Scuola Principe di Piemonte
Adolfo Bocchi
1 anno Ginnasiale

CECIL THIRE' — MELLO E SOUZA
(PROFESSORES DO COLÉGIO PEDRO II)

MATEMÁTICA

1.º ANO

5.ª EDIÇÃO

1934

LIVRARIA FRANCISCO ALVES
166, RUA DO OUVIDOR, 166 — RIO DE JANEIRO
49-A, Rua Libero Badaró — S. Paulo || Rua da Baía, 1052 — Belo Horizonte

Arthur Thiré

Eugenio B. Raja Gabaglia

Em homenagem à memória dos saudosos e inolvidáveis mestres, os Autores consagram-lhes esta página.

Novembro de 1930

A figura de Arquimedes que aparece na capa dêste livro é um desenho do Professor - C a r l o s Chambelland. As letras são do arquitéto Sr. - - Moacyr Fraga - -

Prestaram-nos inestimável concurso, escrevendo, a nosso pedido, artigos destinados especialmente a esta obra, os professores:

ANTENOR NASCENTES.
ESCRAGNOLLE DORIA.
J. B. MELLO E SOUZA.
LEONEL FRANCA, S. J.

A estes ilustres colégas agradecemos a preciosa colaboração que tanto valoriza as páginas dêste livro.

CECIL THIRÉ

MELLO E SOUZA

Prefácio da 1.ª edição

"Pour toutes ces raisons nous sommes fondé à prendre la connaissance dans son courant, loin de son origine sensible, quand elle est mêlée intimement á la réflexion. C'est lá seulement qu'elle a tout son sens. La source n'est qu'un point géographique, elle ne contient pas la force vive du fleuve."

G. BACHELARD.

(Essais sur la Connaissance Approchée)

Se *na verdade, como dizia A. Comte, a escola é* a caserna das creanças, o *ensino de Matemática tem sido uma verdadeira* sala de torturas *por onde todos os jovens estudantes são obrigados a passar.*

Os professores de Matemática, com raras exceções, têm a preocupação de complicar e dificultar o ensino dessa matéria. Em vez de problemas práticos, interessantes e simples, exigem sistematicamente de seus alunos a decifração de questões complicadissimas, verdadeiras charadas, cujo sentido o estudante não chega a penetrar. Para a resolução de um problema ou para a dedução de uma fórmula banal, ensinam *dois, três, e, às vezes, até quatro processos diferentes, quando, por um principio comezinho de bôa pedagogia, deviam ensinar apenas um desses processos e banir os demais.*

No curso secundário o professor de Matemática julga que ha grande vantagem em fazer com que o aluno aprenda, desde logo, a demonstrar uma série de teorêmas inúteis e complicados, na ilusão de que tais demonstrações, apesar de enfadonhas, vão constituir uma ótima ginastica mental, para o fim de desenvolver as faculdades de raciocínio. Ha nisso um lamentavel erro didático. As demonstrações fastidiosas de teoremas inúteis, só podem trazer como consequência êsse "horror à Matemática", *tão comum entre os estudantes.*

> "Il faut développer chez eux — *escreve o grande Bouasse* — la faculté de raisonner dans l'abstrait, mais a l'intérieur des limites imposées par la pratique et sur des propositions effectivement utilisables." (*).

A nosso ver cabe tambem não pequena censura aos professores, que não sabendo distinguir o ensino primário do ensino secundário, procuram aplicar ao curso ginasial um sistema de ensino infantil, irrisório e inadequado ao desenvolvimento mental dos alunos. E' o caso, por exemplo de um professor que procura ensinar aos alunos do primeiro anno secundário uma certa noção, como se estivesse diante de uma classe da escola primária. Êsse professor parecerá, sem querer, ridiculo aos olhos de seus discipulos e estes julgarão haver sofrido um lamentavel retrocesso em seus estudos.

(*) H. Bouasse et E. Tourrière — "Exercices et compléments de Mathématiques génerales" — 1920, pag. VII.

E' do ilustre educador Dr. Francisco Vianna este admiravel conceito:

> "...a caracteristica diferencial do ensino chamado secundário — que deveria ser, pelos seus elementos essenciais, de caracter enciclopédico — em relação ao ensino primário, está exatamente em que o primeiro é sistemático, de coordenação e, por isso mesmo, abstrato" (*).

O escôpo principal que nos orientou na organização deste compêndio foi o de fazer um trabalho de feição moderna, acentuadamente prático e de leitura agradavel ao aluno.

Sem fugir ao programa oficial, que seguimos pari passu, *procurámos abordar as diferentes partes da Aritmética, Algebra e Geometria, em conjunto, com simplicidade e máxima clareza, sem a confusão de assuntos. Fizemos acompanhar cada capítulo de um pequeno trecho de leitura capaz de despertar no joven estudante o interesse pelos diversos fatos da História da Matemática e pela vida dos grandes sábios que colaboraram no progresso dessa ciência.*

Tivemos o cuidado de formular com precisão e rigor todos os conceitos e definições. E' evidente que algumas noções foram apresentadas terra-a-terra, despidas de todo

(*) F. Vianna — "As modernas directrizes do ensino primario" — (1930, pagina 14).

formalismo teórico, que seria descabido, pois que êste compendio é destinado aos alunos do 1° ano ginasial.

Não nos moveu preocupação de exibir bibliografia, mas julgámos que seria util aos professores, citar alguns dos autores que compulsamos, com indicação da obra.

Êste compêndio (*) *— repetimos — tem um cunho acentuadamente prático, e proporcionará ao estudante do* 1° *ano uma soma de conhecimentos, metódicos e exatos, que servirão de base para os estudos teóricos que serão feitos nos anos subsequentes.*

A partir do 2° *ano irão aparecendo, em ordem crescente de complexidade, diversos principios com suas demonstrações rigorosas; os alunos, exercitarão, sem esforço, as suas faculdades de raciocínio sobre teoremas de aplicação quasi imediata. Só então poderá o estudante apreciar a profunda verdade que está contida no belissimo aforisma de Bacon:*

"Omnis scientia requirit mathematicam."

Novembro de 1930

C. T.

M. S.

(*) Este compêndio é o primeiro de uma série de 5 volumes.

Prefácio da 2.ª edição

A 1ª *edição de um livro — segundo uma expressão feliz de um dos nossos mais apreciados escritores* (*) *— não passa de uma* 4ª *prova na qual o autor, com a preocupação de melhorar cada vez mais o trabalho, sente a irreprimivel necessidade de fazer novas modificações nesta ou naquela página. Um novo período a acrescentar, uma frase a substituir, um exemplo a esclarecer — são além de outras muitas, pequenas alterações que, às vezes, só a* quarta *prova nos vem sugerir. E isso tardiamente quando o compêndio já se acha nas mãos dos leitores e apontado à severidade da crítica no* "vient de paraitre" *das grandes livrarias.*

Êste livro não quiz constituir uma exceção. A sua 1ª *edição não passou de uma* quarta prova *para a qual o exercício direto com as classes apontou-nos várias modificações.*

Com o fim de melhorar e simplificar cada vez mais o ensino da Matemática, segundo o plano que adotamos, resolvemos modificar ligeiramente a seriação dos capítulos conservando, porém, apenas os que já figuravam na 1ª *edição.*

No capítulo II incluimos as primeiras noções sobre a representação das quantidades por meio de letras, afim

(*) A expressão a que nos referimos é atribuida ao Sr. Afranio Peixoto.

de habituar, desde logo, o aluno com o cálculo literal e iniciá-lo na generalização das diversas transformações elementares.

Tendo em vista a feição elementar desta obra resolvemos, na presente edição, suprimir algumas leituras e conservar unicamente aquelas que fossem mais adequadas ao desenvolvimento e ao preparo geral dos jovens que ainda se acham no 1° ano do curso secundário.

Por indicação do nosso ilustre amigo e colaborador, Prof. Dr. Agliberto Xavier, resolvemos retirar deste livro o interessantissimo artigo "Reações logicas do calculo numérico" *que será incluido com maior desenvolvimento, em outro volume da* Matemática. *O admiravel artigo intitulado* "Um papa geômetra" *do Rev. Padre Leonel da Franca, S. J., foi, a nosso pedido, e com a devida permissão do autor, incluido na 2ª edição da* Matemática — 2° *ano deixando, por esse motivo, de figurar nas páginas deste compêndio!*

No estudo do Sistema Métrico — que procuramos tornar mais simples e interessante — acrescentamos algumas noções sobre os sistemas C. G. S. e M. T. S. juntamente com a indicação das principais unidades usadas.

Incluimos neste compêndio várias notas que aparecem indicadas por asteriscos em baixo das diversas páginas. Algumas dessas notas (nem todas, é evidente) são destinadas especialmente aos Srs. Professores e têm por fim indicar os autores que compulsamos e justificar o maior ou menor desenvolvimento dado a certos capítulos. . . . .

3 de Maio de 1932.

C. T.

M. S.

CAPÍTULO I

NUMERAÇÃO

1 — Noções preliminares.

E' incontestavel que o homem, desde a aparição sobre a terra, sentiu necessidade do *cálculo*, não só para distinguir, como tambem para contar os objetos.

Como só dispuzessem, porém, os homens primitivos de recursos rudimentares e grosseiros, a contagem dos objetos era obtida por meio de estrias feitas nos troncos das árvores ou sobre os ossos dos animais (*) e, assim, o pastor primitivo ao ver passar o rebanho, para cada ovelha punha de lado uma pequena pedra, e obtinha desse modo, com auxilio das pedras separadas, um meio simples e seguro de apreciar a *grandeza* de seu rebanho.

2 — Primeira noção de número.

Suponhamos uma caixa cheia de laranjas; admitamos que sejam todas iguais. Essa coleção de laranjas define um certo *número*.

Um conjunto qualquer de objetos iguais nos traz no espirito a noção de número.

(*) Nas cavernas das épocas primitivas foram encontrados ossos estriados sendo as estrias dispostas com certa regularidade. Esses ossos eram empregados para contar os objetos.

3 — Grandeza de um número.

A grandeza de um número depende do conjunto de objetos que definiu esse número. De um conjunto muito grande resultará forçosamente um número muito grande.

4 — Unidade.

A um objeto isolado de certo conjunto a que nos propomos contar chamamos a *unidade.* (*).

Em uma coleção de pêras, por exemplo, a unidade será *uma pêra.*

5 — Unidade simples — Unidade coletiva.

Quando dizemos — "Nesta caixa ha 8 duzias de penas" — a unidade escolhida foi *uma duzia de penas.* A duzia representa um conjunto de 12 penas.

Como vemos a unidade pode ser *simples* ou *coletiva.*

A unidade coletiva é aquela que é formada de dois ou mais objetos.

6 — Números inteiros; números fracionários.

De um conjunto completo de unidades resulta o *número inteiro.*

Quando considerarmos um conjunto em que figuram partes da unidade temos o *número fracionário.*

Se a unidade é, por exemplo, uma pêra e essa pêra foi dividida em 8 partes iguais — oitavos — um conjunto de 5 dessas partes será definido pelo número *cinco oitavos.*

(*) Apresentamos neste compêndio as primeiras noções elementares sobre número e unidade. Essas noções serão desenvolvidas e completadas, em parte, no livro *"Matemática — 2.º ano"*.

Os números fracionários serão, mais tarde, objeto de um estudo especial.

7 — Número.

O número será, portanto, uma coleção de objetos de cuja natureza fizemos abstração.

8 — Números concretos e abstratos.

Quando levamos em conta a natureza de um conjunto temos um *número concreto;* no caso contrario o número será será abstrato.

Exemplo : 15 *livros* é um número concreto; o *símbolo* 15, com o qual definimos esse conjunto de livros, é um número abstrato.

Do mesmo modo : 8 metros, 11 dias, 40 moedas são números concretos; 8, 11 e 40 são números abstratos.

9 — Numeração.

Para que possamos raciocinar e operar com os números nós as representamos por meio de signais gráficos especiais denominados *algarismos.*

Além da forma sensivel dada aos números com auxílio dos algarismos é indispensavel que todos eles tenham uma denominação.

Numeração é o conjunto de principios, leis e artifícios empregados para exprimir os números.

A numeração divide-se — como é fácil concluir — em *numeração falada* e *numeração escrita.* (*).

(*) Nos países civilizados a *numeração* precede o *cálculo*; as crianças aprendem os nomes dos números antes de poder distinguir os valores numéricos — (LÉON BRUNSCHVICZ, *Les Etapes de la Philosophie Mathématique*, pag. 7).

10 — Numeração falada.

A formação dos diversos vocábulos com que exprimimos os números não é arbitrária senão para os primeiros números; um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito e nove.

Juntando-se uma unidade ao número nove temos uma *dezena* ou *dez*.

Os números que se seguem depois do dez, são: onze, doze, treze, quatorze, quinze, dezeseis, dezesete, dezoito e dezenove.

Juntando-se uma unidade ao número dezenove temos *duas dezenas*. As dezenas deviam ser contadas dessa forma: duas dezenas, três dezenas, etc. Ha porém, na nossa língua, vocábulos especiais para indicar tais números: *vinte, trinta, quarenta, cincoenta*, etc.

Uma coleção de dez dezenas forma o número denominado *cem* ou *cento*, e deste são derivados: *duzentos, trezentos, quatrocentos*, etc.

O conjunto de dez centenas forma o *milhar* ou *mil;* seguem-se: dois mil, três mil, quatro mil, etc.

E assim por diante.

E claro que a lei de formação dos vocábulos com que são expressos os números varía de um idioma para outro.

11 — Numeração escrita. Sistema de numeração.

Na numeração escrita, conforme já dissemos, os números são representados por meio de algarismos.

Ha duas especies de algarismos: *arábicos* e *romanos*.

Os algarismos arábicos são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Com esses algarismos e mais o zero podemos representar qualquer número desde que adotemos um *sistema de numeração*.

Sistema de numeração é o conjunto de números que se formam segundo certas convenções.

12 — Sistema decimal.

E universalmente adotado o *sistema decimal de numeração*.

Nesse sistema dez unidades de uma ordem formam uma de ordem imediatamente superior.

Assim: dez unidades formam uma dezena; dez dezenas formam uma centena; dez centenas formam um milhar, etc. (*).

Cada três ordens de unidades formam uma classe:

$$
\text{1.}^{\text{a}} \text{ classe} \begin{cases} \text{unidades} \\ \text{dezenas} \\ \text{centenas} \end{cases}
$$

$$
\text{2.}^{\text{a}} \text{ classe} \begin{cases} \text{milhares} \\ \text{dezenas de milhares} \\ \text{centenas de milhares} \end{cases}
$$

$$
\text{3.}^{\text{a}} \text{ classe} \begin{cases} \text{milhões} \\ \text{dezenas de milhões} \\ \text{centenas de milhões.} \end{cases}
$$

seguem-se as classes de bilhões, trilhões, etc.

(*) Uma companhia é formada de um certo número de soldados; do mesmo modo uma dezena se compõe de dez unidades simples. Se se considera, em seguida, a companhia como uma nova unidade, várias companhias formarão um batalhão; assim tambem tomando-se a dezena como nova unidade dez dezenas formam uma centena. Emfim um batalhão sendo por sua vez uma unidade, a reunião de varios batalhões constitue um regimento; do mesmo modo dez centenas formarão um milhar (Carlo Bourlet, *Cours Abrégé d'Arithmétique*, pag. 5).

A prática nos mostra que é *completamente inútil* formar classes além das dos bilhões; em teoria, entretanto, o número de classes é ilimitado.

13 — O bilhão.

Na França, Itália, Alemanha e em vários outros países da Europa e da América — o Brasil inclusive — o bilhão vale mil milhões; o trilhão mil bilhões, e assim sucessivamente. Na Ingaterra e na Espanha o bilhão vale um milhão de milhões; o trilhão vale um milhão de bilhões e assim por diante.

Citemos um exemplo. O número 4000000000 na Inglaterra seria lido "Quatro mil milhões". No Brasil êsse mesmo número representa 4 bilhões.

14 — Princípio do sistema decimal.

A numeração escrita, no sistema decimal, é baseada no seguinte princípio:

Qualquer algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes mais do que se estivesse no logar desse outro.

Assim, no número 3784 o algarismo 7, estando à esquerda do 8, vale *dez* vezes mais do que se estivesse no logar do 8.

Ora, como o 8 representa as dezenas do número, é claro que o 7 representará as centenas.

15 — O zero.

O algarismo zero serve para indicar ausência de uma certa ordem de unidades.

Quando dizemos que num conjunto ha 508 objetos, o zero indica ausência de dezenas no número.

16 — Algarismos significativos — Valor absoluto e valor relativo.

Os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 são denominados *significativos*.

Um algarismo significativo tem dois valores: *absoluto* e *relativo*.

Valor absoluto é o valor que o algarismo tem isoladamente.

Valor relativo é o valor que o algarismo tem conforme o logar que ocupa no número.

No número 7178, por exemplo, o primeiro algarismo 7 à esquerda, representa 7 milhares (7000) ao passo que o segundo, á direita, representa 7 dezenas (70).

17 — Numeração romana.

A representação dos números por meio de algarismos romanos embora não traga vantagem alguma de ordem prática é, todavia, utilisada em certos casos: para designar os séculos, as datas nas inscrições, na cronologia dos reis, na designação dos capítulos de uma obra, etc.

Na numeração romana são empregados, como algarismos, sete letras maiúsculas: I, V, X, L, C, D, M.

I........	1
V........	5
X........	10
L........	50
C........	100
D........	500
M........	1000

Para representar os números essas letras são combinadas de acôrdo com as seguintes regras:

1.ª) *Quando se repete um dos algarismos I, X, C e M outras tantas vezes se repete o seu valor.*

Ex.: *XX* significa 20

2.ª) *Não se pode empregar seguidamente mais de três algarismos iguais.*

3.ª) *Um algarismo colocado à direita de outro de valor maior aumenta êste último do valor que o menor representa.*

Ex.: *XV* significa 15

4.ª) *Um algarismo colocado à esquerda de outro de valor maior diminue êste do valor que o menor representa.*

Ex.: *CM* significa 900

5.ª) *Um traço horizontal colocado sobre um algarismo ou sobre um grupo de algarismos aumenta de mil vezes o valor que o algarismo ou o grupo de algarismos representa.*

Exemplos: $\overline{V}$ significa 5000

$\overline{XII}\,V$ significa 12005

18 — Observação.

Os Romanos usavam ainda para representar os números certas combinações de sinais. Apresentamos abaixo todos os algarismos romanos; os dois últimos, à direita, representam 1000.

I V X L C D CIↃ ∞

19 — Números cardinais; números ordinais.

Um conjunto qualquer de objetos iguais define, como vimos, um certo número que é denominado *número cardinal.* Assim, na expressão, 20 árvores, temos um número cardinal.

Os números cardinais são sucessivamente formados por uma unidade, duas unidades, três unidades, etc.

Os números um, dois, três, quatro, etc. constituem a chamada *série dos números cardinais*, na qual cada número é *superior* a todos que o precedem e *inferior* a todos que o seguem.

Na série crescente dos números cardinais cada número tem uma *ordem* que é o *número ordinal* correspondente. Assim *um* é o *primeiro* número; *dois* é o *segundo, três* o terceiro, etc.; ao cardinal *um* corresponde, pois, o ordinal *primeiro*, ao cardinal *dois* o ordinal *segundo* e assim por diante.

Neste compêndio o palavra número, salvo indicação em contrário, significará sempre "número cardinal".

20 — Transformações com os números. Operações.

As transformações que efetuamos com os números, segundo certas regras, são denominadas *operações*.

O número ou o sistema de números que se obtem com auxílio de uma operação, é denominado *resultado* dessa operação.

Exemplo: Dados os números 7 e 8 obtemos, com auxílio de uma operação (adição), o resultado 15.

As operações fundamentais são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Exercícios.

1 — Com quatro algarismos romanos escrever o número 2999; com dois algarismos romanos escrever o número 95.

2 — Com quantos algarismos podemos escrever todos os números inteiros desde 1 até 10000 inclusive?

3 — Calcular o número de algarismos necessários para se escrever todos os números inteiros maiores que 400 e menores que 10000.

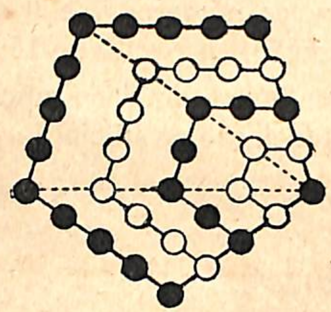
Leitura.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO

O matemático holandês Simão Stevin, que viveu no Século XVI, imaginou um sistema de numeração cuja base era 12.

A escolha quasi unanime do número 10, como base de numeração, provêm — segundo uma hipótese muito aceitavel — da conformação da mão (*). A figura natural dos cinco dedos de uma das mãos, adicionados aos cinco dedos da outra mão, deu nascimento ao primeiro sistema de numeração, base da Aritmética, a ciência dos números. (**).

E' interessante observar que apesar do sistema decimal ser universalmente adotado existe, no espírito do povo, uma certa inclinação para a numeração duodecimal. *Muita gente prefere ainda contar certos objetos em duzias e* grosas *(12 duzias) a contar por dezenas e centenas.*



(*) ROUSE BALL, *Récreations Mathématiques et problèmes*, 1926, 1º vol., pag. 37.

(**) HOEFFER, *Histoire des Mathématiques*, 1886, pag. 13.

CAPÍTULO II

ADIÇÃO

1 — Noções preliminares.

Consideremos duas caixas contendo moedas, havendo 11 moedas na primeira e 15 na segunda. Juntemos as moedas dessas duas caixas e formemos uma coleção única. A nova coleção assim obtida, com 26 moedas, será a *soma* das duas coleções.

O número de moedas da coleção total será a *soma* dos números de objetos das duas coleções dadas.

2 — Adição.

A operação que tem por fim reunir num só número (*) as unidades de dois ou mais números dados chama-se *adição* (**).

O resultado da adição chama-se *soma* ou *total*.

(*) Neste capitulo e nos capitulos seguintes (até o XI) só consideraremos operações com números inteiros.

(**) Convem observar que a idéa da adição já está contida implicitamente na noção de número, pois os números inteiros, na série natural, *um, dois, três, quatro...* são obtidos juntando-se uma unidade ao precedente (JULES TANNERY, *Leçons d'Arithmetique*, Liv. Armand Colin, 1911, pag. 12).

3 — Parcelas.

Os números cujas unidades são reunidas num só número, ou mais simplesmente, os *termos* de uma adição são denominados *parcelas*.

4 — Sinal de adição.

A adição é indicada com o auxílio do sinal + (mais) colocado entre as parcelas.

Assim 18 + 15 indica que devemos juntar as unidades do primeiro número 18 às unidades do segundo número 15.

5 — Sinal de igualdade.

A igualdade entre dois números ou expressões é indicada pelo sinal = (igual a) colocado entre esses números ou expressões.

Assim $7 + 1 = 8$

lê-se: *7 mais 1 é igual a 8.*

A parte que fica à esquerda do sinal = chama-se *primeiro membro da igualdade* e a que fica à direita, *segundo membro.*

Na igualdade

$$8 + 7 = 14 + 1$$

O primeiro membro é $8 + 7$; o segundo membro $14 + 1$.

6 — Observação.

Sabemos que um número não se altera quando a esse número juntamos 0.

Exemplo: $23 + 0 = 23$.

Numa soma de duas parcelas uma dessas parcelas sendo igual a zero a soma será, por definição, a outra parcela.

7 — A adição é uma operação unívoca.

Diz-se que a adição é uma operação *unívoca* porque ela nos conduz sempre a um resultado único, perfeitamente determinado.

Assim a adição $47 + 185$ só apresenta um resultado, que é 232.

8 — Adição é uma operação comutativa.

Dizemos que a adição é uma operação *comutativa* porque a soma não se altera quando mudamos a ordem das parcelas:

$$143 + 28 = 28 + 143$$

É evidente que essa propriedade pode ser verificada numa soma qualquer de três ou mais parcelas.

9 — A adição é uma operação associativa.

Dizemos que a adição é uma operação *associativa* porque o seu resultado não se altera quando substituimos duas ou mais parcelas pela sua soma efetuada.

Exemplo: na expressão

$$13 + 8 + 7 + 3$$

podemos substituir as três últimas parcelas por 18 sem alterar a soma. Temos:

$$13 + 8 + 7 + 3 = 13 + 18$$

10 — Processo de abreviação.

Em certos casos podemos abreviar uma adição decompondo uma das parcelas. A operação poderá, dêsse modo ser efetuada mentalmente.

Seja, por exemplo, somar os números 265 e 783.

Dizemos mentalmente:

265 com 700 dá 965; 965 com 80 dá 1045, com 3 da 1048.

11 — Prova.

Prova é uma operação que serve para verificar a exatidão de uma outra operação já efetuada.

Podemos tirar a prova de uma adição efetuando-a novamente de baixo para cima, isto é, alterando a ordem das parcelas. O segundo resultado obtido deve ser igual ao primeiro.

12 — Adição de números concretos.

Quando as parcelas que figuram numa soma são representada por números concretos é necessario que êsses números sejam referidos à mesma unidade. A soma é, nesse caso, da mesma especie das parcelas.

Não podemos somar números concretos de especies diferentes.

13 — Representação das quantidades por meio de letras.

Vamos supôr que queiramos indicar, por meio de uma expressão simples, que a ordem das parcelas não altera a soma.

Seja a soma $17 + 8$. Escrevemos:

$$17 + 8 = 8 + 17.$$

Como, porém, essa propriedade se verifica quaisquer que sejam as parcelas, podemos supôr que a primeira parcela é um certo número que representamos pela letra a e que a segunda parcela é um outro número b.

A soma será $a + b$, e a propriedade comutativa da adição será indicada da seguínte forma.

$$a + b = b + a$$

Vemos que nesse caso a e b podem receber quaisquer valores.

A representação dos números por meio de letras é de grande vantagem para o cálculo. (*).

14 — Letras usadas no cálculo.

Para representar as quantidades são usadas indiferentemente as letras do alfabéto latino — minúsculas e maiúsculas — e as letras do alfabéto grego (**).

A expressão $b - B$, lê-se: b pequeno menos B grande. Nesse caso b e B representam dois números quaisquer.

Devemos evitar, sempre que fôr possivel, o emprego simultâneo de letras iguais, maiúsculas e minúsculas, numa mesma expressão.

A letra O não é usada pela confusão que póde trazer com o zero.

V

(*) O emprêgo das letras para representar os números, como veremos mais tarde, permite simplificar as operações e generalizar os problemas.

(**) Vide no fim do volume o alfabéto grego.

15 — Grandezas variaveis e constantes — Incógnita.

Se observarmos uma sala de aula, por exemplo, verificamos que a sua altura não varía. Dizemos então que é uma *constante*.

Quantidade constante é aquela que tem ou que póde receber um certo e determinado valor.

O peso de um livro, por exemplo, é uma constante.

Quando uma quantidade não é uma constante, dizemos que é *variável*.

A idade de uma pessoa, a altura de uma planta, a distância da Terra ao Sol, o peso de uma criança, etc., são quantidades variáveis.

Uma quantidade, embora constante, póde ser desconhecida, isto é, *incógnita*.

Se alguem nos mostrar uma joia podemos assegurar que o peso dessa joia é uma constante, muito embora êsse peso seja para nós desconhecido.

16 — Convenção sobre o emprego das letras.

A representação das quantidades por meio de letras obedece a certas convenções.

Assim as primeiras letras

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots$$

representam quantidades dadas ou constantes e as ultimas

$$x,\ y,\ z,\ t,\ u,\ v$$

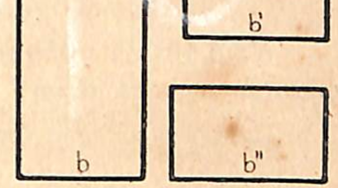
representam incógnitas ou variáveis.

Num terreno retangular se representarmos a base por a, a altura por b e a diagonal por x, queremos com tal notação indicar que os dois primeiros elementos (base e altrura) são dados e que o valor da diagonal é desconhecido.

17 — Letras com índices ou acentos.

Quando duas ou mais quantidades da mesma especie, guardam entre si uma certa analogia, podemos representa-las pela mesma letra afetada de *índices* ou de *acentos diferentes*.

Assim, por exemplo, se tivermos três retângulos diferentes podemos representar a base do primeiro por b, a do segundo por b' (lê-se: b linha) e a do terceiro por b'' (lê-se: b duas linhas).



Na expressão

$$m + m' + m''$$

m, m' e m'' representam números quaisquer.

Vamos supor que num determinado problema figuram quatro barras de ferro. Podemos representar o peso da primeira por p_1 (lemos: p indice 1, ou p baixado a 1); o peso da segunda barra será representado por p_2 (lê-se p índice 2 ou p baixado a 2); o peso da terceira por p_3 (lê-se: p índice 3 ou p baixado a 3) e o peso da última por p_4.

A expressão

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$

indica, por exemplo, que devemos somar os pesos das quatro barras.

Os índices ou acentos não indicam operação alguma.

Os acentos só devem ser usados quando os elementos a representar pela mesma letra não são em número superior a 3.

Havendo 3 ou mais quantidades a representar pela mesma letra é preferivel empregar os índices.

18 — Expressões literais.

Uma expressão é *literal* quando nela figuram certas quantidades ou números representados por letras.

Assim

$$a + b + x \quad \text{e} \quad 5 + m + t$$

são expressões literais.

19 — Exercício I.

Uma pessoa tinha m *moedas e ganhou mais 7 moedas. Com quantas moedas ficou ?*

Resposta: Ficou com $m + 7$ moedas.

20 — Exercício II.

A idade de uma pessoa era x *anos. Qual era a idade dessa pessoa 8 anos depois ?*

Resposta: $x + 8$

21 — Exercício III.

Uma caixa vazia pesa P quilogramas; a mercadoria colocada dentro dela pesa P'. Qual é o peso total da caixa com a mercadoria ?

Resposta: $P + P'$ quilogramas.

22 — Exercício IV.

Sendo m *um número inteiro qual o número inteiro imediatamente superior a* m *?*

Resposta: $m + 1$

23 — Exercício V.

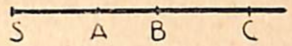
Escrever três números inteiros consecutivos quaisquer.

Resposta: Sendo n um número inteiro n, $n + 1$ e $n + 2$ são números inteiros consecutivos.

24 — Adição de segmentos.

Sobre uma *reta* S marquemos um segmento $A\ B$.

Um *segmento de reta* é uma porção limitada de uma reta (*).



A reta S, sôbre a qual marcamos o segmento AB é denominada suporte do segmento AB.

Na mesma reta S, a partir de B, marquemos o segmento $B\ C$.

Os segmentos $A\ B$ e $B\ C$ têm o mesmo suporte.

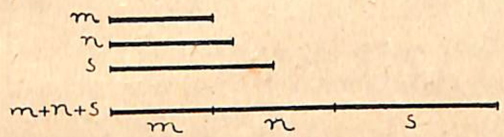
O segmento, assim obtido, $A\ C$ representará a soma dos segmentos $A\ B$ e $B\ C$.

Temos pois: $A\ C = A\ B + B\ C$.

25 — Exercício VI.

Indicar a soma de três segmentos dados.

Resolução:



Sejam m, n e s os segmentos dados.

Sôbre uma mesma reta marquemos segmentos iguais, respectivamente a m, n e s.

Obtemos assim, como indica a figura, a soma dos três segmentos.

Exercícios.

4 — Em que caso é indiferente começar uma adição pela direita ou pela esquerda ?

5 — Que modificação sofre uma soma de 8 parcelas quando se soma 10 a cada parcela ?

(*) As primeiras noções sôbre reta já foram dadas no curso primário ou estudadas no curso de admissão ao 1.° ano secundário.

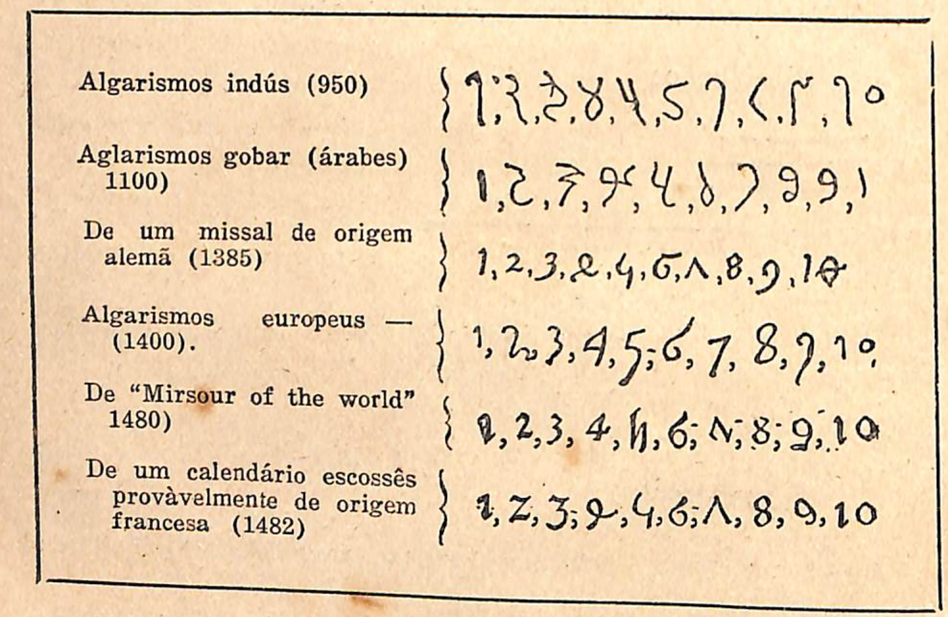
6 — Três operários trabalham em certa obra; o 1.º recebeu 20$000; o 2.º recebeu 12$000 mais do que o 1.º e o 3.º recebeu 16$000 mais do que o 2.º. Calcular a quantia total dos três operários.

Leitura.

OS ALGARISMOS

(ROUSE BALL)

Fartas vezes temos aludido ao sistema de notação numérica dos Arabes. Convém, pois, que digamos breves palavras ácerca da historia dos simbolos, de que nos servimos. Sua origem é obscura e tem dado aso a muitas controversias. Parece,



em definitivo, provável que os simbolos 4, 5, 6, e 9 (e talvez 8) provenham das letras iniciais das palavras correspondentes do alfabéto Indo-Bactriano, em uso no norte da India, 150 anos, talvez, antes de Cristo; que os simbolos 2 e 3 hajam sido, originariamente, dois e três pequenos riscos paralelos; e que o simbolo 1 se originasse de méro risco de pena. Signos análogos estavam em uso nas Indias pelos fins do segundo século da nossa éra. Desconhecida é a origem do simbolo 0, não é, todavia, impossivel que tenha sido um ponto posto para marcar um espaço vasio, ou a representação da mão fechada, o que tudo não passa de méras conjeturas. Não é desarrazoado crer-se que tenha sido adotado nas Indias em fins do quinto século. Dataria, entretanto do VIII século o documento mais remoto em que êle se encontra.

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Algarismos árabes modernos

Os símbolos empregados nas Indias no oitavo século e bem depois, chamam-se cifras Depanagári. Vêm-se na primeira linha do quadro anterior. Os Árabes do Oriente modificavam-lhe, levemente, a forma e os Mouros, por seu turno, fizeram-nos passar por alguns retoques. É possivel que os Árabes de Espanha tivessem a princípio abolido o 0 que reintegraram depois de concluirem que a sua omissão era perjudicial. Chamam-se cifras gobar *os símbolos adotados em definitivo pelos Árabes, e o exame da segunda linha do mesmo quadro nos dá idéia das formas de que mais comumente se revestiram. Da Espanha ou da Barbaria essas cifras* gobar *passaram à Europa ocidental.*

(Do livro "Histoire des Mathématiques")

CAPÍTULO III

SUBTRAÇÃO.

1 — Subtração.

Vamos supor que um fazendeiro possua dois rebanhos *A* e *B;* o rebanho *A* tendo 43 ovelhas e o rebanho *B*, 20 ovelhas.

Ha, portanto, um *excesso* de 23 ovelhas do rebanho *A* sobre o rebanho *B*.

Se do primeiro rebanho, que é no caso o maior, *tirarmos* um número de ovelhas igual ao número contido no rebanho *B*, vamos obter uma *diferença* de 23 ovelhas.

Esse resultado *23* será obtido por meio de uma *subtração*.

Subtração é a operação que nos permite achar o número de unidades de que um número dado *a* excede um número *b*.

O primeiro número *a* é aqui suposto maior do que o segundo.

2 — Sinal de subtração.

A subtração é indicada por meio do sinal — (menos) colocado entre os dois números. Assim: 43 — 19 lê-se 43 menos 19.

3 — Termos da subtração.

Os termos da subtração são denominados: *minuendo* e *subtraendo*.

Na subtração *a* — *b* o minuendo é *a* e o subtraendo *b*. (*)

4 — Resultado da subtração.

O resultado da subtração é denominado *resto, excesso* ou *diferença*.

Quando dizemos: — "Paulo tinha 15 moedas e tendo gasto 6 ficou com 9", esse resultado é um *resto*.

Quando dizemos: — "Paulo tem 15 anos e Pedro tem 6; logo Paulo é 9 anos mais velho do que Pedro".

Neste caso o resultado 9 é uma *diferença* ou *excesso*.

5 — A subtração é a operação inversa da adição.

Quando efetuamos, por exemplo, a subtração

$$15 - 8 = 7$$

queremos com isso exprimir que o número 15 excede 8 de 7 unidades.

O número 15 representa nesse caso uma soma de duas parcelas uma das quais era conhecida (8) e a outra (7) foi calculada.

A subtração tem por fim dada a soma de duas parcelas e uma dessas parcelas achar a outra.

A subtração é, portanto, a operação inversa da adição.

A subtração é *unívoca*.

6 — Prova da subtração.

Tiramos facilmente a prova da subtração com auxílio da adição.

(*) Alguns autores adótam as denominações de *diminuendo* e *diminuidor* para os dois termos da subtração.

Com efeito, se somarmos o resto ao subtraendo devemos obter o minuendo.

7 — Observação.

A diferença entre dois números iguais é zero.

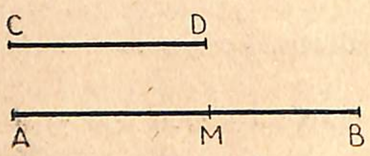
$$a - a = o$$

Quando de um número subtraimos zero êsse número não se altera.

$$m - o = m$$

8 — Diferença de dois segmentos.

Seja, por exemplo, achar a diferença entre o segmento AB e CD. A partir da extremidade A sobre AB marcamos um segmento AM, igual a CD.



O segmento MB representa a diferença procurada.

A diferença de dois segmentos é o segmento que precisamos somar ao menor para obtermos o maior.

9 — Subtrair de um número uma soma indicada.

Para subtrair de um número uma soma indicada de várias parcelas, podemos do número subtrair a 1.ª parcela, do resto obtido subtrair a 2.ª parcela, do novo resto a 3.ª parecla e assim por diante.

Vamos supor que do número 78 queremos tirar a seguinte soma:

$$8 + 3 + 10$$

Escrevemos portanto:

$$78 - (8 + 3 + 10)$$

colocando entre parentesis a soma indicada. (*) Do número 78 podemos tirar de uma só vez 21 unidades, pois é êsse o número de unidades contidas na soma indicada. Chegaremos, porém, ao mesmo resultado se do número 78 tirarmos sucessivamente 8, 3 e 10 unidades.

$$78 - 21 = 57$$
$$78 - 8 - 3 - 10 = 57$$

Resulta daí a seguinte igualdade:

$$78 - (8 + 3 + 10) = 78 - 8 - 3 - 10$$

Em geral:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

10 — Subtrair de um número uma diferença indicada.

Para de um número tirar a diferença indicada de dois outros, junta-se êsse número ao subtraendo e da soma obtida, subtrae-se o minuendo.

Vamos supor que do número 85, por exemplo, queremos subtrair a diferença indicada 91 — 36.

A operação a efetuar será indicada do seguinte modo:

$$85 - (91 - 36)$$

colocando-se entre parentesis a diferença.

Efetuando a subtração, temos

$$85 - (91 - 36) = 85 - 55 = 30$$

(*) Os sinais ( ) e [ ] servem para estabelecer certas relações entre as operações indicadas. Uma quantidade colocada entre parentesis deve figurar, na expressão, como se fosse um número só.

Chegaremos ao mesmo resultado se ao número 85 juntarmos o subtraendo 36 e do resultado tirarmos o minuendo 91:

$$81 + 36 - 91 = 30$$

Podemos pois escrever a seguinte igualdade:

$$85 - (91 - 36) = 85 + 36 - 91$$

Em geral:

$$a - (m - n) = a - m + n.$$

11 — Exercício I.

Do número 1 *tirar a diferença 10* — x

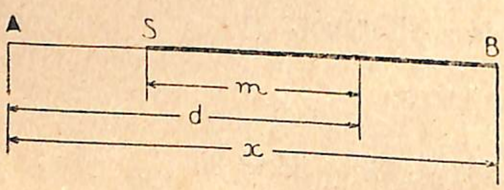
Resolução:

$$l - (10 - x) = l - 10 + x$$

A expressão $l - 10 + x$ exprime o excesso do número l sobre a diferença $10 - x$.

12 — Exercício II.

A distância entre duas cidades A *e* B *é de* x *quilômetros. Um automóvel que ia de* A *para* B, *depois de ter percorrido* d *quilômetros da distância foi obrigado a retroceder* m *quilômetros, chegando a um ponto* S. *Exprimir a distância de* S *a* B.



Resolução:

Se o automóvel percorreu a distância d e retrocedeu m quilômetros a distância AS será $d - m$.

A distância SB será igual à distância x diminuída de $d - m$. Escrevemos portanto:

$$SB = x - (d - m)$$

ou

$$SB = x - d + m$$

13 — Soma de um número com uma diferença indicada.

Para somarmos a um número qualquer a diferença indicada de dois outros, basta somar o número ao minuendo e do resultado tirar o subtraendo.

Vamos supor que queremos somar o número 52, por exemplo, à diferença 41 — 10.

Escrevamos pois:

$$52 + (41 - 10)$$

colocando a diferença indicada entre parentesis.

Efetuando a subtração temos:

$$52 + 31 \quad \text{ou} \quad 83$$

O resultado será o mesmo se somarmos o número ao minuendo e do resultado tirarmos o subtraendo:

$$52 + 41 - 10 = 83$$

Podemos escrever:

$$52 + (41 - 10) = 52 + 41 - 10$$

Em geral:

$$x + (m - n) = x + m - n$$

14 — Exercício III.

Sem alterar o resultado suprimir os parentesis na expressão:

$$10 - (a - 3) + (5 - b)$$

Resolução:

Temos:

$$10 - a + 3 + 5 - b$$

15 — Propriedade da subtração.

Quando somarmos o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo a diferença não se altera.

Consideremos, por exemplo, os números 73 e 40. Temos:

$$73 - 40 = 33$$

Se juntarmos 10 unidades, por exemplo, aos dois termos da subtração resulta:

$$85 - 50 = 33$$

A diferença não se alterou.

16 — Exercício IV.

Suprimir, sem alterar o resultado, os parentesis na seguinte expressão:

$$46 - (71 - 60) + (31 - 12) - (14 + 13)$$

Resolução:

$$46 + 60 - 71 + 31 - 12 - 14 - 13$$

17 — Complemento aritmético de um número.

Chama-se *complemento aritmético* de um número o que falta a êsse número para completar uma unidade de ordem imediatamente superior à ordem das unidades mais elevadas desse número.

Assim o número 7418 terá para complemento 2582:

$$7418 + 2582 = 10000$$

18 — Determinação do complemento aritmético de um número.

Seja, por exemplo, achar o complemento do número 4378. Escrevemos êsse número sob um outro formado pela unidade seguida de tantos zeros quantos forem os algarismos do número dado. Em seguida efetuamos a subtração.

$$\begin{array}{r} 1000 \\ 437 \\ \hline 5622 \end{array}$$

5622 será o complemento de 4378.

E' facil concluir que o complemento de um número se obtem subtraindo-se todos os algarismos desse número de 9 com exceção do primeiro algarismo significativo à direita que se subtrae de 10.

O complemento de 73904 será 26096.

O complemento de 380 será 620 e o de 100 será 900.

19 — Aplicação do complemento de um número.

Com auxilio do complemento aritmético de um número podemos transformar uma subtração numa soma.

Seja efetuar: 871 — 698.

Substituindo, nessa expressão, 698 pela diferença 1000 — 302, temos:

$$871 - 698 = 871 - (1000 - 302)$$

Suprimindo os parentesis, vem:

$$871 - 698 = 871 + 302 - 1000$$

Êsse resultado nos mostra que a diferença entre os números dados pode ser obtida juntando-se o minuendo ao complemento do subtraendo e do resultado tirando-se 1000

A diferença pedida é 173	871	(minuendo)
isto é:	302	(complemento do subtraendo)
1173 — 1000	1173	(soma)

O emprego do complemento aritmético não nos traz, nesta parte da Matemática, vantagem alguma de ordem prática.

20 — Subtração de números concretos.

A subtração de dois números concretos só é possivel quando os dois números forem referidos à mesma unidade.

Não podemos subtrair dois números concretos de especie diferentes.

Exercícios.

7 — Um negociante vendeu a um de seus freguezes várias mercadorias no valor de x mil réis, e recebeu, para o pagamento, uma nota de n mil réis. Exprimir o troco que devia ser entregue ao comprador sabendo-se que no preço x foi feito um abatimento de 40$000.

8 — Um automóvel, percorrendo uma estrada retilínea AB, andou m quilômetros partindo da estação A. Que distância deve ele ainda percorre para chegar à estação B, sabendo-se que a distância AB é igual a l?

9 — Caucular a diferença entre dois números sabendo-se que aumentando-se o maior de 12 e o menor de 18, a diferença entre os resutados obtidos é 1230.

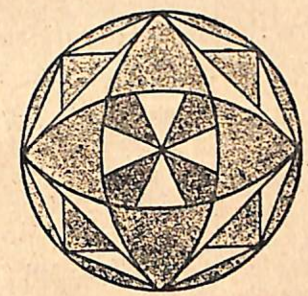
Leitura.

A NUMERAÇÃO DOS GREGOS

Usavam os Gregos, na antiguidade, um sistema de numeração no qual figuravam 36 algarismos diferentes representados por letras do alfabéto, letras com índices e sinais intercalados. O número 3006, por exemplo, era representado por dois algarismos, um indicando 3000 e o outro 6. O número 444 era escrito com 3 algarismos diferentes, sendo um para indicar 400, outro para representar 40 e o terceiro para indicar as unidades do número.

Ι ΓΔΗΧ

Até Arquimedes, geômetra famoso que viveu no III século antes de Cristo, os Gregos só sabiam representar os números até 9999.



CAPÍTULO IV

MULTIPLICAÇÃO

1 — Adição de parcelas iguais: multiplicação.

Consideremos a adição

$$7 + 7 + 7 + 7$$

na qual figuram 4 parcelas iguais a 7; dizemos que o número 7 foi repetido, como parcela quatro vezes sendo o resultado igual a 28

$$7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

Trata-se assim de um caso particular da adição, isto é, de uma adição em que todas as parcelas são iguais.

Essa soma de 4 parcelas iguais a 7 é o *produto* de 4 por 7.

Escrevemos:

$$4 \times 7 = 28$$

lê-se: 4 *vezes* 7 *é igual a* 28.

Em geral: Denomina-se *produto* de um número m por um número l a uma soma de m parcelas iguais a l.

2 — Multiplicação — Fatores de um produto.

A operação que nos permite determinar o produto de dois números é denominada *multiplicação*.

A multiplicação é a operação pela qual, sendo dados dois números, repetimos um dêles, como parcela, tantas vezes quantas forem as unidades do outro.

Os números que figuram numa multiplicação são chamados *fatores*.

O resultado da multiplicação é o produto.

3 — Fatores de um produto.

Um produto pode conter dois, três ou mais fatores.

Vamos supor que a expressão

$$7 + 7 + 7 + 7$$

que exprime o produto de 4 por 7, é tomada 3 vezes como parcela:

$$\boxed{\begin{array}{c} 7 + 7 + 7 + 7 \\ 7 + 7 + 7 + 7 \\ 7 + 7 + 7 + 7 \end{array}}$$

As unidades contidas nesse quadro serão dadas pelo produto:

$$3 \times 4 \times 7$$

Se admitirmos que as unidades do quadro acima foram repetidas 8 vezes teriamos o produto:

$$8 \times 3 \times 4 \times 7$$

Vemos que um produto pode ter dois ou mais fatores.

(*) A definição de produto é dada, neste capítulo, apenas para o caso em que os números são inteiros e abstratos.

4 — Multiplicando e multiplicador.

Admitamos que num produto figuram dois fatores. Seja por exemplo o produto:

$$4 \times 7$$

Esse produto pode ser, como já vimos, escrito sob a forma de uma adição:

$$7 + 7 + 7 + 7$$

O número que figura como parcelas iguais é o *multiplicando* e o número de números iguais a ajuntar é o *multiplicador*.

No exemplo dado o multiplicando é 7 e o multiplicador é 4.

5 — A multiplicação é uma operação comutativa.

Consideremos um produto de dois números, 4 e 3 por exemplo.

O produto 4×3 é igual ao produto 3×4, isto é, *a ordem dos fatores não altera o produto.*

Exprimimos esse fato dizendo que a multiplicação é uma operação *comutativa*.

A comutatividade pode ser verificada na multiplicação qualquer que seja o número de fatores do produto.

6 — A multiplicação é uma operação associativa.

Seja o produto

$$7 \times 3 \times 4 \times 5$$

Sem alterar o resultado podemos substituir os fatores 3 e 4, por exemplo, pelo produto efetuado 12:

$$7 \times 3 \times 4 \times 5 = 7 \times 12 \times 5$$

E' essa a propriedade que exprimimos quando dizemos que a multiplicação é uma operação *associativa*.

7 — Sinal de multiplicação.

Como já vimos a multiplicação é indicada pelo sinal $\times$ (vezes) colocado entre os fatores.

Em certos casos êsse sinal é substituido por um simples ponto. A expressão 8.4 indicará o produto de 8 por 4.

Quando os fatores de um produto são representados por letra não escrevemos, por convenção, sinal algum entre os fatores.

Assim, a expressão

$$ab$$

indica o produto de a por b.

Havendo um fator numérico e outro literal, devemos escrever em primeiro logar o fator numérico e em seguida a parte literal:

$$8 \times x = 8x$$
$$a \times 3 = 3a$$
$$a \times a \times 7 = 7ab$$

Salvo casos excepcionais os fatores literais devem ser escritos em ordem alfabética.

Exemplo:

$$m \times 7 \times b \times a = 7abm$$

8 — A multiplicação é uma operação unívoca.

A multiplicação de dois números dados só pode nos conduzir a um resultado único perfeitamente determinado.

Dizemos, então, que a multiplicação é uma operação unívoca.

9 — Produto por zero.

O produto de um número qualquer por zero é sempre igual a zero.

O produto

$$3 \times 0$$

por exemplo, corresponde a uma soma de três parcelas iguais a zero:

$$0 + 0 + 0$$

E como todas as parcelas são iguais a zero a soma tambem é zero.

Em geral: As convenções relativas ao zero (considerado assim como sendo número) em relação ao produto são:

$$a \times 0 = 0$$
$$0 \times a = 0$$

Um produto só poderá ser nulo se tiver pelo menos um fator igual a zero.

10— Produto por 1.

O produto de um número qualquer por 1 é igual ao próprio número.

$$m \times 1 = m$$

Para que o produto de vários números inteiros seja igual a 1 é necessário que todos os fatores sejam iguais a 1.

11 — Múltiplo de um número.

Chama-se *múltiplo* de um número ao produto desse número por um número inteiro qualquer.

Assim 40 é um múltiplo de 8, pois 40 é igual ao produto de 8 por 5.

Essa definição vai nos permitir concluir que o zero pode ser considerado como um múltiplo de um número qualquer.

Sendo m um número inteiro am será um múltiplo de a.

Qualquer número inteiro é múltiplo dele próprio e da unidade.

12 — Multiplicação de um número por uma soma indicada.

Seja multiplicar o número 3 pela soma indicada $7 + 5 + 8$.

Isso eqüivale a tomar a expressão

$$7 + 5 + 8$$

três vezes como parcela de uma soma. Escrevamos pois:

$$7 + 5 + 8$$
$$7 + 5 + 8$$
$$7 + 5 + 8$$

Vemos que o 1.º termo 7 aparece repetido três vezes como parcela, isto é, multiplicado por 3, o mesmo acontecendo aos outros termos 5 e 8.

Logo o produto de 3 pela soma $7 + 5 + 8$ será formado do produto de 3 por 7, mais o produto de 3 por 5, mais o produto de 3 por 8.

Podemos escrever:

$$3 \times (7 + 5 + 8) = 3 \times 7 + 3 \times 5 + 3 \times 8$$

Conclusão:

Para se multiplicar um número por uma soma indicada multiplica-se o número por todas as parcelas somando-se depois os resultados. (*).

Exemplo:

$$8\ (5 + 2 + 6) = 40 + 16 + 48 = 104$$

O 1.° membro dessa igualdade apresenta-se sob a forma de um produto. Deixamos de escrever o sinal $\times$ por estar o segundo fator $5 + 2 + 6$ escrito entre parentesis.

13 — Exercício I.

Efetuar o produto: $5\ (a + b + 4)$.

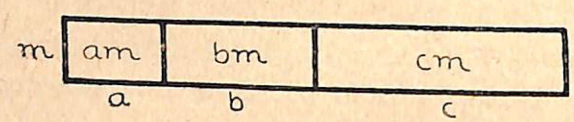
Resolução:

Devemos multiplicar todas as parcelas da soma escrita entre parentesis, por 5.

$$5\ (a + b + 4) = 5a + 5b + 20$$

14 — Explicação gráphica.

O produto de uma soma indicada por um número pode ser facilmente explicado:



Consideremos um retângulo de altura m e de base igual a

$$a + b + c.$$

(*) Verifica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A área dêsse retângulo será dada, como sabemos, pelo produto da base $a + b + c$ pela altura m:

$$(a + b + c) \times m.$$

O retângulo, porém, como a figura nos mostra, pode ser decomposto em três retângulos: o primeiro de área am, o segundo de área bm e o terceiro de área cm; logo a área do retângulo dado será igual à soma

$$am + bm + cm.$$

Como a área do retângulo dado é

$$(a + b + c) \times m$$

concluimos a seguinte igualdade:

$$(a + b + c) \times m = am + bm + cm.$$

15 — Exercício II.

Efetuar o producto: $x\ (a + m + 7)$.

Resolução:

Devemos, como no caso anterior, multiplicar por x todas as parcelas da soma:

$$x\ (a + m + 7) = ax + mx + 7x$$

16 — Produto de um número por uma diferença indicada.

Para se multiplicar um número por uma diferença indicada, multiplica-se o número pelos termos dessa diferença, subtraindo-se, em seguida, os produtos obtidos.

O produto $8\ (15 - 4)$

lê-se: 8 que multiplica 15 menos 4.

Podemos escrever:

$$8\ (15 - 4) = 8 \times 15 - 8 \times 4$$

17 — Exercício III.

Efetuar o produto: $a\ (5 - x)$.

Resolução:

$$a\ (5 - x) = 5a - ax$$

18 — Exercício IV.

Efetuar os produtos:

$$8\ (2 - x) \qquad x\ (a - 3)$$

Resolução:

$$8\ (2 - x) = 16 - 8x$$
$$x\ (a - 3) = ax - 3x$$

19 — Observação.

Para multiplicar um produto indicado por um número, basta multiplicar um dos fatores por êsse número.

Seja multiplicar $8 \times 7 \times 3$ por 5.

Temos: $(8 \times 7 \times 3) \times 5 = 40 \times 7 \times 3$.

Exemplo: $4ab \times 3 = 12ab$.

20 — Processo de abreviação.

Ha casos em que podemos abreviar uma multiplicação.

I. Seja efetuar, por exemplo, o produto

$$4700 \times 230$$

Efetuamos o produto de 47 por 23; obtemos

$$47 \times 23 = 1081$$

e acrescentamos, à direita desse produto, 3 zeros — pois é esse o número total de zeros que figuram à direita dos fatores.

Logo: $4700 \times 230 = 1081000$.

II. Podemos tambem abreviar um produto grupando convenientemente os fatores

Seja efetutar: $4 \times 7 \times 8 \times 5 \times 125 \times 5$.

Como a multiplicação é uma operação comutativa, êsse produto será igual a

$$(4 \times 5 \times 5) \times (8 \times 125) \times 7$$

ou

$$100 \times 1000 \times 7 = 700000.$$

21 — Número de algarismos de um produto.

O número de algarismos de um produto de dois fatores é igual à soma do número de algarismos do multiplicando com o número de algarismos do multiplicador ou a êsse número diminuido de uma unidade.

Exemplo:

O multiplicando tem 5 algarismos; o multiplicador tem 3 algarismos.

O produto terá 8 ou 7 algarismos.

22 — Natureza de um produto.

Num produto de dois fatores, em relação à natureza desses fatores, temos três casos a considerar:

I) O multiplicando e o multiplicador são números abstratos.

Nêsse caso o produto é um número obstrato.

I O multiplicando é um número concreto e o multiplicador é abstrato.

O produto será concreto e da mesma espécie do multiplicando.

Exemplo: 5 × 8 metros = 40 metros.

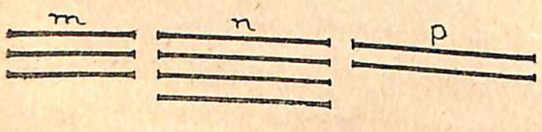
III) o multiplicando e o multiplicador são números concretos.

Nêste ultimo caso — a operação sendo possivel — o produto não será nem da espécie do multiplicando nem da espécie do multiplicador.

Num produto de dois fatores, sendo êsses fatores dados em *metros*, o produto será expresso em *metros quadrados.*

8 metros × 5 metros = 40 metros quadrados.

23 — Exercício VII.



Sãd dados 3 *segmentos iguais a* m; 4 *segmentos iguais a* n *e* 2 *iguais a* p.

Exprimir a soma de todos êsses segmentos.

Resolução:

A soma de todos os segmentos será:

$$3m + 4n + 2p$$

Exercícios.

10 — Abreviar o produto 8 × 12 × 25 × 16 × 5 × 2 grupando convenientemente os fatores.

11 — Que acontece a um produto de três fatores quando se multiplica cada um dos fatores por 2?

12 — O produto de dois números é 918. Calcular o produto de um número 3 vezes maior que o primeiro por outro 4 vezes maior do que o segundo.

13 — O produto de dois números é 11897. Somando-se 3 a um dêsses números, o produto torna-se igual a 11988. Determinar êsses números.

Leitura.

PRODUTOS CURIOSOS

Alguns produtos, apresentam, pela disposição singular com que aparecem os seus algarismos, aspetos que são dignos de atenção.

Vejamos alguns desses produtos curiosos.

Tomemos o número 123456789, *no qual figuram, na ordem crescente de seus valores, todos os algarismos significativos com exceção do 8.*

Multipliquemos êsse número pelos múltiplos de 9, a saber: 9, 18, 27, *etc.; temos*:

$$12345679 \times 9 = 111\ 111\ 111$$
$$12345679 \times 18 = 222\ 222\ 222$$
$$12345679 \times 27 = 333\ 333\ 333$$

Convem observar que o segundo produto é o dobro do primeiro; o terceiro é o triplo do primeiro e assim por diante; e como no primeiro produto só figura o algarismo 1, *é evidente que no segundo só deve figurar o algarismo* 2 *e no terceiro o algarismo* 3, *etc.*

Nas expressões:

$$9 \times 9 = 81$$
$$9 \times 98 = 882$$
$$9 \times 987 = 8883$$
$$9 \times 9876 = 88884$$

não é dificil descobrir que no produto figura o algarismo 8 *repetido tantas vezes quantas forem as unidades indicadas pelo último algarismo da direita.*

O número 142857, *apresenta, em relação ao produto, uma propriedade curiosa.*

Multipliquemos o número 142857 *sucessivamente pelos fatores* 2, 3, 4, 5 *e* 6:

$$142857 \times 2 = 285714$$
$$142857 \times 3 = 428571$$
$$142857 \times 4 = 571528$$
$$142857 \times 5 = 714285$$
$$142857 \times 6 = 857142$$

Vemos que nos diversos produtos figuram sempre os mesmos algarismos (1, 4, 2, 8, 5, 7) *do número dado, escritos porém em ordem diversa.*

O produto de 142857 *por* 7 *é o número* 999999.

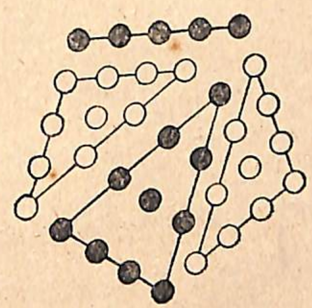
Multipliquemos o número 142857 *por* 8; *o produto será* 1142856 *no qual observamos um fato muito singular: a soma dos algarismos extremos é igual a* 7, *que é o único algarismo do número que não figura no produto. Temos a impressão de que o* 7 *foi decomposto em duas partes* (1 *e* 6) *que foram ocupar os extremos do número.*

Se multiplicarmos o mesmo número 142857 *por* 9 *vamos obter o produto*

1285713

no qual figuram todos os algarismos do número dado com exceção do 4. *Notamos que houve nesse caso uma nova* "decomposição": *o* 4 *foi decomposto em duas parcelas* (1 *e* 3) *que foram ocupar os extremos do número.*

O estudante que for curioso poderá efetuar o produto do número 142857 *por* 11, 12, 13, 14, 15, *etc., afim de verificar as singularidades que os resultados apresentam.*



CAPITULO V

DIVISÃO

1 — Divisão.

Sob a denominação de *divisão* consideram-se duas operações distintas: a *divisão exata* e a *divisão aproximada.*

2 — Divisão exata.

Efetuar a divisão exata de um número — *dividendo* — por outro número — *divisor* — é achar um terceiro número — *quociente* — que multiplicado pelo divisor dê um produto igual ao dividendo.

Exemplo: Dividir 564 por 12 é achar, no caso da divisão ser exata, um número que multiplicado 12 dê um produto igual a 564.

Sendo 47 o quociente temos:

$$564 = 12 \times 47.$$

3 — Sinal de divisão.

A divisão é indicada pelo sinal: (dividido por) colocado entre o dividendo e o divisor.

Usa-se com a mesma significação o sinal $\div$

$$18 : 2 = 9$$

ou

$$18 \div 2 = 9$$

Indica-se tambem a divisão colocando-se o dividendo sobre o divisor do qual é separado por um pequeno traço.

Para indicar, por exemplo, a divisão de 80 por 4 escrevemos:

$$\frac{80}{4}$$

lê-se: 80 sôbre 4 ou 80 dividido por 4.

A expressão $\frac{a}{b}$ representa o quociente da divisão exata de a por b.

4 — Observação.

Retomemos a divisão na qual o dividendo é 564, o divisor é 12 e o quociente é 47. Temos:

$$564 = 12 \times 47$$

Na divisão exata o dividendo 564 representa o produto de dois fatores — divisor e quociente. Tendo sido dado um dêsses fatores determinamos o outro.

A determinação do quociente na divisão exata corresponde precisamente à resolução do seguinte problema:

Sendo dados o produto de dois fatores e um dêsses fatores achar o outro.

Dividendo = divisor $\times$ quociente.

A divisão exata é, portanto, a *operação inversa da multiplicação.*

5 — A divisão exata nem sempre é possível.

Dados dois números inteiros a (dividendo) e b (divisor) nem sempre existe um número inteiro que multiplicado por b dê um produto igual a a.

Assim 432 não é divisível *exatamente* por 40, pois não podemos achar um número inteiro que multiplicado por 40 dê 432.

Exprimimos êsse fato dizendo que a *divisão exata de dois números dados nem sempre é possível.*

A divisão exata só é possível quando o dividendo for um múltiplo do divisor.

6 — Divisor de um número.

Divisor de um número é um outro número que divide exatamente o primeiro.

Assim 4 é um divisor de 80.

7 — Divisão por 1.

O quociente da divisão de um número por 1 é o próprio número:

$$\frac{m}{1} = m$$

8 — Quociente igual a 1.

Quando o dividendo e o divisor são iguais o quociente é igual a 1:

$$\frac{a}{a} = 1.$$

9 — Exercício I.

Dividir o número a *por* 5 *e ao quociente juntar* b. *Exprimir o resultado.*

Resposta: $\frac{a}{5} + b.$

10 — Exercício II.

Um certo número N *foi dividido em duas partes, uma das quais é* x. *A* 1.ª *parte foi dividida por* a *e a* 2.ª *por* b. *Exprimir a soma dos dois quocientes.*

Resolução:

O número N foi dividido em duas partes, uma sendo x; a outra será $N - x$:

O quociente da 1.ª por a será $\frac{x}{a}$.

O quociente da 2.ª por b será $\frac{N - x}{b}$.

A soma dos dois quocientes será:

$$\frac{x}{a} + \frac{N - x}{b}$$

11 — Divisão aproximada.

Dividir, por exemplo, 50 por 12.

Os múltiplos de 12 são: 0, 12, 24, 36, 48, 60,... O número 50 está compreendido entre 48 e 60, logo a divisão de 50 por 12 não pode ser exata pois 50 não é um múltiplo de 12.

Se do número 50 formos subtraindo sucessivameite o número 12 obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 50 - 12 &= 38 \\ 38 - 12 &= 26 \\ 26 - 12 &= 14 \\ 14 - 12 &= 2 \end{aligned}$$

Vemos assim que do número 50 podemos subtrair 4 vezes o número 12 e ainda restam 2 unidades.

O número 12 está coneido 4 vezes em 50, ou melhor: 50 contém 4 vezes o número 12.

Podemos escrever:

$$50 = 4 \times 12 + 2$$

Êsse resultado define a *divisão aproximada*.
4 será o *quociente aproximado* e *2* o *resto* da divisão.

12 — Quociente aproximado.

Vamos supor que queremos dividir 481 por 28.

481	28
201	17
5	

Efetuada a operação encontramos um quociente aproximado 17 e um resto 5.

Êsse resultado exprime que o maior múltiplo de 28 contido em 481 é 17 × 28, isto é, 476.

É evidente que o resto é sempre menor do que o divisor.

13 — Expressão do dividendo.

Consideremos uma divisão na qual o dividendo é 626 o divisor é 15, o quociente é 41 e o resto 11.

626	15
26	41
11	

Podemos escrever:

$$626 = 15 \times 41 + 11$$

Em geral: sendo A o dividendo, B, o divisor, q o quociente e R o resto, temos:

$$A = Bq + R$$

O dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente, mais o resto.

$$Dividendo = divisor \times quociente + resto.$$

Se o resto R for igual a zero a divisão será exata.

14 — O problema da divisão.

O verbo *dividir* sugere naturalmente ao nosso espírito a decomposição de um número ou de uma grandeza em partes iguais. (*)

O problema da divisão mais se aproxima do sentido natural da palavra *divisão* quando é apresentado sob a seguinte forma: *Dividir o número 80, por exemplo, em 20 partes iguais.*

A divisão de um número a em b partes iguais só é possível se a for um múltiplo de b

15 — Propriedade do quociente.

Quando multiplicamos ou dividimos o dividendo e o divisor de uma divisão por um mesmo número, o quociente não se altera, mas o resto aparece multiplicado ou dividido por êsse número.

Exemplo: Seja a divisão de 85 por 10, cujo quociente é 8, e o resto é 5.

Se multiplicarmos o dividendo e o divisor por um número qualquer, 4, por exemplo; temos:

$$340 \div 40 = 8 \text{ (quociente aproximado)}$$

sendo o resto nesta divisão igual a 20.

Vemos que o quociente não se alterou: o resto apareceu multiplicado por 4.

16 — Prova da divisão.

Na divisão exata o dividendo deve ser igual ao produto do divisor pelo quociente.

(*) Cfr. J. Tannery — Ob. cit. pág. 55.

$$\begin{array}{r|l} 5408 & 104 \\ \cline{2-2} 208 & \\ 0 & 52 \end{array}$$

Prova

$$\begin{array}{r} 104 \\ 52 \\ \hline 208 \\ 520 \\ \hline 5408 \end{array}$$

Na divisão aproximada o dividendo seve ser igual ao produto do quociente pelo divisor, mais o resto.

17 — Processo de abreviação.

Para se obter o quociente — exato ou aproximado — de um número por 10, 100, 1000, etc., basta suprimir um, dois, três, etc., algarismos à direita.

Assim o quociente aproximado da divisão de 8731 por 100 será 87.

A divisão tambem pode ser abreviada quando o dividendo e o divisor forem terminados em zeros.

Seja dividir: 84000 por 1200

Suprimimos o mesmo número de zeros ao dividendo e ao divisor. A operação fica reduzida à determinação de quociente de 840 por 12 :

$$840 \div 12 = 70.$$

18 — Divisão de uma soma por um número.

Para dividirmos uma soma indicada por um número dividimos todas as parcelas da soma por êsse número.

Seja dividir $8 + 12 + 20$ por 4.

O resultado será:

$$\frac{8}{4} + \frac{12}{4} + \frac{20}{4} = 2 + 3 + 5$$

Nesse caso todas as parcelas eram divisíveis exatamente pelo divisor dado.

Em geral :

$$\frac{a + b + c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

19 — Divisão de uma diferença indicada por um número.

Para dividirmos uma diferença indicada por um número dividimos os termos da diferença por êsse número e tomamos a diferença entre os resultados.

Seja dividir $a - b$ por d.

Temos: $\dfrac{a - b}{d} = \dfrac{a}{d} - \dfrac{b}{d}.$

Exemplo:

$$\frac{84 - 28}{7} = \frac{84}{7} - \frac{28}{7} = 12 - 4 = 8$$

20 — Divisão de um produto por um número.

Para dividirmos um produto por um número basta dividir um dos fatores do produto por êsse número.

Seja dividir $8 \times 17 \times 40$ por 4.

Dividimos um dos fatores, o primeiro por exemplo, por 4

O quociente será :

$$2 \times 17 \times 40$$

21 — Exercício III.

Dividir por 15 o produto $6 \times 11 \times 60 \times 3$.

Resolução:

Dividindo o terceiro fator 60 por 15 temos :

$$\frac{6 \times 11 \times 60 \times 3}{15} = 6 \times 11 \times 4 \times 3.$$

22 — Observação.

Para dividir um produto de vários fatores por um dos fatores basta suprimir esse fator.

Seja dividir $8 \times 7 \times 15$ por 7.

Suprimindo no dividendo o fator 7 obtemos :

$$8 \times 15.$$

Podemos escrever :

$$\frac{8 \times 7 \times 15}{7} = 8 \times 15.$$

23 — Exercício IV.

Efetuar as seguintes divisões :

$12a \div 3$ $\qquad 15m \div 5$ $\qquad 20ab \div 4$

Resolução:

$$\frac{12a}{3} = 4a \qquad \frac{15m}{5} = 3m \qquad \frac{20ab}{4} = 5ab$$

24 — Exercicio V.

Dividir a expressão $8a + 12b + 20$ por 4.

Resolução:

$$\frac{8a + 12b + 20}{4} = 2a + 3b + 5$$

25 — Divisão de um número por um produto.

Seja dividir o número 420 pelo produto 3×4. Representando por q o quociente pedido, temos:

$$\frac{420}{3 \times 4} = q.$$

Ora se dividirmos o dividendo 420 e o divisor 3×4 pelo 1.º fator 3 o quociente q não se altera. Sabemos que 420 dividido por 3 dá um quociente igual a 140.

$$\frac{420}{3 \times 4} = \frac{140}{4} = q$$

O valor do quociente q será obtido dividindo-se 140 por 4.

Conclusão:

Para dividirmos um número por um produto de diversos fatores dividimos o número pelo 1.º fator, o quociente obtido pelo 2.º fator e assim sucessivamente.

26 — Exercicio VI.

Dividir o número 840 pelo produto $2 \times 7 \times 5$.

Resolução:

$$840 \div 2 = 420$$
$$420 \div 7 = 60$$
$$60 \div 5 = 12$$

O número 840 dividido por $2 \times 7 \times 5$ dá um quociente igual a 12.

27 — Exercício VII.

Achar o quociente aproximado da divisão do número 3001 por 3×6.

Resolução:

3001 dividido por 3 dá um quociente aproximado igual a 1000.

1000 dividido por 6 dá um quociente aproximado igual a 166.

166 é o quociente aproximado da divisão de 3001 por 3×6, isto é, 18.

28 — Exercício VIII.

Qual é o menor número que devemos somar ao número 237 para obtermos um resultado divisível por 41 ?

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 237 & 41 \\ \hline 32 & 5 \end{array}$$

Dividindo 237 por 41 encontramos o resto 32.

A differença entre o divisor 41 e o resto 32 é 9. Logo se juntarmos o número 9 ao dividendo obtemos um multiplo de 41.

O número 9 resolve a questão proposta.

29 — Divisão de um número por 25.

Seja dividir o número 4375 por 25.

A operação pode ser abreviada do seguinte modo: multiplica-se o número dado por 4 e divide-se o resultado por 100.

$$4375 \times 4 = 17500$$
$$17500 \div 100 = 175$$

O número dado dividido por 25 dará um quociente igual a 175.

30 — Exercicio IX.

Numa divisão o quociente é 20 e o resto é 7. Qual é o menor valor que pode ter o dividendo?

Resolução:

Chamemos A o dividendo e B o divisor.

$$\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 7 & 20 \end{array}$$

Como o resto (7) não pode ser igual nem maior do que o divisor, concluimos que 8 será o *menor* valor que pode ter o divisor B.

Se supuzermos que o divisor seja 8 o dividendo será

$$8 \times 20 + 7$$

ou 167.

E' êsse o menor valor que pode ter o dividendo A.

31 — Natureza do quociente.

Numa divisão qualquer, em relação à natureza do dividendo e do divisor temos quatro casos a considerar.

I) *O dividendo e o divisor são números abstratos.*

Nesse caso o quociente é abstrato.

Exemplo: $12 \div 3 = 4$.

II) *O dividendo é concreto e o divisor é abstrato.*

Nesse caso o quociente é concreto e da mesma espécie do dividendo.

Exemplo: Seja dividir 12 metros por 3, isto é, dividir 12 metros em três partes iguais.

12 metros $\div$ 3 = 4 metros.

O quociente será igual a 4 metros.

III) *O dividendo é concreto e o divisor tambem é o concreto da mesma espécie do dividendo.*

O quociente será um número abstrato.

Exemplo: Seja dividir 18 metros por 2 metros, isto é, achar quantas vezes 18 metros contém 2 metros.

18 metros ÷ 2 metros = 9 (número abstrato).

O quociente 9 indica que 18 metros contém 9 vezes 2 metros.

IV) *O dividendo e o divisor são números concretos de espécies diferentes.*

Nesse caso a divisão, sendo possível, dará um quociente concreto que não será da espécie do dividendo e que poderá tambem não ser da espécie do divisor.

Exemplo: Um automóvel percorreu 320 quilometros em 8 horas. Qual foi a velocidade desse automóvel?

Dividamos 320 quilometros por 8 horas:

320 km ÷ 8 h = 40 km por hora.

O quociente, nesse caso, é dado em *"quilometros por hora"*.

Exercícios.

14 — De quantas unidades podemos aumentar ou diminuir o dividendo — conservando o mesmo divisor — sem que o quociente se altere?

15 — Achar dois números inteiros que têm a soma 237 e o quociente aproximado 12 e que, na divisão, apresentam o maior resto possível.

16 — A soma de dois números é 5698; o maior vale 6 vezes o menor. Determinar esses números.

Leitura.

A MATEMÁTICA ENTRE OS FENÍCIOS

(HOEFFER)

Em razão de seu tino mercantil, tornado notório de toda a antiguidade, passaram os Fenícios por ser os inventores da Aritmética. O que ha de certo é que "êsses velhacos, êsses espoliadores que praticam tantos atos de mesquinharia" (*) deviam saber, sobretudo, calcular bem. Mas até que ponto contribuiram para o progresso da matemática? Eis o que, em absoluto, ignoramos. Limitados, embora, em sua cultura intelectual nem por isso deixaram os Fenicios de ser, por seu comércio maritimo, os intermediarios mais ativos das relações que se estabeleceram entre os póvos do litoral do Antigo Continente, desde o Oceano Índico e o Mediterrâneo, até o Mar Báltico. Acredita Boeck que eles se servissem dos pesos e medidas empregados em Babilonia; conheciam, ainda, o uso de moedas cunhadas, o que os Egípcios, por menos verosímil que o pareça, desconheciam. "Representamos os Indianos — diz o pae dos geógrafos — como investigadores laboriosos, na astronomia e na ciência dos números, ciências em que se prepararam socorridos pela arte da numeração e pelas navegações noturnas, necessárias ambas ao comércio e aos empreendimentos marítimos" (**).

Mas o que principalmente caracteriza os Fenícios é o terem sido os primeiros a introduzir em todas as nações com que tinham relações comerciais, a escrita alfabética, de que se vinham, por muito tempo, servindo.

(*) Era assim que Homéro se referia aos Fenícios.
(**) Strabão — XVI.

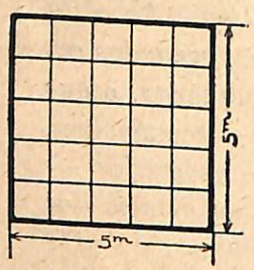
CAPÍTULO VI

POTÊNCIA DE UM NÚMERO

1 — Noções preliminares — Quadrado. (*)

Consideremos um quadrado cujo lado mede 5 metros, por exemplo.

Podemos decompor êsse quadrado, como indica a figura em 25 quadrados de 1 metro de lado, isto é, em 25 *metros quadrados.*



A área do quadrado será:

$$5^m \times 5^m = 25^{m2}$$

Em geral, sendo l o lado de um quadrado a área dêsse quadrado será $l \times l$.

O produto $l \times l$, de dois fatores iguais a l, *denomina-se segunda potência* de l.

A 2.ª potência de um número l exprime, portanto, a área do quadrado de lado l. A 2.ª potência de um número é, por isso, denominada *quadrado* desse número.

2 — Quadrado de um número.

Denomina-se *quadrado* de um número à um produto de dois fatores iguais a êsse número.

Assim 8×8 ou 64 é o quadrado de 8.

(*) As primeiras noções sobre o quadrado já foram dados no curso primário e fazem parte do programa da admissão.

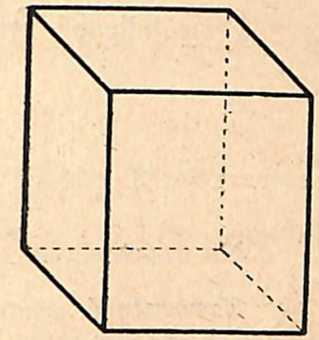
3 — Volume de um cubo.

Consideremos um cubo cuja aresta mede por exemplo, 5 metros.

Podemos decompor êsse cubo em 125 cubos de 1 metro de aresta, isto é, em 125 *metros cúbicos.*

O volume do cubo de 5 metros de aresta será:

$$5m \times 5m \times 5m = 125m^3.$$



Em geral: sendo l a aresta de um cubo o volume dêsse cubo será $l \times l \times l$.

O produto $l \times l \times l$ de três fatores iguais a l, denomina-se *terceira potência* de l.

A *terceira potência* de um número l exprime, portanto, o volume de um *cubo* de lado l. A 3.ª potência de um número é por isso denominada *cubo* dêsse número.

4 — Cubo de um número.

Denomina-se *cubo* de um número a um produto de três fatores iguais a êsse número.

Assim $7 \times 7 \times 7$ ou 343 é o cubo de 7.

5 — Potencia de um número.

De um modo geral, partindo da noção que acabamos de apresentar para o quadrado e para o cubo, é fácil concluir a seguinte definição:

Chama-se *potência* de um número a um produto de fatores iguais a êsse número.

Por exemplo: $7 \times 7 \times 7 \times 7$ é uma potência de 7.

Quando os fatores são todos iguais o produto é denominado *produto-potência*.

6 — Grau de uma potência — Expoente.

O número de fatores que figuram num produto-potência é o *grau* dessa potência.

Assim: $8 \times 8 \times 8$ é uma potência de 8 do 3.º grau.

Para indicar o grau de uma potência usa-se o *expoente*:

$$8 \times 8 \times 8$$

escreve-se: 8^4 e lê-se: elevado a 4.

Na expressão a^3 o número 3 é o expoente.

Expoente é, portanto, um número que indica o grau de potência de outro.

O expoente é escrito à direita do número, um pouco acima e menor.

7 — Base de uma potência.

Um número, que é elevado a uma certa potência, é denominado *base* dessa potência.

Na potência 3^5 o número 3 é a base e 5 o expoente.

8 — Observação.

Convém notar que a *primeira potência* de um número por analogia, é o proprio número.

Quando um número não está afetado de expoente subentende-se que êsse número tem por expoente 1.

Por convenção *m* será a primeira potência de *m*.

9 — Potências de 1.

Qualquer potência de 1 é igual a 1.

Exemplo: $1^6 = 1$.

Podemos escrever, de um modo geral: $1^m = 1$.

10 — Potência de 10.

Uma potência de 10 é obtida escrevendo-se a unidade seguida de tantos zeros quantos forem as unidades contidas no expoente dessa potência.

Assim: $10^3 = 1000$
$10^4 = 10000$

11 — Potenciação.

Potenciação é a operação pela qual elevamos um número a uma potência qualquer.

A potenciação não é uma operação comutativa (*).

12 — Potência de um produto.

Para se elevar um produto a uma certa potência basta elevar cada fator a essa potência.

Exemplo:

$$(8 \times 7 \times 10)^2 = 8^2 \times 7^2 \times 10^2$$

Em geral:

$$(a \times b \times c)^m = a^m \times b^m \times c^m$$

13 — Produto de potências da mesma base.

Para multíplicar potências da mesma base somam-se os expoentes e dá-se para expoente da base a soma obtida.

(*) A potência a^m nem sempre é igual a m^a.

Seja multiplicar 4^2 por 4^3; temos:

$$4^2 \times 4^3$$

O 1.° fator 4^2 será 4×4; o 2.° fator 4^3 será $4 \times 4 \times 4$.

Podemos escrever:

$$4^2 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4.$$

O 2.° membro dessa igualdade é a quinta potência de 4, isto é, 4^5. Logo:

$$4^2 \times 4^3 = 4^5.$$

Do mesmo modo:

$$a^2 \times a^3 = a^5.$$

Em geral:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

14 — Exercício I.

Efetuar o produto $x^3 \times x^2 \times x^4$.

Resolução:

A soma dos expoentes é $3 + 2 + 4$ ou 9.

Temos, portanto:

$$x^3 \times x^2 \times x^4 = x^9.$$

15 — Exercício II.

Efetuar os produtos $a^3 \times a \times a^2$.

Resolução:

$$a^3 \times a \times a^2 = a^6$$

16 — Exercício III.

Elevar ao quadrado as expressões:

$$5a \quad \text{e} \quad 3bx$$

Resolução:

$$(5a)^2 = 25a^2$$
$$(3bx)^2 = 9b^2x^2$$

17 — Observação.

Convem não confundir a^2 com $2a$.

A expressão a^2 indica a 2.ª potência de a, isto é, $a \times a$.

A expressão 2.ª indica que o número a foi tomado duas vezes como parcela.

$$a^2 = a \times a$$
$$2a = a + a$$

18 — Elevação de uma potência a outra potência.

Para elevarmos uma potência a outra potência multiplicamos o expoente da potência dada pelo expoente a que se quer elevar a potência dada.

Exemplo: $(5^3)^4 = 5^{12}$.

$(a^2)^3 = a^6$.

19 — Exercicio IV.

Elevar ao quadrado o produto

$$5^3 \times 7^4 \times 11$$

Resolução:

$$(5^3 \times 7^4 \times 11)^2 = 5^6 \times 7^8 \times 11^2.$$

20 — **Exercício V.**

Efetuar $(5^2 \times 7^3 \times 4)^3$.

Resolução:

$$(5^2 \times 7^3 \times 4)^3 = 5^6 \times 7^9 \times 4^3.$$

21 — **Divisão de potências da mesma base.**

Seja dividir, por exemplo, 7^5 por 7^2.

Sabemos que 7^3 multiplicado por 7^2 dá um produto igual a 7^5. Logo 7^5 dividido por 7^2 dá um quociente igual a 7^3.

Temos: $\dfrac{7^5}{7^2} = 7^3.$

Do mesmo modo: $\dfrac{a^8}{a^3} = a^5.$

Conclusão:

Para dividir potências da mesma base basta tomar para quociente a base comum elevada à diferença entre os expoentes.

Em geral:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

22 — **Exercício VI.**

Dividir $5^2 \times 7^5 \times 11$ por 7^2.

Resolução:

$$\frac{5^2 \times 7^5 \times 11}{7^2} = 5^2 \times 7^3 \times 11$$

Dividimos o 2.° fator 7^5 por 7^2.

23 — **Exercício VII.**

Dividir $8a^5b^2$ *por* a^4.

Resolução:

$$\frac{8a^5b^2}{a^4} = 8ab^2.$$

Exercícios.

17 — Elevar ao cubo o produto $2^3 \times 5 \times 7$.

18 — Dividir $2^7 \times 5^6 \times 7^4$ por $2^5 \times 5^6 \times 7^3$.

19 — Dividir $12a^5b^2$ por $4ab$.

Leitura.

PITÁGORAS

Quem procura estudar com cuidado a biografia de Pitágoras dificilmente poderá distinguir a parte puramente lendária daquela que corresponde, com exatidão, à verdade histórica.

Acredita-se que Pitágoras tenha nascido seis séculos, mais ou menos, antes de Cristo, na ilha de Samos, na Grécia. Viajou durante muitos anos tendo percorrido a Grécia, o Egito, a Asia-Menor, a Caldéa e a India.

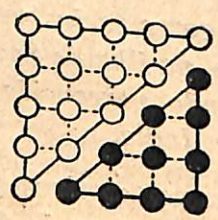
Obrigado a exilar-se, por motivos politicos, foi fundar em Crótona, no sul da Itália, uma escola filosofica que se tornou *notável pelo grande prestigio que alcançou. Os seus numerosos discípulos, que viviam sujeitos a uma disciplina severa, eram denominados os "pitagóricos" e pertenciam, em geral, às classes mais nobres e elevadas do país.*

Um novo discípulo só podia ser admitido à comunidade pitagórica se jurasse não revelar aos estranhos os segredos e os misterios da Escola.

Eram tantas as lendas inventadas em relação a Pitágoras e tão grande era o respeito que lhe tributavam os discípulos, que o filosofo aparecia aos olhos da multidão ignorante e crédula como um verdadeiro deus filho de Apolo.

— O mestre — diziam os mais entusiastas — é prodigiosamente belo com sua longa cabeleira e sua coxa de ouro!

Pitágoras foi um grande reformador moralista e um notável filósofo, e seu sistema moral-filósofico era firmado em princípios matemáticos.



CAPíTULO VII

MÚLTIPLO E DIVISOR. DIVISIBILIDADE

1 — Múltiplo e divisor — Fator — Sub-múltiplo.

Múltiplo de um número é o produto desse numero por um número inteiro qualquer. Assim, os múltiplos de 8, por exemplo, são:

$$8 \times 0;\ 8 \times 1;\ 8 \times 2;\ 8 \times 3;\ 8 \times 4, \text{ etc.}$$

Divisor de um número é outro número que divide exatamente o número dado.

Assim: 80 é um múltiplo de 4; 4 é um divisor de 80.

Diz-se tambem que 4 é um *fator* ou *sub-múltiplo* de 80.

2 — Observação.

Quando nos referimos a números concretos costumamos dizer *parte aliquota* em vez de divisor. Assim o minuto é uma parte aliquota da hora; o decímetro é uma parte aliquota do metro, etc.

3 — Número primo.

Dizemos que um número é *primo* quando só é divisivel por si e pela unidade.

Exemplo: 17 é um número primo.

Com exceção de 1 todos os outros números primos só tem 2 divisores.

4 — Divisor comum — Números primos entre si.

Divisor comum de dois ou mais números é um número que divide exatamente os números dados.

Os números 12, 20 e 44, por exemplo, têm para divisor comum o número 4.

Quando dois números só admitem para divisor comum a unidade são chamados *primos entre si.*

18 e 35 são primos entre si.

5 — Observação.

Convém notar que dois números consecutivos são sempre primos entre si.

Exemplo: 74 e 75.

6 — Divisibilidade.

Em certos casos — conforme exigem as necessidades da prática — precisamos reconhecer, sem efetuar a divisão, se um determinado número é ou não divisível por outro.

O presente capítulo tem precisamente por objeto o estudo das condições ou regras que nos permitem dizer se um número é ou não divisor de outro, e não o sendo determinar o resto.

O enunciado de uma dessas condições constitue um *caráter de divisibilidade.*

Ha uma infinidade de caractéres de divisibilidade; poucos, entretanto, apresentam vantagens quando empregados na prática.

7 — Divisibilidade por 10.

Um número é divisìvel por 10 quando termina em zero.

Assim 4370 é divisìvel por 10.

O resto da divisão de um número por 10 é igual ao número formado pelo algarismo das unidades.

Exemplo: O número 3419 dividido por 10 deixa para resto 9.

8 — Divisibilidade pelas potências de 10.

Um número é divisivel por uma potência de 10 quando terminar à direita por tantos zeros quantas forem as unidades contidas no expoente dessa potência.

Exemplo: o número 38000 é divisível por 10^3. O número 1700 é divisìvel por 10^2. Um número é divisível por 10^m quando terminar, à direita, por *m* ou mais zeros.

O resto da divisão de um número por 10^m é igual ao número formado pelos m *últimos algarismos da direita.*

O número 4516 dividido por 10^3, por exemplo, deixa para resto 516.

Analogamente podemos determinar o resto da divisão de um número qualquer por 10^4, 10^5, etc.

9 — Divisibilidade por 2.

Um número é divisìvel por 2 quando terminar em 0, 2, 4, 6 e 8.

Exemplo: o número 7356 é divisìvel por 2.

Os números divisíveis por 2 são chamados *pares* e os não divisìveis são chamados *impares*

Os números ímpares, quando divididos por 2, deixam para resto 1.

Assim 6407 dividido por 2 deixa para resto 1.

10 — Divisibilidade por 4.

Um número é divisìvel por 4 quando os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisìvel por 4.

Exemplo: o número 34512 é divisível por 4 porque os dois últimos algarismos da direita formam o número 12 que é divisível por 4.

O resto da divisão de um número por 4 é obtido dividindo-se por 4 o número formado pelos dois últimos algarismos da direita.

Exemplo: o número 5435 dividido por 4 deixa para resto 3, pois é este o resto que deixa 35 quando dividido por 4.

11 — Divisibilidade por 8.

Um número é divisível por 8 quando os três últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 8.

Exemplo: o número 98528 é divisível por 8 porque os três últimos algarismos à direita formam o número 528 que é múltiplo de 8.

O resto da divisão de um número por 8 é o mesmo que o resto da divisão por 8 do número formado pelos três últimos algarismos à direita.

O número 73411 não é divisível por 8 e deixa para resto 3, porque 411 dividido por 8 deixa para resto 3.

12 — Divisibilidade por 5.

Um número é divisível por 5 quando tiver para algarismo das unidades 0 ou 5.

Assim os números 4375 e 4380 são divisíveis por 5.

O resto da divisão de um número por 5 é igual ao algarismo das unidades sempre que êsse algarismo fôr menor do que 5.

Quando o algarismo das unidades for maior do que 5 o resto será igual à diferença entre êsse algarismo e o divisor 5.

Exemplo: os números 4713 e 7439 divididos por 5 deixam respetivamente para restos 3 e 4.

13 — Divisibilidade por 25.

Um número é divisível por 25 quando os dois últimos algarismos da direita formarem um número divisível por 25.

Exemplos: os números 4100 e 3475 são divisíveis por 25.

O resto da divisão de um número por 25 é o mesmo que o resto da divisão por 25 do número formado pelos dois últimos algarismos à direita.

Um exemplo: o número 3729 dividido por 25 deixa para resto 4, porque 29 dividido por 25 deixa para resto 4.

14 — Divisibilidade por 3.

Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos fôr divisível por 3.

O número 8124 é divisível por 3 porque a soma de seus algarismos é 15, que um múltiplo de 3.

O resto da divisão de um número por 3 é o mesmo que o resto da divisão por 3 da soma dos algarismos desse número.

Exemplo: o número 4177 dividido por 3 deixa para resto 1, porque a soma de seus algarismos (19) dividida por 3 deixa para resto 1.

15 — Divisibilidade por 9.

Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos fôr divisível por 9.

O número 7263, por exemplo, é divisível por 9, porque a soma de seus algarismos é igual a 18.

O resto da divisão de um número por 9 é o mesmo que o resto da divisão por 9 da soma dos algarismos desse número.

Exemplo: o número 3218 dividido por 9 deixa para resto 5, porque a soma de seus algarismos (14) dividida por 9 deixa para resto 5.

16 — A regra dos noves fóra.

A divisibilidade por 9 admite uma simplificação de grande utilidade prática, denominada *"regra dos noves fóra"*.

Sempre que a soma de dois algarismos fôr maior que 9 junta-se apenas ao algarismo seguinte do número a diferença entre essa soma e 9.

Exemplo: seja determinar o resto da divisão do número 67874 por 9.

Operamos do seguinte modo: 6 mais 7, 13 noves fora 4; 4 mais 8, 12 noves fóra 3; 3 mais 7, 10 noves fóra 1; mais 4, 5.

O resto da divisão do número 67874 por 9 é 5.

A regra dos *noves fora* pode ser feita indiferentemente da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.

17 — Divisibilidade por 11.

Dado um número qualquer os algarismos de ordem ímpar são a contar da direita para a esquerda: o primeiro, terceiro, quinto, sétimo, etc., e os de ordem par são, a contar no mesmo sentido: o segundo, quarto, sexto, etc.

No exemplo: no número 39586 os algarismos de ordem ímpar são 6 5 e 3; e os de ordem par 8 e 9.

Um número é divisível por 11 *quando a soma dos algarismos de ordem ímpar menos a soma dos algarismos de ordem par fôr 0, 11 ou qualquer outro múltiplo de* 11.

Exemplo: o número 72853 é divisível por 11.

Com efeito.

A soma dos algarismos de ordem ímpar é $3 \times 8 + 7$, isto é, 18.

A soma dos algarismos de ordem par é $5 + 2 = 7$.

A diferença entre a primeira soma e a segunda nos dá:

$$18 - 7 = 11$$

Logo o número dado é divisível por 11.

18 — Resto da divisão de um número por 11.

O resto da divisão de um número por 11 é o mesmo que obtemos dividindo por 11 *a diferença entre a soma dos algarismos de ordem ímpar e a soma dos algarismos de ordem par.*

Exemplo: seja determinar o resto da divisão do número 32918 por 11.

A soma dos algarismos de ordem ímpar é $8 + 9 + 3 = 20$.

A soma dos algarismos de ordem par será $1 + 2 = 3$.

A diferença $20 - 3$ é 17.

17 dividido por 11 deixa para resto 6, logo o número dado, quando dividido por 11, deixa para resto 6.

19 — Observação.

Na divisibilidade por 11 pode acontecer que a soma dos algarismos de ordem ímpar seja menor que a soma dos algarismos de ordem par.

Nesse caso junta-se à soma dos algarismos de ordem ímpar um múltiplo de 11 que a faça igual ou maior que a soma dos algarismos de ordem par, tornando assim possível a subtração.

20 — Exercício I.

Achar o resto da divisão do número 619482 por 11.

Resolução:

A soma dos algarismos de ordem ímpar é:

$$2 + 4 + 1 = 7.$$

A soma dos algarismos de ordem par é:

$$8 + 9 + 6 = 23.$$

Juntando 22 à primeira soma e do resultado subtraindo a segunda soma, temos:

$$29 - 23 = 6.$$

O resto da divisão do número dado por 11 é, portanto, 6.

21 — Exercício II.

Determinar o resto da divisão do número 809281 por 11.

Resolução:

1.ª soma: $1 + 2 + 0 = 3$.

2.ª soma: $8 + 9 + 8 = 25$.

Juntando 22 à primeira soma, e efetuando a subtração $25 - 25 = 0$.

O número dado é divisível por 11.

Exercícios.

20 — Achar o resto da divisão do número 37035 por 9 e por 11.

21 — Escrever um número de 4 algarismos que seja múltiplo de 8, de 9 e de 11.

22 — Um número tem 5 algarismos e é divisível, ao mesmo tempo, 8, 9, 10 e 11. Achar êsse número.

Leitura.

A ORIGEM DOS NÚMEROS (*)

(ANTENOR NASCENTES)

O vocábulo um *se deriva, em sua origem mais remota, de um tema pronominal demonstrativo.* Um *significava primitivamente* êste, *justamente* êste, *nada senão* êste. *Emancipou-se depois do gesto, às vezes quasi imperceptivel, que o acompanhava, como ainda hoje acompanha as expressões* isto ou aquilo, um ou outro.

(*) Escrito especialmente para êste livro.

A origem dos números de 2 a 10 é obscura. A representação dos objetos concretos que foi necessariamente compreendida nos conceitos numéricos muito cedo se perdeu.

Houve primeiro substantivos abstratos numéricos: 10 quiz dizer uma dezena; 20 duas dezenas, *etc.;* 100 uma dezena de décadas. *As centenas tiveram uma formação semelhante 200 quiz dizer* duas centenas; 300 três centenas *e assim por diante.*

De um feminino que significava um milhar provém o número 1000.

Milhão *é de formação italiana e data do século XV.*

Os números de 11 a 19, de 21 a 29 e muitos outros, são compostos copulativos: 11, por exemplo, quiz dizer um dez; 12, dois dez; 13, três dez *e assim sucessivamente. O vocábulo 16 era na lingua mãi do português — o latim —* sedecim (*seis dez*), *mas ao passo que as línguas irmãs da nossa, o francês e o italiano, deste vocábulo derivam respectivamente* seize *e* sedici, *no nosso idioma, aparece uma palavra de criação própria* dezesseis.

Em epocas antiquissimas em vez de 18, 19, 28, 29, etc., dizia-se 20 menos 2, 20 menos 1, 30 menos 2, 30 menos 1, etc., de que ainda restam vestígios no latim. Êsse sistema foi abandonado e hoje dizemos dezoito, dezenove, vinte e oito, vinte e nove, etc.

Nosso sistema de numeração provém de contas feitas com os dedos das mãos e dos pés. Prova eloquente disto se acha em significar a palavra que deu 20, as duas décadas, a das mãos e a dos pés. No quatre-vingts (80) *francês está outro vestígio.*

O uso do calçado talvez fizesse levar só em conta as décadas das mãos; daí o sistema decimal que é universalmente adotado.

O ordinal de 1, primeiro, *é um superlativo que significa o que se acha na frente, o mais adiantado.*

Segundo *quer dizer o que se segue.*

Quarto, quinto, sexto *traem desinencias de antigos superlativos. Outro tanto* terço *de onde vem* terceiro. *Os demais revelam tambem superlativos:* sétimo, décimo, vigésimo. Nono *teve contrações que mascaram sua formação.*

Oitavo *é de formação misteriosa.*

Os multiplicativos revelam um elemento formativo plo, *de uma antiga palavra que significava* pancada. *As pancadas marcavam o número de vezes em que se repetia o número:* duplo *isto é, duas pancadas, duas vezes;* triplo, *três pancadas, três vezes.*

A palavra zero *vem do árabe* sifr, *vazio, que é tradução do sanscrito* sunya.

O vocábulo sifr *deu propriamente* cifra *em português, isto é, sinal numérico, algarismo. A forma* zero *vem dos vocábulos* zefro *e* zefiro, *sendo esta última encontrada na obra de Leonardo Pisano, geômetra notável que viveu no Século XII.*

CAPÍTULO VIII

PROPRIEDADES DOS RESTOS. PROVAS POR UM DIVISOR

1 — I. Propriedade — Resto de uma soma.

Consideremos uma soma de várias parcelas:

$$51881 + 8043 + 33452 = 93376$$

51881	(5)
8043	(2)
33452	(1)
93376	(8)

Determinemos os restos que as parcelas e a soma deixam quando dividida, por 11, por exemplo.

Êsses restos estão escritos à direita e entre parêntesis.

Vemos que nesse caso o resto deixado pela soma é igual à soma dos restos deixados pelas parcelas.

Em geral:

O resto da divisão de uma soma por um número é igual ao resto que deixa, quando dividida por êsse mesmo número, a soma dos restos das parcelas.

Exemplo: Dividamos por *9* as parcelas da seguinte soma:

$$7574 + 1878 + 1052$$

7574	(5)
1878	(6)
1052	(8)
10504	(1)

As parcelas deixam respectivamente para resto 5, 6 e 8, e a soma deixa para resto 1.

Notemos, porém, que a soma dos restos das parcelas $5 + 6 + 8$ é 19 e deixa, quando dividida por *9* o resto igual a *1*.

2 — Observação.

Da propriedade que acabamos de apresentar podemos concluir os seguintes princípios:

I) *Quando um número divide todas as parcelas de uma soma divide tambem a soma.*

Exemplo: O número 4 divide todas as parcelas da soma

$$12 + 32 + 48$$

logo dividirá tambem a soma.

II) *Quando um número divide todas as parcelas de uma soma exceto uma, não dividirá a soma.*

Exemplo: Na soma

$$30 + 45 + 105 + 28$$

o número 5 divide todas as parcelas exceto a última (28) logo não divide a soma.

3 — II. Propriedade — Resto de uma diferença.

Vamos supor que efetuamos uma subtração:

$$85315 - 2811$$

85315	(10)
2811	(6)
82504	(4)

O minuendo dividido por 11, por exemplo, deixa para resto 10.

O subtraendo, para o mesmo divisor deixa para resto 6 e a diferença nos dá o resto 4.

Como a diferença somada ao subtraendo dá o minuendo poderemos concluir o seguinte princípio:

O resto deixado pela diferença, aumentado do resto deixado pelo subtraendo, é igual ao resto deixado pelo minuendo.

E' evidente, portanto, que quando um número divide dois outros divide tambem a diferença entre eles.

4 — III. Propriedade — Resto de um produto.

Consideremos um produto qualquer.

$$6734 \times 27$$

6734	(2)
27	(5)
47318	
13468	
181818	(10)

Tomemos, como divisor, o número 11, por exemplo.

E' fácil verificar que o resto deixado pelo produto é igual ao resto deixado pelo produto dos restos dos fatores.

5 — IV. Propriedade — Resto de um quociente.

Vamos supor que efetuamos uma certa divisão aproximada.

$$\begin{array}{r|l} 37344 & 233 \\ 1404 & \overline{} \\ 64 & 160 \end{array}$$

Apliquemos aos quatro elementos, dividendo, divisor, quociente e resto, o caráter de divisibilidade por 11, por exemplo:

		Restos
dividendo	37344................	(10)
divisor	233................	(2)
quociente	160................	(6)
resto	64................	(9)

Temos, portanto, entre os quatro restos obtidos, a seguinte relação:

$$\underset{\text{Resto do divisor}}{(2)} \times \underset{\text{Resto do quociente}}{(6)} + \underset{\text{Resto do resto}}{(9)} = \underset{\text{Resto do dividendo}}{(10)}$$

6 — Prova por um divisor.

Efetuada uma das quatro operações podemos verificar se os diversos restos — em relação a um certo divisor — satisfazem à propriedade correspondente a essa operação.

No caso affirmativo *é provavel* que a operação esteja certa.

Essa prova tirada com auxílio de um divisor é denominada *prova por um divisor*.

7 — Observação.

E' evidente que os restos podem satisfazer à condição enunciada muito embora a operação não esteja certa.

5131	(1)
1622	(2)
2092	(4)
1870	(7)

Exemplo: Na adição que figura ao lado o resto, por 9, da soma, é igual à soma dos restos deixados pelas parcelas e, no entanto, a operação está visivelmente errada.

8 — Escolha de um divisor.

Na prova por um divisor não podemos tomar para divisor os números 2, 4, 5, 8 e 10, porque os caracteres de divisibilidade por êsses divisores não afetam todos os algarismos de um número dado qualquer.

O divisor 3 tambem não é indicado e isso por um motivo muito simples. Na divisão por 3 só podemos encontrar três restos diferentes: 0, 1 e 2. E' muito provavel que haja coincidência de resto — dado o número reduzido destes — embora a operação esteja errada.

De tais considerações podemos inferir que na prova por um divisor só devem ser utilizados os divisores 9 e 11 (*).

(*) Na prática só é empregado, para as provas das diversas operações, o divisor *9*.

9 — Prova por 9 da adição.

Seja tirar a prova por 9 de uma adição.

$$\begin{array}{r} 742 \\ 375 \\ 61 \\ \hline 1178 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 8 \\ \hline 8 \end{array}$$

Apliquemos às parcelas, como se estas formassem um só número a regra dos noves fora.

Obtemos para resultado 8. Êste resto 8 escrevêmo-lo à direita sôbre um pequeno traço.

Aplicamos, em seguida, à soma, a mesma regra dos noves fora e obtemos para resultado 8.

Êsse resultado é escrito à direita sob o traço.

Os dois restos — o das parcelas em conjunto e o da soma — sendo iguais é provavel que a operação esteja certa.

10 — Prova por 9 da subtração.

Seja, por exemplo, tirar a prova por 9 da subtração.

$$\begin{array}{r} 538 \\ 714 \\ \hline 176 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \\ \hline 3 \end{array}$$

Applicamos ao subtraendo e à diferença conjuntamente a regra dos noves fora. Obtemos para resultado 3 — que é escrito à direita sôbre um pequeno traço horizontal.

Aplicando em seguida ao minuendo a mesma regra obtemos para resto 3.

O fato de serem iguais êsses dois resultados indica que a operação está provavelmente certa.

11 — Prova por 9 da multiplicação.

Para verificarmos a exatidão de uma multiplicação pela prova por 9, tiramos os noves do multiplicando e, separadamente, do multiplicador; multiplicamos êsses dois resultados e do produto obtido tiramos os noves. Devemos encontrar um resto igual ao que obtemos tirando os noves do produto dos dois números dados.

Os restos são dispostos como indica a figura ao lado.

Resto do multiplicando	Resto do produto dos restos
Resto do multiplicador	Resto do produto

Seja, por exemplo, tirar a prova dos 9 da multiplicação:

$$\begin{array}{r} 345 \\ 32 \\ \hline 690 \\ 1035 \\ \hline 11040 \end{array}$$

Resto do multiplicando = 3
Resto do multiplicador = 5

Resto do produto dos restos = 6.

Resto do produto = 6.

Os resultados obtidos dispômo-los do seguinte modo:

$$\begin{array}{c|c} 3 & 6 \\ \hline 5 & 6 \end{array}$$

12 — Prova por 9 da divisão.

Para verificarmos a exatidão de uma divisão pela prova por 9 tiramos os noves do quociente e, separadamente, do divisor; multiplicamos êsses dois restos, tiramos os noves do produto obtido e ao resultado juntamos o resto da divisão; da soma encontrada tiramos os noves e devemos obter um resto igual ao que obtemos tirando os noves ao dividendo.

Seja, por exemplo, tirar a prova por 9 da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 728 & 25 \\ 228 & \overline{} \\ 3 & 29 \end{array}$$

Tirando os noves do quociente encontramos 2; êsse resultado escrevêmo-lo no ângulo superior à esquerda de uma cruz.

Tirando os noves do divisor encontramos 7, resultado que escrevemos no ângulo inferior à esquerda da referida cruz.

$$\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 7 & 0 \end{array}$$

Multiplicamos êsses dois restos, 2 e 7, e do produto 14 tiramos os noves; o resto obtido 5 juntamos ao resto 3 da divisão e da soma encontrada tiramos os noves; encontramos 8, resultado que escrevemos no ângulo superior à direita da cruz.

Tiramos, por último, os noves ao dividendo; o resultado obtido 8 escrevemo-lo no ângulo inferior à direita da cruz. Os dois números escritos à direita da cruz sendo iguais a operação está provavelmente certa.

13 — Prova por 11.

Do mesmo modo que tiramos a prova das diversas operações — empregando o divisor — 9 podemos aplicar o divisor 11.

A prova dos 11 não apresenta vantagem alguma de ordem prática.

14 — Exercício I.

Determinar o resto por 11 *do produto* 3951×8043 *sem efetuar a operação indicada.*

Resolução:

O 1.º fator dividido por 11 deixa para resto *2;* o segundo fator deixa para resto *2.*

O produto deixará para resto 2×2, isto é, 4.

15 — Exercício II.

Achar o resto por 9 *da seguinte expressão:*

$$804 \times 301 + 502 \times 1094$$

sem efetuar as operações indicadas.

Resolução:

Determinamos os restos por 9 dos números que figuram na expressão e substituimos os números pelos respectivos restos:

$$3 \times 4 + 7 \times 5$$

Efetuando as multiplicações indicadas, obtemos:

$$12 + 35$$

A soma desses números será 47, que dividido por 9 deixa para resto 2.

Conclusão: A expressão dada dividida por 9 deixa para resto 2.

16 — Exercício III.

Achar o resto, por 11, da seguinte expressão:

$$508^3 \times 619 + 623^2.$$

Resolução:

Substituimos os números pelos respectivos restos por 11; vem:

$$2^3 \times 3 + 7^2.$$

Efetuando as potenciações indicadas: $8 \times 3 + 49$ e o produto, temos: $24 + 49$.

Determinando os restos por 11 de cada uma dessas parcelas, obtemos: $2 + 5$.

O resto procurado será igual a 7.

Exercícios.

23 — Multiplicar 3492 por 731; tirar as provas por 9 e por 11.

24 — Dividir 93426 por 314; tirar as provas por 9 e por 11.

25 — Calcular os restos por 4 e por 5 do produto $803 \times 506 \times 711$.

Leitura.

QUADRADOS MÁGICOS

Vamos supor um quadrado dividido em um certo número de quadrados iguais — os quais denominaremos "casas". Em cada uma dessas casas colocamos um número inteiro da série natural: 1, 2, 3, 4... etc.

A figura obtida será um quadrado mágico quando pela soma dos números de uma coluna ou de uma linha obtivermos sempre o mesmo resultado. Esse resultado invariavel é denominado constante do quadrado mágico.

Num quadrado mágico os números devem ser todos diferentes, e os que figuram sobre uma diagonal da figura devem ter a soma igual à constante.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Apresentamos, na figura ao lado, um quadrado mágico de 9 casas com a constante igual a 15.

A origem dos quadrados mágicos é antiquissima e, talvez por isso, desconhecida.

É bem verdade que os antigos atribuiam a certos números propriedades "misteriosas" ou cabalisticas; é provavel, portanto, que dêssem tambem grande importância a essas figuras aritméticas nas quais os números aparecem numa disposição bem singular.

Os orientais — levados por uma superstição que só a profunda ignorância das cousas poderia inspirar — acreditavam que os quadrados mágicos eram amuletos e que serviam de preservativos para certas molestias. E havia — embora pareça incrivel — quem usasse no pescoço, preso por uma pequena corrente, para evitar o contagio da peste, um quadrado mágico de prata.

O famoso pintor Alberto Durer, de Nuremberg, na sua célebre gravura intitulada "Melancolia" fez aparecer um quadrado mágico de 9 casas.

Quando um quadrado mágico apresenta certa propriedade particular, como por exemplo, a de ser decomponivel em varios quadrados mágicos, é denominado quadrado hiper - mágico. *Rouse-Ball, no II volume das suas "Recreações matemáticas e problemas" bastante curioso: um quadrado hiper - mágico, com 81 casas, formado por 9 quadrados mágicos.*

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

A denominação de "quadrado diabolico" *foi dada por alguns geômetras do quadrado hiper-mágico que não perde a propriedade mágica da figura, quando transportamos uma coluna extrema (ou uma linha) de um lado para o outro.*

Vemos, acima, um quadrado diabólico com 16 casas, com a constante igual a 34.

Convem notar, nesse quadrado, que se transportarmos a 1.ª coluna da esquerda para a direita o quadrado continùa mágico, com a mesma constante. Em relação ás linhas podemos observar propriedade análoga. Feita uma dessas transposições de linha ou de coluna, vamos obter um novo quadrado diabólico.

Os matemáticos francêses — entre os quais devemos destacar o grande Fermat — fizeram estudos admiraveis sobre as diversas curiosidades numéricas dos quadrados mágicos em todas as suas inúmeras modalidades.

CAPÍTULO IX

MÁXIMO DIVISOR COMUM

1 — Definição.

Ao maior número que divide dois ou mais números dados chamamos *máximo divisor comun* desses números.

Assim os números 72 e 60 têm vários divisores comuns que são:

1, 2, 3, 4, 6 e 12

O maior desses divisores comuns — nesse caso o 12 — será o máximo divisor comum dos numeros dados.

2 — Abreviatura do máximo divisor comum.

O máximo divisor comum de dois números é indicado pela abreviatura *m.d.c.* que se lê: máximo divisor comum.

Assim para indicar que 8 é o *m.d c.* dos números 56 e 192 escrevemos:

m.d.c. (56 e 192) = 8

Lê-se: máximo divisor comun de 56 e 192 é igual a 8.

3 — Caso em que o m.d.c. é a unidade.

E' evidente que quando dois números são primos entre si o *m.d.c.* é a unidade.

Assim: *m.d.c.* (8 e 15) = 1.

4 — Determinação do m.d.c.

Na determinação do *m.d.c.* de dois números ha dois casos a considerar:

1.º *caso* — o menor dos numeros é divisor do maior.
2.º *caso* — o menor dos numeros não é divisor do maior.
No primeiro caso o *m.d.c.* é o menor dos números.
Exemplo: o *m.d.c.* dos números 48 e 12 é 12
Podemos escrever: *m. d. c.* (48 e 12) = 12.

5 — Cálculo do m.d.c. de dois números.

Seja determinar o *m.d.c.* dos números 78 e 84.

Dividimos o maior pelo menor; se a divisão fôr exata o menor será o *m.d.c.* procurado.

Se a divisão não fôr exata dividiremos o menor pelo resto encontrado.

Essa segunda divisão poderá ser exata; nesse caso o resto, que serviu de divisor, será o *m.d.c.* procurado. No caso contrário dividiremos o primeiro resto pelo segundo e assim por diante.

Para efetuar essa serie de operações empregaremos o seguinte dispositivo:

	1	1	1	1	2
78	48	30	18	12	6 — *m.d.c.*
30	18	12	6	0	

O último divisor empregado será o *m.d.c.*

Esse método é denominado *método das divisões sucessivas*.

Os quocientes obtidos são escritos sôbre um traço e cada divisor é separado do dividendo à direita por uma pequena barra, como ficou acima indicado.

6 — Quocientes incompletos.

Seja procurar, por exemplo, o *m.d.c* dos números 536 e 232.

Aplicando o método das divisões sucessivas vem:

	2	3	4	2
536	232	72	16	8
72	16	8	0	

Os diversos quocientes obtidos 2, 3, 4 e 2 são chamados *quocientes incompletos*.

7 — Cálculo do m.d.c. de três números.

Achar o *m.d.c.* dos números 96, 156 e 330.

Procuramos o *m.d.c.* dos dois primeiros:

	1	1	1	1	2
156	96	60	36	24	12 = *m.d.c.*
60	36	24	12	0	

Calculamos em seguida o *m.d.c.* do terceiro número 330 e 12 (que é o 1.º *m.d.c.* encontrado).

	27	2
330	12	6 = *m.d.c.*
6	0	

Podemos escrever: *m.d.c.* (96, 156 e 330) = 6.

8 — Observação.

Na determinação do *m.d.c.* de três ou mais números devemos, antes de começar a operação, escrever os números em ordem crescente. Determinamos o *m.d.c.* dos dois menores; em seguida calculamos o *m.d.c.* do terceiro número e o primeiro *m.d.c.* encontrado. E assim por diante.

9 — Propriedades do m.d.c. de dois números.

I Propriedade — Quando multiplicamos ou dividimos os dois números dados por um terceiro o m.d.c. *aparece multiplicado ou dividido por êsse terceiro.*

Temos, por exemplo, *m.d.c.* (96 e 104) = 8.

Se multiplicarmos os dois números por 10, resulta:

m.d.c. (960 e 1040) = 80

Como vemos o *m.d.c.* apareceu multiplicado por 10.

II Propriedade — Quando dividimos os dois números pelo m.d.c. *os quocientes obtidos são primos entre si.*

Essa propriedade é uma consequência da 1.ª.
Sejam os números 72 e 135 cujo *m.d.c.* é 9.
Dividindo os dois números por 9, o *m.d.c.* também aparece dividido por 9, isto é, passa a ser 1:

m.d.c. (8 e 15) = 1.

III Propriedade — Todo número que dividir os números dados dividirá também o m.d.c.

Sejam por exemplo os números 936 e 1440, ambos múltiplos de 9. O *m.d.c.* dêsses números será também um múltiplo de 9.

Com efeito. Se dividirmos os dois números por 9 o seu *m.d.c.* aparece dividido por 9, logo é *divisível* por 9.

IV Propriedade — Quando elevamos os dois números a uma mesma potência o m.d.c. *aparece elevado a essa potência.*

Exemplo: *m.d.c.* (104 e 64) = 8.

Elevamos os dois números ao cubo, vem:

m.d.c. (104^3 e 64^3) = 8^3

10 — Exercício I.

Achar dois números que tenham para m.d.c. 42.

Resolução:

Tomamos dois números quaisquer primos entre si:

15 e 18

e multiplicamos êsses números pelo *m.d.c.* dado 42.

15 × 42 e 16 × 42

Os dois produtos obtidos: 630 e 672 formam uma solução do problema.

E' evidente que o problema proposto apresenta uma infinidade de soluções.

Exercícios.

26 — Calcular o *m.d.c.* dos números 108^2 e 234^2.

27 — O *m.d.c.* de dois números é 28. Qual é o *m.d.c.* da metade desses números?

28 — O *m.d.c.* de dois números é 15; na determinação desse *m.d.c.* foram encontrados os quocientes incompletos: 3, 2, 1 e 2. Achar os números.

29 — Determinar os três menores números pelos quais devemos dividir respectivamente os números 3360, 2352 e 528 para que os quocientes sejam iguais.