

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO SOCIOECONÔMICO**

Pedro Baptista dos Santos

**CRESCIMENTO ECONÔMICO E CONTROLE DE
EMISSÕES DE CO_2 :
UMA ABORDAGEM UTILIZANDO SISTEMAS *FUZZY*
TAKAGI-SUGENO**

Florianópolis

2015

Pedro Baptista dos Santos

**CRESCIMENTO ECONÔMICO E CONTROLE DE
EMISSÕES DE CO_2 : UMA ABORDAGEM UTILIZANDO
SISTEMAS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO**

Tese submetida à Programa de Pós-
Graduação em Economia para a ob-
tenção do Grau de Mestre em Econo-
mia.

Orientador: Prof. Milton Biage, Dr

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Santos, Pedro Baptista dos
 rescimento econômico e controle de emissões de CO2 : uma
abordagem utilizando sistemas fuzzy Takagi-Sugeno / Pedro
Baptista dos Santos ; orientador, Milton Biage -
Florianópolis, SC, 2015.
 169 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Sócio-Econômico. Programa de Pós-Graduação em
Economia.

Inclui referências

1. Economia. 2. Emissões de CO2. 3. Crescimento
econômico. 4. Trajetória de controle robusto. 5.
Sistemafuzzy Takagi-Sugeno. I. Biage, Milton. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Economia. III. Título.

Pedro Baptista dos Santos

**CRESCIMENTO ECONÔMICO E CONTROLE DE
EMISSÕES DE CO_2 : UMA ABORDAGEM UTILIZANDO
SISTEMAS *FUZZY* TAKAGI-SUGENO**

Esta Tese foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Economia”, e aprovada em sua forma final pela Programa de Pós-Graduação em Economia.

Florianópolis, 29 de Maio 2015.

Prof. Roberto Meurer, Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Milton Biage, Dr
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Marco A. Leonel Caetano, Dr
Insper - Instituto de Ensino e Pesquisa

Prof. Fernando Seabra, Dr
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Guilherme Valle Moura, Dr
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente aos meus pais Carlos e Isabel pelos ensinamentos, carinho, confiança e as oportunidades a que me foram dispensadas para que fosse possível alcançar os meus objetivos.

A minha vó Yara, por todo amor e ajuda disponibilizados.

A Jannis pela paciência, compreensão e pelo amor dispensado ao longo de todos esses anos.

Ao meu orientador, Prof. Milton Biage pelo empenho, dedicação e amizade.

A todo o corpo docente do programa de pós-graduação em Economia, da Universidade Federal de Santa Catarina, que me ajudaram a trilhar um caminho de aprendizado.

A todos os alunos da Pós-Graduação em Economia (Turma de 2013). Vocês foram amigos incríveis nesta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio através da minha bolsa de pesquisa.

RESUMO

Para que as emissões de CO_2 possam ser reduzidas sem limitar o crescimento econômico, investimentos substanciais devem ser aportados no desenvolvimento de tecnologias limpas e expansão da área florestal. As contribuições deste trabalho podem ser sintetizadas em: (1) Baseado no trabalho de Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008) é proposto um modelo não-linear estocástico que descreve a dinâmica das emissões de CO_2 , área florestal e com elementos que procuram fornecer um entendimento da natureza do crescimento econômico, e (2) apresentar um método para gerenciar de forma efetiva os recursos disponíveis aplicando a metodologia proposta por Chen e Lin (2011), que aplica um modelo robusto de trajetória de controle que força a trajetória do sistema proposto para um determinado nível desejado, por meio de um jogo estocástico *fuzzy* Takagi-Sugeno. Assim, a pesquisa desenvolvida nesse estudo teve como objetivo analisar como os controles especificados no sistema elaborado devem se comportar para que a economia entre em uma trajetória de diminuição das emissões de CO_2 , aumento da área florestal e crescimento econômico no período 2015-2025. As conclusões mostram que o controle referente ao reflorestamento tem uma componente média de investimento da ordem de 140 milhões de R\$, com preço de 2000. O comportamento do esforço de controle que visa o desenvolvimento de tecnologias limpas tem um grande aumento no estágio inicial da simulação e deve manter um investimento constante de aproximadamente 11 bilhões de R\$, com preço de 2000. Em relação aos controles para o crescimento econômico, o primeiro, a parcela do PIB que é investida em estoque de capital salta para 1000 bilhões de R\$, a preço de 2000, no estágio inicial da simulação e depois este valor pode ser decrescido ao nível de 900 bilhões de R\$, a preço de 2000. O segundo aborda os efeitos de interação das frações agregadas da mão-de-obra e do capital a serem utilizadas na produção de mercadorias. Visando atender a demanda de manutenção da taxa de crescimento do PIB, este controle deve evoluir de 0,8856, em 2015, para 2,31 em 2016. Depois este fator de controle diminui o seu valor para 0,79. Conclui-se que para este controle atingir este comportamento, mudanças positivas devem ser realizadas nos parâmetros referentes as elasticidades do produto em relação ao estoque de capital, estoque de trabalho e capital humano. **Palavras-chave:** Emissões de CO_2 . Crescimento econômico. Trajetória de controle Robusto. Sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno

ABSTRACT

To ensure that emissions of CO_2 can be reduced without limiting economic growth, substantial investments should be invested in developing clean technologies and expanding forest area. The contributions of this work can be summarized in: (1) Based on work by Caetano, Gherardi and Yoneyama (2008) is proposed a nonlinear stochastic model describing the dynamics of CO_2 emissions, forestry and elements that trying to supply an understanding the nature of economic growth, and (2) present a method to effectively manage available resources by applying the methodology proposed by Chen and Lin (2011), which applies a robust model control trajectory that forces the path of the proposed system to a particular desired level through a *fuzzy* stochastic game Takagi-Sugeno. Thus, the research developed in this study aimed to analyze how the controls specified in the system designed should behave for the economy to enter a trajectory of reduction of CO_2 emissions, increased forest area and economic growth in the period 2015-2025. The conclusions show that the control related to the reforestation component has an average investment of the order of R\$ 140 million, with prices of 2000. The control effort behavior aiming to develop clean technologies have greatly increased in the initial stage of simulation and must maintain a constant investment of approximately R\$ 11 billion, with prices of 2000. Regarding the controls for economic growth, the first, the share of GDP that is invested in capital stock jumps to R\$ 1000 billion, prices of 2000, at the initial stage of the simulation, then this value can be decreased to level of R\$ 900 billion, prices of 2000. The second addresses the interaction effects of aggregate fractions of hand labor and capital to be used in the production of goods. To meet the maintenance demands of the GDP growth rate, this control should move from 0.8856 in 2015 to 2.31 in 2016. After this control factor diminishes its value to 0.79. It was concluded that for this control achieve this behavior, positive changes should be made in the parameters for the product elasticities with respect to capital stock, inventory work and human capital.

Keywords: CO_2 emission. Economic growth. Robust tracking control. *fuzzy* system Takagi-Sugeno.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Série histórica das emissões de CO_2 no Brasil em milhares de toneladas de carbono.....	45
Figura 2	Emissões brasileiras de gases do efeito estufa no período 1990-2010.....	46
Figura 3	Produção de gasolina e álcool hidratado no Brasil em 1000 m^3	52
Figura 4	Distribuição das unidades de conservação no território brasileiro (2010).....	54
Figura 5	Investimento por hectare (em R\$ de 2010) em unidades de conservação em diferentes países.....	55
Figura 6	Número de hectares por empregados nas unidades de conservação em diferentes países.....	55
Figura 7	Taxas de crescimento do PIB de economias selecionadas, 1901-2001.....	59
Figura 8	Dias que pertencem ao final de semana com valoração binária e multivalorada com gráfico em forma de histograma.....	80
Figura 9	Dias que pertencem ao final de semana com valoração binária e multivalorada com gráfico em forma contínua.....	81
Figura 10	Funções de pertinência clássicas.....	82
Figura 11	Estrutura básica de um sistema <i>fuzzy</i>	84
Figura 12	Diagrama esquemático da etapa de inferência.....	86
Figura 13	Simulação e comparação entre o modelo e os dados reais.....	100
Figura 14	Simulação e comparação entre o modelo e os dados reais.....	101
Figura 15	Simulação do modelo estocástico.....	103
Figura 16	Trajetória de referência desejada.....	107
Figura 17	Funções de pertinência para os estados do sistema.....	108
Figura 18	Modelo determinístico e modelo fuzzy.....	111
Figura 19	Trajetória de controle robusto minimax.....	114
Figura 20	Volumes financeiros a serem empregados em reflorestamento, inovações tecnológicas e capital físico.....	116
Figura 21	Exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_k)(t)$ de $u_3(t)$	120
Figura 22	Exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_l)(t)$ de $u_3(t)$	121

Figura 23 Trajetória de performance do sistema proposto em relação ao modelo de referência desejado por meio de uma trajetória de controle robusta minimax, sob a influência de flutuações paramétricas e distúrbios ambientais 127

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Emissões brasileiras de gases do efeito estufa, Milhões de ton. CO_2eq , 1990-2010	47
Tabela 2	Condições iniciais para solução do modelo determinístico	99
Tabela 3	Parâmetros do modelo ajustados ao Brasil	102
Tabela 4	Taxas de crescimento modelo de referência.....	106

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAK	Curva Ambiental de Kuznets	21
PIB	Produto Interno Bruto	22
T-S	Takagi-Sugeno	23
LMI	Linear Matrix Inequalities	23
CFC	compostos de clorofluorcarbono	25
USA	Estados Unidos	43
PNMC	Política Nacional sobre Mudança do Clima	44
CDIAC	<i>Carbon Dioxide Information Analysis Center</i>	44
MCTI	Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação	44
GWP	<i>Global Warming Potential</i>	44
PNPB	Programa Nacional de Produção e Uso de Biodiesel	49
SNUC	Sistema Nacional de Áreas de Conservação	53
MMA	Ministério do Meio Ambiente	53
REDD	Reduções das Emissões por Desmatamento e Degradação Florestal	56
P&D	Pesquisa e Desenvolvimento	60

LISTA DE SÍMBOLOS

CO_2	Dióxido de carbono.....	21
H_2O	Vapor de água.....	25
CH_4	Metano.....	25
O_3	Ozônio.....	25
N_2O	óxido nitroso.....	25
CO_2eq	medição de emissões equivalentes de dióxido de carbono ...	44
HFC	hidrofluorcarbonetos.....	45
SF_6	Hexafluoreto de Enxofre.....	45
MW	Megawatt.....	48
MWh	Megawatt-hora.....	48

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	21
2 REVISÃO DE LITERATURA: CONTEXTUALIZAÇÃO DA INSUSTENTABILIDADE AMBIENTAL MODERNA – O CASO DO AQUECIMENTO GLOBAL .	25
2.1 O EFEITO ESTUFA	25
2.1.1 Efeitos negativos do efeito estufa	26
2.2 A RELAÇÃO DA ECONOMIA COM OS PROBLEMAS AMBIENTAIS	27
2.2.1 Questões ambientais e a teoria do crescimento econômico	36
2.3 TRABALHOS RELACIONADOS COM O PROBLEMA DE PESQUISA PROPOSTO	37
2.4 PRINCIPAIS PAÍSES RESPONSÁVEIS PELAS EMISSÕES DE CO_2	43
2.5 A SITUAÇÃO DO BRASIL	44
2.5.1 Energia eólica	47
2.5.2 Biocombustíveis	49
2.5.3 Áreas de proteção	53
3 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO	57
3.1 O CRESCIMENTO ECONÔMICO	57
3.1.1 Construção do modelo de crescimento econômico ..	59
3.2 MODELAGEM DAS EMISSÕES DE CO_2	64
3.3 EQUAÇÃO PARA ÁREA FLORESTAL	65
3.4 SÍNTESE DO MODELO	65
4 METODOLOGIA	67
4.1 SOLUÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA	68
4.2 MODELO ESTOCÁSTICO COM FLUTUAÇÕES PARAMÉTRICAS E DISTÚRBIOS EXTERNOS	69
4.3 MODELO DE REFERÊNCIA	71
4.4 MODELO ROBUSTO DE CONTROLE DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA	72
4.5 CONTROLE DE TRAJETÓRIA ROBUSTA MINIMAX VIA MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO <i>FUZZY</i>	77
4.5.1 Fundamentos <i>fuzzy</i>	77
4.5.1.1 Conjuntos <i>fuzzy</i>	78
4.5.1.2 Sistemas <i>fuzzy</i>	83
4.5.2 Modelo <i>fuzzy</i> interpolativo Takagi-Sugeno	87

4.5.3	Jogo estocástico <i>fuzzy</i>	90
4.6	O PAPEL DAS LMI'S NA TRAJETÓRIA DE CONTROLE MINIMAX	91
4.7	SÍNTESE DA METODOLOGIA PROPOSTA	94
5	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	97
5.1	ESTUDO DE CASO E BASE DE DADOS	97
5.2	CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS E RESOLUÇÃO NU- MÉRICA DO SISTEMA DINÂMICO	98
5.3	SOLUÇÃO MODELO ESTOCÁSTICO	101
5.4	SOLUÇÃO MODELO DE REFERÊNCIA	104
5.5	MODELO <i>FUZZY</i>	107
5.6	TRAJETÓRIA DE CONTROLE ROBUSTA MINIMAX....	110
5.7	ANÁLISE DOS RESULTADOS	114
6	CONCLUSÃO	129
	REFERÊNCIAS	133
	APÊNDICE A – Complemento de Schur	143
	APÊNDICE B – Funções de pertinência smf e zmf	147
	APÊNDICE C – Pseudo inversa de uma matriz	151
	APÊNDICE D – Parâmetros do sistema <i>fuzzy</i> Takagi- Sugeno	155
	ANEXO A – Prova do Teorema 1	161
	ANEXO B – Prova do Teorema 2	167

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, o mundo tem direcionado uma atenção crescente às questões ambientais, tais como as emissões de poluentes, conservação das reservas de água e preservação das áreas cobertas por florestas. Em relação às emissões de poluentes, conforme a posição do Banco Mundial¹, se as emissões de CO_2 se mantiverem constantes, a Terra pode estar comprometida a um aumento da temperatura média e aumento do nível dos oceanos. Retardar tais alterações climáticas exige superação da inércia nos campos político e tecnológico.

Apesar do aumento na consciência ambiental, o sucesso econômico global depende fortemente da produção industrial. Outro fator que deve ser levado em conta é que as pessoas tem ganhado uma qualidade de vida melhor com o aumento da produção industrial. No entanto, isto foi alcançado por meio de um aumento na poluição e perda dos recursos naturais. A economia mundial precisa de quantidades de energia cada vez maiores para manter o crescimento econômico, os níveis de vida e reduzir a pobreza. Mas, as tendências atuais no uso de energia não são sustentáveis. Como a população mundial cresce e as economias se tornam mais industrializadas, as fontes de energia não renováveis se tornarão escassas e mais caras. Assim, as emissões de dióxido de carbono, a partir do uso de combustíveis fósseis, continuarão a concentrar-se na atmosfera, acelerando o aquecimento global.

Apesar desses problemas, é comum encontrar defensores da atual tendência de crescimento apoiado pela extração de recursos naturais ou produtos de emissões intensas, argumentando que as perdas ambientais são um custo necessário para o desenvolvimento econômico. Esta hipótese, geralmente chamada de Curva Ambiental de Kuznets (CAK), justificaria que, em certos estágios de desenvolvimento, o sacrifício dos recursos naturais é um preço inevitável para melhorar as condições materiais de vida.

Outra vertente argumenta que a economia não alcança uma trajetória de desenvolvimento “verde”, onde a inclusão social e a conservação do meio ambiente agem como engrenagens do sistema e não como obstáculos para melhorar o nível de qualidade de vida da população, de forma natural ou espontânea. Para que a economia possa ultrapassar o ponto hipotético onde a qualidade ambiental aumenta com o desenvolvimento econômico são necessárias políticas públicas ou privadas específicas que

¹Disponível em: <<http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/wdi09introch3.pdf>> Acesso em: 15 ago. 2014.

induzam a economia a trilhar este caminho. Assim, para que possam ser reduzidas as emissões que aumentam o efeito estufa, especialmente as emissões de CO_2 , sem limitar o crescimento econômico, investimentos substanciais devem ser realizados de forma que consigam influenciar o desenvolvimento de tecnologias limpas bem como a expansão da área florestal.

O presente trabalho seguirá a segunda abordagem. Visando capturar este pensamento de que uma economia só entra em uma trajetória de menor impacto ambiental se forem realizados aportes em políticas públicas e privadas, métodos matemáticos tem sido propostos para ajudar as pessoas na tomada de decisões. Desta forma, será utilizado um sistema com equações diferenciais estocásticas baseadas no trabalho de Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008), porém este sistema será expandido com elementos que procuram fornecer um entendimento da natureza do crescimento econômico. Este modelo lida com parâmetros que representam a concentração de dióxido de carbono, que neste estudo será a variável que representa a degradação ambiental, área florestal, PIB e estoque de capital. Este sistema também contém controles que representam a ação de políticas na influencia do desenvolvimento de tecnologias limpas, aumento da área florestal e crescimento econômico. Em consonância com a análise apresentada, a pesquisa desenvolvida nesse estudo teve como objetivo analisar como os controles especificados no sistema devem se comportar para que a economia entre em uma trajetória de diminuição das emissões de CO_2 , aumento da área florestal e crescimento econômico.

Para alcançar o objetivo proposto, o trabalho seguirá a metodologia desenvolvida por Chen e Lin (2011). Nesta metodologia, primeiramente os parâmetros do modelo proposto são ajustados utilizando dados reais. Então, um modelo de referência é desenvolvido para gerar a dinâmica desejada do sistema de emissões de CO_2 . Finalmente, um modelo robusto de referência de trajetória de controle é proposto para gerenciar os recursos disponíveis, assim o sistema estocástico pode seguir a trajetória desejada do modelo de referência, apesar das flutuações paramétricas e distúrbios externos.

Do ponto de vista da teoria de jogos dinâmicos, as flutuações paramétricas, distúrbios externos e a incerteza nas condições iniciais são considerados um *player* que maximiza a trajetória de erro, enquanto que os controles do gerenciamento de recursos são considerados outro jogador que minimiza a trajetória de erro. Este problema de jogo estocástico pode ser equivalente a um problema de trajeto robusto minimax, para alcançar uma trajetória de referência pré-estabelecida,

apesar do pior caso dos efeitos gerados pela flutuações paramétricas, distúrbios externos e incerteza nas condições iniciais.

Para resolver o jogo minimax citado acima, é necessário solucionar uma inequação diferencial parcial. Uma maneira eficiente de encontrar está solução, segundo Chen e Lin (2011), é a formulação de um modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S). Este modelo interpola diversos sistemas estocásticos não-lineares em diferentes pontos de operação, para aproximar a dinâmica do sistema de emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico. Com a ajuda deste método de aproximação *fuzzy*, o jogo estocástico pode ser resolvido via um jogo estocástico *fuzzy* utilizando a técnica de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI - do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

O Brasil é o estudo de caso neste trabalho. É interessante adotar este país para este estudo, pois ele foi um dos poucos que instituiu uma política nacional de redução das emissões de gases do efeito estufa por meio da Lei no 12.187/2009. Além disso, embora o Brasil conte com uma das matrizes energéticas menos intensivas em emissões de carbono do mundo, devido a grande utilização da energia hidrelétrica, ele possui grande potencial de expansão de energia eólica e tem implementado programas que visam a utilização de biodiesel. No entanto, ele ainda é um país cuja economia é dependente da extração de matérias primas e produtos que são intensivos em recursos naturais, bem como tem o seu melhor desempenho em indústrias relacionadas com maior potencial de poluição.

Ou seja, é necessário elaborar estratégias de crescimento econômico que proporcionem o incremento de empregos qualificados e tecnologias que possam evitar a dependência do país em um crescimento poluidor e prejudicial ao meio ambiente. Isto é, pretende-se que sua indústria consiga desenvolver novos produtos de última geração compatíveis com a ideia de economia de baixo impacto ambiental, tornando-a desenvolvida e competitiva perante outros países. Bem como, também, ter disponíveis mais áreas florestais, que fornecem benefícios importantes para a sobrevivência humana mas que não são valorados pelo mercado.

Sendo assim, este estudo foi realizado com o intuito de aplicar conceitos de modelagem matemática como forma de ampliar o conhecimento acadêmico com relação a processos que demandem a utilização da técnica de controle robusto, aplicando tais teorias ao problema do aquecimento global. Além disso, foram aplicados os conceitos e métodos de programação através do ambiente de programação Matlab, aliando a isso problemas que contêm dados reais. Com um ajuste de parâmetros aos dados reais, foi encontrado um modelo que se aproximou o

máximo possível da realidade. Dessa maneira, foram simulados cenários compatíveis com dados reais, que facilitaram a previsão dos valores das variáveis em questão.

O trabalho está dividido em 6 capítulos. O primeiro refere-se a presente introdução. O segundo capítulo faz uma revisão de literatura do tema abordando, desde o que é o efeito estufa e suas consequências, passando pela relação da ciência econômica com as questões ambientais e finalizando com a situação do Brasil. O capítulo 3 trata sobre a formulação do modelo dinâmico utilizado nesta dissertação. O quarto capítulo detalha a metodologia utilizada para atingir o objetivo proposto. Já o quinto capítulo, traz os resultados obtidos na simulação computacional e discute os resultados. Por fim, o capítulo 6 descreve as conclusões extraídas.

2 REVISÃO DE LITERATURA: CONTEXTUALIZAÇÃO DA INSUSTENTABILIDADE AMBIENTAL MODERNA – O CASO DO AQUECIMENTO GLOBAL

O aquecimento global tem sido um dos problemas ambientais que mais tem preocupado a humanidade na história moderna. O aumento da concentração de dióxido de carbono e outros gases que causam efeito estufa, oriundos do aumento nas atividades produtivas das economias mundiais e uso de tecnologias produtivas inadequadas faz com que os pesquisadores debatam e desenvolvam estudos sobre os impactos desses gases no aquecimento global, e busquem delinear políticas econômicas que possibilitem controlar as suas emissões e, em consequência, aliviar o aquecimento.

2.1 O EFEITO ESTUFA

Para Molion (2008a), diversos fatores podem influenciar o sistema climático, dentre estes, se destacam as radiações de ondas longas (radiações infravermelha) que se refletem e são absorvidas pelos os chamados gases de efeito estufa. Conforme Kiehl e Trenberth (1997), os principais gases que contribuem para o efeito estufa são: vapor de água (H_2O), com 36-70%; dióxido de carbono (CO_2), com 9-26%; metano (CH_4), com 4-9%; e o ozônio (O_3), com 3-7%. Contudo, o principal contribuinte não gás para o efeito estufa na Terra são as nuvens, que também absorvem e emitem radiação infravermelha, tendo efeitos importantes sobre as propriedades da atmosfera. O óxido nitroso (N_2O), o ozônio (O_3) e os compostos de clorofluorcarbono (CFC) também são responsáveis pela absorção de radiação de ondas infravermelha, mas as suas influências são bem menores, devido aos seus baixos níveis de concentração na atmosfera, se comparado com os níveis de concentração dos demais (BIAGE, 2013).

A importância destes gases absorvedores de ondas longas é que a sua presença na atmosfera é responsável pela manutenção da temperatura do ar próximo a superfície terrestre de aproximadamente $15^\circ C$, em média. Na inexistência desses gases, a temperatura média da superfície global estaria aproximadamente em $-18^\circ C$, valor que inviabilizaria a existência da vida na Terra como se a conhece (MOLION, 2008b). O mecanismo que produz esta diferença de temperaturas é denominado de

efeito estufa, devido aos gases absorvedores de ondas longas (irradiação infravermelha) presentes na atmosfera terrestre. O efeito estufa retém o calor na atmosfera terrestre, reduzindo o fluxo de ar e isolando o ar quente, de modo que o calor não seja conduzido pelo efeito de convecção térmica para regiões distantes da superfície terrestre. Esse aprisionamento da radiação térmica de ondas longas conduz a um equilíbrio de temperatura mais elevada do que se a atmosfera apresentasse ausência do efeito estufa.

O fenômeno do aquecimento global devido ao impedimento da saída de radiação térmica, ou seja o efeito estufa, foi percebido desde o século XIX. Primeiro, por Fourier (1827), em um experimento em que comparou o aquecimento da temperatura global com o aquecimento provocado em uma estufa de plantas expostas à luz solar. Três décadas depois, Tyndall (1859) provou que gases como o vapor d'água, o CO_2 e o CH_4 absorviam a radiação solar infravermelha e que o vapor d'água e o CO_2 eram os principais responsáveis por essa retenção do calor. Arrhenius (1896) publicou um estudo que viria a introduzir a teoria do efeito-estufa. Nesse estudo, foi verificado que o aumento dos níveis de gases de CO_2 emitidos na atmosfera levaria ao aumento de temperatura da superfície terrestre. Por outro lado, no século XX, o físico Wood (1909) considerou ser o CO_2 o principal gás responsável pelo efeito estufa, indicando-o como o provável responsável pelo fato do ar quente da superfície terrestre não se misturar a outras camadas da atmosfera. Callendar (1938) enfatizou que o aumento da temperatura da superfície terrestre era, em maior parte, em decorrência da emissão de toneladas de dióxido de carbono para a atmosfera, por meio da queima de combustíveis fósseis nas termelétricas.

Portanto, a hipótese referente ao efeito-estufa diz que o aumento da concentração na atmosfera de gases refletores de ondas longas (que absorvem as radiações infravermelhas) provoca o aquecimento global. Assim, tendo em vista que a emissão de CO_2 para a atmosfera encontra-se entre os principais absorvedores de ondas longas, consideraremos nesse estudo a emissão de CO_2 como a variável *proxy* para o efeito estufa e conseqüentemente a variável de deterioração ambiental à ser estudada.

2.1.1 Efeitos negativos do efeito estufa

Na literatura disponível existe um consenso de que se as emissões de CO_2 continuarem aumentando ou até mesmo se mantiverem cons-

tantes diversos efeitos negativos podem ocorrer. Estes efeitos podem atingir os seres humanos de forma direta e indireta.

Os efeitos indiretos são aqueles que tem o seu impacto alterando o meio ambiente. Por exemplo, de acordo com Gore (2006), o aumento das emissões de CO_2 pode gerar aquecimento global, que por consequência resulta em inundações, secas e até mesmo outras externalidades como o aumento do número de furacões e derretimento das calotas polares. Além disso, o aquecimento de regiões quentes pode acelerar ainda mais a desertificação do local. Estas consequências acabariam invariavelmente impactando a qualidade de vida dos seres humanos, por isso estes efeitos são chamados de indiretos.

Em relação aos efeitos diretos nos seres humanos do aumento das emissões de CO_2 , sem a proteção da camada de ozônio, principal prejudicada pela emissão de gases nocivos, os índices de incidência de câncer de pele na população mundial ficam cada vez maiores. De acordo com o *National Cancer Institute*¹, de 1975 até 2006, houve um aumento na incidência de câncer de pele de 167,93% nos Estados Unidos (FORBES, 2010).

Conforme a posição do Banco Mundial², se nenhuma medida for tomada para evitar a emissão de gases de efeito estufa, a temperatura do planeta pode aumentar até 6 °C até o final de século. Warrick e Farmer (1990), também realizaram um estudo discutindo os efeitos da emissão de gases de efeito estufa com relação à temperatura do planeta e sobre o nível de água dos oceanos. Segundo estes autores, a previsão para 2030 é de que a o planeta terá sua temperatura elevada cerca de 1 °C a 2 °C, em comparação aos níveis de 1990, o que se mostra semelhante às estatísticas do Banco Mundial. Além disso, chegaram à conclusão de que os níveis dos oceanos subiriam de 17 a 26 centímetros em 2030, em comparação ao ano do estudo.

2.2 A RELAÇÃO DA ECONOMIA COM OS PROBLEMAS AMBIENTAIS

Até os anos 70, a ciência econômica não demonstrava tanto interesse em explorar sua relação com o meio ambiente e os recursos naturais. Os economistas podiam interessar-se pelas regras que governam a otimização econômica e pelas condições de crescimento da

¹Disponível em: <http://seer.cancer.gov/csr/1975\2006/browse_csr.php?section=16&page=sect_16_table.04.html> Acesso em: 12 ago. 2014.

²Disponível em: <<http://siteresources.worldbank.org/DATASTATISTICS/Resources/wdi09introch3.pdf>> Acesso em: 15 ago. 2014.

economia, mas, quase sempre, ignoravam o modo como a natureza assegurava espontaneamente a sua reprodução.

Esta desconexão da economia com o meio ambiente ocorria, pois considerava-se que a economia e a natureza eram dois universos distintos, possuindo cada um a sua lógica e as suas condições de reprodução. A maior justificativa para isto é que as consequências da atividade humana e, em particular, da atividade econômica não eram fortes o suficiente para colocar em causa as regulações que governam a reprodução da biosfera (FAUCHEUX; NOËL, 1995).

No entanto, depois desta época a ciência econômica começou a dar mais importância para a agenda ambiental. Porém, este interesse não foi criado do nada. No momento em que as consequências da atividade humana e, particularmente, da atividade econômica se constituíam um risco para o esgotamento dos recursos naturais. Com o agravamento dos danos sofridos pelo meio ambiente emergiu o interesse da ciência econômica pelos recursos naturais. Segundo Bartelmus (2008), os acontecimentos de destruições e catástrofes ambientais demonstram o custo da ingenuidade humana na exploração dos recursos naturais, que associado às constatações do dilema ambiental, revelou que atividades econômicas podem ser tanto a causa do problema como parte da solução. Deste modo, a biosfera já não pode ser pensada como sendo independente da economia, e vice-versa (FAUCHEUX; NOËL, 1995).

Para Faucheux e Noël (1995), depois da ocorrência de poluições locais e regionais como, por exemplo, de água, ar, solo e das poluições globais, tais como diminuição da camada de ozônio (ou aumento do efeito estufa), é tomada uma consciência de que as interações entre economia e meio ambiente devem ser geridas de forma a responder às necessidades atuais, sem sacrificar a satisfação das gerações futuras. Assim, nasce a noção de desenvolvimento sustentável. A partir disso, foram realizadas ações internacionais que produziram declarações, relatórios, planos de ação e convenções.

Mas, como a ciência econômica tem abordado a questão do meio ambiente? A resposta para esta questão encontra-se, primeiro, em abordar como são as atitudes em relação aos problemas do meio ambiente. Segundo, como é entendida a relação do homem e das suas atividades com o mundo físico que o cerca e, por fim, entender como cada paradigma influencia as concepções de relação da economia com o meio ambiente.

Assim, para Faucheux e Noël (1995) desde que os problemas dos recursos naturais e do meio ambiente começaram a ser entendidos e tratados como tais, as ações neste domínio dividem-se entre quatro

grandes atitudes:

1. Extremista: é centrada na preservação integral da biosfera. Nesta atitude os homens não tem direito nenhum sobre os recursos naturais e isto é válido para toda a sucessão dos tempos futuros.
2. Eficiência econômica e análise de custos-vantagens: mercado é encarregado de regular a exploração dos recursos naturais. “O otimismo tecnológico e possibilidades de substituição em função dos preços deixam o campo livre à exploração dos recursos naturais e do meio ambiente” (FAUCHEUX; NOËL, 1995, p. 25). Esta atitude não leva em consideração a ética da divisão, tanto intergeracional como intrageracional, dos recursos naturais.
3. Conservacionista: sua diferença em relação a primeira é que esta é uma atitude antropocêntrica. Recursos e problemas ambientais tem tamanha importância que o crescimento econômico deverá parar em algum momento. Também é preservada uma ética intergeracional em relação a utilização dos recursos.
4. Desenvolvimento sustentável: não concordam em sacrificar o desenvolvimento atual, mas tentam alterar as suas características para que ele possa continuar. Vê nos recursos e nos problemas ambientais barreiras ao crescimento econômico.

Dentre estas quatro atitudes as que levam em consideração concepções reducionistas e unilaterais são as duas primeiras. As outras duas tem conexões tanto com a economia como o meio ambiente e os recursos naturais.

O lugar do homem e das suas atividades com o mundo físico foi entendida de quatro modos principais:

- Naturicista: Natureza prevalece sobre o homem. A natureza é, portanto, de essência metafísica, ou seja um conceito vasto e englobante. Esta abordagem abandona todas as considerações econômicas e sociais, logo não é capaz, por si só, de estabelecer a decisão em matéria de gestão dos recursos naturais e do meio ambiente.

As duas correntes seguintes não atribuem o papel principal das explicações a metafísica, mas sim a física. Uma tende para a forma mecânica e a outra termodinâmica.

- Mecânica: Aqui ocorre uma alteração radical na relação entre o homem e a natureza, pois este universo é fundamentalmente reversível e a qualidade é rejeitada. Isto proporciona uma abertura a ação sem limite do homem em relação ao universo físico. “O instrumento deste conhecimento quantitativo é a razão, tal como irá demonstrar Descartes. Para ele, conhecer a natureza é considerá-la como um objeto exterior ao sujeito pensante, separado de toda a conotação espiritual ou ética” (FAUCHEUX; NOËL, 1995, p. 40). Existe autoregulação e estabilidade, deste modo mesmo que ocorra uma perturbação momentânea, o equilíbrio irá retornar. Isto implica em um modelo estático que supõe reversibilidade no tempo e que exclui qualquer possibilidade de evolução.
- Termodinâmica: É baseada em um tempo irreversível, o que leva a considerar limites da ação humana sobre o mundo físico. No entanto, por não englobar o vivo e sua evolução se torna uma representação racionalista e determinista, como a anterior.
- Revisão do paradigma termodinâmico: É centrado mais na biologia do que na física, logo irá realçar a especificidade do vivo. Prega uma instabilidade da vida em relação ao mundo físico e que existe uma crescente complexificação do vivo e na necessidade de organizar a coevolução.

As concepções específicas da economia são derivadas destes paradigmas. As teses Gaia e *Deep Ecology* tem como base a concepção naturicista. Já a análise da economia dos recursos naturais e do meio ambiente deriva da mecânica clássica, que também inspira a teoria econômica padrão neoclássica. As primeiras tentativas de fazer entrar o meio ambiente e os recursos naturais na análise econômica pertencem ao paradigma da termodinâmica, sendo que este paradigma em conjunto com o do vivo consituem o campo essencial do que é chamado de Economia Ecológica (FAUCHEUX; NOËL, 1995).

Aprofundando a influência do paradigma mecanicista nos fundamentos da análise econômica neoclássica, segundo Faucheux e Noël (1995, p. 41) “O economico tornou-se verdadeiramente autônomo com Smith, o qual, graças à mão invisível, uma metáfora que designa o mercado, dotou o econômico de uma ordem natural específica, separada das suas dependências anteriores perante o divino, o político e a natureza.” Desta forma a economia pode definir as suas próprias leis sem se preocupar com o universo que existe em volta dela, pois as leis de ambos são iguais.

Assim, o econômico tornou-se unidimensional e o seu procedimento totalmente reducionista. Desta vez, as regulações naturais perderam a sua autonomia e até mesmo a sua existência.

“Efetivamente, reduzir unicamente à sua dimensão monetária e reenviar para os limites da esfera econômica fenômenos externos ao mercado, tais como o desregulamento de mecanismos naturais, esgotamento de recursos ou poluições, não é abrir a economia sobre as suas cercanias, mas submeter estas últimas a uma lógica que não é sua. Trata-se de um reducionismo, atitude que se pode caracterizar pela pretensão de reduzir a lógica de conjunto à dos seus componentes: a matéria ou o social ao econômico a uma simples adição de comportamentos individuais” (PASSET, 1984 apud FAUCHEUX; NOËL, 1995, p. 43).

Deste modo, Faucheux e Noël (1995) abordam o surgimento do mercado, primeiramente, como mecanismo de regulação econômica, em seguida, como mecanismo de regulação social e, por último, como mecanismo de regulação da natureza. Isto acarreta uma redução da totalidade da sociedade, e até mesmo da natureza, à dimensão econômica. Contudo, para poder responder aos desafios apresentados ao entendimento da dimensão ambiental, tais como: multidimensionalidade, dimensão ética, irreversibilidade e a incerteza. A economia dos recursos naturais terá que criar artifícios diversos para escapar das consequências que a visão mecanicista acarreta. Como esta corrente acredita que o mercado garante o melhor uso possível dos recursos, então este consegue fornecer uma espécie de guia para o consumo ótimo dos bens e serviços ambientais, através de alterações nos preços relativos.

Assim, segundo Bartelmus (2008), quando os mercados não conseguem mitigar os problemas ambientais, os economistas ambientais buscam um equilíbrio ideal entre os custos e benefícios econômicos (incluindo a faceta socioambiental), com a ajuda de instrumentos de mercado de internalização do custo social. Deste modo, para Faucheux e Noël (1995) a solução passa por colocar um preço aos bens e serviços ambientais. Isto pode ser feito de diversos métodos. Um conhecido é o princípio poluidor-pagador, o qual permite avaliar monetariamente o custo da sobre-exploração de certos recursos naturais ou da poluição. Todavia, vale destacar que esta abordagem não leva em conta barreiras ecológicas absolutas. Logo, esta é uma visão otimista quanto às possibilidades de progresso técnico e de substituição.

Nesta ótica o que importa é a maximização da utilidade, assim,

os bens e serviços ambientais foram incorporados nas suas respectivas utilidades. Deste modo, o valor dos bens e serviços ambientais provém de sua utilização, o que faz com que a economia dos recursos naturais tenha característica utilitarista e antropocêntrica. A partir daí, os modelos modificados tentam analisar e explicar a relação entre meio ambiente e crescimento econômico, acrescentando maior complexidade à preocupação inicial. Faucheux e Noël (1995) também argumentam que o processo de maximização da utilidade ignora o significado da distribuição resultante dos ganhos e das perdas, ou seja, não se preocupa em saber quem suporta os custos ou se beneficia com os lucros.

Outro ponto importante que esta abordagem leva em conta é de que ela considera impossível conhecer as preferências dos indivíduos das gerações futuras. Este argumento abre precedente para que não seja necessário preocupar-se e nem avaliar os bens e serviços ambientais.

“Este processo é alias aplicado sem ter em conta a duração de vida do projeto de gestão ambiental ou a distribuição dos custos e dos benefícios no decurso do tempo. Isto implica que os custos e benefícios futuros tenham um peso mais fraco que os custos e benefícios presentes, o que uma vez mais justifica a visão tecnocêntrica e otimista a respeito das possibilidades de progresso técnico ou de substituição. Esta posição favorece em definitivo uma interpretação ética do crescimento econômico, sendo este último suposto fornecer benefícios materiais que aumentam a escolha e a satisfação do consumidor e, logo, o bem estar humano. Resulta daí que as gerações futuras serão supostamente mais ricas e mais capazes de responder à deterioração dos bens e serviços ambientais que herdarão pois estar ausente qualquer verdadeira preocupação de equidade intergeracional” (FAUCHEUX; NOËL, 1995, p. 48).

Como consequência, a economia neoclássica entende que existe uma substituição perfeita entre capital, trabalho e recursos naturais. Perman et al. (2003) definem que o capital físico, humano e intelectual é definido como capital de criação humana e que o capital natural engloba o estoque de recursos naturais, sendo que ambos são considerados insumos produtivos. Esta substituição perfeita entre os diferentes tipos de capitais é denominada sustentabilidade fraca. Ela requer que a soma dos dois tipos de capital não seja declinante. Assim, é permitida uma substituição entre os dois insumos, de tal forma que a acumulação de

capital de criação humana compense a redução do estoque de capital natural. Como consequência lógica deste modelo poder-se-ia manter a produção e o crescimento com um mínimo de recursos naturais, desde que o capital global seja suficientemente grande, por exemplo, com o aumento do progresso tecnológico.

A corrente da termodinâmica, todavia, considera barreiras ecológicas absolutas, e dentro desta escola existem dois grandes tipos de análise:

- Abordagem dos balanços matéria-energia: é baseada no primeiro princípio da termodinâmica, que põe em evidência a lei de conservação de energia. Neste tipo de análise “a economia não pode jamais criar nem destruir matéria ou energia, pode apenas rearranjá-la” (FAUCHEUX; NOËL, 1995, p. 57). O artigo “*the economics of the coming spaceship earth*” (BOULDING, 1966 apud FAUCHEUX; NOËL, 1995) traz a importância desta lei para a compreensão dos laços entre economia e meio ambiente.
- A outra tem como principal expoente Georgescu Roegen. Esta análise caracteriza-se por tentar integrar a segunda lei da termodinâmica à economia. Segundo ela, a atividade econômica necessita de energia e matéria primas, que são consideradas de baixa entropia e as converte em matéria e energia de alta entropia. Isto significa que esta natureza entrópica da atividade humana faz com que não seja possível ocorrer uma reciclagem de cem por cento. Uma Conclusão que se pode tirar da segunda lei da termodinâmica é que a poluição surge como consequência do aumento da entropia proveniente de um consumo crescente de energia fóssil.

Existem quatro interpretações da influência do paradigma termodinâmico nas escolas que procuram entender as relações da economia com o meio ambiente: Minimalista, maximalista e duas intermediárias: a Escola de Londres e a teoria do estado estacionário.

- Minimal: Considera apenas a primeira lei da termodinâmica. Como esta lei permanece muito próxima da visão newtoniana subjacente ela pode ser integrada facilmente pela teoria econômica neoclássica. Deste modo, esta interpretação percebe a economia como um fluxo circular onde ocorre a re-transformação de energia e de matéria. Ou seja, considera que não existe nenhuma barreira absoluta exterior ao sistema econômico. São exemplos de técnicas que estão dentro desta interpretação as análises de saldo-matéria e *input-output*.

- Maximal: Considera a segunda lei da termodinâmica. O que deve ser otimizado é a função objetivo potência energética. Assim, é proposta uma teoria do valor energético generalizado (ODUM, 1983). Isto constitui um ponto de ruptura com a análise econômica dominante. No entanto, a única dimensão representada é a da ecologia.

As interpretações intermediárias propõe-se a tratar a economia tendo em conta a barreira ambiental absoluta que pesa sobre o sistema econômico em virtude da lei da entropia.

- Escola de Londres: Considera que o sistema natural tem uma capacidade de assimilação dos resíduos, mas que esta não deve ser ultrapassada nunca. No entanto, os recursos de estoque, tais como recursos de energia fósseis e minerais, estão submetidos à lei da entropia. Isto implica que deve haver uma substituíbilidade entre estes, os recursos esgotáveis, e os recursos renováveis. Contudo, os recursos renováveis não podem ter a sua capacidade de renovação prejudicada. De acordo com esta escola, deve haver uma diferenciação entre o capital natural e as outras formas de capital, sendo que o capital natural deve permanecer constante. Todavia, para avaliar as barreiras absolutas são utilizados métodos que se baseiam no consentimento dos indivíduos em pagar. Da mesma forma que as escolas neoclássicas, esta adota um comportamento otimizador, porém levando em conta barreiras impostas pelas leis da termodinâmica, que não dependem da natureza das coisas.
- Estado estacionário: tem em vista diminuir os impactos do processo econômico por meio de um estado estacionário. Tem como principal expoente Daly, que define a economia do estado estacionário como uma economia que mantém certo nível desejado e suficiente de estoques constantes de população e de artefatos e que também possui baixas taxas de produção intermédia (*throughput*) (DALY, 1999).

A diferença essencial entre a abordagem da escola de Londres e a de Daly é que, no primeiro caso, as barreiras ecológicas absolutas são determinadas pela revelação das preferências individuais, enquanto que no segundo caso são fixadas pelas instituições.

O último paradigma que deve ser explorado é o do vivo. Este considera que não basta unicamente a entropia para determinar o comportamento do sistema. Ele enxerga a economia como um sistema aberto que vive a partir das trocas de matérias e energéticas com o seu

meio ambiente. Neste paradigma, o ponto crucial é que a pressão da economia não supere as condições de suporte do sistema ecológico, ou seja não ameacem a sua reprodução e os seus mecanismos de regulação. Se isto acontecer, são estabelecidas reações que conduzem a pontos de bifurcação que marcam assim as mudanças possíveis da transformação do sistema e a partir das quais aparece um novo estado.

Bartelmus (2008), argumenta que a maioria das escolas econômicas faz alguma tentativa de operacionalizar as suas filosofias, movendo-se das noções teóricas para variáveis quantificáveis. De um lado, economistas ecológicos rejeitam valoração monetária em favor de indicadores físicos (não econômicos), como, por exemplo, os indicadores eMergéticos³, indicadores de exergia e teoria do valor energético, que revelam a pressão real da atividade econômica sobre os ecossistemas. Estes não estão interessados nos preços ou custo marginal dos serviços ambientais. Eles querem prevenir ou, ao menos, minimizar os impactos ambientais, que se caracterizam pela redução do montante de capital natural utilizado pela economia. Ou seja, requer que o capital natural não seja declinante. Esta vertente é intitulada na literatura como sustentabilidade forte.

De outro ponto de vista, existe a denominada sustentabilidade fraca defendida pelos economistas ambientais. Deste modo, é levado em consideração que mudanças tecnológicas e socioeconômicas podem ocorrer ao longo do tempo, de forma dinâmica. Como exemplo, pode-se citar que o padrão de energia e os materiais que dominavam a produção em importantes economias nos séculos passados podem não ser mais os mesmos nos séculos seguintes. Este novo padrão de crescimento poderia usar alterações técnicas que levariam a substituição e racionamento de recursos, à reciclagem e, principalmente, à inovação de processos e tecnologias limpas. As principais pesquisas que se encaixam nesta teoria são, no sentido macroeconômico, a manutenção de um crescimento econômico sustentável e, do lado microeconômico a internalização de custos, análise de custo-benefício e uso ótimo dos recursos naturais (BARTELMUS, 2008).

Neste sentido, da sustentabilidade fraca, foi iniciada a discussão sobre a necessidade de se internalizar os impactos ambientais a partir de uma gestão de insumos e resíduos, tanto ao longo como no final dos processos de produção. Nesse contexto, tecnologias baseadas no

³“A valoração eMergética parte de princípios físicos e biológicos para o estabelecimento de uma moeda comum, capaz de ser aplicada na avaliação tanto de sistemas naturais como de sistemas construídos. Esta metodologia de valoração ambiental alicerça-se na Ecologia de Sistemas, que pode ser considerada uma linha de pesquisa vinculada à Economia Ecológica” (SINISGALLI, 2006, p. 19).

uso intensivo de recursos energéticos e emissão de poluentes são consideradas desestabilizadoras do meio ambiente e a inovação ambiental surge como uma forma de substituir o consumo destas tecnologias pelo conhecimento. Porém, este processo de transição para tecnologias mais limpas é complexo, pois deve passar por mudanças tecnológicas e se encontra relacionado às atividades inovadoras (LUSTOSA, 2010).

Sabe-se que diversas forças atuam de formas diferentes sobre a decisão das firmas de inovar. Diferentes modelos de processos inovativos foram construídos para expandir a compreensão das forças que atuam na adoção e na difusão das inovações. Esses modelos também podem ser usados para o estudo das inovações ambientais, as quais também podem ser influenciadas pela demanda, por choques tecnológicos e por outros fatores sistêmicos e institucionais.

2.2.1 Questões ambientais e a teoria do crescimento econômico

Young (2015) chama de economia “verde” o que foi intitulado de sustentabilidade fraca. Para este autor, o desafio desta vertente é evitar a percepção convencional da existência do *trade-off* entre progresso econômico e sustentabilidade ambiental. Ou seja, a visão que deve ser obtida é que uma possível economia mais “verde” não inibe a criação de riquezas, empregos e oportunidades. Em vez disso, ela pode abrir novas oportunidades de investimento, crescimento e emprego.

O princípio fundamental desta abordagem, segundo Young (2015), é que as políticas ambientais não devem ser vistas como restrições onerosas impostas pela burocracia estatal ou pela pressão de ambientalistas radicais, mas como oportunidades de inovação para reduzir custos de produção no médio e longo prazo (por exemplo, evitando o desperdício e ineficiência no consumo de energia e matérias-primas) ou maneiras de conquistar novos mercados, melhorando a imagem da empresa e de seus produtos para consumidores. Ou seja, os custos podem ser revertidos em benefícios: o que seria um problema (para cumprir as normas ambientais) torna-se uma vantagem, por causa dos potenciais ganhos de eficiência e competitividade, melhorando simultaneamente a qualidade de vida da população. Invertendo o mito, pode-se dizer que o crescimento econômico e qualidade ambiental são complementares em um ciclo virtuoso de desenvolvimento sustentável.

Para Pittel (2002), uma grande extensão deste fenômeno pode ser atribuído ao desenvolvimento da teoria de crescimento endógeno e

sua ênfase no papel do progresso tecnológico e na acumulação de capital. Conforme Smulders (1995), a dimensão física é importante para os processos econômicos e levando em conta o crescimento econômico não é possível simplesmente usar mais e mais recursos naturais de maneira que o conhecimento sobre o uso destes recursos não evolua. Deste modo, inevitavelmente, o crescimento econômico atingirá os limites da exaustão de recursos.

Portanto, a modelagem de crescimento endógeno tem tido relevância especial quando potenciais limites ao crescimento oriundos de aspectos ambientais são analisados: Como os recursos naturais da terra são finitos, o crescimento somente pode ser sustentado se o progresso tecnológico aumenta a eficiência dos recursos naturais e mais valor pode ser derivado de um montante fixo ou decrescente de inputs ambientais. Assim, Pittel (2002) afirma que o debate de crescimento e meio ambiente é consequentemente um discurso sobre os limites do progresso tecnológico e a acumulação de conhecimento em geral.

Em suma, Smulders (1995) chega a conclusão de que a criação de novos conhecimentos permite uma conciliação entre crescimento e preservação ambiental. Sem a criação de conhecimento, a lei da termodinâmica irá diminuir os retornos do crescimento econômico devido a limitação física do uso de recursos naturais ou saturação de emissão poluentes.

Além do mais, de acordo com Barker, Scriciu e Smith (2008) o acúmulo de conhecimento é importante não apenas para o crescimento sustentável, mas também para análises de políticas de mudanças climáticas. Visto que o desenvolvimento de tecnologias de baixa emissão de carbono serão necessárias para mitigar os efeitos das mudanças climáticas.

Para Pittel (2002), os links entre crescimento econômico e a qualidade do meio ambiente são diversos. Desta forma, a introdução ou exclusão de elementos na estrutura do modelo é essencial para que possam ser visualizadas conclusões sobre o desenvolvimento no curto e longo prazo da economia.

2.3 TRABALHOS RELACIONADOS COM O PROBLEMA DE PESQUISA PROPOSTO

Diversos trabalhos já foram publicados procurando estabelecer relações entre o crescimento econômico e as emissões de CO_2 . No entanto, dois grupos podem ser destacados. No primeiro, destacam-se os

trabalhos que utilizam a metodologia econométrica para tentar provar a validade da hipótese da CAK.⁴ E o segundo grupo utiliza modelos de otimização dinâmica com diversos objetivos, entre os quais: otimizar os gastos que minimizariam o impacto do aquecimento global, maximizar uma função de bem-estar social com restrições que representam a qualidade ambiental e otimizar a taxa de impostos relativos a emissões.

Em relação a CAK, basicamente, três vertentes tem sido exploradas pelos pesquisadores. A primeira incide sobre o vínculo entre os poluentes ambientais e renda, normalmente, tomando como *Proxy*, o Produto Interno Bruto (PIB). Esta vertente procura testar a validade da hipótese da CAK. Em virtude dos controversos resultados⁵ encontrados nas pesquisas sobre o comportamento da CAK, torna-se questionável generalizar as implicações políticas dessa curva que estabelecem que o crescimento econômico seja suficiente para salvaguardar a qualidade ambiental. Alguns autores como Bruyn (1997) e Bruyn, Bergh e Opschoor (1998) acreditam que a CAK não se sustenta no longo prazo. Assim, o formato de U-invertido seria apenas um estágio inicial da relação entre crescimento econômico e pressão ambiental. Após certo nível de renda, haveria um novo ponto de inflexão que tornaria a trajetória novamente ascendente, e o formato da CAK seria similar ao de um “N”, sugerindo que a degradação ambiental voltaria a aumentar em altos níveis de crescimento.

Uma segunda vertente da literatura trata de estudos sobre a relação entre a produção econômica e o consumo de energia, uma vez que as emissões de poluentes são principalmente causadas pela queima de combustíveis fósseis. Os estudos realizados, que se encaixam nesta vertente costumam utilizar o teste de Granger para verificar as relações de causalidade entre o consumo de energia e a produção econômica. Como exemplo, Payne (2009), utilizando dados anuais dos EUA, aplicou o teste de Granger para testar as relações de causalidade entre o consumo de energia renovável, consumo de energia não renovável e o PIB real, respectivamente. Os testes revelaram a ausência de causalidades entre as variáveis em estudo, suportando a hipótese de neutralidade. Já Apergis e Payne (2010) focalizaram os seus estudos na relação entre

⁴A Curva Ambiental de Kuznets pode ser entendida como uma relação de U invertido entre degradação ambiental e a renda per capita. A hipótese que esta teoria procura testar é a de que se o crescimento econômico reduz o impacto ambiental das atividades econômicas (STERN, 2004).

⁵Grossman e Krueger (1991), Apergis e Payne (2009) evidenciaram a hipótese da Curva Ambiental de Kuznets em forma de U-invertido. No entanto, Richmond e Kaufmann (2006) não verificou nenhuma evidência clara para a presença da hipótese da curva de Kuznets em forma de U-invertido.

o consumo de carvão mineral (fonte de energia intensiva em emissão de CO_2) e PIB, para quinze economias emergentes. Neste estudo, os testes de causalidade de Granger mostraram causalidade bidirecional entre o consumo de carvão e o crescimento econômico, tanto no curto como no longo prazo. Outro tipo de modelagem que é utilizada nesta vertente é a modelagem VECM. Ozturk e Acaravci (2010), ao utilizar o modelo VECM, procuraram investigar as relações causais entre o consumo de energia per capita, o consumo de energia elétrica per capita e o PIB real per capita para os países da Europa Oriental (Albânia, Bulgária, Hungria e Romênia). Como resultado, foi constatado que existe a presença de relações de longo prazo somente entre consumo de energia per capita e PIB real per capita e causalidade bidirecional para estas duas variáveis, no sentido dos testes de Granger, somente para os dados da Hungria.

A terceira vertente da literatura que analisou as implicações sobre a CAK considera outras variáveis explicativas, além da variável renda, como a balança comercial e o consumo de energia. A crítica estabelecida por esta vertente à CAK, em termos teóricos, surge do pressuposto de que a CAK supõe causalidade unidirecional da renda para os danos ambientais. Neste caso, a renda é assumida como sendo uma variável exógena. No entanto, uma conexão causal reversa pode muito bem existir. Ou seja, a proteção ambiental pode promover o crescimento econômico, aumentar a eficiência e estimular o progresso técnico, impactando diretamente nos níveis de poluição. Na visão de Porter e Linde (1995), uma maior eficiência leva ao maior crescimento econômico e, em consequência, a renda pode muito bem ser endógena, de modo que a qualidade ambiental tenha efeitos de realimentação sobre o crescimento econômico

Para Young (2015), esta hipótese contém o argumento de que existe um ponto hipotético na qual a qualidade ambiental aumenta com o desenvolvimento econômico, ou seja, a melhora das condições ambientais se tornam uma consequência natural a partir deste ponto em razão do crescimento econômico. Além do mais, isto implica que a degradação ambiental é um custo necessário a ser pago para o desenvolvimento futuro. Desta maneira, este autor critica esta hipótese argumentando que uma economia “verde” somente pode ser possível se induzida por políticas públicas e privadas específicas, ao invés de uma tendência natural ou espontânea que emergem de processo de desenvolvimento, como argumentado por aqueles que apresentam o conceito de uma CAK.

Grossman e Krueger (1991) argumentam que o entendimento do comportamento da CAK é complexo, tendo em vista que os efeitos

que fazem com que a renda interfira nos níveis de poluição. De acordo com estes autores, estes efeitos podem ser decompostos em efeitos de escala, de composição (mix produtivo) e de níveis tecnológicos (efeito de redução ou técnico), usados no processo produtivo. Sendo que esses efeitos interagem nas relações entre o crescimento econômico e qualidade ambiental.

O efeito escala encontra-se relacionado com o incremento no uso de *inputs*, sob a forma de materiais e recursos naturais, no sistema produtivo. Ao mesmo tempo, uma maior produção implica em mais degradação ambiental. Essencialmente, o efeito escala encapsula dois tipos de pressão ambiental: uma decorrente de aumento do uso de recursos, que tem um efeito exaustão; e outra, decorrente do aumento de desperdício, associado com um efeito de poluição (ORUBU; OMOTOR, 2011). Também é verdade que o efeito de escala pode induzir a redução da degradação ambiental ou poluição em níveis mais elevados de rendas, aplicando algumas medidas de controle de poluição, pois nesse estágio, os produtores possuem mais recursos financeiros disponíveis para adotar medidas e tecnologias de redução da poluição (BIAGE, 2013).

O efeito composição tem a ver com a proporção de cada tipo de atividade produtiva no volume de produção da economia. Como observado por Stagl (1999), a trajetória comum de desenvolvimento tem sido de que as sociedades progridem da agricultura de subsistência (pouco poluente), para a produção agroindustrial (com baixo nível de poluição) e, em seguida, para o estágio industrial pesado, no qual os níveis de poluição crescem intensamente. Na sequência, as sociedades podem evoluir para um estágio, no qual os níveis de poluição diminuem à medida que a economia se desloca em direção ao uso de alta tecnologia, conhecimento e indústrias de serviços. Dentro desta contínua evolução de composição, a poluição tenderá a aumentar à medida que a economia avança na escada do desenvolvimento, mas cai quando mudanças estruturais ocorrem ao longo do tempo. Em consequência, o efeito de composição tende a reforçar as pressões ambientais decorrentes do aumento da escala de produção, e combatê-las em níveis mais elevados de desenvolvimento. Nesse último estágio, o efeito de composição possibilita reduzir a degradação ambiental, por meio da redução do tamanho relativo dos setores da economia que produzem altos níveis de poluição, e expandindo os que produzem menos resíduos, por unidade de produto, isso, em virtude de ratificações de rígidas normas ambientais, inibidoras à poluição, devido às pressões da sociedade (HE, 2007).

O efeito de redução decorre do impacto de melhorias no estado da tecnologia. Geralmente, as melhorias na tecnologia de processamento

reduzem a poluição, indiretamente pela redução do consumo de insumos materiais, e diretamente, pelo avanço tecnológico, por meio da adoção de melhores técnicas de controle de poluição. Assim, o efeito tecnológico funciona por intermédio de melhorias na produtividade e vantagens relacionadas com as emissões (ORUBU; OMOTOR, 2011). Com esses meios, é possível uma indústria altamente poluente registrar declínio nas emissões, mesmo com o aumento de produção, desde que o crescimento na produção seja produzido pelas fábricas que utilizam processos de produção menos poluentes. Em princípio, o efeito de redução possibilita melhorar a qualidade ambiental, quando o crescimento econômico dá-se com redução da produção de resíduos, em virtude de invenções e adoção de novas tecnologias e novos padrões produtivos, e pelas mudanças na composição de Inputs, substituindo os insumos mais prejudiciais ao meio ambiente.

Em geral, deve-se ressaltar que a forma da CAK depende de um conjunto de fatores e se está tratando da questão da qualidade ambiental no âmbito de economias específicas, ou em nível global. Em qualquer situação, o processo de industrialização é susceptível de ser acompanhada por problemas ambientais. No entanto, o que se constata é que a forma da CAK para poluentes ao nível global (ou, para uma economia específica) resulta de efeitos de escala, de composição, e dos níveis de tecnologias empregados na produção, podendo desenvolver uma CAK em forma de U-invertido, ou na forma de N, dependendo das circunstâncias do setor produtivo. Munasinghe (2008) afirma que para um país em desenvolvimento alcançar um crescimento econômico alvo, além do *threshold*, com queda nos níveis de emissões de poluição com o crescimento da renda per capita (CAK na forma de U-invertido), estes devem utilizar tecnologias limpas e programar políticas de desenvolvimento sustentável. Todavia, deve-se ter a consciência das dificuldades que os países podem encontrar, tanto do ponto de vista tecnológico como do ponto de vista financeiro, para implementar os mecanismos para que a poluição doméstica siga um caminho com menor nível relativo de poluição.

Uma outra maneira de análise da relação entre o crescimento econômico e as emissões de CO_2 são os modelos de otimização dinâmica. Assim, destacam-se os trabalhos de Nordhaus (1991a) e Nordhaus (1991b). Nestes, são apresentados um modelo matemático que descreve os efeitos dos gases do efeito estufa na economia, sendo que é maximizada uma função de bem-estar social, sujeita a restrições dinâmicas para a temperatura global e concentração atmosférica de CO_2 . Assim, foram considerados três níveis de dano, alto, médio e baixo, em relação a

função de concentração de CO_2 . Em outro estudo, Nordhaus (1993) utilizou o mesmo modelo matemático para valorar políticas de impostos ótimas nas emissões de dióxido de carbono para que estas pudessem ser estabilizadas.

Poterba (1993), discutiu a relação entre aquecimento global e crescimento econômico e considerou a influência de iniciativas macroeconômicas na diminuição das emissões de CO_2 . Como resultado encontrado neste estudo tem-se, por exemplo, que uma taxa sobre emissões de carbono ligada ao consumo que visa reduzir as emissões em 50% iria reduzir o PIB da América do Norte em 4%, da Europa em 1% e em 19% nos países exportadores de petróleo. Já no estudo fornecido por Stollery (1998), uma taxa ótima sobre as emissões de CO_2 pode ser inicialmente alta mas acabaria por ser reduzida devido ao declínio das emissões causado pelo esgotamento dos recursos energéticos. Ele também mostrou que o suficiente para sustentar tanto o consumo em relação ao esgotamento de recursos de energia como os danos econômicos ocorridos a partir do aquecimento global, seria reinvestir a soma das receitas de impostos oriundos das emissões de carbono e as rendas obtidas da produção de energia.

Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008) oferecem uma ferramenta quantitativa para a alocação eficiente de recursos para reduzir o efeito estufa causado pelas emissões de CO_2 . Sua abordagem se deu por meio do desenvolvimento de um modelo matemático que descreve a relação dinâmica entre emissões de CO_2 , investimento em reflorestamento e tecnologias limpas. Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008) também propõe um método para gerenciar a eficiência dos recursos disponíveis, através de um problema de controle ótimo. Em outro trabalho, Caetano et al. (2009) propõe um controle de rastreamento dirigido para atingir as metas de emissão propostas no Protocolo de Kioto para os países do oeste europeu e resolver este problema numericamente através do Regulador Linear Quadrático, técnica da teoria de controle ótimo.

Entretanto, nestes trabalhos que utilizam a metodologia de otimização dinâmica, equações diferenciais com parâmetros invariantes no tempo são utilizadas para descrever a dinâmica determinística entre as emissões de CO_2 e o crescimento econômico. Para Chen e Lin (2011), estes modelos seriam mais realistas se os parâmetros das equações flutuassem, pois assim o modelo poderia se adaptar mais facilmente se ocorressem situações imprevisíveis como crises econômicas ou catástrofes ambientais.

Visando superar estas limitações, Chen e Lin (2011) propõe uma metodologia na qual utilizam equações diferenciais estocásticas para

descrever o sistema de emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico. Neste estudo também é proposto um modelo de referência para que o sistema dinâmico siga uma trajetória desejada e finalmente é aplicado um modelo de controle robusto para que o sistema se mantenha dentro da trajetória desejada, apesar das incertezas paramétricas e distúrbios externos.

Assim, este trabalho irá seguir a metodologia proposta por Chen e Lin (2011). A formulação do modelo utilizado e a detalhagem da metodologia são fornecidas nos próximos capítulos.

2.4 PRINCIPAIS PAÍSES RESPONSÁVEIS PELAS EMISSÕES DE CO_2

De acordo com a base de dados fornecida pela *U.S. Information Administration*⁶ sobre emissões de dióxido de carbono e tendo como referência o período de 2011, verifica-se a ascensão da Ásia e Oceania à liderança das emissões de CO_2 , sendo responsáveis por 45,07% do total de emissões mundiais. Na África também ocorreram grandes aumentos nas emissões, atingindo 3,53% do total; a Europa atingiu um patamar e se estabilizou com 13,2%; a América do Norte é responsável por 19,77%; e a América do Sul e Central responsável por 4,11%.

No entanto, analisando os dados para as emissões de CO_2 no período de 1990-2011, é possível constatar que o mundo emitiu 51,36% mais de CO_2 em 2011 que em 1990. Sendo que a Ásia e a Oceania apresentaram um crescimento de 183,98%; a África manifestou um crescimento de 58,77%; a Europa demonstrou uma queda de 5,28%; a América do Norte se caracterizou com um crescimento de 11,91%; e finalmente, a América do Sul e Central revelaram um crescimento de 86,89%.

Ainda tendo como referência este período, se destacam com significativo crescimento a China, o maior emissor mundial de CO_2 , que aumentou suas emissões em 300,2%, a Índia em 198,25%, a Indonésia em 173,61% e o Brasil 100,31%. Destacam-se com crescimentos poucos acentuados, os USA que aumentaram 8,93%, a Alemanha, Itália, França e Hungria que apresentaram crescimentos praticamente nulos. A partir desses dados constata-se de forma inegável a intensificação das emissões de CO_2 , especificamente, nos países em desenvolvimento. Por estes

⁶ *U. S. Information Administration, Independent Statistics and Analysis*. Disponível em: <<http://www.eia.gov/cfapps/ipdbproject/iedindex3.cfm?tid=90&pid=44&aid=8&cid=regions\&syid=1990&eyid=2011&unit=MMTCD>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

fatos, o aquecimento global tem atraído muita atenção dos pesquisadores nos últimos anos, essencialmente, em virtude dos níveis de emissões de CO_2 , principal fonte de aquecimento global (BIAGE, 2013).

Os motivos que possibilitaram a Alemanha este decréscimo da taxa de emissões de dióxido de carbono foram abordados pela *United Nations Environment Programme*⁷ em 2007. Entre eles estão: investimentos em energias renováveis, energia solar, emprego de novas tecnologias na produção de veículos, reflorestamento e criação de leis que exigiam a redução das emissões de CO_2 em 5%.

2.5 A SITUAÇÃO DO BRASIL

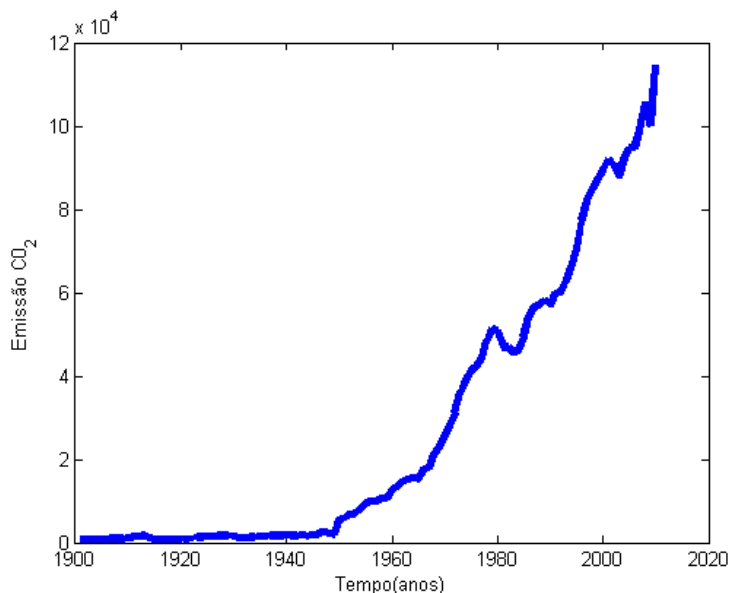
Conforme a seção anterior, o Brasil, no período entre os anos 1990-2011, obteve o quarto maior crescimento de emissões de dióxido de carbono. Como pode ser observado na Fig. (1), a partir dos anos 50, as emissões de CO_2 no Brasil começaram a ganhar corpo e até o presente momento não foi revertida esta tendência. Tendo em vista alterar esta situação, o Brasil instituiu a Política Nacional sobre Mudança do Clima (PNMC), por meio da Lei no 12.187/2009, que define o compromisso nacional voluntário de adoção de ações de mitigação com vistas a reduzir suas emissões de gases de efeito estufa entre 36,1% e 38,9% em relação às emissões projetadas até 2020. A fim de acompanhar o cumprimento do compromisso nacional voluntário para a redução das emissões foi elaborada uma metodologia para a estimativa de emissões desenvolvida por um grupo de trabalho coordenado pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI). Tendo em vista ponderar os efeitos dos principais gases causadores do efeito estufa foi utilizada a métrica usual do Potencial de Aquecimento Global (*Global Warming Potential – GWP*)⁸ para se chegar à unidade comum de medição de emissões, o equivalente de dióxido de carbono (CO_2eq). Sendo que os setores que fazem parte do inventário de estimativas de emissões são:

- Energia – Emissões devido à queima de combustíveis e emissões fugitivas da indústria de petróleo, gás e carvão mineral. As emissões de CO_2 devido ao processo de redução nas usinas siderúrgicas foram consideradas no setor de Processos Industriais;

⁷Disponível em: <http://www.unep.org/PDF/AnnualReport/2007/AnnualReport2007_en_web.pdf>. Acesso em: 30 set. 2014.

⁸É uma medida de como uma determinada quantidade de gás do efeito estufa contribui para o aquecimento global. Para mais informações consultar http://pt.wikipedia.org/wiki/Potencial_de_aquecimento_global

Figura 1 – Série histórica das emissões de CO_2 no Brasil em milhares de toneladas de carbono



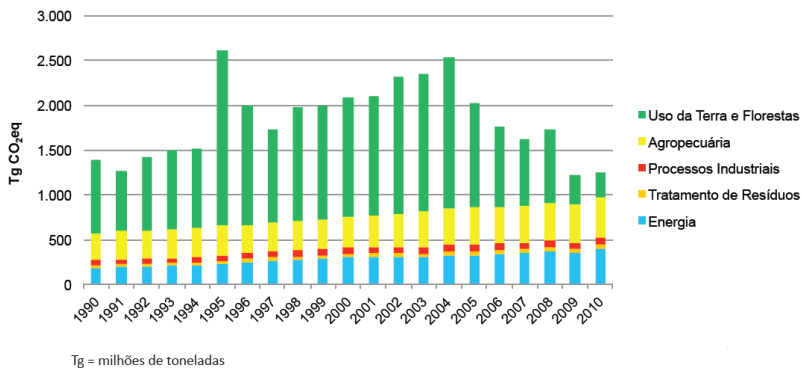
Fonte: CDIAC

- Processos Industriais – Emissões resultantes dos processos produtivos nas indústrias e que não são resultado da queima de combustíveis. Subsetores: produtos minerais, metalurgia e química, além da produção e consumo de HFC e SF_6 ;
- Agropecuária – Emissões devido à fermentação entérica do gado, manejo de dejetos animais, solos agrícolas, cultivo de arroz e queima de resíduos agrícolas;
- Mudança de Uso da Terra e Florestas – Emissões e remoções resultantes das variações da quantidade de carbono, seja da biomassa aérea, seja do solo, considerando-se todas as transições possíveis entre diversos usos, além das emissões de CO_2 por aplicação de calcário em solos agrícolas e das emissões de CH_4 e N_2O pela queima de biomassa nos solos. O crescimento da vegetação em áreas consideradas manejadas gera remoções de CO_2 ;
- Tratamento de Resíduos – Emissões pela disposição de resíduos

sólidos e pelo tratamento de esgotos, tanto doméstico/comercial quanto industrial, além das emissões por incineração de resíduos e pelo consumo humano de proteínas.

Os resultados calculados pelo MCTI para o período de 1990 até 2010 estão contidos na Fig. (2) e na Tab. (1). Ao realizar a análise destes resultados podem ser extraídas conclusões positivas e negativas. Em relação a parte positiva, pode ser abordado que o país tem sido eficaz na redução do desmatamento, principalmente na região amazônica. Mesmo apesar de mudanças recentes na legislação que reduzem os mínimos requisitos legais de conservação de florestas em propriedades privadas. Deste modo, as emissão associadas as queimadas no processo de limpeza da terra para a expansão da fronteira agrícola, que eram historicamente a principal causa de emissões no Brasil, foram reduzidas e agora ocupam o terceiro lugar (com 22% do total), atrás da agricultura (com 35%) e energia (32%).

Figura 2 – Emissões brasileiras de gases do efeito estufa no período 1990-2010



Fonte: MCTI (2013)

Todavia, existem aspectos negativos que devem ser explicitados. O principal é que apesar das emissões oriundas do uso da terra e florestas terem diminuído, as outras fontes de emissões tiveram aumentos, com destaque para o setor de energia (21% de aumento entre 2005 e 2010 e 133% no período de 1990 até 2010) e agricultura (5% e 61% de aumento nos respectivos períodos).

Esta alteração na composição das emissões brasileiras está relacionada a uma mudança na estrutura da economia. No sentido de

Tabela 1 – Emissões brasileiras de gases do efeito estufa, Milhões de ton. CO_2eq , 1990-2010

Setores	Variação Gg CO_2eq	
	1995-2005	2005-2010
Energia	41,5%	21,4%
Processos Industriais	23,6%	5,3%
Agropecuária	23,8%	5,2%
Florestas	-40,1%	-76,1%
Resíduos	23,9%	16,4%
TOTAL	-22,3%	-38,7%

Fonte: MCTI (2013)

que matérias primas e produtos que são intensivos em recursos naturais representam uma fatia cada vez maior na pauta de exportações e na formação do PIB (YOUNG, 2015). Para Gramkow (2011), outros fatores agravantes que contribuem para este cenário são, primeiramente, que na indústria as atividades no qual o Brasil tem o melhor desempenho estão relacionadas com maior potencial de poluição e, em segundo lugar, que há uma parte crescente de atividades intensivas em carbono na estrutura de exportação brasileira. Na visão de Young (2015), estes resultados indicam que a economia brasileira está se tornando cada vez mais dependente de setores industriais intensivos em poluição e nas exportações de produtos primários sem transformação, o que é exatamente o oposto do proposto na teoria da economia “verde”.

Assim, uma economia com menor impacto ambiental não se materializa espontaneamente. E como foi provado anteriormente o Brasil não é um caso que foge a regra. Outra questão importante na visão de Chen e Lin (2011) é que o crescimento econômico necessita de energia. Contudo, atualmente combustíveis fósseis são a principal fonte de energia. Desta forma, este crescimento resulta em um aumento das emissões. Uma forma de mudar este panorama seria a de realizar investimentos no desenvolvimento de tecnologias limpas. Ou seja, valorizar os setores que não dependem de atividades “*brown*”. Abaixo são listado diversos setores e tecnologias onde poderiam ser investidos os recursos disponíveis:

2.5.1 Energia eólica

O Brasil tem uma das matrizes energéticas menos intensivas em emissões de carbono no mundo. Um dos maiores motivos para isso é a grande utilização de energia hidrelétrica. No entanto, existem inúmeros

problemas relacionados a expansão da oferta de energia hidrelétrica. Isto ocorre, porque no Brasil, historicamente, esta fonte de energia se dá por meio de grandes reservatórios. Estes, por sua vez, causam problemas nos ecossistemas, problemas sociais, principalmente relacionados com deslocamentos de comunidades. Outro problema relacionado a esta fonte de energia está no custo do transporte devido as longas distâncias entre as unidades geradoras e os centros consumidores (YOUNG, 2015).

Uma alternativa que mantém a matriz energética pouco intensiva em emissões de CO_2 é a energia eólica. Atualmente, no Brasil, há uma franca expansão desta fonte de energia. O que demonstra isto é que a capacidade instalada cresceu de menos de 30 MW em 2005 para mais de 1000 MW no final de 2011 e se tem a expectativa de que passe os 7000 MW em 2014 (VEIGA, 2012). O potencial para a geração de energia eólica também pode ser explicado por condições geográficas, que incluem a grande extensão da linha que costeia o oceano e as mudanças dos ventos no nordeste do país. Em relação as condições favoráveis a esta fonte de energia no nordeste do país, para Ferraz (2012), isto pode ser um fator que implicará em uma externalidade positiva no sentido de uma inclusão social desta região. Além do mais, segundo Losekann (2012) nos leilões, a partir de 2011, de energia, no Brasil, os preços oferecidos por empresas de energia eólica sempre foram abaixo do custo marginal da expansão da oferta de energia (R\$ 113 por MWh) projetado pelo governo brasileiro.

Um problema que este setor enfrenta é que o seu nível de conhecimento continua sendo relativamente baixo se comparado a energia hidrelétrica, sendo que as características específicas deste setor tem que ser consideradas. Um aspecto importante é a forma de estocagem deste tipo de energia. Neste sentido, Veiga (2012) aborda que a energia solar e a hidrelétrica podem ser consideradas complementares em um sistema integrado. Quando a energia eólica está operando, é permitido poupanças de energia nos reservatórios de energia hidrelétrica, que podem ser utilizados nos períodos de pouco vento. Assim, este sistema integrado tem a vantagem de ser independente de emissões de combustíveis fósseis com um custo competitivo.

Para Podcameni (2012) ainda existem muitas potencialidades para o estabelecimento de um sistema de inovação de energia eólica, no Brasil, que ainda não foram suficientemente explorados. Questões como o desenvolvimento de capacidades tecnológicas, a criação de empregos (diretos e indiretos), a criação de processos inovadores e o desenvolvimento regional ainda são quesitos que são deixados de fora, implícita ou explicitamente, de programas de políticas públicas.

Neste sentido, Podcameni (2012) ainda argumenta que as políticas para a expansão da energia eólica no Brasil tem como foco principal a geração do produto final, mas são desarticuladas e a especialização da estrutura de produção e tecnologia nacional não permitem um desenvolvimento endógeno deste setor. A sua principal conclusão é de que uma nova plataforma de políticas públicas deve ser criada para o setor. Nestas políticas, ao invés de serem estabelecidos preços ou outros incentivos para expandir a produção, a ênfase destes programas deve ser estabelecida em um sistema nacional de inovação que favoreça o surgimento de trabalhos altamente qualificados.

Em suma, a energia eólica representa um avanço considerável na capacidade de ofertar energia sem ser intensiva em emissões. Deste modo, ela deve ser considerada como uma forma de controle em um projeto que visa a redução das emissões no Brasil.

2.5.2 Biocombustíveis

Quando se visa a redução da concentração de gases do efeito estufa na atmosfera uma etapa primordial neste processo é a substituição dos combustíveis fósseis por energias renováveis. Assim, a utilização de diferentes tipos de biomassa começa a ser utilizados pelos países como fonte de energia. Neste sentido, ainda em 1970, o Brasil implementou o Programa Nacional do Álcool (ou Pró-Álcool), que visava a substituição em larga escala dos combustíveis veiculares derivados de petróleo por álcool. Mais atualmente, nos anos 2000, o Brasil lançou o Programa Nacional de Produção e Uso de Biodiesel (PNPB), que objetiva a implementação de forma sustentável, tanto técnica, como econômica, da produção e uso do biodiesel, com enfoque na inclusão social e no desenvolvimento regional, via geração de emprego e renda.

O grande motivo para o Brasil ter feito um forte investimento nestes programas é que ele é um país que possui disponibilidade da terra, clima apropriado, a abundância de água e a exposição ao sol. Estes fatores fazem com que a biomassa cresça rapidamente e assim o país ganha uma vantagem comparativa neste mercado. Sendo assim, no Brasil, a cana de açúcar é a matéria prima básica para a produção do etanol. Outros produtos vegetais também podem ser utilizados como matéria prima no processo de fermentação para produzir etanol. Nos EUA, por exemplo, o milho é a cultura dominante para a produção de etanol. A variedade de matérias-primas para a produção de biodiesel é ainda maior, mas a oferta atual no Brasil é obtido principalmente a

partir da soja e, em menor escala, outras oleaginosas.

Outro fator que influenciou a criação dos programas citados acima foi o aumento significativo nos preços do petróleo. Dadas estas características, no Brasil, os biocombustíveis começaram a ser considerados uma solução no qual os mais diferentes setores da sociedade ganhariam. De um lado, este tipo de fonte energética permitiria a redução das emissões de CO_2 , do outro lado, também possibilitaria o incremento da atividade econômica, e assim, causar a redução dos problemas sociais. Deste modo, membros do governo e empresários do setor defendem a expansão das áreas de cultivo de cana de açúcar e soja como fontes de ouro verde (YOUNG, 2015).

No entanto, é extremamente importante questionar os fundamentos da opção por biocombustíveis e examinar em quais circunstâncias ele segue os princípios da economia verde. Sendo que a produção de biomassa necessária para alcançar os combustíveis “verdes” irá exigir uma quantidade significativa de recursos naturais e industriais. Atualmente, os maiores problemas na implementação do biodiesel como fonte energética podem estar relacionados a possibilidade da cada vez maior expansão da área de cultivo, a competição com culturas alimentícias, os desafios tecnológicos e a volatilidade dos preços dos combustíveis fósseis (YOUNG, 2015).

Em relação a expansão das áreas de cultivo, Young (2015) argumenta que este processo vai ajudar a aumentar o desmatamento, o que consequentemente vai aumentar a emissão de gases de efeito estufa, com efeitos negativos sobre a mudança do clima, o que é uma contradição dos biocombustíveis. Assim, o que ocorre na realidade é que quando uma área de plantio de alimentos ou pasto é vendida ou alugada para expandir o cultivo da cana de açúcar ou soja, a receita obtida pelo agricultor é utilizada para adquirir terras que estão mais próximas de áreas florestais, que estão com preços abaixo do mercado. Deste modo, a forte especulação dos preços da terra provocados pelo aumento da procura de biocombustíveis agrava a tendência para a concentração fundiária da propriedade, e a expansão do mono-cultivo, com base em equipamentos mecanizados, o que desloca ainda mais a agricultura de base familiar.

Em decorrência disto, o argumento de que os biocombustíveis gera a inclusão social, não é atualmente válido no Brasil. Isto iria ocorrer se fossem criados incentivos especiais para estimular a pequena produção da base familiar. Desta forma, o biodiesel poderia ser derivado de agricultores familiares que utilizariam uma mistura de culturas (especialmente óleo de rícino), e não o mono-cultivo de soja. Mas, o

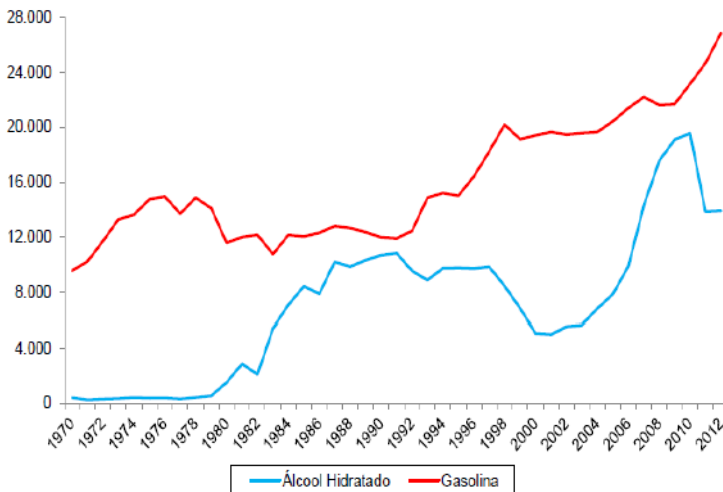
panorama atual do biodiesel brasileiro permanece quase completamente baseada na cultura da soja mecanizada com pouco efeito no número de empregos. Sendo que os empregos gerados, especialmente na colheita da cana, são de péssima qualidade e problemas sérios surgem das condições precárias de empregos temporários. Para Young (2015), é irônico que, no início do século XXI, o governo brasileiro ainda defenda o corte manual da cana-de-açúcar como fonte de emprego e desenvolvimento, sendo que as áreas em que atividade tenha sido estabelecida há quase cinco séculos, continuam entre os mais pobres e menos desenvolvidas do país. (LUCENA; YOUNG, 2008; JUNIOR; YOUNG, 2013).

O mercado de biocombustíveis também pode ser responsável por afetar o mercado de alimentos, principalmente causados pelo desvio do cultivo para a produção de energia. Um exemplo disto ocorreu nos EUA: a demanda crescente de etanol nos EUA, que é obtido principalmente a partir do milho, aumentou significativamente o preço internacional do produto alimentício. O que causou uma onda de inflação nos preços dos alimentos, o que acabou afetando muitos países em desenvolvimento. No caso do Brasil, ainda não ocorreram este tipo de problemas. Não obstante, para Young (2015) isto ainda não ocorreu pois a expansão das áreas de cultivo estão se concentrado em terras de pastagem, o que é permitido por causa do desmatamento. Ainda assim, se o desmatamento for interrompido, a “produção” de novas terras de pastagem terá de ser fortemente reduzida e assim uma concorrência entre o uso da terra para pastagem e cultivo pode emergir como uma questão mais importante em um futuro próximo.

Uma outra variável importante que deve ser considerada para a viabilidade dos biocombustíveis é a volatilidade dos preços dos combustíveis fósseis. Ou seja, para que os biocombustíveis tenham a aceitação do mercado, atualmente é necessário que exista uma alta nos preços dos combustíveis fósseis. Nos últimos anos o Brasil já tem enfrentado este problema. Visando evitar que a inflação aumentasse o governo subsidiou os combustíveis fósseis. Logo, a gasolina ficou mais competitiva que o etanol. Como a maioria dos carros no Brasil atualmente são *flex-fuel*, o que significa que o consumidor tem a opção de escolher entre os dois combustíveis (uma regra de bolso é que o etanol é atrativo se custar até 70% do preço da gasolina). A consequência desta política pode ser visualizada na Fig. (3). Ou seja, o consumo do etanol está se reduzindo enquanto o da gasolina está aumentando desde 2010.

Existem também importantes desafios tecnológicos que devem ser enfrentados pela indústria dos biocombustíveis. Neste sentido Bomtempo (2010a) e Bomtempo (2010b) argumenta que a indústria de

Figura 3 – Produção de gasolina e álcool hidratado no Brasil em 1000 m³



Fonte: Young (2015)

biocombustíveis deverá se basear em tecnologias alternativas e modelos de negócios, em vez de se basear somente no etanol e biodiesel. Na visão deste autor, o futuro dos biocombustíveis será diferente da primeira geração de biocombustíveis⁹ e desta forma a vantagem comparativa que o Brasil e outros países em desenvolvimento possuem podem desaparecer. Assim, na segunda e terceira geração de biocombustíveis¹⁰ a componente tecnológica será o fator competitivo mais crítico. Desta forma, atualmente o Brasil possui uma situação confortável no mercado de biocombustíveis, com a presença do etanol e o biodiesel, mas em termos de novos produtos, a estrutura industrial é em grande parte subdesenvolvida. Assim, se outras opções inovadoras para a produção de biocombustíveis tornarem-se economicamente viáveis, a posição brasileira será frágil já que sua competitividade é baseada em terra e escala.

O que pode ser sintetizado da produção de biocombustíveis no

⁹Biocombustíveis de primeira geração são compostos a partir dos açúcares e óleos vegetais encontradas em culturas arvenses

¹⁰Os biocombustíveis de segunda geração são feitos a partir de biomassa lignocelulósica ou culturas lenhosas, resíduos agrícolas. Já os de terceira geração devem ser obtidos a partir de cultivo industrial de algas ou de outras biotecnologias

Brasil é que o país fez importantes avanços, mas tem feito pouco para se adaptar, se as circunstâncias competitivas mudarem no futuro. Para Young (2015) há uma oportunidade real para permanecer líder em um setor que vai crescer junto com a economia verde, mas a falta de prioridades políticas está fazendo com que esta possibilidade esteja cada vez mais longe.

2.5.3 Áreas de proteção

Existem vários tipos de áreas de proteção, cada um deles com regras específicas para gestão e nível de proteção. Elas podem ser consideradas unidades territoriais que recebem tratamento especial por causa de seus valores naturais, ecológicos e/ou culturais reconhecidos em termos de conservação de espécies, populações e ecossistemas. No Brasil, as áreas de proteção são legalmente regulamentada pela Lei nº. 9.985 de 2000, que regulamenta o Sistema Nacional de Áreas de Conservação (SNUC).

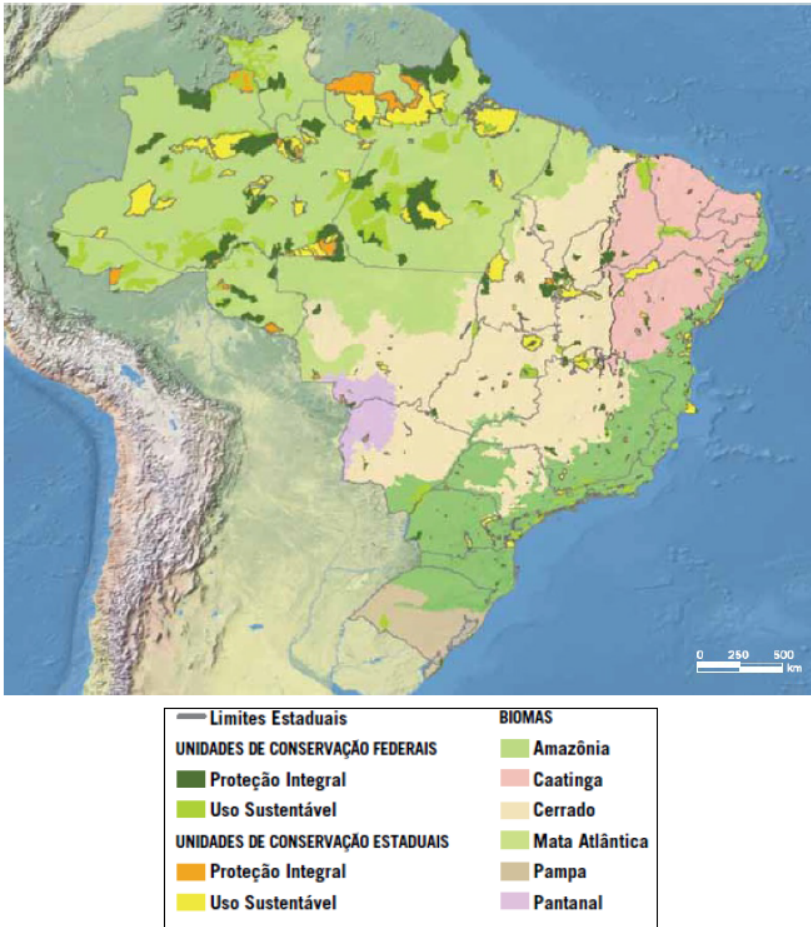
O Brasil é considerado mundialmente por ser um país rico em biodiversidade e com diversos biomas em seu território. A Figura (4) mostra como as áreas de preservação estão distribuídas nos diferentes biomas brasileiros: no bioma Amazônia, as unidades de conservação cobrem 24 % de sua área total, enquanto nas terras áridas de unidades de conservação da Caatinga ocupam apenas 8 % do território.

Um problema enfrentado no Brasil são os baixos orçamentos para a manutenção destas unidades de conservação. Como pode ser comparado na Fig. (5) e Fig. (6), que mostram o investimento realizados por hectare nas unidades de conservação em diferentes países e o número de empregados por hectare em unidades de conservação. Nestas Figuras pode ser visualizado que o investimento realizado pelo Brasil está muito abaixo do que está sendo investido por outros países.

Este baixo gasto é devido principalmente, na visão de Young (2015) porque as unidades de conservação são percebidas pela maioria dos grupos políticos e tomadores de decisão, em ambos os setores público e privado, como um obstáculo para o desenvolvimento, na medida em que representam restrições às atividades econômicas.

Visando alterar esta percepção, o Ministério do Meio Ambiente (MMA), encomendou diversos estudos que mostram como a conservação florestal poderia levar a impactos econômicos positivos. Ou seja, o que se procura demonstrar é que os benefícios proporcionados por unidades de conservação excedem largamente a despesa corrente em sua proteção.

Figura 4 – Distribuição das unidades de conservação no território brasileiro (2010)

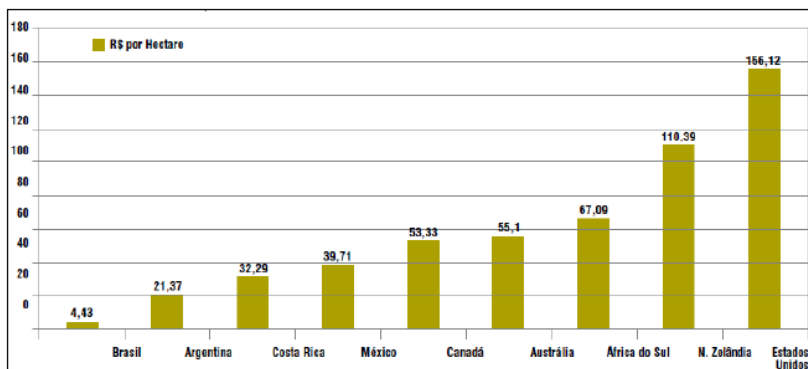


Fonte: Medeiros e Young (2011)

Deste modo, os benefícios excedem os custos, quando externalidades são consideradas.

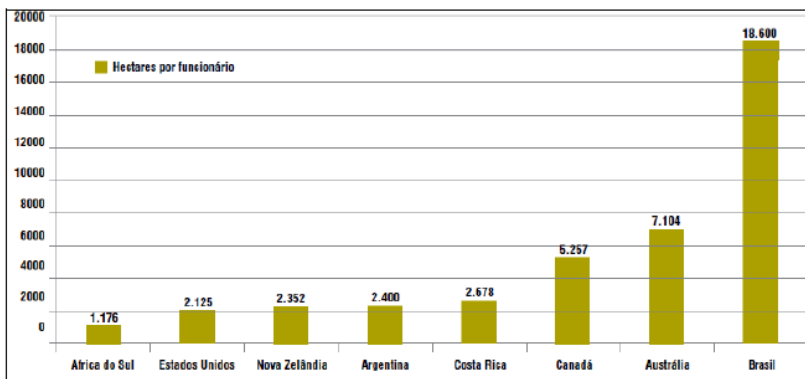
Um trabalho que se destaca neste conjunto de estudos é o de Medeiros e Young (2011). Este trabalho chegou a conclusão de que a criação e manutenção de unidades de conservação brasileiras impediu a emissão de pelo menos 2,8 bilhões de toneladas de carbono, com um valor

Figura 5 – Investimento por hectare (em R\$ de 2010) em unidades de conservação em diferentes países



Fonte: Medeiros e Young (2011)

Figura 6 – Número de hectares por empregados nas unidades de conservação em diferentes países



Fonte: Medeiros e Young (2011)

monetário estimado de pelo menos R\$ 96 bilhões, e o valor estimado para o aluguel anual do estoque de carbono cujas emissões foram impedidas por unidades de conservação varia de R\$ 2,9 bilhões a R\$ 5,8 bilhões por ano. Outra conclusão que vai de encontro a percepção de que as unidades de conservação trazem benefícios econômicos positivos é a de que em bacias hidrográficas e fontes de água com a maior cobertura florestal, o custo associado ao tratamento de água para abastecimento

público é menor do que o custo do tratamento em áreas com baixa cobertura florestal. Outros dados interessantes são de que 80% da hidroeletricidade do país vem de fontes que têm pelo menos um afluente inserida em uma unidade de conservação, 9% da água potável consumida é coletada diretamente em unidades de conservação, 26% são coletados de fontes cujas nascentes estão em unidades de conservação e 4% da água utilizada na agricultura e irrigação é feita a partir de fontes dentro das áreas protegidas ou pertencem a nascentes estão nestas.

Em termos mais gerais, o problema é a violação do princípio fundamental da regulamentação ambiental em uma economia verde: a internalização das externalidades. Há alguns grandes avanços na adoção de instrumentos econômicos para a gestão ambiental, especialmente quando os pagamentos para a conservação florestal são estabelecidos em programas de conservação de bacias hidrográficas. Mas ainda há uma forte resistência contra a incorporação das externalidades ambientais no preço do produto. Os mercados internacionais de carbono são o exemplo mais citado de instrumentos econômicos para a gestão ambiental. A proposta de créditos das reduções das Emissões por Desmatamento e Degradação Florestal (REDD), pode ser considerada uma nova janela para o mercado de carbono no Brasil. No setor rural, muitas vezes é argumentado que precificação das externalidades reduz a competitividade das exportações, piorando as circunstâncias externas e prejudicando o crescimento econômico e do emprego. Como não há disposição para pagar as externalidades negativas, não há recursos para financiar aqueles que geram externalidades positivas em esquemas de pagamentos por serviços ambientais (YOUNG, 2015; MAY; MILLIKAN; GEBARA, 2011).

3 FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Para abordar a temática de fluxos de poluição e aquecimento global diversos autores têm recorrido à utilização de sistemas dinâmicos. Segundo Batabyal (2008), este tipo de técnica merece atenção, primeiramente, pois sistemas econômicos são formados por processos e estes são mais bem entendidos do ponto de vista dinâmico. E em segundo lugar, a gestão otimizada dos sistemas ecológico-econômicos são intrinsecamente dinâmicas, pois as suas concepções de processo de transformação se caracteriza como um sistema de *inputs*, transformação e *output*. As concepções desses processos são muitas vezes determinadas, com base nos princípios físicos, especialmente, nas leis termodinâmicas, como enfatizado anteriormente, características básicas de algumas escolas econômicas de pensamento ambiental. Estes modelos, devidos às suas característica dinâmicas, conduzem inevitavelmente ao uso de equações diferenciais e a processos de otimização.

Nas seções que se seguem, será detalhada a formulação do problema começando pela modelagem do crescimento econômico, depois será explicado a equação das emissões de CO_2 e por fim o modelo que representa as áreas florestais. Este trabalho irá seguir o modelo dinâmico proposto por Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008), porém irá expandir este sistema com elementos que procuram fornecer um entendimento da natureza do crescimento econômico.

3.1 O CRESCIMENTO ECONÔMICO

O crescimento econômico é matéria de suma importância no desenvolvimento do padrão de vida e da renda das diferentes nações. Entender quais os ingredientes que fazem com que o crescimento econômico seja sustentado tem sido um dos objetos de pesquisa mais discutidos na teoria econômica ao longo dos últimos anos.

As teorias do crescimento econômico têm evoluído e ficando cada vez mais complexas procurando retratar quais são os principais elementos responsáveis pelo aumento da renda. A primeira escola a estudar o crescimento econômico foi a clássica. Esta, obteve um resultado pessimista em relação ao crescimento sustentado no longo prazo, pois chegou a conclusão que a economia tenderia a um estado estagnado (estacionário) no longo prazo. Depois, com forte aparato analítico e matemático, os marginalistas reconheceram que o crescimento

econômico poderia ser estudado por meio de evoluções permanentes na tecnologia. Nos modelos de crescimento neoclássicos, como, por exemplo Solow (1956), o aumento da renda das nações é atribuído a mudanças no capital e mão-de-obra e um progresso tecnológico exógeno. Ou seja, o modelo não explica como acontecem os melhoramentos nas tecnologias e o responsável por grande parte do crescimento econômico é um componente residual, que reflete o progresso tecnológico (BARKER; SCRIECIU; SMITH, 2008); (PASCALE, 2012).

A partir dos anos oitenta, conforme Romer (1994), foi criada a teoria sobre crescimento econômico endógeno. Esta, tinha como objetivo se diferenciar da teoria neoclássica. Para tanto, partia do pressuposto que o crescimento da economia ocorria devido a forças internas e não exógenas ao sistema econômico. Esta teoria introduziu elementos importantes no mundo da modelagem de crescimento econômico: o conhecimento como sendo um bem não rival, o aprendizado e a competição imperfeita.

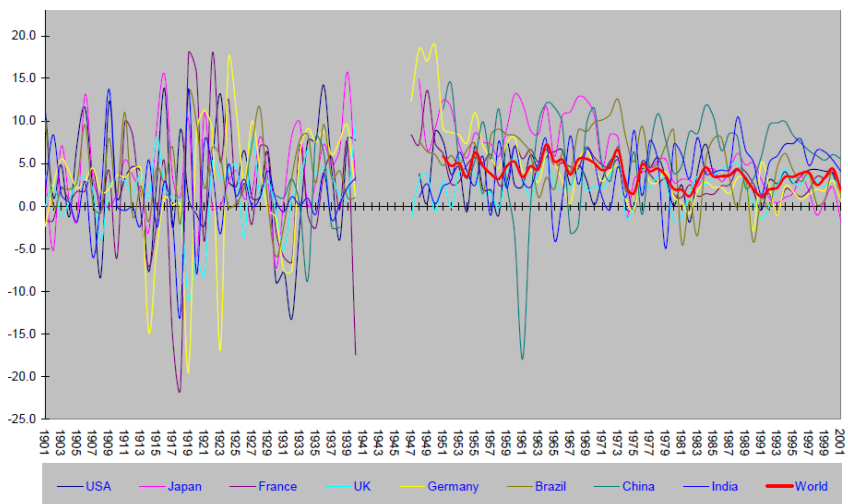
Todavia, para Kenny e Williams (2001) a evidência empírica não suporta por unanimidade uma teoria do crescimento econômico, ou seja, uma explicação universal para o crescimento não se sustenta. Analisando dados históricos, como na Fig. (7), pode-se perceber que o crescimento econômico em diferentes países é sujeito a “uma alta volatilidade e sujeito a forças de desequilíbrio dinâmicas” (BARKER; SCRIECIU; SMITH, 2008, p.4), o que dificulta que uma única teoria consiga descrever com precisão os principais fatores para o crescimento econômico.

Conforme argumentado acima, não pode-se fazer a afirmação de que as mudanças tecnológicas associadas com pesquisa, inovação, *learning-by-doing* e aumentos dos retornos de escala são a força motora do processo de crescimento sobre os países e o tempo. Mas pode-se enfatizar que os fatores citados são necessários, embora insuficientes para garantir uma taxa de crescimento econômico de longo prazo (BARKER; SCRIECIU; SMITH, 2008).

Para Pittel e Rübhelke (2010), este tipo de modelagem, crescimento econômico com acumulação de conhecimento endógena, também permitiu uma análise mais satisfatória dos efeitos provocados pela escassez de recursos naturais e da poluição sobre o desenvolvimento das economias no longo prazo. Além do mais, os *links* entre crescimento econômico e a qualidade do meio ambiente são diversos. Desta forma, a introdução ou exclusão de elementos na estrutura do modelo é essencial para que possam ser visualizadas conclusões sobre o desenvolvimento no curto e longo prazo da economia.

Assim, conforme a argumentação descrita nesta seção, o presente

Figura 7 – Taxas de crescimento do PIB de economias selecionadas, 1901-2001



Fonte: Barker, Scriciu e Smith (2008)

trabalho optou pela construção de um modelo de crescimento econômico que tem como elementos a dinâmica do estoque de capital da economia, a mão-de-obra, capital humano e tecnologia. Na próxima seção serão expostos mais detalhes sobre a formulação deste modelo de crescimento econômico.

3.1.1 Construção do modelo de crescimento econômico

O objetivo desta seção é elaborar um modelo de crescimento econômico que descreva a dinâmica de crescimento da economia brasileira. O modelo de crescimento econômico elaborado seguirá o desenvolvido por Romer (2011). Deste modo, será assumida uma função de produção convencional, na qual capital, trabalho e conhecimento são combinados para produzir melhoramentos em tecnologias. Naturalmente, isto não representa uma descrição completa de progresso tecnológico. Portanto, é razoável pensar que, de uma forma geral, se direcionar mais recursos para as pesquisas mais descobertas serão obtidas. Isto é o que a função de produção deve capturar.

A produção de bens e serviços de uma economia é caracterizada

pelo seu Produto Interno Bruto, PIB, o qual depende, basicamente, de dois elementos: os fatores de produção e da sua função de produção. Os fatores de produção são insumos utilizados para produzir bens e serviços (Capital e Trabalho são os mais importantes). A função de produção é caracterizada pela tecnologia de produção disponível, a qual determina a magnitude do produto gerado por determinadas quantidades de capital e trabalho. A função de produção indica como os fatores de produção determinam a quantidade de produto ou a Renda Nacional. De uma forma mais complexa, a função de produção pode ser descrita como segue:

$$Y(t) = F(K(t), H(t), A(t), L(t)). \quad (3.1)$$

Esta função de produção que caracteriza a Renda Nacional, Y , é uma função de quatro variáveis: Mão-de-Obra, L , Capital Físico, K , Capital Humano H e Tecnologia, A . Sendo que o modelo é definido em tempo contínuo.

O mercado de fatores de produção é decomposto, intuitivamente, em dois setores: um setor de produção e um setor de P&D, onde o estoque de conhecimento é gerado. Uma fração da força de mão-de-obra, denominada de a_L , é utilizada no setor de P&D e uma fração da mão-de-obra, $(1 - a_L)$, é utilizada no setor de produção de mercadorias. Da mesma forma, uma fração a_K do estoque de capital é usada em P&D e o resto em produção de mercadorias; isto é, $(1 - a_K)$.

Deste modo, a função de produção gerada ao longo do tempo pode ser escrita explicitamente como segue:

$$Y(t) = [(1 - a_K)K(t)]^\alpha H(t)^\varphi [(1 - a_L)A(t)L(t)]^{\theta - \varphi}, \quad (3.2)$$

com $\alpha > 0$, $\varphi > 0$ e $\alpha + \varphi \leq 1$. O parâmetro θ reflete a elasticidade do produto em relação ao estoque de trabalho. Já α é a elasticidade do produto em relação ao capital. Por sua vez, φ é a elasticidade do produto em relação ao capital humano.

Como o presente trabalho está fazendo uma análise dinâmica é interessante saber a taxa de crescimento do produto da economia. Esta, pode ser obtida por $\frac{\dot{Y}}{Y}$, onde o ponto sobre a variável representa a derivada em relação ao tempo (ou seja, \dot{Y} é uma representação de

$\frac{dY(t)}{dt}$). Assim,

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= \alpha[(1 - a_k)K(t)]^{(\alpha-1)}(1 - a_k)\frac{dK(t)}{dt}H(t)^\varphi[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)} \\ &\quad + \varphi[(1 - a_k)K(t)]^\alpha H(t)^{\varphi-1}\frac{dH(t)}{dt}[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)} \\ &\quad + (\theta - \varphi)[(1 - a_k)K(t)]^\alpha H(t)^\varphi[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)-1}(1 - a_l)A(t)\frac{dL(t)}{dt} \\ &\quad + (\theta - \varphi)[(1 - a_k)K(t)]^\alpha H(t)^\varphi[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)-1}(1 - a_l)L(t)\frac{dA(t)}{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= \alpha\frac{[(1 - a_k)K(t)]^\alpha}{(1 - a_k)K(t)}(1 - a_k)\frac{dK(t)}{dt}H(t)^\varphi[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)} \\ &\quad + \varphi[(1 - a_k)K(t)]^\alpha\frac{H(t)^\varphi}{H(t)}\frac{dH(t)}{dt}[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)} \\ &\quad + (\theta - \varphi)[(1 - a_k)K(t)]^\alpha H(t)^\varphi\frac{[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)}}{[(1 - a_l)A(t)L(t)]}(1 - a_l)A(t)\frac{dL(t)}{dt} \\ &\quad + (\theta - \varphi)[(1 - a_k)K(t)]^\alpha H(t)^\varphi\frac{[(1 - a_l)A(t)L(t)]^{(\theta-\varphi)}}{[(1 - a_l)A(t)L(t)]}(1 - a_l)L(t)\frac{dA(t)}{dt},\end{aligned}$$

o que resulta em:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha\left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)}\right) + \varphi\left(\frac{\dot{H}(t)}{H(t)}\right) + (\theta - \varphi)\left(\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\right) + (\theta - \varphi)\left(\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\right). \quad (3.3)$$

Ou seja, a taxa de crescimento do produto é uma média ponderada das taxas de crescimento de capital, capital humano, trabalho e tecnologia.

O produto é dividido entre consumo e investimento e assim, considera-se o pressuposto usual sobre a dinâmica de K , dado por:

$$\dot{K}(t) = s_k Y(t) - \delta_K K(t), \quad (3.4)$$

onde s_k denota a fração de renda que é devotada à acumulação de capital físico, ou seja, investimento na economia e δ_K representa a depreciação do capital físico.

A Equação (3.4) pode ser escrita numa forma mais apropriada, tal como:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s_k(1 - a_k)^\alpha [K(t)]^{\alpha-1} H(t)^\varphi [A(t)(1 - a_L)L(t)]^{\theta-\varphi} - \delta_K. \quad (3.5)$$

No modelo proposto para a economia brasileira será considerado que o número de trabalhadores, ou seja, de trabalho, cresce a uma taxa exógena determinada pela Eq. (3.6). Uma justificativa para isto é que o governo brasileiro não possui nenhuma política significativa de controle da natalidade ou de processos imigratórios de mão-de-obra.

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (3.6)$$

O nível de tecnologia e de capital humano também crescem exogenamente a taxas g e j . Assim, a mudança tecnológica e o desenvolvimento de capital humano não são explicitados neste modelo, mas o governo pode agir sobre estes elementos alterando os parâmetros a_k e a_l ou atuando com uma política de alteração da elasticidade do produto em relação ao capital humano, φ . Desta forma tem-se:

$$\dot{A}(t) = gA(t) \quad (3.7)$$

e

$$\dot{H}(t) = jH(t). \quad (3.8)$$

Nas Equações (3.6), (3.7) e (3.8) os parâmetros n , g e h são exógenos. Lembrando que a taxa de crescimento de uma variável é dada por $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, por exemplo. Assim, isto implica que a taxa de crescimento de L é igual a g . Nas equações para tecnologia e capital humano a interpretação é a mesma.

Para Romer (2011), uma propriedade interessante é que a taxa de crescimento de uma variável é igual a taxa de mudança do seu logaritmo natural. Ou seja, por exemplo, $\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{d \ln L(t)}{dt}$. Aplicando este resultado, tem-se que as taxas de mudança dos logs de L , A e H são iguais a n , g e h , respectivamente. Assim,

$$\ln L(t) = [\ln L(0)] + nt$$

$$\ln A(t) = [\ln A(0)] + gt$$

$$\ln H(t) = [\ln H(0)] + jt.$$

Onde $L(0)$, $A(0)$ e $H(0)$ são os valores de L , A e H no tempo 0.

Aplicando exponencial em ambos os lados destas equações chega-se a:

$$L(t) = L(0)e^{(nt)} \quad (3.9)$$

$$A(t) = A(0)e^{(gt)} \quad (3.10)$$

$$H(t) = H(0)e^{(jt)}. \quad (3.11)$$

A partir das Eq's. (3.5) e (3.9) até (3.11) é possível reescrever a Eq. do produto, (3.3):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & (\alpha(s_k(1 - a_k)^\alpha [K(t)]^{\alpha-1} [H(0)e^{(jt)}]^\varphi [A(0)e^{(nt)}(1 - a_L)L(0)e^{(gt)}]^\theta)^{\theta-\varphi} \\ & - \delta_K(t)) + \varphi(j) + (\theta - \varphi)(n) + (\theta - \varphi)(g))Y(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Neste modelo, tanto o investimento em capital físico, s_k , como a fração da mão-de-obra utilizada na produção de mercadorias, $(1 - a_l)$, bem como a fração do estoque de capital utilizada na produção de mercadorias, $(1 - a_k)$ são considerados como variáveis controláveis ou variáveis de decisão. Devido à metodologia que este trabalho irá utilizar para responder ao problema de pesquisa, que será apresentada no próximo capítulo, será necessário trabalhar com os dois últimos itens de forma agregada. Portanto, pode-se considerar que $u_3 = (1 - a_k)^\alpha (1 - a_L)^{\theta-\varphi}$ e que $u_4 = sk$. No entanto, no capítulo referente aos resultados do trabalho u_3 será decomposto para que possa ser obtida uma interpretação de como $(1 - a_l)^{\theta-\varphi}$ e $(1 - a_k)^\alpha$ devem ser alterados para que o crescimento econômico atinja os patamares desejados. Assim, com estes controles é possível reescrever (3.2), (3.3) e (3.4), como segue:

$$Y(t) = u_3 [K(t)]^\alpha [H(0)e^{(jt)}]^\varphi [A(0)e^{(nt)}L(0)e^{(gt)}]^\theta - \varphi \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & (\alpha(u_4(u_3[K(t)]^{\alpha-1} [H(0)e^{(jt)}]^\varphi [A(0)e^{(nt)}L(0)e^{(gt)}]^\theta)^{\theta-\varphi} - \delta_K(t)) \\ & + \varphi(j) + (\theta - \varphi)(g) + (\theta - \varphi)(n))Y(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\dot{K}(t) = u_4 Y(t) - \delta_K(t)K(t). \quad (3.15)$$

Como o objetivo deste trabalho não é explicar a diferença da renda per capita entre os países, mas sim analisar a relação entre crescimento econômico e emissões de CO_2 este modelo é suficientemente elaborado. Na próxima seção serão desenvolvidos os modelos de emissão de CO_2 e área florestal.

3.2 MODELAGEM DAS EMISSÕES DE CO_2

Neste trabalho, será utilizado um indicador físico, proposto por Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008) para verificar o comportamento das emissões de CO_2 , ao invés de indicadores baseados na utilidade (PITTEL, 2002). Assim, o fluxo de emissões de CO_2 , definido por X , também será pode ser formulado a partir da seguinte equação:

$$\dot{X}(t) = rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{s}\right) - \text{Balanço } CO_2. \quad (3.16)$$

Sendo que r indica a taxa de emissão de dióxido de carbono, s o nível de saturação atmosférica e o Balanço de CO_2 pode ser definido como

$$\text{Balanço } CO_2 = \text{Eliminação } CO_2 - \text{Produção } CO_2. \quad (3.17)$$

Desta maneira, há que se determinar quais os fatores que influenciam a eliminação e produção de CO_2 . Neste modelo, é considerado que a eliminação de CO_2 é afetada pela proporção de gás carbônico retirado da atmosfera por área florestal, α_1 . E a produção de CO_2 depende positivamente parcela do PIB que se converte em aumento de emissões, α_2 e negativamente da porcentagem do PIB investida em tecnologias limpas, u_2 , assim:

$$\text{Eliminação } CO_2 = \alpha_1 F(t), \quad (3.18)$$

$$\text{Produção } CO_2 = \alpha_2 Y(t) - u_2 Y(t). \quad (3.19)$$

u_2 pode representar, por exemplo, como foi descrito no capítulo passado, os investimentos necessários para a especialização da estrutura de produção e tecnologia nacional do mercado de energia eólica. Bem como no investimento de opções inovadoras para a produção de biocombustíveis.

Trabalhando com as Equações (3.16)-(3.19) chega-se na Eq. (3.20), que define o comportamento das emissões de CO_2

$$\dot{X}(t) = rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{s}\right) - \alpha_1 F(t) + (\alpha_2 - u_2)Y(t). \quad (3.20)$$

3.3 EQUAÇÃO PARA ÁREA FLORESTAL

Para modelar a área florestal, será utilizada a equação definida por Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008). Assim, a área florestal no instante t , depende do estoque inicial florestal, f_0 , dos incentivos ao reflorestamento e da taxa de depleção florestal:

$$F(t) = f_0 + \int_0^t \text{Incentivo ao reflorestamento} - \int_0^t \text{Depleção florestal}, \quad (3.21)$$

onde o incentivo ao reflorestamento é representado por:

$$\text{Incentivo ao reflorestamento} = u_1 Y(t) \quad (3.22)$$

e a depleção florestal por:

$$\text{Depleção florestal} = hF(t). \quad (3.23)$$

Sendo que o coeficiente u_1 representa a intensidade dos incentivos direcionados ao reflorestamento, ou seja, a parcela do PIB dedicada para este fim. Por sua vez, h é uma constante que representa a taxa de depleção florestal e que conjuga uma variedade de fatores, tais como expansão do gado, incêndios, extrativismo de madeira, dentre outros.

Combinando (3.21)-(3.23), a equação diferencial que descreve a dinâmica da área florestal é:

$$\dot{F}(t) = u_1 Y(t) - hF(t). \quad (3.24)$$

3.4 SÍNTESE DO MODELO

Conforme a seção anterior foram desenvolvidas equações diferenciais para modelar a dinâmica do crescimento econômico, área florestal e crescimento econômico. Este modelo determinístico pode ser sintetizado no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= rX(t)\left(1 - \frac{X(t)}{s}\right) - \alpha_1 F + (\alpha_2 - u_2)Y(t) \\ \dot{F}(t) &= u_1 Y(t) - hF(t) \\ \dot{Y}(t) &= (\alpha(u_4 u_3 [K(t)]^{\alpha-1} [H(0)e^{(jt)}]^\varphi [A(0)L(0)e^{((g+n)t)}]^\theta - \varphi) - \delta_K) \\ &\quad + \varphi(j) + (\theta - \varphi)(g + n)Y(t) \\ \dot{K}(t) &= u_4 Y(t) - \delta_K K(t). \end{cases} \quad (3.25)$$

No Sistema 3.25, u_1 , u_2 , u_3 e u_4 são variáveis de controle para serem especificadas, tal que as variáveis de estado $\dot{X}(t)$, $\dot{F}(t)$, $\dot{Y}(t)$ e $\dot{K}(t)$ podem atingir um estágio de referência desejado. O procedimento para isso é explicado com maior detalhamento no próximo capítulo.

4 METODOLOGIA

Conforme a seção anterior, foi desenvolvido um sistema dinâmico determinístico que captura a dinâmica das emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico. No entanto, de acordo com Chen e Lin (2011), para que a real dinâmica do sistema seja considerada, os parâmetros estabelecidos neste sistema devem flutuar de tempo em tempo por causa dos diferentes desenvolvimentos regionais ou situações imprevisíveis. Além do mais, distúrbios externos devido a erros na modelagem também devem ser considerados. Desta forma, é proposto um modelo estocástico não-linear.

De forma a gerenciar eficientemente os recursos disponíveis, um modelo robusto de trajetória de controle é projetado para forçar os recursos a seguirem uma trajetória de referência desejada. O pior caso dos efeitos das flutuações paramétricas estocásticas, distúrbios externos e incerteza na condição inicial na trajetória de performance é considerado e minimizado a partir de uma perspectiva de teoria dos jogos dinâmicos. Este problema de jogo estocástico, no qual um jogador (incerteza estocástica) maximiza a trajetória de erro e o outro jogador (input de controle) minimiza a trajetória de erro, pode ser considerado equivalente a um problema de trajetória robusta minimax (CHEN; LIN, 2011).

Não obstante, como o sistema é não-linear, não é fácil resolver o problema de controle robusto pela técnica de jogos dinâmicos não-lineares diretamente. Recentemente, sistemas *fuzzy* tem sido empregados para aproximar eficientemente sistemas dinâmicos não-lineares para resolver problemas de controle não-linear (CHEN; TSENG; UANG, 1999). Assim, um modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) é proposto para interpolar diversos sistemas linearizados em diferentes pontos de operação para aproximar o sistema via funções de pertinência (*membership functions*). Então, com a ajuda da aproximação Takagi-Sugeno, um jogo dinâmico *fuzzy* é utilizado tal que a trajetória de controle robusta minimax pode ser resolvida pelo método de jogos dinâmicos lineares, que subsequentemente pode ser resolvido por uma otimização restrita via LMI's com a ajuda do *toolbox* de controle robusto do software Matlab (BOYD et al., 1994).

4.1 SOLUÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA

O primeiro passo da metodologia é a solução do sistema (3.25), presente na p. 65, é a identificação dos seus parâmetros com os dados reais aplicados ao estudo de caso. No modelo proposto foram utilizadas equações diferenciais. Este tipo de equação envolve tanto uma variável como sua derivada. Assim, sua solução gira em torno de tentativas de se descobrir quais são as funções, inicialmente desconhecidas, que geraram as derivadas incorporadas às equações estudadas (SHONE, 2002).

Entretanto, como o sistema utilizado neste trabalho é não-linear, é muito difícil chegar em uma solução analítica. Assim, é necessário fazer o uso de métodos de integração numérica. De acordo com Dadkhah (2011), os diagramas de fase são uma forma de analisar qualitativamente, e assim ganhar *insights* sobre o comportamento de equações diferenciais. Porém, se é necessário especificar o formato das funções envolvidas e assinalar valores numéricos para os parâmetros contidos nas equações, devem ser utilizados algoritmos numéricos para simular o comportamento exato das equações diferenciais. Um grupo importante de algoritmos numérico utilizado na solução de equações diferenciais é o de *Runge-Kutta*. Provavelmente, dentro deste grupo o método mais famoso e utilizado é o *Runge-Kutta* de quarta ordem e é o método que será utilizado neste trabalho. Este método está disponível no *software* Matlab por meio da sub-rotina `ode45` (MATHWORKS, 2015).

Ainda assim, é necessário realizar o ajuste dos valores dos parâmetros de forma que o comportamento do modelo seja o mais fiel possível ao comportamento do dados reais utilizados. Isto é chamado de identificação de sistemas. Segundo Sá (2003), existem duas abordagens para fazer a identificação de um sistema: pode-se ajustar os parâmetros simplesmente por tentativa e erro, a chamada identificação de sistema manual, ou utilizar procedimentos matemáticos/computacionais para fazer o ajuste de pelo menos alguns parâmetros, o que é chamada identificação de sistema automática. Para este autor na maioria das vezes a identificação de sistemas dinâmicos é realizada exclusivamente por tentativa e erro, devido as dificuldades para implementação de procedimentos automáticos.

Neste trabalho será realizada uma identificação de sistema manual, pois o volume de trabalho para realizar uma calibração automática é bem maior do aquele necessário para o desenvolvimento de uma dissertação de mestrado. Para tanto, é necessária a pesquisa para obtenção de dados reais, como valores iniciais para as variáveis em questão, séries históricas destas para comparação com os valores simulados e dados

que nos permitam calcular o valor dos parâmetros do modelo. Para a realização do ajuste dos parâmetros para que o modelo possa chegar o mais próximo possível dos dados reais devem ser realizados testes e simulações. Ou seja, devem ser feitas várias simulações, alterando nelas os parâmetros do modelo, de modo que fosse encontrado um modelo que tivesse um baixo erro em comparação aos dados reais (FORBES, 2010).

4.2 MODELO ESTOCÁSTICO COM FLUTUAÇÕES PARAMÉTRICAS E DISTÚRBIOS EXTERNOS

De acordo com Caetano, Gherardi e Yoneyama (2008), o sistema (3.25) tem algumas limitações como:

1. A natureza determinística do crescimento econômica (expressado pelo PIB);
2. Dificuldade de limitação da área geográfica, como um país, em sentido político, pode afetar um estado vizinho;
3. Ausência de parâmetros variando no tempo para adaptar o modelo para situações de mudança.

Visando superar a primeira e a terceira limitação, é necessário transformar o sistema (3.25) de determinístico para estocástico. Porém, antes de propor esta transformação é conveniente descrever algumas definições sobre equações diferenciais estocásticas.

De acordo com Oksendal (1992), se é permitido que algum ruído seja incorporado nos coeficientes de equações diferenciais é obtido um modelo matemático mais realístico da situação. Um exemplo sobre isso pode ser explicitado em um modelo de crescimento populacional simples que segue a seguinte equação:

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0, \quad (4.1)$$

onde $N(t)$ é o tamanho da população no tempo t , e $a(t)$ é a taxa de crescimento relativa no tempo t . Na maioria dos casos $a(t)$ não é completamente conhecida, mas sujeita a algumas flutuações e alguns efeitos aleatórios devido ao ambiente. Assim, é interessante modelar $a(t)$ como:

$$a(t) = r(t) + \text{“ruído”}, \quad (4.2)$$

onde não se sabe exatamente o comportamento do termo de ruído, somente sua função de distribuição de probabilidade e o termo $r(t)$ é assumido sendo não aleatório.

Neste sentido, uma equação diferencial que é obtida por meio da permissão de flutuação aleatória nos coeficientes mais um termo de ruído aleatório é chamada de equação diferencial estocástica. De modo geral, uma equação diferencial estocástica tem a seguinte representação:

$$\dot{x}(t) = a(x(t)) + b(x(t))n(t),$$

onde $x(t)$ é um processo estocástico; $a(x(t))$ e $b(x(t))$ são funções de $x(t)$; $n(t)$ é um ruído branco padrão com média zero e variância unitária que denotam a flutuação randômica, que pode ser considerada como a derivada de um processo de *Wiener* (ou movimento browniano). A equação estocástica de *Ito* é representada por:

$$dx(t) = a(x(t))dt + b(x(t))dw(t) \quad (4.3)$$

onde $w(t)$ denota um processo de *Wiener* padrão, ou seja, $dw(t) = n(t)dt$.

Para simular a dinâmica estocástica do sistema (3.25), as flutuações paramétricas e distúrbios externos devem ser considerados no seguinte modelo estocástico:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= (r + \Delta r)X(t)(1 - \frac{X(t)}{s}) - (\alpha_1 + \Delta\alpha_1)F + ((\alpha_2 + \Delta\alpha_2) - u_2)Y(t) + v_1(t) \\ \dot{F}(t) &= u_1Y(t) - (h + \Delta h)F(t) + v_2(t) \\ \dot{Y}(t) &= (\alpha(u_4u_3[K(t)]^{\alpha-1}[H(0)e^{((j+\Delta j)t)]^\varphi}[(A(0)L(0)e^{((g+\Delta g)+(n+\Delta n)t)})]^{\theta-\varphi} \\ &\quad - (\delta_K + \Delta\delta_K)) + \varphi(j + \Delta j) + (\theta - \varphi)((g + \Delta g) + (n + \Delta n))Y(t) + v_3(t) \\ \dot{K}(t) &= u_4Y(t) - (\delta_K + \Delta\delta_K)K(t) + v_4(t), \end{cases} \quad (4.4)$$

onde Δr , $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, Δh , Δn , Δg , Δj e $\Delta\delta_K$ denotam as flutuações paramétricas dos coeficientes. $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ e $v_4(t)$ representam os distúrbios externos, devido a erros na modelagem e ruídos ambientais.

Por conveniência da análise, o sistema (4.4) pode ser representado na forma de um sistema estocástico de *Ito*, que pode ser escrito de forma geral por:

$$dx(t) = (f(x(t)) + g(x(t))u(t) + v(t))dt + h(x(t))dw(t), \quad x(0) = x_0, \quad (4.5)$$

onde $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t) \dots u_m(t)]^T$ e $v(t) = [v_1(t) \dots v_n(t)]^T$ representam o vetor de estados, o vetor de inputs de controle e o vetor de distúrbios, respectivamente. $f(x(t)) \in R^{n \times 1}$ denota o vetor de interação não linear sobre os estados do sistema de emissões de CO_2 . Já $g(x(t)) \in R^{r \times m}$ representa a matriz de inputs de

controle. Por sua vez, $f(x(t)) \in R^{n \times 1}$ denota o vetor de parâmetros dependente dos ruídos.

Deste modo, o sistema pode ser escrito na forma matricial como segue:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} dX \\ dF \\ dY \\ dK \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} rX(1 - \frac{X}{s}) - \alpha_1 F + \alpha_2 Y \\ -hF \\ (\alpha(-\delta_K) + \varphi(j) + (\theta - \varphi)(g) + (\theta - \varphi)(n))Y(t) \\ -\delta_K K(t) \end{bmatrix} dt + \\
 &\begin{bmatrix} -u_2 Y(t) \\ u_1 Y(t) \\ (\alpha(u_4 u_3 [K(t)^{(\alpha-1)}][H(0)e^{(jt)}]^\varphi [A(0)L(0)e^{((g+n)t)]^{(\theta-\varphi)}})Y(t) \\ u_4 Y(t) \end{bmatrix} dt \\
 &+ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \delta_1 X(1 - \frac{X}{s}) - \delta_2 F + \delta_3 Y \\ -\delta_4 F \\ (\alpha(-\delta_8) + \varphi(\delta_7) + (\theta - \varphi)(\delta_6 + \delta_5))Y(t) \\ -\delta_8 K(t) \end{bmatrix} dw(t). \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

4.3 MODELO DE REFERÊNCIA

A próxima etapa da metodologia é elaborar um modelo de referência para o sistema estocástico (4.5). Este, pode representar um *output* desejado para os estados do sistema estocástico e tem a seguinte forma:

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t). \tag{4.7}$$

Onde $x_r(t) \in R^{n \times 1}$ é o vetor de estado de referência, $A_r \in R^{n \times n}$ é uma matriz específica assintoticamente estável, $r(t)$ é o sinal de referência desejado. Baseado no modelo do controle do trajeto de referência, A_r e $r(t)$ são especificados anteriormente pelo modelador, baseados em alguns padrões a priori, para determinar a resposta transitória e o estado estacionário do modelo de referência. Assim, o sinal de referência desejado pode ser interpretado como um guia para o sistema de controle de rastreamento, ou seja, $x_r(t)$ pode representar o estado final desejado para o sistema estocástico de emissões de CO_2 em (4.5).

4.4 MODELO ROBUSTO DE CONTROLE DA TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA

Depois do desenvolvimento do modelo estocástico, para descrever o sistema dinâmico com incertezas a partir de flutuações paramétricas e distúrbios externos, e do modelo de referência, que deve reproduzir a dinâmica desejada do sistema. Finalmente, um modelo robusto de controle da trajetória de referência deve ser proposto para gerenciar os recursos disponíveis. Assim, o sistema estocástico para emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico pode rastrear o resultado desejado no modelo de referência, apesar das flutuações paramétricas e distúrbios externos. Como o conhecimento estatístico das flutuações paramétricas, distúrbios externos e a incerteza na condição inicial nem sempre estão disponíveis, baseado em uma teoria de controle robusto H^∞ ¹, o pior caso de efeito das flutuações paramétricas distúrbios externos e da incerteza na condição inicial no caminho de erro devem ser minimizadas pelos esforços de controle, tal que todos os possíveis efeitos no caminho de referência desejado, devido a estas incertezas podem ser atenuados o máximo possível (CHEN; LIN, 2011).

Para Mozelli (2008), o índice de desempenho H^∞ visa reduzir os efeitos de sinais de distúrbios incertos. Ou seja, busca-se reduzir o efeito de entradas desconhecidas, que atuam como distúrbio nas saídas do sistema, por meio de um critério de desempenho no domínio da frequência. Assim, o problema consiste em se determinar controladores que obtenham o valor ótimo, ρ_{min} , ou garantam um valor prescrito, ρ , da norma H^∞ em um ambiente de incerteza, no qual se tem pouca ou nenhuma informação sobre o conteúdo espectral dos sinais que perturbam o sistema. Esta estratégia é interessante, pois garante-se um desempenho mínimo mesmo no pior caso. Portanto, a filosofia do controle H^∞ é de se preparar para o pior e buscar o melhor desempenho para o pior caso possível.

Başar e Bernhard (2008) abordam que o problema de controle ótimo H^∞ pode ser considerado um problema de otimização minimax. A estratégia minimax, na teoria dos jogos, refere-se a uma estratégia que visa a minimização da perda máxima possível. Isto é, seu significado é o mesmo que o do controle H^∞ . Neste caso, o controle pode ser visto como um jogador que atua por meio da minimização e o distúrbio atua como um jogador maximizador. Isto significa que ambos os jogadores

¹O símbolo matemático H^∞ significa o *Hardy space* de todas as funções complexas valoradas de variáveis complexas, que são analíticas e limitadas na metade direita do plano complexo (BAŞAR; BERNHARD, 2008).

tem, diametralmente, interesses opostos. Neste sentido, tem-se um jogo com soma nula, pois os ganhos dos jogadores somam zero.

Deste modo, o modelo robusto para o trajeto de referência tem como objetivo conceber $u(t)$ para fazer $x(t)$ em (4.5) seguir o trajeto desejado $x_r(t)$, tal que a trajetória de erro $\tilde{x}(t) = x(t) - x_r(t)$ deve ser o menor possível, apesar das influências das flutuações paramétricas, distúrbios externos e incerteza na condição inicial $x(0)$ em (4.5). Assim, as flutuações paramétricas, distúrbios externos e incerteza na condição inicial são considerados um jogador que maximiza a trajetória de erro. Enquanto que o controle do gerenciamento dos recursos é considerado outro jogador que minimiza a trajetória de erro. Este problema de jogo estocástico pode ser equivalente a um problema de trajetória robusta minimax.

Tanto o trajeto minimax e a robustez contra as incertezas $v(t)$, $x(0)$ e $r(t)$ devem ser alcançadas simultaneamente seguindo o jogo estocástico

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} \frac{E \int_0^{t_f} (\tilde{x}(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t))dt}{E \int_0^{t_f} (v^T(t)v(t) + r^T(t)r(t))dt + \tilde{x}(0)\tilde{x}(0)} \quad (4.8)$$

sujeito a 4.5 e a 4.7.

Onde E representa a esperança e as matrizes de pesos Q e R são assumidas diagonais como segue:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Os elementos diagonais, q_{ii} , da matriz Q representam a punição ao caminho de erro correspondente e os elementos da diagonal de R denotam o custo de controle relativo.

Como o pior caso de efeito de $v(t)$, $r(t)$ e $x(0)$ no caminho de erro $\tilde{x}(t)$ é minimizado pelo esforço de controle $u(t)$, a partir do princípio da energia, o jogo estocástico em (4.8) é adequado para um problema de trajeto robusto minimax no qual as estatísticas de $v(t)$, $\tilde{x}(t)$ e $r(t)$ são desconhecidas ou incertas, o que é sempre encontrado em um caso prático de projeto de controle.

Como não é fácil resolver o problema de trajeto robusto minimax em (4.8), sujeito a (4.5) e (4.7) diretamente, é proposto um limite superior, ρ^2 , de acordo com o índice de desempenho H^∞ , para que

então possa ser formulado um problema de trajetória minimax sub-ótima. Depois disso, o problema minimax é resolvido primeiramente, então o limite superior ρ^2 é decrescido o menor possível para aproximar o problema de trajeto robusto minimax real do sistema estocástico (BASAR; OLSDER, 1999; CHEN; TSENG; UANG, 1999). Assim, o problema (4.8) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} \frac{E \int_0^{t_f} (\tilde{x}(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t))dt}{E \int_0^{t_f} (v^T(t)v(t) + r^T(t)r(t))dt + \tilde{x}(0)\tilde{x}(0)} \leq \rho^2 \quad (4.9)$$

sujeito a 4.5 e a 4.7.

Desde que o denominador de (4.9) é independente de $u(t)$ e não é zero, a Eq. (4.9) é equivalente a

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} E \int_0^{t_f} & (\tilde{x}(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t) \\ & - \rho^2 v^T v(t) - \rho^2 r^T(t)r(t))dt \\ & \leq \rho^2 E\{\tilde{x}(0)x(0)\}, \quad \forall \tilde{x}(0). \end{aligned} \quad (4.10)$$

É possível denotar:

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} J(u(t), v(t), r(t)) = & \min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} E \int_0^{t_f} (\tilde{x}(t)Q\tilde{x}(t) + u^T(t)Ru(t) \\ & - \rho^2 v^T v(t) - \rho^2 r^T(t)r(t))dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A partir da análise acima, o problema de jogo estocástico em 4.10 e 4.11 é equivalente a achar o pior caso dos distúrbios $v^*(t)$ e o sinal de referência $r^*(t)$ que maximizam $J(u(t), v(t), r(t))$ e o controle de trajeto minimax $u^*(t)$ que maximiza $J(u(t), v^*(t), r^*(t))$, tal que o valor minimax $J(u^*(t), v^*(t), r^*(t))$ é menor do que $\rho^2 E\{\tilde{x}(0)x(0)\}$, ou seja,

$$\begin{aligned} J(u^*(t), v^*(t), r^*(t)) = & \min_{u(t)} J(u(t), v^*(t), r^*(t)) \\ = & \min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} J(u(t), v(t), r(t)) \\ & \leq \rho^2 E\{\tilde{x}(0)x(0)\}, \quad \forall \tilde{x}(0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se existir $u^*(t)$, $v^*(t)$ $r^*(t)$ tal que o problema robusto minimax em (4.12) seja resolvido. Assim, eles podem satisfazer o jogo estocástico em (4.9). Desta forma, o primeiro passo do trajeto de controle robusto

minimax do sistema é resolver o seguinte problema de trajeto minimax:

$$\min_{u(t)} \max_{v(t), r(t)} J(u(t), v(t), r(t)) \quad (4.13)$$

sujeito a (4.5) e ao modelo de referência desejado, representado pela Eq. (4.7).

Depois disso, o próximo passo é checar se a condição $J(u^*(t), v^*(t), r^*(t)) \leq \rho^2 E\{\tilde{x}(0)x(0)\}$ é satisfeita ou não para qualquer $\tilde{x}(0)$.

Em geral, não é fácil resolver o problema minimax em (4.13) diretamente. Por isso, Chen e Lin (2011) abordam que é conveniente transformá-lo em um problema equivalente de regulação minimax, ou seja, um sistema estocástico aumentado.

$$d\bar{x}(t) = (F(\bar{x}(t)) + G(\bar{x}(t))u(t) + \bar{C}\bar{v}(t))dt + H(\bar{x}(t))dw(t), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0. \quad (4.14)$$

Onde:

$$\begin{aligned} F(\bar{x}(t)) &= \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ A_r x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix}, \\ G(\bar{x}(t)) &= \begin{bmatrix} g(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H(\bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} h(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sendo que I é uma matriz identidade com a dimensão do sistema estocástico. Desta maneira, o problema de trajeto minimax em (4.13) pode ser reescrito na forma do seguinte problema de regulação minimax:

$$\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) = \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \int_0^{t_f} (\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \rho^2 \bar{v}^T \bar{v}(t)) dt, \quad \forall \bar{x}(0) \quad (4.16)$$

sujeito a 4.14. Onde $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}$.

Assim, o problema robusto de trajeto minimax em (4.12) é equivalente ao seguinte problema de regulação minimax restrito.

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \int_0^{t_f} (\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \rho^2 \bar{v}^T \bar{v}(t)) dt \\ \leq \rho^2 E\{\bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0)\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

sujeito a (4.14). Onde $\bar{I} = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}$.

Teorema 1. *O jogo estocástico em (4.17) para um controle robusto do sistema estocástico de emissões de CO_2 pode ser resolvido pelo seguinte controle de trajeto minimax u^* e o pior caso de distúrbio \bar{v}^* (CHEN; LIN, 2011).*

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}G^T(\bar{x}(t))\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \quad (4.18)$$

$$\bar{v}^*(t) = \frac{1}{2\rho^2}\bar{C}^T\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \quad (4.19)$$

onde $V(\bar{x}(t)) > 0$ é a solução positiva para o HJI²

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}\right)^T F(\bar{x}(t)) + \bar{x}^T \bar{Q}\bar{x}(t) \\ & -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}\right)^T G(\bar{x}(t))R^{-1}G^T(\bar{x}(t))\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \\ & +\frac{1}{4\rho^2}\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)}\right)^T \bar{C}\bar{C}^T\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \\ & +\frac{1}{2}H^T(\bar{x}(t))\frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)}H(\bar{x}(t)) < 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

com

$$E(V(\bar{x}(0))) \leq \rho^2 E\{\bar{x}^T(0)\bar{I}\bar{x}(0)\}. \quad (4.21)$$

Prova: Ver anexo A.

Desde que ρ^2 é o limite superior do problema de trajeto minimax em (4.9), baseado na análise acima, o trajeto de controle minimax $u^*(t)$ e o pior caso de distúrbios $\bar{v}^*(t)$ ainda são necessários para minimizar o limite superior ρ^2 como segue

$$\rho_0^2 = \min_{V(\bar{x}(t)) > 0} \rho^2 \quad (4.22)$$

sujeito a 4.20 e 4.21.

Depois de resolver $V(\bar{x})$ e ρ_0^2 a partir da otimização restrita (4.22). A solução $V(\bar{x})$ é substituída em (4.18) para obter trajeto de controle robusto minimax $u^*(t)$, para o sistema estocástico de emissões de CO_2 e crescimento econômico alcançar o trajeto robusto minimax do modelo de referência desejado, apesar das flutuações paramétricas intrínsecas e distúrbios externos.

²HJI significa Hamilton-Jacobi-Isaacs, que denomina uma equação diferencial parcial

4.5 CONTROLE DE TRAJETÓRIA ROBUSTA MINIMAX VIA MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO *FUZZY*

Em geral, não existe solução analítica ou numérica para resolver o HJI em (4.20) de forma que seja resolvido o problema de otimização restrita em (4.22). Recentemente, segundo Chen e Lin (2011) o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno tem sido aplicado para aproximar o sistema não-linear interpolando diversos sistemas linearizados em diferentes pontos de operação. Assim, o problema de jogo dinâmico não-linear pode ser transformado em um jogo dinâmico *fuzzy*. Utilizando esta abordagem, o HJI pode ser trocado por um conjunto de LMI's. Nesta situação, o jogo dinâmico não-linear (4.9) pode ser resolvido por um método de jogo estocástico *fuzzy* com o objetivo de arquitetar o trajeto de controle robusto minimax.

Desta forma, nesta seção primeiramente é apresentado o conceito de sistemas *fuzzy*, logo após é abordado um sistema *fuzzy* particular, Takagi-Sugeno, que será utilizado para solucionar o problema de pesquisa proposto. Também é destinada uma sub-seção para o entendimento das LMI's e por fim é abordada a solução do jogo estocástico *fuzzy* proposto.

4.5.1 Fundamentos *fuzzy*

Zadeh (1965), propôs uma teoria sobre conjuntos *fuzzy* afim de criar uma forma alternativa de modelar sistemas complexos e tratar o aspecto vago da informação. Nesta classe de sistemas, é conveniente tratar as informações imperfeitas por meio de raciocínio aproximado. A imperfeição nas informações é composta de dois aspectos: a imprecisão e a incerteza. Sendo que estas duas características são intrinsecamente ligadas e opostas entre si: de forma que quanto mais se aumenta a incerteza mais se diminui a imprecisão e vice-versa³(SANDRI; CORREA, 1999).

Existem teorias bem difundidas como a teoria dos conjuntos e a teoria de probabilidades, que buscam tratar a imprecisão e incerteza descritas anteriormente. No entanto, para Sandri e Correa (1999) estas teorias não são adequadas para capturar o conjunto de informações

³“Por exemplo, suponhamos que estejamos seguros em dizer que um dado filme começa entre 3h e 4h. Se formos obrigados a dar uma opinião mais precisa, tenderemos a aumentar a incerteza, dizendo, por exemplo, que o filme começará as 3h30 com uma probabilidade diferente de 1. Uma informação imprecisa também pode ser vaga, como por exemplo, quando dizemos que o filme começa por volta das 3h30”(SANDRI; CORREA, 1999, p. c073).

fornecidas pelos seres humanos. Por exemplo, a teoria dos conjuntos não é capaz de tratar o aspecto vago da informação e a teoria das probabilidades é mais adaptada para tratar de informações frequentistas do que aquelas produzidas pelos seres humanos.

Para Coelho (2000), os sistemas *fuzzy* ao contrário dos sistemas baseados em lógica clássica, possuem um formalismo para a representação e inferência de novos conhecimentos que é similar à maneira utilizada pelos seres humanos para expressarem o conhecimento e raciocínio. Com esta virtude, os sistemas *fuzzy* têm, recentemente, emergido como uma abordagem atrativa para o controle de processos complexos. A motivação deve-se ao conhecimento do sistema e ao comportamento dinâmico qualitativo e com incertezas, pois a teoria dos sistemas *fuzzy* providencia uma representação adequada para tal conhecimento. Além disso, os sistemas nebulosos são capazes de manipular simultaneamente tanto os dados numéricos quanto o conhecimento linguístico.

Deste modo, ao longo das últimas décadas, houve um desenvolvimento substancial dos conjuntos e sistemas *fuzzy*, sendo aplicados em sistemas de controle, modelagem de sistemas dinâmicos, previsão de séries temporais, reconhecimento de padrões, inteligência artificial, até mesmo em medicina, logística de transportes ou economia (MOZELLI, 2008). Nas próximas seções, as noções básicas desta teoria serão brevemente apresentadas enfatizando a modelagem *fuzzy* Takagi-Sugeno, por ser o modelo *fuzzy* utilizado nesta dissertação.

4.5.1.1 Conjuntos *fuzzy*

No seu artigo seminal, Zadeh (1965) aborda que os conjuntos *fuzzy* são aqueles cujos limites não são precisos, ou seja, a pertinência em um conjunto desta forma não está em uma forma “*crisp*”, de tal forma que um dado elemento do universo de discurso, domínio ou espaço pertence ou não pertence ao referido conjunto, mas é sim uma questão de grau, ou seja, contém elementos com somente um grau parcial de associação (MATHWORKS, 2014).

Seja X determinado universo de discurso, no qual representa-se um elemento genérico por x , e um determinado conjunto é designado por A . Na teoria clássica de conjuntos, um dado elemento tem caráter binário: o elemento pertence ($x \in A$) ou não pertence ($x \notin A$) ao conjunto. Ou seja, a pertinência é do tipo “tudo ou nada”, “sim ou não”, e não gradual como para os conjuntos *fuzzy* (SANDRI; CORREA, 1999; MOZELLI, 2008).

Por meio de uma função característica f_A é possível definir esta propriedade, fazendo o mapeamento dos elementos do universo de discurso no conjunto binário $\{0, 1\}$:

$$f_A(x) : X \rightarrow \{0, 1\} \quad f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in A \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin A. \end{cases} \quad (4.23)$$

Desta forma, uma dificuldade com a noção tradicional de conjuntos é a necessidade de se definir um limiar rigoroso para separar elementos em conjuntos. Na teoria dos conjuntos *fuzzy* existe um grau de compatibilidade de cada elemento com as propriedades ou características distintas de um determinado conjunto. Um conjunto *fuzzy* é um agrupamento impreciso e indefinido onde a transição de não pertinência para pertinência é gradual, não abrupta (FERREIRA, 2008).

Enquanto que a lógica clássica é bivalente, ou seja, reconhece apenas dois valores (verdadeiro ou falso), a lógica *fuzzy* é multivalente, isto é, reconhece uma variedade de valores, assegurando que a verdade é uma questão de ponto de vista ou de graduação, definindo o grau de veracidade em um intervalo numérico $[0, 1]$. Em outras palavras, o conjunto *fuzzy* é definido como sendo uma classe de objetos com contínuos graus de pertinência, a qual designa a cada objeto um grau de pertinência, definido entre o intervalo $[0, 1]$ (SANTOS, 2005).

Para ilustrar a ideia, considere o problema em determinar os dias que são considerados finais de semana (MATHWORKS, 2014). A maioria das pessoas concorda que sábado e domingo são os dias da semana considerados finais de semana, mas e quanto a sexta-feira? Ela pode fazer parte do final de semana de alguma maneira, mas por algum motivo deve ser tecnicamente excluída. Conjuntos na forma clássica não conseguem tolerar este tipo de classificação. Ou alguma coisa está dentro do conjunto ou não. No entanto, a experiência humana sugere algo diferente.

É claro que de alguma maneira as percepções individuais e o histórico cultural devem ser levados em conta quando se define quais dias constituem o final de semana. Desta maneira, a lógica *fuzzy* se torna uma ferramenta interessante exatamente quando se trabalha sobre como as pessoas realmente percebem o contexto de final de semana, o que é oposto a uma classificação simplória, que tem utilidade somente para fins contábeis.

O que pode-se concluir é que na lógica *fuzzy*, a verdade de qualquer sentença torna-se uma questão de grau. E os seres humanos fazem este tipo de coisa todo tempo. Mas como isto funciona? O raciocínio por trás

da lógica *fuzzy* é apenas uma questão de generalizar a lógica booleana binária. Se é possível enumerar o valor numérico de 1 para uma verdade e 0 para uma falsidade, estes valores indicam que a lógica *fuzzy* também permite valores intermediários como 0,7 ou 0,3, por exemplo:

Pergunta: Sábado é um dia que pertence ao final de semana?

Resposta: 1 (sim, ou verdadeiro).

Pergunta: Terça-feira é um dia que pertence ao final de semana?

Resposta: 0 (não, ou falso).

Pergunta: Sexta é um dia que pertence ao final de semana?

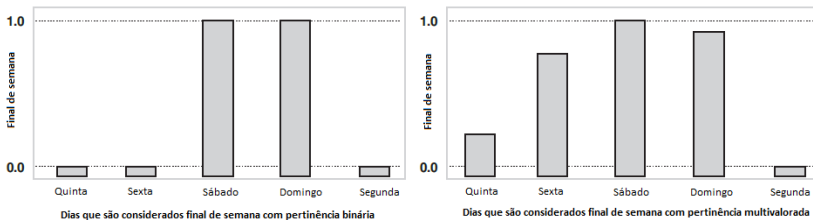
Resposta: 0,8 (na maior parte das vezes sim, mas não completamente).

Pergunta: Domingo é um dia que pertence ao final de semana?

Resposta: 0,95 (Sim, mas não tanto quanto sábado).

A partir das perguntas e respostas acima podemos elaborar dois gráficos, que estão contidos na Fig. (8). O gráfico à esquerda mostra os valores verdadeiros para os dias que representam o final de semana se a pessoa é forçada a ter uma resposta sim ou não. O gráfico da direita mostra os valores verdadeiros para os dias que representam o final de semana se a pessoa pode responder com valores intermediários.

Figura 8 – Dias que pertencem ao final de semana com valoração binária e multivalorada com gráfico em forma de histograma



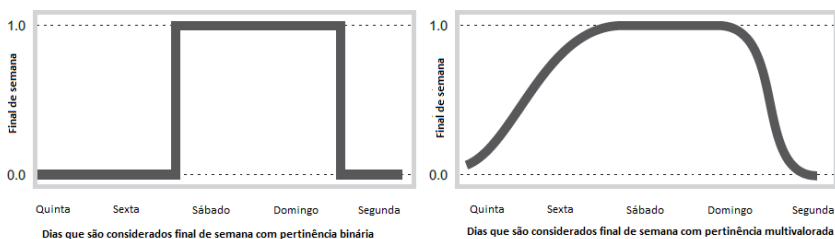
Fonte: MathWorks (2014)

Assim, a representação a direita pertence ao domínio da lógica de vários valores. Ou seja, se é realizada a questão: X é um membro do conjunto A ? A resposta pode ser sim, não ou qualquer outro valor intermediário. Assim, X pode ter uma pertinência parcial em A .

Na Figura (9), são plotados os mesmos gráficos, porém de forma contínua. Deste modo, no gráfico da esquerda, pode ser visualizado que na meia noite de sexta-feira, logo após o primeiro segundo depois das doze horas, o valor de verdadeiro para o final de semana pula, de forma descontínua de zero para um. Isto é uma maneira de se definir

o final de semana, mas não é conectada com a experiência do mundo real. O gráfico da direita mostra uma curva que varia suavemente, que contabiliza o fato de que partes da quinta e sexta-feira também são considerados finais de semana. A curva que define o final de semana em qualquer instante de tempo é uma função que mapeia o espaço de entradas (dia da semana) ao espaço de saída (final de semana). Esta curva é conhecida como função de pertinência (*membership function*) e desempenha um papel fundamental na teoria dos conjuntos nebulosos.

Figura 9 – Dias que pertencem ao final de semana com valoração binária e multivalorada com gráfico em forma contínua



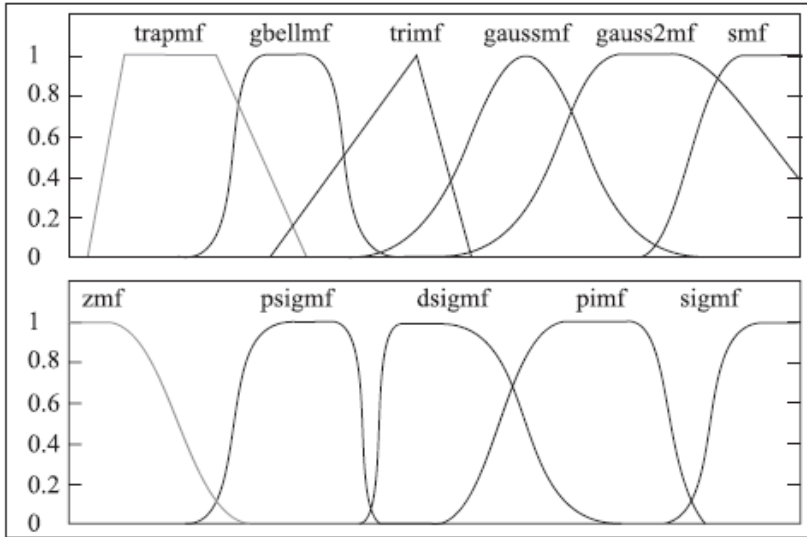
Fonte: MathWorks (2014)

A única condição que uma função de pertinência deve satisfazer é variar entre zero e um. A função em si pode ser uma curva arbitrária, cuja forma pode-se definir como uma função que nos interessa do ponto de vista da simplicidade, comodidade e velocidade. Na prática, devido a sua formulação simples e eficiência computacional, as funções do tipo triangular e trapezoidal são amplamente utilizadas. A escolha de funções triangulares e trapezoidais é mais comum porque a ideia de definição de regiões de pertinência total, média e nula é mais intuitiva (MARUO, 2006). A Figura (10) mostra além dessas funções de pertinência, outras que também são usadas para problemas específicos.

Formalmente, um conjunto nebuloso A do universo de discurso W é definido por uma função de pertinência $\mu_A(x) : \Omega \rightarrow [0, 1]$. Essa função associa a cada elemento x de Ω o grau $\mu_A(x)$, com o qual x pertence a A . A função de pertinência $\mu_A(x)$ indica o grau de compatibilidade entre x e o conceito expresso por A (SANDRI; CORREA, 1999):

1. $\mu_A(x) = 1$ indica que x é completamente compatível com A .
2. $\mu_A(x) = 0$ indica que x é completamente incompatível com A .
3. $0 < \mu_A(x) < 1$ indica o grau de compatibilidade de x com A .

Figura 10 – Funções de pertinência clássicas



Fonte: MathWorks (2014)

Desta forma, a dicotomia da concepção clássica, na qual um elemento x pertence ou não pertence a um conjunto é abandonada, cedendo lugar ao conceito de pertinência. O valor atribuído pela função característica $\mu_A(x)$ indica o grau de pertinência de x ao conjunto A . Aproximando-se da unidade, maior é o grau de pertinência de x em A .

Assim, conforme descrito nesta seção, os fundamentos da lógica nebulosa levam em consideração o princípio de admitir incerteza e imprecisão na solução de problemas e permitir que se trabalhe com descrições simplificadas da realidade, possibilitando assim que a modelagem de sistemas complexos possa ser efetuada e que conclusões, possivelmente corretas, sejam extraídas. A definição dos conceitos da lógica *fuzzy* costuma ser apresentada como uma atividade de associação entre os conceitos da teoria dos conjuntos e conceitos da lógica. Logo, associa-se o conceito de pertinência ao valor-verdade de uma proposição lógica de união, interseção e complemento de conjuntos às operações *ou*, *e* e *não*. Deste modo, a inferência é vista como uma relação entre conjuntos (COELHO, 2000; SANTOS, 2005).

A formulação de modelos de identificação, controle e previsão de sistemas baseados em lógica nebulosa deu origem aos chamados sistemas

nebulosos, que são modelos compostos por um conjunto de regras do tipo Se <premissa> Então <conclusão> que definem um conjunto de ações de controle em função das diversas faixas de valores que as variáveis de estado do problema podem assumir (SANDRI; CORREA, 1999). Este tipo de sistema é abordado com maior detalhamento na próxima seção.

4.5.1.2 Sistemas *fuzzy*

Segundo Babuska (2001), um sistema estático ou dinâmico que faz o uso de conjuntos *fuzzy* ou da lógica *fuzzy* e da estrutura matemática correspondente é chamado de sistema *fuzzy*. Existem diversos caminhos nas quais conjuntos *fuzzy* podem ser envolvidos em um sistema, tais como:

- *Na descrição de um sistema.* Um sistema pode ser definido, por exemplo, como um conjunto de regras se-então com antecedentes *fuzzy*, ou como uma relação *fuzzy*.
- *Na especificação dos parâmetros do sistema.* O sistema pode ser definido por uma equação algébrica ou diferencial, nas quais os parâmetros são números *fuzzy* em vez de números reais. Por exemplo, considere a equação $y = \tilde{3}x_1 + \tilde{5}x_2$, onde $\tilde{3}$ e $\tilde{5}$ são números *fuzzy* que significam perto de 3 e perto de 5, respectivamente. Assim, os números *fuzzy* expressam a incerteza nos valores dos parâmetros.
- *As variáveis de entrada, saída e de estados de um sistema podem ser conjuntos fuzzy.* Entradas *fuzzy* podem ser leituras de sensores não confiáveis (dados com ruído), ou quantidades relacionadas com a percepção humana, tais como conforto, beleza, etc. Sistemas *fuzzy* podem processar tais informações, o que não é o caso com os sistemas convencionais.

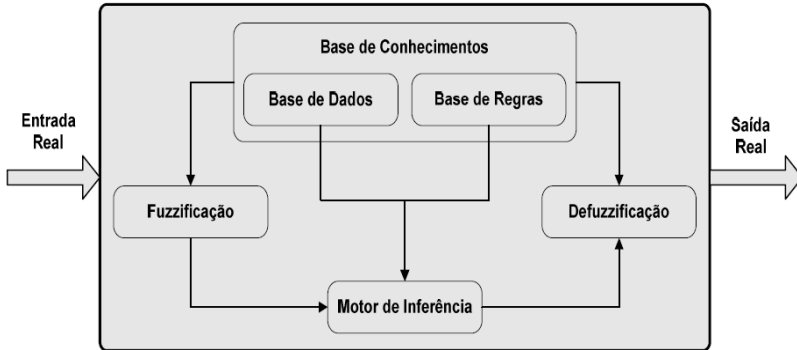
Um sistema *fuzzy* pode ter simultaneamente diversas destas atribuições citadas acima. Os sistemas *fuzzy* podem servir para diferentes propósitos como modelagem, análise de dados, previsão e controle. Os mais comuns são aqueles definidos por regras se-então (BABUSKA, 2001).

Para Ferreira (2008), um sistema *fuzzy* formado por um conjunto de regras consiste em um grupo finito de implicações nebulosas que juntas formam um algoritmo para determinar as saídas do processo, baseado em um número finito de entradas e saídas passadas. Segundo Coelho (2000), a estrutura básica de um sistema nebuloso, ilustrada

na Fig. (11), pode ser vista a partir da constituição dos seguintes elementos:

1. *Base de conhecimento*: É formada por uma base de regras, que contém o conjunto de regras nebulosas e por uma base de dados, que define as funções de pertinência usadas nas regras nebulosas;
2. *Procedimento de fuzzificação*: Tem como função converter os valores de entrada “crisp” do sistema para em conjuntos nebulosos;
3. *Motor de inferência*: É responsável pelo desenvolvimento do raciocínio nebuloso baseado no conhecimento representado na base de conhecimento. Ou seja, define as operações de inferência sobre as regras;
4. *Procedimento de defuzzificação*: Realiza uma transformação dados resultados nebulosos de inferência em uma resposta não nebulosa, “*crisp*”.

Figura 11 – Estrutura básica de um sistema *fuzzy*



Fonte: Ferreira (2008)

Sandri e Correa (1999) abordam que a base de conhecimento é composta por uma base de dados, onde ficam armazenadas as definições sobre discretização e normalização dos universos de discurso, e as definições das funções de pertinência dos termos nebulosos e uma base de regras, formada por estruturas do tipo

$$R : \begin{cases} \text{Se } x \text{ é } A \\ \text{Então } y \text{ é } B. \end{cases} \quad (4.24)$$

onde R identifica a regra; A e B são variáveis lingüísticas; x , y são elementos dos universos de discurso X , Y , respectivamente. Normalmente, denomina-se a proposição x é A como antecedente, enquanto y é B é chamado conseqüente (ou conclusão); x é chamada de variável premissa.

Na concepção tradicional, ativa-se uma regra Se-Então somente quando a variável premissa x é exatamente igual ao antecedente. Neste caso, a inferência produzida será: y é exatamente igual ao conseqüente. No entanto, na concepção *fuzzy*, a regra Se-Então é disparada quando houver um grau de similaridade não nulo entre a variável premissa e o antecedente. Ou seja, o valor verdadeiro da proposição (um número real entre 0 e 1) depende do grau de similaridade entre x e A . (MOZELLI, 2008)

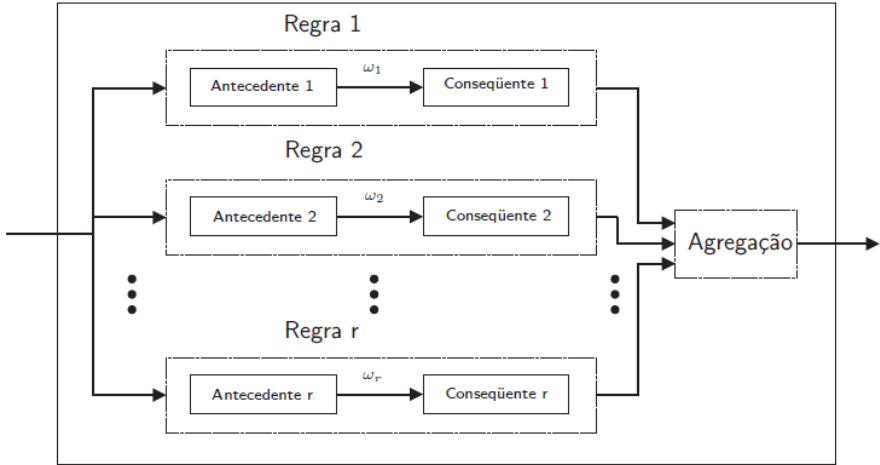
O procedimento de fuzzificação, por sua vez, faz com que os valores recebidos pelo sistema, geralmente no formato “*crisp*”, pois, na prática, os dados de entrada são obtidos por meio de medições ou observações e que caracterizam o estado do sistema (variáveis de estado) sejam transformado em conjuntos *fuzzy* (MOZELLI, 2008; BABUSKA, 2001).

Na unidade de inferência ocorrem as operações com conjuntos *fuzzy* ao longo de regras Se-Então para processar, por meio de um mecanismo de inferência, as informações da entrada e produzir uma conclusão (MOZELLI, 2008). Esta etapa pode ser com a seguinte seqüência e está esquematizada na Fig. (12):

1. Verificação do grau de compatibilidade entre as variáveis premissas com seus respectivos antecedentes nas regras Se-Então.
2. Determinação do grau de compatibilidade global da premissa de cada regra. Isto é dado pela combinação dos graus de compatibilidade das variáveis premissas com seus antecedentes.
3. Com base no grau de ativação determina-se o conseqüente produzido por uma determinada regra.
4. Cada regra produz um conseqüente e o resultado global da etapa inferência dependerá da combinação desses conseqüentes. Esta etapa é chamada de agregação, a qual tem por resultado um conjunto *fuzzy*.

O estágio de defuzzificação extrai de um conjunto *fuzzy* um valor significativo da informação produzida na etapa de inferência. Para Babuska (2001), ele é utilizado para obter uma única ação de controle

Figura 12 – Diagrama esquemático da etapa de inferência



Fonte: Mozelli (2008)

precisa e um método usual para realizar esta ação é conhecido como centro de gravidade, que é dado por

$$y' = \frac{\sum_{j=1}^F \mu'_B(y_i) y_j}{\sum_{j=1}^F \mu'_B y_j}. \quad (4.25)$$

Onde $\mu'_B(y_i)$ representa a função de pertinência do conjunto nebuloso de saída (após agregação de todas as regras) e y_j os elementos do domínio da variável sobre a qual deseja-se fazer a inferência.

Os componentes dos conseqüentes resultam em tipos diferentes de modelos nebulosos, mas seus antecedentes são essencialmente os mesmos. Uma classificação baseada nos componentes dos conseqüentes pode ser usada para classificar os sistemas nebulosos em baseados em (COELHO, 2000):

1. Modelos linguísticos: são originários de regras se-então apresentando predicados vagos e utilizando raciocínio nebuloso. Nestes modelos, as quantidades nebulosas são associadas aos termos linguísticos, e o modelo nebuloso é essencialmente uma expressão qualitativa do sistema. Os modelos deste tipo formam a base de modelagem qualitativa, que descreve o comportamento do sistema através da utilização da linguagem natural. O representante mais

significativo desta classe é o modelo ou sistema do tipo Mamdani;

2. Modelos interpolativos: são formados por regras lógicas por uma parte nebulosa antecedente e um conseqüente funcional. Estes modelos são, essencialmente, uma combinação de modelos nebulosos e não-nebulosos. Os representantes mais significativos dos modelos interpolativos são os modelos ou sistemas do tipo Takagi-Sugeno e do tipo Tsukamoto. A representação do conhecimento, nestes modelos, caracterizam-se pelo potencial de expressar informações quantitativas. Entretanto, nos modelos interpolativos perde-se a informação qualitativa.

Para descrever, de forma exata ou aproximada, sistemas dinâmicos não-lineares modelos interpolativos são mais adequados, em função das características acima descritas. Dessa forma, nesse trabalho será utilizado o sistema nebuloso do tipo Takagi- Sugeno (TS), descrito a seguir.

4.5.2 Modelo *fuzzy* interpolativo Takagi-Sugeno

Os modelos *fuzzy* apresentados até o momento pertencem a classe dos linguísticos. Ou seja, eram formados por regras *se então* tanto na parte antecedente como concedente. Porém, segundo Babuska (2001) o modelo Takagi-Sugeno utiliza funções “*crisp*”, que podem ser equações diferenciais, na parte conseqüente. Assim, os antecedentes descrevem regiões nebulosas no espaço de entrada nas quais as funções conseqüentes são válidas.

Uma capacidade interessante dos sistemas *fuzzy* Takagi-Sugeno para Mozelli (2008), é que eles são muito úteis devido a sua capacidade de modelar, aproximadamente ou com exatidão, dinâmicas não-lineares sobre domínios compactos por meio da combinação de modelos lineares, localmente válidos. Ou seja, a ideia do modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno, segundo Klug (2010) e Mozelli (2008), consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de sistemas dinâmicos lineares, localmente válidos, interpolados de forma suave, não-linear e convexa, também chamados de regras, que descrevem o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Tal combinação é inferida por funções de pertinência, que controlam a lei de interpolação entre as regras locais.

Segundo Klug (2010), quando se deseja obter um modelo fuzzy T-S que aproxime o sistema original em determinada região do espaço

de estados, é necessário, a critério do projetista, determinar r pontos de operação aos quais associam-se modelos locais lineares que representem o comportamento aproximado da planta não-linear.

As regras do modelo T-S são estruturadas da seguinte forma:

$$R_i : \text{ se } z_1 \text{ é } F_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_g \text{ é } F_{ig} \text{ então } \hat{y}_i = f_i(x_i, \dots, x_g), i = 1, 2, \dots, L. \quad (4.26)$$

Onde $f_i(x_i, \dots, x_g)$ é uma função “*crisp*” no consequente, R_i é a i -ésima regra, $z = [z_1, \dots, z_n]^T$ é o vetor das variáveis de entrada das regras (antecedentes), F_{i1}, \dots, F_{in} são conjuntos nebulosos definidos no espaço dos antecedentes, e y_i é a saída da regra. A variável L denota o número de regras na base de regras, e a saída \hat{y} é calculada pela média ponderada dos consequentes da regra (SANTOS, 2005).

As regras do modelo *fuzzy* na Eq. (4.26) foram adaptadas para lidar com o sistema de jogo não-linear estocástico para um controle de trajeto robusto minimax que visa atingir um nível determinado de emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico sob flutuações estocásticas, distúrbios externos e incerteza nas condições iniciais.

Assim, a i -ésima regra do modelo *fuzzy* para o sistema estocástico não linear (4.5) segue a seguinte forma:

Se $z_1(t)$ é F_{i1} e \dots e $z_g(t)$ é F_{ig} , então

$$dx(t) = (A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t))dt + D_i x(t)dw(t), i = 1 \dots L. \quad (4.27)$$

Sendo que F_{ij} é um conjunto *fuzzy*, A_i, B_i e D_i são sistemas matriciais linearizados, g é o número de variáveis premissas e $z_1(t), \dots, z_g(t)$ são as variáveis premissas.

Na premissa das regras, avalia-se o grau de compatibilidade de $z_g(t)$ aos respectivos conjuntos fuzzy das variáveis lingüísticas F_{ig} obtendo-se graus de pertinência $\mu_i(z(t))$. O grau de ativação do antecedente da i -ésima regra é dado por $\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g F_{ij}(z(t))$.

Portanto, a norma adotada para determinar o grau de ativação do antecedente é o produto algébrico das pertinências. Vale ressaltar que é necessário que ao menos uma regra do modelo esteja ativa, garantindo as seguintes propriedades $\mu_i(z(t)) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) > 0$ (MOZELLI, 2008).

O consequente induzido por cada regra é uma ponderação do modelo local. A etapa de agregação é simplesmente dada pela média

ponderada das regras. Assim o modelo T-S final é dado por

$$\begin{aligned} dx(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) \{(A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dw(t)\}}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \\ &= \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{(A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dw(t)\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sendo que a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))}, \quad (4.29)$$

com $z(t) = (z_1(t), \dots, z_g(t))^T$, que satisfaz a propriedade de combinação convexa

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) = 1. \quad (4.30)$$

Portanto, o modelo T-S busca modelar a dinâmica não-linear em (4.5) por meio da interpolação de modelos dinâmicos lineares em (4.27), que utiliza a função *fuzzy* base $h_i(z(t))$. Assim, é possível especificar os parâmetros A_i , B_i , e D_i em (4.28), de modo que $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) A_i x(t)$, $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) B_i$ e $\sum_{i=1}^L h_i(z(t)) D_i x(t)$ podem aproximar as funções não lineares $f(x(t))$, $g(x(t))$ e $h(x(t))$ em (4.5). Como as funções de pertinência, geralmente, são não-lineares e possuem derivadas contínuas, o modelo resultante é uma combinação convexa de modelos locais que é suave e não-linear (MOZELLI, 2008).

Depois que o sistema estocástico não-linear em (4.4) foi aproximado por um sistema T-S *fuzzy* em (4.28), o sistema aumentado em (4.14) também pode ser aproximado pelo seguinte sistema *fuzzy*

$$d\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{(\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) \bar{C} \bar{v}(t)) dt + \bar{D}_i \bar{x}(t) dw(t)\} \quad (4.31)$$

$$\text{onde } \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } \bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.5.3 Jogo estocástico *fuzzy*

Como o sistema estocástico não linear aumentado em (4.14) é aproximado por um sistema *fuzzy* T-S em (4.31), o jogo não-linear estocástico em (4.14) e (4.17) é substituído pela resolução do jogo estocástico *fuzzy* em (4.31) e (4.17), o que leva a:

Resolver (4.17), ou seja, transcrevendo-a

$$\min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \int_0^{t_f} (\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \rho^2 \bar{v}^T \bar{v}(t)) dt \\ \leq \rho^2 E \{ \bar{x}^T(0) \bar{I} \bar{x}(0) \}$$

$$\text{com } \bar{Q} = \begin{bmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{bmatrix}, \bar{I} = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix}, \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} \text{ e } \bar{v}(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ r(t) \end{bmatrix}.$$

Sujeito a (4.31)

$$d\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{ (\bar{A}_i \bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) \bar{C} \bar{v}(t)) dt + \bar{D}_i \bar{x}(t) dw(t) \}$$

$$\text{onde } \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ e } \bar{D}_i = \begin{bmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução para este jogo *minimax* foi desenvolvida por Chen e Lin (2011) e está contida no Teorema abaixo.

Teorema 2. *O controle de trajeto minimax e o pior caso de distúrbios para o jogo estocástico fuzzy em (4.17) sujeito a (4.31) é resolvido da seguinte forma (CHEN; LIN, 2011).*

$$u^*(t) = - \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) R^{-1} \bar{B}_j^T P \bar{x}(t), \quad v^*(t) = \frac{1}{\rho^2} \bar{C}^T P \bar{x}(t) \quad (4.32)$$

O equilíbrio do sistema fuzzy é globalmente e assintoticamente estável se existir uma matriz simétrica positiva definida, P , tal que seja

a solução das seguintes inequações de Riccati:

$$\begin{aligned}
 & P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P\bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T P + \\
 & \frac{1}{\rho^2} P^T \bar{C} \bar{C} P + D_i^T P D_j < 0; \quad i, j = 1 \dots L, \quad (4.33) \\
 & P \leq \rho^2 \bar{I}.
 \end{aligned}$$

Prova: Ver anexo B.

Ou seja, segundo o Teorema 2 uma matriz comum P existe para todos os sub-sistemas do modelo *fuzzy*. A condição de estabilidade do Teorema 2 é derivada, utilizando uma função quadrática $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) P \bar{x}(t) > 0$. Se existir uma matriz $P > 0$, tal que $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) P \bar{x}(t)$ prova a estabilidade do sistema *fuzzy*, este sistema também é denotado de quadraticamente estável e $V(\bar{x}(t))$ é chamada de função de Lyapunov (TANAKA; WANG, 2004).

Por aproximações *fuzzy*, o HJI em (4.20) é aproximado por um conjunto de desigualdades algébricas em (4.33) e a desigualdade em (4.21) é também equivalente a segunda desigualdade em (4.33). Desde que ρ^2 é o limite superior do problema de trajeto minimax em (4.8), o problema de trajeto robusto minimax ainda necessita minimizar ρ^2 , como segue

$$\rho_o^2 = \min_{P>0} \rho^2 \quad (4.34)$$

sujeito a (4.33).

Este problema de otimização restrita, (4.34), pode ser resolvido via LMI's, como será visto adiante.

Segundo Klug (2010), é importante ressaltar que a forma de representação dos modelos *fuzzy* T-S possibilita estender de forma natural e elegante os resultados estabelecidos na teoria de controle para técnicas de controle robusto. Isto permite a elaboração rigorosa de reguladores e/ou observadores de estado, reduzidos a problemas descritos por LMI's, o que será aprofundado na próxima seção.

4.6 O PAPEL DAS LMI'S NA TRAJETÓRIA DE CONTROLE MINIMAX

Para checar a estabilidade de um sistema *fuzzy*, tem sido reconhecida a falta de procedimentos sistemáticos para encontrar uma matriz comum positiva definida P . Na maioria das vezes um procedimento do tipo de tentativa e erro foi utilizado. No entanto, Tanaka e Wang (2004)

apontam que o problema de encontrar a matriz P pode ser resolvido de forma eficiente através de técnicas de otimização convexas via LMI's. Para tanto, uma observação importante a ser feita é de que a condição de estabilidade do Teorema 2 pode ser expressa por LMI's.

Para Tanaka e Wang (2004), os problemas envolvendo LMI's podem ser resolvidos numericamente, de forma muito eficiente, por meio de algumas das mais poderosas ferramentas disponíveis até o momento na literatura de programação matemática. Por exemplo, os métodos de pontos interiores desenvolvidos recentemente são extremamente eficientes na resolução deste tipo de problema.

Genericamente, uma LMI é uma inequação matricial na forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

onde $x^T = (x_1, \dots, x_m)$ é a variável e as matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \Re^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ são dadas. O símbolo da desigualdade, $>$, significa que $F(x)$ é positiva definida.

De acordo com Tanaka e Wang (2004), uma LMI é uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x | F(x) > 0\}$ é convexo. Uma LMI pode representar uma grande variedade de restrições convexas em x . Em particular, muitas vezes, as variáveis inseridas na LMI estão na forma matricial, como por exemplo a desigualdade de Riccati contida no Teorema 2. Neste caso a LMI não será escrita na forma explícita $F(x)$. Assim, visando resolver o problema de otimização restrita (4.34) pelo método LMI, as desigualdades em (4.33) podem ser reescritas de acordo com as seguintes LMI's (TANAKA; WANG, 2004):

$$\begin{aligned} & P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P\bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T P \\ & + \frac{1}{\rho^2} P^T \bar{C} \bar{C}^T P + D_i^T P D_i < 0; \quad i = j \\ & P\bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} - P\bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T P + \frac{1}{\rho^2} P^T \bar{C} \bar{C} P \\ & + \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T P \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) < 0; \quad i \neq j \\ & P \leq \rho^2 \bar{I}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Então, assume-se que $W = P^{-1} > 0$, e as desigualdades em (4.35)

podem ser equivalentes a

$$\begin{aligned} & \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q} W - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T \\ & + \frac{1}{\rho^2} P^T \bar{C} \bar{C}^T + W D_i^T W^{-1} D_i W \leq 0; \quad i = j \\ & \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q} \bar{W} - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T \\ & + W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T W^{-1} \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) W \leq 0; \quad i \neq j \\ & \rho^2 W > \bar{I} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q}^t \bar{Q} W - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T \\ & + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C} + W D_i^T W^{-1} D_i W \leq 0; \quad i \neq j \\ & \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T + W \bar{Q}^T \bar{Q} W - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T \\ & + W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T W^{-1} \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) W \leq 0; \quad i \neq j \\ & \rho^2 W > \bar{I} \end{aligned}$$

onde $\bar{Q} = [Q^{\frac{1}{2}} \quad Q^{\frac{1}{2}}]$.

Pelo complemento de Schur ⁴, o problema de otimização restrita em (4.34) é equivalente ao seguinte problema de otimização restrita LMI

$$\rho^2 = \min_{W > 0} \rho^2 \quad (4.36)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T & W D_i^T & W \bar{Q}^T \\ & D_i W & 0 \\ & \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; \quad i = j \\ & \begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T & W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T & W \bar{Q}^T \\ & \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) W & -W & 0 \\ & \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; \quad i \neq j \\ & \rho^2 W > \bar{I} \end{aligned} \quad (4.37)$$

⁴Este procedimento é detalhado no apêndice A

Esta otimização restrita para resolver ρ_0 e W em (4.36) e (4.37) pode ser resolvida decrescendo ρ^2 até que não exista $W > 0$. Depois de resolver W , e assim $W = P^{-1}$ deste problema de otimização restrita, ρ_0 pode ser resolvido pelo *toolbox* de controle robusto do Matlab eficientemente.

Ao utilizar o *toolbox* de controle robusto do Matlab primeiramente deve ser descrito o sistema LMI. A descrição de um sistema LMI deve iniciar com o comando `setlmis` e finalizar com `getlmis`. Os sistemas LMI podem ser tanto especificados como expressões matriciais simbólicas com uma interface gráfica interativa utilizando o `lmiedit`, ou montando a LMI de forma incremental com os comandos `lmivar` e `lmiedit`. A primeira opção é mais intuitiva e transparente enquanto a segunda é mais poderosa e flexível. Na segunda opção o comando `lmivar` define as variáveis matriciais, enquanto o comando `lmiterm` descreve os vários termos dentro da LMI. No final, `getlmis` retorna a representação interna do sistema LMI. Também deve ser ressaltado que o comando `decnbr` retorna o número total de variáveis matriciais e de variáveis de decisão.

Depois que formulado em um formato LMI, o problema pode ser resolvido utilizando um algoritmo de otimização convexa. Como neste trabalho pretende-se minimizar um objetivo linear sob restrições na forma de LMI's, para esta atividade o solver correspondente é chamado de `mincx`. O “*solver*” LMI `mincx` tem como entrada a representação interna de um sistema LMI e retorna um valor viável ou otimizado x^* das variáveis de decisão. `mincx` também retorna a matriz otimizada das variáveis de decisão, para tanto deve ser usado o comando `dec2mat`. O solver `mincx` é uma implementação C-MEX em tempo polinomial do algoritmo projetivo de Nesterov e Nemirovski. (BALAS et al., 2005).

4.7 SÍNTESE DA METODOLOGIA PROPOSTA

De acordo com o que foi desenvolvido neste capítulo, o controle de trajeto robusto minimax via o método de interpolação de *fuzzy* pode ser resumido nos seguintes passos:

1. É atribuído um estado de referência desejado em (4.7) para o sistema estocástico de emissões de CO_2 em (4.5);
2. São selecionadas os tipos de funções de pertinência e é construída uma planta de regras *fuzzy* em (4.27) e (4.28);
3. São definidos os pesos das matrizes Q e R do problema de trajeto

minimax em (4.9);

4. Deve-se resolver o problema de otimização restrita LMI em (4.36) e (4.37) para obter W (assim $P = W^{-1}$) e ρ_0^2 ;
5. É construído o controle ótimo do trajeto robusto minimax $u^*(t)$.

5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo a metodologia proposta é empregada para responder o problema de pesquisa proposto nesta dissertação. Primeiramente é abordado qual será o país que será empregado como estudo de caso e a base de dados para realizar a simulação. Logo após, são descritos os parâmetros que calibram a solução do sistema dinâmico aos dados reais. Depois são dados mais detalhes de como foi simulado o modelo estocástico e o modelo de referência. E, por último, são explicitados o resultado da trajetória de controle robusto minimax.

5.1 ESTUDO DE CASO E BASE DE DADOS

Para aplicar a metodologia proposta é necessário escolher um país ou região como estudo de caso. O Brasil é o país escolhido pois foi um dos únicos países que ampliou a sua meta de redução das emissões de CO_2 proposta no protocolo de Kioto. Para tanto, ele sancionou a lei n^o 12.187, de 29 de dezembro de 2009, se comprometendo a reduzir entre 36,1% e 38,9% suas emissões projetadas até 2020. Ou seja, esta projeção pode ser interpretada como um exemplo de curva de referência para as emissões de CO_2 que o modelo de trajetória robusta minimax deve seguir. Como esta lei foi instituída em 2009 e até o presente momento os dados não mostraram um decréscimo da taxa de emissões, o trabalho irá estender o período de análise até 2025 e irá adotar uma curva de referência que tem como resultado final uma redução de CO_2 em torno da metade que a lei 12.187 projetou.

O Brasil também é um bom estudo de caso no quesito da área florestal, pois é o território que contém uma vasta área com cobertura florestal. No entanto, com o padrão de desenvolvimento que o Brasil vem adotando esta área está diminuindo. Assim, é necessário que o país diminua a taxa de desmatamento, como vem realizando com sucesso nos últimos anos (YOUNG, 2015), recupere áreas desmatadas e aumente o número e a extensão das unidades de proteção. Portanto, é interessante simular uma trajetória de referência de aumento da área florestal, o que acaba por refletir também em um novo padrão de desenvolvimento e crescimento econômico.

Tratando sobre a questão do PIB e do estoque de capital, o Brasil também aparece como um estudo de caso interessante, pois ele é um país em desenvolvimento, que ainda necessita de crescimento econômico para

que seus habitantes tenham um padrão mais avançado de qualidade de vida. Desta forma, devem ser propostas curvas de referência para o PIB e estoque de capital que estabilizam uma trajetória de crescimento para a economia brasileira.

Além do mais, o que se procura entender no caso brasileiro é como os controles fornecidos na formulação do modelo devem se comportar para ajudar o país a entrar em uma rota de economia verde, ou seja, com reduções de impactos ambientais¹ e crescimento econômico. Sendo que este crescimento deve proporcionar o incremento de empregos qualificados e tecnologias que possam evitar a dependência do país em estratégias de crescimento poluidoras e prejudiciais ao meio ambiente. Ou seja, pretende-se que sua indústria consiga desenvolver novos produtos de última geração compatíveis com a ideia de economia verde, tornando-a desenvolvida e competitiva perante outros países. Bem como também ter disponíveis mais áreas florestais, que também podem ser entendidas como áreas de conservação, que fornecem benefícios importantes para a sobrevivência humana mas que não são valorados pelo mercado.

Os dados relativos às emissões de CO_2 , em milhões de toneladas de CO_2 , foram obtidos no site do CDIAC, *Carbon Dioxide Information Analysis Center*. Os dados referentes à área florestal, em milhões de km^2 , foram colhidos no site do *World Bank*. Já, os dados referentes ao PIB nominal, em bilhões de R\$, ao Estoque de Capital Físico, em bilhões de R\$, e à População Economicamente Ativa, em milhões de pessoas, foram obtidos no site do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada, Ipeadata. Ainda, como *proxy* para o capital humano foi utilizada a série de investimento total em educação, em bilhões de R\$, fornecido pelo Ministério da Educação e, finalmente, utilizou-se como *proxy* para o nível de conhecimento, a soma da série temporal de investimentos em P&D e investimentos em ciência e tecnologia, fornecidas pelo Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação (MCTI).

Com exceção das séries temporais de emissão de CO_2 e área florestal, as demais séries de dados específicas foram deflacionadas, com valores a preços de 2000.

5.2 CALIBRAÇÃO DOS PARÂMETROS E RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO SISTEMA DINÂMICO

Uma vez obtidos os dados, foi realizada a simulação do modelo, através da função `ode45`, do ambiente de programação Matlab. O ano

¹no caso desta dissertação é estudada a redução de emissões de CO_2 .

inicial para a simulação foi 2000. Neste ano as condições iniciais dos estados utilizados no modelo são especificadas na Tab. (2).

Tabela 2 – Condições iniciais para solução do modelo determinístico

Estado	Valor inicial	Unidade
X(0)	89,44	Milhões de toneladas de CO_2
F(0)	5,49	Milhões de km^2 de área florestal
Y(0)	2967,01	Bilhões de R\$, a preços de 2000
K(0)	4429,93	Bilhões de R\$, a preços de 2000
L(0)	792,43	Milhões de pessoas
A(0)	28,40	Bilhões de R\$, a preços de 2000
H(0)	55,18	Bilhões de R\$, a preços de 2000

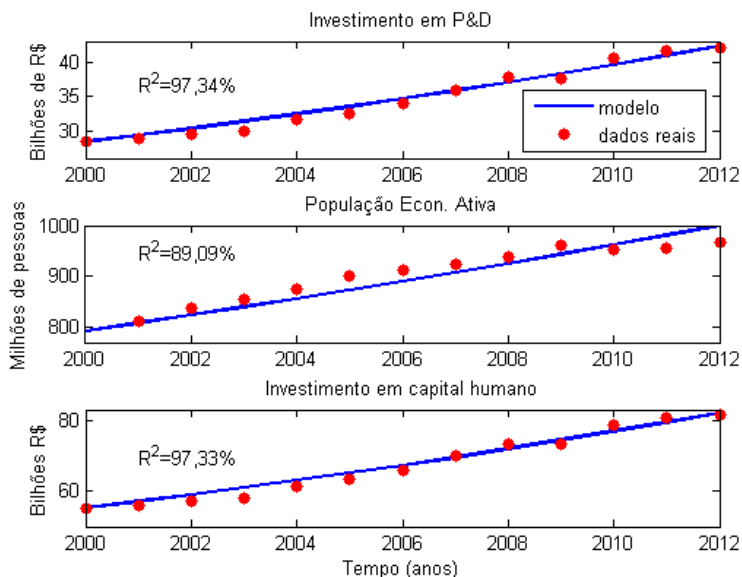
Fonte: CDIAAC, *World Bank*, Ipeadata e MCTI

Para que fosse realizado o ajuste do modelo para se chegar o mais próximo possível aos dados reais foram feitas diversas simulações, alterando nelas os parâmetros do modelo, de modo que fosse encontrado um modelo que tivesse um baixo erro em comparação aos dados reais. Vale ressaltar que nesta etapa foram utilizados como base para a simulação os parâmetros calculados por Forbes (2010). Os demais parâmetros que não estão presentes no modelo utilizado em Forbes (2010) foram ajustados tomando como base os parâmetros ajustados em outros estudos que buscavam caracterizar a economia brasileira.

Também, deve-se ressaltar que as taxas de investimentos em P&D e ciência e tecnologia, crescimento da população economicamente ativa e capital humano foram inseridas no modelo de forma exógenas, tomadas como fatores impactantes sobre a política de crescimento econômico. Mas, por outro lado, estas taxas de crescimento podem ser consideradas como endógenas ao sistema econômico como um todo, podendo ser alteradas pelos gestores de política econômica, ajustando-as às necessidades de crescimento da economia.

Assim, estas taxas de crescimento foram ajustadas aos dados, e foram observadas as suas evoluções ao longo do período de análise do comportamento do modelo, conforme se observa na Fig. (13). Desta maneira, estas taxas foram inseridas, a priori, no modelo como sendo $g = 3,31\%$, $n = 1,94\%$ e $j = 3,31\%$, conforme estimado nos modelos de ajustes apresentados na Fig. (13). Também deve ser considerado que estas taxas de crescimento estão sujeitas a choques, tanto em seus níveis, como em flutuações residuais. Estes efeitos podem ser considerados intrínsecos a sistemas econômicos abertos, sujeitos aos efeitos do sistema

Figura 13 – Simulação e comparação entre o modelo e os dados reais.

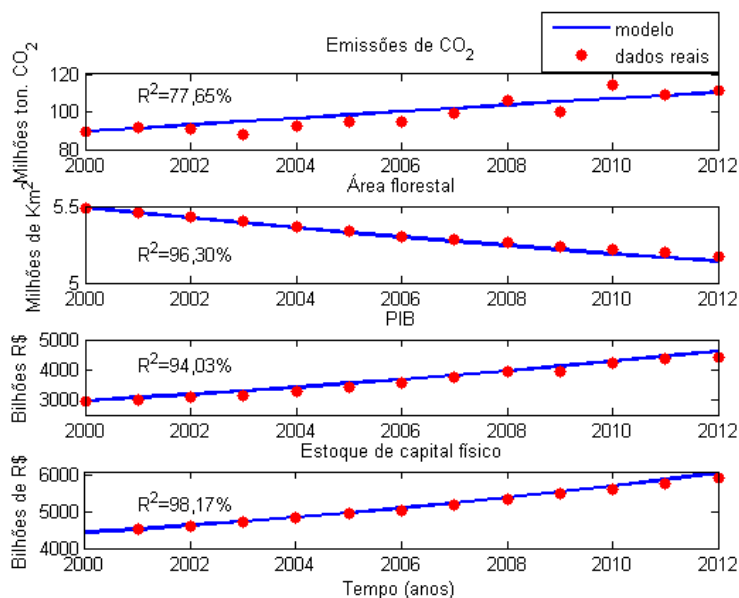


Fonte: elaboração própria

econômico internacional.

Na Tabela (3) são apresentados os parâmetros ajustados ao modelo para o Brasil e nas Fig's (13) e (14) as soluções numéricas das equações são plotadas em conjunto com os dados reais. De acordo com o comportamento determinístico do modelo, Fig. (14), observa-se uma evolução dos níveis de emissão de CO_2 , a uma taxa média de crescimento anual no valor de 1,94% no período 2000-2012, já a taxa acumulada neste mesmo período é de 25,98%. Também pode-se observar que a área florestal tem uma tendência de decrescimento contínuo com uma taxa média de -0,53% no período analisado e com uma taxa de decrescimento acumulado de -6,19% durante o período de 2000 até 2012. Outra tendência que pode ser visualizada é um crescimento estável do PIB, com uma taxa de crescimento anual de 4,63% ao longo do período de tempo observado neste estudo e com uma taxa de crescimento acumulado de 72,13% durante 2000-2012, e do Estoque de Capital, que, no mesmo espaço de tempo, possui uma taxa de crescimento anual de 3,08% e acumulada, no período 2000-2012, de 44%.

Figura 14 – Simulação e comparação entre o modelo e os dados reais.



Fonte: elaboração própria

Em resumo, de acordo com o modelo determinístico não há ensejo de mudança no perfil das emissões de CO_2 mesmo com a lei nº 12.187. Também pode-se chegar a esta conclusão em relação a tendência de queda da área florestal no Brasil. Já o crescimento do PIB e estoque de capital, segundo o modelo, devem manter tendências de crescimento acentuadas nos próximos anos. No entanto, para manter estes crescimentos, PIB e estoque de capital físico, e fazer com que as trajetórias de emissão de CO_2 e área florestal mudem são necessários investimentos, que são ilustrados na forma de controles no modelo, em políticas que possibilitem a criação de empregos qualificados e privilegiem o desenvolvimento de tecnologias de menor impacto ambiental.

5.3 SOLUÇÃO MODELO ESTOCÁSTICO

Pode-se perceber que os esforços de controle, u_1, \dots, u_4 , foram assumidos serem invariantes no período de 2000 a 2012, para que o

Tabela 3 – Parâmetros do modelo ajustados ao Brasil

Parâmetro	Valor	Significado
h	0.009	taxa depleção florestal
u_1	0.000005	incentivos ao reflorestamento
u_2	0.001	investimento em tecnologias limpas
s	600	capacidade de carga da atmosfera
r	0.041	taxa de emissão CO_2
α_1	0.0015	proporção de gás carbônico retirado da atmosfera por área
α_2	0.00055	fração do PIB que gera emissões de CO_2
α	0.342	elasticidade do produto em relação ao capital
φ	0.44	elasticidade do produto em relação ao capital humano
θ	0.77	efeito do conhecimento existente no sucesso de novas tecnologias
u_4	0.12	fração de renda que é devotada à acumulação de capital físico
a_k	0.18	fração do estoque de capital usada em P&D
δ_k	0.06	depreciação do capital físico
n	0.020	taxa de crescimento do número de trabalhadores
a_l	0.15	fração da força de mão-de-obra utilizada no setor de P&D
g	0.032	taxa de crescimento do nível de tecnologia
j	0.029	taxa de crescimento do capital humano
u_3	0.8856	$(1 - a_k)^\alpha (1 - a_l)^{(\theta - \varphi)}$

Fonte: elaboração própria

modelo pudesse se ajustar aos dados reais, Fig. (13). No entanto, estes esforços de controle constantes podem fazer com que o comportamento do sistema seja muito rígido, o que pode não garantir a habilidade de controle do sistema sob distúrbios estocásticos, como mostra a Fig. (15) (CHEN; LIN, 2011).

Conforme se observa na Equação 4.5, ao transformar o sistema determinístico para um sistema estocástico, introduziu-se três tipos de efeitos aleatórios. Um primeiro, é caracterizado por impactos alterando os níveis dos parâmetros contidos no modelo. Os desvios padrões dos parâmetros que recebem choques no modelo foram assumidos como $\delta_1 = 0,05r$, $\delta_2 = 0,05\alpha_1$, $\delta_3 = 0,05\alpha_2$, $\delta_4 = 0,05h$, $\delta_5 = 0,05n$, $\delta_6 = 0,05g$, $\delta_7 = 0,05j$, $\delta_8 = 0,05\delta_K$.

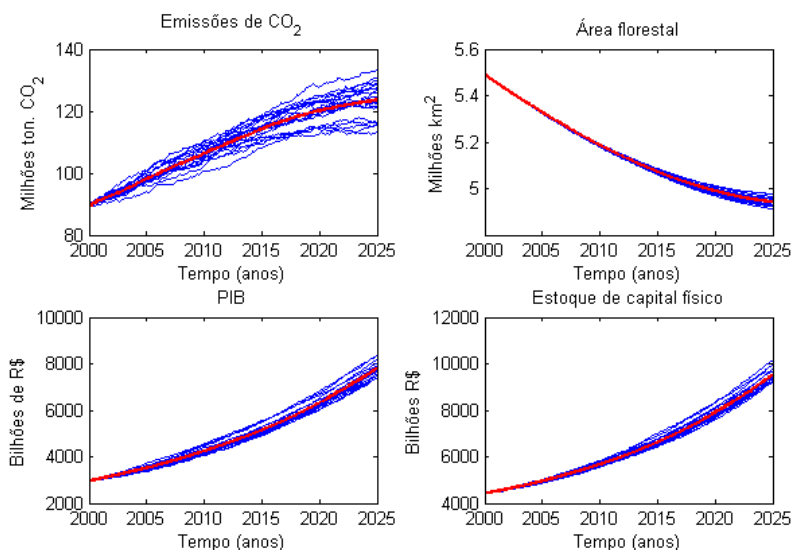
O segundo, é um efeito estocástico residual, $w(t)$, com média zero e distribuído normalmente, com variâncias específicas proporcionais à ordem de grandeza de cada série dos dados reais. Neste estudo, por conveniência, atribui-se a variância equivalente a 5% dos valores de $\delta_1, \dots, \delta_8$.

O último efeito são os distúrbios ambientais, $v_1(t), \dots, v_4(t)$, que também tem uma distribuição normal com média zero e variâncias específicas sobre as séries de dados reais. A variância das emissões de CO_2 é dada por 0,05 vezes a sua série temporal. Já a variância da

área florestal é de 0,33 vezes a sua série histórica de dados reais. Em relação ao PIB e Estoque de capital, suas variâncias são dadas pela multiplicação de 0.006 pela série histórica dos dados reais de ambas.

A partir da introdução dos efeitos aleatórios citados acima, foram simuladas 20 trajetórias e também foi computada a média destas trajetórias. Esta atividade está contida na Fig. (15), sendo que as linhas em azul mostram as diferentes trajetórias individuais e a linha vermelha mostra a média das 20 trajetórias diferentes.

Figura 15 – Simulação do modelo estocástico.



Fonte: elaboração própria

Com a simulação estocástica, considerando os controles invariantes no tempo, é possível concluir que também não há uma característica de mudança da trajetória dos estados, embora a flutuação dos mesmos seja maior. Com esta maior flutuação, a eficácia dos controles pode ser prejudicada sob a influência de flutuações paramétricas e ruídos ambientais.

Visando alterar a rota dos estados referentes as emissões de CO_2 e área florestal e manter o crescimento do PIB e estoque de capital é necessário que os controles presentes no modelos não sejam fixos ao longo do tempo, ou seja, eles precisam mudar para se adaptar as demandas que surgem na sociedade, que no caso deste estudo são a

redução das emissões de CO_2 , aumento da área florestal e manutenção do crescimento econômico. Para atingir estas demandas, mesmo com distúrbios estocásticos e ruídos afetando o modelo, é proposto um modelo robusto de controle da trajetória de referência a partir de uma perspectiva da teoria dos jogos dinâmicos, que pode ser resolvido por uma abordagem de jogo estocástico *fuzzy*. No entanto, antes de resolver este modelo é necessário traçar curvas de referência que devem estar de acordo com as demandas da sociedade, mas que também sejam realistas considerando o período de tempo estabelecido no estudo.

5.4 SOLUÇÃO MODELO DE REFERÊNCIA

Com o propósito de controlar as emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico objetivando reduzir o efeito estufa é necessário definir um modelo de referência que siga uma trajetória com comportamento prescrito. Assim, a matriz A_r e o sinal de referência $r(t)$, para cada estado do modelo, devem ser especificados com base em alguns padrões. Desta forma, o sinal desejado do modelo de referência pode ser interpretado como um guia para controle robusto minimax. Deste modo, A_r e $r(0)$ tem o seguinte formato:

$$A_r = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad r(0) = \begin{bmatrix} X(2015) \\ F(2015) \\ Y(2015) \\ K(2015) \end{bmatrix}.$$

Onde $X(2015)$ representa a emissão de CO_2 estimada pela média das vinte trajetórias simuladas do modelo estocástico, conforme Secção 5.3. Da mesma forma, $F(2015)$, $Y(2015)$ e $K(2015)$ também representam, respectivamente, os valores das médias das trajetórias simuladas pelo modelo estocástico, para a área florestal, PIB e estoque de capital.

De início, foi estimado um o valor de $r(t)$ acumulado no período de 11 anos, entre 2015 e 2025, tomando como base uma taxa de crescimento composta de 2,5% para todas as séries das variáveis de estado e capitalizadas em um período de 11 anos; isto é, foi realizado o seguinte procedimento,

$$r(2025) = -A_r(r(0)(1 + 0,025)^{11}). \quad (5.1)$$

E, em seguida, foi estimado as variações no vetor de variável

dependente (variáveis de estados), como segue:

$$dr(t) = A_r x(t) + r(2025), \quad (5.2)$$

onde t inicia em 2015 (primeiro valor após o último dado experimental utilizado na calibração do modelo, estimado pelo modelo estocástico), $x(t)$ representa o vetor de valores estocásticos, inicialmente, estimados para 2015 e, a medida que t é incrementado, $x(t)$ passa a ser $x(t - 1) + dr(t)$, e assim subsequentemente. Com a implementação deste procedimento foi obtido o vetor de variáveis estado de referência.

Depois de definidos os valores de A_r e $r(t)$ foi realizada a capitalização dos estados em 11 anos. Contudo, como a estimativa é feita por meio do números de pontos compatíveis com a malha gerada no processo de ajuste numérico instituído pelo método de *Runge-Kutta*, o qual impõe um conjunto de pontos maior do que o número de anos estabelecidos nesta simulação, então o período de capitalização da taxa de crescimento composta sobre a economia passa a ter um impacto diferente daquele estabelecido para os 11 anos, na evolução do vetor de referência r . Sendo assim, é necessário aplicar um modelo *log-lin* para saber a taxa de crescimento (ou decréscimo) anual dos estados do modelo proposto. De acordo com Gujarati e Porter (2011), para entender o modelo *log-lin* é necessário relembrar a fórmula de juros compostos, escrita a seguir:

$$r(t) = r(0)(1 + i)^t, \quad (5.3)$$

onde r é o vetor das estimativas de referência das variáveis dos estados, t é o incremento de tempo e i é a taxa de crescimento composta. Portanto, calculando o logaritmo natural de (5.3), pode-se escrever:

$$\ln(r(t)) = \ln(r(0)) + t \ln(1 + i). \quad (5.4)$$

Assumindo $\beta_1 = \ln(r(0))$ e $\beta_2 = \ln(1 + i)$, pode-se escrever (5.3) da seguinte maneira:

$$\ln(r(t)) = \beta_1 + \beta_2 t. \quad (5.5)$$

Adicionando o termo de perturbação à Eq. (5.5), obtém-se:

$$\ln(r(t)) = \beta_1 + \beta_2 t + u_t. \quad (5.6)$$

Este modelo é chamado de *log-lin*, apresentando a propriedade de linearidade dos parâmetros, como qualquer outro modelo de regressão linear, já que os parâmetros β_1 e β_2 são lineares. A única diferença é

que o regressando é o logaritmo de r e o regressor é o tempo, t .

Portanto, tendo encontrado o vetor $r(t)$, conforme o procedimento dado pelas Equações 5.2 e 5.3 e tendo o vetor t conforme o estabelecido pelos incrementos no método de *Runge-Kutta*, executou-se um modelo *log-lin* dado pela Equação 5.6, obtendo-se assim, os parâmetros β_1 e β_2 .

Assim, de acordo com o modelo 5.6 estimado, $\beta_2 * 100$ representa a taxa de crescimento instantânea média e as taxas de crescimento compostas podem ser conhecidas por meio da seguinte equação:

$$i = (e^{\beta_2} - 1)100. \quad (5.7)$$

Finalmente, pode-se estimar a taxa de crescimento acumulada para o período de referencia entre os anos 2015 até 2025 (11 anos), a qual é dada por

$$i_{acum} = ((1 + i)^{11} - 1)100. \quad (5.8)$$

Estes resultados estão apresentados na Tab. (4), abaixo.

Tabela 4 – Taxas de crescimento modelo de referência

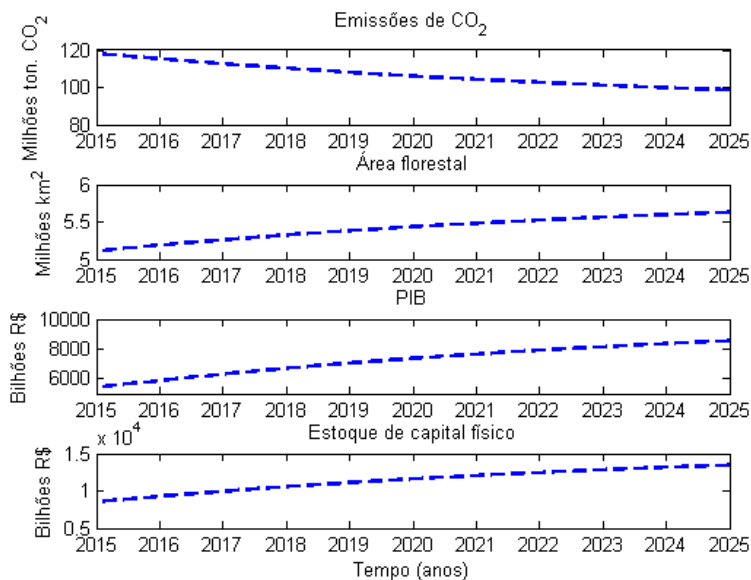
Estado	i instantâneo	i composta	i acumulada
X	-1,80%	-1,78%	-19,61%
F	0,95%	1%	10,5%
Y	4,43%	4,5%	49,59%
K	4,43%	4,5%	49,59%

Fonte: elaboração própria

Assim, conforme se observa na Tab. (4) e representado graficamente na Fig. (16), este trabalho simula, entre 2015 e 2025, que as emissões de CO_2 no Brasil podem decrescer 19,61%. Esta é uma simulação conservadora em relação ao compromisso voluntário adotado pelo país, em 2009, que pretendia uma redução de 36,1% a 38,9% até 2020. Esta posição foi tomada devido ao presente trabalho ser realizado no ano de 2015, sendo que até este momento não ocorreu uma alteração da trajetória das emissões que vislumbresse o alcance destes valores. Em relação ao PIB e o estoque de capital foram simuladas trajetórias de crescimento anual composto em torno de 4,5%. O que está de acordo com a média de crescimento da economia brasileira nos padrões alcançados nos anos 2000, menos otimista do que previsto no modelo determinístico, contudo dentro das possibilidades de crescimento de uma economia sujeitas a flutuações devido a instabilidade na economia internacional e interna (MEDEIROS; YOUNG, 2011). Assim, a ideia é que

o Brasil possa seguir a trajetória de crescimento econômico alcançada nos anos 2000. Quanto a área florestal, foi simulado que ela pode ter um incremento de 10,5% até 2025. Ou seja, praticamente a área florestal retornaria ao patamar que o país possuía nos anos 2000. Atualmente o Brasil está conseguindo diminuir a taxa de desmatamento (YOUNG, 2015), mas somente isto não será o suficiente para alcançar este comportamento da trajetória de área florestal. Para tanto, investimentos em reflorestamento e criação e manutenção de áreas de conservação devem ser realizados.

Figura 16 – Trajetória de referência desejada



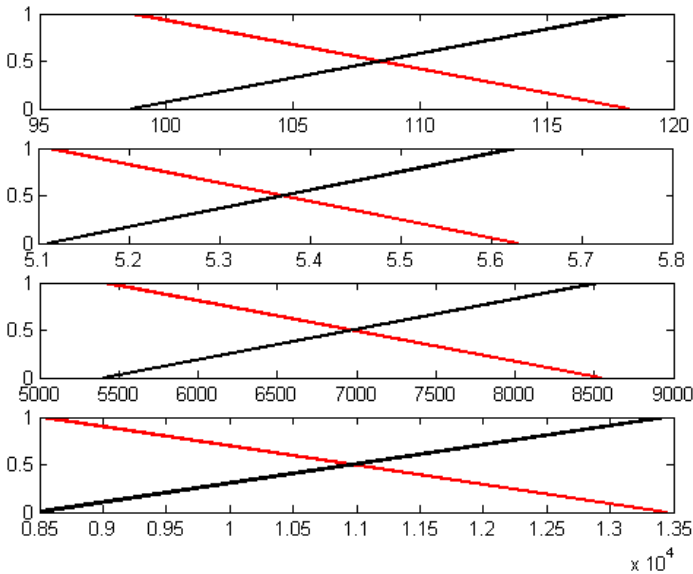
Fonte: elaboração própria

5.5 MODELO FUZZY

Para evitar resolver o HJI no Teorema 1 (apresentado na Seção 4.4), um modelo *fuzzy* T-S é empregado para aproximar o modelo estocástico não-linear. O primeiro passo para a obtenção de um modelo *fuzzy* T-S é a definição da quantidade de funções de pertinência. Estas,

por sua vez, estão diretamente relacionados ao número de regras do modelo, já que o número de regras é igual ao número de funções de pertinência elevado ao número de estados do sistema. Segundo Mehran (2008), o número de regras *fuzzy* é relacionado com a complexidade de análise do controle via LMI's para o sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno. Isto

Figura 17 – Funções de pertinência para os estados do sistema



Fonte: elaboração própria

ocorre porque o número de regras do modelo para o sistema de controle *fuzzy* global T-S é basicamente a combinação das regras e normas de controle do modelo. Sendo assim, neste trabalho irá ser assumido que cada estado é interpolado por duas funções de pertinência, *smf* e *zmf*², e assim, o modelo possuirá 16 regras³ (Fig. (17)).

No próximo passo, é utilizado um conjunto nebuloso de dados aleatórios gerados por uma distribuição uniforme. Conforme explicado na Seccção 4.5.2, o modelo Takagi-Sugeno utiliza funções “*crisp*” (fun-

²Detalhadas no Apêndice B.

³O ideal seria escolher uma dimensão para cada equação diferencial do modelo, o que tornaria o custo computacional extremamente grande, contudo, como o sistema aqui estudado só apresenta duas equações não lineares, o sistema demonstrou funcionar satisfatoriamente com duas regras de pertinência.

ções matemáticas não nebulosas), que podem ser equações diferenciais ordinárias, na parte consequente. Assim, os antecedentes descrevem regiões nebulosas no espaço de entrada, nas quais as funções consequentes são válidas. Neste caso, a partir de valores nebulosos gerados por uma distribuição randômica uniforme, com espectro de frequência infinito (suficientemente grande e, no caso desse estudo, 3000 pontos para cada variável de estado) é identificado, por meio de reaplicação das estimativas de máximos e mínimos delimitados pelo modelo determinístico, e aplicando as funções de pertinência *z-shaped* e *s-shaped*, torna-se possível a criação do conjunto *fuzzy* F_{ij} .

Com a criação dos conjuntos *fuzzy*, na premissa das regras avalia-se o grau de compatibilidade de $z_g(t)$ aos respectivos conjuntos *fuzzy*, F_{ij} , assim, obtém-se os graus de pertinência $\mu_i(z(t))$. A determinação do grau de ativação dos antecedentes é o produto algébrico das pertinências, ou seja, $\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g F_{ij}(z(t))$, e o consequente induzido por cada regra é uma ponderação do modelo local. Também, deve ser considerado que a ponderação normalizada de cada regra é dada por:

$$h_i(z(t)) = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))}. \quad (5.9)$$

Em seguida, o conjunto de dados nebulosos, gerados pela função randômica com distribuição uniforme, são aplicados para estimar as funções analíticas $f(X, F, Y, K, t)$, $g(X, F, Y, K, t)$, e $h(X, F, Y, K, w, t)$, destacadas na Eq. (4.5), obtendo as funções vetoriais $F_x(X, F, Y, K)$, $G_x(X, F, Y, K)$ e $H_x(X, F, Y, K)$. Estima-se também, por meio de um produto tensorial entre o vetor h (Eq. (5.9)) e o vetor de dados nebulosos destacados acima, o vetor de dados Φ . Finalmente, obtém-se as matrizes A , B e D , destacadas na Eq. (4.28), utilizando as seguintes formulas⁴:

$$A = \Phi^{-1} F_x \quad (5.10)$$

$$B = h^{-1} G_x \quad (5.11)$$

$$D = \Phi^{-1} H_x. \quad (5.12)$$

Logo, a etapa de agregação é simplesmente dada pela média ponderada das regras. Assim o modelo T-S final é dado pela Eq. (4.28),

⁴O símbolo $^{-1}$ nas Equações 5.10, 5.11 e 5.12 significa a pseudo inversa, que é expressada por uma decomposição de valores singulares de uma matriz $A_{n \times n}$, conforme detalhado no Apêndice C.

transcrevendo-a:

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= \frac{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) \{(A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dw(t)\}}{\sum_{i=1}^L \mu_i(z(t))} \\
 &= \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \{(A_i x(t) + B_i u(t) + C v(t)) dt + D_i x(t) dw(t)\}.
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

Finalmente, pode-se estimar o modelo T-S dado pela Eq. (5.13), iniciando-se um processo de integração pelo método de *Runge-Kutta*, a partir dos dados do vetor $x(t)$ (onde x representa um vetor de variáveis de estados), do vetor u dos parâmetros invariantes de controle, do vetor de perturbações estocásticas $v(t)$ e do vetor de perturbações nos níveis dos coeficientes do modelo, $dw(t)$. Associando no cálculos as estimativas dos vetores definidos de (5.9) a (5.12) e definindo uma matriz identidade C , de ordem 4×4 (ou seja, a ordem do número de equações diferenciais do modelo), pode-se obter o vetor incremento dx nas interpolações de *Runge - Kutta*, e assim, obtendo os novos valores para o vetor $x(t + 1)$, onde t inicia em 2000) (primeiro valor da série de dados empíricos utilizado na calibração do modelo). Portanto, a medida que t é incrementado, $x(t)$ passa a ser $x(t - 1) + dx(t)$, e assim subsequentemente. Com a implementação deste procedimento foi obtido o vetor de variáveis estado do modelo *fuzzy*.

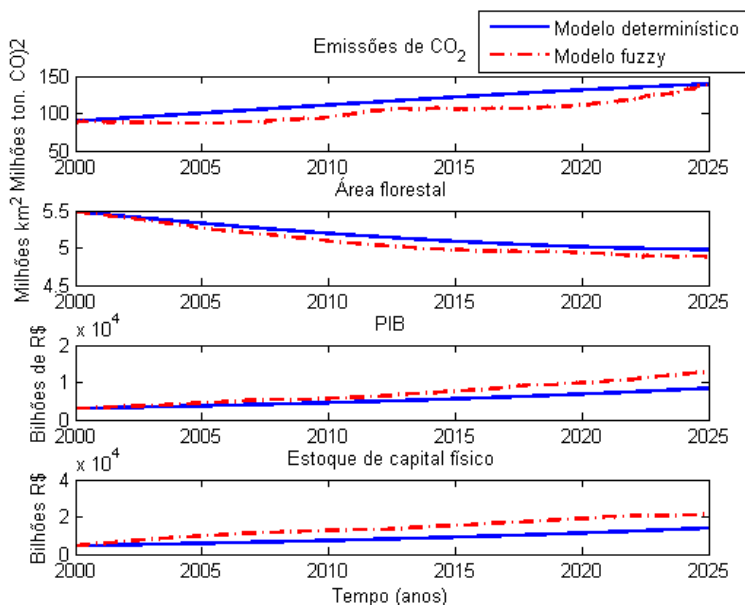
A Figura 18 mostra a comparação do modelo *fuzzy* com 16 regras, conforme descrito no parágrafo anterior, e do modelo original, simulado com a função `ode45`. A aproximação dos dois modelos pode ser considerada boa, porém se o número de regras fosse maior o modelo *fuzzy* teria uma capacidade maior de aproximação do modelo original. No entanto, isto acarretaria um custo computacional muito alto na resolução das LMI's⁵. Por este motivo decidiu-se manter o número de pontos de operação, e consequentemente o número de regras.

5.6 TRAJETÓRIA DE CONTROLE ROBUSTA MINIMAX

Conforme a simulação computacional, foi demonstrado que o sistema de emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico com controles invariantes no tempo (modelo determinístico) pode se ajustar

⁵A estrutura LMI permite a obtenção da regra de controle minimax do jogo não cooperativo a ser utilizado nas estimativas da evolução dos parâmetros de controle.

Figura 18 – Modelo determinístico e modelo fuzzy



Fonte: elaboração própria

perfeitamente aos dados reais no período entre 2000 e 2015 (Fig.'s (14) e (13)), mas não consegue manter uma performance realística, diante de distúrbios intrínsecos à economia, sejam eles internos ou externos (Fig. (15)).

Para que o sistema proposto possa seguir a trajetória desejada, ou seja, diminuição das emissões de CO_2 , aumento da área florestal e crescimento econômico sob distúrbios ou erros na modelagem, um modelo robusto de trajetória de controle minimax (característico de um jogo não cooperativo) é estruturado.

Portanto, com a finalidade de obter a trajetória de performance robusta minimax, relativa à trajetória de referência desejada, em situações de influências adversas, características de sistemas econômicos reais (por exemplo, como flutuações cíclicas paramétricas, componentes de ruídos estocásticos ambientais, e necessidade de minimizar os esforços de controles), torna-se necessário definir matrizes de penalização para estes efeitos. Assim, as matrizes Q e R são definidas, respectivamente, com a finalidade penalizar os níveis de erros devidos às flutuações cíclicas e de

ruídos estocásticos, e estabelecer um baixo esforço de controle, conforme escritas abaixo.

$$Q = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

As matrizes Q e R devem ser matrizes quadradas, da ordem do sistema de equações diferenciais, sendo que não existe uma regra prática para o estabelecimento de seus elementos, os quais representam a grandeza dos amortecimentos dos efeitos a serem penalizados. Assim, a regra deve ser estabelecida por método de tentativa e erro. No caso deste estudo, obteve-se êxito na convergência da estimativa do jogo estocástico relativo à trajetória de referência, atribuindo-se os valores estabelecidos nas matrizes Q e R , dadas por (5.14), onde foi atribuída uma punição alta em relação a trajetória de erro (conforme matriz Q) e baixos esforços de controle, conforme matriz R .

O próximo passo foi resolver o problema de otimização restrita LMI em (4.36) e (4.37), afim de obter a trajetória de controle robusto minimax. Transcrevendo este problema de otimização, tem-se que

$$\rho^2 = \min_{W > 0} \rho^2 \quad (5.15)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T & W D_i^T & W \bar{Q}^T \\ D_i W & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; i = \bar{j}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i W + W \bar{A}_i^T - \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_i^T + \frac{1}{\rho^2} \bar{C} \bar{C}^T & W \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right)^T & W \bar{Q}^T \\ \left(\frac{D_i + D_j}{2} \right) W & -W & 0 \\ \bar{Q} W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0; i = j$$

$$\rho^2 W > \bar{I} \quad (5.16)$$

A solução do problema (5.15) sujeito a (5.16) trata-se de estabelecer uma otimização restrita para encontrar ρ_0^2 (o valor mínimo para ρ^2), tal que os valores de W não sejam positivos. Ou seja, isto pode ser resolvido decrescendo ρ^2 até que não exista $W > 0$. Depois de encontrar o W , cujos os elementos não sejam positivos, é possível encontrar $P = W^{-1}$, e $\rho_0 = \sqrt[2]{\rho^2}$. Isto é resolvido pelo solver mincx

com o auxílio do comando `dec2mat` do *toolbox* de controle robusto do Matlab.

Pelo procedimento descrito no paragrafo acima, foi encontrado um valor mínimo de $\rho_o = 0,24$ e uma matriz P associada, positiva definida, apresentada abaixo.

$$P = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0015 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0015 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0015 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0015 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

Depois de encontrar ρ_o e P , a partir do problema de otimização (5.15) e (5.16), seus valores são substituídos em

$$u^*(t) = - \sum_{j=1}^{16} h_j(z(t)) R^{-1} \bar{B}_j^T P \bar{x}(t) \quad (5.17)$$

para obter a trajetória de controle robusto minimax, $u^*(t)$.

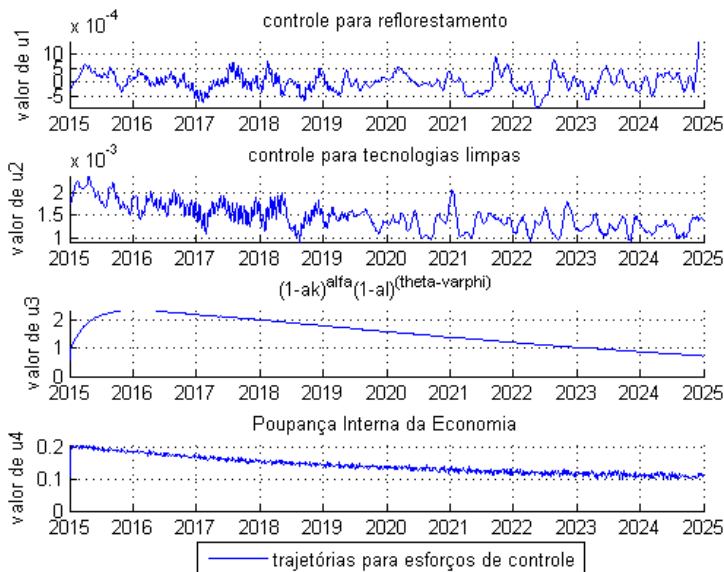
Assim, é possível ajustar uma curva de evolução de u^* , por meio do método de integração numérica de *Runge-Kutta*, tendo como valores de entrada os parâmetros de controle invariantes no tempo. Conforme, a regra de controle (5.17), associando na integração numérica, a ponderação das regras *fuzzy*, $h_j(z(t))$, bem como as estimativas das matrizes R , B e \bar{x} , pode-se obter o vetor incremento du nas interpolações de *Runge-Kutta*, e assim, obter novos valores para o vetor incrementado $u(t+1)$, onde t tem início em 2015 (ano inicial da trajetória de referência). Desta forma, com a evolução de t , $u(t)$ passa a ser $u(t-1) + du(t)$, e assim em diante. Com a implementação deste método, foi possível obter a trajetória de controle robusto minimax no espaço de tempo aplicado para a trajetória de referência deste estudo.

Para a obtenção da trajetória do sistema proposto em relação ao modelo de referência desejado, por meio de uma trajetória de controle robusta minimax, mesmo sob a influência de flutuações paramétricas e distúrbios ambientais (Fig. (23)) foram utilizados os valores de u^* gerados no procedimento acima, ou seja, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ e $u_4(t)$. Isto é, estes valores foram substituídos na Eq. (4.5) e foi realizada a sua integração numérica, pelo método de *Runge-Kutta*, sendo que os valores iniciais utilizados para esta integração foram os mesmos que os utilizados no sistema de referência, que teve início no ano de 2015.

5.7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Aplicando o procedimento especificado na Subseção 5.6, acima, foi possível obter as trajetórias de evolução dos parâmetros de controle $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ e $u_4(t)$ (conforme Fig. (19)), assim como verificar a precisão do processo de ajuste da trajetória otimizada *fuzzy*, com relação à trajetória de referência (conforme Fig. (23)). Estes resultados serão comentados a seguir.

Figura 19 – Trajetória de controle robusto minimax



Fonte: elaboração própria

Deve ser lembrado que u_1 caracteriza a porcentagem do PIB destinada à preservação e aumento da área florestal, u_2 a porcentagem do PIB destinado aos investimentos em tecnologias limpas, u_3 caracteriza uma função que envolve a interação entre a participação marginal dos impactos da parcela de investimentos em capital destinados à produção e a parcela de pessoal empregado na produção. Dentro de u_3 está contido $(1 - a_k)^6$, sendo que este apresenta elasticidade idêntica à do PIB com

⁶com a_k sendo a parcela de capital investida em P&D e ciência e tecnologia.

relação ao estoque de capital físico. O outro elemento pertencente a u_3 é a participação marginal do pessoal empregado nas atividades produtivas, $(1 - a_l)$ ⁷, que apresenta elasticidade similar à do PIB com relação ao estoque de trabalho. Finalmente, u_4 caracteriza a poupança destinada aos investimentos em capital físico.

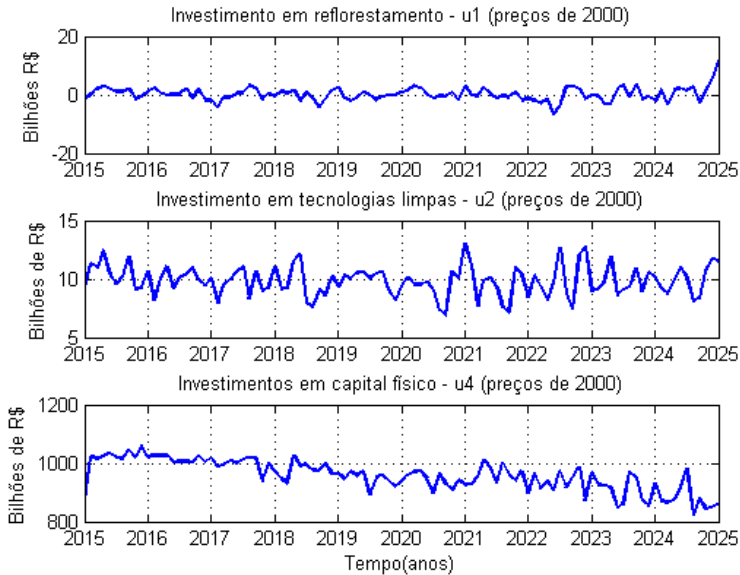
A Figura (20) é determinada multiplicando os valores estimados, respectivamente, para $u_1(t)$, $u_2(t)$ e $u_3(t)$, pelo valores do PIB nos períodos de tempo correspondentes, estimados para a trajetória de referência. Assim, obtém-se os volumes financeiros a serem empregados na preservação e aumento da área florestal (primeiro gráfico), em inovações tecnológicas aplicadas no processo de geração de energia limpa (segundo gráfico) e o montante a ser destinada aos investimentos em capital físico (terceiro gráfico). Estes gráficos encontram-se especificados em bilhões de reais, a preços de 2000, e caracterizam os investimentos a serem impostos à economia para atender as metas estabelecidas nas trajetórias de referências especificadas.

A primeira trajetória de controle a ser analisada é a do $u_1(t)$. A partir do valor de u_1 invariante no tempo, ajustado ao modelo determinístico, que é de 0,000005 (de acordo com a Tab. (3)), foi estimada a trajetória de evolução de $u_1(t)$, conforme o primeiro gráfico da Fig. (19). Observando este gráfico, nota-se que nos primeiros anos da simulação a tendência é de que ocorram aportes de capital para reflorestamento maiores do que o estimado com o parâmetro invariante no tempo, mas não de maneira constante. Sendo que estes investimentos tendem a crescer com o tempo. Como exemplo, o valor de $u_1(t)$ parte de 0,000005 e imediatamente evolui para 0,00055, mas logo volta a cair e, em seguida, sobe para o valor de 0,00039. Esse processo de flutuação cíclica ocorre durante todo o período de referência (2015-2025), atingindo valores da ordem de 0,000697 e 0,0014, já no final do período de previsão. No entanto, os u_1 estimados mantêm uma componente média de 0,000031. Portanto, observa-se que este parâmetro de controle sofre efeitos de oscilações, supostamente, em momentos em que a economia encontra-se sob efeitos cíclicos ou de inovações estocásticas.

É possível constatar no primeiro gráfico da Fig. (20) que em 2014, imediatamente anterior ao início do estabelecimento das trajetórias de referencia, os investimentos na preservação e expansão das áreas florestais, conforme previsão, evoluem de 22 milhões de R\$, em valores de 2000, para 2,5 bilhões de R\$, também em valores de 2000, para que a área florestal brasileira tenha um incremento da magnitude de

⁷Com a_l sendo a parcela de pessoal empregadas nas atividades em P&D e desenvolvimento de ciência e tecnologia.

Figura 20 – Volumes financeiros a serem empregados em reflorestamento, inovações tecnológicas e capital físico



Fonte: elaboração própria

1% ao ano. Nota-se que estes valores de investimento estimados no processo de controle trazem um aporte financeiro considerável para a preservação ambiental, se comparado com o valor do investimento característico da atual política brasileira de reflorestamento, conforme estimado pelo modelo determinístico, com controle invariante no tempo. Logicamente, encontra-se claro no primeiro gráfico da Fig. (20) que o comportamento dos investimentos previstos para o controle de áreas florestais apresenta um comportamento cíclico, oscilando de forma significativa. Por exemplo, estabelecendo as estimativas de alguns pontos com elevado investimento, pode-se observar que em algumas situações, estes valores de controle estimados atingem cifras, em caso extremos, de aproximadamente 6 e 11 bilhões de R\$, mas tendo uma componente média de 140 milhões de R\$. Assim, conclui-se que se o Brasil quiser recuperar a sua área florestal ao patamar dos anos 2000, deve elevar os seus aportes de recursos direcionados à preservação e expansão de suas áreas florestais, para pelo menos ao nível da componente média prevista

pelo parâmetro de controle $u_1(t)$, ou seja, de 140 milhões de R\$. Com estes recursos será possível concentrar esforços para o fortalecimento de políticas para a redução das taxas de desmatamento, bem como para a criação de novas áreas de proteção de vegetações nativas.

Analisando o segundo gráfico da Fig. (19) é possível perceber que os esforços de controle para o desenvolvimento de tecnologias limpas tem um grande aumento no estágio inicial da simulação. Na Tab. (3), encontra-se que o valor de u_2 ajustado ao modelo invariante foi 0,001, que corresponde ao valor inicial de u_2 em 2015. A partir desse valor foi estimada a trajetória de evolução de $u_2(t)$, conforme o segundo gráfico da Fig. (19). Portanto, constata-se neste gráfico que houve um aumento significativo e imediato, de uma participação do PIB de 0,001 para 0,00219, para atender o processo de evolução da trajetória de referência especificada. Este fato sugere a necessidade urgente de aumentar os recursos para implementação de sistemas de geração de energia limpa, o que possibilitará a redução da taxa de crescimento de emissão de CO_2 e, conseqüentemente, da redução de CO_2 , e assim, conduzindo a trajetória do sistema de emissões de CO_2 para a trajetória de referência desejada. Os investimentos nesse processo devem ser coordenados, de forma que políticas publicas e privadas sejam direcionadas para a inovação em tecnologias limpas.

Pode-se observar na Fig. (20), segundo gráfico, que, em termos médios e em valores reais, a preço de 2000, deve-se manter um investimento constante de aproximadamente 11 bilhões de reais, para que a trajetória de referência de emissões de CO_2 seja reduzida na proporção de 1,78% a cada ano, durante o período de previsão (2015-2025). Observa-se que este valor sofre um salto significativo, se comparar este valor ao valor investido no desenvolvimento de novas tecnologias, obtido multiplicando o valor de u_2 invariante, 0,001, pelo PIB de 2015, a preço de 2000, isto é 5,13 bilhões. Com o resultado, observa-se que a trajetória de $u_2(t)$ evolui de forma a manter constante o montante previsto para investimentos em novas tecnologias (11 bilhões de reais, a preço de 2000). Assim, tendo em vista que o PIB apresenta um crescimento real ao longo do período, em consequência, o fator de controle $u_2(t)$ evolui, diminuindo o seu valor, atingindo um valor de 0,0014 em 2025, bem próximo do fator de controle invariante, de 0,001.

Mas aonde devem ser investidos este montante de recursos referentes ao controle u_2 ? Ao longo da revisão de literatura foi verificado que a energia eólica seria uma opção interessante. No entanto, deve-se ressaltar que as políticas para a expansão da energia eólica no Brasil não devem ter somente como foco principal a geração do produto final.

Também devem ser realizados investimentos que privilegiem o desenvolvimento de capacidades tecnológicas, a criação de empregos (diretos e indiretos) e a criação de processos inovadores neste setor.

Outro setor importante que deveria ser o destino dos recursos disponíveis para o investimento em tecnologias limpas deve ser o de biocombustíveis. Já que quando se visa a redução da concentração de gases do efeito estufa na atmosfera uma etapa primordial neste processo é a substituição dos combustíveis fósseis por energias renováveis. Porém, os investimentos devem ser direcionados para o desenvolvimento de tecnologias alternativas e modelos de negócios, em vez de se basear somente no etanol e biodiesel. Isto porque estes biocombustíveis possuem uma série de objeções como: a dependência dos preços do petróleo, expansão da área de cultivo e a competição com culturas alimentícias. Ou seja, o Brasil precisa investir em uma estrutura industrial que desenvolva novas gerações de biocombustíveis. Isto ajudaria na redução das emissões de CO_2 e também faria com que o país se mantivesse líder em um setor que será cada vez mais competitivo.

O quarto gráfico da Fig. (19) mostra como deve se comportar a evolução da poupança interna da economia, ou seja a parcela do PIB que é investida em estoque de capital, que é representada pelo parâmetro de controle $u_4(t)$. Como pode ser observado, segundo a simulação para que a economia possa manter uma trajetória de crescimento econômico da curva de referência é necessário que taxa de investimento, inicialmente, de um salto de 17% para mais de 20%. Observando a Fig. (20) é possível estabelecer que se o Brasil quiser seguir a curva de referência traçada para um aumento de cerca de 4,5% do estoque de capital, este deve fazer que os seus investimentos, imediatamente, saltem de 772 de bilhões R\$ para cerca de 1000 bilhões de R\$, a preço de 2000, e prevaleça nesse nível até o ano de 2020. Depois deste ano este valor pode ser decrescido, chegando ao nível de 900 bilhões de R\$, a preço de 2000. Fazendo um exercício de análise, se for realizada a multiplicação do parâmetro de controle, u_4 , invariante no tempo, pelos valores da trajetória de referência do PIB, a curva de investimento seria diferente. Os investimentos iniciais seriam da ordem de R\$ 772 bilhões, em valores de 2000, mas no ano de 2025 eles chegariam a 1379 bilhões de R\$, a preço de 2000.

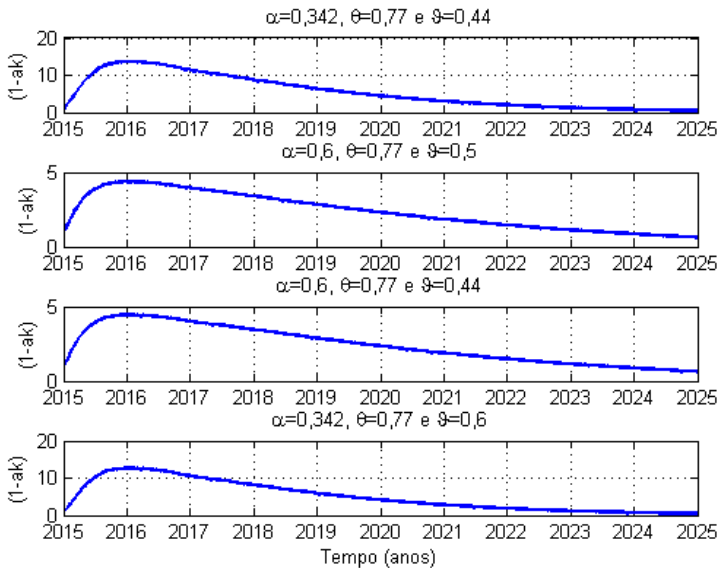
No terceiro gráfico da Fig. (19) é apresentado a evolução do fator de controle $u_3(t)$, que aborda os efeitos de interação das frações agregadas da mão-de-obra e do capital, a serem utilizadas na produção de mercadorias, levando em consideração o conhecimento inerente à estrutura educacional, social e econômica empregadas no desenvolvi-

mento de novas tecnologias, fatores que determinam as elasticidades do produto em relação ao estoque de capital, com relação ao estoque de trabalho e com relação ao capital humano, respectivamente, α , θ e φ . Assim, o que se observa com relação a este parâmetro de controle é que ele representa o nível de tecnologia empregada no processo produtivo, constituindo-se num fator multiplicação dos efeitos funcionais dos insumos empregados na produção, que será tão maior quanto mais eficiente for o processo. Portanto, esse fator de controle, u_3 agrupa os mecanismos que caracterizam o desempenho de todo o processo produtivo da economia: efetividade na produção da mão-de-obra, nível de tecnologia envolvido no processo produtivo e capacidade de desenvolvimento de novas tecnologias. O fator de controle u_3 só pode ser alterado se ocorrerem variações na participação marginal do capital, α , na participação marginal do estoque de trabalho, θ , na participação marginal do capital humano, φ , na parcela de pessoal nas atividades de P&D, a_l , e, finalmente, na parcela do estoque de capital empregado no desenvolvimento de P&D, a_k .

Ao observar o terceiro gráfico da Fig. (19) é possível perceber a evolução do parâmetro de controle $u_3(t)$ no período de análise deste estudo. Esta evolução tem como ponto inicial, o valor obtido no processo de calibração deste parâmetro. Como $u_3 = (1 - a_k)^\alpha (1 - a_l)^{(\theta - \varphi)}$, foram utilizados os valores calibrados dos parâmetros α , θ e φ , a_k e a_l para chegar ao valor de u_3 invariante no tempo. Realizando este procedimento, o valor calibrado de u_3 invariante no tempo foi de 0,8856, que está contido na Tab. (3). A partir desse valor foi estimada a trajetória de evolução de $u_3(t)$. Portanto, constata-se neste gráfico que deve ocorrer um aumento significativo no período inicial da simulação do comportamento agregado das frações de mão-de-obra e capital que devem ser utilizadas na produção levando em consideração as participações marginais do capital, do estoque de trabalho e do capital humano. Para atender o processo de evolução da trajetória de referência especificada, o valor de $u_3(t)$ deveria evoluir de 0,8856, em 2015, chegando ao pico de 2,31, já em 2016. Depois este fator de controle evolui de forma decrescente, diminuindo o seu valor, para 0,79, que está um pouco abaixo ao valor calibrado para o esforço de controle u_3 invariante no tempo. Desta forma, este comportamento de $u_3(t)$ deixa em voga a necessidade que o Brasil tem de fazer, no curto prazo, um progresso no processo produtivo da sua economia. Isto será possível com a construção de um nível de tecnologia mais elevado que possa resultar em uma maior efetividade da mão-de-obra. Vale ressaltar que com esta mudança no processo produtivo nacional, novas tecnologias menos intensivas em poluição e

utilização dos recursos naturais devem ser empregadas para que o país possa alcançar as demandas atuais de redução das emissões de CO_2 e aumento da área florestal.

Figura 21 – Exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_k)(t)$ de $u_3(t)$

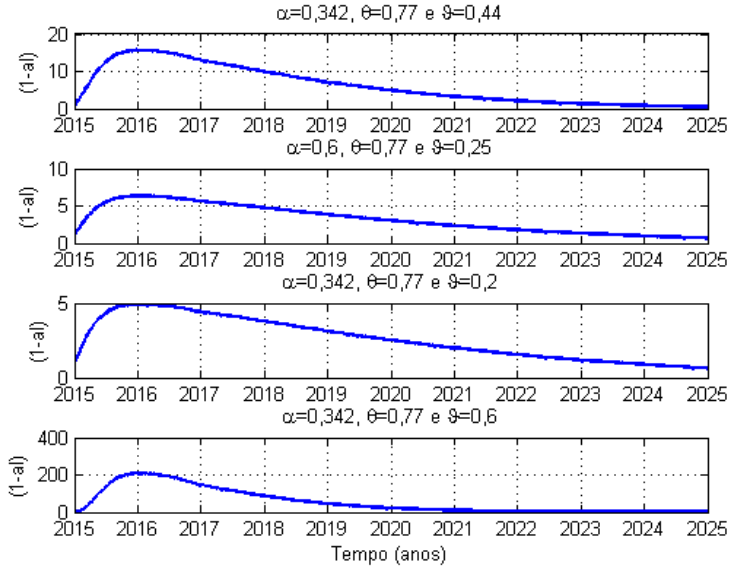


Fonte: elaboração própria

A análise exposta acima está relacionada com o comportamento agregado de $u_3(t)$. No entanto, como $u_3(t)$ é composto por dois elementos, $(1 - a_k)^\alpha$ e $(1 - a_l)^{(\theta - \varphi)}$, é interessante analisar a evolução destes efeitos individualmente. Para tanto, serão realizados alguns exercícios, com a finalidade de destacar as dificuldades impostas à economia brasileira para estabelecer um padrão de desenvolvimento, conforme estabelecido pela curvas de referências especificadas para cada variável de estado do modelo.

A Figura (21) destaca alguns exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_k)(t)$ de $u_3(t)$. Este componente é estimado a partir do vetor de controle $u_3(t)$ obtido anteriormente e

Figura 22 – Exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_l)(t)$ de $u_3(t)$



Fonte: elaboração própria

fixando os parâmetros α , θ , φ e a_l , a partir da seguinte Equação:

$$(1 - a_k)(t) = \frac{u_3(t)^{\frac{1}{\alpha}}}{(1 - a_l)^{\frac{(\theta - \varphi)}{\alpha}}}, \quad (5.18)$$

onde $(1 - a_k)(t)$ representa a parcela de capital físico utilizado no setor produtivo.

Da mesma forma, a Fig. (22) destaca alguns exercícios sobre o comportamento desagregado da componente $(1 - a_l)(t)$ de $u_3(t)$, a ser estimada a partir de $u_3(t)$ obtido no modelo, fixando os parâmetros α , θ , φ e a_k , a partir da seguinte Equação:

$$(1 - a_l)(t) = \frac{u_3(t)^{\frac{1}{(\theta - \varphi)}}}{(1 - a_k)^{\frac{\alpha}{(\theta - \varphi)}}}, \quad (5.19)$$

onde $(1 - a_l)(t)$ representa a parcela da força de trabalho utilizada no

setor produtivo.

A Figura (21) destaca quatro gráficos, representando quatro situações especuladas para a operação do sistema produtivo em análise, no caso o sistema brasileiro, utilizando a Eq. (5.18) para estimar $(1 - a_k)(t)$. Nessas estimativas, a_l foi mantido constante, de tal modo que todas as necessidades de aumento no nível de tecnologia, $u_3(t)$, devem ser supridas por meio do aumento da parcela de capital físico. No primeiro gráfico foi estimado $(1 - a_k)(t)$, utilizando os parâmetros $\alpha = 0,342$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,44$, valores calibrados no modelo determinístico, conforme destacados na Tab. (3). Os valores destas elasticidades representam com fidelidade o comportamento da eficiência da processo produtivo brasileiro. Observa-se nesse primeiro gráfico da Fig. (21), que a parcela de capital físico necessária para atender as condições estabelecidas pelas curvas de referencias determinadas para a economia brasileira, evolui, com aumentos significativos no período inicial da simulação, passando de 0,99, em 2015, chegando ao pico de 13,65, já em 2016. Depois este fator de controle evolui de forma decrescente, diminuindo o seu valor, para 0,44. Nesse caso, este comportamento torna explicito um desafio quase impossível que o Brasil tem de fazer no curto prazo. Este nível de crescimento da parcela de capital físico destinado ao processo produtivo só pode ser feito com muito investimento em equipamento com altos níveis de tecnologias.

No segundo gráfico da Fig. (21) foi estimado $(1 - a_k)(t)$, utilizando os parâmetros $\alpha = 0,6$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,5$ (parâmetros que diferem daqueles característicos da economia brasileira, conforme calibração). Neste exercício, a elasticidade do capital físico foi aumentada, de 0,342 para 0,6 e a elasticidade do capital humano foi alterada de 0,44 para 0,5. Pode-se notar que com estas elasticidades a parcela de capital físico necessária para atender as condições estabelecidas pelas curvas de referências determinadas para a economia brasileira, evolui de forma bem menos significativa que para a situação analisada para o primeiro gráfico desta figura, com incrementos que passam de 0,983, em 2015, para um máximo de 4,355. A conclusão que se tem é de que elevando as elasticidades do produto em relação ao estoque de capital e com relação ao capital humano, α e φ , respectivamente, fazem com que o nível de crescimento da parcela de capital físico a ser destinado ao processo produtivo não necessita de uma elevação tão significativa, afim de atender a demanda de manutenção da trajetória de crescimento econômico.

No terceiro gráfico da Fig. (21) também foi estimado $(1 - a_k)(t)$, porém utilizando os parâmetros $\alpha = 0,6$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,44$ (neste

caso, somente a elasticidade do capital físico foi aumentada, de 0,342 para 0,6, mantendo os demais parâmetros similares aos característicos da economia brasileira, conforme calibração). Observa-se que com o incremento de α de forma acentuada, no entanto, mantendo as elasticidades do trabalho e capital humano similares às característicos da economia brasileira, evidencia-se que a elevação do nível de crescimento da parcela de capital físico requerida ao processo produtivo para atender as necessidades de evolução das curvas referências, evolui-se de 0,99 para o valor máximo de 4,426 em 2016, requisitos bem menores que os exigidos na operação da função de produção com os parâmetros característicos da economia brasileira. O que se conclui aqui é que a elasticidade do capital constitui um elemento importante no desempenho do processo produtivo. O crescimento de α encontra-se associado de ao uso de equipamentos com maiores níveis de tecnologia. Neste caso, a parcela de capital físico a ser imposta não necessita ser tão grande como na situação característica atual da economia brasileira, mas deve-se utilizar equipamentos com maiores níveis de tecnologia.

O último gráfico da Fig. (21), utilizando os parâmetros $\alpha = 0,342$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,6$ (neste caso, somente a elasticidade do capital humano foi aumentada, de 0,44 para 0,6, mantendo os demais parâmetros similares aos característicos da economia brasileira, conforme calibração). Observa-se que com o incremento de φ de forma acentuada, no entanto, mantendo as demais elasticidades similares às característicos da economia brasileira, evidencia-se que a elevação do nível de crescimento da parcela de capital físico requerida ao processo produtivo para atender as necessidades de evolução das curvas de referências, evolui-se de 0,92 para o valor máximo de 12,65 em 2016, requisitos menores que os exigidos na operação da função de produção com os parâmetros característicos da economia brasileira, contudo, com menores impactos que com a variação, na mesma ordem de grandeza, da elasticidade do capital físico conforme descrito no parágrafo anterior. Também conclui-se que φ constitui um elemento importante no desempenho do processo produtivo, mas com impactos mais moderados que α . Com o crescimento de α equipamentos com maiores níveis de tecnologia são utilizados e, neste caso, o aumento de φ torna importante no processo, para operar equipamento de alta tecnologia.

A Figura (22) também destaca quatro gráficos, representando quatro situações especuladas para a operação do sistema produtivo em análise, o sistema brasileiro, utilizando a Eq. (5.19). Nessas estimativas, a_k foi mantido constante, de tal modo que todas as necessidades de aumento no nível de tecnologia devem ser supridas por meio do au-

mento da parcela da força de trabalho. No primeiro gráfico também foi utilizado os parâmetros $\alpha = 0,342$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,44$, valores calibrados no modelo determinístico, conforme destacados na Tab. (3). Observa-se nesse primeiro gráfico da Fig. (22) que a parcela da força de trabalho necessária para atender as condições determinadas pelas curvas de referências para a economia brasileira, evolui, com aumentos significativos no período inicial da simulação, passando de 1,042, em 2015, chegando ao pico de 15,67, já em 2016. Depois este fator de controle evolui de forma decrescente, diminuindo o seu valor, para 0,45. Da mesma forma que anteriormente, este comportamento torna explícito um desafio quase impossível que o Brasil tem de fazer no curto prazo. Este crescimento da parcela da força de trabalho destinada ao processo produtivo só pode ser feito com muito investimento em educação e treinamento da força de trabalho para aumentar o níveis de tecnologias. Ou empregando, já de início, uma elevação da força de trabalho para, praticamente, 15 vezes maior que a atual.

No segundo gráfico da Fig. (22) foi estimado $(1 - a_l)(t)$, utilizando os parâmetros $\alpha = 0,6$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,25$. Neste exercício, a elasticidade do capital físico foi aumentada, de 0,342 para 0,6 e a elasticidade do capital humano foi alterada de 0,44 para 0,25, isto com relação às condições padrões da economia brasileira. Da mesma forma que foi analisada a a parcela de capital físico necessária para atender as condições estabelecidas pelas curvas de referencias determinadas para a economia brasileira, pode-se notar que com estas elasticidades a parcela da força de trabalho necessária para atender a demanda especificada anteriormente, evolui no período, de um valor inicial de 1,13, em 2015, chegando ao pico de 6,34 em 2016. Ou seja, com a alteração dos valores de α e φ para os níveis especificados, é possível fazer com que o nível de crescimento da parcela da força de trabalho destinada ao processo produtivo não necessite de uma elevação tão alta afim de atender a demanda de manutenção da trajetória de crescimento econômico.

No terceiro gráfico da Fig. (22) também foi estimado $(1 - a_l)(t)$, porém utilizando os parâmetros $\alpha = 0,342$, $\theta = 0,77$ e $\varphi = 0,2$. Neste exercício, a elasticidade do capital humano foi diminuída de 0,44 para 0,2 e as demais elasticidades mantiveram similares aos padrões calibrados, atuais da economia brasileira. Com esta simulação a parcela da força de trabalho necessária ao atendimento da trajetória de crescimento econômico desejada é a menor. Partindo de 1,024 e chegando ao nível máximo de 4,93 em 2016. Portanto, evidencia aqui que uma baixa elasticidade do capital humano coloca em destaque as características de uma força de trabalho com alto nível de escolaridades, onde um

grande incremento na capital humano possibilita pequenos impactos no produto. Neste caso, para atender os requisitos das trajetórias de referências torna necessário empregar menos trabalhadores.

No último gráfico da Fig. (22), os resultados foram obtidos, mantendo as elasticidades do produto em relação ao estoque de capital e ao trabalho, α e θ , relativas aos níveis dos parâmetros calibrados para a economia brasileira, no entanto, a elasticidade do produto em relação ao capital humano, φ , mudou de 0,44 para 0,6. Observa-se que para esta situação, os níveis da parcela de força de trabalho destinado ao processo produtivo cresce de forma assustadora, de 1,08 em 2015, para um valor de pico de 210,63. Portanto, constata-se que uma alta elasticidade do capital humano coloca em destaque as características de uma força de trabalho com baixo nível de escolaridades, onde um pequeno incremento na capital humano possibilita grandes impactos no produto. Neste caso, para atender os requisitos das trajetórias de referências torna necessário empregar uma força de trabalho consideravelmente grande.

Conclui-se, a partir da análise dos gráficos contidos nas Fig.'s (21) e (22), que o esforço para o incremento do nível de tecnologia brasileira, u_3 , deve ser feito afetando positivamente os parâmetros de elasticidades do modelo: α , θ e φ . Deve ser destacado que qualquer mudança nestes parâmetros passa por mudanças no processo produtivo. É desejável o crescimento de α , melhorando a participação marginal do capital no produto, mas isso só será possível com emprego no processo produtivo de equipamentos com mais altos níveis de tecnologia. Da mesma forma, é desejável o crescimento de θ , contudo, isto também só poderá ser feito por meio da melhoria da efetividade do trabalho, o que será alcançado por meio do aumento do grau de escolaridade da força de trabalho e com a implementação de treinamento intensivo em conhecimento. Ainda pode-se dizer que também é desejável aumentar φ , o que será possível por meio da melhoria na eficiência do ensino nas instituições de ensino brasileiras. Assim, observa-se que estes aumentos nas elasticidades da função de produção da economia brasileira são um trabalho árduo, e que pode ser atingido somente no longo prazo, e com políticas bem definidas para atender estes requisitos.

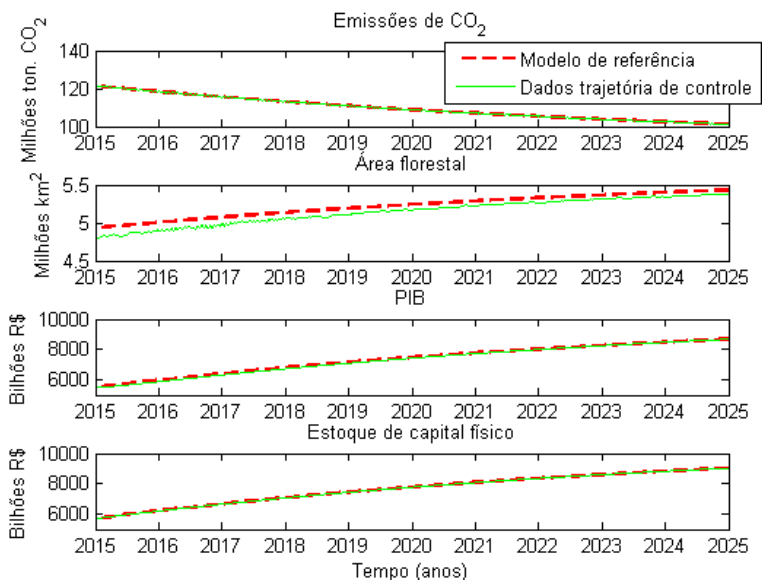
Mankiw, Romer e Weil (1992) destacam que os países com mais altas taxas de poupança e com menor crescimento populacional tendem a ter uma maior renda por trabalhador e, por isto, o valor de α , tende para uma constante universal igual a $\alpha \approx 0,33$. Este valor é reivindicado como padrão, e é correspondente à participação do capital na renda dos EUA. Entretanto, os autores acima destacados argumentam que a participação do capital na renda americana tem uma grande

distancia da média global, pois ela tende a ser muito mais alta em outros países, principalmente, em relação aos países em desenvolvimento. Obstfeld e Rogoff (1998) abordam que valores altos para α geralmente são encontrados em modelos de crescimento, os quais não incluem o capital humano como insumo. Sendo que estudos, nos quais somente o estoque de capital físico é envolvido no ajuste constituem uma situação imprópria de análise. No entanto, se o capital humano for adicionado na função de produção, a participação do capital total na renda, $\alpha + \varphi$, torna-se alta, contudo, sendo de ordem tal que $\alpha + \varphi < 1$. Segundo Canton et al. (2005), esta condição permite manter um crescimento exógeno balanceado. Por outro lado, a participação do estoque trabalho tende para uma constante universal igual a $\theta \approx 0,66$, valor reivindicada como padrão, correspondente à participação do trabalho na renda dos EUA. No entanto, para economias em desenvolvimento a participação do estoque de trabalho pode diferenciar desse valor universal. Finalmente, conjectura-se aqui que a participação da elasticidade do capital humano tende a ser alta em economias em desenvolvimento, contudo esta tende a diminuir, devido a efeitos de exaustão, quando a força de trabalho atinge graus de escolaridades altos. Neste caso, os efeitos da participação do capital humano são incorporados pelas elasticidades do capital e do trabalho.

Para finalizar a análise dos resultados, deve-se empregar os controles de trajetória robusta minimax, $u^*(t)$, (Fig. (19)) ao invés de utilizar os controles invariantes de 2015 até 2025. Assim, a performance do modelo de trajetória robusta minimax é garantida sob um limite superior ρ_0 , não importando qual a propriedade estocástica do ruído $v(t)$ e qual o valor da condição inicial $x(0)$. Desta forma, a Fig. (23) mostra que se no período de controle (2015-2025) o governo e as empresas seguirem os controles de trajetória robusta minimax, $u^*(t)$, as emissões podem ser reduzidas ao valor desejado, bem como deve ocorrer um aumento da área florestal por meio de um gerenciamento dos gastos em tecnologias limpas, $u_2(t)$, e áreas florestais, $u_1(t)$. Ou seja, com a realização destes investimentos pode-se considerar que o Brasil estaria entrando na parte descendente da CAK, já que estaria com um menor nível de poluição e retomando a sua cobertura florestal. Também irá ocorrer um aumento do PIB e estoque de capital se forem seguidos os controles referentes ao investimento em capital físico, $u_4(t)$, e as frações de mão-de-obra e capital alocadas na produção de mercadorias, $u_3(t)$.

A partir dos resultados obtidos na simulação, foi visto que os efeitos das flutuações paramétricas intrínsecas e distúrbios externos no modelo de trajetória de referência do sistema de emissões de CO_2 ,

Figura 23 – Trajetória de performance do sistema proposto em relação ao modelo de referência desejado por meio de uma trajetória de controle robusta minimax, sob a influência de flutuações paramétricas e distúrbios ambientais



Fonte: elaboração própria

crescimento econômico e área florestal podem ser superados eficientemente pelo método de trajetória de controle robusto minimax. Assim, a performance da trajetória de controle robusta minimax por meio de um modelo de interpolação T-S *fuzzy* é bem satisfatória.

6 CONCLUSÃO

A comunidade científica já demonstrou que a emissão e acumulação de gases causadores do efeito estufa podem causar mudanças climáticas irreversíveis. Para que estes efeitos possam ser retardados ou até mesmo anulados é necessário a mobilização dos sistemas políticos de modo que sejam geradas novas dinâmicas econômicas e novos processos tecnológicos. Como os recursos disponíveis para estas mobilizações são escassos e o compromisso com as reduções das emissões de CO_2 é cada vez mais urgente, métodos matemáticos tem sido propostos para ajudar nas tomadas de decisões.

De forma a contribuir com alternativas para reduzir o nível de emissões de dióxido de carbono, a abordagem desenvolvida neste trabalho permitiu a construção de um modelo matemático que descreve a relação dinâmica entre emissões de CO_2 , aumento da área florestal e crescimento econômico. Neste modelo, duas variáveis são consideradas controles para as emissões de CO_2 e outros dois controles são considerados para o crescimento econômico. A primeira variável de controle considera os incentivos que promovem o reflorestamento, a segunda trata dos incentivos ao uso de novas tecnologias. Em relação as variáveis de controle para o crescimento, a primeira aborda a quantidade de capital e mão-de-obra que devem ser alocados na produção de mercadorias e a segunda trata da taxa de investimento da economia em estoque de capital. Como estudo de caso, dados reais do Brasil foram utilizados para ajustar os parâmetros contidos no modelo proposto.

Neste estudo, baseado nas teorias de controle robusto e jogos dinâmicos, um problema de jogo estocástico não-linear é equivalente a um problema de trajetória não-linear robusta minimax, para controlar o sistema de emissões de CO_2 , área florestal e crescimento econômico atingir uma resposta desejada sob a influência de flutuações paramétricas, ruídos ambientais e incerteza nas condições iniciais.

Resolver as inequações diferenciais parciais que formam a restrição do problema de trajetória robusta minimax é, em geral, muito difícil. Assim, ao invés de resolver o problema contendo como restrição equações diferenciais parciais, uma abordagem de jogo estocástico fuzzy é proposta para transformar este problema de trajetória não-linear robusta minimax em um problema linear robusto minimax, que pode ser considerado equivalente. Esta transformação permite resolver o problema de trajetória de controle robusta minimax utilizando restrições na forma de LMI's.

Este método de trajetória de controle robusto minimax não somente considera as flutuações paramétricas e distúrbios ambientais, como também garante a performance da trajetória de referência em uma condição sub-ótima. Sendo que a incerteza nas condições iniciais também pode ser considerado um fator estocástico. Assim, este método pode ser utilizado para controlar a trajetória desejada do sistema proposto em torno de qualquer referência viável, não importando onde o controle do sistema se inicie. Embora a metodologia utilizada seja baseada em um método conservador sub-ótimo, este fato não diminui o seu potencial como uma forma de orientação para a realização de políticas públicas e privadas, bem como da realizações de previsões que ajudam na tomada de decisões.

A metodologia desenvolvida neste trabalho permitiu a previsão das emissões de CO_2 e crescimento econômico com base em um cenário simulado, de modo que é possível gerenciar com eficiência os recursos disponíveis visando a redução do aquecimento global. Ou seja, foi demonstrado que se ocorrer o investimento em políticas públicas destinadas ao desenvolvimento de tecnologias e recuperação da área florestal o Brasil pode entrar em uma trajetória de menor impacto ambiental. Em relação ao gerenciamento das emissões de CO_2 , as soluções para as variáveis de controle variantes no tempo apontam que os investimentos em tecnologias limpas devem ser maiores do que os em reflorestamento, de modo que deve ser mantido um investimento médio de 11 bilhões de R\$, a preço de 2000, para os investimentos em tecnologias limpas e somente 1 bilhão de R\$ como investimento médio para a recuperação da área florestal no período de 2015 até 2025. Ou seja, a simulação demonstrou que no período de análise (2015-2025) tanto os investimentos em práticas inovadoras como a ampliação de áreas florestais devem ser combinados para que as emissões de gases do efeito estufa possam ser compensadas.

Os controles para o crescimento econômico apresentaram na simulação um aumento intenso no estágio inicial e depois tendem a convergir para valores estáveis. Isto claramente aponta a urgência de concentrar esforços, no curto prazo, para ampliar a taxa de poupança interna da economia e das frações de capital e mão de obra utilizados na produção de mercadorias de forma que a dinâmica do sistema de crescimento econômico possa ser alterada e começar seguir a trajetória desejada.

Como trabalhos futuros, o sistema de crescimento econômico poderia ser ampliado para um sistema totalmente endógeno, onde em vez de supor que o crescimento ocorre em decorrência de melhorias

tecnológicas automáticas e não-modeladas (exógenas), busca-se entender as forças econômicas que estão por trás do progresso tecnológico. Outra possível extensão do trabalho seria gerar um sistema dinâmico formado pelos setores que fazem parte do inventário de estimativas de emissões e criar trajetórias de referências desejadas de como estes setores deveriam se comportar para que pudessem ser reduzidas as emissões totais de CO_2 .

REFERÊNCIAS

- APERGIS, N.; PAYNE, J. E. CO_2 emissions, energy usage, and output in central america. *Energy Policy*, Elsevier, v. 37, n. 8, p. 3282–3286, 2009.
- APERGIS, N.; PAYNE, J. E. The causal dynamics between coal consumption and growth: evidence from emerging market economies. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 6, p. 1972–1977, 2010.
- ARRHENIUS, S. On the influence of carbonic acid in the air upon the temperature of the ground. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 41, n. 251, p. 237–276, 1896.
- BABUSKA, R. Fuzzy systems, modeling and identification. Delft: Delft University of Technology (Textos para discussão), 2001.
- BALAS, G. et al. Robust control toolbox. *For Use with Matlab. User's Guide*, v. 3, 2005.
- BARKER, T.; SCRIECIU, S.; SMITH, V. World economic dynamics and technological change: projecting interactions between economic output and CO_2 emissions. *Tyndall Working Paper 124*, 2008.
- BARTELMUS, P. *Quantitative Eco-nomics: How sustainable are our economies?* Nova York: Springer, 2008. 329 p.
- BAŞAR, T.; BERNHARD, P. *H-infinity optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach*. New Jersey: Springer Science & Business Media, 2008. 234 p.
- BASAR, T.; OLSDER, G. J. *Dynamic noncooperative game theory (Classics in applied mathematics)*. London: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. 443 p.
- BATABYAL, A. A. *Dynamic and stochastic approaches to the environment and economic development*. [S.l.]: World Scientific, 2008.
- BIAGE, M. Relação entre crescimento econômico e impactos ambientais: Uma análise da curva ambiental de kuznets. *Revista Economia Ensaios*, v. 27, n. 1, 2013.

BOMTEMPO, J. V. *O futuro dos biocombustíveis*. 2010.
 <<https://infopetro.wordpress.com/2010/03/29/o-futuro-dos-biocombustiveis-i/>>. Acessado em 18 jun. 2014.

BOMTEMPO, J. V. *O futuro dos biocombustíveis III: O processo de inovação que está construindo a indústria do futuro*. 2010.
 <<https://infopetro.wordpress.com/2010/07/12/o-futuro-dos-biocombustiveis-iii-o-processo-de-inovacao-que-esta-construindo-a-industria-do-futuro/>>. Acessado em 18 jun. 2014.

BOULDING, K. The economics of the coming spaceship earth. In: JARRETT, H. (Ed.). *Environmental Quality in a Growing Economy*. Baltimore: John Hopkins Press, 1966. p. 3–14.

BOYD, S. P. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Pennsylvania: SIAM, 1994.

BRUYN, S. M. D. Explaining the environmental kuznets curve: structural change and international agreements in reducing sulphur emissions. *Environment and development economics*, Cambridge Univ Press, v. 2, n. 04, p. 485–503, 1997.

BRUYN, S. M. D.; BERGH, J. C. van den; OPSCHOOR, J. B. Economic growth and emissions: reconsidering the empirical basis of environmental kuznets curves. *Ecological Economics*, Elsevier, v. 25, n. 2, p. 161–175, 1998.

CAETANO, M. A. L. et al. Reduction of CO_2 emission by optimally tracking a pre-defined target. *Ecological Modelling*, Elsevier, v. 220, n. 19, p. 2536–2542, 2009.

CAETANO, M. A. L.; GHERARDI, D. F. M.; YONEYAMA, T. Optimal resource management control for CO_2 emission and reduction of the greenhouse effect. *Ecological Modelling*, Elsevier, v. 213, n. 1, p. 119–126, 2008.

CALENDAR, G. S. The artificial production of carbon dioxide and its influence on temperature. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Wiley Online Library, v. 64, n. 275, p. 223–240, 1938.

CANTON, E. et al. *Human capital, R&D, and competition in macroeconomic analysis*. [S.l.]: CPB Netherlands Bureau for Economic Policy Analysis, 2005.

CHEN, B.-S.; LIN, Y.-P. Robust resource management control for co2 emission and reduction of greenhouse effect: Stochastic game approach. *Journal of Environmental Protection*, Scientific Research Publishing, v. 2, n. 09, p. 1172, 2011.

CHEN, B.-S.; TSENG, C.-S.; UANG, H.-J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 7, n. 5, p. 571–585, 1999.

COELHO, L. d. S. *Identificação e controle de processos multivariáveis via metodologias avançadas e inteligência computacional*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

DADKHAH, K. *Foundations of Mathematical and Computational Economics*. Boston: Springer Science & Business Media, 2011.

DALY, H. *Steady state economics*. 2. ed. Washington DC: Island press, 1999.

FAUCHEUX, S.; NOËL, J.-F. *Economia dos recursos naturais e do meio ambiente*. Lisboa: Instituto Piaget, 1995. 445 p.

FERRAZ, C. *Os leilões de energia elétrica e a descentralização da geração*. 2012. <<http://infopetro.wordpress.com/2012/12/03/os-leiloes-deenergia-eletrica-e-a-descentralizacao-da-geracao/>>. Acessado em 17 jun. 2014.

FERREIRA, B. B. *Aplicação de ferramentas de lógica nebulosa à predição de séries temporais*. Tese (Doutorado) — Instituto Militar de Engenharia, 2008.

FORBES, A. C. d. S. D. *Otimização de investimentos no controle do aquecimento global*. Brasil: Insper, 2010. 48 p.

FOURIER, M. Les températures du globe terrestre et des espaces planétaires. *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, v. 7, p. 569–604, 1827.

GORE, A. *Uma verdade inconveniente: o que devemos saber (e fazer) sobre o aquecimento global*. Barueri: Manole, 2006.

GRAMKOW, C. L. *Da restrição externa às emissões de gases do efeito estufa: uma análise da insustentabilidade econômica e ambiental do atual modelo econômico brasileiro*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

GROSSMAN, G. M.; KRUEGER, A. B. *Environmental impacts of a North American free trade agreement*. Cambridge, 1991.

GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. *Econometria Básica-5*. Brasil: McGraw Hill, 2011.

HE, J. *Is the Environmental Kuznets Curve hypothesis valid for developing countries? A survey*. 2007. <<https://ideas.repec.org/p/shr/wpaper/07-03.html>>. Acessado em 10 mai. 2014.

JUNIOR, M. A.; YOUNG, C. E. F. *Produção de biodiesel no Brasil, inclusão social e ganhos ambientais*. 2013. <<http://www.ie.ufrj.br/images/gema>>. Acessado em 21 jun. 2014.

KENNY, C.; WILLIAMS, D. What do we know about economic growth? or, why don't we know very much? *World development*, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 1–22, 2001.

KIEHL, J.; TRENBERTH, K. E. Earth's annual global mean energy budget. *Bulletin of the American Meteorological Society*, v. 78, n. 2, p. 197–208, 1997.

KLUG, M. *Realimentação dinâmica de saídas com parâmetros variantes e aplicação aos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.

LOSEKANN, L. *A energia eólica é realmente competitiva no Brasil?* 2012. <<https://infopetro.wordpress.com/2012/05/07/a-energia-eolica-e-realmente-competitiva-no-brasil>>. Acessado em 19 jul. 2014.

LUCENA, T. K. d.; YOUNG, C. E. F. *Estimativa da geração de emprego pelo Programa Nacional de Produção de Biodiesel: uma análise de insumo-produto*. 2008. <<http://www.ie.ufrj.br/images/gema>>. Acessado em 25 jul. 2014.

LUSTOSA, M. C. J. Industrialização, meio ambiente, inovação e competitividade. In: MAY, P. H. (Org.). *Economia do meio ambiente: Teoria e prática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. p. 3–31.

MANKIW, N. G.; ROMER, D.; WEIL, D. N. *A contribution to the empirics of economic growth*. National Bureau of Economic Research, 1992. No. w3541.

MARUO, M. H. *Projeto Automático de Sistemas Nebulosos utilizando Algoritmos Genéticos Auto-Adaptativos*. 2006. 138 p. Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Informática Industrial)-Universidade Tecnológica Federal do Paraná-Faculdade de Engenharia Elétrica e Informática Industrial, 2006.

MATHWORKS. Fuzzy logic toolbox user's guide. *The Mathworks Inc*, v. 1, p. 328, 2014.

MATHWORKS. *ODE45: Solve nonstiff differential equations; medium order method*. 2015.

<<http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html?refresh=true>>. Acessado em 10 jun. 2014.

MAY, P. H.; MILLIKAN, B.; GEBARA, M. F. *The context of REDD+ in Brazil: Drivers, agents and institutions*. [S.l.]: CIFOR, 2011.

MCTI. *Estimativas anuais de emissão de gases de efeito estufa no Brasil*. Brasil, 2013.

MEDEIROS, R.; YOUNG, C. E. F. *Contribuição das unidades de conservação brasileiras para a economia nacional: Relatório Final*. Brasília: UNEP WCMC, 2011. 120 p.

MEHRAN, K. Takagi-sugeno fuzzy modeling for process control. *Industrial Automation, Robotics and Artificial Intelligence (EEE8005)*, School of Electrical, Electronic and Computer Engineering, Newcastle University, 2008.

MOLION, L. C. B. Aquecimento global: uma visão crítica. *Revista brasileira de climatologia*, 2008.

MOLION, L. C. B. Considerações sobre o aquecimento global antropogênico. *Informe Agropecuário*, v. 29, n. 246, p. 7–18, 2008.

MOZELLI, L. A. *Controle fuzzy para sistemas takagi-sugeno: Condições aprimoradas e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

MUNASINGHE, M. Rising temperatures, rising risks-making development more sustainable will help address climate change. *Finance & Development*, v. 45, n. 1, p. 37, 2008.

NORDHAUS, W. D. A sketch of the economics of the greenhouse effect. *The American Economic Review*, JSTOR, p. 146–150, 1991.

- NORDHAUS, W. D. To slow or not to slow: the economics of the greenhouse effect. *The economic journal*, JSTOR, p. 920–937, 1991.
- NORDHAUS, W. D. Reflections on the economics of climate change. *The Journal of Economic Perspectives*, JSTOR, p. 11–25, 1993.
- OBSTFELD, M.; ROGOFF, K. *Risk and exchange rates*. [S.l.], 1998.
- ODUM, H. T. *Systems Ecology: An introduction*. Nova Iorque: Wiley, 1983.
- OKSENDAL, B. K. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. New York: Springer, 1992.
- ORUBU, C. O.; OMOTOR, D. G. Environmental quality and economic growth: Searching for environmental kuznets curves for air and water pollutants in africa. *Energy Policy*, Elsevier, v. 39, n. 7, p. 4178–4188, 2011.
- OZTURK, I.; ACARAVCI, A. The causal relationship between energy consumption and gdp in albania, bulgaria, hungary and romania: Evidence from ardl bound testing approach. *Applied Energy*, Elsevier, v. 87, n. 6, p. 1938–1943, 2010.
- PASCALE, A. D. Role of entropy in sustainable economic growth. *International Journal of Academic Research in Accounting, Finance and Management Sciences*, Human Resource Management Academic Research Society, International Journal of Academic Research in Accounting, Finance and Management Sciences, v. 2, n. Special 1, p. 293–301, 2012.
- PASSET, R. *Les processus de satisfaction des besoins de l'environnement*. Paris: Cahiers du C3E, 1984. n°2 p.
- PAYNE, J. E. On the dynamics of energy consumption and output in the us. *Applied Energy*, Elsevier, v. 86, n. 4, p. 575–577, 2009.
- PERMAN, R. et al. *Natural resource and environmental economics*. 3. ed. Londres: Pearson Education, 2003. 699 p.
- PITTEL, K. *Sustainability and endogenous growth*. Cheltenham: Edward Elgar Publishing, 2002.
- PITTEL, K.; RÜBBELKE, D. Energy supply and the sustainability of endogenous growth. 2010.

- PODCAMENI, M. G. v. B. Brazilian wind energy innovation system. 2012.
- PORTER, M. E.; LINDE, C. Van der. Toward a new conception of the environment-competitiveness relationship. *The journal of economic perspectives*, JSTOR, p. 97–118, 1995.
- POTERBA, J. M. Global warming policy: a public finance perspective. *The Journal of Economic Perspectives*, JSTOR, p. 47–63, 1993.
- RICHMOND, A. K.; KAUFMANN, R. K. Is there a turning point in the relationship between income and energy use and/or carbon emissions? *Ecological economics*, Elsevier, v. 56, n. 2, p. 176–189, 2006.
- ROMER, D. *Advanced macroeconomics*. [S.l.]: McGraw-Hill/Irwin, 2011.
- ROMER, P. M. The origins of endogenous growth. *The journal of economic perspectives*, JSTOR, p. 3–22, 1994.
- SÁ, C. B. P. de. *Calibração automática de modelos ecológicos baseados em equações diferenciais ordinárias utilizando algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.
- SANDRI, S.; CORREA, C. Lógica nebulosa. *Escola de redes neurais: Conselho Nacional de Redes Neurais*, ITA São José dos Campos, v. 5, p. 73–90, 1999.
- SANTOS, A. A. P. *Previsão não-linear da taxa de câmbio real/dólar utilizando redes neurais e sistemas nebulosos*. Dissertação (Mestrado) — Univesidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- SHONE, R. *Economic Dynamics: Phase diagrams and their economic application*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- SINISGALLI, P. A. d. A. A energia como indicador de valor para a análise econômica-ecológica. *Megadiversidade*, v. 2, p. 18–23, 2006.
- SMULDERS, S. Entropy, environment, and endogenous economic growth. *International Tax and Public Finance*, Springer, v. 2, n. 2, p. 319–340, 1995.
- SOLOW, R. M. A contribution to the theory of economic growth. *The quarterly journal of economics*, JSTOR, p. 65–94, 1956.

STAGL, S. Delinking economic growth from environmental degradation? a literature survey on the environmental kuznets curve hypothesis. *Wirtschafts Universität Wien Working Paper*, 1999.

STERN, D. I. The rise and fall of the environmental kuznets curve. *World development*, Elsevier, v. 32, n. 8, p. 1419–1439, 2004.

STOLLERY, K. R. Constant utility paths and irreversible global warming. *Canadian Journal of Economics*, JSTOR, p. 730–742, 1998.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

TYNDALL, J. Note on the transmission of radiant heat through gaseous bodies. *Proceedings of the Royal Society of London*, The Royal Society, v. 10, p. 37–39, 1859.

VEIGA, J. E. d. (Org.). *Energia eólica*. São Paulo: Senac, 2012.

WARRICK, R.; FARMER, G. The greenhouse effect, climatic change and rising sea level: implications for development. *Transactions of the Institute of British Geographers*, JSTOR, p. 5–20, 1990.

WOOD, R. W. Xxiv. note on the theory of the greenhouse. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 17, n. 98, p. 319–320, 1909.

YOUNG, C. E. F. *Green growth and social inclusion: possibilities and challenges for the brazilian economy*. 2015.
<<http://www.ie.ufrj.br/images/gema>>. Acessado em 20 jun. 2014.

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and control*, Elsevier, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

APÊNDICE A – Complemento de Schur

O complemento de Schur é a ferramenta utilizada para converter inequações não-lineares convexas em LMIs. Considere a seguinte não linearidade convexa

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) > \mathbf{0}. \quad (\text{A.1})$$

Através da aplicação deste complemento, é possível converter a inequação (A.1) na LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (\text{A.2})$$

Note que para satisfazer (A.1) e (A.2) deve-se ter $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ e $\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ como condições necessárias, porém não suficientes.

APÊNDICE B – Funções de pertinência smf e zmf

A função de pertinência *s-shaped* (ou **smf**) é uma curva baseada em uma interpolação para um mapeamento no vetor \mathbf{x} . Seu nome é devido ao seu formato de s. Os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} localizam os extremos das partes inclinadas da curva e são dados por:

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \leq \mathbf{a}, \\ 2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\right)^2, & \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\right)^2, & \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ 1, & \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{cases}$$

Por sua vez, a função de pertinência *z-shaped* (ou **zmf**) também é uma função de interpolação de \mathbf{x} e o seu nome é devido ao seu formato de z. Os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} também localizam os extremos das partes inclinadas da curva e são dados por:

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \leq \mathbf{a}, \\ 1 - 2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\right)^2, & \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \\ 2\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}\right)^2, & \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ 0, & \mathbf{x} \leq \mathbf{b}. \end{cases}$$

APÊNDICE C - Pseudo inversa de uma matriz

A pseudo inversa de uma matriz \mathbf{A} , $\mathbf{m} * \mathbf{m}$ é uma matriz que generaliza para matrizes arbitrárias a noção de inversão de uma matriz quadrada, invertível. A pseudo-inverso pode ser expresso a partir do valor da decomposição singular (do inglês *singular value decomposition* - *SVD*) de \mathbf{A} , como se segue.

Assumindo que o SVD de \mathbf{A} seja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{V}^T$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{V} são ambas matrizes ortogonais, e \mathbf{S} é uma matriz diagonal contendo os valores singulares (positivos) de \mathbf{A} em sua diagonal.

Então a pseudo inversa de \mathbf{A} é a matriz \mathbf{n} vezes \mathbf{m} definida como

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T.$$

Note que \mathbf{A}^\dagger tem a mesma dimensão que a transposta de \mathbf{A} .

APÊNDICE D - Parâmetros do sistema *fuzzy* Takagi-Sugeno

O sistema (3.25) pode ser aproximado por um sistema *fuzzy* T-S. Por este método, as matrizes dos sistemas locais lineares A_i , B_i , D_i e o parâmetro C foram calculados como seguem:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,0349 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0589 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0351 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0526 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,0350 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0580 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0350 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0523 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0,0348 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0573 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0349 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0512 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0,0348 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0561 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0349 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0510 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0,0342 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0699 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0344 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0608 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0,0343 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0646 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0344 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0606 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0,0341 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0685 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0341 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0653 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0,0340 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0658 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \\ 0,0341 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0615 & -0,0090 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0006 & 0,0000 & 0,0094 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0600 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{bmatrix} 5718,46 & 5718,46 & 130,79 & 5718,46 \\ 5756,65 & 5756,65 & 104,28 & 5756,65 \\ 8230,94 & 8230,94 & 189,04 & 8230,94 \\ 8178,86 & 8178,86 & 148,20 & 8178,86 \end{bmatrix}, \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 5792,26 & 5792,26 & 133,80 & 5792,26 \\ 5700,05 & 5700,05 & 103,13 & 5700,05 \\ 8170,47 & 8170,47 & 187,19 & 8170,47 \\ 8219,84 & 8219,84 & 149,36 & 8219,84 \end{bmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} 5749,61 & 5749,61 & 131,92 & 5749,61 \\ 5725,79 & 5725,79 & 103,94 & 5725,79 \\ 8220,34 & 8220,34 & 188,49 & 8220,34 \\ 8187,33 & 8187,33 & 148,33 & 8187,33 \end{bmatrix}, \\
 B_4 &= \begin{bmatrix} 5759,28 & 5759,28 & 132,48 & 5759,28 \\ 5743,65 & 5743,65 & 104,01 & 5743,65 \\ 8174,06 & 8174,06 & 186,97 & 8174,06 \\ 8172,07 & 8172,07 & 148,59 & 8172,07 \end{bmatrix}, \\
 D_1 &= \begin{bmatrix} 0,0174 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0294 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0175 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0263 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}, \\
 D_2 &= \begin{bmatrix} 0,0175 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0290 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0175 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0261 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}, \\
 D_3 &= \begin{bmatrix} 0,0174 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0286 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0174 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0256 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}, \\
 D_4 &= \begin{bmatrix} 0,0174 & 0,00007 & 0,00007 & 0,0000 \\ 0,0281 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0175 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0255 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}, \\
 D_5 &= \begin{bmatrix} 0,0171 & 0,00007 & 0,00007 & 0,0000 \\ 0,0350 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0172 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0304 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}, \\
 D_6 &= \begin{bmatrix} 0,0172 & 0,00007 & 0,00007 & 0,0000 \\ 0,0323 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0172 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0303 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$D_7 = \begin{bmatrix} 0,01707 & 0,0000 & 0,00007 & 0,0000 \\ 0,0343 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0171 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0326 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix},$$

$$D_8 = \begin{bmatrix} 0,0170 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0329 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \\ 0,0170 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0307 & -0,0045 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0003 & 0,0000 & 0,0047 & -0,0103 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0300 & -0,0300 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ANEXO A - Prova do Teorema 1

Neste anexo será transcorrida a prova referente ao Teorema 1, desenvolvida por Chen e Lin (2011).

Para o sistema estocástico aumentado 4.13, é possível denotar uma função de Lyapunov $V(\bar{\mathbf{x}}(t)) > \mathbf{0}$ para $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ com $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então, o problema de regulação em 4.16 é equivalente ao seguinte problema de regulação minimax

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}(t)} \max_{\bar{\mathbf{v}}(t)} J(\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{v}}(t)) &= \min_{\mathbf{u}(t)} \max_{\bar{\mathbf{v}}(t)} E \left\{ V(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{0})) - V(\bar{\mathbf{x}}(t_f)) \right. \\ &\quad + \int_0^{t_f} \left(\bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t) \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho^2 \bar{\mathbf{v}}^T(t) \bar{\mathbf{v}}(t) + \frac{dV(\bar{\mathbf{x}}(t))}{dt} \right) dt \right\}, \quad \forall \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{0}). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Lemma 1 (*Fórmula de Ito*). *Seja $\mathbf{x}(t)$ um processo estocástico na Equação 4.3, se $\mathbf{f} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ é uma função contínua duplamente diferenciável de $\mathbf{x}(t)$, então $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ também é um processo estocástico que satisfaz a seguinte equação dinâmica:*

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t)) d\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{b}^T(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}''(\mathbf{x}(t)) \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) dt.$$

Aplicando a fórmula de Ito no Lemma 1, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{\mathbf{x}}(t))}{dt} &= \left(\frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \right)^T \frac{d\bar{\mathbf{x}}(t)}{dt} + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2(t)} \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \left(\frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \right)^T \left((\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{v}}(t)) + \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2(t)} \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t)). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Substituindo A.2 em A.1 e assumindo que $E\left\{\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}\right\} = \mathbf{0}$, é possível obter:

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{u(t) \\ \bar{v}(t)}} \max J(u(t), \bar{v}(t)) &= \min_{\substack{u(t) \\ \bar{v}(t)}} \max E \left\{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) \right. \\
&+ \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) + u^T(t) R u(t) - \rho^2 \bar{v}^T(t) \bar{v}(t) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T F(\bar{x}(t)) \right. \\
&+ \left. \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T G(\bar{x}(t)) u(t) + \left. \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \bar{C} \bar{v}(t) \right. \\
&\left. \left. + \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) \right) dt \right\}, \quad \forall \bar{x}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{u(t) \\ \bar{v}(t)}} \max J(u(t), \bar{v}(t)) &= \min_{\substack{u(t) \\ \bar{v}(t)}} \max E \left\{ V(\bar{x}(0)) - V(\bar{x}(t_f)) \right. \\
&+ \int_0^{t_f} \left(\left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T F(\bar{x}(t)) + \bar{x}^T(t) \bar{Q} \bar{x}(t) \right. \\
&- \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T G(\bar{x}(t)) R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \\
&+ \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \bar{C} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \\
&+ \frac{1}{2} H^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}^2(t)} H(\bar{x}(t)) \\
&+ \left(u(t) + \frac{1}{2} R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \\
&R \left(u(t) + \frac{1}{2} R^{-1} G^T(\bar{x}(t)) \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right) \\
&- \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{2\rho} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right)^T \\
&\left. \left. \left(\rho \bar{v}(t) - \frac{1}{2\rho} \bar{C}^T \frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial \bar{x}(t)} \right) dt \right\}, \quad \forall \bar{x}(0).
\end{aligned}$$

Então, a solução minimax é obtida como segue:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{v}}^*(t)) = E \left\{ V(\bar{\mathbf{x}}(0)) - V(\bar{\mathbf{x}}(t_f)) \right. \\ + \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \right)^T \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}(t)) + \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \right)^T \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \\ + \frac{1}{4\rho^2} \left(\frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \right)^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}}^T \frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}}^T \frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)} \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{\partial^2 V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}^2(t)} \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}(t)) \right\}, \quad \forall \bar{\mathbf{x}}(0) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}^T(\bar{\mathbf{x}}(t)) \frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)}, \\ \bar{\mathbf{v}}^*(t) &= \frac{1}{2\rho^2} \bar{\mathbf{C}}^T \frac{\partial V(\bar{\mathbf{x}}(t))}{\partial \bar{\mathbf{x}}(t)}. \end{aligned}$$

Se a Equação 4.20 é considerada, então:

$$J(\mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{v}}^*(t)) \leq E \{ V(\bar{\mathbf{x}}(0)) - V(\bar{\mathbf{x}}(t_f)) \}.$$

A partir da inequação em 4.17, a solução minimax deve ser menor do que $\rho^2 E\{V(\bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{x}}(0))\}$.

Depois disso, a desigualdade em 4.21 é obtida como segue

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{v}}^*(t)) &\leq E\{V\bar{\mathbf{x}}(0) - V(\bar{\mathbf{x}}(t_f))\} \\ &\leq E\{V\bar{\mathbf{x}}(0)\} \leq \rho^2 E\{\bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{\mathbf{I}} \bar{\mathbf{x}}(0)\}, \quad \forall \bar{\mathbf{x}}(0). \end{aligned}$$

□

ANEXO B - Prova do Teorema 2

Neste anexo será transcorrida a prova referente ao Teorema 2, desenvolvida por Chen e Lin (2011).

Para o sistema *fuzzy* em 4.31, é possível denotar uma função de Lyapunov $V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t)P\bar{x}(t) > 0$, para $\bar{x}(0) \neq \mathbf{0}$ com $V(\mathbf{0}) = 0$. Então, o problema de regulação minimax em 4.17 é equivalente a

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} J(u(t), \bar{v}(t)) &= \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0)P\bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f)P\bar{x}(t_f) \right. \\ &\quad + \int_0^{t_f} \left(\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho^2 \bar{v}^T(t)\bar{v}(t) + \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} \right) dt \right\}, \quad \forall \bar{x}(0). \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula do Lemma 1, é possível obter

$$\begin{aligned} \frac{dV(\bar{x}(t))}{dt} &= 2\bar{x}^T(t)P \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \left(\bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{C}\bar{v}(t) + \bar{D}_i \frac{dw(t)}{dt} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)\bar{D}_i^T P \bar{D}_j \bar{x}(t) \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

Substituindo B.2 em B.1 e assumindo que $E\left\{\frac{dw(t)}{dt}\right\} = \mathbf{0}$, é possível obter:

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} \max_{\bar{v}(t)} E \left\{ \bar{x}^T(0)P\bar{x}(0) - \bar{x}^T(t_f)P\bar{x}(t_f) \right. \\ + \int_0^{t_f} \left((\bar{x}^T(t)\bar{Q}\bar{x}(t) + u^T(t)Ru(t) - \rho^2 \bar{v}^T(t)\bar{v}(t) \right. \\ + 2\bar{x}^T P \cdot \sum_{i=1}^L h_i(z(t))(\bar{A}_i\bar{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{C}\bar{v}(t)) \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t))h_j(z(t))\bar{x}^T(t)\bar{D}_i^T P \bar{D}_j \bar{x}(t) \right) dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{\mathbf{u}(t)} \max_{\bar{\mathbf{v}}(t)} \mathbf{E} \left\{ \bar{\mathbf{x}}^T(0) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(0) - \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t_f) \right. \\
&\quad + \int_0^{t_f} \left(\bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) (\bar{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_i \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t)) \right. \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2} \bar{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \\
&\quad - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{B}_i \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \\
&\quad + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{D}}_j \bar{\mathbf{x}}(t) \\
&\quad + \left(\mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right)^T \\
&\quad \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right) \\
&\quad \left. - \left(\rho \bar{\mathbf{v}}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right)^T \left(\rho \bar{\mathbf{v}}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right) \right\} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{\mathbf{u}(t)} \max_{\bar{\mathbf{v}}(t)} \mathbf{E} \left\{ \bar{\mathbf{x}}^T(0) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(0) - \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t_f) \right. \\
&\quad + \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{\mathbf{x}}^T(t) \left(\mathbf{P} \bar{\mathbf{A}}_i + \bar{\mathbf{A}}_i^T \mathbf{P} + \bar{\mathbf{Q}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}}_i \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{B}}_j^T \mathbf{P} + \frac{1}{\rho^2} \mathbf{P} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} + \bar{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{D}}_j \right) \bar{\mathbf{x}}(t) \right. \\
&\quad + \left(\mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right)^T \\
&\quad \mathbf{R}^{-1} \left(\mathbf{R} \mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^L h_i(z(t)) \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right) \\
&\quad \left. - \left(\rho \bar{\mathbf{v}}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right)^T \left(\rho \bar{\mathbf{v}}(t) - \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{C}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{x}}(t) \right) \right\} dt
\end{aligned}$$

A solução minimax é dada por

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{v}}^*(t)) = E \left\{ \bar{\mathbf{x}}^T(0) P \bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) P \bar{\mathbf{x}}(t_f) \right. \\
+ \int_0^{t_f} \left(\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L h_i(z(t)) h_j(z(t)) \bar{\mathbf{x}}^T(t) \left(P \bar{A}_i + \bar{A}_i^T P + \bar{Q} \right. \right. \\
\left. \left. - P \bar{B}_i R^{-1} \bar{B}_j^T P + \frac{1}{\rho^2} P \bar{C} \bar{C}^T P + \bar{D}_i^T P \bar{D}_j \right) \bar{\mathbf{x}}(t) \right) dt \left. \right\}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^*(t) &= - \sum_{j=1}^L h_j(z(t)) R^{-1} \bar{B}_j^T P \bar{\mathbf{x}}(t), \\
\bar{\mathbf{v}}^*(t) &= \frac{1}{\rho^2} \bar{C}^T P \bar{\mathbf{x}}(t).
\end{aligned}$$

Visando simplificar a equação acima, suponha que a desigualdade em 4.33 é mantida, então

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{u}(t)} \max_{\bar{\mathbf{v}}(t)} J(\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{v}}(t)) &= J(\mathbf{u}^*(t), \bar{\mathbf{v}}^*(t)) \\
&\leq E \{ \bar{\mathbf{x}}^T(0) P \bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{\mathbf{x}}^T(t_f) P \bar{\mathbf{x}}(t_f) \} \\
&\leq E \bar{\mathbf{x}}^T(0) P \bar{\mathbf{x}}(0) \leq \rho^2 E(\bar{\mathbf{x}}^T(0) \bar{I} \bar{\mathbf{x}}(0))
\end{aligned}$$

ou seja, $P \leq \rho^2 \bar{I}$.

□