-se a soma dos valores absolutos de seus algarismos por 3. Assim o resto da divisão do número 1 724 por 3 é 2, porque 2 é o resto da divisão de $1 + 7 + 2 + 4 = 14$ por 3.

Do que ficou estudado podem ser tiradas as seguintes conclusões:

1ª) Para se saber se um número é divisível por 2, por 5 ou por 10, basta que se observe seu último algarismo da direita.

2ª) Para se saber se um número é divisível por 3 ou por 9, apenas se necessita somar os valores absolutos de seus algarismos.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Escreva três números de quatro algarismos divisíveis por 3.
2) Escreva três números de cinco algarismos divisíveis por 9.
3) Escreva três números de três algarismos divisíveis por 10.
4) Qual o resto do número 2 845 dividido por 10? E do número 1 759?
5) Dê três números diversos de seis algarismos, divisíveis, ao mesmo tempo, por 9 e por 2.
6) Diga se o número 142 920 é divisível por 2, por 3, por 5, por 9 e por 10 e quais as razões disso.
7) Diga-se o número 34 210 é divisível por 3 e por 5 e porquê.
8) Que resto tem o número que não é divisível por 2? Porquê?
9) Veja se o número 40 265 é divisível por 2, 3, 5, 9 e 10. Porquê?
10) Escreva um número de seis algarismos divisível, ao mesmo tempo, por 10, 5, 2, 3, 9.
11) Quais os restos das divisões dos números 1 488, 2 345, 5 021 e 4 187 por 5?
12) Quais os restos das divisões dos números 2 371, 40 695 e 3 587 por 9?
13) Quais os restos das divisões dos números 1 450, 2 837 e 4 517 por 3?

NÚMERO PRIMO. DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO EM FATÔRES PRIMOS

Número primo é o que só pode ser dividido exatamente por si e por 1.

Ex.: 19, 43, 67.

Cada um dêstes números apenas será dividido, sem que sobre resto, por si mesmo ou por 1.

Número composto é o que pode ser dividido exatamente por outros números, além dêle mesmo e de 1. Ex.: 33, 50, 57.

O número 33, por exemplo, além de ser divisível por 33 e por 1, também o é por 3 e por 11. É, por isto, um **número composto.**

Números primos entre si são vários números que só podem ser divididos, ao mesmo tempo, por 1. Ex.: Os números 23, 30 e 12.

Para se encontrarem os números primos até um número dado, faz-se o **crivo** de **Eratóstenes,** que era como se chamava o sábio grego que o inventou.

Para tanto aplica-se a seguinte regra:

Escrevem-se em ordem todos os números ímpares até o número dado e dos pares sòmente o número 2. Em seguida, corta-se cada terceiro número depois de 3; a seguir, faz-se o mesmo com cada quinto número depois de 5; logo após, cancela-se cada sétimo número depois de 7; novamente, cada décimo primeiro número depois de 11, e assim se continua com os outros números primos.

Os números cortados são os **compostos** e os não cortados, os **primos**.

Nota: — Dos números pares apenas o 2 é primo, porque é, ùnicamente, divisível por **1** e por **2**. Todos os demais são, pelo menos, divisíveis por êles mesmos, por 1 e por 2, logo, são compostos.

Achar os números primos até 113.

1, 2, 3, 5, 7, ~~9~~, 11, 13, ~~15~~, 17, 19, ~~21~~, 23, ~~25~~, ~~27~~, 29, 31, ~~33~~, ~~35~~, 37, ~~39~~, 41, 43, ~~45~~, 47, ~~49~~, ~~51~~, 53, ~~55~~, ~~57~~, 59, 61, ~~63~~, ~~65~~, 67, ~~69~~, 71, 73, ~~75~~, ~~77~~, 79, ~~81~~, 83, ~~85~~, ~~87~~, 89, ~~91~~, ~~93~~, ~~95~~, 97, ~~99~~, 101, 103, ~~105~~, 107, 109, ~~111~~, 113.

Podemos, também, saber se o número é primo ou composto sem o **crivo de Eratóstenes.**

Para verificarmos se um número é primo ou não, vamos dividindo-o pelos diferentes números primos, do menor para o maior. Se uma dessas divisões fôr exata, o número será **composto**. Se, porém, não o forem, continuaremos as divisões até que o quociente seja igual ou menor que o divisor.

Poderemos, então, afirmar que o número dado é primo.

1º Exemplo: O número 143 é primo ou composto?

Aplicando os caracteres de divisibilidade vemos que 143 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 5. Se o dividirmos por 7, encontraremos o resto 3. Finalmente, ao dividí-lo por 11, a operação é exata.

Com efeito:

$$\begin{array}{r|l} 143 & 7 \\ \hline 30 & 20 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 143 & 11 \\ \hline 33 & 13 \\ 0 & \end{array}$$

O número 143 é, portanto, composto.

2º Exemplo: Verificar se o número 89 é primo ou não.

Aplicando os caracteres de divisibilidade, vemos que 89 não é divisível por 2, 3 ou 5. Também por 7 a divisão deixa resto. O mesmo acontece com a divisão por 11, mas, como o quociente (8) já é menor do que o divisor (11), podemos afirmar que o número 89 é primo.

Com efeito:

$$\begin{array}{r|l} 89 & 7 \\ \hline 19 & 12 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 89 & 11 \\ \hline 1 & 8 \end{array}$$

DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO EM FATÔRES PRIMOS

Todo número que divide outro sem deixar resto, é **fator** ou **divisor** dêsse número.

Assim **2**, **3**, **4**, **6**, **12** são fatôres ou divisores de **12**, pois que qualquer um dêles divide **12** exatamente.

Todo número é um produto de fatôres primos.

Obter êsse produto é o que se chama decompor o número em seus fatôres primos.

Para se decompor um número em fatôres primos, acha-se o menor número primo que o divide exatamente; escreve-se êste fator primo à sua direita e, debaixo do número, o quociente; em seguida divide-se êste primeiro quociente pelo menor número primo que o divide exatamente; escreve-se êste segundo fator à sua direita e o segundo quociente debaixo do primeiro. Assim se continua até que o quociente seja 1.

Seja, por exemplo, o número 420 para se decompor em fatôres primos.

O primeiro número primo que o divide exatamente é 2 e o quociente 210. Por sua vez, o primeiro quociente tem para menor divisor primo 2, o que dá o quociente 105. Êste segundo quociente tem para menor fator primo 3 e o quociente é 35, que tem para menor fator comum 5 e para quociente 7. Afinal 7, número primo, só tem para divisor (além de 1), êle mesmo, 7, e o quociente é 1.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Temos, então, que

$$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \quad \text{ou}$$
$$220 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Diga os números primos até 209, fazendo o crivo de Eratóstenes.
2) Pelo processo das divisões, diga se são primos os números: 91, 345, 697, 1 911, 2 083, 3 021.
3) Decomponha em fatôres primos os seguintes números: 258, 840, 2 160, 6 468, 3 773, 4 004.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

Divisor comum é o número que divide vários outros, ao mesmo tempo, sem deixar resto.

Sejam os números 36 e 42. O primeiro tem para divisores, além de 1, os números 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36, e o segundo, os números 2, 3, 6, 7, 21, 42. Verifica-se que os números 36 e 42 têm para divisores comuns apenas os números 2, 3, 6, porque são os únicos que, ao mesmo tempo, os dividem exatamente. Observa-se, ainda, que, dêles três, o número 6 é o maior e, por isso, é êle o **máximo divisor comum** dos dois números dados.

Conclui-se, então, que — **máximo divisor comum** é o maior número que divide vários outros, ao mesmo tempo, exatamente.

O máximo divisor comum de vários números é indicado pelas letras m.d.c.

Assim: o m.d.c. de 20, 50 e 65 é 5.

Para se achar o m.d.c. de dois números divide-se o maior pelo menor; depois, o primeiro divisor pelo primeiro resto; a seguir, o segundo divisor pelo segundo resto, e assim por diante, até a divisão não deixar resto. O último divisor será o máximo divisor comum dos números dados.

Ex.: Quer-se o m.d.c. de 75 e 45.

	1	1	2
75	45	30	15
30	15	00	

15 é, pois, o m.d.c. de 75 e 45.

Para se encontrar o m.d.c. de três ou mais números, procura-se o m.d.c. de dois dêles, depois entre o terceiro e o primeiro m.d.c., e assim por diante. O último m.d.c. é o máximo divisor comum de todos os números dados.

Ex.: Achar o m.d.c. de 100, 60 e 45.

Procura-se o m.d.c. de 100 e 60:

Depois, o m.d.c. entre 45 e 20 que foi o m.d.c. achado para 100 e 60.

	1	1	2
100	60	40	20
40	40	00	

	2	4
45	20	5
05	0	

O m.d.c. de 100, 60 e 45 é 5.

Na pesquisa do m.d.c. entre três ou mais números, costuma-se, por uma questão de simplificação, fazê-lo por ordem de grandeza decrescente dos números dados.

Êste processo estudado é o **processo das divisões sucessivas.**

Quando logo a primeira divisão é exata, o número menor é o m.d.c.

Ex.: Achar o m.d.c. de 60 e 30.

	2	
60	30	
0		

Quando o m.d.c. encontrado é 1, os números são primos entre si.

É o que acontece, por exemplo, com os números 35 e 43.

Pode-se, também, achar o m.d.c. de vários números pela decomposição em fatôres primos:

Decompõem-se em fatôres primos os números dados e o m.d.c. é igual ao produto dos fatôres comuns aos números dados, cada um dêles tomado com o seu menor expoente.

Seja procurar o m.d.c. de 200, 110, 50.

Decompõe-se cada um dêles em seus fatôres primos.

200	2	110	2	50	2
100	2	55	5	25	5
50	2	11	11	5	5
25	5	1		1	
5	5				
1					

Assim: $\begin{cases} 200 = 2^3 \times 5^2 \\ 110 = 2 \times 5 \times 11 \\ 50 = 2 \times 5^2 \end{cases}$

Se o m.d.c. é igual aos fatôres comuns elevados aos menores expoentes, será igual a $2 \times 5 = 10$, que é o m.d.c. de 200, 110 e 50.

Conclui-se, então, que os divisores comuns de dois ou mais números são os divisores de seu m.d.c.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Dê os divisores comuns dos números 45, 270 e 1 125.
2) Procure, pelo processo das divisões sucessivas, o m.d.c. de 130 e 40.
3) Ache, pelo processo da decomposição em fatôres primos, o m.d.c. de 3 696 e 9 108.
4) Pelo processo das divisões sucessivas ache o m.d.c. de 90, 144 e 324.
5) Pelo processo da decomposição em fatôres primos procure o m.d.c. de 150, 90 e 240.
6) Ache pelos dois processos o m.d.c. de 84, 204 e 600.
7) São primos entre si os números 153 e 80? Porquê?
8) Não são primos entre si os números 105, 102 e 48? Porquê?
9) Qual o m.d.c. de 560 e 1 680?
10) Calcule o m.d.c. dos números *A*, *B*, *C*.

$$A = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3$$
$$B = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$C = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Quando um número é divisível por outro, diz-se que êle é **múltiplo** dêsse outro.

Múltiplo comum de dois ou mais números dados é o número divisível ao mesmo tempo pelos números dados.

Assim, 20 é múltiplo comum de 2, 4, 5, e 10.

Mas há muitos outros múltiplos comuns de 2, 4, 5 e 10. Com efeito, os números 40, 60, 80, 100, etc., também são múltiplos comuns de 2, 4, 5 e 10.

Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o menor número divisível, ao mesmo tempo, pelos números dados.

50 é o mínimo múltiplo comum de 5, 10 e 25 porque não há outro número menor do que 50 capaz de ser dividido, ao mesmo tempo, por 5, 10 e 25 sem deixar resto.

Indica-se o mínimo múltiplo comum de vários números pelas letras m.m.c.

Vejamos, agora, os processos para se conhecer o m.m.c.

Primeiro processo: Escrevem-se os números dados em linha horizontal separados por vírgulas. Dividem-se pelo menor divisor primo os números que por êle forem divisíveis, escrevendo-se, debaixo de cada um, o respectivo quociente. Os que não forem divisíveis, repetem-se. Assim se continua até que não haja mais números a dividir por êsse menor divisor primo. Em seguida faz-se o mesmo com os outros divisores primos, dos menores para os maiores, até que não haja mais divisão a efetuar.

O m.m.c. será o produto de todos os divisores encontrados.

Quer-se o m.m.c. de 80, 75, 200, 120.

80, 75, 200, 120	2
40, 75, 100, 60	2
20, 75, 50, 30	2
10, 75, 25, 15	2
5, 75, 25, 15	3
5, 25, 25, 5	5
1, 5, 5, 1	5
1, 1, 1, 1	

m. m. c. de 80, 75, 200, 120 = $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 =$ = 1 200 ou

m. m. c. de 80, 75, 200, 120 = $= 2^4 \times 3 \times 5^2 = 1\,200$

Segundo processo: Decompõe-se cada um dos números em fatôres primos. O m. m. c. é igual aos fatôres comuns e não comuns aos números dados, cada um dos fatôres afetado do seu maior expoente.

Achar o m. m. c. de 40, 150, 125, 200.

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

125	5
25	5
5	5
1	

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Portanto:

$$40 = 2^3 \times 5$$
$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$125 = 5^3$$
$$200 = 2^3 \times 5^2$$

O m.m c. de 40, 150, 125 e 200 é:

$$2^3 \times 3 \times 5^3 = 3\,000$$

Pode-se, ainda, achar o m.m.c. de dois números dividindo-se o produto dêles pelo seu m.d.c.

Seja procurar o m.m.c. de 150 e 120.
Produto dos dois números $150 \times 120 = 18\,000$

m.d.c. de 150 e 120

	1	4
150	120	30
30	00	

m.m.c. de 150 e 120 é $18\,000 \div 30 = 600$.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Dê quatro múltiplos de 16, de 25, de 17.
2) Dê dois múltiplos comuns de 16 e 20; de 30 e 45.
3) Procure o m.m.c. pelo processo da decomposição em fatôres primos de 50, 120 e 24.
4) Procure o m.m.c., pelos dois processos, dos números:
   a) 60, 32 e 40;
   b) 132, 120 e 48;
   c) 90, 150, 120 e 75;
   d) 44, 242, 66 e 220.

5) Calcule o m.m.c. dos seguintes números:

$A = 2^3 \times 5^2 \times 7$
$B = 2 \times 3 \times 5$
$C = 2 \times 3^2 \times 7$

$A' = 2 \times 3 \times 5$
$B' = 2^2 \times 5^2$
$C' = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

6) Usando o m.d.c., procure o m.m.c. dos números:
   a) 80 e 150. *b*) 50 e 90. *c*) 70 e 40.

FRAÇÃO ORDINÁRIA. FRAÇÃO PRÓPRIA. FRAÇÃO IMPRÓPRIA. NÚMERO MISTO. EXTRAÇÃO DE INTEIROS

Se tomarmos um melão e o dividirmos em duas partes iguais, cada uma delas será **uma fração** do melão, **um meio** ou **uma metade** do melão. Se dividirmos uma maçã em três partes iguais, cada uma delas constituirá, também, **uma fração** ou **um têrço** da maçã.

Se cortarmos uma fôlha de papel em quatro partes iguais, cada parte será, ainda, **uma fração** ou **um quarto** da fôlha. Sucede, porém, que, da própria fôlha de papel dividida em quatro partes iguais, alguém toma três delas para um trabalho. Êste alguém terá, igualmente, tomado **uma fração**, ou servir-se-á de **três quartas partes** da fôlha, ou **três quartos**. Ainda, se um menino dividir um pudim em oito partes iguais e der cinco destas partes a um colega, êste receberá **uma fração** do pudim correspondente a **cinco oitavas partes** ou **cinco oitavos**.

Nota-se, pois, que **a fração deve ser representada por dois números — um que mostra o número de partes em que a unidade é dividida e o outro que indica quantas dessas partes são tomadas.**

Os dois números que representam a fração chamam-se **têrmos da fração** e são o **numerador** e o **denominador**.

O **denominador** indica em quantas partes a unidade foi dividida.

O **numerador** exprime quantas dessas partes foram tomadas.

Quando se diz que um homem recebeu cinco sextos de uma quantia, nesta fração seis é o denominador, pois mostra o número de vêzes em que se dividiu a quantia, e cinco é o numerador, pois exprime quantas das seis partes êle recebeu.

Êstes dois têrmos são escritos um sôbre o outro, separados por um traço horizontal, chamado traço de fração.

O têrmo de cima é o numerador; o de baixo é o denominador.

Para se ler uma fração, lê-se, primeiro, o número que representa o numerador e, depois, o número do denominador com a designação de **meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos, nonos, décimos, centésimos, milésimos**, se êle fôr representado, respectivamente, por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1 000.

Ao denominador constituído **do número onze em diante lê-se o número seguido da palavra avos.**

Assim temos: $\frac{1}{2}$ (um meio); $\frac{2}{3}$ (dois terços); $\frac{3}{4}$ (três quartos); $\frac{4}{5}$ (quatro quintos); $\frac{5}{6}$ (cinco sextos); $\frac{2}{7}$ (dois sétimos); $\frac{3}{8}$ (três oitavos); $\frac{5}{9}$ (cinco nonos); $\frac{7}{10}$ (sete décimos); $\frac{33}{100}$ (trinta e três centésimos); $\frac{9}{1000}$ (nove milésimos), e ainda mais: $\frac{4}{11}$ (quatro onze avos); $\frac{4}{15}$ (quatro quinze avos); $\frac{5}{27}$

(cinco vinte e sete avos); $\frac{10}{99}$ (dez noventa e nove avos); $\frac{8}{130}$ (oito cento e trinta avos), etc.

Quando o denominador da fração é qualquer número, a **fração** é **ordinária**.

Ex.: $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{18}{135}$.

Quando a fração tem por denominador 10 ou qualquer potência de dez, chama-se **fração decimal**.

As frações ordinárias podem ser **próprias** e **impróprias**.

Fração própria é a que tem o numerador menor que o denominador.

Ex.: $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{33}$.

Fração imprópria é a que tem o numerador maior que o denominador ou igual a êle.

Ex.: $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{100}{80}$, $\frac{9}{9}$

Quando a fração imprópria tem o numerador igual ao denominador, ela é equivalente à unidade.

Assim: $\frac{5}{5} = 1$.

Com efeito, se dissermos: Mauro teve $\frac{5}{5}$ de um bôlo, queremos dizer que o bôlo foi dividido em cinco partes iguais e que Mauro teve cinco dessas partes, logo, o bôlo todo, ou 1 bôlo.

Se a fração imprópria com o numerador igual ao denominador vale 1, tendo o numerador maior que o denominador, claro está que valerá mais do que a unidade.

De fato, na fração $\frac{7}{4}$, por exemplo, temos $\frac{4}{4} + \frac{3}{4}$, ora, $\frac{4}{4}$ já vimos ser igual a 1, logo $\frac{7}{4}$ é igual a $1 + \frac{3}{4}$ ou $1\frac{3}{4}$, um **número misto. Tôda fração imprópria é**, portanto, **igual a um número inteiro ou a um número inteiro e fração, isto é, um número misto.**

Para se **extrair os inteiros de uma fração imprópria** divide-se o numerador pelo denominador e o quociente corresponderá aos inteiros nela contidos. Se houver resto, acrescenta-se aos inteiros do quociente uma fração que terá o resto para numerador e o divisor para denominador.

Ex.: Extrair os inteiros das frações $\frac{28}{4}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{25}{7}$.

$$\begin{array}{r|l} 28 & 4 \\ \hline 0 & 7; \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline 1 & 5; \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

$$\frac{28}{4} = 7 \qquad \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3} \qquad \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$

Pelo que vimos, podemos dizer que a fração imprópria $\frac{28}{4}$ corresponde a 7 inteiros; a fração $\frac{16}{3}$ equivale a cinco inteiros e um têrço; a fração $\frac{25}{7}$ é igual a três inteiros e quatro sétimos.

Podemos, ao contrário, transformar um número inteiro ou misto em fração imprópria.

Para se **representar um inteiro em forma de fração, dá-se-lhe para denominador a unidade.**

Ex.: Representar 5 em forma de fração: $\frac{5}{1}$

Para se **representar um inteiro em forma de fração cujo denominador seja dado,** multiplica-se o inteiro pelo denominador pedido e o produto será o numerador da fração pedida.

Seja representar 5 em quintos.

Já sabemos que 1 é igual a $\frac{5}{5}$, logo 5 é igual a cinco vêzes cinco quintos ou vinte e cinco quintos, portanto $= \frac{25}{5}$.

Para se transformar um número misto em fração imprópria, multiplica-se o inteiro pelo denominador da fração e o produto soma-se com o numerador; êste resultado escreve-se sôbre o denominador da fração.

Ex.: Transformar em fração imprópria: $4\,\frac{3}{5}$.

De acôrdo com a regra estudada, temos

$$\frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}.$$

PROPRIEDADES DAS FRAÇÕES

A) Alguém possui $\frac{3}{11}$ de uma quantia, o que equivale a dizer que a quantia foi dividida em onze partes iguais e êle recebeu três. Se multiplicarmos o numerador 3 por 3, teremos, então, que essa pessoa recebeu nove partes dessa mesma quantia, logo, recebeu, da segunda vez, uma fração três vêzes maior.

Verifica-se assim que:

Multiplicando-se o numerador de uma fração por um número, a fração fica multiplicada por êsse número.

B) Luizinho ganha $\frac{4}{9}$ ou quatro nonas partes de um pão, o que quer dizer: o pão foi dividido em nove partes iguais e ganhou quatro delas. Dividiu-as, porém, por seus quatro irmãos, logo cada um dêles recebeu uma quarta parte da porção de Luizinho, ou 4 dividido por 4, ou $\frac{1}{4}$. A fração de Luizinho ficou, assim, 4 vêzes menor.

Daí resulta que:

Dividindo-se o numerador de uma fração por um número, tôda a fração fica dividida por êsse número.

C) Mário comprou $\frac{2}{5}$ de um terreno. Se multiplicarmos o denominador da fração por 3, Mário passará a receber $\frac{2}{15}$ do terreno. É fácil de se ver que, desta forma, cada fração do terreno se tornou três vêzes menor, pois, em vez de dividido em cinco partes, foi dividido em quinze — três vêzes mais, e, como Mário continuou a ter duas partes, sua fração se tornou sem dúvida, três vêzes menor. Temos, então, que:

Multiplicando-se o denominador de uma fração por um número, a fração fica dividida por êsse número.

D) Um proprietário legou $\frac{3}{10}$ de sua fortuna a um asilo. Isto é o mesmo que afirmar que a fortuna foi dividida em dez partes iguais e ao asilo couberam três. Se se dividisse o denominador da fração $\frac{3}{10}$ por 2, teríamos c asilo recebendo $\frac{3}{5}$, isto é, a fortuna dividida em cinco partes, logo porções duas vêzes maiores e, como o asilo continua a ganhar duas, ou $\frac{2}{5}$, vê-se que a fração a receber é, agora, duas vêzes maior.

Daí:

Quando se divide o denominador de uma fração por um número, a fração é multiplicada por êsse número.

E) Por fim teremos:

Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os têrmos de uma fração por um mesmo número, ela não se altera.

Seja a fração $\frac{2}{5}$, cujos dois têrmos são multiplicados por 2 ou $\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$. Esta fração é igual a $\frac{2}{5}$.

Com efeito, multiplicando-se o numerador por dois, a fração tornou-se duas vêzes maior, mas, multiplicando-se o denominador por dois, ela se tornou também duas vêzes menor. É evidente, pois, que não se alterou.

Vejamos a fração $\frac{8}{12}$, cujos têrmos vamos dividir por 4. $\frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$, fração que é igual à primitiva $\frac{8}{12}$.

De fato, quando dividimos seu numerador por 4 ela se tornou quatro vêzes menor, quando dividimos seu denominador por 4, tornou-se quatro vêzes maior.

Não se alterou, certamente.

É baseado neste princípio de que — uma fração não se altera quando se dividem ambos os têrmos por um mesmo número — que iremos fazer o estudo da **simplificação das frações ordinárias**.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Escreva numa coluna as frações próprias e, noutra, as impróprias.

$$\frac{5}{8},\ \frac{7}{6},\ \frac{10}{5},\ \frac{3}{4},\ \frac{18}{7},\ \frac{19}{14},\ \frac{18}{18},\ \frac{1}{120},\ \frac{7}{1},\ \frac{22}{23}.$$

2) Escreva quatro frações diversas, cada uma igual a 1.

3) Extraia os inteiros das seguintes frações impróprias:

$$\frac{18}{5},\ \frac{60}{15},\ \frac{120}{17},\ \frac{133}{25},\ \frac{25}{25},\ \frac{60}{4},\ \frac{72}{24},\ \frac{99}{23}.$$

4) Represente sob a forma fracionária:
8, 15, 20, 12, 25.

6) Transforme em frações impróprias os seguintes números mistos:

$$2\frac{3}{4},\ 7\frac{5}{8},\ 3\frac{9}{10},\ 4\frac{3}{5},\ 10\frac{2}{9}.$$

7) Torne $\frac{2}{5}$ três vêzes maior; $\frac{5}{8}$ 4 vêzes maior; $\frac{10}{13}$ 5 vêzes menor; $\frac{7}{9}$ 6 vêzes menor; $\frac{5}{14}$ 7 vêzes maior.

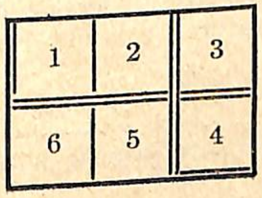
SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

As frações ordinárias podem ser **redutíveis** e **irredutíveis.**

Fração redutível é a que pode ser transformada em outra de têrmos menores, mas com o mesmo valor.

Assim a fração $\frac{4}{6}$ é redutível, porque se pode transformar na fração $\frac{2}{3}$, de têrmos menores e com o mesmo valor.

Seja, por exemplo, a figura abaixo, dividida em 6 partes iguais (1, 2, 3, 4, 5, 6) e das quais se tomam 4 (1, 2, 3, 4), o que importa dizer, de que se tomam $\frac{4}{6}$ e que valem tanto, como se pode observar, como $\frac{2}{3}$ ou duas terças partes (1 e 2, 3 e 4).



Fração irredutível é a que não se pode transformar em outra de têrmos menores, com o mesmo valor.

Na fração irredutível o numerador e denominador são primos entre si. Ex.: $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{21}{34}$.

Simplificar uma fração ordinária é reduzi-la a outra de têrmos menores mas com o mesmo valor.

Três são os processos para se simplificar uma fração ordinária.

1ª) **Processo das divisões sucessivas.**

Dividem-se, sucessivamente, ambos os têrmos da fração por seus **divisores primos comuns** até que ela se torne irredutível.

Ex.: Simplificar $\frac{60}{180}$

$$\frac{60 \div 2}{180 \div 2} = \frac{30 \div 2}{90 \div 2} = \frac{15 \div 3}{45 \div 3} = \frac{5 \div 5}{15 \div 5} = \frac{1}{3}.$$

2ª) **Processo da decomposição em fatôres primos.**

Decompõem-se o numerador e denominador da fração em seus fatôres primos e, depois, cancelam-se, de ambos os têrmos, os fatôres comuns.

Ex.: $$\frac{60}{180} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Outro exemplo; Simplificar $\frac{160}{300}$

$$\frac{160}{300} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 2 \times 2 \times \cancel{5}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{5} \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

3ª) **Processo do m.d.c.**

Dividem-se ambos os têrmos da fração por seu m.d.c.

Ex.: Simplificar $\frac{160}{300}$

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 1 & 1 & 7 \\ \hline 300 & 160 & 140 & 20 \\ \hline 140 & 20 & 00 & \end{array}$$

$$\frac{160 \div 20}{300 \div 20} = \frac{8}{15}$$

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Escreva quatro frações ordinárias redutíveis e quatro irredutíveis.

2) Pelo processo das divisões sucessivas simplifique as frações.

$$\frac{25}{40}, \quad \frac{80}{120}, \quad \frac{49}{147}, \quad \frac{72}{240}.$$

3) Pelo processo da decomposição em fatôres primos simplifique as frações:

$$\frac{16}{100}, \quad \frac{50}{125}, \quad \frac{54}{378}, \quad \frac{38}{646}.$$

4) Pelo processo do m.d.c. simplifique as frações:

$$\frac{75}{120}, \quad \frac{55}{220}, \quad \frac{64}{212}, \quad \frac{48}{124}.$$

5) Simplifique pelos três processos as frações:

$$\frac{250}{700}, \quad \frac{2916}{4374}, \quad \frac{720}{7920}, \quad \frac{1287}{3861}.$$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MESMO DENOMINADOR

As frações ordinárias ainda se podem dividir em **homogêneas** e **heterogêneas**.

Frações homogêneas são as que têm o mesmo denominador.

Ex.: $\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}; \frac{3}{19}, \frac{7}{19}, \frac{15}{19}.$

Frações heterogêneas são as que têm os denominadores diferentes.

Ex.: $\frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}; \frac{9}{14}, \frac{7}{20}, \frac{3}{100}.$

Quando estudamos as operações fundamentais dos números inteiros, vimos que só podemos efetuar somas e subtrações com grandezas homogêneas. O mesmo se pode dizer com as frações: apenas se podem somar ou diminuir frações homogêneas. Quando se reclamam tais operações para frações heterogêneas, necessitamos, então, de torná-las homogêneas, o que se consegue **reduzindo as frações ao mesmo denominador.**

Para se reduzirem várias frações ordinárias ao mesmo denominador, procura-se o mínimo múltiplo comum dos denominadores das frações dadas; a seguir, divide-se êste mínimo múltiplo comum pelos denominadores e cada quociente obtido multiplica-se por ambos os têrmos de cada fração.

Vejamos a redução ao mesmo denominador das frações:

$$\frac{4}{15} \quad \frac{3}{20} \quad \frac{7}{40}$$

15,	20,	40	2
15,	10,	20	2
15,	5,	10	2
15,	5,	5	3
5,	5,	5	5
1,	1,	1	

Mínimo múltiplo comum dos denominadores:

$$2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

Divisão do m.m.c. pelos denominadores:

$$120 \div 15 = 8; \quad 120 \div 20 = 6; \quad 120 \div 40 = 3.$$

Multiplicação dos quocientes por ambos os têrmos de cada fração.

$$\frac{4 \times 8}{15 \times 8} = \frac{32}{120}; \quad \frac{3 \times 6}{20 \times 6} = \frac{18}{120}; \quad \frac{7 \times 3}{40 \times 3} = \frac{21}{120}.$$

Pode-se, também, reduzir as frações ao mesmo denominador multiplicando-se ambos os têrmos de cada uma pelo produto dos denominadores das outras.

Queremos reduzir ao mesmo denominador:

$$\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{4}{11}.$$

Obteremos o resultado, multiplicando ambos os têrmos de cada uma pelo produto dos denominadores das outras:

$$\frac{2 \times 8 \times 11}{5 \times 8 \times 11} = \frac{176}{440}; \quad \frac{3 \times 5 \times 11}{8 \times 5 \times 11} = \frac{165}{440};$$

$$\frac{4 \times 5 \times 8}{11 \times 5 \times 8} = \frac{160}{440}.$$

Êste processo só é recomendável quando os denominadores das frações são primos entre si.

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

Se dissermos que um menino teve $\frac{5}{8}$ de um quilo de café e que seu irmão obteve $\frac{3}{8}$ de outro quilo de café, queremos dizer:

1º) que cada um dos quilos de café foi dividido em oito partes iguais;

2º) o primeiro menino recebeu cinco oitavas partes de um quilo de café;

3º) o segundo conseguiu três oitavas partes, também, de um quilo de café.

É evidente que o primeiro menino recebeu mais, logo, $\frac{5}{8}$ é maior que $\frac{3}{8}$, o que se indica da seguinte forma:

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

NOTA: O sinal > significa **maior do que** e o sinal <, **menor do que**. Observe-se que a abertura do sinal fica sempre voltada para o maior e seu vértice sempre defronte do menor.

Do que se estudou, conclui-se que:

De duas frações de denominadores iguais, a maior é a que tem maior numerador.

Titio comprou dois bolos iguais. Dividiu o primeiro em 3 partes iguais e deu duas delas, portanto, $\frac{2}{3}$, a Zeca. Dividiu o segundo bôlo em cinco partes iguais e deu duas delas, ou $\frac{2}{5}$, a Alice. É fácil de se perceber que Zeca teve maior porção, pois, se os bolos são iguais, cada uma das partes do que foi dividido em 3 porções iguais é maior do que cada uma do outro dividido em 5 partes iguais.

Daí dizer-se $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{5} < \frac{2}{3}$

Podemos, então, dizer:

De duas frações de numeradores iguais, a maior é a que tem menor denominador.

Se, porém, tivermos de comparar frações de denominadores diferentes, é claro que não o poderemos fazer imediatamente, porque frações de denominadores diferentes são heterogêneas e só podemos comparar grandezas homogêneas. Entretanto, já aprendemos a reduzir frações ordinárias ao mesmo denominador, o que acontece sem que os seus valores se alterem.

Então, quando temos de comparar frações de denominadores diferentes, reduzimo-las, primeiro, ao mesmo denominador e, depois, fazemos a comparação dos numeradores.

Ex.: Qual a maior: $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{3}{4}$?

Reduzindo-as ao mesmo denominador encontramos:

$$\frac{8}{12},\ \frac{10}{12},\ \frac{9}{12}.$$

Já sabemos que, entre frações de denominadores iguais, a maior é a que tem maior numerador, logo a maior é $\dfrac{10}{12}$ ou $\dfrac{5}{6}$, que é a sua equivalente.

Portanto $\dfrac{6}{5} > \dfrac{3}{2}$; $\dfrac{6}{5} > \dfrac{4}{3}$.

Ex: Escreva em ordem crescente

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{10}.$$

Reduzindo-se ao mesmo denominador

$$\frac{5}{20},\ \frac{8}{20},\ \frac{6}{20}.$$

Em ordem crescente

$$\frac{5}{20},\ \frac{6}{20},\ \frac{8}{20} \text{ ou } \frac{1}{4},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{5}.$$

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Reduza ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{3}{14},\ \frac{9}{10},\ \frac{8}{35};\ \frac{7}{24},\ \frac{9}{20},\ \frac{8}{15},\ \frac{5}{18},\ \frac{11}{12};$$

$$\frac{5}{16},\ \frac{7}{25},\ \frac{9}{40}.$$

2) Ponha $\times$ sôbre a maior fração e $+$ sôbre a menor:

$$\frac{2}{11},\ \frac{7}{11},\ \frac{9}{11},\ \frac{4}{11},\ \frac{6}{11},\ \frac{3}{11},$$

$$\frac{7}{18},\ \frac{7}{8},\ \frac{7}{25},\ \frac{7}{13},\ \frac{7}{15},\ \frac{7}{52};$$

$$\frac{4}{15},\ \frac{7}{12},\ \frac{9}{40},\ \frac{11}{25},\ \frac{13}{36}.$$

3) Ponha em ordem crescente:

$$\frac{4}{13},\ \frac{2}{13},\ \frac{7}{13},\ \frac{5}{13},\ \frac{10}{13},\ \frac{8}{13},$$

$$\frac{9}{10},\ \frac{9}{25},\ \frac{9}{12},\ \frac{9}{23},\ \frac{9}{19},\ \frac{9}{29};$$

$$\frac{3}{8},\ \frac{4}{15},\ \frac{7}{10},\ \frac{5}{12},\ \frac{11}{16},\ \frac{13}{20}.$$

4) Ponha em ordem decrescente:

$$\frac{7}{25},\ \frac{9}{40},\ \frac{17}{60},\ \frac{11}{12};\ \frac{25}{36},\ \frac{9}{26},\ \frac{29}{72};\ \frac{33}{120},\ \frac{49}{90},\ \frac{31}{50}.$$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Adição

PRIMEIRO CASO: **Somar frações homogêneas ou com o mesmo denominador.**

Somam-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.

Ex.:

$$\frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3 + 2 + 5}{11} = \frac{10}{11}$$

SEGUNDO CASO: **Somar frações de denominadores diferentes ou heterogêneas.**

Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso.

Ex.:

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{5} + \frac{7}{10} = \frac{15}{40} + \frac{16}{40} + \frac{28}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$$

TERCEIRO CASO: **Adição com números inteiros ou mistos.**

Transformam-se os inteiros ou mistos em frações impróprias e faz-se como no segundo caso.

Ex.:

$$\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4} + 2 + \frac{1}{10} = \frac{2}{5} + \frac{7}{4} + \frac{2}{1} +$$

$$+ \frac{1}{10} = \frac{8}{20} + \frac{35}{20} + \frac{40}{20} + \frac{2}{20} = \frac{85}{20} =$$

$$= 4\frac{5}{20} = 4\frac{1}{4}$$

Primeiro reduziram-se o número misto $1\frac{3}{4}$ e o inteiro 2 a frações impróprias, respectivamente $\frac{7}{4}$ e $\frac{2}{1}$. Depois reduziram-se as frações ao mesmo denominador; em seguida somaram-se as frações homogêneas. Do resultado $\frac{85}{20}$ foram extraídos os inteircs e fêz-se a simplificação da fração, logo $4\frac{1}{4}$.

Pode-se, ainda, somar um inteiro com uma fração, multiplicando-se o inteiro pelo denominador da fração, somando-se o produto com o numerador e dando-se-lhe o mesmo denominador.

Ex.:

$$3 + \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Subtração

PRIMEIRO CASO: **Subtrair frações com denominadores iguais.**

Subtraem-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.

Ex.:

$$\frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11 - 4}{15} = \frac{7}{15}$$

SEGUNDO CASO: **Subtração de frações com denominadores diferentes.**

Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e faz-se, depois, como no primeiro caso.

Ex.:

$$\frac{8}{15} - \frac{2}{9} = \frac{24}{45} - \frac{10}{45} = \frac{14}{45}$$

TERCEIRO CASO: **Subtrair uma fração de um inteiro.**

Multiplica-se o inteiro pelo denominador da fração e do produto subtrai-se o numerador; ao resultado dá-se o denominador da fração.

Ex.:

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 - 3}{4} = \frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4}$$

Pode-se, também, dar ao inteiro a forma de fração e fazer-se como no segundo caso.

QUARTO CASO: **Subtração com números mistos.**

Transformam-se os números mistos em frações impróprias e depois procede-se como no segundo caso.

Ex.:

$$2\,\frac{3}{4} - 1\,\frac{5}{12} = \frac{11}{4} - \frac{17}{12} = \frac{33}{12} - \frac{17}{12} =$$

$$= \frac{16}{12} = 1\,\frac{4}{12} = 1\,\frac{1}{3}$$

Multiplicação

PRIMEIRO CASO: **Multiplicar um inteiro por uma fração ou vice-versa.**

Multiplica-se o inteiro pelo numerador da fração e dá-se o mesmo denominador.

Ex.:

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\,\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{5} \times 4 = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5} = 1\,\frac{3}{5}$$

SEGUNDO CASO: **Multiplicar frações diversas.**
Multiplicam-se entre si os têrmos das frações.

Ex.:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 2 \times 3}{5 \times 3 \times 8} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

TERCEIRO CASO: **Multiplicar números mistos.**
Transformam-se os números mistos em frações impróprias e multiplicam-se estas frações.

Ex.:

$$2\frac{1}{3} \times 3\frac{2}{5} \times 1\frac{1}{2} = \frac{7}{3} \times \frac{17}{5} \times \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{357}{30} = 1\frac{27}{30} = 1\frac{9}{10}$$

Divisão

PRIMEIRO CASO: **Dividir uma fração por um inteiro.**

a) Se o numerador da fração fôr divisível pelo inteiro, faz-se a divisão e dá-se o mesmo denominador.

Ex.:

$$\frac{8}{11} \div 2 = \frac{8 \div 2}{11} = \frac{4}{11}$$

b) Se o numerador não fôr divisível pelo inteiro, conserva-se o numerador e multiplica-se o inteiro pelo denominador.

$$\frac{7}{11} \div 2 = \frac{7}{11 \times 2} = \frac{7}{22}$$

SEGUNDO CASO: **Dividir um inteiro por uma fração.**

Invertem-se os têrmos da fração e aplica-se a regra da multiplicação.

Ex.:

$$2 \div \frac{5}{6} = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$$

TERCEIRO CASO: **Dividir uma fração por outra.**

Invertem-se os têrmos da fração divisora e depois multiplicam-se as duas.

Ex.:

$$\frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$$

QUARTO CASO: **Dividir números mistos.**

Transformam-se os números mistos em frações impróprias e depois dividem-se as frações, conforme a regra já estudada para o terceiro caso.

Ex.:

$$2\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2} = \frac{12}{5} \div \frac{3}{2} = \frac{12}{5} \times \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{24}{15} = 1\frac{9}{15} = 1\frac{3}{5}$$

FRAÇÃO DE FRAÇÃO

Para se achar uma fração de outra multiplica-se uma fração pela outra.

Ex.:

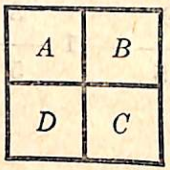
$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6 \div 2}{12 \div 2} =$$

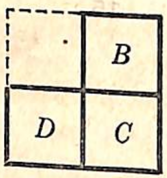
$$= \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$$

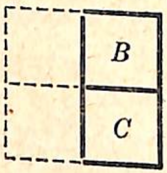
Imaginemos uma fôlha de papel quadrada e dividamo-la em 4 partes iguais (A, B, C, D). Consideremos $\frac{3}{4}$ dessa fôlha representados pelas partes B, C, D.

Se depois quisermos $\frac{2}{3}$ dêsses $\frac{3}{4}$ da fôlha, poderemos considerar as partes B e C.

Ora, B e C, reunidas, representam $\frac{1}{2}$ da fôlha.







Cancelamento

Quando, multiplicando-se frações ordinárias, no numerador e no denominador há fatôres comuns, cancelam-se êsses fatôres, o que abrevia e facilita a operação.

Ex.:

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}_3} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{2}{\cancel{15}_3} \times \frac{\cancel{8}^2}{13} = \frac{4}{117}$$

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

Efetue as operações seguintes:

1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} =$

2) $\frac{9}{11} - \frac{3}{11} =$

3) $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} =$

4) $4\frac{3}{10} + 2\frac{2}{25} - 2\frac{3}{5} =$

5) $\frac{8}{9} - \frac{2}{7} =$

6) $2\frac{3}{4} + 4\frac{1}{5} - 1\frac{1}{8} + \frac{7}{20} =$

7) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{7} - 5 =$

8) $2\frac{3}{10} \div 1\frac{1}{12} + \left[\frac{2}{5} + 8\right] =$

9) $8 \div \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \div 8 =$

10) $\frac{12}{17}$ de $\frac{9}{10} =$

11) $\frac{2}{25}$ de $\frac{7}{8} =$

12) $\left[4 \div \frac{2}{3} + 5\right] + \left[5 \div 1\frac{2}{3}\right] =$

13) $4\left[\frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{8}\right] + 2\left[1 \div \frac{3}{4}\right] =$

14) $$\frac{\frac{2}{5}\left[\frac{1}{8} \times \frac{3}{7} + 4\right] + 8}{2 \times \frac{6}{7} + \left[\frac{2}{7} \div \frac{4}{7}\right]} =$$

15) $$\frac{\frac{1}{4} \text{ de } \left[\frac{2}{9} + 2 \div \frac{2}{11}\right] + 3}{\left[\frac{2}{5} + \frac{3}{14} + 2 \times \frac{4}{5}\right] \div \left[4\frac{1}{6} - 2\right]} =$$

PROBLEMAS

1) Já gastei 4 200 cruzeiros correspondentes a $\frac{3}{5}$ de meu ordenado. Qual o meu ordenado?

2) Papai recebeu três grosas de laranjas e remeteu $\frac{7}{12}$ à tia Arminda. Quantas laranjas ela ganhou?

3) Certo negociante precisa fazer uma compra no valor de Cr$ 300 000,00 mas só tem $\frac{21}{25}$ dessa quantia. Quanto lhe falta?

4) Numa escola $\frac{1}{3}$ dos alunos é da primeira série, $\frac{1}{4}$ da segunda, $\frac{1}{6}$ da terceira, e o resto, ou 96 alunos, da quarta. Quantos alunos tem a escola?

5) Um caminhão tem de percorrer 960 quilômetros. No primeiro dia anda $\frac{2}{3}$ do percurso; no segundo, $\frac{1}{4}$ Quantos quilômetros ainda faltam para concluir a viagem?

6) Um negociante comprou 120 latas de banha. Pagou $\frac{3}{5}$ delas a 80 cruzeiros cada uma e o resto a 85. Já liquidou $\frac{13}{15}$ da despesa. Quanto deve ainda?

7) D. Maria fêz, numa loja, despesas no valor de 9 600 cruzeiros. Pagou $\frac{3}{5}$ da conta e pagará o resto em 6 prestações. De quanto será cada prestação?

8) Paulo e Chico apostaram em saber qual dos dois colecionava mais selos. Paulo verificou que $\frac{9}{11}$ de seus selos são iguais a 360 e Chico que 350 correspondem a $\frac{7}{9}$ dos seus. Quem venceu a aposta?

9) Um homem deixou de herança 840 000 cruzeiros assim distribuídos: $\frac{1}{3}$ para o filho; $\frac{1}{4}$ para o irmão; $\frac{1}{10}$ para um afilhado; $\frac{1}{5}$ para um amigo e o resto para um asilo. Quanto recebeu cada herdeiro?

10) Do que recebeu de ordenado, Manduca empregou $\frac{1}{3}$ na casa, $\frac{1}{4}$ do resto na pensão, $\frac{1}{5}$ do segundo resto em roupas. Ainda fica com 5 040 cruzeiros. Qual o seu ordenado? Quanto paga de casa, de pensão e de roupas?

NÚMEROS DECIMAIS

Chama-se **fração decimal** aquela cujo denominador é uma potência de 10, isto é, cujo denominador é formado por **1** seguido de um ou mais zeros.

Ex.: $\frac{7}{10}$, $\frac{33}{100}$, $\frac{47}{1000}$, $\frac{28753}{1000000}$

Vimos, ao estudar a numeração escrita, que **todo algarismo escrito imediatamente à esquerda de outro, representa um valor dez vêzes maior do que se estivesse no lugar dêsse outro.**

Mas êste princípio também pode ser enunciado: **todo algarismo escrito imediatamente à direita de outro representa um valor dez vêzes menor do que se estivesse no lugar dêsse outro.**

E chegamos, assim, a uma nova forma de escrever as frações decimais.

Tomemos o número 38 em que o algarismo 8 representa unidades.

Se à sua direita escrevemos 5, por exemplo, êste algarismo vale 10 vêzes menos do que se estivesse no lugar das unidades, isto é, vale 5 **décimos.**

O número todo ficará sendo 38 inteiros e 5 décimos.

Mas é necessário um sinal para indicar que 8 é o algarismo das unidades.

Êsse sinal é uma **vírgula (vírgula decimal)** colocada à direita do algarismo das unidades. Então **38 inteiros e 5 décimos** escreve-se 38,5.

Quando o número decimal não tem parte inteira, à esquerda da vírgula escreve-se um zero (0).

Se quisermos escrever o número decimal — **vinte e cinco centésimos**, escreveremos 0,25, isto é, em lugar da parte inteira, que não existe, empregaremos o zero (0), à esquerda da vírgula.

Os algarismos correspondentes às ordens decimais ficam, portanto, depois da vírgula, à direita e têm as seguintes designações:

décimos .... 1º algarismo depois da vírgula;
centésimos .... 2º algarismo depois da vírgula;
milésimos .... 3º algarismo depois da vírgula;
décimos milésimos .... 4º algarismo depois da vírgula;
centésimos milésimos .. 5º algarismo depois da vírgula;
milionésimos .... 6º algarismo depois da vírgula;
décimos milionésimos .. 7º algarismo depois da vírgula;
centésimos milionésimos 8º algarismo depois da vírgula;
bilionésimos .... 9º algarismo depois da vírgula.
etc.

Para se escrever um número decimal, começa-se escrevendo-se a parte inteira e, em seguida, os décimos, os centésimos, os milésimos, etc.

Então o número trezentos e dois inteiros, seis décimos, oito centésimos e cinco milésimos escreve-se:

302,685.

Há várias maneiras **para se ler um número decimal.**

1ª) Lê-se todo o número dizendo-se, apenas, o nome da última casa decimal.

Ex.: Ler 34,025. (34 mil e 25 milésimos).

2ª) Lê-se, primeiro, a parte inteira, se houver, e, a seguir, a parte fracionária.

Ex.: Ler 8,0025. (8 inteiros e 25 décimos milésimos).
Ler 0,003. (3 milésimos).

3ª) Lê-se a parte inteira, se houver e, em seguida, cada casa decimal de per si.

Ex.: Ler 7,3045. (7 inteiros, 3 décimos, 0 centésimos, 4 milésimos e 5 décimos milésimos).

Propriedade do número decimal — O valor de um número decimal não se altera quando se acrescentam ou se suprimem zeros à sua direita.

Com efeito, os números

5,748 e 5,7480

têm o mesmo valor, porque em ambos são os mesmos os algarismos que representam as unidades, os décimos, os centésimos e os milésimos.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Escreva os seguintes números decimais:
8 inteiros, 124 milésimos.
2 451 centésimos.
10 inteiros, 3 milésimos e 3 milionésimos.
1 245 décimos.
8 438 milésimos.
25 inteiros, 1 234 centésimos milésimos.
2 milionésimos.
143 décimos milésimos.
12 e 87 centésimos milésimos.
4 centésimos, 4 décimos milésimos, 4 milionésimos.

2) Leia, conforme os diversos modos estudados:
2,125; 15,042; 0,025; 1,00001; 0,000025; 140,144; 10,0105; 0,0254; 0,00487.

204

OPERAÇÕES SÔBRE NÚMEROS DECIMAIS

Adição

Para somar números decimais, escrevem-se uns debaixo dos outros de modo que as vírgulas se correspondam. Somam-se, depois, como se fôssem números inteiros, colocando-se a vírgula no lugar correspondente.

Ex.: 0,25 + 1,345 × 0,244 + 1,0052 = 3,8442

$$\begin{array}{r} 0{,}25 \\ 1{,}345 \\ 0{,}244 \\ 2{,}0052 \\ \hline 3{,}8442 \end{array}$$

Subtração

Para subtrair decimais escreve-se o subtraendo sob o minuendo com as vírgulas correspondendo-se. Igualam-se as casas decimais e opera-se a subtração como se fôssem números inteiros, pondo-se a vírgula na ordem respectiva.

Ex.: 0,45 — 0,2435 = 0,2065

$$\begin{array}{r} 0{,}4500 \\ 0{,}2435 \\ \hline 0{,}2065 \end{array}$$

Multiplicação

Para multiplicar números decimais, procede-se como se se tratasse de números inteiros e, no produto, separam-se tantas casas decimais quantas tiverem os dois fatôres.

Se houver falta, completa-se com zeros escritos à esquerda, antes da vírgula.

Ex.: 2,42 × 3,6 = 8,712

$$\begin{array}{r} 2{,}42 \\ 3{,}6 \\ \hline 1452 \\ 726 \\ \hline 8{,}712 \end{array}$$

Separaram-se no produto três casas decimais, pois é êste o número de casas decimais dos dois fatôres — duas no multiplicando e uma no multiplicador.

Ex.: 0,045 × 0,003 = 0,000135

$$\begin{array}{r} 0{,}045 \\ 0{,}003 \\ \hline 0{,}000135 \end{array}$$

Para se multiplicar um número decimal por 10, 100, 1000, etc., anda-se com a vírgula tantas casas para a direita quantos zeros tiver cada um dêstes números.

Ex.: 1,025 × 100 = 102,5 (100, possui 2 zeros, logo andam-se 2 casas para a direita).

0,025 × 1000 = 2,5 (1000 possui 3 zeros, a vírgula avança 3 casas para a direita).

Divisão

Para se dividir um número decimal por outro, igualam-se as casas decimais, cortam-se as vírgulas e opera-se como se fôssem números inteiros.

Ex.: 1, 2 ÷ 0,025

```
120'0' | 0025
       |------
 20 0    48
 00
```

Igualaram-se as casas decimais, 1,200 ÷ 0,025; cortaram-se as vírgulas e fêz-se a divisão que deu 48 de quociente.

Quando o dividendo é menor que o divisor, primeiro igualamos as casas decimais e cortamos as vírgulas; em seguida reduzimos o dividendo, com o acréscimo de zeros (o que, já sabemos, não lhe altera o valor) a décimos, centésimos, milésimos, etc., até que a divisão possa ser feita. Como o quociente será da mesma espécie do dividendo, nêle teremos de separar tantas casas decimais quantos forem os zeros acrescentados, depois que as casas foram igualadas e cortadas as vírgulas.

Seja 0,024 ÷ 1,5

$$\begin{array}{r|l} \cancel{0},\cancel{0}2400 & 1,500 \\ \hline 09000 & 16 \\ 0000 & \end{array}$$

Igualando-se as casas decimais e suprimindo-se as vírgulas, tem-se 24 ÷ 1500. Como não se pode fazer a divisão, reduz-se o dividendo 24 a décimos, com acréscimo de um zero e fica-se com 240 décimos divididos por 1500. A divisão ainda não se pode efetuar, então, reduzem-se 240 décimos a 2400 centésimos para dividir por 1500, o que dá 1 centésimo e 900 centésimos de resto. Acrescentando-se mais um zero a êste resto, êle fica reduzido a 9000 milésimos, que, divididos por 1500, vão dar o quociente de 6 milésimos exatos. Assim o quociente de 0,024 ÷ 1,5 é igual a 1 centésimo e 6 milésimos, ou 0,016. Como se vê, separaram-se, no resultado, 3 casas decimais correspondentes a milésimos e 3 foram os zeros acrescentados ao dividendo para se poder fazer a divisão, depois de igualadas as casas decimais e cortadas as vírgulas.

Para se dividir um número decimal por 10, 100, 1000, etc., anda-se com a vírgula tantas casas para a esquerda quantos zeros tiver cada um dêstes números.

Ex.: 125,4 ÷ 100 = 1,254 (100 tem 2 zeros, logo a vírgula anda 2 casas para a esquerda).

Ex.: 125,4 ÷ 10000 = 0,01254 (10000 tem 4 zeros, a vírgula anda 4 casas para a esquerda).

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Efetue:

0,024 + 12,5 + 2,4685 + 1,84.
10,002 + 185 + 0,0025 + 2,082 + 0,05.
4,58 ÷ 12,56 + 0,024 + 0,1245 + 8,2.
8,2 — 0,0456.
1,234785 — 0,0027.
0,82 — 0,01256.
84,56 + 3,25 + 0,025 — 0,0028.
1,28 × 0,0259.
0,485 × 4,641.
82 + 0,42 × 2,54.
3,5 × 12,4 — 0,0128.
0,4 ÷ 0,025.
0,25 ÷ 0,4.
1,4 × 52,45 — 0,004 ÷ 2,5.
7,5 ÷ 2,46 + 8,5 + 0,006 ÷ 12.

2) Torne 10 vêzes maior: 1,25; 0,282; 1,054.

3) Torne 100 vêzes menor: 0,08; 12,4; 0,42.

4) Multiplique por 1 000: 4,2; 0,5; 100; 5.

5) Divida por 10 000: 128,5; 84,124; 0,28.

CONVERSÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS EM NÚMEROS DECIMAIS E VICE-VERSA

Para se converter uma fração ordinária em **número decimal**, torna-se primeiro a fração irredutível, se ela já não o é. Depois, divide-se o numerador pelo denominador, acrescentando-se ao numerador tantos zeros quantos forem necessários para que se possa efetuar a divisão. No quociente separam-se tantas casas decimais quantos forem os zeros que se acrescentaram ao numerador da fração. No caso do quociente ter número de algarismos menor que o de zeros acrescentados, antepõem-se-lhes zeros até que o mesmo seja igualado.

Ex.: Transformar $\frac{7}{8}$ em número decimal

$$\begin{array}{r|l} 7000 & 8 \\ \hline 60 & 0{,}875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Como se observa, para se poder efetuar a divisão, acrescentaram-se ao numerador 7 três zeros, logo, no quociente, separam-se três casas decimais.

Desta forma $\frac{7}{8} = 0{,}875$

Ex.: Transformar $\frac{4}{125}$ em número decimal

$$\begin{array}{r|l} 4000 & 125 \\ \hline 0250 & 0{,}032 \\ 00 & \end{array}$$

Acrescentaram-se ao numerador 4 três zeros, para que se pudesse efetuar a divisão, que deu o resultado 32. Ora, tendo-se de separar, no quociente, três casas decimais (tantas quantos os zeros acrescentados), antepõe-se um zero ao resultado e, só depois, coloca-se a vírgula (0,032).

Portanto: $\frac{4}{125} = 0{,}032$

Para se converter uma fração ordinária em número decimal com uma denominação dada, acrescentam-se à direita do numerador da fração ordinária tantos zeros quantos os que correspondem ao número da ordem decimal pedida. Efetua-se a divisão do numerador, assim transformado, pelo denominador e, no quociente, separam-se, a partir da direita, tantas casas decimais quantos forem os zeros acrescentados ao numerador.

Ex.: Seja a fração $\frac{7}{8}$ para se transformar em milésimos.

Ora, milésimos correspondem à terceira ordem decimal, logo, acrescentam-se três zeros ao numerador, e faz-se a divisão pelo denominador.

$$\begin{array}{r|l} 7000 & 8 \\ \hline 60 & 875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

No quociente 875 separam-se, a partir da direita, três casas decimais, ou 0,875.

Portanto, transformada a fração $\frac{7}{8}$ em milésimos, o resultado é 0,875.

Acontece, porém, que, às vêzes, ao se transformar uma fração ordinária em decimal, não se atinge resultado exato, encontrando-se uma fração decimal infinita.

Ex.: **Para se transformar em decimal $\frac{2}{3}$**

$$\begin{array}{r|l} 2000 & 3 \\ \hline 20 & 0{,}666\ldots \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$$

Ex.: **Converter em decimal $\frac{8}{11}$**

$$\begin{array}{r|l} 80000 & 11 \\ \hline 30 & 0{,}7272\ldots \\ 80 & \\ 30 & \\ 8 & \end{array}$$

Ex.: **Seja a fração $\frac{7}{18}$ para se converter em decimal.**

$$
\begin{array}{r|l}
70000 & 18 \\
\hline
160 & 0,3888\ldots \\
160 & \\
160 & \\
16 &
\end{array}
$$

Nota-se que as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{7}{18}$ deram decimais infinitas, o que se assinala colocando-se, após a última casa decimal escrita, vários pontinhos — **0,666...**, **0,7272...**, **0,3888...**

Estas frações decimais infinitas chamam-se **dízimas periódicas.**

Nelas há sempre um algarismo ou um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente e na mesma ordem.

A parte que se repete chama-se **período.**

Assim, na dízima periódica 0,666..., o período é 6; em 0,7272... o período é 72, em 0,388... o período é 8.

Quando, na dízima periódica, o período aparece logo depois da vírgula, ela é **dízima periódica simples.**

Ex.: 0,888..., 0,33... 0,036036...

A dízima é **periódica composta** quando, entre a vírgula e o primeiro período, há uma parte que não se repete, isto é, a parte não periódica.

Ex.: 0,7222..., 0,02424..., 0,2666...

Conversão de um número decimal em fração ordinária. Para se transformar um número decimal em fração ordinária dá-se para numerador o número decimal e, para denominador, 1 seguido de tantos zeros quantos forem as casas decimais.

Ex.: Transformar em frações ordinárias 0,42, 0,025 e 2,04.

Temos: $0,42 = \frac{42}{100}$ ou, simplificando-a, $\frac{21}{50}$;

$0,025 = \frac{25}{1000}$ ou, tornando-a irredutível, $\frac{1}{40}$;

$2,04 = \frac{204}{100}$ ou $\frac{101}{50}$

Isto se dá com os números decimais finitos.

Quanto às dízimas periódicas, outros processos são usados para se encontrarem as frações ordinárias que lhes correspondem, ou que lhes deram origem.

Chamam-se **geratrizes** as frações ordinárias de que se originaram as dízimas periódicas.

Para se achar a fração geratriz de uma dízima periódica simples, dá-se para numerador um dos períodos e, para denominador, tantos noves quantos forem os algarismos do período.

$$0,3434\ldots = \frac{34}{99};$$

$$0,4141\ldots = \frac{41}{99}$$

Quando a dízima periódica simples possui parte inteira, dá-se para numerador a parte inteira seguida de um dos períodos menos a parte inteira e, para denominador, tantos noves quantos forem os algarismos do período.

Assim: $2{,}666\ldots = \dfrac{26 - 2}{9} = \dfrac{24}{9}$, ou, simplificando-se, $\dfrac{8}{3}$.

$4{,}2424\ldots = \dfrac{424 - 4}{99} = \dfrac{420}{99}$, ou simplificando-se, $\dfrac{140}{33}$.

Para se encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica composta, toma-se para numerador a parte não periódica seguida de um dos períodos, menos a parte não periódica, e, para denominador, tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica.

Ex.: $0{,}24343\ldots - \dfrac{243 - 2}{990} = \dfrac{241}{990}$

$0{,}477\ldots - \dfrac{47 - 4}{90} = \dfrac{43}{90}$

$0{,}02424\ldots - \dfrac{24}{990}$ ou, simplificando-se, $\dfrac{4}{165}$

Quando a dízima periódica composta possui parte inteira, dá-se para numerador a parte inteira seguida da parte não periódica e de um dos períodos, menos a parte inteira seguida da parte não periódica; para denominador, tantos noves quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos os algarismos da parte não periódica.

Ex.: $2{,}2666\ldots - \dfrac{226 - 22}{90} = \dfrac{204}{90}$ ou, extraindo-se os inteiros e simplificando-se, $2\dfrac{4}{15}$.

Ex.: $1{,}1333\ldots - \dfrac{113 - 11}{90} = \dfrac{102}{90}$, ou, extraindo-se os inteiros e simplificando-se, $1\dfrac{2}{15}$.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Transforme em números decimais as seguintes frações ordinárias:
$\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{13}{16}$, $\dfrac{49}{125}$, $\dfrac{20}{23}$, $\dfrac{7}{9}$, $\dfrac{18}{11}$, $\dfrac{91}{24}$, $\dfrac{95}{12}$.

2) Transforme em frações ordinárias os números decimais seguintes:
2,025; 1,08; 0,005; 18,052; 9,1425; 10,001.

3) Ache as geratrizes das seguintes dízimas periódicas:
0,02626...; 0,51212...; 0,013013...; 0,508508...; 3,791666...; 0,00333...

4) Efetue:
$2\dfrac{1}{3} + 1{,}4 \div 0{,}05 - \dfrac{3}{8}$.

$$(0{,}4 + 12 + 0{,}025 \div 0{,}05) + \left[2{,}666\ldots \div \frac{2}{3}\right]^2$$

5) $$(2{,}266\ldots \div 8 + 2 \div 0{,}03636\ldots) + \frac{1}{\frac{2}{5}} =$$

6) $$3\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \times \frac{2\frac{4}{5}}{1\frac{1}{16}} =$$

7) $$\frac{3\left[\frac{2}{5} \div 0{,}4 + 0{,}3232\ldots \times 2\right] + 4}{\left[8 \div 1{,}44\ldots - \frac{3}{10}\right] - (0{,}2466\ldots \times 0{,}05)} =$$

8) $$\frac{2 + \frac{2\frac{1}{4}}{0{,}5} \times (0{,}5 \div 12 + 1{,}044)}{8 \times \frac{2}{1\frac{1}{5}} + (0{,}266\ldots + 0{,}66)} =$$

SISTEMA LEGAL DE UNIDADES DE MEDIR. SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

Durante longo tempo foram muito diversas as unidades de medir usadas pelos povos. Variavam de um país para outro, e, às vêzes, mesmo dentro do próprio país, as variedades eram muitas. Isto complicava tudo, dificultando e embaraçando os negócios.

No começo do século passado, porém, na França, uma comissão de matemáticos organizou um sistema de pesos e medidas que veio simplificar e uniformizar os que, até então, existiam.

Foi o **sistema métrico decimal**, que tem por base o **metro**. Mediu-se a distância do Equador ao Pólo e dividiu-se essa distância em dez milhões de partes; cada uma delas se chamou — o **metro.**

Construiu-se um **metro padrão**, isto é, uma barra de platina com o comprimento do metro, à temperatura de 4 graus centígrados. Esta barra foi cuidadosamente guardada no Instituto Internacional de Pesos e Medidas, na França.

Mais tarde verificou-se que não era exata a medição feita da quarta parte do meridiano terrestre. Havia pequena diferença entre o metro padrão e a décima milionésima parte do quadrante terrestre. Mas foi mantido o padrão primitivo, que passou, assim, a ser uma medida meramente convencional.

O sistema legal de unidades de medir em vigor no Brasil é baseado no sistema métrico decimal e as suas unidades fundamentais são:

Unidade de comprimento: O METRO.
Unidade de massa: O QUILOGRAMA.
Unidade de tempo: O SEGUNDO.

As unidades do sistema métrico admitem **múltiplos**, ou unidades maiores que a principal, e **submúltiplos**, ou unidades menores que a principal.

Os nomes dos múltiplos mais usados formam-se antepondo-se ao nome da unidade os prefixos de origem grega:

deca, que quer dizer **dez**;
hecto, que quer dizer **cem**;
quilo, que quer dizer **mil**;

Assim, **quilômetro** ou **mil metros**; **hectolitro** ou **cem litros**, etc.

Os nomes dos submúltiplos mais usados formam-se antepondo-se ao nome da unidade os prefixos de origem latina:

deci, que significa a **décima parte**;
centi, que significa a **centésima parte**;
mili, que significa a **milésima parte**.

Assim, **decímetro**, ou a décima parte do metro; **centilitro**, ou a centésima parte do litro; **miligrama**, ou a milésima parte do grama.

As diferentes unidades são representadas por símbolos que são, geralmente, letras.

Temos: **m** — símbolo do **metro**;
m^2 — símbolo do **metro quadrado**;
m^3 — símbolo do **metro cúbico**;
a — símbolo do **are**;
st — símbolo do **estéreo**;
l — símbolo do **litro**;
g — símbolo do **grama**.

Para indicar os múltiplos precede-se o símbolo da medida de um dos símbolos **da**, **h**, **k**, respectivamente, **deca, hecto, quilo**. Daí — **dam** ou **decâmetro; hm** ou **hectômetro; km** ou **quilômetro; kg** ou **quilograma; hl** ou **hectolitro**; etc.

Para indicação dos submúltiplos precede-se o símbolo da medida de **d, c, m**, equivalentes, respectivamente, a **deci, centi, mili**. Portanto — **dm** ou **decímetro; cm** ou **centímetro; mm** ou **milímetro; dl** ou **decilitro; mg** ou **miligrama**, etc.

Modo de escrever as medidas do sistema métrico decimal. Os algarismos da parte inteira e os da parte decimal são escritos em grupos de três, a contar da vírgula, respectivamente, para a direita e para a esquerda. O símbolo da unidade é colocado depois do último algarismo do número todo e corresponde à designação da parte inteira.

Ex.: 1 423,25 m = 1423 metros e 25 centímetros;
12,325 6 km = 12 quilômetros e 3256 decímetros;
28,347 dam = 28 decâmetros, 347 centímetros;
9 234,6 g = 9234 gramas e 6 decigramas.

Aplicam-se às unidades do sistema métrico decimal as diferentes regras estudadas para as operações dos números decimais.

Unidade de Comprimento

A unidade de comprimento é o metro, assim definido por lei:

Metro é a distância, à temperatura de 0 graus centígrados, dos eixos dos dois traços médios gravados sôbre a barra de platina iridiada depositada na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, estando submetida à pressão atmosférica normal e suportada por dois rolos

com um diâmetro mínimo de um centímetro, situados simètricamente num mesmo plano horizontal e à distância de 571 milímetros um do outro.

Símbolo do metro — m

Múltiplos do metro	**quilômetro**	— km	= 1000m
	hectômetro	— hm	= 100m
	decâmetro	— dam	= 10m
Submúltiplos do metro	**decímetro**	— dm	= 0,1m
	centímetro	— cm	= 0,01m
	milímetro	— mm	= 0,001m

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Reduza:
8 km a mm.
1 254 dm a dam.
0,4 hm a cm.
14 875 mm a m.
346 cm a mm.
8,5 km a hm.
0,025 m a km.
12 m a dam.

2) Efetue:
247 dm + 0,42 dam + 18,7 cm + 82 m.
3 km — 2,426 dam.
(86,5 m + 0,25 dam + 1 849 cm) — (0,48 m + 2,5 dm).

PROBLEMAS

1) De uma peça de fazenda de 3,5 dam tiram-se 8,2 m, depois 1,25 dm, a seguir 0,485 m e ainda, depois, 0,124 hm. Com quantos centímetros ficou a peça?

2) Tem-se um fio de aço de 9,94 m para se fazerem alfinêtes de 35 mm cada um. Quantos alfinêtes serão feitos?

3) Um terreno retangular tem 12 m de frente e 2,5 dam de fundo. Quanto se despenderá para cercá-lo, pagando-se por meio metro de cêrca Cr$ 18,00?

4) Um metro de sêda custa Cr$ 180,00. Qual o tamanho do pedaço que se pode comprar por Cr$ 54,00?

5) Duas porções de lona têm: a primeira 198,75 m e a segunda 86,25 m. A primeira custa Cr$ 630,00 mais que a segunda. Qual o preço de cada uma?

6) Um fazendeiro comprou 30 bois, 75 carneiros e 14 porcos. Embarcou-os para a sua fazenda, pagando de transporte, por km, Cr$ 1,20 por boi, Cr$ 0,80 por carneiro e Cr$ 1,00 por porco. Quanto pagou pelo transporte, se os animais viajaram 22 450 metros?

7) Um lojista comprou uma dúzia de peças de fazenda de 20 m cada uma a Cr$ 160,00 cada peça. Por quanto venderá os retalhos de 25 dm para ganhar, em tôdas as peças, Cr$ 960,00?

8) Um negociante comprou uma partida de 120 m de sêda à razão de Cr$ 50,00 o metro. Vendeu $\frac{1}{4}$ a Cr$ 7,50 o dm; $\frac{1}{3}$ a Cr$ 800,00 o dam; $\frac{1}{5}$ a Cr$ 60,00 o metro, e o resto deu de presente. Teve lucro?

Unidade de Área

Metro quadrado: área de um quadrado que tem um metro de lado.
Símbolo: m^2

As unidades de área crescem e decrescem de 100 em 100 e cada uma é representada por dois algarismos.

Múltiplos do metro quadrado

quilômetro quadrado — km^2 = $1000000m^2$
hectômetro quadrado — hm^2 = $10000m^2$
decâmetro quadrado — dam^2 = $100m^2$

Submúltiplos do metro quadrado

decímetro quadrado — dm^2 = $0,01m^2$
centímetro quadrado — cm^2 = $0,0001m^2$
milímetro quadrado — mm^2 = $0,000001m^2$

Para se medir uma superfície usa-se o processo indireto, visto que não seria possível a aplicação de um metro quadrado, isto é, um quadrado com um metro de lado. Acha-se, por exemplo, a área de um retânguio multiplicando-se o comprimento pela largura.

Querendo-se saber a superfície de um terreno retangular com 258 m de comprimento e 42 m de largura, multiplicam-se as duas dimensões.

Ex.: $258 \text{ m} \times 42 \text{ m} = 10\,836 \text{ m}^2$

$$\begin{array}{r} 258 \\ 42 \\ \hline 516 \\ 1032 \\ \hline 10836 \end{array}$$

A superfície de um quadrado é igual ao quadrado do lado. Se se desejar saber a superfície de um terreno quadrado, elevar-se-á ao quadrado o lado.

Assim: Qual a superfície de pátio quadrado que tem 12 m de lado?

$$S = L^2 \text{ ou } 12 \times 12 = 144 \text{ m}^2$$

O Are

Para as medidas agrárias, quer dizer, para se medirem campos, ou grandes terrenos, usa-se o **are** que equivale ao dam^2

O símbolo do are é **a**

O are tem um múltiplo, o **hectare**, que vale 100 ares.

Se o are vale o dam^2 e o hectare vale 100 ares, logo o **ha** corresponde a 100 dam^2, ou, como já se sabe, ao **hm^2**

O submúltiplo do are é o **centiare**, ou a centésima parte do are: 0,01 **a**

Se o are vale 1 dam^2 e o **ca** é a sua centésima parte, o centiare tem o valor de 1 m^2 pois 0,01 do dam^2 é o m^2

Portanto: 1 ha = 1 hm^2
1 a = 1 dam^2
1 ca = 1 m^2

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

Reduza:

8 m^2 a cm^2	88 km^2 a mm^2	185 *ha* a hm^2	1 874 *a* a hm^2
1 254 m^2 a hm^2	72 mm^2 a hm^2	82 dam^2 a *a*	168 km^2 a *ha*
1872 dm^2 a dam^2	22 *ha* a*ca*	1 854 *ca* a dm^2	0,25 *a* a m^2
48 m^2 a dam^2	1 542 *ca* a *a*	96 m^2 a *a*	

PROBLEMAS

1) O terreno da minha casa possui 12,25 m^2 e o da de meu primo, 46 532 cm^2. Qual o maior e qual a diferença?
2) Alguém quer vender uma propriedade de 2 km^2 a Cr\$ 6,00 o metro quadrado. Quanto quer pela propriedade?
3) Qual a área de uma superfície retangular que tem de comprimento 8,25 dam e de largura 1 245 dm?

4) Qual o valor de um terreno retangular de 2,5 dam de largura e 182 metros de comprimento, se o metro quadrado foi avaliado em Cr$ 70,00?
5) Comprei um terreno retangular de 24 dam de comprimento por 0,15 km de largura, ao preço de Cr$ 5,00 o metro quadrado. Vendí-o ao preço de Cr$ 650,00 o are. Quanto lucrei?
6) Um campo quadrado de 80 m de lado foi vendido da seguinte maneira: $\frac{1}{4}$ da superfície a Cr$ 8,00 o metro quadrado; $\frac{1}{5}$ a Cr$ 10,00 o centiare e o resto a Cr$ 600,00 o are.
Por quanto se vendeu o campo?
7) Um pátio retangular de 15 m de comprimento e 12 m de largura vai ser coberto com ladrilhos quadrados de 0,2 m de lado. Qual será a despesa, se o cento de ladrilho custa Cr$ 150,00?
8) Um capinzal retangular possui 14 m de comprimento por 6 de largura. Está alugado, por mês, a Cr$ 500,00 o are.
Com a venda do capim quem o alugou apura, mensalmente, Cr$ 6,00 por metro quadrado. Tem lucro? Qual?

Unidade de Volume

Metro cúbico: volume de um cubo que tem um metro de aresta.

Símbolo: m^3

As unidades de volume crescem e decrescem de mil em mil: são precisas mil unidades de uma ordem para se ter outra de ordem imediatamente superior.

Tôda unidade se decompõe sempre em mil unidades imediatamente inferiores.

Cada unidade de volume é, portanto, representada por três algarismos:

Ex.: 1,325 m^3 = 1 metro cúbico, 325 decímetros cúbicos.

Escreva 2 metros cúbicos e 4 centímetros cúbicos.

2,000004 m^3

Múltiplos do metro cúbico

quilômetro cúbico	— km^3	=	1000000000m^3
hectômetro cúbico	— hm^3	=	1000000m^3
decâmetro cúbico	— dam^3	=	1000m^3

Submúltiplos do metro cúbico

decímetro cúbico	— dm^3	=	0,001m^3
centímetro cúbico	— cm^3	=	0,000001m^3
milímetro cúbico	— mm^3	=	0,000000001m^3

Como se deve compreender, não seria possível aplicar-se diretamente o metro cúbico (um cubo com um metro de aresta) para se medir volumes. Procede-se, então, como já se fêz com as superfícies — indiretamente: **multiplicam-se as três dimensões — comprimento, largura** e **altura**.

Ex.: Quer-se saber o volume de um corpo que tem 4 m de comprimento, 3 de largura e 2 de altura.

$$V = 4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ m}^3.$$

O Litro

Litro: volume de um quilograma de água destilada e isenta de ar, à temperatura de 4 graus centígrados e sob a pressão atmosférica normal.

Símbolo: **l**

O litro é a unidade utilizável para medidas de capacidade, ou para medidas de volume de gases e líquidos, cereais e matérias em pó ou em grão.

Múltiplos do litro

quilolitro	— kl	= 1000 l
hectolitro	— hl	= 100 l
decalitro	— dal	= 10 l

Submúltiplos do litro

decilitro	— dl	= 0,1 l
centilitro	— cl	= 0,01 l
mililitro	— ml	= 0,001 l

Para fins legais o litro pode ser considerado como equivalente a um decímetro cúbico.

Daí 1 **l** = $1dm^3$

Podemos, então, conhecer as relações existentes entre o litro e o metro cúbico.

Se 1 dm^3 = **1 l**

$1m^3$ = 1000 dm^3 = 1000 **l** = 1kl
Se 1 dm^3 = **1l**
1 cm^3 = 0,001 dm^3

Mas, 0,001 dm^3 = 0,001 **l** = 1ml. Logo 1 cm^3 = 1 ml.

Concluindo, estabelecemos as relações entre o metro cúbico e o litro:

$1m^3$ = 1 kl
1 dm^3 = 1 l
1 cm^3 = 1ml

O Estéreo

A unidade empregada para medidas de lenha é o **estéreo.**

Símbolo: **st**

O estéreo é formado por duas hastes verticais de madeira, cada uma com 1 metro de altura e tendo, entre si, 1 metro (largura). Achas de 1 metro de comprimento são colocadas entre as duas hastes até que atinjam sua altura. O estéreo terá, pois, 1 m de comprimento × 1 m de largura × 1 m de altura, ou, 1 st = 1 m^3.

Do estéreo apenas se empregam um múltiplo, o decastéreo (dast = 10 st) e um submúltiplo, o decistério (dst = 0,1 st).

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Reduzir:

9 cm^3 a m^3	0,864 km^3 a hm^3
84 m^3 a mm^3	148 763 dam^3 a km^3
0,098 dm^3 a mm^3	86 dst a m^3
12 hm^3 a dam^3	74 dast a cm^3
8,347 dam^3 a m^3	8 st a dm^3

2) Complete as igualdades:

36 hl = ... cl	125 kl = ... dam^3
1 684 dl = ... l	38 l = ... dm^3
464 ml = ... dl	8 hl = ... cm^3
36 m = ... l	1,25 l = ... mm^3

PROBLEMAS

1) Qual o volume de um corpo que tem 3 m de comprimento, 2,5 m de largura e 18 m de altura?
2) Certa excavação de 150 m de comprimento, 1,4 m de largura e 1,6 m de fundo saiu à razão de Cr$ 0,65 o metro cúbico. Quanto custou a excavação?
3) Um reservatório de 548 m^3 possui 15,30 m de comprimento e 10,20 m de largura. Quanto tem de fundo?

4) Vai-se construir uma parede de 30 m de comprimento, 2,85 m de altura e 0,40 m de espessura. Quantos tijolos de 0,25 m de comprimento, 0,12 m de espessura e 0,06 m de largura são precisos?

5) Quantos regadores de 4,5 l são precisos para encher de água um tanque cujas dimensões internas são: 1,2 m de largura, 1,5 m de comprimento e 0,5 m de fundo?

6) Quanto se pagará por 3 carros de lenha de 3,6 dast cada um se o metro cúbico de lenha vale Cr$ 50,00?

7) Um reservatório tem de medidas internas 2 m de comprimento, 2,5 m de largura e 0,15 m de fundo. Está cheio de vinho que foi adquirido ao preço de Cr$ 3.000,00 o hectolitro. Que lucro se obterá, se o vinho fôr vendido em garrafas de 1,5 l do preço de Cr$ 49,00 cada uma?

8) Um monte de lenha tem 14,6 m de comprimento, 1,15 de altura e o comprimento das achas é de 1,30 m. Custando o decistério Cr$ 19,00, qual o preço de tôda a lenha?

Unidade de Massa

Quilograma: massa de protótipo internacional do quilograma de platina iridiada que foi sancionada pela Primeira Conferência Geral de Pesos e Medidas e que se acha depositado na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, em França.

Símbolo: **kg**

Para formação dos múltiplos e submúltiplos toma-se como base o **grama**, que é igual a 0,001 da massa do protótipo internacional do quilograma.

$$\text{Múltiplos do grama} \begin{cases} 1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} \\ 1 \text{ hg} = 100 \text{ g} \\ 1 \text{ dag} = 10 \text{ g} \end{cases}$$

Para as massas de grande vulto há, ainda: a **tonelada**, cujo símbolo é **t** e que vale 1000 kg.

$$\text{Submúltiplos do grama} \begin{cases} 1 \text{ dg} = 0{,}1 \text{ g} \\ 1 \text{ cg} = 0{,}01 \text{ g} \\ 1 \text{ mg} = 0{,}001 \text{ g} \end{cases}$$

Há, ainda, o **quilate**, correspondente à massa de 2 dg, usado nas medidas de pedras preciosas e metais preciosos.

O grama corresponde, aproximadamente, à massa de 1 cm^3 de água destilada à temperatura de 4 graus centígrados e à pressão normal.

Na linguagem corrente **massa** e **pêso** são palavras que se equivalem.

Se o grama tem o pêso de um centímetro cúbico de água destilada, segue-se que 1 quilograma, ou 1000 g, tem o pêso de 1000 centímetros cúbicos, ou 1 dm^3.

Por sua vez, a tonelada tem 1000 quilogramas ou 1000 dm^3, mas 1000 dm^3, valem 1 m^3, logo, uma tonelada de água destilada corresponde a 1m^3.

Daí:

1 t = 1 m^3 (de água destilada a 4 graus centígrados e à pressão normal).

1 kg = 1 dm^3 (de água destilada a 4 graus centígrados e à pressão normal).

1 g = 1 cm^3 (de água destilada a 4 graus centígrados e à pressão normal).

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

1) Reduzir:

2 *t* a *hg*	0,847 *g* a *mg*
1 487 *cg* a *dag*	8 475 *dag* a *kg*
8,4 *kg* a *g*	8,42 *dg* a *mg*
1 784 *hg* a *t*	843 682 *g* a *t*

2) Diga, conforme se pede, o pêso das seguintes porções de agua pura:

9,432 dm^3 em g	42 l em cg
8 dam^3 em t	12 dm^3 em kg
14 cm^3 em cg	9 kl em t
0,28 hl em kg	8 473 ml em mg

PROBLEMAS

1) Um açougueiro paga Cr$ 157,00 pelo quilograma de carne. Por quanto lhe sai a tonelada?
2) Um farmacêutico compra o quilo de certa mercadoria por Cr$ 80,00. Que lucro terá, vendendo-a, a varejo, a Cr$ 1,20 o dag?
3) Cinco decilitros de uma mercadoria pesam 600 g, quantos gramas pesarão 150 cm^3?
4) Um litro de ar pesa 1,293 g. Qual o pêso de ar de um aposento de 6 m de comprimento, 4,25 m de largura e 4,80 m de altura?
5) Um agricultor vendeu 40 hl de trigo por Cr$ 18 000,00. Se cada hectolitro pesa 75 kg, qual foi o preço da tonelada de trigo?
6) Um fazendeiro possuia um rebanho de 805 carneiros. Se cada carneiro lhe forneceu 26 dag de lã, quer-se saber o lucro que êle obteve, vendendo a lã ao preço de Cr$ 16 800,00 a tonelada.
7) Um explorador comprou certa pedra preciosa que pesava 0,45 kg, a Cr$ 10,00 o grama. Lapidada, a pedra perdeu $\frac{5}{9}$ de seu pêso. Se o explorador quer ganhar o duplo do que gastou, a que preço deve vender o quilate de tal pedra?

SISTEMA MONETÁRIO BRASILEIRO

A unidade fundamental do sistema monetário brasileiro é o **Cruzeiro**.

Seu símbolo é **Cr$**.

Tem como submúltiplo o **centavo** que é a centésima parte do **Cruzeiro**.

Tem, então, o Cruzeiro cem centavos.

Escreve-se qualquer quantia de dinheiro brasileiro como se fôsse um número decimal: a quantidade de cruzeiros constitui a parte inteira e a quantidade de centavos, escrita com dois algarismos, é a parte decimal.

O símbolo Cr$ precede sempre o número da quantia.

Ex.: Escrever 50 cruzeiros e 30 centavos: Cr$ 50,30.

Escrever 1 525 cruzeiros e 5 centavos: Cr$ 1 525,05.

Ex.: Ler: Cr$ 25,40. (Vinte e cinco cruzeiros e quarenta centavos):

Ler: Cr$ 2 030,02. (Dois mil e trinta cruzeiros e dois centavos).

TERCEIRA PARTE

GEOGRAFIA

PROGRAMA

Astros, estrêlas e planêtas; o Cruzeiro do Sul; o Sol, a Terra e a Lua.

A Terra; forma e movimentos. Pólos, eixo, Equador, paralelos, círculos polares e zonas terrestres.

Orientação geográfica; pontos cardeais. Orientação pelo Sol, pelo Cruzeiro do Sul e pela bússola.

Caracterização dos principais acidentes geográficos. As partes do mundo: sua distribuição geográfica. Formas de govêrno.

Países da América do Sul e suas capitais.

Países da América do Norte e suas capitais.

Países da América Central e suas capitais.

Países da Europa e suas capitais.

Países principais da Ásia e da África e suas capitais.

O Brasil, limites, baías, ilhas, serras, lagos e rios principais. Govêrno, população, raças e língua. Principais portos marítimos e fluviais.

Estados e Territórios; Capitais. Distrito Federal; Cidade do Rio de Janeiro.

1) ASTROS, ESTRÊLAS E PLANÊTAS, O CRUZEIRO DO SUL; O SOL; A TERRA E A LUA

Esfera celeste ou **universo** é a esfera imaginária onde parecem estar fixos os astros avistados da Terra.

A Terra parece ocupar o centro dessa esfera.

Chamam-se **astros** todos os corpos que se encontram espalhados no **universo** ou na **esfera celeste**.

Os astros podem ser: **planêtas, satélites, estrêlas, nebulosas** e **cometas.**

Há **astros** que têm luz própria, **são luminosos**. Outros são **opacos**, não têm luz própria, são **iluminados** e refletem a luz que recebem de outros astros.

Entre os luminosos notam-se as **estrêlas**, as **nebulosas** e os **cometas**. Entre os opacos ou iluminados, os **planêtas** e os **satélites.**

Planêtas são astros opacos que giram em tôrno do sol, do qual recebem luz e calor.

Os principais planêtas, segundo a ordem de proximidade do Sol, são os seguintes: **Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno** e **Plutão.**

Maiores que a Terra são JÚPITER, SATURNO, URANO e NETUNO.

MERCÚRIO é o menor de todos e o que está mais próximo do Sol.

VÊNUS é o mais brilhante, conhecido pelo nome de **Estrêla d'Alva** ou **Lúcifer** (quando surge de madrugada) e **Estrêla Vésper** ou do **Pastor**, quando surge à tarde.

MARTE é o planeta mais próximo da Terra.

Saturno possui, em tôrno, grande anel luminoso.

Existem, também, muitos outros planêtas menores, apenas visíveis ao telescópio (instrumento destinado a ver os corpos que se acham muito afastados) e que se chamam **planetóides**.

Satélites são corpos opacos que giram em tôrno dos planêtas.

A Terra tem um satélite, que é a **Lua**.

A Lua gira sôbre si mesma e em tôrno da Terra, acompanhando esta no giro em tôrno do Sol.

Fases da Lua são os diversos aspectos com que ela se mostra à nossa vista.

São: **Lua Nova, Quarto Crescente, Lua Cheia, Quarto Minguante.**

Para percorrer estas quatro fases, gasta a lua 29 dias e meio. É o que se chama **lunação** ou **mês lunar**.

Estrêlas são astros brilhantes, possuidores de luz própria.

Encontram-se, geralmente, tão distantes que, embora enormes, só nos aparecem como pequeninos pontos luminosos.

Quanto ao seu brilho, as estrêlas, que existem aos milhares, classificam-se em 16 classes ou ordens de grandeza: de **primeira grandeza, de segunda, de terceira**, etc.

O **Sol**, que é uma grande estrêla, é o centro de todo nosso sistema planetário, isto é, do conjunto de corpos celestes a que a Terra pertence.

O Sol está classificado como estrêla de quinta grandeza.

Constelações são agrupamentos de estrêlas.

As constelações são designadas, quase sempre, por nomes de animais, sêres da Mitologia ou da História, etc.: **Ursa Maior, Centauro, Hércules, Navio, Lira, Erídano,** etc.

O **Cruzeiro do Sul** é a famosa constelação do hemisfério meridional.

Consta de 54 estrêlas, das quais apenas cinco são visíveis a ôlho nu. Destas, a mais luminosa é a de **Magalhães**, de primeira grandeza e mais próxima do Pólo Sul.

Destacando-se lindamente no céu do Brasil, o Cruzeiro do Sul é olhado como um dos símbolos de nossa Pátria, sendo, mesmo, representado na Bandeira Nacional.

Nebulosas são manchas esbranquiçadas que se observam, no céu, nas noites claras.

Vistas ao telescópio, parecem as nebulosas ser formadas por incalculáveis aglomerações de pequeninas estrêlas.

A mais conhecida dentre as nebulosas é a **Via-Láctea**, ou **Caminho de São Tiago**, que passa pelo centro da abóbada celeste, na direção nordeste sudoeste, rodeando-a quase inteiramente.

Cometas são astros pequenos e muito transparentes. Compõem-se de três partes distintas: um ponto central brilhante, com aspecto de estrêla, chamado **núcleo**; uma auréola vaporosa, denominada **cabeleira** e que envolve o núcleo; e um rasto luminoso pouco visível e que fica sempre do lado oposto ao sol e que se chama **cauda**.

Os cometas giram em tôrno do Sol, descrevendo elípses muito alongadas.

QUESTIONÁRIO

(preparatório do exame).

1) Que é esfera celeste? 2) Que lugar dessa esfera parece a Terra ocupar? 3) Que são astros? 4) Como podem ser os astros? 5) Como se dividem? 6) Que são astros luminosos? 7) Quais são? 8) Que são astros iluminados? 9) Quais são? 10) Que são planêtas? 11) Enumere-os na ordem de proximidade do Sol. 12) Quais os planêtas maiores que a Terra? 13) Qual o planêta mais próximo da Terra? 14) Por que nomes conhecemos o planêta Venus? 15)