

## Leitura.

### A MATEMÁTICA

**E'** indiscutível a alta importância da Matemática na escala dos conhecimentos humanos.

Amoroso Costa, notável geômetra brasileiro, afirmou que “sem a Matemática não podia haver Astronomia; sem os recursos maravilhosos da Astronomia seria completamente impossível a navegação. E a navegação foi o fator máximo do progresso da humanidade”.

O grande filósofo Leibniz dizia: — “A Matemática é a honra do espírito humano”.

E o maior elogio da ciência está contido no célebre pensamento de Santo Agostinho: — “Sem a Matemática não nos seria possível compreender muitas passagens da Santa Escritura”. São Jeronimo, outro vulto notável do catolicismo, afirmou que a “Matemática possui uma força maravilhosa capaz de nos fazer compreender muitos mistérios da nossa Fé”.

Não deixa de ser também significativa a frase famosa atribuída a Napoleão:

“L'avancement, le perfectionnement des Mathématiques sont liés à la prospérité de l'État”.

O naturalista Darwin — numa idade em que a experiência da vida pôde consolidar os ensinamentos dos livros — não ocultava o grande desgosto de não se ter aprofundado nos estudos da Matemática. — “Porque — dizia — os homens que compreendem o cálculo parecem possuir um sentido suplementar”.

É bastante conhecido o belíssimo aforisma de Platão:

“Os números governam o mundo.”

## CAPÍTULO X

### NÚMEROS PRIMOS

#### 1 — Números primos. Definição.

Dizemos que um número é *primo* quando só é divisível por si e pela unidade.

São primos os números: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.

Os números primos formam um conjunto denominado *conjunto dos números primos*.

O conjunto dos números primos é ilimitado isto é, sendo dado um número primo qualquer é sempre possível achar outro número primo maior.

Os números não primos são chamados *múltiplos*.

#### 2 — Taboa dos números primos. Crivo de Eratostenes.

E' possível formarmos uma *Taboa* dos números primos, na qual estejam compreendidos todos os números primos menores do que um número dado.

Empregamos para êsse fim um processo muito simples denominado *crivo de Eratostenes*.

Eis no que consiste o *crivo de Eratostenes*:  
Seja formar uma *Taboa* na qual figurem todos os números primos menores do que 40, por exemplo.

Escrevemos todos os números de 1 até 40, que é o limite superior da Taboa:

1,	2,	3,	<del>4,</del>	<del>5,</del>	<del>6,</del>	<del>7,</del>	<del>8,</del>	<del>9,</del>	<del>10,</del>
<del>11,</del>	<del>12,</del>	<del>13,</del>	<del>14,</del>	<del>15,</del>	<del>16,</del>	<del>17,</del>	<del>18,</del>	<del>19,</del>	<del>20,</del>
<del>21,</del>	<del>22,</del>	<del>23,</del>	<del>24,</del>	<del>25,</del>	<del>26,</del>	<del>27,</del>	<del>28,</del>	<del>29,</del>	<del>30,</del>
<del>31,</del>	<del>32,</del>	<del>33,</del>	<del>34,</del>	<del>35,</del>	<del>36,</del>	<del>37,</del>	<del>38,</del>	<del>39,</del>	<del>40,</del>

A partir de 2, com exceção deste, riscamos todos os números de 2 em 2, a saber: 4, 6, 8, 10, 12... Ficam assim cancelados todos os números pares maiores do que 2.

A partir de 3 riscamos do mesmo modo todos os números de 3 em 3. Os múltiplos de 3, maiores do que 3, ficam portanto cancelados.

É claro que ao número 4 não aplicamos o mesmo artifício, pois os múltiplos de 4 já foram cancelados juntamente com os múltiplos de 2.

A partir de 5 riscamos todos os números de 5 em 5. E assim por diante.

A operação estará terminada quando, depois de uma série de cancelamentos, o primeiro múltiplo a cancelar for maior que o limite superior da Taboa.

Os números não cancelados são primos.

### 3 — Primaridade de um número.

Vejamos como se reconhece se um número dado é ou não primo.

Seja, por exemplo, reconhecer a primaridade do número

Verificamos, desde logo, que esse número não é divisível pelos fatores

2, 3, 5 e 11

cujos caracteres de divisibilidade são facilmente aplicáveis.

Vamos proceder à divisão do número dado pelos outros números primos:

7, 13, 17, 19, etc.

1.ª operação. Dividimos o número por 7; o quociente é 19 e o resto é 3.

2.ª operação. Dividimos o número dado por 13; o quociente é 10 e o resto é 7.

Inútil será, dêste ponto em diante, a nossa pesquisa; como encontramos um quociente (10) menor que o divisor (13) podemos concluir que o número 137 é primo.

$$\begin{array}{r|l} 137 & 7 \\ 67 & \hline 3 & 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 13 \\ 7 & \hline & 10 \end{array}$$

### 5 — Divisores primos.

Um número múltiplo qualquer tem pelo menos um divisor primo compreendido entre ele próprio e a unidade.

Assim 64 tem para divisor primo 2.

O número 60 tem os divisores primos 2, 3 e 5.

### 6 — Decomposição de um número em fatores primos.

Um número múltiplo qualquer é decomponível em fatores primos.

Seja decompor, por exemplo, em fatores primos o número 504.

Como esse número é divisível por 2, temos:

$$504 = 2 \times 252$$

O fator 252 sendo igualmente divisível por 2, vem:

$$504 = 2 \times 2 \times 126$$

Decompomos 126 no produto  $2 \times 63$  e podemos escrever:

$$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 63$$

ou, ainda,  $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 9 \times 7$ .

Finalmente:  $504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ .

Fica assim o número dado decomposto em fatores primos. Com auxílio de expoentes podemos escrever:

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7.$$

Essa decomposição é obtida, na prática, segundo o dispositivo indicado ao lado.

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Dividimos o número dado pelo seu menor fator primo (no caso de 504 é 2).

Escrevemos esse fator à direita do número do qual é separado por uma barra.

O quociente obtido é escrito debaixo do número.

Dividimos o quociente (252) pelo seu menor fator primo (2), obtemos um segundo quociente 126.

E assim procedemos até chegar a um quociente igual a 1.

### 7 — Decomposição abreviada.

Em certos casos podemos abreviar a decomposição de um número em fatores primos.

Seja decompor, por exemplo, 72 em fatores primos.

Mentalmente podemos obter:  $72 = 8 \times 9$ .

Como 8 é o cubo de 2 e 9 é o quadrado de 3, temos:

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

### 8 — Decomposição de um produto em fatores primos.

Seja decompor em fatores primos a expressão

$$84 \times 60 \times 90$$

Decompomos separadamente cada um dos fatores

84	2	60	2	90	2
42	2	30	2	45	3
21	3	15	3	15	3
7	7	5	5	5	5
1		1		1	

O fator primo 2 figura na decomposição cinco vezes; o fator primo 3 figura quatro vezes; o fator 5 aparece duas vezes e o fator 7 só aparece uma vez.

Logo, podemos escrever:

$$84 \times 60 \times 90 = 2^5 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

ficando assim a expressão dada decomposta em fatores primos.

### 9 — Exercício I.

Decompor em fatores primos a expressão

$$84^2 \times 48 \times 56^3 \times 12$$

Resolução:

Decompomos separadamente os fatores que figuram na expressão dada:

84	2	48	2	56	2
42	2	24	2	28	2
21	3	12	2	14	2
7	7	6	2	7	7
1		3	3	1	
		1			

O fator 84 aparece na expressão dada com o expoente 2; ao lado do 84 colocamos duas barras para indicar que os fatores primos da decomposição devem ser contados duas vezes cada um.

Ao lado do fator 56 — por causa do expoente 3 — colocamos três barras. Com êsse artifício indicamos que os fatores primos de 56 devem ser contados três vezes cada um.

A decomposição do último fator 12 já figurava na decomposição do número 48; e isso indicamos com uma segunda barra a partir de 12, para baixo.

E' fácil, pelo número de barras, dizer quantas vezes um determinado fator primo figura na decomposição.

O fator primo 2, por exemplo, em  $84^2$  figura quatro vezes; em  $56^3$  figura nove vezes; em  $84 \times 12$  figura seis vezes.

Do mesmo modo podemos contar quantas vezes figuram os outros fatores primos na decomposição.

Podemos escrever:

$$84^2 \times 48 \times 56^3 \times 12 = 2^{19} \times 3^4 \times 7^5$$

### 10 — Cálculo dos divisores de um número.

Seja determinar os divisores do número 252.

Decompomos o número dado em fatores primos.

252	2
126	2 — 4
63	3 — 6 — 12
21	3 — 9 — 18 — 36
7	7 — 14 — 28 — 21 — 42 — 84 — 63 — 126 — 252
1	

Multiplicamos o segundo fator primo pelo primeiro; o produto obtido (que é um divisor múltiplo) escrevemos ao lado do segundo fator primo.

Multiplicamos, em seguida, o terceiro fator primo da decomposição pelos divisores diferentes que o precederam; os produtos são escritos à direita.

E assim por diante.

Os divisores de 252 são portanto: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126 e 252.

### 11 — Exercício I.

Achar todos os divisores do número 320.

Resolução:

320	2
160	2 — 4
80	2 — 8
40	2 — 16
20	2 — 32
10	2 — 64
5	5 — 10 — 20 — 40 — 80 — 160 — 320
1	

Os divisores de 320 são: 1, 2, 4, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 64, 80, 160 e 320.

### 12 — Número de divisores de um número.

Seja, por exemplo, determinar o número de divisores de 1008.

Decompomos 1008 em fatores primos:

$$1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$$

e escrevemos os expoentes dos fatores primos do número

4, 2 e 1

Aumentamos cada um desses expoentes de uma unidade

5, 3 e 2

e multiplicamos os resultados assim obtidos.

$$5 \times 3 \times 2 = 30$$

O produto 30 será o número de divisores de 1008.

Conclusão:

*O número de divisores de um número é igual ao produto dos expoentes dos fatores primos desse número, aumentados êsses expoentes de uma unidade cada um.*

### 13 — Exercício II.

*Dizer quantos divisores tem o número 4704.*

Resolução:

Decompomos 4704 em fatores primos:

$$4704 = 2^5 \times 3 \times 7^2$$

Os expoentes de seus fatores primos são :

$$5, 1 \text{ e } 2$$

Aumentados de uma unidade nos dão os números

$$6, 2 \text{ e } 3,$$

cujo produto é 36.

O número 4704 tem 36 divisores.

### 14 — Caso em que um número é divisível por dois números primos entre si.

Quando um número é divisível separadamente por dois números primos entre si é divisível pelo produto deles.

Assim o número 504 sendo divisível por 8 e por 9, que são números primos entre si, é divisível também pelo produto  $8 \times 9$  ou 72.

É fácil concluir que um número divisível por 2 e por 3 será divisível por 6; sendo divisível por 3 e por 4 será por 12.

### 15 — Determinação do m.d.c. pela decomposição em fatores primos.

A decomposição dos números em fatores primos oferece uma aplicação muito importante na determinação do m.d.c. Seja procurar o m.d.c. dos números 84, 144 e 216. Decompomos esses números em fatores primos:

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$216 = 2^3 \times 3^3.$$

O m.d.c. será formado pelo produto dos fatores comuns afetados dos menores expoentes:

$$\text{m.d.c. (84, 144 e 216)} = 2^2 \times 3.$$

O fator primo 7 não figura, nesse caso, no m.d.c., por não ser comum a todos os números dados.

### 16 — Exercício III.

*Determinar pela decomposição em fatores primos o m.d.c. dos números.*

$$896, 1344 \text{ e } 3136$$

Resolução:

Decompomos os números dados em fatores primos

$$896 = 2^7 \times 7$$

$$1344 = 2^6 \times 3 \times 7$$

$$3136 = 2^6 \times 7^2.$$

O m.d.c. será

$$2^6 \times 7 = 448.$$

## Exercícios.

- 30 — Verificar se são primos os números 6509 e 1637.
- 31 — Decompor em fatores primos o produto  $18^2 \times 48^3 \times 36 \times 12$ .
- 32 — Escrever todos os números menores que 50 e primos com 75.
- 33 — Calcular a soma dos divisores de 72.
- 34 — Quantos divisores terá o produto  $28 \times 40 \times 56 \times 15$  ?

## Leitura.

### ERATOSTENES

Entre as figuras mais curiosas e mais notáveis da História da Matemática destaca-se o astrônomo grego Eratostenes contemporâneo e amigo do célebre geômetra Arquimedes.

Eratostenes, depois de ter feito seus estudos em Alexandria, foi escolhido para dirigir a grande Biblioteca da Universidade, cargo que segundo parece exerceu durante toda sua vida.

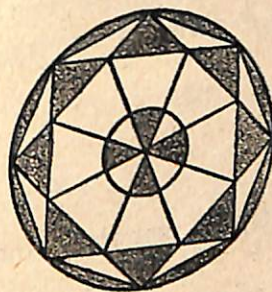
Além de possuir invejáveis conhecimentos científicos e literários que o distinguiram entre os maiores sábios de seu tempo, era Eratostenes poeta, orador, filósofo e — ainda mais — um atleta completo. Basta dizer que mereceu o título excepcional de "Pentathlos", conferido naquele tempo ao atleta que saísse vencedor nas cinco lutas dos jogos Olímpicos.

Esse homem extraordinário que jogava o dardo, escrevia poemas, venciam os grandes corredores e resolvia problemas de Astronomia, legou à posteridade várias obras. Ao rei Ptolomeu III, do Egito, Eratostenes apresentou uma taboia de números primos feitos sobre uma prancha metálica, na qual os números múltiplos eram marcados por um pequeno furo. Deu-se por isso o nome de "crivo de Eratostenes" ao processo de que se

utilisára o astrônomo grego para formar sua táboa de números primos.

Em consequência de uma oftalmia, adquirida nas margens do Nilo, durante uma viagem, Eratostenes ficou cego. Esmagado por tão grande desgraça e não podendo resistir ao desgosto que lhe causára a cegueira, o sábio e atleta suicidou-se deixando-se morrer de fome.

Em 1822 foram publicados, sob o título "Eratostenenica" os fragmentos das obras de Eratostenes.



## MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

## 1 — Mínimo múltiplo comum.

Os números 8, 12 e 20, por exemplo, admitem uma infinidade de múltiplos comuns. Assim 120, 360, 480 etc., são múltiplos comuns dos números 8, 12 e 20.

O menor dos múltiplos comuns de vários números é denominado *mínimo múltiplo comum*.

O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número que é divisível exatamente pelos números dados.

## 2 — Abreviatura.

O mínimo múltiplo comum é indicado pela notação *m.m.c.*

Exemplo:  $80 = m.m.c. (16 \text{ e } 40)$ .

Lê-se: 80 é o mínimo múltiplo comum de 16 e 40.

## 3 — Determinação do m.m.c. de dois ou mais números.

Seja determinar o *m.m.c.* dos números 84, 216 e 1008. Decompomos esses números em seus fatores primos:

$$\begin{aligned} 84 &= 2^2 \times 3 \times 7 \\ 216 &= 2^3 \times 3^3 \\ 1008 &= 2^4 \times 3^2 \times 7. \end{aligned}$$

O *m.m.c.* será formado pelos fatores primos que figuram nas decomposições, com os maiores expoentes. Logo, o *m.m.c.* dos números 84, 216 e 1008 será

$$2^4 \times 3^3 \times 7 = 3024$$

Podemos escrever:

$$m.m.c. (84, 216 \text{ e } 1008) = 3024$$

## 4 — Exercício I.

Determinar o *m.m.c.* dos números 168, 196 e 560.

Resolução:

Decompomos os números em fatores primos:

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

$$196 = 2^2 \times 7^2$$

$$560 = 2^4 \times 5 \times 7$$

Nas diversas decomposições figuram os fatores primos 2, 3, 5 e 7.

O *m.m.c.* será formado por esses fatores primos com os maiores expoentes.

O *m.m.c.* procurado será:

$$2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2$$

## 5 — Propriedade do m. m. c.

*I Propriedade* — Quando multiplicamos ou dividimos os números dados por um mesmo número o *m.m.c.* aparece multiplicado ou dividido por esse número.

Exemplo:

Sabemos que 36 é o *m.m.c.* dos números 18 e 12.

Temos:  $m.m.c. (18 \text{ e } 12) = 36$ .

Se multiplicarmos os dois números por 10, por exemplo, temos:

$$m.m.c. (180 \text{ e } 120) = 360$$

*II Propriedade* — Quando dividimos o  $m.m.c.$  pelos números dados os quocientes obtidos são primos entre si.

Seja por exemplo:  $m.m.c. (12, 20 \text{ e } 15) = 60$ .

Se dividirmos o  $m.m.c.$  60 pelos números 12, 20 e 15 vamos obter os quocientes

$$5, 3 \text{ e } 4$$

que são números primos entre si.

*III Propriedade* — Quando elevamos vários números a uma mesma potência o  $m.m.c.$  desses números fica elevado a essa potência.

Exemplo: sejam os números 40 e 28, cujo  $m.m.c.$  é 280.

Elevamos os números 40 e 28 ao quadrado:

$$m.m.c. (40^2 \text{ e } 28^2) = 280^2$$

#### 6 — Observação.

Quando dois números são primos entre si o  $m.m.c.$  é igual ao produto deles.

Exemplo:  $m.m.c. (12 \text{ e } 25) = 300$ .

#### 7 — Relação entre o $m.m.c.$ e o $m.d.c.$ de dois números.

Sejam dados os números 132 e 168.

Decompondo esses números em fatores primos, temos:

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11$$

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7$$

Calculando o  $m.d.c.$  e o  $m.m.c.$  achamos:

$$m.d.c. (132 \text{ e } 168) = 2^2 \times 3$$

$$m.m.c. (132 \text{ e } 168) = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$$

O produto dos dois números  $132 \times 168$  decomposto igualmente em fatores primos dará o seguinte resultado:

$$2^5 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

e o produto do  $m.d.c.$  pelo  $m.m.c.$  será também

$$2^5 \times 3^2 \times 7 \times 11$$

Conclusão: O produto de dois números é igual ao produto do  $m.d.c.$  pelo  $m.m.c.$  desses números.

Seja  $A$  e  $B$  os dois números e  $m.d.c.$  o máximo divisor comum e  $m.m.c.$  o mínimo múltiplo comum desses números, temos:

$$m.d.c. \times m.m.c. = A \times B$$

#### 8 — Exercício II.

Dados os números 112 e 308 calcular o  $m.m.c.$  desses números com auxílio do  $m.d.c.$

Resolução:

Vamos determinar o  $m.d.c.$  dos números 112 e 308.

	2	1	3
308	112	84	28
84	28	0	

Temos:  $m.d.c. (112 \text{ e } 308) = 28$ .



O *m.m.c.* será igual ao produto dos números 112 e 308 dividido pelo *m.d.c.* 28.

Temos, portanto:

$$m.m.c. (112 \text{ e } 308) = \frac{112 \times 308}{28} = 1232.$$

### Exercícios.

- 35 — Determinar o *m.m.c.* dos números 270, 280 e 588.  
 36 — Com auxílio do *m.d.c.* calcular o *m.m.c.* dos números 252 e 924.  
 37 — Determinar os três menores múltiplos comuns dos números 126, 154 e 231.  
 38 — Qual é o menor número que, dividido sucessivamente por 8, 9 e 12, deixa para resto 4?

### Leitura.

#### ALGARISMOS CHINÊSES

Os chineses efetuavam outrora os seus cálculos com auxílio de pequenas varetas de bambú ou de marfim. Para representar os 9 algarismos as varetas eram dispostas de diversas maneiras (\*):



Esse sistema não era, porém, invariável.. O algarismo 2 podia ser representado pelo sinal  $\perp$  e o 6 por duas varetas perpendiculares  $\perp$ . Duas varetas em cruz X representavam igualmente o algarismo 4.

(\*) Das indicações contidas neste trecho algumas foram tiradas do livro de E. Fourrey — *Récréations arithmétiques*.

Nas antigas obras de matemática as varetas eram indicadas por pequeninas barras, e os números superiores a 9 eram representados com dois ou mais algarismos — como no sistema decimal — tendo cada algarismo um valor de posição.

O número 631 seria representado da seguinte forma

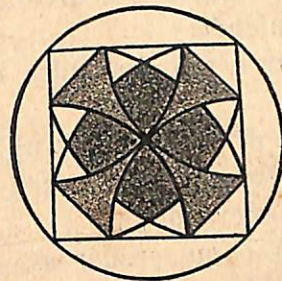


O zero era empregado, como atualmente, para indicar ausência de uma ordem qualquer de unidades.

\* \* \*

No interior do Brasil, em certas grutas de Goiás e do Piauí, foram recentemente descobertas inscrições de origem ignorada, que alguns cientistas atribuíram a povos pre-históricos que viveram em nosso país.

Não deixa de ser curioso observar que muitos símbolos que figuram nessas inscrições indecifráveis são perfeitamente idênticos aos algarismos chineses antigos.

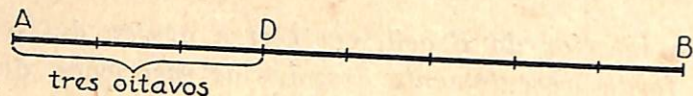


CAPÍTULO XII

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

1 — Fração — Definição.

Vamos supor que uma grandeza  $AB$ , igual à unidade, foi dividida, por exemplo, em 8 partes iguais.



Cada uma dessas partes será uma fração da unidade, isto é, *um oitavo da unidade*.

Se considerarmos em  $AD$  três dessas partes teremos a fração *três oitavos*.

Chama-se fração, portanto, a uma ou mais partes da unidade.

2 — Termos de uma fração.

Numa fração qualquer devemos considerar: 1.º) o número de partes em que a unidade foi dividida; 2.º) o número de partes tomadas da unidade.

Êsses dois números são chamados respectivamente *numerador* e *denominador*.

Se a unidade foi dividida em 12 partes iguais e tomamos 5 dessas partes para formar uma fração, o denominador dessa fração será 12 e o numerador 5.

O denominador e o numerador são chamados *termos* da fração.

3 — Fração decimal — Fração ordinária.

Quando o denominador de uma fração é 10 ou uma potência de 10 a fração é chamada *decimal*.

*Fração ordinária* é aquela cujo denominador não é uma potência de 10.

O presente capítulo tem por objeto o estudo das frações ordinárias; as frações decimais serão estudadas mais tarde.

4 — Como se escreve uma fração ordinária.

Uma fração ordinária é escrita do seguinte modo: escreve-se o numerador sobre o denominador do qual é separado por um traço horizontal.

Assim, se uma unidade foi dividida em 5 partes e tomamos 4 dessas partes temos a fração

$$\frac{4}{5}$$

na qual o numerador é 4 e o denominador é 5.

5 — Como se lê uma fração ordinária.

Lê-se uma fração ordinária do seguinte modo: enuncia-se o numerador e em seguida o denominador acompanhado da palavra *avos*.

Exemplo: A fração  $\frac{7}{13}$  será lida: *sete treze avos*.

Excetuam-se as frações que tiverem para denominador 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, etc.

As frações  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$

etc. serão lidas respectivamente: um meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono, um décimo, um centésimo, um milésimo, etc.

Quando um dos termos da fração for representado por uma operação indicada ou por uma expressão — e não por um simples número — lê-se o numerador acompanhado da palavra *sobre* e em seguida o denominador.

Exemplo: a fração  $\frac{4 + 6}{9}$  é lida do seguinte modo: *quatro*

*mais seis sobre nove.*

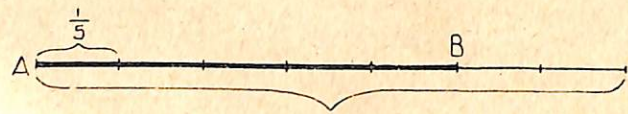
Essa mesma regra é aplicada quando um dos termos da fração é representado por uma letra ou quando forem ambos números excessivamente grandes.

A fração  $\frac{a}{b}$  será lida: *a sobre b.*

### 6 — Fração própria e fração imprópria.

Vamos supor que a unidade *AB* foi dividida em 5 partes; cada uma dessas partes é *um quinto da unidade.*

Se considerarmos um conjunto de 7 dessas partes teremos a fração  $\frac{7}{5}$  que representa uma fração maior que a unidade. Esse número é imprópriamente denominado fração.



A fração maior do que a unidade é chamada fração *imprópria.*

*Fração própria* é aquela que é menor do que a unidade.

Assim  $\frac{4}{9}$  é uma fração própria;  $\frac{11}{7}$  é uma fração imprópria.

Quando o numerador for igual ao denominador a fração é igual a unidade.

Exemplo:  $\frac{5}{5} = 1.$

### 7 — Observação.

Qualquer número inteiro pode ser escrito sob forma de fração, dando-se para numerador esse número inteiro e para denominador a unidade.

Assim  $\frac{6}{1} = 6.$

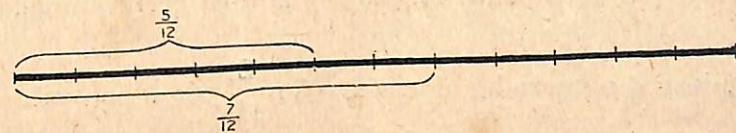
Qualquer número inteiro pode ser escrito sob forma de fração ordinária com um denominador dado. Basta para isso multiplicar o inteiro por esse denominador e dar ao produto o denominador indicado.

Exemplo: Seja reduzir o número 7 a quintos. Temos:

$$7 = \frac{7 \times 5}{5} = \frac{35}{5}.$$

### 7 — Comparação de frações.

I) Quando duas frações têm o mesmo denominador a maior é aquela que tiver maior numerador.

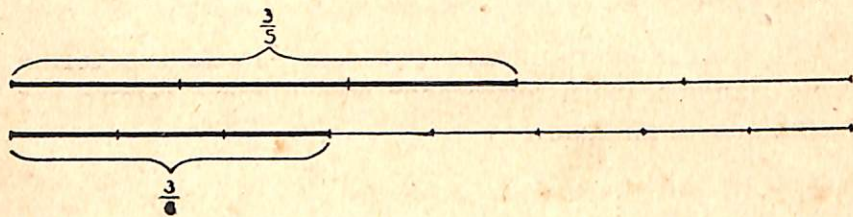


Assim entre as frações  $\frac{7}{12}$  e  $\frac{5}{12}$  a maior é  $\frac{7}{12}$  na

qual foram tomadas 7 partes da unidade, enquanto que na fração  $\frac{5}{12}$  só foram tomadas 5 partes.

II) Quando duas frações têm o mesmo numerador a maior é aquela que tiver menor denominador.

Assim, dadas as frações  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{3}{8}$  a maior é  $\frac{3}{5}$ .



Com efeito. Na primeira a unidade foi dividida em 5 partes iguais e tomadas 3 dessas partes; na segunda a unidade foi dividida em 8 partes e tomadas 3 dessas partes. Logo  $\frac{3}{5}$  é maior que  $\frac{3}{8}$ .

### 9 — Propriedades das frações.

I) Quando multiplicarmos o numerador de uma fração por 2, 3, 4, etc., o valor da fração fica duas, três, quatro vezes, etc. maior.

Seja, por exemplo, a fração  $\frac{2}{11}$  de uma certa unidade AB.

Multiplicar o numerador dessa fração  $\frac{2}{11}$  por 3 equivale a repetir  $\frac{2}{11}$  três vezes, isto é, equivale a torna-la três vezes maior.



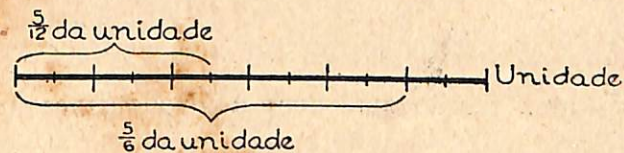
A fração  $\frac{6}{11}$  será, portanto, três vezes maior que a fração  $\frac{2}{11}$ .

II) Quando dividirmos o numerador de uma fração por 2, 3, 4, etc., o valor da fração fica duas, três, quatro, etc. vezes menor.

Seja a fração  $\frac{8}{11}$ . Se dividirmos o numerador dessa fração, por exemplo, por 4 obtemos a fração  $\frac{2}{11}$  cujo valor é quatro vezes menor que o valor da fração  $\frac{8}{11}$ .

III) Quando multiplicarmos o denominador de uma fração por 2, 3, 4, etc., o valor da fração fica duas, três, quatro, etc., vezes menor.

Seja, por exemplo,  $\frac{5}{6}$  uma fração da unidade AB.



Multiplicamos o denominador dessa fração por 2; vamos obter a fração  $\frac{5}{12}$  que é duas vezes menor que a fração  $\frac{5}{6}$ .

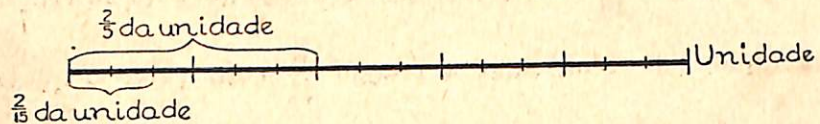
A fração  $\frac{5}{18}$  será três vezes menor que a fração  $\frac{5}{6}$ .

IV) Quando dividirmos o denominador de uma fração por 2, 3, 4, etc. a fração fica duas, três, quatro, etc. vezes maior.

Seja, por exemplo, a fração  $\frac{2}{15}$ .

Se dividirmos o denominador dessa fração por 3 vamos obter a fração  $\frac{2}{5}$  que é três vezes maior que a fração  $\frac{2}{15}$ .

Na fração  $\frac{2}{15}$



a unidade foi dividida em 15 partes iguais e tomadas duas dessas partes ao passo que na fração  $\frac{2}{5}$  a unidade foi dividida em 5 partes e tomadas 2 dessas partes.

V) Quando multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fração pelo mesmo número o valor da fração não se altera.

Seja  $\frac{2}{3}$  uma fração qualquer; multipliquemos ambos os termos dessa fração por um número qualquer, 5 por exemplo; vamos obter a fração  $\frac{10}{15}$

As frações

$$\frac{2}{3} \text{ e } \frac{10}{15}$$

têm o mesmo valor. Com efeito. Quando multiplicarmos o numerador da fração por 5 tornamos a fração 5 vezes maior; quando multiplicamos o denominador da mesma fração por 5, fizemos com que ela ficasse 5 vezes menor. Logo o valor da fração não se alterou.

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$$

A mesma coisa acontece quando dividimos ambos os termos de uma fração pelo mesmo número.

$$\text{Exemplo: } \frac{18}{40} = \frac{18 \div 2}{40 \div 2} = \frac{9}{20}$$

#### 10 — Frações iguais.

Quando duas ou mais frações têm o mesmo valor dizemos que essas frações são iguais.

Assim as frações  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{6}$ ,  $\frac{3}{9}$ ,  $\frac{4}{12}$ , são iguais.

#### 11 — Fração imprópria — Número mixto.

Seja  $\frac{25}{7}$  uma fração imprópria qualquer.

Como já vimos essa fração sendo maior que a unidade contém um certo número de vezes a unidade e mais partes da unidade.

Cada unidade contém, como sabemos, 7 sétimos; a fração  $\frac{25}{7}$  contém, portanto, 3 vezes a unidade e mais 4 sétimos da unidade.

Podemos escrever:  $\frac{25}{7} = 3 \frac{4}{7}$ .

A expressão  $3 \frac{4}{7}$  composta de uma parte inteira e de uma fração ordinária é denominada *número mixto*.

### 12 — Transformação de uma fração imprópria em número mixto.

Dada uma fração imprópria podemos transformá-la em um número mixto.

Seja  $\frac{238}{19}$  a fração imprópria que queremos reduzir a um número mixto. Dividimos o numerador pelo denominador.

238	19	O quociente obtido será a parte inteira e
48	—	o resto passará a ser o numerador da parte
10	12	fracionária.

Assim:  $\frac{238}{19} = 12 \frac{10}{19}$

Para reduzir uma fração imprópria a número mixto precisamos calcular quantas vezes a unidade está contida na fração imprópria dada: essa operação é também denominada *extração de inteiros de uma fração*.

### 13 — Transformação de um número mixto em fração imprópria.

Um número mixto pode ser facilmente escrito sob a forma de fração imprópria. Basta para isso *multiplicar o inteiro pelo denominador juntando ao produto o numerador*.

Exemplo. Seja  $3 \frac{4}{11}$  o número mixto que queremos reduzir a fração imprópria.

Multiplicamos o inteiro (3) pelo denominador (11) e ao produto (33) juntamos o numerador (4) obtendo assim 37.

Logo,  $3 \frac{4}{11} = \frac{37}{11}$ .

### 14 — Frações inversas.

Duas frações são *inversas* quando o numerador de uma delas fôr igual ao denominador da outra.

Assim,  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{5}{3}$  são frações inversas.

Dizemos então que  $\frac{3}{5}$  é o inverso de  $\frac{5}{3}$ .

Recíprocamente,  $\frac{3}{5}$  será o inverso de  $\frac{3}{5}$ .

Só podemos obter o inverso de um número mixto depois de têmos transformado o número mixto numa fração imprópria.

### 15 — Inverso de um número inteiro.

O inverso de um número inteiro é uma fração cujo numerador é a unidade e cujo denominador é esse número inteiro.

Exemplo: o inverso de 8 é  $\frac{1}{8}$ ; o inverso de  $m$  é  $\frac{1}{m}$ .

### 16 — Simplificação de frações.

*Simplificar* uma fração é reduzi-la a outra equivalente expressa em termos menores.

A simplificação de uma fração é baseada na propriedade que nos permite dividir ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, sem alterar o valor da fração.

Seja, por exemplo, a fração  $\frac{105}{175}$ .

Dividindo-se ambos os termos dessa fração por 5, temos:

$$\frac{105}{175} = \frac{105 \div 5}{175 \div 5} = \frac{21}{35}$$

A fração obtida  $\frac{21}{35}$  pode sofrer uma nova simplificação:

$$\frac{21}{35} = \frac{21 \div 7}{35 \div 7} = \frac{3}{5}$$

Podemos, portanto, escrever:

$$\frac{105}{175} = \frac{3}{5}$$

### 17 — Fração irredutível.

Quando os termos de uma fração são números primos entre si dizemos que a fração é *irredutível*.

Assim as frações  $\frac{8}{3}$ ,  $\frac{7}{6}$ ,  $\frac{4}{11}$ ,  $\frac{25}{9}$  são irredutíveis.

*Reduzir uma fração à expressão mais simples é simplificá-la de modo a torná-la irredutível.*

### 18 — Redução de uma fração à expressão mais simples.

Para reduzir uma fração à expressão mais simples há dois processos: pelas *divisões sucessivas* e pelo *m. d. c.*

#### I) *Pelas divisões sucessivas*

Seja reduzir à expressão mais simples a fração  $\frac{252}{588}$ .

Dividimos ambos os termos da fração pelos fatores primos 2, 3, 5, 7, etc., até obtermos um numerador primo como o denominador.

$$\frac{252}{588} = \frac{126}{294} = \frac{63}{147} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$$

#### II) *Pelo m.d.c.*

Seja reduzir à expressão mais simples a fração  $\frac{252}{588}$ .

Calculamos o *m.d.c.* dos termos da fração:

	2	3	
588	252	84	
84	0		<i>m d. c.</i> = 84

e dividimos ambos os termos da fração dada pelo *m.d.c.* encontrado.

$$\frac{252}{588} = \frac{252 \div 84}{588 \div 84} = \frac{3}{7}$$

### 19 — Redução de frações ao mesmo denominador.

*Reduzir duas ou mais frações ao mesmo denominador é transformar as frações dadas em outras iguais que tenham o mesmo denominador.*

Seja, por exemplo, reduzir ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$$

Calculamos o *m.m.c.* dos denominadores.

Esse *m.m.c.* como podemos verificar, é igual a 60.

Dividimos esse *m.m.c.* pelos denominadores das diferentes frações, escrevendo os quocientes obtidos em baixo de cada denominador entre parentesis:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}, \frac{7}{15}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$$

(15)      (5)      (4)      (10)      (20)

Multiplicamos, depois, ambos os termos de cada fração pelo quociente correspondente:

$$\frac{45}{60} \quad \frac{25}{60} \quad \frac{28}{60} \quad \frac{10}{60} \quad \frac{40}{60}$$

O *m.m.c.* dos denominadores é o *menor denominador comum* que as frações podem ter.

É esse, portanto, o processo para reduzir duas ou mais frações ao menor denominador comum.

## 20 — Comparação de frações.

Quando duas ou mais frações têm o mesmo denominador ou o mesmo numerador é fácil compara-las, isto é, dizer qual a maior ou qual a menor e escreve-las mesmo, se for necessário em ordem crescente ou decrescente de grandeza.

Salvo condições muito especiais só podemos comparar várias frações depois de reduzi-las ao mesmo denominador ou

ao mesmo numerador. Em geral é preferível reduzi-las ao mesmo denominador.

Seja, por exemplo, comparar as frações:

$$\frac{3}{8}, \frac{7}{20}, \frac{11}{16}, \frac{21}{40}, \frac{9}{10}$$

O *m.m.c.* dos denominadores é 80. Dividimos esse *m.m.c.* pelos denominadores:

$$\frac{3}{8}, \frac{7}{20}, \frac{11}{16}, \frac{21}{40}, \frac{9}{10}$$

(10)    (4)    (5)    (2)    (8)

Reduzindo-as ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{30}{80}, \frac{28}{80}, \frac{55}{80}, \frac{42}{80}, \frac{72}{80}$$

Podemos escrever as frações em ordem crescente de seus valores:

$$\frac{28}{80}, \frac{30}{80}, \frac{42}{80}, \frac{55}{80}, \frac{72}{80}$$

ou substituindo-as pelas frações equivalentes irredutíveis temos:

$$\frac{7}{20}, \frac{3}{8}, \frac{21}{40}, \frac{11}{16}, \frac{9}{10}$$

## 21 — Exercício I.

Escrever em ordem crescente de grandeza as seguintes frações:

$$\frac{4}{71}, \frac{5}{83}, \frac{2}{49}, \frac{1}{18}$$



Resolução:

Como essas frações têm os denominadores relativamente grandes, preferimos, para compará-las, reduzi-las ao mesmo numerador.

O *m.m.c.* dos numeradores é 20.

Dividimos esse *m.m.c.* pelos numeradores, temos:

$$\begin{array}{cccc} (5) & (4) & (10) & (20) \\ \frac{4}{71} & \frac{5}{83} & \frac{2}{49} & \frac{1}{18} \end{array}$$

Multiplicamos cada quociente por ambos os termos da fração correspondente, vem:

$$\frac{20}{355} \quad \frac{20}{332} \quad \frac{20}{490} \quad \frac{20}{360}$$

Escrevendo essas frações em ordem crescente, temos:

$$\frac{20}{490} \quad \frac{20}{360} \quad \frac{20}{355} \quad \frac{20}{342}$$

ou substituindo cada fração pela fração equivalente irredutível, temos:

$$\frac{2}{49} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{4}{71} \quad \frac{5}{73}$$

ficando assim as frações dadas escritas em ordem crescente de grandeza.

## 22 — Adição de frações.

Vamos supor que se trata de efetuar a soma das frações:

$$\frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{1}{16}$$

Como todas essas frações têm o mesmo denominador cada uma delas representa um conjunto de partes iguais da unidade.

A soma dessas frações pode ser obtida muito facilmente, somando-se os numeradores e dando a essa soma o denominador comum:

$$\text{Assim: } \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

Só podemos somar diretamente frações que têm o mesmo denominador.

Vejamos, pois, o caso em que as frações não têm o mesmo denominador.

Seja, por exemplo, somar as frações

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

Reduzindo-as ao mesmo denominador, vem:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} =$$

(4)      (3)      (2)

e somando os numeradores, temos:

$$= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{13}{12} = 1 \frac{1}{12}$$

## 23 — Exercício II.

Somar as frações:

$$\frac{3}{5} + 1 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{2}$$

Resolução:

Reduzindo as frações dadas ao mesmo denominador ( $m.m.c = 30$ ), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} + 1 \frac{2}{3} + 4 \frac{1}{2} \\ & \quad (6) \quad (10) \quad (15) \\ = & \frac{18}{30} + 1 \frac{20}{30} + 4 \frac{15}{30} \end{aligned}$$

Somando as partes inteiras e, separadamente, as frações, temos:

$$5 \frac{53}{30}$$

Extraímos os inteiros contidos na fração imprópria e juntando com a parte inteira, vem:

$$6 \frac{23}{30}$$

### 24 — Exercício III.

Um operário faz uma certa obra em 10 dias; um segundo operário faz a mesma obra em 8 dias e um terceiro operário em 12 dias. Que fração da obra é feita, num dia, pelos 3 operários trabalhando juntos?

Resolução:

Num dia o primeiro operário fará  $\frac{1}{10}$  da obra; o segundo fará  $\frac{1}{8}$  e o terceiro  $\frac{1}{12}$ .

Trabalhando juntamente os três operários farão:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

Reduzindo essas frações ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{12}{120} + \frac{15}{120} + \frac{10}{120}$$

A soma dessas frações será  $\frac{37}{120}$ .

Os três operários farão, portanto, num dia  $\frac{37}{120}$  da obra.

### 25 — Observação.

Para somarmos um inteiro a uma fração aplicamos a regra já estabelecida para a transformação de um fração mixta em fração imprópria.

$$\text{Exemplo: } 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$$

Multiplicamos o inteiro pelo denominador e ao resultado somamos o numerador.

### 26 — Subtração de frações.

Seja efetuar a subtração:

$$\frac{7}{15} - \frac{4}{15}$$

*Matéria em ordem crescente*  
 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$

Como as frações têm o mesmo denominador, basta subtrair os numeradores e dar à diferença o denominador comum:

$$\frac{7}{15} - \frac{4}{15} = \frac{3}{15}.$$

Se as frações tiverem denominadores diferentes, é preciso reduzi-las, antes, ao mesmo denominador.

Seja, por exemplo, efetuar a seguinte subtração:

$$\frac{3}{7} - \frac{5}{13}.$$

Reduzimos as frações ao mesmo denominador. Temos:

$$\frac{3}{7} - \frac{5}{13} = \frac{39}{91} - \frac{35}{91}.$$

(13)      (7)

Efetuamos a subtração, tomando a diferença dos numeradores:

$$\frac{39}{91} - \frac{35}{91} = \frac{4}{91}.$$

### 27 — Observação.

Antes de efetuarmos uma subtração de frações convém que transformemos em fração imprópria qualquer número mixto que figurar na expressão.

Exemplo: Seja efetuar a subtração:

$$1 \frac{1}{3} - \frac{8}{9}.$$

Reduzindo o número mixto à fração imprópria, temos:

$$\frac{4}{3} - \frac{8}{9}.$$

Multiplicamos ambos os termos da primeira fração por 3, para termos frações com o mesmo denominador:

$$\frac{12}{9} - \frac{8}{9} = \frac{4}{9}.$$

### 28 — Exercício IV.

*Um homem e uma mulher fazem um certo trabalho em 20 dias. O homem, trabalhando sózinho, faz essa mesma obra em 30 dias. Que fração de obra fará, num dia, a mulher trabalhando sózinha?*

Resolução:

O homem e a mulher farão num dia  $\frac{1}{20}$  da obra. O homem sózinho fará, nesse mesmo tempo,  $\frac{1}{30}$  de obra.

A mulher, num dia, trabalhando sózinha fará uma fração da obra igual à diferença:

$$\frac{1}{20} - \frac{1}{30}.$$

Reduzindo essas frações ao mesmo denominador e subtraindo, vem:

$$\frac{3}{60} - \frac{2}{60} = \frac{1}{60}.$$

A mulher fará  $\frac{1}{60}$  da obra.

## 29 — Multiplicação de frações.

O produto de duas ou mais frações é uma fração que tem por numerador o produto dos numeradores e por denominador o produto dos denominadores das frações todas.

Assim o produto das frações

$$\frac{5}{4} \times \frac{7}{2} \times \frac{3}{11}$$

será a fração

$$\frac{5 \times 7 \times 3}{4 \times 2 \times 11} \quad \text{ou} \quad \frac{88}{105}$$

## 30 — Observação.

Para multiplicar um número mixto por uma fração é preciso transformar previamente o número mixto em fração imprópria.

Exemplo: seja multiplicar  $2 \frac{1}{3}$  por  $\frac{4}{5}$ .

O produto será:

$$2 \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{15}$$

## 31 — Exercício V.

Seja efetuar o produto:

$$\frac{3}{5} \times 2 \frac{1}{2} \times \frac{7}{3}$$

Resolução:

Transformamos o número mixto em fração imprópria

$$\frac{\cancel{3}}{5} \times \frac{\cancel{5}}{2} \times \frac{7}{\cancel{3}}$$

e cancelamos os fatores comuns; o produto será, portanto, igual a  $\frac{7}{2}$ .

## 32 — Exercício VI.

Efetuar o produto:

$$\frac{4}{15} \times \frac{9}{16} \times \frac{7}{4}$$

Resolução:

Cancelemos o fator comum 4; temos:

$$\frac{\cancel{4}}{15} \times \frac{9}{16} \times \frac{7}{\cancel{4}}$$

Cancelemos o fator comum 3 dos fatores 15 (denominador) e 9 (numerador):

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{15}_5} \times \frac{\cancel{3}}{16} \times \frac{7}{\cancel{4}}$$

O produto das frações dadas será

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 16} \quad \text{ou} \quad \frac{21}{80}$$

## 33 — Produto de uma fração por um inteiro.

O produto de uma fração por um inteiro é obtido multiplicando-se o inteiro pelo numerador e conservando-se o mesmo denominador.

$$\text{Assim, } \frac{4}{5} \times 7 = \frac{28}{5}.$$

É evidente que esse produto não constitui um caso particular pois o número inteiro, conforme já vimos, pode ser considerado como uma fração que tem por numerador esse mesmo inteiro e por denominador a unidade.

$$\text{Logo: } \frac{4}{5} \times 7 = \frac{4}{5} \times \frac{7}{1} = \frac{28}{5}.$$

$$\text{Em geral: } a \times \frac{m}{n} = \frac{am}{n}.$$

## 34 — Observação.

O produto de um número pelo seu inverso é igual a 1.

$$\text{Exemplo: } \frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = 1.$$

## 35 — Fração do número inteiro.

Seja calcular  $\frac{3}{5}$  de 17.

Já sabemos que um quinto de 17 é igual a  $\frac{17}{5}$ .

Podemos obter três quintos multiplicando a fração  $\frac{17}{5}$  por 3.

$$\text{Logo: } \frac{3}{5} \text{ de } 17 = \frac{3}{5} \times 17 = \frac{51}{5}.$$

Conclusão: *Uma fração de um número inteiro é obtido multiplicando-se a fração pelo número inteiro.*

$$\text{Exemplo: } \frac{2}{3} \text{ de } 60 = \frac{2}{3} \times 60 = 40.$$

## 36 — Fração de fração.

Seja calcular  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{3}{4}$ .

Vamos supor que a unidade foi dividida em 20 partes iguais. Temos:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 20 = 15.$$

Calculamos dois quintos de 15, isto é, dois quintos de  $\frac{3}{4}$  da unidade, vem:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 15 = 6.$$

Como a unidade fôra dividida em 20 partes, 6 dessas partes representam  $\frac{6}{20}$  da unidade. Logo  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ .

A fração  $\frac{6}{20}$  é o produto das frações  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{3}{4}$ .

Conclusão:

*Uma fração de outra fração é obtida multiplicando-se a primeira fração pela segunda.*

## 37 — Exercício VII.

Calcular  $\frac{4}{7}$  de  $\frac{3}{8}$ .

Resolução:

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{14}.$$

## 38 — Exercício VIII.

Um reservatório contém 2800 litros de água; um segundo reservatório tem a capacidade igual a  $\frac{5}{8}$  da do 1.º, e um terceiro reservatório tem a capacidade igual a  $\frac{9}{10}$  da do 2.º. Quantos litros de água contém cada reservatório?

Resolução:

O número de litros contidos no 2.º reservatório será:

$$\frac{5}{8} \text{ de } 2800 = \frac{5}{8} \times 2800 = 1750.$$

O número de litros do 3.º, será:

$$\frac{9}{10} \text{ de } 1750 = \frac{9}{10} \times 1750 = 1575.$$

## 39 — Divisão de frações.

Seja dividir  $\frac{5}{3}$  por  $\frac{4}{7}$ .

O quociente será obtido multiplicando-se a fração dividendo  $\frac{5}{3}$  pela fração divisora  $\frac{4}{7}$  invertida.

$$\text{Assim: } \frac{5}{3} \div \frac{4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{35}{12}.$$

O quociente da divisão é igual a  $\frac{35}{12}$ .

Verificamos que a operação está certa com auxílio da prova; o produto do quociente pelo divisor deve ser igual ao dividendo:

$$\frac{35}{12} \times \frac{4}{7} = \frac{\cancel{5}^5}{\cancel{12}_3} \times \frac{\cancel{4}_4}{7} = \frac{5}{3}$$

## 40 — Observação.

É evidente que o quociente da divisão de uma fração por um número inteiro é obtido multiplicando-se a fração pelo inverso do número.

$$\text{Exemplo: } \frac{3}{4} \div 5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}.$$

Na divisão de um número inteiro por uma fração temos, por exemplo:

$$8 \div \frac{3}{5} = 8 \times \frac{5}{3} = \frac{40}{3}.$$

Convém não esquecer que na divisão de frações os números mixtos devem ser — como no caso da multiplicação — convertidos primeiramente em frações impróprias:

$$\text{Exemplo: } 2 \frac{1}{3} \div 1 \frac{4}{5} = \frac{7}{3} \div \frac{9}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{35}{27}.$$

## 41 — Exercício IX.

Si um negociante vendesse uma vitrola por 1:200\$000 ganharia, nessa transação, um quinto do preço do custo. Por que quantia devia vendê-la para ganhar  $\frac{1}{4}$  do preço do custo.

Resolução:

Se supusermos que o preço de custo é tomado para a unidade, a quantia 1:200\$000 representará  $1 \frac{1}{5}$ , isto é,  $\frac{6}{5}$  da unidade.

Para achar a unidade basta dividir 1:200\$000 por  $\frac{6}{5}$ .

Temos:

$$1:200\$000 \div \frac{6}{5}.$$

Efetuada essa divisão achamos um resultado igual a 1:000\$000. É esse o preço de custo da vitrola.

Para o negociante ganhar  $\frac{1}{4}$  do preço do custo (250\$000) deverá vender a vitrola por 1:250\$000.

## 42 — Quadrado de uma fração.

Seja elevar ao quadrado a fração  $\frac{4}{5}$ .

O quadrado dessa fração será:

$$\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \text{ ou } \frac{4^2}{5^2}$$

Conclusão:

Para elevarmos uma fração do quadrado elevamos ambos os termos dessa fração ao quadrado.

## 43 — Exercício X.

Efetuar:

$$\left(1 \frac{2}{5}\right)^2 + \left(2 \frac{1}{2}\right)^2$$

Resolução:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \\ & = \frac{49}{25} + \frac{25}{4} = \frac{196}{100} + \frac{625}{100} = \frac{821}{100}. \end{aligned}$$

## 44 — Observação.

Para elevarmos uma fração a uma certa potência elevamos ambos os termos dessa fração a essa potência.

Exemplo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$$

## 45 — Exercício XI.

Calcular o valor da expressão: (\*)

$$\frac{2}{3} + 2 \frac{4}{5} \times \frac{3}{7}.$$

(\*) As expressões fracionárias que aparecem na prática são, em geral, de aspecto muito simples. Os exercícios denominados *carroções* constituem uma monstruosidade anti-didática que devemos evitar.

Resolução:

Transformemos a fração mixta em fração imprópria:

$$\frac{2}{3} + \frac{14}{5} \times \frac{3}{7}$$

Efetuando o produto indicado, vem:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{5}$$

Reduzindo essas frações ao mesmo denominador, temos:

$$\frac{10}{15} + \frac{18}{15}$$

Somando:

$$\frac{28}{15}$$

É esse o valor da expressão.

#### 46 — Exercício XII.

Calcular o valor da expressão:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}}$$

Resolução:

Calculemos o valor do *numerador* da expressão:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

O resultado parcial obtido é  $\frac{13}{12}$ .

Calculemos em seguida o valor do *denominador* da expressão:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{5}$$

O segundo resultado parcial é  $\frac{23}{30}$ .

Dividimos, finalmente, o valor do numerador  $\frac{13}{12}$  pelo valor do denominador  $\frac{23}{30}$ .

Temos:

$$\frac{13}{12} \div \frac{23}{30} = \frac{13}{12} \times \frac{30}{23} = \frac{65}{46}$$

O valor da expressão proposta será  $\frac{65}{46}$ .

### Exercícios

- 39 — Que alteração sofre uma fração quando multiplicarmos o numerador por 8 e dividimos o denominador por 9?
- 40 — É dada uma fração qualquer cujo denominador é 7. De quanto diminui essa fração se somarmos uma unidade ao denominador?
- 41 — Uma pessoa devia a um amigo uma certa quantia. Pagou um quinto dessa quantia e depois pagou dois terços da parte restante. De que fração ficou reduzida a dívida primitiva?



42 — Escrever em ordem crescente de grandeza as frações:

$$\frac{24}{41}, \frac{18}{37}, \frac{30}{49}$$

43 — Dois amigos receberam a mesma quantia; o primeiro gastou dois quintos dessa quantia e o segundo três quartos. Quanto recebeu cada um sabendo-se que a soma das quantias restante era igual a 170\$000?

## Leitura

### O HOMEM QUE CALCULAVA

(MALBA TAHAN) (\*)

(Excerpto)

Poucas horas viajamos sem interrupção, pois, logo ocorreu uma curiosa aventura na qual o “Homem que calculava” pôs em prática, com grande talento, as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontrámos perto de um antigo caravançarâ (\*\*), já quasi em abandono, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de uma porção de camelos.

O inteligente Mesoud procurou informar-se do que se tratava.

— Somos irmãos — disse o mais velho — e recebemos como herança, êsses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, eu devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir, uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar, apenas, a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 ca-

(\*) Transcrevemos aqui apenas um pequeno trecho do conto “O homem que calculava” que figura no livro “Contos de Malba Tahan”.

(\*\*) Lugar onde as caravanas procuram abrigo.

melos, pois a metade de 35 é 17 e meio! Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35, também não são exatas?

— É muito simples — replicou o “Homem que calculava”

— Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança, êste belo animal que em boa hora, aqui nos trouxe!

Neste ponto, procurei intervir na questão:

— Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem se ficássemos sem o nosso camelo?

— Não te preocupes com o resultado, ó “bagdaly”! (\*) — replicou em voz baixa o “Homem que calculava”. — Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim, a que conclusão quero chegar.

Foi tal o tom de segurança com que êle falou, que não tive dúvidas em entregar-lhe o meu belo “jamaal” (\*\*), que, imediatamente, foi reunido aos que ali estavam, para ser repartido pelos três herdeiros.

— Vou agora — disse êle, dirigindo-se aos três irmãos — fazer a divisão justa dos camelos que são agora, como vêm, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

— Devias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 é portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois saíste lucrando bastante na divisão!

E, voltando-se para o segundo mahometano, continuou:

— E tu, Hamed Namir, devias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois, também, saíste com visível lucro na transacção.

E ao mais moço:

— E tu, joven Hassim Namir, segundo a vontade de teu pai, devias receber uma nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais

(\*) Indivíduo natural de Bagdad.

(\*\*) Um dos muitos nomes que o camelo tem em árabe.

receber uma nona parte de 36, isto é, 4. O teu lucro foi igualmente, notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!

E o "Homem que calculava", concluiu:

Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir — partilha em que todos três saíram lucrando — couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18 mais 12, mais 4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao "bagdaly" meu amigo e companheiro; o outro cabe por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança! (\*)

— Sois inteligente, ó estrangeiro! — exclamou o mais velho dos três irmãos. — Aceitamos a nossa partilha na certeza de que ela foi feita com justiça e equidade!

O "Homem que calculava" tomou logo posse de um dos mais belos "jamales" do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro. Tenho já um outro, especialmente para mim!

E continuamos a nossa jornada para Bagdad.

(\*) A solução dada pelo herói do conto de Malba Tahan ao problema dos 35 camelos baseia-se no seguinte fato: as três frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$  têm a soma igual a  $\frac{17}{18}$ , isto é, menor que a unidade. Admitindo-se, portanto, que fosse feita a partilha dos 35 camelos pelos 3 herdeiros, o primeiro receberia  $17\frac{1}{2}$ , o segundo  $11\frac{2}{3}$  e o terceiro  $3\frac{8}{9}$  e a soma dessas três partes, como é fácil verificar, seria igual a  $33\frac{1}{18}$ . Tal resultado nos mostra que, uma vez feita a partilha, ficaria da herança um resto de  $1\frac{17}{18}$  que não devia caber a nenhum dos herdeiros. Aumentando-se as três partes, respectivamente de  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{9}$  — de modo a torná-las inteiras — ainda assim o resto ficaria igual a 1.

albo libro 223 pag 47  
224

## CAPÍTULO XIII

### FRAÇÕES DECIMAIS. — NÚMEROS DECIMAIS

#### I — Frações decimais.

Chama-se *fração decimal* a toda fração que tiver por denominador uma potência de 10.

As frações  $\frac{47}{100}$ ,  $\frac{5}{1000}$ ,  $\frac{813}{10}$  são frações decimais

#### 2 — Partes decimais da unidade.

Quando dividimos a unidade em 10 partes iguais obtemos os *décimos* que são *partes decimais* de 1.ª ordem.

No caso de dividirmos a unidade em 100 partes iguais vamos obter os *centésimos* — que são partes decimais de 2.ª ordem.

Com a divisão da unidade em mil partes iguais obtemos os *milésimos* — que são partes decimais de 3.ª ordem.

Seguem-se depois: *décimos milésimos* (4.ª ordem); *centésimos milésimos* (5.ª ordem); *milionésimos* (6.ª ordem) etc.

#### 3 — Decomposição de uma fração decimal.

Toda fração decimal é decomponível numa soma de partes decimais da unidade, o número de partes de cada ordem sendo inferior a 10.

Seja a fração  $\frac{8473}{1000}$ .

Podemos escrever:

$$\frac{8473}{1000} = \frac{8000}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{3}{1000}.$$

Simplificando as frações, temos:

$$\frac{8473}{1000} = 8 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000}.$$

Ficou assim a fração decimal dada decomposta numa parte inteira e numa soma de partes decimais da unidade.

#### 4 — Número decimal.

Conforme já vimos o princípio em que se baseia a numeração decimal é o seguinte:

“Qualquer algarismo escrito à direita de outro representa unidades de ordem imediatamente inferior”.

Esse princípio — extensível às partes decimais da unidade — vai nos permitir escrever as frações decimais sob novo aspecto.

Com efeito.

Seja, por exemplo, a fração decimal  $\frac{973}{100}$ .

Decompondo-a em partes decimais da unidade, temos:

$$9 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100}.$$

Indicando por meio de uma vírgula o algarismo das unidades — e à direita do algarismo das unidades escrevendo os décimos (partes decimais de 1.ª ordem), em seguida os centésimos (de 2.ª ordem), e assim por diante, temos:

$$9 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} = 9,73.$$

Fica assim a fração decimal escrita sob forma de *número decimal*.

A vírgula no número decimal — separa a parte inteira da parte decimal. (\*)

#### 5 — Como se lê um número decimal.

Lemos primeiro a parte inteira e em seguida a parte decimal, dando-se a esta a denominação da ordem do último algarismo à direita.

O número 37,249 será lido do seguinte modo: 37 unidades e 249 milésimos.

Exemplos:

8,0036 — oito unidades e trinta e seis décimos milésimos;

0,12 — doze centésimos;

0,049 — quarenta e nove milésimos.

O número decimal também pode ser lido dando-se a cada casa a sua denominação.

#### 6 — Observação.

Nos números decimais — como já vimos para os números inteiros — o algarismo zero serve unicamente para indicar ausência de uma certa ordem de partes decimais.

Assim no número decimal 0,708 temos: 7 décimos e 8 milésimos. A ausência de centésimos é indicada pelo algarismo zero colocado entre os décimos e os milésimos.

(\*) Os ingleses e alemães preferem indicar a parte inteira de um número decimal por meio de um ponto (*ponto decimal*) colocado um pouco acima:

45·381

Essa anotação tem a grande vantagem de evitar a confusão com a vírgula de pontuação quando enunciamos vários números decimais, o que nos obriga, quasi sempre, a usar o ponto e vírgula para a pontuação.

O zero à esquerda da vírgula indica ausência de unidades, e pode ser suprimido quando em vez da vírgula escrever o *ponto decimal*.

### 7 — Zeros à direita de um número decimal.

É fácil verificar que um número decimal não se altera quando à sua direita colocamos um número qualquer de zeros.

Os números decimais

8,42  
8,420  
8,4200

são iguais.

### 8 — Propriedades dos números decimais.

I) *Para multiplicarmos um número decimal por 10, 100, 1000 basta deslocarmos a vírgula uma, duas, três casas para a direita.*

Seja o número 17,812. Multiplicando-o por 100, temos 1781,2.

II) *Para dividirmos um número por 10, 100, 1000, etc. basta deslocarmos a vírgula uma, duas, três, etc., casas para a esquerda.*

Seja dividir o número decimal 187,8 por 100. O quociente será 1,878.

### 9 — Exercício I.

Dividir por 1000 os números 0,83 e 43,6.

Resolução:

Os quocientes serão:

$$\frac{0,83}{1000} = 0,00083 \quad \frac{43,6}{1000} = 0,0436$$

### 10 — Escrever um número decimal sob forma de fração ordinária.

Seja 6,76 o número decimal que queremos escrever sob forma de fração ordinária.

$$\text{Temos: } 6,76 = \frac{676}{100}.$$

Conclusão:

*Para obtermos a fração decimal correspondente a um número decimal (\*) escrevemos, para numerador, o número decimal sem a vírgula, e para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos forem os algarismos decimais do número dado.*

$$\text{Assim: } 0,431 = \frac{431}{1000}.$$

$$3,02 = \frac{302}{100}.$$

### 11 — Redução de um número inteiro a uma ordem decimal dada.

Seja reduzir o número inteiro 45 a milésimos.

Escrevemos à direita do número uma vírgula seguida de três zeros.

45,000

Esse número poderá ser lido: 45 mil milésimos.

### 12 — Decimais de um número.

As casas decimais de um número decimal são chamadas *decimais* desse número.

(\*) O número de algarismos do número decimal é suposto limitado.

Assim o número 51,918 tem três decimais.

O número 404,9 tem uma decimal.

É evidente que um número decimal qualquer pode ter muitas decimais; basta para isso que acrescentemos à direita desse número 1, 2, 3 ou mais zeros.

Veremos, mais adiante, que ha números decimais que tem um número ilimitado de decimais.

### 13 — Adição de números decimais.

Seja efetuar a soma dos seguintes números decimais:

$$6,18 + 0,517 + 84,9$$

Escrevemos um debaixo do outro de modo que as unidades inteiras e as partes decimais da mesma ordem se correspondam em colunas.

$$\begin{array}{r} 6,18 \\ 0,517 \\ 84,9 \\ \hline 91,597 \end{array}$$

Efetuamos em seguida a soma como se fossem números inteiros.

A posição da vírgula na soma é indicada naturalmente pela coluna em que se acham as unidades das parcelas.

### 14 — Subtração de números decimais.

Seja efetuar a subtração:  $47,15 - 8,849$ .

Escrevemos o minuendo e debaixo dêle o subtraendo de modo que as partes decimais da mesma ordem se correspondam.

$$\begin{array}{r} 47,15 \\ 8,849 \\ \hline 38,301 \end{array}$$

Efetuamos em seguida a subtração como se fossem números inteiros.

A vírgula na diferença é colocada numa posição correspondente às vírgulas do subtraendo e do minuendo.

### 15 — Exercício II.

Efetuar:  $2 - 0,518$ .

Resolução:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0,518 \\ \hline 1,482 \end{array}$$

A diferença entre 2 e 0,518 é 1,482.

### 16 — Multiplicação de números decimais.

Seja efetuar o produto:  $5,418 \times 1,23$ .

A operação é efetuada como se o multiplicando e o multiplicador fossem inteiros.

No produto separamos tantas decimais quantas foram as decimais do multiplicando mais o número de decimais do multiplicador.

$$\begin{array}{r} 5,418 \\ 1,23 \\ \hline 16254 \\ 10836 \\ \hline 5418 \\ \hline 6,66414 \end{array}$$

Exemplo:

O produto  $0,518 \times 3,0012$  terá 7 casas decimais.

### 17 — Divisão de números decimais.

Seja dividir 0,84816 por 0,72

$$\begin{array}{r|l} 0,84816 & 0,72 \\ 128 & 1,178 \\ 561 & \\ 576 & \\ 0 & \end{array}$$

Efetuamos a divisão como se os números fossem inteiros e no quociente separamos tantas decimais quantas forem as decimais do dividendo menos as do divisor.

Dividendo: 5 decimais.

Divisor: 2 decimais.

O quociente terá 3 decimais. ( $5 - 2 = 3$ ).

O quociente de dois números decimais será inteiro quando o dividendo e o divisor tiverem o mesmo número de decimais.

Exemplo:

Seja dividir 0,648 por 0,036

A divisão foi efetuada como se os dois números fossem inteiros.

O quociente é inteiro porque o número de decimais do dividendo é igual ao número de decimais do divisor.

$$\begin{array}{r|l} 0,648 & 0,036 \\ 288 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

### 18 — Observação.

Quando o número de decimais do dividendo for menor que o número de decimais do divisor, acrescentamos à direita do dividendo, como decimais, 1, 2, 3, ou mais zeros, de modo a fazer com que o número de decimais do dividendo seja *maior* ou quando muito *igual* ao número de decimais do divisor.

Com alguns exemplos podemos esclarecer essa regra.

### 19 — Exercício III.

Seja dividir 8,73 por 0,0032.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 8,7300 & 0,0032 \\ 233 & 2728 \\ 90 & \\ 260 & \\ 4 & \end{array}$$

Ao dividendo, antes de iniciar a divisão acrescentamos 2 zeros  
Dividimos, em seguida, os dois números como se fossem inteiros.  
O quociente aproximado será 2728.

### 20 — Exercício IV.

Seja dividir 8,4 por 280:

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 8,40 & 280 \\ 0 & 0,03 \end{array}$$

Acrescentamos um zero ao dividendo.

A divisão foi exata, apresentando o quociente 2 decimais. diferença entre o número de decimais do dividendo (2) e o número de decimais do divisor (0).

A operação que acabamos de efetuar indica que se dividirmos 8,4 em 280 partes iguais cada uma dessas partes será igual a 0,03 da unidade.

### 21 — Exercício V.

Seja dividir 0,16 por 0,0025.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 0,1600 & 0,0025 \\ 100 & 64 \\ 0 & \end{array}$$

Acrescentamos 2 casas decimais ao dividendo.

O quociente obtido é inteiro.

Essa operação indica que o número 0,16 contém 64 vezes o número 0,0025.

### 22 — Exercício VI.

Seja dividir 19 por 0,032.

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 19,000 & 0,032 \\ 300 & 593 \\ 120 & \\ 24 & \end{array}$$

Acrescentamos 3 casas decimais ao dividendo.

## 23 — Exercício VII.

Seja dividir 17 por 64:

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 17,000 & 64 \\ 420 & 0,265 \\ 360 & \\ 40 & \end{array}$$

O dividendo e o divisor são inteiros.

Acrescentamos ao dividendo 3 zeros e efetuamos a divisão como nos casos anteriores.

## 24 — Observação.

Na divisão de dois números decimais o divisor *não deve* sofrer modificação alguma.

É conveniente, na prática, que o dividendo tenha sempre sobre o divisor um excesso de 2 ou 3 decimais.

## 25 — Números decimais periódicos. — Dízimas periódicas.

Seja dividir 8,7 por 0,06:

$$\begin{array}{r|l} 8,30000 & 0,06 \\ 23 & 138,333 \\ 50 & \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Vemos que a parte decimal do quociente é formada pelo algarismo 3 repetido indefinidamente.

Diz-se que, nesse caso, o quociente é um *número decimal periódico* ou uma *dízima periódica*.

Escrevemos:  $\frac{8,3}{0,06} = 138,33\dots$

O sinal de continuidade ... corresponde à expressão *et-coetera* da linguagem vulgar.

*Número decimal periódico* é aquele cujos algarismos da parte decimal se repetem indefinidamente segundo uma certa lei.

Assim:

0,47272...

1,61616...

são números *decimais periódicos*.

## 26 — Período.

A parte que se repete indefinidamente num número decimal periódico chama-se *período*.

O período pode ter 1, 2, 3 ou mais algarismos.

Na dízima

1,7402402...

o período é 402 e tem portanto 3 algarismos; na dízima:

8,410808...

o período é 08, com 2 algarismos.

A periodicidade de um número decimal é indicada pelo sinal ... (etc.) repetindo-se o período duas vezes.

Exemplo: 6,129191... lê-se: seis vírgula, doze, noventa e um, noventa e um, etc.

O período é 91.

## 27 — Dízima periódica simples e composta.

A dízima periódica pode ser *simples* ou *composta*.

A periódica é *simples* quando o primeiro período começa logo depois da vírgula.

A periódica é *composta* quando entre a vírgula e o primeiro período ha uma parte que não se repete, chamada *parte não periódica*.

## 28 — Conversão de uma fração ordinária em número decimal.

Seja converter em número decimal a fração  $\frac{13}{32}$ .

Dividimos o numerador pelo denominador como no caso da divisão de números decimais:

$$\begin{array}{r|l} 13,00000 & 32 \\ 200 & 0,40625 \\ 80 & \\ 160 & \\ 0 & \end{array}$$

Temos assim:  $\frac{13}{32} = 0,40625.$

### 29 — Exercício VIII.

Converter em número decimal a fração  $\frac{11}{8}.$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 11,000 & 8 \\ 30 & 1,375 \\ 60 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \quad \frac{11}{8} = 1,375$$

### 30 — Exercício IX.

Converter em número decimal a fração  $\frac{5}{6}.$

$$\begin{array}{r|l} 5,000 & 6 \\ 20 & 0,833... \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Nesse caso a fração ordinária foi convertida num número decimal periódico.

$$\frac{5}{6} = 0,833...$$

### 31 — Conversão exata.

Para que uma fração ordinária irredutível seja convertível numa decimal exata é necessário e suficiente que o denominador não contenha, fatores primos diferentes de 2 ou de 5.

As frações irredutíveis :

$$\frac{7}{20} \quad \frac{12}{125} \quad \frac{11}{64}$$

podem ser convertidas em decimais exatas. O denominador da primeira 20 é igual ao produto  $2^2 \times 5$  e só contém, portanto, os fatores primos 2 e 5. O denominador da segunda 125, isto é,  $5^3$  só contém o fator primo 5 e o denominador da última só contém o fator primo 2.

### 32 — Determinação do número de decimais na conversão exata.

Seja  $\frac{107}{320}$ , por exemplo, a fração ordinária irredutível que queremos converter em decimal. O denominador dessa fração decomposto em fatores primos nos dá

$$320 = 2^6 \times 5$$

e esse resultado nos mostra que a fração  $\frac{107}{320}$  pode ser convertida numa decimal exata.

O maior expoente que figura no denominador é 6. Logo  $\frac{107}{320}$  pode ser convertida numa decimal exata com 6 casas decimais.



## 33 — Exercício XI.

Quantas casas decimais apresentará a fração  $\frac{7}{40}$  escrita sob a forma decimal?

Resolução:

A fração sendo irredutível vamos decompor o seu denominador em fatores primos  $40 = 2^3 \times 5$ .

Como o denominador só contém os fatores primos 2 e 5 concluímos que a fração dada convertida em decimal, dará uma decimal exata com 3 decimais.

## 34 — Conversão aproximada.

Quando uma fração ordinária irredutível não for conversível numa decimal exata, essa fração dará necessariamente como resultado de sua conversão em decimal, uma *dízima*.

Seja, por exemplo, a fração ordinária irredutível  $\frac{8}{35}$

Essa fração não pôde ser convertida numa decimal exata, pois o seu denominador contém o fator primo 7.

A fração  $\frac{8}{35}$  convertida em decimal dará uma *dízima periódica*

## 35 — Frações ordinárias conversíveis em dízimas periódicas simples.

Será conversível em *dízima periódica simples* a fração ordinária irredutível que tiver para denominador um número primo com 10, isto é, não divisível nem por 2 nem por 5.

Assim, as frações:

$$\frac{16}{77} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{14}{81}$$

convertidas em decimais darão, como resultado, *dízimas periódicas simples*.

## 36 — Frações ordinárias conversíveis em dízimas periódicas compostas.

A fração ordinária irredutível, cujo denominador contiver o fator primo 2 ou 5, juntamente com outros (3, 7, 11, etc.) convertidas em decimais darão *dízimas periódicas compostas*

As frações:  $\frac{15}{56}$ ,  $\frac{8}{15}$ ,  $\frac{3}{110}$  convertidas em decimais

darão *dízimas periódicas compostas*.

O denominador da primeira é par e contém o fator primo 7; o denominador da segunda é divisível por 5 e contém o fator primo 3 e o denominador da terceira é par e divisível por 11.

37 — Geratriz de uma *dízima periódica*.

A fração ordinária irredutível  $\frac{5}{6}$  convertida em decimal dá como resultado a *dízima* 0,833...

Dizemos então que  $\frac{5}{6}$  é a *geratriz* da *dízima* 0,833...

Chama-se *geratriz* de uma *dízima* a fração ordinária irredutível que convertida em decimal dá como resultado essa *dízima*.

38 — Determinação da geratriz de uma *dízima periódica simples*.

Vamos supor que nos foi dada, para converter em decimal, uma fração ordinária própria e em cujo denominador figura apenas o algarismo 9.

Seja, por exemplo, a fração  $\frac{23}{99}$ . Essa fração conver-

tida em decimal nos dará, como é fácil verificar, a dízima simples

$$0,2323\dots$$

Do mesmo modo a fração  $\frac{371}{999}$  convertida em decimal será 0,371 371...

Analogamente a fração  $\frac{5}{999}$  que poderá ser escrita  $\frac{005}{999}$  dará, pela conversão em decimal, a dízima 0,005 005...

Por êsses exemplos podemos concluir que a geratriz de uma dízima periódica simples é igual a uma fração ordinária que tem para numerador um dos períodos e para denominador um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período.

A dízima 0,14 14...

terá como geratriz a fração  $\frac{14}{99}$ .

### 39 — Exercício XII.

Determinar a geratriz da periódica 52,77...

Resolução:

$$\text{Temos: } 52,77\dots = 52 + 0,77\dots$$

$$\text{ou } 52 + \frac{7}{9}.$$

Convertendo em fração imprópria vem:

$$52,77\dots = \frac{52 \times 9 + 7}{9}.$$

Substituindo-se no numerador o número 9 pela diferença 10 — 1, temos:

$$52,77\dots = \frac{52 (10 - 1) + 7}{9}$$

Efetuando o produto de 52 pela diferença 10 — 1:

$$52,77\dots = \frac{520 - 52 + 7}{9}$$

Podemos escrever:

$$52,77\dots = \frac{527 - 52}{9}$$

Êsse resultado nos mostra que quando a dízima periódica simples contém parte inteira a sua geratriz pôde ser determinada do seguinte modo:

*Toma-se para numerador a parte inteira seguida de um dos períodos, menos a parte inteira; e para denominador um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos de período.*

$$\text{Exemplo: } 8,7171\dots = \frac{871 - 8}{99} = \frac{863}{99}.$$

### 40 — Geratriz de uma dízima periódica composta.

Seja, por exemplo, achar a geratriz da dízima periódica composta

$$0,4377\dots$$

Multipliquemos essa periódica por 100; temos: 43,77... e a geratriz desta será, como já vimos:

$$\frac{437 - 43}{9}$$

Dividimos esse resultado por 100, para obtermos a geratriz da dízima periódica dada:

$$\frac{437 - 43}{900}$$

Conclusão:

A geratriz de uma dízima periódica composta é igual a uma fração ordinária cujo numerador é a parte não periódica seguida de um dos períodos, menos a parte não periódica; e cujo denominador é um número formado de tantos noves quantos forem os algarismos do período seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica

Exemplo: a geratriz da periódica

$$0,3107107\dots$$

será a fração:

$$\frac{3107 - 3}{9990} = \frac{3104}{9990} = \frac{1552}{4995}$$

## Exercícios

- 44 — Escrever sob forma decimal as frações  $\frac{3}{32}$  e  $\frac{5}{48}$ .
- 45 — Calcular o inverso de 3,14 com três casas decimais.
- 46 — Calcular o valor da expressão:

$$\frac{8 \times 0,513 + 1,2 \times (0,31)^2}{0,502 \div 20}$$

- 47 — A quantia de 4:950\$000 representa 0,85 de certo capital. Calcular dois quintos desse capital.

## Leitura

### O PROBLEMA DOS 8 PÃES

(MALBA TAHAN)

(Do conto "O homem que calculava")

Três dias depois, quando nos aproximávamos de uma pequena aldeia — denominada "Lazzakka" — encontramos caído na estrada, um pobre viajante roto e ferido.

Socorremos o infeliz, e dele próprio ouvimos o relato de sua singular aventura.

Chamava-se Salen Nasair e era um dos mais ricos mercadores de Bagdad. Ao regressar, poucos dias antes, de Basora com uma grande caravana, fôra naquele logar atacado por um bando terrível de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada e quasi todos os homens pereceram nas mãos dos beduínos. Ele o chefe — conseguira milagrosamente escapar, oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos!

E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiada:

— Trazeis, agora, ó mussulmanos! — alguma coisa que se possa comer? Estou quasi a morrer de fome!

— Tenho três pães — respondi.

— Tenho ainda cinco! — ajuntou a meu lado, o "Homem que calculava".

— Pois bem — respondeu o cheik. — Juntemos êsses 8 pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdad, prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!

Assim fizemos. No dia seguinte, ao cair da tarde, chegámos a Bagdad.

Quando atravessávamos uma praça, encontramos um rico cortejo. Na frente marchava, em garboso alazão, o poderoso grão-vizir, Dammak Ali Takbou, amigo e confidente de califa.

O grão-vizir, ao avistar o cheik Salem Nasair em nossa companhia, chamou-o e fazendo parar a sua poderosa guarda, perguntou-lhe:

— Que te conteceu, ó meu amigo? Por que te vejo chegar a Bagdad, roto e maltrapilho, em companhia de dois homens que não conheço.

O desventurado cheik narrou, minuciosamente, ao poderoso ministro tudo o que lhe ocorrera em caminho, fazendo, a nosso respeito, os maiores elogios.

— Paga sem perda de tempo a êsses dois forasteiros — ordenou-lhe o grão-vizir. E tirando de sua bolsa 8 moedas de ouro, entregou-as a Salem Nasair.

Feito o que, ajuntou:

— Quero levar-te agora mesmo ao palácio, pois, o Emir dos Crentes deseja, com certeza, ser informado da nova afronta que os bandidos e beduínos nos fizeram, atacando uma caravana de Bagdad!

O rico Salem Nasair, disse-nos então:

— Vou deixar-vos, meus amigos. Quero antes, porém, agradecer o grande auxílio que hontem recebi de vós. E para cumprir a palavra dada, vou pagar agora, com 8 dinares de ouro o pão que generosamente me destes!

E dirigindo-se ao “Homem que calculava” disse-lhe:

— Vaes receber, pelos cinco pães, cinco moedas!

E voltando-se para mim, concluiu:

— E tu, ó “bagdaly”! pelos três pães, vaes receber três moedas!

Com grande surpresa, o “Calculista” objetou, respeitoso:

Perdão, ó cheik! Essa divisão pôde ser muito simples mas não é justa! Se eu dei 5 pães, devo receber 7 moedas; o meu companheiro “bagdaly” que deu 3 pães, deve receber apenas 1 moeda!

— Por Allah!! — exclamou o grão-vizir, Sammak-ali, interessado, vivamente, pelo caso. — Como justificas, ó estrangeiro! tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuiste com 5 pães, porque exiges 7 moedas?

O “Homem que calculava” aproximando-se do prestigioso ministro, assim falou:

— Vou provar, ó vizir! que a divisão das 8 moedas pela forma por mim proposta, é a mais justa e mais exata. Quando, durante a viagem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços comendo cada um de nós, um desses pedaços. Todos os 8 pães foram, portanto, divididos em 3 pedaços. Se eu dei 5 pães, é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços. Desses 24 pedaços, cada um de nós comeu 8. Ora, se eu dos 15 pedaços que dei, comi 8, dei na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços e comeu, também, 8, logo, deu, apenas 1. Os 7 que dei com 1 que o “bagdaly” deu, foram os 8 que couberam ao cheik Salem Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, receba apenas 1.

O grão-vizir, depois de fazer os maiores elogios ao “Homem que calculava”, ordenou que lhe fossem entregues 7 moedas, pois, a mim me cabia, apenas por direito, uma.

— Essa divisão — replicou o “Calculista” — conforme provei, é matematicamente justa, mas não é perfeita aos olhos de Deus!

E tomando as 8 moedas na mão dividiu-as em dois grupos, iguais, de 4 cada uma. Deu-me um dos grupos, guardando para ele, o outro.

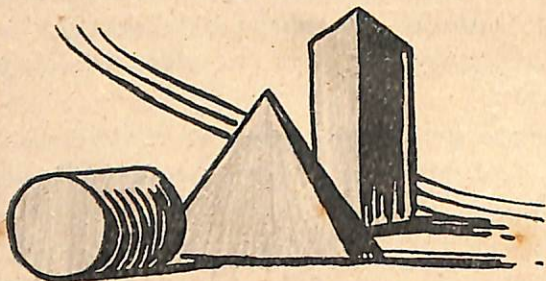
— Este homem é extraordinário! exclamou o grão-vizir — Além de me parecer um grande sábio, habilíssimo nos cálculos e na Aritmética, é bom para o amigo e generoso para o companheiro. Tomo-te hoje mesmo, ó exímio Matemático, para meu secretário.

— Poderoso Vizir — respondeu o “Homem que calculava” — vejo que acabais de fazer em 36 palavras, com um total de 177 letras, o maior elogio que ouvi em minha vida, quando eu, para agradecer-vos, sou forçado a empregar 72 palavras nas quais figuram nada menos de 354 letras. O dobro precisamente! Que Allah vos abençoe e vos proteja!

Com tais palavras o "Homem que calculava" deixou a todos nós maravilhados de sua argúcia e do seu invejável talento de calculista.

Com a Generosidade e a Riqueza, póde o homem deslumbrar os seus semelhantes; mas com o Talento e com a Ciência, póde dominar o mundo!

Uassalam!



## CAPÍTULO XIV

### ESTUDO DAS PRINCIPAIS NOÇÕES E FORMAS GEOMÉTRICAS

#### 1 — Noções preliminares.

Pela simples observação dos objetos que nos rodeam adquirimos as noções de *corpo*, *superfície*, *linha* e *ponto*.

Além dessas noções primárias, outras ha que não podemos igualmente definir — a noção de *espaço*, por exemplo.

Da observação dos corpos materiais podemos passar ao estudo de certas *figuras*, denominadas *figuras geométricas*, que nos são reveladas pela intuição (\*).

#### 2 — O ponto.

Se tocarmos com a ponta de uma agulha, ou de um lapis bastante fino, sobre uma folha de papel, fazendo um pequeno sinal, obtemos a imagem aproximada de um *ponto geométrico*.

O ponto geométrico, ou, simplesmente, o *ponto*, não tem dimensão, isto é, não é suscetível de medida.

Podemos ter uma *idéa* aproximada de um ponto quando observamos um corpo muito pequeno, como um grão de areia, por exemplo.

(\*) Graças a essa faculdade misteriosa — diz Boutroux — as figuras geométricas nos aparecem em conjunto nas mais harmoniosas combinações.

Uma estrela, visível a olho nú, aparece aos nossos olhos como um ponto luminoso.

*O ponto não se define.*

### 3 — Como se marca um ponto.

Marcamos um ponto com auxílio de dois pequenos traços que se cortam.

Um ponto é designado por meio de uma letra escrita junto desse ponto.

Exemplo: Ponto A, ponto B, ponto C, etc.

A × × C

### 4 — A linha.

Se fizermos a ponta de um lapis deslocar-se tocando sobre uma folha de papel vamos obter uma *linha*.

Dizemos, então, que um ponto quando se desloca descreve uma linha. Essa linha será *descrita* ou *gerada* por êsse ponto.

A linha descrita por um certo ponto é também denominada *trajetória* desse ponto.

Devemos admitir que as linhas, a que nos referimos em Geômetria, não têm largura, nem espessura; apresentam apenas uma dimensão: *o comprimento*.

Um fio de sêda bastante fino pode nos oferecer a imagem aproximada de uma linha.

*A linha não se define.*

### 5 — Como se designa uma linha.

Uma linha pode ser designada por uma ou mais letras.

Assim dizemos:



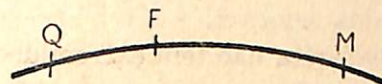
Linha S, linha PQ, linha abcd, etc.

Quando uma linha pode ser designada apenas por duas letras, devemos colocar uma em cada extremidade, como vemos em PQ.

### 6 — Pontos de uma linha.

Uma linha contém uma infinidade de pontos.

Marcamos um ponto sobre uma linha *cortando-a* por um pequeno traço como indica a figura. Temos, assim: ponto Q, ponto F, ponto M, etc.



Quando uma linha contém um ponto dizemos que essa linha *passa* por êsse ponto, ou que o ponto *pertence* a essa linha.

Exemplo: A linha QM *passa* pelo ponto F, reciprocamente, o ponto F *pertence* à linha QM.

E' evidente que por um mesmo ponto podem passar quantas linhas quizermos.

### 7 — A linha reta.

A mais simples de todas as linhas é a *linha reta*,

Um fio perfeito de sêda, bem esticado, dá-nos uma idéa aproximada da linha reta.

A linha reta é abreviadamente denominada a *reta*.

A reta não se define. Caracteriza-se por meio de certas propriedades, denominadas *postulados* (\*) da *reta*.

### 8 — Semi-reta.

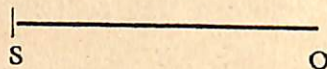
Marquemos sobre uma reta AB um ponto O. Êsse ponto divide a reta em duas partes chamadas *semi-retas*.



(\*) Postulado é um princípio que, em Matemática, aceitamos sem demonstração. O postulado não é tão evidente como o *axioma*.

*Semi-reta* é, portanto, uma das duas partes em que um ponto tomado sobre uma reta, divide essa reta.

Consideremos a semi-reta  $SO$  representada na figura abaixo. O ponto  $O$  é denominado *origem* da semi-reta.



A origem de uma semi-reta *deve ser sempre indicada* por um ponto. A semi-reta não tem extremidade.

9 — Semi-retas opostas.

Um ponto marcado sobre uma réta divide, como já dissemos, essa reta em duas semi-retas.

Essas duas semi-rétas são denominadas *opostas*.

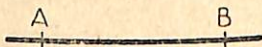
Dois semi-retas são opostas quando, tendo a mesma origem, formam, em conjunto, uma só reta.

10 — Segmentos de reta.

Marquemos sobre uma reta qualquer dois pontos  $A$  e  $B$ . A porção  $AB$  da reta é denominada um *segmento de reta* ou *segmento retilíneo* (\*).

A reta que contém um segmento é denominada *suporte* desse segmento.

Segmento de reta é uma porção limitada de uma reta.



Exemplo:  $MS$  é um segmento de reta.



O segmento de reta, ou abreviadamente, o *segmento* é definido pelos seus pontos extremos.

11 — Observação.

*Distância* entre dois pontos é o segmento de reta que une esses dois pontos.

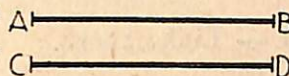
(\*) Na natureza encontramos segmentos de retas nas arestas das substâncias cristalizadas.

12 — Segmentos iguais.

Dois segmentos são iguais quando um deles pode coincidir exatamente com o outro.

Sejam  $AB$  e  $CD$  dois segmentos.

Coloquemos o segmento  $AB$  sobre  $CD$ . Se o ponto  $A$  coincidir com  $C$  e o ponto  $B$  coincidir com  $D$ , os dois segmentos são iguais.

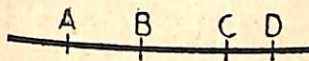


A igualdade de dois segmentos pode ser facilmente verificada com auxílio do compasso.

13 — Segmentos co-lineares.

Dois ou mais segmentos são co-lineares quando estão situados sobre o mesmo suporte.

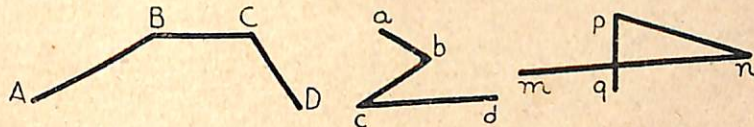
Assim,  $AB$  e  $CD$  são segmentos co-lineares.



Os segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  são co-lineares consecutivos.

14 — Linha quebrada ou poligonal.

Chamamos *linha quebrada* ou *poligonal* à figura formada por dois ou mais segmentos não co-lineares, porém, consecutivos.



Assim, na figura acima vemos três linhas quebradas ou poligonais:  $ABCD$ ,  $abcd$  e  $mnpq$ .

Os segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  são chamados *lados* da linha poligonal  $ABCD$ .

Os pontos  $A$  e  $D$  são as *extremidades* da linha poligonal  $ABCD$ .

A soma dos lados é denominada *perímetro* da linha quebrada.

O perímetro da linha poligonal pode ser representado por um segmento.

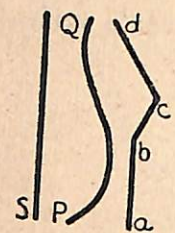
### 15 — Linha curva.

A linha que não é reta nem formada de partes de reta, é denominada *curva*.

Uma curva pode ser limitada ou não.

Na natureza encontramos uma infinidade de curvas.

A mais simples de todas as curvas é a *circunferência*.



Na figura ao lado *S* é uma linha reta. *PQ* uma linha curva e *abcd* uma linha poligonal.

### 16 — Superfície.

Vamos supor que sobre um certo objeto aplicamos uma camada de *colódio* (\*) — e que essa substância ao secar, se transformou numa perfeita película, cobrindo o objeto. Vamos supor ainda que o referido objeto desapareceu, ficando apenas a película sem espessura apreciável que o envolvia, formada pelo colódio.

Essa película é a imagem aproximada da superfície do referido objeto construída materialmente.

A superfície geométrica não tem espessura; não pode, portanto, existir isoladamente.

(\*) É uma solução de uma substância orgânica denominada nitrocelulose, empregada na fotografia e na fabricação de explosivos.

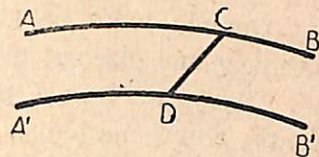
Uma bolha de sabão, uma folha de papel, etc., são imagens aproximadas de superfícies.

A superfície não se define.

### 17 — Geração de uma superfície.

Vamos supor que uma certa linha *AB* se desloque, ocupando uma infinidade de posições até *A'B'*.

Admitamos que um ponto *C* de *AB* descreva uma linha *CD*. As linhas descritas assim pelos pontos de *AB* formam a figura geométrica que denominamos *superfície*.



A superfície pôde ser, portanto, considerada como gerada por uma linha móvel.

Essa linha móvel é a *geratriz* da superfície.

Temos uma impressão material desse fato quando observamos a fabricação de um tecido; a máquina vai reunindo os fios (que representam as linhas) para formar o tecido (que representará, no caso, a superfície).

### 18 — Linhas de uma superfície.

Sobre uma superfície qualquer podemos traçar uma infinidade de linhas e marcar uma infinidade de pontos.

Exemplo: Sobre uma folha de papel ou sobre uma bola de marfim podemos traçar uma infinidade de linhas.

Quando uma linha é traçada sobre uma superfície dizemos que a superfície *contém* a linha ou que *passa* pela linha. A linha está, nesse caso, *contida* na superfície.

Quando uma linha está contida numa superfície, todos os pontos dessa linha pertencem também à superfície.



## 19 — A superfície plana.

De todas as superfícies a mais simples é a *superfície plana* ou o *plano*.

O plano não se define. Caracteriza-se por meio de suas propriedades denominadas *postulados do plano*.

## 20 — Figura plana; figura reversa.

Quando todos os pontos de uma figura pertencem ao mesmo plano dizemos que essa figura é *plana*.

A *figura plana* é, portanto, aquela que tem todos os seus pontos no mesmo plano.

A figura não plana é denominada *reversa*.

## 21 — Sólido ou corpo geométrico.

*Sólido* ou *corpo geométrico*, é uma porção de espaço limitado em todos os sentidos.

A porção de espaço maior ou menor, limitado por um corpo é o *volume* desse corpo.

Quando consideramos um corpo geométrico qualquer — um cubo ou uma esfera, por exemplo — devemos fazer abstração da matéria de que é feito e atender somente à forma.

## 22 — Figura geométrica. Geometria.

A um conjunto formado de pontos, linhas, superfícies ou corpos geométricos denominamos *figura geométrica*.

Nas figuras geométricas temos a considerar: a forma, a grandeza e a posição.

Quando observamos, por exemplo, se uma linha é poligonal ou curva, estamos apenas apreciando a *forma*.

Se procuramos verificar se uma certa figura é maior ou menor que outra, estamos, nesse caso, apreciando a *grandeza*.

A *Geometria* é a parte da Matemática que estuda as figuras geométricas do ponto de vista da forma, grandeza e posição.

## 23 — Retas paralelas.

Duas ou mais retas são paralelas quando, situadas no mesmo plano, não se encontram.

Dois ou mais segmentos são paralelos quando os seus suportes forem retas paralelas.

Duas ou mais semi-retas são paralelas quando as retas obtidas prolongando-se essas semi-retas foram paralelas.

## 24 — Ângulo.

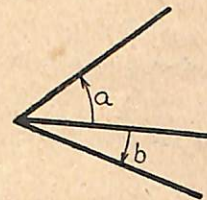
Chama-se *ângulo* a figura formada por duas semi-retas que têm a mesma origem.

Essas semi-retas são denominadas *lados* e a origem comum é o *vértice* do ângulo.

*Abertura* de um ângulo é o afastamento dos lados.

## 25 — Ângulos adjacentes.

Dois ângulos são *adjacentes* quando têm o vértice comum e são separados por um lado comum. Assim os ângulos *a* e *b* na figura ao lado são adjacentes.



## 26 — Ângulos iguais. Ângulos desiguais.

Dois ângulos são iguais quando têm igual abertura, isto é, quando pôde haver entre eles, colocando-se um sobre o outro, coincidência dos vértices e dos lados.

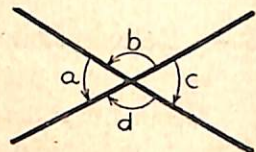
Quando os ângulos não têm a mesma abertura são desiguais. O maior será aquele que tiver mais abertura.

27 — Retas perpendiculares. Ângulo reto.

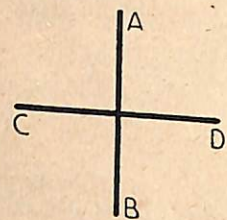
Da interseção de duas retas resultam quatro ângulos adjacentes *a*, *b*, *c* e *d*.

Quando êsses quatro ângulos forem iguais as retas são *perpendiculares*.

Dizemos que duas rétas são perpendiculares quando formam ângulos adjacentes *a*, *b*, *c* e *d*.



As retas *AB* e *CD* são perpendiculares no ponto *O*.



Os quatro ângulos formados por duas perpendiculares são chamados *ângulos retos*.

As semi-retas *OA* e *OD* que formam um ângulo reto são perpendiculares.

28 — Mediatriz de um segmento.

*Mediatriz* de um segmento é a perpendicular ao meio desse segmento.

29 — Ângulo agudo. Ângulo obtuso.

O ângulo menor que o reto é denominado *agudo*; o ângulo maior que o reto é *obtusos*.

30 — Polígonos.

Chama-se *polígono* a figura formada por uma linha poligonal, quando houver nessa linha coincidência dos pontos extremos.

Conforme o número de lados os polígonos podem ser:

Triângulo .....	3 lados
Quadrilátero .....	4 "
Pentágono .....	5 "

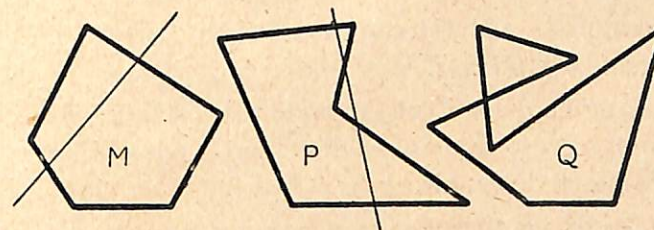
Hexágono .....	6 lados
Heptágono .....	7 "
Octógono .....	8 "
Eneágono .....	9 "
Decágono .....	10 "
Undecágono .....	11 "
Dodecágono .....	12 "
Pentadecágono .....	15 "
Icoságono .....	20 "

Os outros polígonos não têm denominação especial; dizemos: polígono de 13 lados, polígono de 16 lados, etc.

31 — Polígonos convexos e não-convexos.

Um polígono é *convexo* quando não pode ser *cortado* por uma reta em mais de dois pontos.

Um polígono é denominado *não-convexo* quando pode ser cortado por uma reta em 3 ou mais pontos.



*M* na figura acima é um polígono convexo; *P* e *Q* são polígonos não-convexos.

No presente estudo só consideraremos os polígonos convexos.

32 — Perímetro.

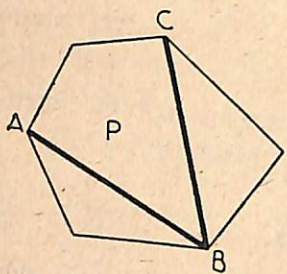
*Perímetro* de um polígono é a soma dos lados desse polígono.

*Perímetro* de um polígono é a soma dos lados desses polígonos.

## 33 — Polígono regular.

Um polígono é *regular* quando tem os lados e ângulos iguais.

## 34 — Diagonal de um polígono.



Chama-se *diagonal* de um polígono o segmento que liga dois vértices não consecutivos. Assim *AB* e *BC* são diagonais do polígono *P*.

Um polígono pode ter duas ou mais diagonais.

## 35 — Triângulo. Classificação.

Triângulo é o polígono de *três lados*.

Os triângulos, em relação aos lados, podem ser: *equiláteros*, *isósceles* e *escálenos*.

Um triângulo é *equilátero* quando tem os três lados iguais; é *isósceles* quando só tem dois lados iguais, e é *escáleno* quando tem os três lados desiguais.

Em relação aos ângulos os triângulos podem ser: *acutângulos*, *retângulos* e *obtusângulos*.

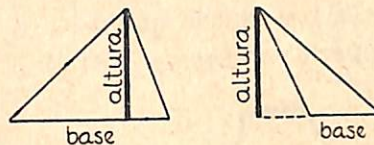
Um triângulo é *acutângulo* quando seus três ângulos são agudos; é *retângulo* quando tem um ângulo reto; é *obtusângulo* quando tem um ângulo obtuso.

## 36 — Observação.

No triângulo retângulo o maior lado é denominado *hipotenusa* e os outros dois, que formam o ângulo reto, são denominados *catetos*.

## 37 — Altura de um triângulo.

*Altura de um triângulo* é a perpendicular tirada de um vértice até encontrar o lado oposto ou o prolongamento deste.



O lado sobre o qual tiramos a altura é a *base* do triângulo.

Um triângulo tem *três* alturas; a cada altura corresponde uma base.

## 38 — Quadrilátero.

*Quadrilátero* é o polígono de quatro lados.

## 39 — Paralelogramos.

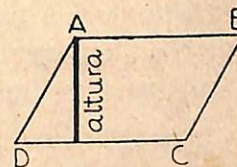
*Paralelogramo* é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.



*Quadrado* (Q) é o paralelogramo que tem os lados e ângulos iguais; *losango* (L) é o paralelogramo que tem os lados iguais; *retângulo* (R) é o paralelogramo que tem os quadrados ângulos iguais.

## 40 — Altura de um paralelogramo.

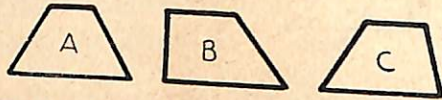
Chama-se *altura* de um paralelogramo, em relação à *base DC*, à distância entre *DC* e o lado *AB* que lhe é paralelo. No retângulo a altura é igual a um dos lados.



## 41 — Trapézio.

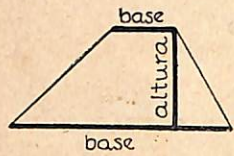
Trapézio é o quadrilátero que só tem dois lados paralelos.

Trapézio *isósceles* ou *simétrico* (A) é aquele que tem os dois lados não paralelos iguais; *trapézio retângulo* (B) é o



trapézio que tem dois ângulos retos; um *trapézio é escaleno* (C) quando não fôr nem isósceles nem retângulo.

## 42 — Bases de um trapézio. Altura.



Num trapézio qualquer os lados paralelos são denominado *bases*.

Altura de um trapézio é a distância entre as bases.

## 43 — Circunferência. Círculo.

*Circunferência* é a linha curva plana, fechada, cujos pontos são equidistantes de um ponto interior chamado *centro*.

*Raio* é a distância constante do centro a um ponto qualquer da curva. Designamos em geral o raio pela letra *R*.

*Corda* é o segmento que liga dois pontos quaisquer da curva.

*Diâmetro* é uma corda que passa pelo centro.

O diâmetro é igual a  $2R$ .

*Arc* é uma porção qualquer da curva.

*Círculo* é a porção de plano limitada pela circunferência.

Na linguagem vulgar emprega-se muitas vezes a palavra círculo para designar a curva.

## 44 — Relação entre a circunferência e o diâmetro. Número.

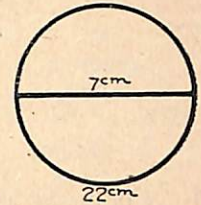
Vamos supor que medimos cuidadosamente o comprimento de uma circunferência e achamos 22 centímetros.

Medimos em seguida o diâmetro encontramos 7 centímetros.

Temos assim:

$$C = 22 \text{ cm}$$

$$2R = 7 \text{ cm}$$



Se dividirmos a circunferência *C* pelo diâmetro  $2R$  encontramos um *quociente aproximado igual a 3,14*.

$$\frac{22}{7} = 3,14.$$

Para uma outra circunferência qualquer a relação entre *C* e o diâmetro  $2R$  é aproximadamente igual ao número 3,14.

Demonstraremos mais tarde que a relação entre a circunferência e o diâmetro é um número *constante*.

Essa relação constante é representada pela letra grega  $\pi$  (pi).

$$\pi = \frac{\text{Circunferência}}{\text{Diâmetro}} \quad 3,14 \text{ (número abstrato)}$$

$\pi$  é a relação constante entre a circunferência e o diâmetro. O valor de  $\pi$  é aproximadamente igual a 3,14.

## 45 — Determinação da circunferência.

A relação entre a circunferência e o diâmetro sendo igual a  $\pi$ , temos:

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

Como o dividendo *C* é igual ao produto do divisor ( $2R$ ) pelo quociente ( $\pi$ ), resulta:

$$C = 2R \times \pi$$

ou

$$C = 2 \pi R$$

Podemos assim calcular o comprimento de uma circunferência da qual conhecemos o raio.

## 46 — Exercício I.

Calcular o comprimento de uma circunferência que tem 6m de raio.

Resolução:

Conhecemos o valor de  $C$ .

$$C = 2 \pi R$$

Substituindo  $\pi$  pelo valor 3,14 e  $R$  por 6, temos:

$$C = 2 \times 3,14 \times 6$$

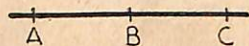
Efetuando o produto:

$$C = 37,68$$

A circunferência mede aproximadamente 37<sup>m</sup>, 68.

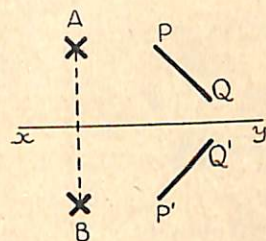
## 47 — Simetria em relação a um ponto.

Dois pontos  $A$  e  $C$  são simétricos em relação ao ponto  $B$  quando  $B$  for o meio do segmento  $AC$ .



Numa circunferência, por exemplo, os pontos extremos de um diâmetro são simétricos em relação ao centro.

## 48 — Simetria em relação a uma reta.

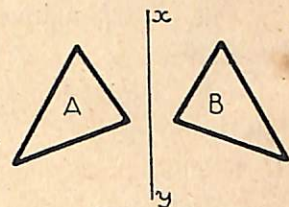


Dois pontos  $A$  e  $B$  são simétricos em relação a uma reta  $xy$  quando essa reta for a *mediatriz* do segmento  $AB$ .

Duas linhas  $PQ$  e  $P'Q'$  são simétricas, uma da outra, em relação a  $xy$ , quando todos os seus pontos são dois a dois simétricos em relação à reta  $xy$ .

## 49 — Figuras simétricas.

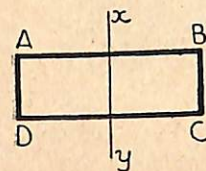
Duas figuras  $A$  e  $B$ , são simétricas uma da outra em relação a  $xy$ , quando, cada ponto da figura  $A$  tem um simétrico em  $B$ .



Dobrando-se cuidadosamente o papel em  $xy$  a figura  $B$  vai coincidir com a figura  $A$ .

## 50 — Figura simétrica. Eixo de simetria.

Diz-se que uma figura é *simétrica* quando pode ser dividida por uma reta em duas partes simétricas, uma da outra, em relação a essa reta.



Essa reta é denominada *eixo de simetria* da figura.

Exemplo: Um retângulo  $ABCD$  é dividido por uma perpendicular  $xy$ , ao meio de  $AB$ , em duas partes simétricas. A reta  $xy$  é um eixo de simetria do retângulo.

Ha figuras que admitem vários eixos de simetria.

Qualquer diâmetro é um eixo de simetria da circunferência.



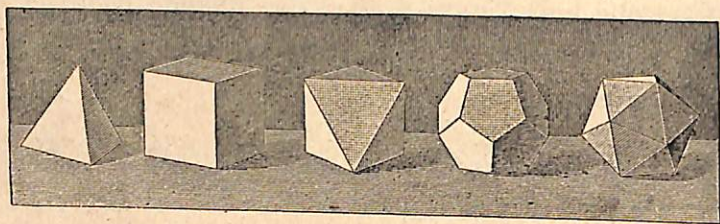
Na figura acima vemos alguns exemplos de simetria na natureza.

Um quadrado, por exemplo, admite uma diagonal como eixo de simetria.

### 51 — Poliedros.

*Poliedro* é um sólido limitado por polígonos planos, tendo, dois a dois, um lado comum.

Êsses polígonos planos são as *faces* do poliedro; os lados



dêsses polígonos são as *arestas* do poliedro e os vértices são os *vértices* do poliedro.

Na figura anterior vemos cinco poliedros regulares que são: o *tetraedro*, *hexaedro*, *octaedro*, *dodecaedro* e *icosaedro* com 4, 6, 8, 12 e 20 faces, respectivamente.

### 52 — Diagonal de um poliedro.

*Diagonal* de um poliedro é um segmento que une dois vértices não situados na mesma face.

### 53 — O prisma.

*Prisma* é um poliedro limitado por dois polígonos iguais e paralelos, chamados bases, e tantos paralelogramos ou retângulos quantos forem os lados da base.

Êsses paralelogramos ou retângulos são as *faces* do prisma.

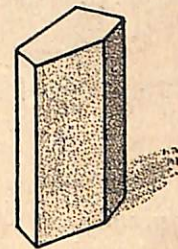
*Aresta* do prisma é um lado qualquer das faces ou das bases.

Os prismas, segundo a natureza das bases, podem ser: *triangulares*, *quadrangulares*, *pentagonais*, etc.

*Prisma oblíquo* é aquele em que as arestas laterais são oblíquas em relação às bases.

*Prisma regular* é um prisma reto, cuja base é um polígono regular. *Altura de um prisma* é a distância entre as bases.

Num prisma reto a altura é igual à aresta lateral.



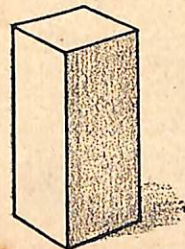
### 54 — O paralelepípedo.

*Paralelepípedo* é um prisma cujas bases são paralelogramos.

*Paralelepípedo reto* é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares às bases.

*Paralelepípedo retângulo* é um paralelepípedo reto cujas bases são retângulos.

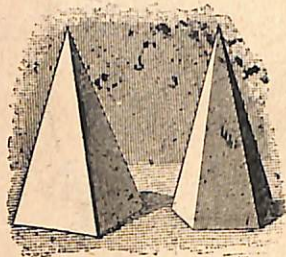
*Paralelepípedo oblíquo* é aquele cujas arestas são oblíquas em relação às bases, não sendo essas bases retangulares.



O Paralelepípedo que tiver todas as faces quadradas iguais chama-se *cubo* ou *hexaedro regular*.

## 55 — A pirâmide.

*Pirâmide* é um poliedro que tem por base um polígono qualquer e por faces laterais triângulos com o mesmo vértice e dois a dois um lado comum.



Uma pirâmide pode ser *triangular*, *quadrangular*, *pentagonal*, etc., segundo a base é triângulo, quadrilátero, pentágono, etc.

A pirâmide triangular é chamada também *tetraedro*.

Numa pirâmide triangular, qualquer face pode ser considerada como base.

*Altura* de uma pirâmide é o segmento da perpendicular abaixada do vértice ao plano da base.

*Pirâmide regular* é aquela em que a base é um polígono regular e a altura cae no centro da base.

## 56 — Cilindro.

Vamos supor que um retângulo  $ABCD$  gire em torno do lado  $DC$ .

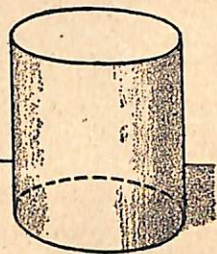
Os pontos  $A$  e  $B$  descreverão circunferências iguais.

O lado  $AB$  descreverá uma superfície curva denominada *superfície cilíndrica de revolução*

O sólido limitado por dois círculos iguais por uma superfície cilíndrica é um *cilindro*.

Os dois círculos são chamados *bases* do cilindro e a distância entre as bases é a *altura* do cilindro.

O segmento  $DC$  é o eixo do cilindro.



## 57 — Cone.

Vamos supor que um triângulo retângulo  $ABC$  gire em torno do cateto  $AB$ .

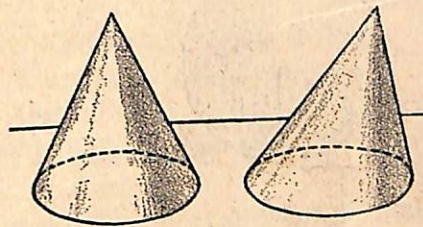
O ponto  $C$  descreverá uma circunferência.

A hipotenusa  $BC$  descreverá uma superfície denominada *superfície cônica de revolução*.

O sólido limitado por um círculo e uma superfície cônica é denominado *cone*.

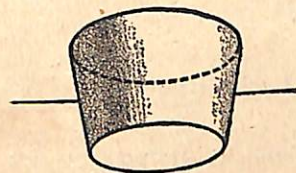
O círculo de raio  $AC$  é a *base* do cone.

*Altura* do cone é a distância do vértice à base.



## 58 — Tronco de cone.

A porção de cone compreendida entre a base e um plano paralelo à base é um *tronco de cone*.



Um tronco de cone tem duas *bases*. A distância entre as bases é a *altura* do tronco.

## 59 — Esfera.

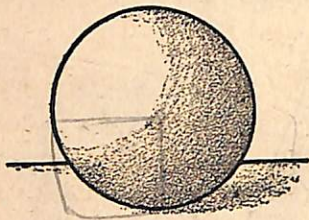
Se supuzermos que uma semi-circunferência gira em torno do seu diâmetro, essa semi-circunferência irá descrever uma superfície denominada *superfície esférica*.

O centro da semi-circunferência móvel será o *centro* da superfície esférica.

Todos os pontos da superfície esférica estão, portanto, a igual distância do centro.

O sólido, limitado por uma superfície esférica é denominado *esfera*.

*Raio* da esfera é a distância de um ponto qualquer da superfície esférica ao centro.



*Diâmetro* da esfera é um segmento de reta que, passando pelo centro, une dois pontos da superfície da esfera.

Se cortarmos a esfera por um plano qualquer, a secção que obtemos é um *círculo*.

Se cortarmos uma esfera por um plano que passa pelo centro a secção que obtemos é um *círculo máximo*. Se o plano pelo qual cortamos a esfera, não passar pelo centro a secção será um *círculo menor*.

O diâmetro da esfera perpendicular ao plano de um círculo da esfera, é o *eixo* desse círculo. As extremidades do eixo chamam-se *pólos*.

Os círculos cujos planos são perpendiculares a um diâmetro da esfera, *AB* por exemplo, são chamados *círculos polares* de *A* e *B*.

O círculo máximo chama-se *equador*.

*Zona* é a porção da superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos que cortam a esfera.

*Fuso* é a porção da superfície esférica determinada por dois planos que cortam a esfera, passando pelo centro.

## Exercícios

- 48 ✗ Traçar um quadrilátero que tenha três ângulos (internos) agudos.
- 49 ✗ Em que caso a altura de um triângulo é igual a um dos lados?
- 50 ✗ Calcular o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 4<sup>m</sup>.

## Leitura

### A MATEMÁTICA ENTRE OS HEBREUS

(HOEFFER)

Os Hebreus da mesma raça dos Fenícios, dos quaes eram limítrofes, possuíam também êsse espírito mercantil, que nesse povo singular vem se transmitindo de geração em geração. Parece-nos, pois, inútil dizer que os Hebreus deviam ser hábeis conhecedores da arte de calcular. A invenção da Aritmética — na opinião do historiador Josepho — cabe unicamente aos israelitas. Segundo afirma Josepho o patriarca Abrahão foi o mais antigo de todos os calculadores e dele os Egípcios receberam os primeiros ensinamentos de Aritmética. A julgar, realmente, por certas passagens do Pentateuco os setários de Moisés iniciaram-se muito cedo na ciência dos números; na verdade, porém, pelos cálculos que se nos depa-ram no Antigo Testamento os conhecimentos matemáticos dos Hebreus não iam além dos rendimentos das quatro primeiras operações.

As nove primeiras letras do alfabeto hebraico representavam respectivamente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. As treze letras seguintes representavam os números 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300 e 400. O número 1000 era representado pela primeira letra encimada por dois pontos.

(Do livro "Histoire des Mathématiques").





## CAPÍTULO XV

## NÚMEROS COMPLEXOS

## 1 — Definição.

Na medida de certas grandezas podemos obter números de duas formas: *números complexos* e *incomplexos*.

Um número concreto toma a forma de *número complexo* (\*) quando aparece expresso por unidades da mesma espécie, mas de ordens diferentes.

Exemplo: A expressão 8 *dias*, 4 *horas* e 12 *minutos*, resultante da medida de certo intervalo de tempo, representa um *número complexo*. Esse número complexo será escrito sob a seguinte forma:

$$8^d \ 4^h \ 12^m$$

A formação das diversas ordens de unidades, nos números complexos, não é feita segundo o princípio básico do sistema decimal.

No número complexo já citado

$$8^d \ 4^h \ 12^m.$$

figuram três unidades de tempo: o *dia*, a *hora* e o *minuto* — que são de ordens diferentes.

O mesmo intervalo de tempo definido pelo número  $8^d \ 4^h \ 12^m$  corresponde precisamente a 11772 minutos.

(\*) A denominação de *números complexos*, fora da Matemática elementar, é dada pelos autores aos números que não pertencem ao conjunto dos números reais.

Podemos escrever:

$$8^d \ 4^h \ 12^m = 11772^m.$$

O número  $11772^m$  é uma forma *incomplexa* do número complexo.

$$8^d \ 4^h \ 12^m$$

## 2 — Unidade principal.

Entre as unidades que figuram em um número complexo existe, em geral, uma a que somos, às vezes, obrigados, a reduzir todas as outras. Essa unidade é denominada *unidade principal*.

A unidade principal é quasi sempre a maior unidade que figura no mesmo complexo.

## 3 — Grandezas expressas em números complexos.

Mostraremos fartas vezes neste capítulo que o emprego dos números complexos no cálculo dificulta de certo modo as operações.

Apesar desse grave inconveniente quasi todas as grandezas eram antigamente expressas em números complexos.

A partir do século XVIII foram adotados novos sistemas de medidas nos quais a formação das diversas ordens obedecia à lei decimal.

Para a medida de certas grandezas, entretanto, foram mantidos os antigos sistemas. E assim ainda hoje são expressas em números complexos as medidas de tempo, de ângulo, as quantias em dinheiro inglês, etc.

## 4 — Medida de tempo.

Considerava-se, antigamente, como unidade principal de tempo o dia solar médio, isto é, o tempo gasto pela terra para fazer uma rotação completa em torno de seu eixo.

Adotou-se modernamente como unidade principal de tempo o *segundo*.

O segundo corresponde precisamente a  $\frac{1}{86400}$  do dia.

Os múltiplos do *segundo* são:

- O *minuto* que vale 60 segundos;
- a *hora* que vale 60 minutos;
- o *dia* que vale 24 horas.

Além dessas são ainda empregadas outras unidades de tempo:

- a *semana* que vale 7 dias;
- o *mês* que vale 30 ou 31 dias; (\*)
- o *ano* que vale 365 dias; (\*\*)

Os múltiplos do ano são:

o <i>bienio</i> . . . . .	2 anos
o <i>trienio</i> . . . . .	3 anos
o <i>quatrienio</i> . . . . .	4 anos
o <i>quinquenio</i> ou <i>lustro</i> . . . . .	5 anos
o <i>decenio</i> ou <i>decada</i> . . . . .	10 anos
o <i>século</i> . . . . .	100 anos
o <i>milênio</i> . . . . .	1000 anos (***)

Os múltiplos do ano são:

o <i>bimestre</i> . . . . .	2 meses
o <i>trimestre</i> . . . . .	3 meses
o <i>semestre</i> . . . . .	6 meses

(\*) Queremos citar aqui, a título de curiosidade, os seguintes versos populares:

*Trinta dias tem Setembro,  
Abril, Junho e Novembro.  
Fevereiro vinte e oito tem.  
Se for bisexto mais um lhe dê  
E os mais, que sete são,  
Trinta e um todos terão!*

(\*\*) O ano trópico vale 365,242217.

(\*\*\*) O período de 1000 anos é também denominado *milênio*.

### 5 — Observação.

Quando o número que exprime o ano for divisível exatamente por 4 (sem terminar por dois zeros) esse ano será *bissexto*. Assim 1936, 1940, 1944, etc., serão *anos bissextos*.

O ano quando é bissexto tem um dia a mais, isto é, tem 366 dias. O dia a mais é incluído no mês de Fevereiro que passa a ter 29 dias.

O ano secular, isto é, aquele que termina por dois zeros (1500, 1600, etc.) só será bissexto se o número das suas centenas for divisível por 4. Exemplo: o ano 1600 foi bissexto, pois 16 é um múltiplo de 4; os anos 1700, 1800 e 1900 não o foram. (\*)

### 6 — Medida dos ângulos.

Vamos supor que um ângulo reto foi dividido em 90 ângulos iguais.

Cada um desses ângulos será  $\frac{1}{90}$  do ângulo reto

O ângulo igual a  $\frac{1}{90}$  do ângulo reto é denominado *ângulo de grau*

O ângulo reto terá, portanto, 90 graus.  
O ângulo de 1 grau é dividido em 60 partes iguais denominadas *minutos*; o *minuto* é por sua vez, dividido em 60 partes iguais denominados *segundos*. (\*\*)

Os graus, minutos e segundos são designados, respectivamente, pelos sinais: 0 , „

(\*) Esse sistema é adotado por todos os povos que seguem o *calendário gregoriano*.

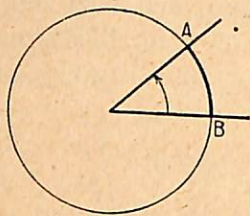
(\*\*) É adotado na *Marinha*, em certos casos, um sub-múltiplo do segundo denominado *terceiro*. O terceiro corresponde a  $\frac{1}{60}$  do segundo.

Assim um ângulo de 8 graus, 32 minutos e 25 segundos será indicado do seguinte modo:  $8^{\circ}32'25''$ .

Os arcos menores que o segundo são expressos em décimas ou em centésimos do segundo. (\*)

### 7 — Medida dos arcos.

Seja  $AB$  um arco qualquer; liquemos as extremidades  $A$  e  $B$  desse arco ao centro  $O$  do círculo.



Obtemos, assim, um *ângulo central*  $AOB$ . O número de graus do ângulo será igual ao número de graus do arco.

Os arcos são, portanto, medidos em graus, minutos e segundos.

O arco de  $360^{\circ}$  corresponde a uma circunferência, isto é, se dividirmos a circunferência em 360 partes, iguais cada um desses arcos corresponderá ao ângulo central de 1 grau. (\*\*)

### 8 — Moedas inglesas.

No sistema monetário inglês a principal unidade é a *libra esterlina*.

(\*) Em geral para as necessidades da prática a avaliação em graus já é suficiente. Basta dizer que numa circunferência de 3 metros de raio o arco de 1 minuto é tão pequeno que não chega a medir 1 milímetro de comprimento.

Os astrônomos, entretanto, em certos cálculos, são obrigados a apreciar até 1 centésimo do segundo.

(\*\*) Convém observar que a circunferência admite um outro modo de divisão, mais simples que a divisão em graus, e que tem a vantagem de evitar os números complexos.

No sistema decimal a circunferência é dividida em 400 partes iguais chamadas *grados*.

O grado se subdivide decimalmente, isto é, em decigrados, centigrados, miligrados, etc.

Exemplo. O ângulo  $18^{\circ}19'$  poderá ser lido do seguinte modo: 18 graus e 185 miligrados.

Alguns autores, entretanto, dão à centésima parte do grado o nome

A libra é dividida em 20 *shillings* (ou soldos) e o shilling em 12 dinheiros (*pence*, plural de *penny*). (\*)

A libra é representada pelo sinal £, o shilling por *s* e o dinheiro por *d*.

Assim para indicar a quantia de 23 libras, 15 shillings e 9 dinheiros escrevemos:

$$£ 23-15s-9 d$$

ou, segundo a notação corrente:

$$£ 29-15-9$$

Os ingleses, em certos casos, avaliam as quantias em *guinéus*. O guinéu é uma moeda que não tem mais existencia real e que vale 21 shillings.

A libra ou *soberano* contém 240 dinheiros.

### 9 — Conversão de um complexo em unidades da menor subdivisão.

Determinar o número de minutos contidos em  $6^d 18^h 35^m$

Resolução :

Como o dia tem 24 horas, 6 dias terão:

$$24 \times 6 = 144 \text{ horas}$$

Somando às 18 horas do número dado:

$$144 + 18 = 162 \text{ horas.}$$

A hora tendo 60 minutos, 162 horas valerão:

$$60 \times 162 = 9720 \text{ minutos}$$

de *minuto centesimal*, e à centésima parte do minuto centesimal dão a denominação de *segundo centesimal*.

(\*) O penny é dividido em 4 *farthings*.

Juntando a êsses 9720 minutos os 35 minutos do complexo dado obteremos o número procurado de minutos:

$$9720^m + 35^m = 9755 \text{ minutos}$$

Podemos escrever:  $6^d 18^h 35^m = 9755^m$ .

### 10 — Exercício I.

*Reduzir £ 15-11-10 a dinheiros.*

Resolução:

Como a libra tem 20 shillings, 15 libras valerão:

$$20 \times 15 = 300s.$$

e £ 15.11s valerão:

$$300s + 11s = 311s.$$

Tendo o shilling 12d, 311s ou £ 15.11s. terão

$$12 \times 311 = 3732d$$

e £ 15.11s. 10d valerão:

$$3732d + 10d = 3742d.$$

Logo: £ 15-11-10 = 3742d.

### 11 — Exercício II.

*Converter £ 8-12-6 em uma fração da libra.*

Resolução:

Procedendo como no caso do exercício anterior reduzimos o complexo dado a dinheiros e achamos 1080 dinheiros.

Para converter essa quantia de 1080 dinheiros em libras basta dividir o número de dinheiro por 240.

$$\frac{1080}{240}$$

Simplificando essa fração obtemos:

$$\frac{9}{2} \text{ ou } 4 \frac{1}{2}$$

A quantia de £ 8-12-6 é igual a 4 libras e meia.

$$£ 8-12-6 = £ 4 \frac{1}{2}$$

### 12 — Exercício III.

*Determinar a fração da hora equivalente a  $28^m, 12^s$ .*

Resolução:

A fração considerada terá para numerador o número de segundos contidos no complexo dado e para denominador o número de segundos contidos em uma hora.

Façamos, pois, a conversão de 28 minutos e 12 segundos em segundos.

$$\begin{aligned} 28 \times 60 &= 1680 \text{ (segundos)} \\ 1680 + 12 &= 1692 \text{ (segundos)} \end{aligned}$$

E como uma hora tem 3600 segundos a fração pedida será:

$$\frac{1692}{3600}$$

Simplificamos essa fração achamos:

$$\frac{47}{100} \text{ ou } 0,47$$

Conclusão:  $28^m 12^s$  é igual a 0,47 da hora.

### 13 — Redução de um número incomplexo a complexo.

Dado um número escrito sobre forma de *incomplexo* há, às vezes, conveniência em transformá-la em um número *complexo*.

Essa transformação é denominada *decomposição do número incomplexo*.

Na decomposição de um número incomplexo temos três casos a considerar:

I) — o número incomplexo é expresso por unidades de ordem inferior (Exercício IV);

II) — o número incomplexo é uma fração ordinária de uma unidade de ordem superior (Exercício V);

III) — o número incomplexo é uma fração decimal de uma unidade de ordem superior (Exercício VI).

#### 14 — Exercício IV.

Quantas horas, minutos e segundos ha em 28400 segundos?

Resolução:

Sabemos que 60 segundos formam 1 minuto. Dividamos pois, o número 28400 por 60; o quociente obtido será o número de minutos contidos em 28400 segundos:

$$\begin{array}{r|l} 28400 & 60 \\ 440 & 473 \\ 200 & \\ 20 & \end{array}$$

O número 28400 segundos é, portanto, igual a 473 minutos e 20 segundos.

Como, porém, 60 minutos formam 1 hora, dividamos 473 minutos por 60 e determinaremos assim o número de horas contidas em 473 minutos.

$$\begin{array}{r|l} 473 & 60 \\ 53 & 7 \end{array}$$

Em 473 minutos ha 7 horas e 53 minutos.

Podemos escrever:

$$28400^s = 7^h 53^m 20^s$$

Na prática a decomposição do incomplexo dado será feita pelo seguinte dispositivo prático de cálculo:

$$\begin{array}{r|l|l} 28400 & 60 & 60 \\ 440 & 473 & 7 \\ 200 & 53 & \\ 20 & (\text{minutos}) & (\text{horas}) \\ (\text{segundos}) & & \end{array}$$

#### 15 — Exercício V.

Determinar o número de libras, shillings e dinheiros contidos em  $\frac{89}{12}$  da libra

Resolução:

Extraindo os inteiros da fração dada achamos:

$$\frac{89}{12} = 7 \frac{5}{12}$$

Na fração dada ha 7 libras e  $\frac{5}{12}$  da libra

Tomemos a fração própria  $\frac{5}{12}$  e multipliquemo-la por 20, pois cada libra vale 20 shillings. O produto obtido será o número de shillings equivalentes a  $\frac{5}{12}$  da libra:

$$\frac{5}{12} \times 20 = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

Extraindo os inteiros da fração resultante:

$$\frac{25}{3} = 8 \frac{1}{3}$$

Encontramos assim 8 shillings e  $\frac{1}{3}$  do shilling

Multipliquemos a fração  $\frac{1}{3}$  por 12, pois cada shilling tem 12 dinheiros:

$$\frac{1}{3} \times 12 = 4$$

Podemos escrever:

$$£ \frac{89}{12} = £ 7-8-4$$

### 16 — Exercício VI.

Quantos dias, horas e minutos há em  $3^d,35$  ?

Resolução:

O número incomplexo dado corresponde a 3 dias e 35 centésimos do dia. Temos:

$$3^d,35 = 3^d + 0^d,35$$

Como o dia tem 24 horas multipliquemos a fração 0,35 por 24:

$$0,35 \times 24 = 8,4$$

O produto obtido 8,4 exprime o número de horas equivalentes às 0,35 do dia:

$$0^d,35 = 8^h,4$$

ou

$$0^d,35 = 8^h + 0^h,4$$

Tendo cada hora 60 minutos multipliquemos a fração 0,4 da hora por 60. O produto obtido será dado em minutos.

$$0,4 = 60 = 24 \text{ minutos}$$

Conclusão:

$$3^d,35 = 3^d 8^h 24^m$$

Na prática damos ao cálculo a seguinte disposição:

$3^d$	$0,35$	$0,4$
	$\times 24$	$\times 60$
	$140$	$24,0$
	$70$	
	$8,4$	

O resultado final será dado pelas partes inteiras dos resultados parciais:

$$3^d 8^h 24^m$$

### 17 — Exercício VII.

Um automóvel percorreu certa distância em  $4^h,135$ . Explicar esse intervalo de tempo em horas, minutos e segundos.

Resolução:

$4,135$	$0,135$	$0,1$
	$\times 60$	$\times 60$
	$8,100$	$6,0$

Resposta: 4 horas, 8 minutos e 6 segundos.

## 18 — Exercício VIII.

Converter a quantia £ 3-2-6 em decimal da libra. (\*)

Resolução:

Determinamos, como no Exercício I (pag. 212) o número de dinheiro contidos em

$$£ 3-2-6$$

Feita a conversão achamos:

$$£ 3-2-6 = 750d$$

$$\begin{array}{r|l} 750,000 & 240 \\ 300 & 3,15 \\ 600 & \\ 1200 & \\ 0 & \end{array}$$

Dividindo 750 por 240 achamos para quociente 3,15, que é o número de libras equivalente à quantia dada.

## 19 — Adição de números complexos.

Seja somar os números complexos:

$$18^{\circ}17'39'',5; 43'52''; 29^{\circ}59'48'',6.$$

Escrevemos os números complexos uns em baixo dos outros de modo que as unidades da mesma ordem se correspondam em coluna. Somamos as unidades da mesma ordem, a começar pelas menores; se a soma das unidades de uma ordem qualquer exceder o número que indica quantas vezes essa unidade está contida na de ordem imediatamente superior, divi-

(\*) Alguns autores denominam os problemas desse tipo *decimalização de um número complexo*.

dimos a soma por êsse número; o resto escrevemos na coluna das unidades que estamos somando; o quociente é uma reserva que devemos juntar às unidades de ordem imediatamente superior.

Assim, somando os segundos, temos:

$$39'',5 + 52'' + 48'',6 = 140'',1.$$

Como o resultado obtido é maior do que 60, número de segundos contidos em 1 minuto, devemos dividir 140'',1 por 60. Encontramos o resto 20'',1, que escrevemos na coluna dos segundos; o quociente 2' juntamos aos minutos. Teremos:

$$2' + 17' + 43' + 59' = 121'$$

O resultado obtido sendo maior do que o número de minutos contidos em 1 gráu, devemos dividir 121' por 60; obtemos o resto 1', que escrevemos na coluna dos minutos e o quociente 2º juntamos aos gráus. Teremos:

$$2^{\circ} + 18^{\circ} + 29^{\circ} = 49^{\circ},$$

resultados que escrevemos na coluna dos gráus.

Assim, a soma procurada é 49º1'20'',1.

## 20 — Exercício IX.

Uma pessoa comprou de um negociante de móveis uma estante por £ 1-8-5, um armário por £ 1-15-4 e duas cadeiras por £ 0-12-9. Em quanto importaram as peças compradas?

Resolução:

$$\begin{array}{r} £ 1- 8-5 \\ £ 1-15-4 \\ £ 0-12-9 \\ \hline £ 3-16-6 \end{array}$$