde{W} \rightarrow W$ em $(M/G)_1$, e mergulhos $\lambda: \tilde{W} \rightarrow \tilde{U}_1$ e μ tal que o digrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{U}_1 & \xleftarrow{\lambda} & \widetilde{W} & \xrightarrow{\mu} & \widetilde{U}_2 \\
 \phi_{U_1} \downarrow & & \downarrow \phi_W & & \downarrow \phi_{U_2} \\
 U_1 & \xleftarrow{\text{incl}} & W & \xrightarrow{\text{incl}} & U_2.
 \end{array}$$

Desta forma temos as estruturas $(M/G)_1$ e $(M/G)_2$ são iguais e temos assim a unicidade. ■

Exemplo 2.4.10 (*Espaço projetivo ponderado*): Considere a esfera unitária: $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Seja (a_0, \dots, a_n) uma $(n+1)$ -upla de inteiros coprimos entre si, e o grupo S^1 aja em S^{2n+1} via $\lambda(z_0, \dots, z_n) := (\lambda^{a_0} z_0, \dots, \lambda^{a_n} z_n)$. Gostaríamos de concluir que S^{2n+1}/S^1 tem estrutura de orbifold via o Teorema 2.4.6. Vamos checar as hipóteses do teorema: sabemos que S^1 é um grupo de Lie compacto; S^{2n+1} é uma variedade diferenciável; note que pelo fato de serem primos, temos que esta ação é efetiva; $S_{e_i}^1 = \{\lambda \in S^1; \lambda^{a_i} = 1\} \cong \mathbb{Z}_{a_i}$ e isotropia nos outros pontos é trivial pois existem $i \neq j$ tais que $z_i \neq 0$ e $z_j \neq 0$, desta forma temos que a ação é quase livre. Portanto o espaço $S^{2n+1}/S^1 =: W\mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$, chamado *espaço projetivo ponderado*, tem uma estrutura de orbifold. □

Finalizamos o capítulo com o seguinte resultado.

Teorema 2.4.11 : Seja \mathcal{O} um orbifold. Então \mathcal{O} é difeomorfo a um quociente M/G em que M é uma variedade diferenciável e G é um grupo de Lie que age suave, efetiva, própria e quase livremente em M .

A demonstração deste fato envolve o estudo do chamado *fibrado de referenciais ortogonais* de um orbifold. Este fibrado tem propriedades análogas aos fibrados de uma variedade diferenciável. Uma maneira de fazermos esta construção pode ser encontrada em (MOERDIJK; MRCUN, 2003, Seção 2.4), assim como resultados adicionais e a demonstração do teorema acima.

Neste capítulo, vimos como podemos caracterizar um quociente M/G , em que M é uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie, como um orbifold. Demonstramos que se a ação suave efetiva e propriamente descontínua

ou própria e quase livre, então o quociente M/G tem uma estrutura canônica de orbifold. Esta é uma ferramenta importante na 'fabricação' de exemplos de orbifolds.

Nosso próximo passo é definir orbifolds por um viés algébrico que sob certas hipóteses corresponderá as mesmas estruturas que viemos trabalhando até o momento.

3 ORBIFOLDS VIA GRUPOIDES

Neste capítulo nós reformularemos a noção de orbifolds usando a linguagem de grupoides e mostraremos que há uma correspondência entre orbifolds e grupoides de Lie próprios e étale como os definidos até então e esta nova caracterização, que será apresentada. Assim como em (MOERDIJK; PRONK, 1997). Evitamos a teoria de categorias para deixar este capítulo mais acessível. Veja referência (TOMMASINI, 2012) para abordagem utilizando linguagem de categorias e outros resultados ao longo deste capítulo.

3.1 GRUPOIDES DE LIE

Antes de definir grupoides precisamos definir o produto fibrado entre dois espaços topológicos.

Definição 3.1.1 Sejam X, Y e Z espaços topológicos e funções contínuas $f: X \rightarrow Z$ e $g: Y \rightarrow Z$. O *produto fibrado* de X por Y sobre Z é o subconjunto de $Z \times Z$ definido por $X \times_f Y := \{(x, y) \in X \times Y; f(x) = g(y)\}$.

Definição 3.1.2 (*Grupoide topológico*): Um *grupoide topológico* \mathcal{G} consiste de um espaço topológico G_0 (*de objetos*) não vazio e um espaço topológico G_1 (*de setas*) em conjunto com cinco aplicações contínuas. São elas:

- (i) *source* $s: G_1 \rightarrow G_0$;
- (ii) *target* $t: G_1 \rightarrow G_0$;
- (iii) *composição* (ou *multiplicação*) $m: G_1 \times_{s,t} G_1 \rightarrow G_1$;
- (iv) *unidade* $u: G_0 \rightarrow G_1$;
- (v) *inversão* $i: G_1 \rightarrow G_1$;

satisfazendo as seguintes condições:

- para todo $(h, g) \in G_1 \times_t G_1$: $s(m(h, g)) = s(g)$, $t(m(h, g)) = t(h)$;
- associatividade de m : se h, f e g em G_1 são tais que $s(g) = t(f)$ e $s(h) = t(g)$, então

$$m(m(h, g), f) = m(h, m(g, f));$$

- $s \circ u = t \circ u = \text{id}_{G_0}$ e para todo $g \in G_1$

$$m(g, u(s(g))) = g = m(u(t(g)), g);$$

- $s \circ i = t$, $t \circ i = s$ e para todo $g \in G_1$:

$$m(i(g), g) = u(s(g))$$

$$m(g, i(g)) = u(t(g)).$$

Introduzimos as seguintes notações: se $g \in G_1$ é tal que $s(g) = x$, $t(g) = y$, escrevemos $g: x \rightarrow y$. Se $(h, g) \in G_1 \times_t G_1$, escrevemos $hg := m(h, g)$. Se $g: x \rightarrow y$, escrevemos $g^{-1} := i(g): y \rightarrow x$.

Um grupoide topológico pode ser representado por uma 7-upla $(G_0, G_1, s, t, m, u, i) =: \mathcal{G}$ formada por dois espaços topológicos e cinco aplicações contínuas satisfazendo as propriedades da Definição 3.1.2.

Observação 3.1.3 : Se \mathcal{G} é um grupoide topológico, então s, t são aplicações sobrejetoras e i é uma involução.

De fato, s, t são sobrejetoras pois $s \circ u = t \circ u = \text{id}_{G_0}$. Agora para a involução, seja $g: x \rightarrow y$. Então $m(i^2(g), i(g)) = u(y)$. Aplicando $m(\cdot, y)$ e a associatividade de m obtemos $m(u(y), g) = g$, pelo lado direito, e pelo outro lado

$$\begin{aligned} m(m(i^2(g), i(g)), g) &= m(i^2(g), m(i(g)), g) \\ &= m(i^2(g), u(x)) \\ &= i^2(g). \end{aligned}$$

Portanto $i^2(g) = g$.

Definimos grupoides topológicos, mas nossa intenção é estudar orbifolds que são objetos diferenciáveis. Desta forma introduzimos o conceito de grupoide de Lie.

Definição 3.1.4 (*Grupoide de Lie*): Um *grupoide de Lie* é um grupoide topológico \mathcal{G} tal que G_0 e G_1 são variedades diferenciáveis, s e t são submersões sobrejetoras, m, u e i são aplicações diferenciáveis.

A observação acima implica que se \mathcal{G} é grupoide de Lie, então i é difeomorfismo.

Lema 3.1.5 : Sejam \mathcal{G} um grupoide de Lie, G_1 o conjunto de setas e G_0 o conjunto de objetos. Então $G_1 \underset{s}{\times} \underset{t}{G_1} = \{(h, g) \in G_1 \times G_1; s(h) = t(g)\}$ é uma variedade mergulhada de $G_1 \times G_1$ de dimensão $2\dim(G_1) - \dim(G_0)$.

Demonstração: Seja \mathcal{G} um grupoide de Lie e $s, t: G_1 \rightarrow G_0$ suas aplicações source e target. Seja $(s, t): G_1 \times G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$. Logo

$$G_1 \underset{s}{\times} \underset{t}{G_1} = (s, t)^{-1}\{(y, y) \in G_0 \times G_0; y \in G_0\} \subset G_1 \times G_1.$$

Note que o conjunto $\{(y, y) \in G_0 \times G_0; y \in G_0\}$, a diagonal do conjunto $G_0 \times G_0$, é uma subvariedade de $G_0 \times G_0$ e é difeomorfa à variedade G_0 . Observe que $G_1 \underset{s}{\times} \underset{t}{G_1}$ não é vazio, pois como G_0 é não vazio a aplicação unidade nos garante pelo menos um elemento em G_1 . Por fim, temos que (s, t) é uma submersão, já que s e t o são, desta forma (s, t) é transversal à diagonal de $G_0 \times G_0$. Portanto, pelo teorema da transversalidade (GUILLEMIN; POLLACK, 1974, Capítulo 1, Seção 5), $G_1 \underset{s}{\times} \underset{t}{G_1}$ é uma subvariedade de dimensão $2\dim(G_1) - \dim(G_0)$. ■

Observação 3.1.6 : No lema acima, na realidade não precisamos de duas submersões. Basta que uma aplicação seja uma submersão para que o produto fibrado de variedades tenha uma estrutura de variedade. Temos o seguinte resultado: 'Sejam $f: M \rightarrow N$ e $g: M' \rightarrow N$ duas funções diferenciáveis

entre as variedades diferenciáveis M, M' e N . Se f é uma submersão, então o produto fibrado $M \times_f \times_g M'$ é uma subvariedade mergulhada de $M \times M$, com dimensão igual a $\dim(M) + \dim(M') - \dim(N)$. Veja (TOMMASINI, 2012, Proposição 2.11).

Exemplo 3.1.7 Grupoide ação: Seja M uma variedade diferenciável e seja G um grupo de Lie agindo suavemente em M (pela esquerda), com ação dada por $\theta: G \times M \rightarrow M$, escrevemos $gp = \theta(g, p)$. Vamos definir o *grupoide ação* denotado por $G \times M$ da seguinte forma: $(G \times M)_0 := M$ e $(G \times M)_1 := G \times M$. Agora as aplicações: source e target $s, t: G \times M \rightarrow M$ são definidos como $s := \text{pr}_2: G \times M \rightarrow M$ com $(g, p) \mapsto p$ e $t := \theta$, isto é, source é a projeção na segunda coordenada e target a própria ação; para multiplicação note que se $((g, p_1), (h, p_2)) \in G_1 \times_s \times_t G_1$ temos $p_1 = hp_2$, assim $m((g, hp_2), (h, p_2)) = (g \cdot h, p_2)$ em que $g \cdot h$ é a operação do grupo G ; a inversão $i: G \times M \rightarrow G \times M$ é dada por $i(g, p) = (g^{-1}, gp)$ e a unidade por $u: M \rightarrow G \times M$ com $u(p) = (e, p)$ (em que e é o elemento unidade do grupo). Note que cada um das aplicações é diferenciável e satisfaz as condições da definição de grupoides e a projeção é uma submersão, logo $G \times M$ é um grupoide de Lie. \square

A seguir vamos exibir a construção de um grupoide de Lie a partir um atlas de orbifold. Nesta construção precisamos duma noção mais rígida dum atlas de orbifold que nos capítulos anteriores.

Definição 3.1.8 (*Atlas completo*): Seja X um espaço topológico Hausdorff, segundo contável. Um *atlas completo* n -dimensional de orbifold em X é uma coleção $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de cartas de orbifold n -dimensionais em X tais que

- (i) $\bigcup_{i \in I} U_i = X$
- (ii) se $x \in U_i \cap U_j$, então existem $(\tilde{U}_k, G_k, \phi_k) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in U_k \subset U_i \cap U_j$ e injeções $\lambda_i: (\tilde{U}_k, G_k, \phi_k) \rightarrow (\tilde{U}_i, G_i, \phi_i)$, $\lambda_j: (\tilde{U}_k, G_k, \phi_k) \rightarrow (\tilde{U}_j, G_j, \phi_j)$.

Observação 3.1.9 : Cada atlas completo é atlas no sentido da Definição 1.2.4 e cada atlas induz um atlas completo equivalente. As referências (AMENTA, 2013) e (TOMMASINI, 2012) chamam um atlas completo de *atlas*.

Exemplo 3.1.10 Orbifolds como grupoides : Adaptado de (AMENTA, 2013, Exemplo 2.1.8) e (TOMMASINI, 2012, Seção 3). Seja X um espaço topológico Hausdorff e segundo contável e $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}, G_U, \phi_U)\}$ atlas completo de orbifold em X n -dimensional. Nós podemos construir um *grupoide de atlas de orbifold*, denotado por $X[\mathcal{A}]$. Vamos à construção: definiremos

$$X[\mathcal{A}]_0 := \dot{\bigcup}_{\{(\tilde{U}, G_U, \phi_U)\} \in \mathcal{A}} \tilde{U}.$$

Os objetos deste grupoide podem ser escritos na forma (x, \tilde{U}) , em que $(\tilde{U}, G_U, \phi_U) \in \mathcal{A}$ e $x \in \tilde{U}$. Nós relacionamos dois pontos (x, \tilde{U}) e (y, \tilde{V}) se existe uma carta (\tilde{W}, G_W, ϕ_W) em \mathcal{A} com duas injeções

$$\lambda: (\tilde{W}, G_W, \phi_W) \rightarrow (\tilde{U}, G_U, \phi_U)$$

$$\mu: (\tilde{W}, G_W, \phi_W) \rightarrow (\tilde{V}, G_V, \phi_V)$$

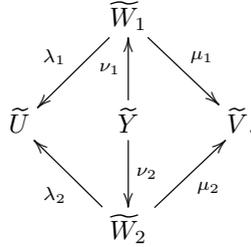
e um ponto $z \in \tilde{W}$ tal que $\lambda(z) = x$ e $\mu(z) = y$. Logo um morfismo $(x, \tilde{U}) \rightarrow (y, \tilde{V})$ é uma tripla da forma (λ, z, μ) , em que λ, μ e z são como acima.

Seja

$$S := \dot{\bigcup}_{\{(\tilde{W}, G_W, \phi_W)\} \in \mathcal{A}} \dot{\bigcup}_{(\lambda, \mu) \in I(W)^2} \tilde{W},$$

em que $I(W)$ é coleção das injeções de (\tilde{W}, G_W, ϕ_W) para as cartas de \mathcal{A} . Um elemento de S é dado por um ponto $z \in \tilde{W}$ para alguma carta $(\tilde{W}, G_W, \phi_W) \in \mathcal{A}$ com duas injeções partindo desta carta. Logo S pode ser identificado com o conjunto das triplas (λ, z, μ) , do parágrafo anterior. Como cada conjunto \tilde{W} é aberto em \mathbb{R}^n , temos que S é uma união disjunta de variedades diferenciáveis.

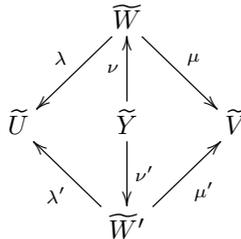
Dizemos que (λ_1, z_1, μ_1) e $(\lambda_2, z_2, \mu_2) \in S$ são equivalentes se λ_1, λ_2 são injeções para mesma carta ϕ_U e μ_1, μ_2 são injeções para mesma carta ϕ_V e existe carta (\tilde{Y}, G_Y, ϕ_Y) com injeções $\nu_i: \tilde{Y} \rightarrow \tilde{W}_i, i = 1, 2$ e z tais que $\nu_i(z) = z_i$ e o seguinte diagrama comuta



Pode-se verificar que esta relação é relação de equivalência, deixamos indicado o Lema 3.4 em (TOMMASINI, 2012). Agora, definimos o conjunto de setas: $X[\mathcal{A}]_1 := S/\sim$ onde uma tripla $(\lambda, z, \mu) \in S$ tem sua classe denotada por $[\lambda, z, \mu]$. No seguinte lema, verificaremos que existe uma estrutura diferenciável em $X[\mathcal{A}]_1$.

Lema 3.1.11 : Existe uma única estrutura diferenciável em $X[\mathcal{A}]_1$ tal que π é um difeomorfismo local.

Demonstração: Vamos verificar que $\pi: S \rightarrow S/\sim$ a projeção canônica é um homeomorfismo local sobrejetor. Seja $(\widetilde{W}, \lambda, \mu)$ com \widetilde{W} em uma componente conexa de S , vamos mostrar que $\pi((\widetilde{W}, \lambda, \mu))$ é aberto em S/\sim . Para isto, veremos que $T := \pi^{-1}(\pi(\widetilde{W}, \lambda, \mu))$ é aberto. De fato, seja $(\lambda', z', \mu') \in T$. Então existe $z \in \widetilde{W}$ tal que $(\lambda', z', \mu') \sim (\lambda, z, \mu)$. Desta forma existe injeção ν' tal que o seguinte diagrama comuta



e existe $\tilde{z} \in \widetilde{Y}$ tal que $\nu(\tilde{z}) = z$ e $\nu'(\tilde{z}) = z'$ e existe N vizinhança aberta de z em \widetilde{W} tal que $N \subset \nu(\widetilde{Y})$. Então $A := \{(\lambda', \nu' \circ \nu^{-1}(x), \mu'); x \in N\}$ é vizinhança aberta de (λ', z', μ') em $\widetilde{W}' \subset S$. Temos que se $x \in N$, então $(\lambda', \nu' \circ \nu^{-1}, \mu') \sim (\lambda, x, \mu)$, logo $A \subset T$. Como T é aberto então

$\pi(\widetilde{W}, \lambda, \mu) \subset S/\sim$. Com $\pi|_{\widetilde{W}}$ injetivo e \widetilde{W} componente conexa qualquer, π é homeo local.

Como $S \subset \mathbb{R}^n$, S/\sim é Hausdorff, segundo contável e possui uma única estrutura diferenciável tal que π é um difeomorfismo local. Esta estrutura induzida pelas cartas dadas como inversas locais de π é a única estrutura C^∞ que torna π em um difeomorfismo local. ■

Abaixo vamos definir as aplicações source, target, unidade e inversão:

$$\begin{aligned} s([\lambda, z, \mu]) &:= (\lambda(z), \widetilde{U}); \\ t([\lambda, z, \mu]) &:= (\mu(z), \widetilde{V}); \\ u((x, \widetilde{U})) &:= [\text{id}_{\widetilde{U}}, x, \text{id}_{\widetilde{U}}]; \\ i([\lambda, z, \mu]) &:= [\mu, z, \lambda]. \end{aligned}$$

A verificação que estas aplicações estão bem definidas decorre diretamente da relação de equivalência que definimos acima.

Agora para definirmos a aplicação multiplicação, seja $([\lambda', x', \mu'], [\lambda, x, \mu]) \in X[\mathcal{A}]_1 \times_t X[\mathcal{A}]_1$. Então temos injeções:

$$\begin{aligned} (\widetilde{U}, G_U, \phi_U) &\xleftarrow{\lambda} (\widetilde{H}, G_H, \phi_H) \xrightarrow{\mu} (\widetilde{V}, G_V, \phi_V) \\ (\widetilde{V}, G_V, \phi_V) &\xleftarrow{\lambda'} (\widetilde{H}', G_{H'}, \phi_{H}') \xrightarrow{\mu'} (\widetilde{W}, G_W, \phi_W) \end{aligned}$$

com dois pontos $x \in \widetilde{H}$ e $x' \in \widetilde{H}'$ tais que $\mu(x) = \lambda'(x')$. Como \mathcal{A} é atlas completo, existem uma carta $(\widetilde{K}, G_K, \phi_K) \in \mathcal{A}$ em torno de $\phi_V(\mu(x))$ e duas injeções tais que

$$(\widetilde{H}, G_H, \phi_H) \xleftarrow{\gamma} (\widetilde{K}, G_K, \phi_K) \xrightarrow{\gamma'} (\widetilde{H}', G_{H'}, \phi_{H'}).$$

Seja $y \in \widetilde{K}$ tal que $\phi_K(y) = \mu(x)$. Composto γ e γ' por um certo elemento de G_H e $G_{H'}$, respectivamente, podemos garantir $\gamma(y) = x'$ e $\gamma'(y) = x'$. Nós definimos a multiplicação da seguinte forma:

$$m([\lambda', x', \mu'], [\lambda, x, \mu]) = [\lambda \circ \gamma, y, \mu' \circ \gamma'].$$

A verificação que esta operação de multiplicação é bem definida e é asso-

ciativa encontra-se em (TOMMASINI, 2012), respectivamente no Lema 2.7 e na Proposição 3.8. Finalmente, temos que s e t são submersões, pois foram definidas a partir de injeções e $\pi: S \rightarrow S/\sim$ é difeomorfismo local. Temos também que as aplicações m, u e i são diferenciáveis. A ideia para isto, é ver localmente estas funções como composições de funções suaves. Esta prova pode ser encontrada em (TOMMASINI, 2012, Lema 3.11). Por último as aplicações s, t, u, i e m satisfazem as relações da definição dum grupoide topológico. Esta verificação segue diretamente das definições destas aplicações. Portanto $X[\mathcal{A}]$ é um grupoide de Lie. \square

Finalizaremos esta primeira seção com a definição de isotropia e órbita para grupoides de Lie e um exemplo.

Definição 3.1.12 (*Isotropia/Órbita*): Seja \mathcal{G} um grupoide de Lie. Seja um ponto $x \in G_0$.

- (i) O conjunto de todas as setas $x \rightarrow x$, denotado por \mathcal{G}_x munido de m , é chamado *grupo de isotropia de x* ;
- (ii) O conjunto $t(s^{-1}(x)) := \mathcal{G}(x)$ é chamado *órbita de x* ;
- (iii) O *espaço orbital de \mathcal{G}* , por notação $|\mathcal{G}|$, é o espaço topológico dado pelo quociente do espaço G_0 pela relação de equivalência $x \sim y$ se x e y estão na mesma órbita.

3.2 GRUPOIDES ORBIFOLD

Vamos estudar, agora, uma classe de grupoides de Lie chamada *grupoides orbifold*. Veremos que estes grupoides particulares, de certa forma representarão os orbifolds que viemos estudando via cartas. De modo que possamos defini-los, precisamos impor restrições adicionais aos grupoides.

Definição 3.2.1 (*Tipos de grupoides*): Seja \mathcal{G} um grupoide de Lie.

- (i) \mathcal{G} é *próprio* se $(s, t): G_1 \rightarrow G_0 \times G_0$ é uma função própria.
- (ii) \mathcal{G} é *étale* se s e t são difeomorfismos locais. Se \mathcal{G} é étale, definimos a *dimensão* $\dim \mathcal{G} = \dim G_0 = \dim G_1$.

Segue que se \mathcal{G} é próprio, então cada grupo de isotropia é um grupo de compacto, pois $\mathcal{G}_x = (s, t)^{-1}((x, x))$ e (x, x) é compacto.

Proposição 3.2.2 : Se \mathcal{A} é atlas completo de um orbifold num espaço Hausdorff, segundo contável X , então o grupoide $X[\mathcal{A}]$ formado a partir do atlas \mathcal{A} , como no Exemplo 3.1.10, é próprio.

A demonstração deste fato pode ser encontrada em (TOMMASINI, 2012, Lema 3.14).

Vamos agora mostrar que um grupoide construído a partir do atlas de um orbifold é étale, verificando que as dimensões dos seus conjuntos de objetos e setas é igual.

Proposição 3.2.3 : Seja \mathcal{A} um atlas completo de um orbifold num espaço Hausdorff, segundo contável X . Então o grupoide $X[\mathcal{A}]$ formado a partir do atlas \mathcal{A} , como no Exemplo 3.1.10, é étale.

Demonstração: Seja $n = \dim(\mathcal{A})$ e $X[\mathcal{A}]$ construído como no Exemplo 3.1.10. Lembremos que na sua construção o espaço $X[\mathcal{A}]_0$ foi construído como união disjunta de variedades n -dimensionais, logo devemos ter $\dim X[\mathcal{A}]_0 = n$. Agora precisamos verificar que $\dim X[\mathcal{A}]_1 = n$. Lembremos que este conjunto de setas foi construído como quociente de uma variedade n -dimensional S por uma relação de equivalência \sim e que a projeção canônica

$\pi: S \rightarrow S/\sim$ é um difeomorfismo local. Em particular $X[\mathcal{A}]_1 = \dim S = n$. Portanto $X[\mathcal{A}]$ é étale. ■

Lembremo-nos do conceito de *germe* de um difeomorfismo local. Sejam M e N variedades, um *difeomorfismo* local de $x \in M$ para $y \in N$ é dado por uma vizinhança aberta U de x e outra vizinhança aberta V de y e um difeomorfismo $f: U \rightarrow V$ com $f(x) = y$. Dois difeomorfismos locais $f: U \rightarrow V$ e $g: U' \rightarrow V'$ de x para y são ditos *equivalentes* se existe uma vizinhança W de x , com $W \subset U \cap U'$ tal que as restrições de f e g em W sejam iguais. Um *germe* de um difeomorfismo local de x para y é uma classe de equivalência de difeomorfismos locais como acima.

Vejam agora que germes em grupoides de Lie étale nos permitem introduzir uma nova classe de grupoides, a saber *grupoides efetivos*. Sejam \mathcal{G} um grupoide étale e $x, y \in G_0$. Denotamos por $\text{Diff}(x, y)$ o conjunto dos germes de difeomorfismos locais de x para y . Suponha que $g: x \rightarrow y$ é uma seta em G_1 . Então existem vizinhanças $U_g \subset G_1$ de g e $V_x, V_y \subset G_0$ de x e y , respectivamente, tais que as aplicações source e target (denotados por s e t) mapeiam U_g difeomorficamente em V_x e V_y , respectivamente. Por estes conjuntos g define um difeomorfismo de V_x para V_y e logo um germe $\tilde{g} \in \text{Diff}(x, y)$. Note que este germe independe da vizinhança U_g , logo definimos uma aplicação natural $\mathcal{G}(x, y) \rightarrow \text{Diff}(x, y)$, em que $\mathcal{G}(x, y) \subset G_1$ é o conjunto de setas de x para y . Observe também que $\text{Diff}(x, x)$ é um grupo por composição e que para cada $x \in G_0$ a aplicação acima define um homomorfismo de grupos $\mathcal{G}_x \rightarrow \text{Diff}(x, x)$.

Podemos agora definir o que venha a ser um grupoide efetivo.

Definição 3.2.4 (*Grupoides efetivos*): Um grupoide de Lie étale \mathcal{G} é dito *efetivo* se para cada $x \in G_0$ o homomorfismo de grupos $\mathcal{G}_x \rightarrow \text{Diff}(x, x)$ é injetivo.

Proposição 3.2.5 : Seja \mathcal{A} um atlas completo de um orbifold num espaço Hausdorff, segundo contável X . Então o grupoide $X[\mathcal{A}]$ formado a partir do atlas \mathcal{A} , como no Exemplo 3.1.10, é efetivo.

Para demonstração, confira (TOMMASINI, 2012, Lema 3.13).

Os últimos resultados nos mostram que dado um orbifold podemos construir um grupoide de Lie a partir de seu atlas que será étale, efetivo e próprio.

Finalizaremos esta seção com a definição dos grupoides orbifolds.

Definição 3.2.6 (*Grupoides orbifolds*): Um grupoide de Lie é chamado de *grupoide orbifold* se é próprio e étale.

3.3 MORFISMOS E EQUIVALÊNCIA DE MORITA

Nesta seção discutiremos os morfismos entre grupoides e suas transformações naturais a fim de definirmos orbifolds pela linguagem dos grupoides.

Começaremos com as definições de morfismos e transformações naturais entre grupoides e feito isto, definiremos a equivalência de Morita.

Definição 3.3.1 (*Morfismos*): Sejam \mathcal{G} e \mathcal{H} grupoides de Lie, um *morfismo de grupoides de Lie* $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ é um par (ϕ_0, ϕ_1) tal que o morfismo entre objetos $\phi_0: G_0 \rightarrow H_0$ e o morfismo $\phi_1: G_1 \rightarrow H_1$ são diferenciáveis e comutam com as cinco aplicações características dos grupoides. Isto é, devemos ter as seguintes identidades satisfeitas:

$$\phi_0 \circ s = s' \circ \phi_1, \quad \phi_0 \circ t = t' \circ \phi_1, \quad \phi_1 \circ m = m' \circ (\phi_1 \times \phi_1),$$

$$\phi_1 \circ u = u' \circ \phi_0, \quad \text{e } \phi_1 \circ i = i' \circ \phi_1,$$

onde $\mathcal{G} = (G_0, G_1, s, t, m, u, i)$ e $\mathcal{H} = (H_0, H_1, s', t', m', u', i')$.

Definição 3.3.2 (*Transformações naturais*): Sejam $\phi, \psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ dois morfismos entre grupoides de Lie. Uma *transformação natural* τ de ϕ para ψ é um morfismo $\tau: G_0 \rightarrow H_1$ tal que as seguintes identidades sejam satisfeitas:

$$s' \circ \tau = \phi_0, \quad t' \circ \tau = \psi_0 \text{ e } m' \circ (\tau \circ s, \psi_1) = m' \circ (\phi_1, \tau \circ t),$$

onde $\mathcal{G} = (G_0, G_1, s, t, m, u, i)$ e $\mathcal{H} = (H_0, H_1, s', t', m', u', i')$.

A seguir vamos definir um tipo de equivalência entre grupoides de Lie a fim de evitarmos problemas tais como: mais de um grupoide orbifold dando

origem a mesma estrutura de orbifold.

Definição 3.3.3 (*Morfismo equivalência*): Um morfismo $\phi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ entre grupoides de Lie é chamado *equivalência fraca* se são satisfeitos:

- (i) $t \circ \text{pr}_1: H_1 \times_{s' \times \phi_0} G_0 \rightarrow H_0$ é uma submersão sobrejetiva e
- (ii) a aplicação $\gamma: G_1 \rightarrow (G_0 \times G_0) \times_{\phi_0 \times \phi_0} \times_{(s', t')} H_1$, definida por $\gamma(g) = (s(g), t(g), \phi_1(g))$ é um difeomorfismo.

Note que no item (ii) acima, γ está bem definida pois (ϕ_0, ϕ_1) é um morfismo entre grupoides.

Observação 3.3.4 : No item (i) da definição acima, como \mathcal{H} é um grupoide de Lie, então s' é uma submersão. Assim, pela Observação 3.1.6 o produto fibrado possui uma estrutura de variedade. Analogamente o produto fibrado de (ii) possui estrutura de variedade, já que (s', t') é submersão.

Definição 3.3.5 (*Equivalência de Morita*): Dizemos que \mathcal{G} e \mathcal{H} , dois grupoides de Lie, são *Morita equivalentes* se existe um grupoide de Lie \mathcal{K} e duas equivalências fracas ϕ e ψ :

$$\mathcal{G} \xleftarrow{\phi} \mathcal{K} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}.$$

Em (MOERDIJK; MRCUN, 2003, Capítulo 5) é mostrado que a definição acima define uma relação de equivalência nos grupoides.

A próxima seção finaliza este estudo sobre orbifold. Nela apresentaremos uma relação entre grupoides orbifolds efetivos e grupoides de atlas de orbifold.

3.4 BIJEÇÃO ENTRE GRUPOIDES ORBIFOLDS EFETIVOS E GRUPOIDES DE ATLAS DE ORBIFOLDS

Vamos mostrar a seguir, que dado um grupoide orbifold efetivo podemos definir uma estrutura de orbifold no espaço orbital deste grupoide. As seguintes demonstrações são baseadas em (TOMMASINI, 2012, Lema 4.6) e (AMENTA, 2013, Corolário 2.4.13).

Teorema 3.4.1 : Seja \mathcal{G} um grupoide orbifold efetivo com espaço orbital $|\mathcal{G}| =: X$ com a topologia quociente. Então em torno de cada ponto de X podemos definir cartas de orbifold em X de dimensão igual a $\dim(\mathcal{G})$.

Demonstração: Primeiramente como \mathcal{G} é um grupoide de Lie próprio, a aplicação (s, t) é próprio e uma submersão. Assim, temos que X é Hausdorff. Note que a projeção $\pi: G_0 \rightarrow X$ é aberta, logo X é segundo contável. Desta forma, X é um espaço topológico Hausdorff e segundo contável.

Vamos agora construir cartas de orbifold em X . Seja $\tilde{x} \in G_0$ e seja $\mathcal{G}_{\tilde{x}} = (s, t)^{-1}\{(\tilde{x}, \tilde{x})\}$, isto é, o conjunto de todas as setas que têm o ponto $\tilde{x} \in G_0$ como source e target. Como observado na Seção 3.2, $\mathcal{G}_{\tilde{x}}$ é compacto, pois (s, t) é próprio. Também, como s, t são difeomorfismos locais, os pontos de $\mathcal{G}_{\tilde{x}}$ são isolados. Logo $\mathcal{G}_{\tilde{x}} \subset G_1$ é um conjunto finito. Desta forma, para cada $g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}$ podemos definir N_g , uma vizinhança aberta (suficientemente pequena) de g em $\mathcal{G}_{\tilde{x}}$, tal que $s|_{N_g}$ e $t|_{N_g}$ sejam invertíveis. Então para cada $g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}$ podemos associar a aplicação diferenciável $\tilde{g} := t \circ (s|_{N_g})^{-1}: s(N_g) \rightarrow t(N_g)$. Uma vez que $\mathcal{G}_{\tilde{x}}$ é finito, podemos restringir as vizinhanças N_g e N_h dos pontos g e h neste conjunto, de forma que $N_g \cap N_h = \emptyset$ para todo $g \neq h$. Seja $U_{\tilde{x}} := \bigcap_{g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}} s(N_g)$. Temos que $U_{\tilde{x}}$ é uma vizinhança aberta de $\tilde{x} \in G_0$. Como (s, t) é uma aplicação própria e o conjunto $G_1 \setminus \bigcup_{g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}} N_g$ é fechado, temos que $(s, t)(G_1 \setminus \bigcup_{g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}} N_g) \subset G_0 \times G_0$ é um conjunto fechado e por construção não contém o ponto (\tilde{x}, \tilde{x}) . Note que $G_0 \times G_0$ é Hausdorff e segundo contável, já que é uma variedade diferenciável obtida pelo produto cartesiano de duas variedades. Desta forma, por meio dos abertos que formam a base da topologia de $G_0 \times G_0$, podemos definir uma vizinhança aberta $B_{\tilde{x}}$ de \tilde{x} em

$U_{\tilde{x}}$, tal que $(B_{\tilde{x}} \times B_{\tilde{x}}) \cap (s, t)(G_1 \setminus \bigcup_{g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}} N_g) = \emptyset$. Logo, dado $h \in G_1$ tal que $s(h), t(h) \in B_{\tilde{x}}$, existe único $g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}$ tal que $h \in N_g$. Agora, como a aplicação $\tilde{g} = t \circ (s|_{N_g})^{-1}$ é difeomorfismo e $B_{\tilde{x}} \subset U_{\tilde{x}} \subset s(N_g)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}$ o conjunto $\bigcap_{g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}} \tilde{g}(B_{\tilde{x}}) =: C_{\tilde{x}}$ é uma vizinhança aberta de \tilde{x} . Seja $h \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}$. Usando que $(\mathcal{G}_{\tilde{x}}, m)$ é grupo e que para quaisquer pontos $(h, g) \in G_1 \times_t G_1$ temos $\tilde{h} \circ \tilde{g} = m(\tilde{h}, \tilde{g})$, como em (TOMMASINI, 2012, Lema 2.17), podemos concluir que $\tilde{h}(C_{\tilde{x}}) = C_{\tilde{x}}$. Definimos a seguir o seguinte conjunto, $G_{\tilde{x}} := \{\tilde{g}: C_{\tilde{x}} \rightarrow C_{\tilde{x}}; g \in \mathcal{G}_{\tilde{x}}\}$. Com a composição de difeomorfismos, este conjunto é um grupo finito. Definimos agora, $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ como a componente conexa de $C_{\tilde{x}}$ que contém \tilde{x} . Então $G_{\tilde{x}}$ é um grupo finito que age em $\tilde{U}_{\tilde{x}}$. Como o grupoide \mathcal{G} é efetivo, a ação de $G_{\tilde{x}}$ em $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ é efetiva. Por fim a tripla $(\tilde{U}_{\tilde{x}}, G_{\tilde{x}}, \pi)$ é uma carta para o conjunto aberto $\pi(\tilde{U}_{\tilde{x}}) \subset X$, espaço topológico Hausdorff e segundo contável. ■

Veremos agora, que as cartas construídas no teorema anterior formam um atlas para o espaço orbital do grupoide orbifold efetivo.

Proposição 3.4.2 : Seja \mathcal{G} um grupoide orbifold efetivo. Então existe uma estrutura de orbifold em $X = |\mathcal{G}|$.

Demonstração: Sejam \mathcal{G} e X como na hipótese. Podemos aplicar a construção da demonstração do Teorema 3.4.1. Desta forma temos cartas $(\tilde{U}_{\tilde{x}}, G_{\tilde{x}}, \pi)$ para $\pi(\tilde{U}_{\tilde{x}}) \subset X$. Seja $\mathcal{A} = \{(\tilde{U}_{\tilde{x}}, G_{\tilde{x}}, \pi)\}_{\tilde{x} \in G_0}$. De fato esta coleção cobre o espaço topológico X . À fim de obtermos a estrutura de orbifold, precisamos verificar a compatibilidade entre as cartas de \mathcal{A} , nosso candidato a atlas. Suponha $(\tilde{U}_{\tilde{x}}, G_{\tilde{x}}, \pi)$ e $(\tilde{U}_{\tilde{y}}, G_{\tilde{y}}, \pi)$ duas cartas em \mathcal{A} tais que $z \in \pi(\tilde{U}_{\tilde{x}}) \cap \pi(\tilde{U}_{\tilde{y}})$. Seja $z' \in \pi^{-1}(z)$, logo existem duas setas $g: z' \rightarrow \tilde{x}$ e $h: z' \rightarrow \tilde{y}$. Podemos construir então uma nova carta $(\tilde{U}_{z'}, G_{z'}, \pi)$ como na demonstração do teorema acima. Sejam as vizinhanças abertas W_g de g e W_h de h tais que $s|_{W_g}$ e $t|_{W_g}$ são difeomorfismos na imagem, assim como feito na demonstração do teorema anterior, e tais que $s(W_g) = s(W_h) = \tilde{U}_{z'}$, $t(W_g) \subset \tilde{U}_{\tilde{x}}$ e $t(W_h) \subset \tilde{U}_{\tilde{y}}$, eventualmente diminuindo as vizinhanças W_g e W_h para que as relações possam ser satisfeitas. Podemos então definir as aplicações $\tilde{g}: \tilde{U}_{z'} \rightarrow \tilde{U}_{\tilde{x}}$ e $\tilde{h}: \tilde{U}_{z'} \rightarrow \tilde{U}_{\tilde{y}}$, por $\tilde{g} = t \circ (s|_{W_g})^{-1}$ e $\tilde{h} =$

$t \circ (s|_{W_h})^{-1}$. Desta forma temos as injeções $\tilde{g}: (\tilde{U}_{z'}, G_{z'}, \pi) \rightarrow (\tilde{U}_{\tilde{x}}, G_{\tilde{x}}, \pi)$ e $\tilde{h}: (\tilde{U}_{z'}, G_{z'}, \pi) \rightarrow (\tilde{U}_{\tilde{y}}, G_{\tilde{y}}, \pi)$. Portanto X possui uma estrutura de orbifold. ■

Definição 3.4.3 : Dado um grupoide orbifold efetivo \mathcal{G} , denotamos o atlas maximal em $|\mathcal{G}|$ dado pela estrutura definida na demonstração da Proposição 3.4.2 por $\text{At}[\mathcal{G}]$.

Finalizando este trabalho, vamos construir uma bijeção entre os grupoides orbifolds efetivos equivalentes e os grupoides de atlas de orbifolds Morita equivalentes. Os resultados técnicos que enunciaremos a seguir serão utilizados para demonstrar esta bijeção.

O primeiro resultado nos diz que dados dois atlas completos em espaços diferentes, então os grupoides construídos a partir destes atlas são Morita equivalentes. A seguir, vemos que dado um atlas no espaço orbital de grupoide orbifold efetivo, então este grupoide de atlas é Morita equivalente ao grupoide orbifold efetivo. Em seguida, vemos que se dois grupoides de atlas são Morita equivalentes, então os atlas a partir dos quais estes grupoides foram construídos são equivalentes. As demonstrações destes resultados podem ser conferidas em (TOMMASINI, 2012, Seção 4), respectivamente: Proposição 4.5, Lemas 4.9 e Proposição 4.12.

Proposição 3.4.4 : Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são dois atlas completos e equivalentes em espaços Hausdorff e segundo contáveis X e X' , respectivamente, então $X[\mathcal{A}]$ e $X'[\mathcal{B}]$ são Morita equivalentes.

Proposição 3.4.5 : Se \mathcal{G} é um grupoide orbifold efetivo e $X = |\mathcal{G}|$, então $X[\text{At}[\mathcal{G}]]$ é Morita equivalente a \mathcal{G}

Proposição 3.4.6 : Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são atlas completos em espaços Hausdorff e segundo contáveis X e X' , respectivamente, tais que $X[\mathcal{A}]$ e $X'[\mathcal{B}]$ são Morita equivalente, então \mathcal{A} e \mathcal{B} são equivalentes.

Agora definimos

$$F : \{\text{atlas completos de orbifold}\} \rightarrow \{\text{grupoides orbifold efetivos}\}$$

por $F(\mathcal{A}) = X[\mathcal{A}]$, em que X é espaço Hausdorff e segundo contável e \mathcal{A} é atlas completo de X .

Escrevemos $\mathcal{A} \sim_{\text{At}} \mathcal{B}$ se \mathcal{A} e \mathcal{B} são equivalentes segundo Definição 1.2.11 e $\mathcal{G} \sim_M \mathcal{H}$ se \mathcal{G} e \mathcal{H} são grupoides orbifolds efetivos Morita equivalentes.

No próximo e último resultado, demonstraremos uma bijeção entre atlas completos equivalentes e grupoides orbifolds efetivos que são Morita equivalentes.

Teorema 3.4.7 : F induz uma bijeção

$$\overline{F}: \{\text{atlas completos de orbifold}\} / \sim_{\text{At}} \rightarrow \{\text{grupoides orbifold efetivos}\} / \sim_M.$$

Demonstração: Devemos verificar que \overline{F} é uma aplicação bem definida, sobrejetiva e injetiva. Vamos justificar cada um destes itens.

- Bem definido: Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} dois atlas completos de orbifold em espaços Hausdorff e segundo contáveis X e X' , respectivamente, tais que $\mathcal{A} \sim_{\text{At}} \mathcal{B}$. Segue que $\overline{F}(\mathcal{A}) = X[\mathcal{A}]$ e $\overline{F}(\mathcal{B}) = X'[\mathcal{B}]$. Pela Proposição 3.4.4, $X[\mathcal{A}] \sim_M X'[\mathcal{B}]$. Desta forma, $\overline{F}(\mathcal{A}) = \overline{F}(\mathcal{B})$.
- Sobrejetivo: Seja \mathcal{G} um grupoide orbifold efetivo. Na construção do Teorema 3.4.2 descrevemos um atlas completo para $X = |\mathcal{G}|$. Considere $\text{At}[\mathcal{G}]$ atlas maximal em $|\mathcal{G}|$. Pela Proposição 3.4.5 temos que o grupoide de atlas $X[\text{At}[\mathcal{G}]]$ é Morita equivalente ao grupoide \mathcal{G} . Logo \overline{F} é sobrejetor.
- Injetivo: Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} atlas completos em espaços Hausdorff e segundo contáveis X e X' , respectivamente, tais que $\overline{F}(\mathcal{A}) = X[\mathcal{A}]$ e $\overline{F}(\mathcal{B}) = X'[\mathcal{B}]$ são grupoides Morita equivalentes. Então pela Proposição 3.4.6, temos que $\mathcal{A} \sim_{\text{At}} \mathcal{B}$. Assim fica verificado que \overline{F} é injetor.

Portanto \overline{F} é uma bijeção. ■

Provada esta bijeção finalizamos nosso trabalho.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi o estudo das diferentes formas de se caracterizar orbifolds, desde sua abordagem em analogia às variedades até aquela puramente algébrica e abstrata. Dedicamos cada capítulo para uma apresentação distinta e o arcabouço matemático necessário para cada uma delas.

Num primeiro momento aprendemos como um orbifold é definido por cartas e atlas num comportamento local análogo ao das variedades. Depois percebemos que podemos 'criar' orbifolds através de quocientes de grupos de Lie. Por fim aprendemos estruturas chamadas grupoides, que de certa forma representam espaços diferenciáveis pelo viés puramente algébrico e abstrato, e vimos que orbifolds aparecem quase que naturalmente nesta nova abordagem. Dentre os muitos caminhos que podemos seguir neste estudo um que desperta interesse é pelos *stacks*. Esta é uma ferramenta de geometria algébrica que busca lidar com espaços singulares por uma visão 'mais geral' de espaços diferenciáveis. Neste estudo orbifolds aparecem como um tipo especial de *stacks*. Deixamos indicado o artigo de Eugene Lerman, (LERMAN, 2010), que faz um apanhado dos resultados apresentados neste trabalho e estende para *stacks*.

Outro caminho é o estudo da bicategoria dos orbifolds pelo viés da geometria diferencial, isto é, sem nenhuma referência a grupoides de Lie ou *stacks* diferenciáveis, usando somente atlas de orbifolds, *liftings* e mudanças de coordenadas. Este estudo vem sendo desenvolvido por Matteo Tommasini em uma série de papers. Seus artigos e maiores informações estão disponíveis em seu site pessoal: matteotommasini.altervista.org.

Finalizamos com um agradecimento ao leitor pelo tempo dedicado e a atenção despendida para chegar ao fim deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ADEM, A.; J., L.; RUAN, Y. **Orbifolds and stringy topology**. : Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xii+149 p. (Cambridge Tracts in Mathematics, v. 171). ISBN 978-0-521-87004-7; 0-521-87004-6.

ALEXANDRINO, M. M.; BETTIOL, R. G. Introduction to lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations. **ArXiv e-prints**, jan. 2010. ArXiv:0901.2374v3.

AMENTA, A. The Geometry of Orbifolds via Lie Groupoids. **ArXiv e-prints**, set. 2013. Eprint arXiv:1309.6367.

BORZELLINO, J. E.; BRUNSDEN, V. A manifold structure for the group of orbifold diffeomorphisms of a smooth orbifold. **Jornal of Lie Theory**, v. 18, n. 4, p. 979–1007, 2008.

BRAKKEE, E. **Conway's Theorem**. 2013. B.S. Thesis. Disponível em: <<http://dare.uva.nl/cgi/arno/show.cgi?fid=499195>>.

CARTAN, H. Quotient d'une variété analytique par un groupe discret d'automorphismes. n. 12, p. 1–13, 1953–54. Disponível em: <<http://www.numdam.org>>.

GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. **Differential Topology**. : American Mathematical Soc., 1974. (AMS Chelsea Publishing Series). ISBN 9780821869550.

LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. Second edition. : Springer, New York, 2013. xvi+708 p. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). ISBN 978-1-4419-9981-8.

LERMAN, E. Orbifolds as stacks? **Enseign. Math. (2)**, v. 56, n. 3–4, p. 315–363, 2010. ISSN 0013-8584. ArXiv:0901.2374v3.

MOERDIJK, I.; MRCUN, J. **Introduction to foliations and Lie groupoids**. : Cambridge University Press, Cambridge, 2003. x+173 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 91). ISBN 0-521-83197-0.

MOERDIJK, I.; PRONK, D. A. Orbifolds, sheaves and groupoids. **K-Theory**, v. 12, n. 1, p. 3–21, 1997. ISSN 0920-3036. Doi: 10.1023/A:1007767628271.

SATAKE, I. On a generalization of the notion of manifold. **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.**, v. 42, p. 359–363, 1956. ISSN 0027-8424.

SATAKE, I. The Gauss-Bonnet theorem for V -manifolds. **J. Math. Soc. Japan**, v. 9, p. 464–492, 1957. ISSN 0025-5645.

THURSTON, W. P. **The geometry and topology of three-manifolds**. 2002. Lecture notes. Disponível em:
<<http://library.msri.org/books/gt3m/PDF/13.pdf>>.

TOMMASINI, M. Orbifolds and groupoids. **Topology Appl.**, v. 159, p. 756–786, 2012. Doi: 10.1016/j.topol.2011.11.043.

WEILANDT, M. **Isospectral orbifolds with different isotropy orders**. 2007. Diplom thesis. urn:nbn:de:kobv:11-100175649.