UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

ALEXANDRE SOUZA DE OLIVEIRA

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS GINASIAIS: *UMA ANÁLISE EM TEMPOS MODERNOS (DÉCADAS DE 1960 E 1970)*

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SÃO PAULO

2009

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO

ALEXANDRE SOUZA DE OLIVEIRA

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS GINASIAIS: *UMA ANÁLISE EM TEMPOS MODERNOS (DÉCADAS DE 1960 E 1970)*

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirantes de São Paulo – UNIBAN-SP, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob orientação do **Professor Doutor Wagner Rodrigues Valente.**

SÃO PAULO

2009

MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALEXANDRE SOUZA DE OLIVEIRA

A ABORDAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS GINASIAIS: *UMA ANÁLISE EM TEMPOS MODERNOS (DÉCADAS DE 1960 E 1970)*

Banca Examinadora:

____

____

____

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________

Local e Data: ___________________

À Deus,

aos meus pais,

à minha irmã e sobrinha,

minha eterna gratidão e amor.

Dedico-lhes o título de Mestre.

AGRADECIMENTOS

Peço desculpas antecipadamente por quaisquer omissões, indesculpáveis, mas involuntárias.

À Deus, por ter guiado o meu caminho, me dado forças para seguir em frente e por me proporcionar conviver com pessoas que me entusiasmam, que me fazem acreditar e ir a busca do que considero importante.

Ao meu pai Cláudio Claro de Oliveira (in memorian) e à minha mãe Edite Francisca de Souza Oliveira, por me ensinar a importância da construção e coerência de meus próprios valores. Foram eles que me indicaram o caminho do bem, da verdade, do amor e da justiça. Deram-me o incentivo e a possibilidade de me maravilhar com o mundo fascinante da descoberta do conhecimento. *Amo vocês!*

À minha irmã Cláudia e minha sobrinha Natália pela compreensão quanto ao afastamento e ausência. Sei que vocês se orgulham de mim e converto numa obrigação de, a cada dia, procurar ser mais digno deste orgulho. *Eu também me orgulho de vocês!*

À minha primeira professora Amélia Nishimura e aos demais mestres, tanto os que fizeram parte de minha formação básica quanto os da acadêmica. Sou grato pelas aulas, conselhos e dicas formais e informais, pelos livros emprestados, por me permitirem participar de um mundo vertiginoso de descobertas que me ajudam e apoiam em minha constante formação.

À Banca de Qualificação, sou imensamente grato pelo incentivo e fortalecimento por meio das colocações feitas após a leitura atenta de meu texto. Valorizo os comentários, observações e críticas, bem como as ricas lições sobre o texto acadêmico. Excelentes sugestões foram oferecidas durante o exame de qualificação e muito contribuíram para esta forma final de dissertação, mesmo se algumas delas não pude (ou soube) aproveitar devidamente.

À Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Araújo de Oliveira pela orientação efetiva desta pesquisa durante todo o tempo, por sua forma exigente, crítica e criativa de questionar. Agradeço pelo seu ânimo para ouvir minhas dúvidas, inseguranças, questões e confusões. A admiração que aqui torno pública vem do compromisso, pelos diálogos constantes e amizade. Pela alegria de trabalharmos juntos e com grande respeito e admiração é que procurei retribuir a confiança em mim depositada com esta dissertação de mestrado.

Ao Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente pela orientação formal nos últimos meses, por ter me ajudado no processo de construção desta dissertação com dedicação e acima de tudo respeito. Admiro muito o seu profissionalismo e sua inteligência.

Ao Prof. Dr. Ruy César Pietropaolo por ter aceitado o convite para participar da banca de qualificação e de defesa. Obrigado mais uma vez, pelas valiosas contribuições para esta dissertação e também por suas aulas, que foram imprescindíveis para que tenhamos uma prática colaborativa, tanto na pesquisa como na atuação educacional. Admiro-o muito!

Aos professores do Programa de Pós-graduação Scrictu Sensu em Educação Matemática da UNIBAN-SP, pela contribuição para o meu crescimento como pesquisador. Agradeço em especial aos professores: Dr.ª Maria Célia Leme da Silva, Dr.ª Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy), Dr.ª Vera Helena Giusti de Souza, Dr.ª Rosana Nogueira de Lima, Dr.ª Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Dr. Alessandro Jacques Ribeiro, Dr.ª Angélica da Fontoura Garcia Silva, Dr.ª Maria Elisabette B. B. Prado.

À amiga Leyla Chiste que muito me incentivou nesse período de construção do presente trabalho, colaborando nos momentos de crise intelectual. Pelas participações em congressos, debates, compartilhando seus textos. Companheira de algumas viagens para discussão de nosso trabalho e do nosso grupo de pesquisa; amiga que sempre teve uma palavra de apoio quando não caminhavam tão bem e que festejou comigo quando as coisas iam muito bem; amiga divertida. Temos ainda muito o que estudar, muitos artigos a produzir, muitos congressos para divulgar nosso trabalho e divertidas viagens acadêmicas!

Ao Rogério Lopes Leitão (robô) pela amizade, companhia, colaboração e apoio.

A todos os meus amigos que fizeram parte da linha de pesquisa História da Matemática escolar no Brasil na UNIBAN: Leyla Chiste, Francisco de Oliveira Filho, Leandro Silvio Katzer Rezende Maciel, Kátia Cristina de Camargo, Pedro Marques Corrêa Neto, Glorya Maria Alves Ramos, Lucia Maria Aversa Villela, Maria Silvia Braga Rios, que mesmo nos momentos difíceis estávamos juntos, pois no processo de construção do conhecimento, amadurecemos com nossos sofrimentos e com as alegrias das descobertas que vamos fazendo do mundo, de nós mesmos e dos outros.

Ao grupo de amizade Elen Graciele Martins, Rosana Jorge Monteiro Magni, Arthur Damasceno Vicente, Paulo Sérgio Pereira da Silva, Marcio Dorigo, Alexsandro Soares Candido, Dartagnan Garcia Pimenta, Franklin Rodrigues de Souza, Yuri Osti Barbosa, pelos momentos de estudos, companhia e descontração.

Aos meus colegas do GHEMAT e do Centro de documentação localizado em Osasco-SP, pelo companheirismo, apoio e contribuição.

Aos eficientes funcionários da Secretaria da Pós-Graduação da UNIBAN-SP campus Marte, aos funcionários da biblioteca da UNIBAN e da Faculdade de Educação da USP, em especial aos que trabalham no Projeto LIVRES, pelo profissionalismo e receptividade que me dispensaram ao longo desta caminhada.

Agradeço as críticas e as mensagens de apoio e carinho que recebi de inúmeras pessoas durante os congressos em que este trabalho foi apresentado.

À Secretaria Estadual de Educação de São Paulo pelo apoio financeiro durante os dois anos de pesquisa.

Eu tenho uma espécie de dever, de dever de sonhar,
de sonhar sempre,
pois sendo mais do que
um espectador de mim mesmo,
Eu tenho que ter o melhor espetáculo que posso.
E assim me construo a ouro e sedas,
Em sala supostas, invento palco, cenário para viver
o meu sonho
entre luzes brandas
e músicas invisíveis.

Fernando Pessoa

RESUMO

A presente Dissertação de Mestrado tem como objetivo investigar a abordagem para o ensino de função adotada em livros didáticos de Matemática para o ginásio durante as décadas de 1960 e 1970, período em que se caracterizou o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. O estudo procura identificar como diferentes autores desses livros trataram o ensino de função a partir das transformações advindas com o MMM. Assim, pretendemos verificar se houve ou não uma padronização (vulgata) desse ensino neste período. Separamos a análise dos livros didáticos em dois momentos: Tempos Pré-Modernos e Modernos. O primeiro corresponde à década de 1950, durante a qual a legislação educacional vigente era a *Portaria Ministerial* de 1951. O segundo, é a denominação que utilizamos para as décadas de 1960 e 1970, período em que foram publicados, pelo GEEM, em 1962, *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio e*, *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática*, em 1965; e as *Leis de Diretrizes e Bases da Educação*, de 1961 e de 1971. Tomando o livro *Matemática Curso Moderno* de Osvaldo Sangiorgi como manual inovador, elencamos como categorias de análise a estrutura de apresentação do conceito de função; como se deu a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; a representação gráfica das funções linear e quadrática; e os exercícios. Os resultados indicam que há uma certa padronização em relação à: função como caso particular de relação; representação de relação/função por diagrama de flechas; conceituação de domínio, contra-domínio e imagem. Os aspectos que mais diferenciam as coleções analisadas são: a ênfase na linguagem simbólica, o rigor na abordagem do tema, a preocupação com a abstração, a contextualização, o uso dos exercícios/atividades para a abordagem de conteúdos.

Palavras-chave: Movimento da Matemática Moderna. Ensino de função. Análise de livros didáticos de Matemática.

ABSTRACT

The objective of this Master's Dissertation is to investigate the approach to teaching functions adopted in Mathematics textbooks for elementary school in the 1960s and 1970s, a period that characterized the Modern Math Movement (MMM) in Brazil. The study seeks to identify how different authors of these books handle the teaching of functions after the transformations that stem from the MMM. We thus intend to check if there was a standardization of this teaching method at the time or not. We separated the analysis of textbooks into two moments: Pre-Modern and Modern Times. The first corresponds to the 1950s, during which the Ministerial Rule of 1951 was the education legislation in effect. The second corresponds to the denomination we use for the 1960s and 1970s, during which GEEM published *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio* (Minimal Subjects for a Modern Program in Math for Elementary School), in 1962, and, *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* (Suggestions for a Math Course Script) in 1965; and *Leis de Diretrizes e Bases da Educação* (Laws for Education Guidelines and Foundations) from 1961 and 1971. Using the book *Matemática Curso Moderno* (Modern Math Course) by Osvaldo Sangiorgi as an innovative manual, we list the following as categories for analysis: the presentation structure of the function concept; how concepts of domain, counter-domain and image are explored; the use of arrow diagrams to establish relations; the graphic representation of linear and quadratic functions; and exercises. Results indicate a certain standardization in relation to: function as a specific case of relation; representation of relation/function by arrow diagrams; conceptualization of domain, counter-domain and image. The aspects that most differentiate analyzed collections are: emphasis on symbolic language, rigor in addressing the theme, concern with abstraction, contextualization, use of exercises/activities for addressing content.

Key words: Modern Math Movement. Teaching of functions. Analysis of math textbooks.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"Oh! Bendito o que semeia
Livros...livros à mão cheia...
E manda o povo pensar!

O livro caindo n´alma
É germe – que faz a palma,
É chuva – que faz o mar."

(Castro Alves)

Esta pesquisa busca investigar o conceito de *função* abordado em livros didáticos ginasiais durante as décadas de 1960 e 1970 no Brasil, período em que vigorava o Movimento da Matemática Moderna - MMM[1]. Procurar-se-á dar continuidade à pesquisa já realizada por Ciro Braga (2003) que estudou o processo inicial da disciplinarização do mesmo conceito na Matemática do ensino secundário durante as décadas de 1930 e 1940.

Este estudo soma-se a outros referentes à história do MMM no Brasil, vincula-se à linha de pesquisa História da matemática escolar no Brasil da UNIBAN-SP, fazendo parte do GHEMAT[2], na medida em que integra o projeto de cooperação CAPES[3]-GRICES[4], coordenado pelos professores Wagner Rodrigues Valente (Brasil) e José Manuel Matos (Portugal).

Origem do estudo

Há algum tempo, no decorrer de minhas atividades profissionais como professor de Matemática do Ensino Fundamental II e Médio, da Rede Estadual de

---

1 Ao citarmos o Movimento da Matemática Moderna, iremos representá-lo como MMM.

2 O Grupo de História da Educação Matemática (GHEMAT), coordenado pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente foi constituído no ano de 2000. O Grupo é composto por pesquisadores que fizeram seus doutorados em educação, em matemática e em educação matemática. Abriga, sobretudo, em grande parte, doutorandos, mestrandos e alunos em iniciação científica, que realizam seus trabalhos em história da educação matemática.

3 CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, que visa a melhoria da pós-graduação brasileira, através de avaliação, divulgação, formação de recursos e promoção de cooperação científica internacional <www.capes.gov.br>.

4 GRICES – Gabinete de Relações Internacionais da Ciência e do Ensino Superior, que apoia a participação da comunidade científica de Portugal em projetos ou realizações conjuntas, integrados em acordos e convênios de cooperação científica e tecnológica ou ainda em acordos culturais de natureza bilateral <www.grices.mctes.pt>.

Ensino do Estado de São Paulo, questiono-me sobre os caminhos que a disciplina Matemática percorreu até chegar à atual forma de configuração curricular, apresentada pelos livros didáticos.

A partir da minha profissão, refletindo sobre minha trajetória, na pretensão de melhor compreender o presente, identifico alguns fatos que me levaram à construção desta proposta de dissertação.

Sou o único filho homem de uma família em que os pais apostavam muito na educação dos filhos, visto que a responsabilidade de estudar era para ser "alguém na vida". Cursei todo o primeiro grau em uma mesma escola pública, onde desenvolvi um crescente interesse pela Matemática. Este meu interesse pela disciplina era apreciado por meus pais, embora eles tivessem pequenas noções sobre ela. Eles estudaram justamente na época que foram apresentadas alterações no ensino propostas pelo MMM, que introduziu novos conceitos, em uma outra perspectiva, a partir da linguagem dos conjuntos.

O tempo foi passando e após a formação do primeiro grau em escola pública estadual, resolvi fazer em 1990 o colegial técnico em Eletrônica e Informática Industrial, numa escola particular e assim um sentimento muito forte de admiração pelos professores de Matemática foi surgindo, somado às manifestações de colegas e amigos de sala de aula que diziam que aprendiam matemática comigo.

Ao entrar na faculdade de engenharia elétrica em 1995, percebi que a matemática estava presente em todos os seis anos que eu iria cursar naquela universidade. Após terminar o curso e com a idéia fixa na docência como profissão, ingressei no curso de licenciatura em Matemática, no qual conclui em 2004.

A soma de experiências estava me levando a cogitar sobre o que realmente queria como futuro profissional: estar no mesmo lugar daqueles educadores, tão admirados por mim.

A vivência como aluno e professor de Matemática, me mostrou uma certa inclinação ao tema específico de função, talvez por eu gostar tanto do tema.

Ao lecionar na rede pública de ensino do Estado de São Paulo em 2003 para alunos da Educação de Jovens e Adultos - EJA[5] no ensino médio, muitos de meus

---

5 A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é o segmento de ensino que recebe os jovens e adultos que não completaram os anos da Educação Básica em idade apropriada. No caso do ensino fundamental, a idade para jovens ingressarem em cursos da EJA que também objetivem exames supletivos desta etapa, só pode ser superior a 14 anos completos, dado que 15 anos completos é a idade mínima para inclusão em exames supletivos. Para iniciar um curso da EJA no ensino médio o estudante deve ter mais de 17 anos completos e só

alunos diziam que a forma como os conteúdos eram abordados nos livros didáticos de Matemática era diferente dos tempos anteriores em que estudaram, como por exemplo, os livros didáticos da década de 1970 abordavam *funções* utilizando conjuntos e diagrama de flechas, já os livros didáticos utilizados em minhas aulas tratavam *função* a partir de uma situação do contexto, explorando relações de dependências entre duas variáveis e as atividades eram apresentadas a partir de situações significativas que valorizavam as práticas sociais e as conexões com outras áreas do conhecimento.

Eu atribuía essas mudanças de metodologia de ensino às diferentes reformas de ensino que o Brasil passou em décadas anteriores, como por exemplo, a Reforma Francisco Campos (década de 1930), a Reforma Gustavo Capanema (década de 1940) e o Movimento da Matemática Moderna (décadas de 1960 e 1970). Mas eu tinha pouca noção sobre o grau de penetração destas Reformas no ensino da Matemática e das alterações de ensinar certos conteúdos matemáticos nas escolas.

A vontade de estudar essas mudanças foi crescendo e levou-me a ingressar em 2008, como aluno, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Bandeirante de São Paulo - UNIBAN-SP na linha de pesquisa História da Matemática escolar no Brasil. No entanto, ao ingressar nesta linha de pesquisa, havia um projeto em andamento sobre a Matemática Moderna. Para fazer parte deste projeto escolhi centrar meu estudo para no ensino de *funções*, que de certa forma, respeitava o meu interesse pelo conteúdo e de dar continuidade à pesquisa já realizada por Ciro Braga (2003), que estudou *O processo inicial da disciplinarização de função na Matemática do ensino secundário brasileiro* durante as décadas de 1930 e 1940.

No entanto, para atender aos objetivos a que me proponho, pretendo observar as mudanças ocorridas no ensino de função nas décadas de 1960 e 1970 nos livros didáticos ginasiais, buscando suporte também nas legislações, nos guias para os professores e nas revistas pedagógicas.

Foi esse o ponto de partida do trabalho, o panorama que definiu a temática do estudo direcionando a escolha dos exemplares para análise e a delimitação de um quadro teórico-medotológico.

---

com 18 anos completos ele poderá ser incluído em exames. (Parecer CNE/CNE Nº 11/2000 e Resolução CNE/CEB Nº1/00 – Diretrizes Cuirriculares Nacionais para a Educação de Jovens e Adultos).

Os acervos para a pesquisa: busca e seleção

Neste item tratamos da busca e seleção dos livros didáticos analisados, mostrando as dificuldades que encontramos durante o processo, considerando o período de estudos que visa esta pesquisa (décadas de 1960 e 1970).

O ponto de partida foi a busca de livros disponíveis nas bibliotecas de três escolas onde já lecionamos. Infelizmente encontramos somente dois livros (*Matemática Curso Moderno* da 2ª e 4ª série ginasial), que estavam muito mal conservados – faltando até páginas.

Uma opção era buscar os livros nos sebos, mas devido aos poucos recursos financeiros resolvemos procurá-los também no Centro de Documentação[6] criado em 2008 pelo GHEMAT, localizado em Osasco-SP e no acervo do Projeto LIVRES[7], localizado na USP. No acervo do Centro de Documentação do GHEMAT há arquivos pessoais de educadores matemáticos como Euclides Roxo, Ubiratan D´Ambrosio, Scipione Di Pierro Netto, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Liberman, Osvaldo Sangiorgi dentre outros. Também fazem parte do acervo, documentação que registra práticas escolares como: cadernos de alunos, cadernos de professores, livros didáticos de matemática, guias para professores, exames e provas.

O Projeto LIVRES é desenvolvido pelo Centro de Memória da Educação Escolar (CME), da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Trata-se de um projeto de pesquisa que tem o apoio da Biblioteca da FEUSP[8] e convênios internacionais, visando intercâmbios para estudos comparados e acompanhamento das pesquisas em outras instituições. O Projeto nos fornece referenciais e fontes, por intermédio da recuperação de obras e coleta de documentos sobre a produção didática, legislação, programas curriculares, catálogos de editoras, etc.

Nestes dois centros de documentação encontramos diversos livros tanto de ginásio, como de colégio[9] que circulavam nas décadas de 1960 e 1970 que poderiam ser fontes de nossa pesquisa. No entanto precisaríamos focar nossa pesquisa em um nível de ensino (ginasial ou colegial), pois o tempo de pesquisa de mestrado é muito limitado frente a análise dos dois níveis de ensino.

---

6 O Centro encontra-se aberto ao público e pesquisadores em geral, a partir do agendamento de visitas pelo sítio <www.ghemat.mat.br>.

7 LIVRES - Livros Escolares Brasileiros. A consulta e o agendamento de visitas ao acervo do Projeto LIVRES podem ser realizados pelo sitio <www2.fe.usp.br/estrutura/livres/index.htm>.

8 Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo – FEUSP.

9 Era a nomenclatura da época para os atuais 6º e 9º ano e ensino médio, respectivamente.

Vencido esse primeiro trajeto da pesquisa, precisava então escolher os livros didáticos a serem analisados. Como encontramos muito mais livros do ensino ginasial, optamos por esse nível de escolaridade. Assim nossa questão de investigação ficou formulada da seguinte maneira: A partir das transformações da matemática escolar com o advento do MMM, como o tema *função* foi abordado nos livros didáticos ginasiais nas décadas de 1960 e 1970 no Brasil?

Os livros didáticos a serem analisados

Com o advento do MMM, o ensino de *função* precisava ganhar um novo tratamento pedagógico e metodológico nos livros didáticos, conforme as orientações do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM[10]. Antes do Movimento os autores de livros didáticos ensinavam *função* por meio do estudo das variáveis dependentes e independentes e com o MMM o conceito passou a ser ensinado como uma relação/ correspondência entre conjuntos. Assim, pretendemos verificar como os autores seguiram o processo de disciplinarização de *função* em seus livros didáticos durante as décadas de 1960 e 1970 no Brasil e se há ou não uma certa padronização do ensino deste conteúdo a partir da coleção didática ginasial de Osvaldo Sangiorgi em Tempos Modernos.

Para melhor compreender estas transformações relativas ao tratamento de *funções* nos livros didáticos durante o MMM, separamos a análise primeiramente em dois Tempos: Pré-Modernos e Modernos. Chamamos de Tempos Pré-Modernos a década de 1950, durante a qual a legislação educacional vigente era a Portaria Ministerial de 1951. Tempos Modernos é a denominação que utilizaremos para as décadas de 1960 e 1970, auge do MMM no Brasil, período que foram publicados os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio* e para o *Colegial*, as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* e as Leis de Diretrizes e Bases da Educação, de 1961 e de 1971.

Embora nosso enfoque seja a análise de livros didáticos em Tempos Modernos, será necessário verificar como o conceito de função era abordado em um

10 Ao citarmos o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, iremos representá-lo como GEEM. Trata-se de um grupo de estudos criado em 31 de outubro de 1961, presidido por Osvaldo Sangiorgi e que objetivava incentivar a Matemática Moderna, divulgando suas idéias e promovendo cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática nas escolas. Faziam parte do GEEM autores de livros didáticos, matemáticos, professores primários, secundários e universitários.

período anterior ao MMM, pois assim, acreditamos que podemos verificar as transformações que ocorreram no ensino referente ao tema.

Portanto, analisaremos a coleção didática utilizada em Tempos Pré-Modernos de Osvaldo Sangiorgi. Já em Tempos Modernos analisaremos a coleção didática desse mesmo autor com os Guias para os Professores, as coleções de Bóscolo e Castrucci, de Agrícola Bethlem, de Miguel Asis Name e do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada – GRUEMA[11], de autoria de Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Perelberg Liberman.

A partir da analise da coleção *Matemática Curso Moderno* de Osvaldo Sangiorgi, identificamos as categorias que serão utilizadas para analisar as demais coleções didáticas tendo em vista que esta coleção foi a primeira a propor conteúdos e orientações metodológicas para o ensino da Matemática Moderna no Brasil. Além disso, esta coleção teve um número expressivo de vendas[12]. As demais coleções foram selecionadas por tratarem explicitamente de matemática moderna e por serem publicadas nas décadas de 1960 e 1970, período desta pesquisa.

Como eixos norteadores de análise, focalizaremos a estrutura de apresentação do conceito de função; a definição de função; como se deu a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; a representação gráfica das funções linear e quadrática; os exercícios.

Instrumentalizando-me teórica e metodologicamente

Como pesquisador iniciante, inexperiente no campo da História da Educação, iniciei a pesquisa a partir de leituras indicadas nas diferentes cadeiras do curso de Mestrado.

Estas leituras me possibilitaram abrir um grande leque para o embasamento deste estudo, como: Bloch (2002) que nos ajuda ao definir qual é o oficio do historiador, Certeau (2007) que enfatiza que qualquer investigação historiográfica se articula sobre um lugar de produção socioeconômico, político e cultural e nos ajuda a

---

11 GRUEMA – sigla escolhida pelas autoras inspiradas no fato de que suas obras exclusivas de um grupo e de autoras. No final da década de 1960 em São Paulo foram produzidos livros didáticos de 1ª a 4ª séries pelas professoras Lucília e Manhúcia, mas no início da década de 1970 houve a inclusão das professoras Anna e Franca para a produção dos livros de 5ª a 8ª série e o Grueminha, destinado à educação infantil.

12 Conforme aponta os estudos de Villela (2008) a partir dos Mapas mensais de publicações da Cia. Editora Nacional, o número de exemplares vendidos chegou a 4.336.087, de 1964 a 1978.

compreender o conceito de práticas, Chervel (1990) sobre o conceito de disciplina escolar, Julia (2001) que nos ajuda a compreender a cultura escolar em nossa pesquisa, Choppin (2004) que traz contribuições para a utilização do livro didático como fonte de pesquisa para a produção da História da Educação, Bittencourt (1993, 2003) com a importância dos livros didáticos para a escola e para a pesquisa, Viñao Frago (2007) que relaciona a cultura escolar, as reformas e as mudanças educacionais, Goodson (1995) que identifica as relações conflituosas entre as disciplinas escolares, Chartier (2007) que traz o conceito de apropriação e Valente (1999, 2004, 2005, 2007, 2008a, 2008b, 2008c) como referência para a produção de História da educação matemática e para o estudo de livros didáticos de Matemática como fonte de pesquisa.

A estrutura deste trabalho

Este trabalho está assim estruturado:

Na introdução é apresentada uma sucessão de fatos que levaram o desenvolvimento desta pesquisa.

No primeiro capítulo tecemos as considerações teórico-metodológicas, ou seja, apresentamos os autores/ textos nos quais nos embasamos para que esta pesquisa seja conduzida. Este capítulo está separado em subitens que tratam de como o historiador deve produzir história, trabalhar com suas fontes; como entendemos cultura e disciplina escolar; o livro didático como fonte de pesquisa; o currículo e a sua "movimentação" frente às reformas na educação.

No segundo capítulo elaboramos uma breve história da matemática escolar no Brasil, destacando o ensino de função em Tempos Pré-Modernos. Retratamos uma breve viagem histórica da matemática escolar no Brasil tendo como ponto de partida o surgimento do campo da Educação Matemática, passando por Reformas que reestruturaram o ensino de Matemática em nosso país, como a Reforma Francisco Campos e a Gustavo Capanema, bem como suas conseqüências quanto ao ensino de *função*.

No último capítulo tratamos das análises de livros didáticos ginasiais em Tempos Pré-Modernos (década de 1950) e Modernos (décadas de 1960 e 1970). Embora nosso foco seja os livros didáticos ginasiais em Tempos Modernos, a comparação com a década de 1950 é essencial para que possamos melhor compreender as mudanças relativas ao ensino de *funções*.

CAPÍTULO I

1. CONSIDERAÇÕES TEÓRICO-METODOLÓGICAS

> "O historiador não pode ser um sedentário, um burocrata da história, deve ser um andarilho fiel a seu dever de exploração e de aventura."
>
> (Jacques de Le Goff)

Este projeto insere-se numa área de pesquisa emergente, a história da educação matemática, que vem construindo sua trajetória acolhendo contribuições teóricas e metodológicas fundamentais da história cultural e da história da educação.

Para responder a questão de pesquisa, recorremos a livros didáticos que estavam circulando durante as décadas de 1960 e 1970 – período em que o Movimento da Matemática Moderna estava "borbulhando" nas escolas brasileiras.

As palavras de Wagner Valente (1999) ajudaram a reforçar a opção pelo livro didático como fonte de pesquisa:

> Quais explicações podemos dar hoje para o que ensinamos como Matemática nas escolas? Qual a origem escolar e que desenvolvimento tiveram os diversos conteúdos que hoje ensinamos? São perguntas a que o texto pretende responder.[...] Nossa história, então, procurou rastrear a trajetória da constituição da Matemática escolar como um conjunto organizado de conteúdos para o ensino elementar da Matemática no Brasil. Chamo esse conjunto de teoria escolar. As principais fontes de pesquisa foram os livros didáticos. Os livros didáticos como um lugar privilegiado da matemática escolar (VALENTE, 1999, p.19).

Este capítulo tem como objetivo constituir os alicerces teórico-metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa a partir do campo da história cultural. Para tanto, temos em nossa base teórica Bloch (2002) que nos ajuda a compreender qual é nosso ofício ao produzir esta pesquisa, Certeau (2007) com o significado da prática, da relação do lugar com o contexto socioeconômico, político e cultural de uma determinada época, Chervel (1990) sobre o conceito de disciplina escolar, sua relação com os conteúdos e finalidades educativas, Julia (2001) que aponta uma perspectiva interessante de estudar a "cultura escolar como objeto histórico", Choppin (2004) que nos faz refletir e compreender que os livros didáticos são produções culturais complexas, Bittencourt (1993, 2003) que retrata os livros didáticos como um instrumento para melhoria da prática pedagógica e como auxílio dos processos de ensino e de aprendizagem, Viñao Frago (2007) que nos auxilia a relacionar a cultura escolar com as reformas e com as mudanças educacionais, Goodson (1995) que trata das relações do currículo com os fatores internos e externos da escola, Chartier (2007) que nos possibilita ter subsídios para identificar os conceitos de apropriação e representação e Valente (1999, 2004, 2005, 2007, 2008a, 2008b, 2008c) cujos estudos tratam da trajetória histórica da matemática escolar no Brasil, e nos auxilia na análise dos livros didáticos de matemática.

1.1 O OFÍCIO DO HISTORIADOR E A PRODUÇÃO DA HISTÓRIA.

Para produzir a história da educação matemática é importante a aproximação com o campo da história tendo como finalidade atribuir sentido ao fazer historiográfico na perspectiva histórico-cultural. Podemos dizer então que essa aproximação advém do campo da história onde há necessidade de levantar questionamentos, para que possamos recolher registros do passado e, a partir daí, realizar um trabalho de construção – produzindo sentido.

Tratar os documentos de uma determinada época como fonte para a produção da história da educação matemática entendendo-a como especialização da História da Educação é “alargar o entendimento de como se dá, na História, o processo de escolarização dos diferentes saberes e, em particular, da Matemática, tomando como ponto de partida um instrumental teórico-metodológico utilizado pelos historiadores” (VALENTE, 2005, p. 32).

Assim, uma referência importante para esta pesquisa é o historiador francês Marc Bloch, porque este nos orienta como produzir História. O autor procura definir o que é História e qual é o oficio do historiador, assinalando também que o historiador deve “saber falar, no mesmo tom, aos doutos e aos estudantes”. (BLOCH, 2002, p.41).

Para Bloch (2002) a renovação caminha ao lado da inovação. Ambas precisam constantemente consultar a história para serem bem sucedidas em seus objetivos de representar as “mudanças” e também o futuro. Neste sentido podemos ter como referência os livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi, que foram publicados antes mesmo da legislação e tudo nos leva a crer que esta publicação era necessária para que o MMM ficasse mais forte e fosse um suporte para os professores trabalharem o ideário deste movimento materializado nos conteúdos a serem ensinados na escola, portanto a coleção didática de Osvaldo Sangiorgi foi uma inovação para aqueles Tempos Modernos.

Segundo Bloch (2002), durante a pesquisa histórica é preciso encontrar dois tipos de documentos: aqueles explícitos, que podemos citar como exemplo os livros didáticos que serão analisados nesta pesquisa e os implícitos que não aparecem espontaneamente, como exemplo a política vigente na época, os interesses pessoais dos autores e a apropriação dos autores em relação ao ideário do MMM. Há ainda aqueles a serem descobertos, usando se necessário, a flexibilidade para mudar o caminho a ser percorrido no decorrer da pesquisa.

Bloch (2002) nos orienta sobre a necessidade do questionamento, pois "Os textos ou os documentos arqueológicos, mesmo os aparentemente mais claros e mais complacentes, não falam senão quando sabemos interrogá-lo" (BLOCH, 2002, p. 79).

A respeito da produção do historiador, Bloch (2002) ressalta que ao escrever, o historiador precisa atentar para a própria nomenclatura da história que é fornecida de forma ultrapassada diante da época vivenciada pelo escritor. "A história recebe seu vocabulário, portanto, em sua maior parte, da própria matéria de seu estudo. Aceita-o, já cansado e deformado por longo uso; ambíguo, alias, não raro desde a origem, como todo sistema de expressão que não resulta do esforço severamente combinado dos técnicos" (BLOCH, 2002, p.136).

Segundo Bloch (2002), o historiador depara-se com a dificuldade em descrever com linguagem atualizada podendo distorcer o acontecimento de outra época, ou interpretar com sentido errado de uma palavra que não existe mais ou cujo significado com o passar dos anos.

Ainda tratando da dificuldade do pesquisador para produzir história, Bloch (2002) nos orienta sobre um outro obstáculo que podemos encontrar, a diversidade cultural, os fatores de ordem temporal.

Para a produção desta história utilizamos documentos do passado (livros didáticos, guias para professores, legislação, revistas, etc), há necessidade de questionarmos estes documentos com a intenção de preenchermos lacunas deixadas por esta história. Sobre esta lacuna Valente (2007) cita Prost: "A verdadeira lacuna não é um objeto suplementar, onde a história ainda não foi feita.

Tratam-se de questões para as quais os historiadores ainda não tem respostas." (PROST, 1996, p. 85 apud VALENTE, 2007, p.32).

Sobre as constantes explicações que tendem a responder as interrogações do historiador, Valente (2007) salienta:

> Os fatos históricos são constituídos a partir de traços, de rastros deixados no presente pelo passado. Assim, o trabalho do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre esses traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado, segundo as regras de uma crítica. Mas, a história que se elabora não consiste tão simplesmente na explicação de fatos. A produção da história, tampouco é o encadeamento deles no tempo, em busca de explicações a posteriori. (VALENTE, 2007, p.31).

Outro aspecto importante é a delimitação correta do campo historiográfico enquanto abordagem ou forma de fazer a História, ou seja, como se produz história explicitando as questões metodológicas do fazer histórico. Para isso, citaremos a visão de Michel de Certeau de pensar a história como uma produção.

Certeau (2007) procura caracterizar as operações que regulam a escrita da história: a fabricação de um objeto, a organização do tempo, o trabalho de ocultação/ deturpação do sentido, a encenação de um relato. A operação historiográfica é considerada como o ato de transformar um determinado conhecimento em fato histórico, de lidar com os documentos a fim de configurar seu espaço e construir suas fontes, orientando a pesquisa científica.

> [...] O estabelecimento das fontes (pela mediação de seu aparelho atual) não provoca apenas uma nova repartição das relações razão/ real ou cultura/ natureza; ele é o princípio de uma redistribuição epistemológica dos momentos da pesquisa científica. (CERTEAU, 2007, p.84-85).

Segundo Certeau (2007), qualquer investigação historiográfica se articula sobre um lugar de produção socioeconômico, político e cultural. É em função deste lugar, que se instauram métodos, que uma topografia de interesses se concretiza, que se organizam processos e questões a por aos documentos.

Pelas nossas experiências escolares, acreditamos que os conteúdos presentes nos livros didáticos bem como os saberes específicos que são ensinados pela instituição escolar sofrem modificações influenciadas por transformações sociais, políticas e/ou culturais, conforme apontam também os estudos de Certeau (2007).

Certeau (2007) aborda a história com um “novo olhar” e também com um “novo dizer” que contribui para a renovação da prática historiográfica, ressaltando que o gosto do historiador liga suas ideias aos lugares de onde fala, a história parte da realidade e se articula com a produção sócio-econômico, político e cultural.

> A articulação da história com um lugar é a condição de uma análise da sociedade.[...] Levar a sério o seu lugar não é ainda explicar a história. Mas é a condição para que alguma coisa possa ser dita sem ser nem legendária (ou “edificante”), nem a-tópica (sem pertinência). Sendo a denegação da particularidade do lugar o próprio princípio do discurso ideológico, ela exclui toda a teoria. (CERTEAU, p.77, 2007).

Ainda sobre a produção do historiador, Certeau (2007, p. 66/67) esclarece que o historiador produz seu trabalho a partir do presente, das preocupações de sua realidade, fazendo de seu discurso um "discurso particularizado", que tem um emissor, o historiador, e um destinatário, seja ele qual for, a academia, a sociedade de forma geral ou um grupo específico. Essa discussão implicou numa constatação para Certeau: “não se pode falar de uma verdade, mas de verdades (no plural)”. (CERTEAU, 2007, p. 67).

Chartier (1990) é um outro autor que trabalha com a produção historiográfica no campo de estudos da história cultural. O trabalho desse autor é voltado para a escrita-leitura e prática, os modos de produção dos escritos e a apropriação e reconstrução de significados por parte dos leitores em tempos diferentes.

Segundo Chartier (1990) a História da Leitura é de grande importância e deve ser analisada de forma ampliada, contextualizada e está interligada à história do livro e/ ou dos suportes que carregam a escrita. A leitura possui uma história social e cultural vinculada às diferentes épocas e comunidades de leitores / autores.

Ao escolhermos os livros didáticos de matemática no ginásio durante o MMM como nossa principal fonte de pesquisa, notamos que estes são passíveis de múltiplas leituras dos autores perante os Congressos para o ensino de matemática, orientações e sugestões do GEEM (1962 e 1965b) e das legislações educacionais (LDB de 1961 e 1971) buscando no livro didático uma expressão dessas influências. Sendo assim, podemos considerar que o ensino de matemática nos livros didáticos sofre influências sociais e políticas na escolha de seus conteúdos. Ou seja, as influências que os livros didáticos vem sofrendo são “ajustes” para cada época onde é moldado o conhecimento que deve ou não ser adquirido pela sociedade.

Sobre estas múltiplas leituras por diferentes leitores Chartier, traz suas contribuições com relação estreita entre a forma (escrita) e o sentido (interpretação) de um texto; “A apropriação, a nosso ver, visa uma história social de usos e das interpretações, referidas a suas determinações fundamentais e inscritas nas práticas específicas que as produzem.” (CHARTIER, 1991, p. 180).

Em relação a forma escrita, Chartier (1991) enfatiza que a esta tem seu tempo e espaço e tem suas influências exercidas por diversos contextos pelos quais foi produzida, portanto, um texto torna-se diferenciado ao ser transmitido/ lido em diversos meios, onde o sentido do texto adquirido pelo leitor através de sua leitura é diferente do sentido do autor ao escrever o texto.

Verificamos que para Chartier o estudo das representações são fundamentais para a produção da história. Sobre os sentidos (interpretações), Chartier (1991) ressalta que estes produzidos pelo social através dos mecanismos de representação que articulam modalidades de relações com o mundo social (classificações, delimitações, práticas, institucionalizações).

Acreditamos que é pela linguagem/ discurso que as representações se materializam e que os discursos/ documentos não falam por si só, não trazem respostas prontas. Eles apenas exprimem os sentidos construídos sobre o que aconteceu.

Segundo Chartier (1991) por intermédio da noção de representação podem-se perceber três modalidades de relação com o mundo social: o trabalho de classificação e de recorte que produz configurações intelectuais pelas qual a realidade é contraditoriamente construída pelos diferentes grupos que compõem uma sociedade; as práticas que visam a fazer reconhecer uma identidade social, a exibir uma maneira própria de ser no mundo; e as formas institucionalizadas e objetivas que podem marcar para sempre a existência de um grupo, da comunidade ou da sociedade.

Através destas três modalidades é possível associá-las à escolarização até década de 1950 cuja clientela era constituída por grande maioria de alunos pertencentes às elites - representação de uma maneira própria de ser no mundo, na tentativa de perpetuar este modo de ser. Já num segundo momento, quando a escola tende à uma escolarização de massa (a partir da década de 1960), há uma clara intenção,mediada por interesses políticos, de trazer a escola uma representação de outros modos de ser, significando simbolicamente outros meios de ensinar e outras posições diferentes ou semelhantes a um primeiro momento, quando era constituído pelas elites.

Assim, tudo nos leva a crer que há contradições existentes nas representações e práticas culturais durante os Pré-Modernos (1950) e Tempos Modernos (1960 -1970), até mesmo porque o ensino de matemática em Tempos Modernos estava relacionado diretamente a novas demandas de uma sociedade em ascensão e modificação, na qual pretendia unificar o ensino da matemática por meio da linguagem de conjuntos, das estruturas fundamentais e a introdução de novos conteúdos, sem abandonar os antigos.

1.2 A "CULTURA ESCOLAR COMO OBJETO HISTÓRICO" E OS CONSTITUINTES DE UMA DISCIPLINA ESCOLAR.

A história das disciplinas escolares tem sido objeto de pesquisa nas últimas décadas. As décadas de 1960 e 1970 foram marcadas por políticas educacionais que, entre outras ações, cuidaram das reformulações curriculares no Brasil. Nesta perspectiva, as disciplinas escolares tornaram-se objeto de investigação, buscando-se justificar ou compreender o papel e o significado de cada uma delas na definição dos novos currículos, e preocupando-se, entre outras dimensões, identificar e apreender o conhecimento escolar por elas produzido.

Tomar as disciplinas escolares como alvo de estudos, visando os conteúdos escolares, nos remete aos estudos de André Chervel[13] que considera que a história das disciplinas escolares tem um papel relevante "não somente na história da educação, mas na história cultural" (CHERVEL, 1990, p.184).

Para Chervel (1990) as pesquisas sobre a história das disciplinas procuram desnaturalizar a ideia que se tem que as disciplinas existem "desde sempre". Elas são historicamente construídas. Os estudos da área analisam as prescrições oficiais, a ação da disciplina no cotidiano escolar, sua transformação e, em certos momentos até sua retirada do currículo.

Chervel (1990) ressalta que as disciplinas não são simplesmente o resultado da imposição pela sociedade ou pela legislação sobre os conteúdos ensinados.

---

13 Pesquisador do *Service d´histoire de léducation-Institut national de recherche pédagogique de Paris na França.*

> [...] os conteúdos de ensino são concebidos como entidades *sui generis*, próprios da classe escolar, independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além destas mesmas, quer dizer à sua própria história. Além do mais, não tendo sido rompido o contato com o verbo disciplinar, valor forte do termo está sempre disponível. Uma "disciplina", é igualmente, para nós, em qualquer campo que se encontre, um modo de disciplinar o espírito, quer dizer de lhe dar os métodos e as regras para abordar os diferentes domínios de pensamento, do conhecimento e da arte. (CHERVEL, 1990, p. 180).

Dessa forma, o autor comenta que as especificidades do conhecimento produzidas pelas disciplinas escolares não se resume a uma simples "vulgarização" sendo que "contrariamente ao se teria podido acreditar, a 'teoria' ensinada na escola não é a expressão das ciências ditas, ou presumidas 'de referência' mas que ela foi historicamente criada pela própria escola, na escola e para a escola". (CHERVEL, 1990, p. 181).

Julgamos que os conteúdos presentes nos livros didáticos estão relacionados diretamente com o sistema escolar, pois estes tendem a moldar a cultura da sociedade e de certa forma influenciam a formação do indivíduo e a forma com que o professor leciona. Sobre o sistema escolar e o estudo dos conteúdos Chervel comenta:

> [...] o sistema escolar é detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado [...] ele desempenha na sociedade um papel o qual não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura que vem por sua vez penetrar, moldar , modificar a cultura da sociedade global. [...] As disciplinas são modos de transmissão cultural que se dirigem aos alunos.[...] O estudo dos conteúdos beneficia-se de uma documentação abundante à base de cursos manuscritos, manuais e periódicos pedagógicos. (CHERVEL, 1990, p. 184 – 186).

No entanto, para que a pesquisa seja melhor conduzida é necessário entender o significado de disciplina escolar, pois este termo tem suas particularidades e critérios como: organizar, regularizar, dar seqüência e selecionar conteúdos com significados culturais na organização de currículos.

Até meados do século XIX o termo disciplina significava controle atitudinal dos alunos, ordem e organização, e somente ao fim do século XIX o termo disciplina passa a ser associado aos “conteúdos de ensino”. Com o movimento de renovação dos ensinos secundário e primário francês em estreita ligação com a renovação de suas finalidades surgiu o termo “disciplinar” que não demorou para ser assimilado ao caráter de disciplinarização do espírito, da inteligência e comportamento dos alunos.

Ao definir o trabalho do historiador das disciplinas, Chervel cita que:

> [...] cabe-lhe dar uma descrição detalhada do ensino em cada uma de suas etapas, descrever a evolução didática, pesquisar as razões da mudança, revelar a coerência interna dos diferentes procedimentos aos quais se apela, e estabelecer a ligação entre o ensino dispensado e as finalidades que presidem a seu exercício. (CHERVEL, 1990, p.192).

Sendo a história dos conteúdos o componente central da história das disciplinas escolares entra em questão a finalidade da escola, como ela age para produzir as disciplinas e como elas funcionam. Nesta perspectiva Chervel (1990) nos orienta que as finalidades da escola são determinantes para a inclusão ou exclusão de uma disciplina no currículo escolar, como também o contexto econômico, social, as lutas de classe, etc, fazendo com que a disciplina crie sua própria identidade.

> Percebe-se então por que o papel da escola não se limita ao exercício das disciplinas escolares. A educação dada e recebida nos estabelecimentos escolares é, à imagem das finalidades correspondentes, um conjunto complexo que não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados. (CHERVEL, 1990, p.188).

Na visão de Chervel, “disciplinar” um conteúdo significaria configurá-lo dentro da escola numa criação própria e original, de modo que possa ser utilizado pelos alunos como exercício intelectual que atenda a certas finalidades. Para isso, a escola pode utilizar vários recursos, como por exemplo, a motivação, pois se os conteúdos constituem o eixo central de uma disciplina, seu sucesso “depende fundamentalmente da qualidade dos exercícios aos quais elas podem se prestar” (CHERVEL, 1990, p. 204). Portanto, para Chervel (1990) a disciplina escolar é

> [...] constituída por uma combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação de um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207).

Relacionando as disciplinas escolares, as práticas docente e as finalidades, Chervel deixa claro que toda disciplina escolar comporta não apenas as práticas docentes em aula, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massa que ela mesma determina. Logo, para Chervel (1990, p. 190) existem dois tipos de finalidades de ensino: finalidades de objetivo, que são aquelas estabelecidas pela legislação vigente[14], e as finalidades reais que são aquelas pelas quais a escola ensina[15], não sendo necessariamente iguais as de objetivo. "A distinção entre finalidades reais e finalidades de objetivo é uma necessidade imperiosa para o historiador das disciplinas. Ele deve aprender a distingui-las, mesmo que os textos oficiais tenham tendência a misturar umas e outras." (CHERVEL, 1990,p.190).

Portanto, estudar a disciplina matemática e verificar como foram ensinados os conteúdos de função no ensino ginasial obriga-nos, segundo Chervel (1990), a fazermos uma leitura paralela e concomitante da legislação que orienta a prática escolar e do cotidiano escolar. A legislação determina o que deve ser ensinado na escola e, o cotidiano escolar, revela, de uma certa forma, como as orientações oficiais chegaram a sala de aula.

Considerando a relação entre os livros didáticos e a história das disciplinas escolares, destacamos um conceito introduzido por Chervel (1990, p.203) denominado por "vulgata" – termo utilizado para indicar a padronização verificada nos manuais didáticos de um certo período. Com esta padronização dos exercícios, terminologia, figuras, etc, os manuais didáticos convergem para o mesmo modelo de abordagem de um determinado conteúdo.

Julgamos que essa conceituação de vulgata pode ser adaptada para o tratamento didático e metodológico que os autores utilizam para abordar determinados conteúdos fixados nos livros didáticos.

Esta adaptação é sugerida quando analisamos a trajetória das abordagens matemáticas e didáticas dadas ao conceito de função. Nas décadas de 1930 e 1940 esse tratamento nos livros didáticos enfatizava a relação de dependência entre as variáveis – conforme aponta o estudo de Braga (2003). Com o advento do MMM a

---

14 Em se tratando da época do MMM, podemos citar o exemplo das finalidades de objetivo de Chervel (1990) os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios, aprovado pela Diretoria do Ensino Secundário, do Ministério de Educação e Cultura, em 1963 – em Tempos Modernos.

15 Podemos citar como exemplo das *finalidades reais*, os livros didáticos, cadernos de anotações dos professores (caso houvesse), dentre outros.

noção de conjunto assumiu o papel de elemento de unificação da Matemática. Assim, nos documentos internacionais (OECE, 1961) e nacionais (GEEM, 1962) que apresentam propostas para o ensino do conceito de função, esse passou a ser tratado como uma relação de conjuntos. No entanto, esta nova forma de abordar o conceito, precisava ganhar um tratamento pedagógico e metodológico nos livros didáticos. Logo, pretendemos verificar como os autores seguiram o processo de disciplinarização de função em seus livros didáticos com o advento do MMM e se há, ou não, uma padronização (vulgata) desse ensino a partir da coleção didática ginasial de Osvaldo Sangiorgi em Tempos Modernos.

É importante ressaltar que para Chervel (1990) uma vulgata não é perpétua, ou seja, evolui e se transforma, de forma a reacomodar a disciplina escolar noutro patamar, visando atender novos objetivos, conforme o comentário abaixo:

> A experiência elementar de todo historiador das disciplinas lhe ensina que as vulgatas evoluem e transformam. As exigências intrínsecas de uma matéria ensinada nem sempre se acomodam numa evolução gradual e contínua. A história das disciplinas se dá freqüentemente por alternância de patamares e de mudanças importantes, até mesmo de profundas agitações. Quando uma nova vulgata toma o lugar da precedente, um período de estabilidade se instala, que será apenas perturbado, também ele, pelas inevitáveis variações. (CHERVEL, 1990, p.204).

Tudo nos leva a crer que boa parte de uma disciplina escolar, em específico a disciplina de matemática pode ser observada e examinada nos livros didáticos que, no caso brasileiro, assumiram um papel duplo: o de portadores dos conteúdos disciplinares e o de organizadores de aulas. Nesse sentido, nos parece que os livros didáticos são vistos como instrumentos de trabalho para o professor e como material de estudo para os alunos, e tende a mostrar historicamente vários momentos importantes para o ensino, como as mudanças e adaptações, sejam essas mudanças pelo interesses de determinados grupos, seja por modismos, ou fatores políticos e culturais.

Por isso, estudar a História das Disciplinas Escolares, requer uma definição do conceito de cultura escolar, já que a mesma, está inserida na História das Disciplinas. Como já descrito anteriormente, acreditamos que a cultura escolar interfere nas práticas e estas, por sua vez, interferem na cultura escolar, tornando-se uma via de mão-dupla.

Sendo assim, acreditamos que os conteúdos contidos no livro didático dão vida e sentido às práticas escolares/ culturas escolares. Por isso o conceito de Julia sobre cultura escolar torna-se pertinente para esta pesquisa. O autor a define como sendo:

> [...] um conjunto de normas que definem saberes a ensinar e condutas a incorporar e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses saberes e a incorporação desses comportamentos, normas e práticas ordenadas de acordo com finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização). Normas e práticas não podem ser analisadas sem que se leve em conta o corpo profissional dos agentes que são chamados a obedecer a essas normas [...]. (JULIA, 2001, p. 15).

Em se tratando das práticas escolares Julia (2001) comenta que estas são modificadas e inovadas conforme a mudança do público, que conseqüentemente impõe a mudança dos conteúdos ensinados, até porque, este novo público está relacionado com diversas culturas que por sua vez estão influenciadas por diferentes contextos escolares.

Em relação a este novo público é importante comentar que a partir da década de 1960 há uma “democratização no ensino”, que no caso brasileiro ganhou contornos próprios, dando a oportunidade de muitos alunos vindos da classe operária cursarem a escola. Com esta "democratização", ocorreu uma série de mudanças na escola e na sociedade brasileira, que tendem a se expressar também na produção de livros didáticos.

Sendo assim, o estudo dos livros didáticos que foram editados durante o período que esteve presente o MMM nos possibilita observar, em seu conjunto, elementos culturais da época, assim como os diferentes valores que fizeram parte da cultura escolar.

Portanto, pensar no livro didático significa pensar em uma mediação possível entre o currículo prescrito e o currículo praticado, no que podemos considerá-lo como portador de informações sobre as práticas escolares, como parte do material que compõe o trabalho pedagógico ao longo do tempo e especificamente relativo ao período do MMM.

É importante ressaltar que esta pesquisa, ao estudar os livros didáticos que circulavam nas escolas durante o período do MMM (décadas de 1960 e 1970) procura o ensino de Matemática a partir de um ângulo que não privilegia somente a versão dos acontecimentos ditada pelas informações contidas na documentação[16]. Em outras palavras:

> [...] para evitar a ilusão de um total poder da escola, convém voltar ao funcionamento 'interno' dela. Sem querer em nenhum momento negar as contribuições fornecidas pelas problemáticas da historia do ensino, estas têm-se revelado demasiado 'externalistas': ela limitou-se a uma história das idéias, na busca por origens e influências. (...) É de fato a história das disciplinas escolares, hoje em plena expansão, que procura preencher essa lacuna. Ela abre, em todo caso, para retomar uma metáfora aeronáutica, a 'caixa preta' da escola, ao buscar compreender o que acontece nesse espaço particular. (JULIA, 2001, p.09).

Mas, Julia (2001) nos orienta sobre o uso dos manuais escolares numa pesquisa:

> [...] o manual escolar não é nada sem o uso que dele for realmente feiro, tanto pelo aluno como pelo professor. [...] É conveniente, portanto, recontextualizar muito precisamente os manuais em sua circunstância histórica. (JULIA, 2001, p. 34-35).

No entanto, dentre as diversas possibilidades de abordagem oferecidas pela investigação da história da educação matemática, acreditamos que o estudo dos livros didáticos apresenta-se como um dos mais instigantes, sendo estes verdadeiros testemunhos de conteúdos que tange valores morais, éticos, sociais e até patrióticos.

O livro didático, ao fazer parte da cultura da escola é organizado, veiculado e utilizado com uma intencionalidade, já que faz parte de uma cultura social mais ampla. Por isso, esse tipo de material serve como instrumento de mediação que a escola realiza entre a sociedade e os sujeitos em formação, o que significa interpretar parte de sua função social.

Ainda sobre a via de entendimento da cultura escolar, Julia (2001) ressalta que "[...] a história das disciplinas escolares tenta identificar, tanto através das práticas escolares como através dos grandes objetivos que presidiram a constituição das disciplinas, elementos que permitam constituir uma história renovada da educação". (JULIA, 2001, p.13).

---

16 Não é objetivo desta pesquisa aprofundar nas questões relativas à editoração (autoria, revisão, distribuição) e sim centralizar no conteúdo de funções nos livros didáticos ginasiais da época do MMM.

Um outro autor importante que estuda o conceito de cultura escolar e suas relações é Viñao Frago (2007), que estende o conceito de cultura escolar a todas e a cada uma das instituições escolares: escola, colégio e também à universidade, dando a cada uma delas uma particularidade capaz de produzir sua própria cultura, ou seja, não sendo rotulada apenas como uma reprodutora de culturas externas.

Viñao Frago (2007) concebe a cultura escolar como aquela que

> [...] seria constituída por um conjunto de teorias, idéias, princípios, normas, modelos, rituais, inércias, hábitos e práticas (formas de fazer e pensar, mentalidades e comportamentos) sedimentadas ao longo do tempo em formas de tradições, regularidades e regras de jogo não interditadas e repartidas pelos seus atores, no seio das instituições educativas. (VIÑAO FRAGO, 2007, p. 87).

Entendemos que para Viñao Frago a cultura escolar está relacionada com as continuidades e persistências, ou seja, esta emerge das resistências e mudanças vivenciadas nos espaços escolares deve ser considerada para entender o relativo fracasso das reformas educativas a partir do enfrentamento, diferença e divórcio entre as culturas dos reformadores e gestores e a cultura dos professores.

1.3. O LIVRO DIDÁTICO COMO FONTE DE PESQUISA

Articulando o MMM com o livro didático, o último vem sendo considerado como um dos instrumentos de maior influência na educação escolar. Desde muito tempo sua importância expressa uma grande parcela nos instrumentos utilizados nos processos de ensino-aprendizagem nos mais diversos tipos de conteúdos.

Como esta pesquisa tem como principal fonte de pesquisa os livros didáticos, nos apoiamos em Valente (2008a) que retrata a importância dos mesmos para o ensino:

> A dependência de um curso de matemática aos livros didáticos, portanto, ocorreu desde as primeiras aulas que deram origem à matemática hoje ensinada na escola básica. Desde os seus primórdios, ficou assim caracterizada, para a matemática escolar, a ligação direta entre compêndios didáticos e desenvolvimento de seu ensino no país. Talvez seja possível dizer que a matemática se constitua na disciplina que mais tem a sua trajetória histórica atrelada aos livros didáticos. Das origens de seu ensino como saber técnico-militar, passando por sua ascendência a saber de cultura geral escolar, a trajetória histórica de constituição e desenvolvimento da matemática escolar no Brasil pode ser lida nos livros didáticos. (VALENTE, 2008a, p. 141).

A circulação dos livros didáticos durante as décadas de 1960 a 1980 tem um papel importante e privilegiado para a divulgação da nova proposta que pretendia modernizar o ensino de matemática. Sobre esta circulação Valente (2008b) ressalta que "o livro didático de matemática moderna vai, por meio de sua circulação e uso no cotidiano escolar, permitir a apropriação por alunos e professores de uma nova matemática escolar". (VALENTE, 2008b, p. 583).

Neste comentário Valente (2008b) nos traz um conceito importante para esta pesquisa, e que iremos explorar mais nas páginas seguintes, a apropriação. Entendemos que nos livros didáticos estão contidas as apropriações dos autores em relação a este Movimento e que conseqüentemente as escolas irão adequar/ apropriar conforme seu público escolar e a sua cultura. Logo, os livros didáticos dá oportunidade real de incremento educacional e cultural, por meio da possibilidade de socialização de conhecimentos.

A busca dos livros didáticos a serem analisados se dá a partir do acervo do GHEMAT, do Projeto LIVRES e de sebos. Sobre esta busca Le Goff homenageia Bloch (2001) recordando:

> O historiador não pode ser um sedentário, um burocrata da história, deve ser um andarilho fiel a seu dever de exploração e de aventura. (BLOCH,2002, p.21) [...] O presente não referenciado e definido dá início ao processo fundamental do ofício do historiador: "compreender o presente pelo passado" e correlativamente, "compreender o passado pelo presente". (BLOCH, 2002, p. 25).

Acreditamos que esta pesquisa permite o avanço na compreensão de como se deu o ensino de função no ginasial durante os Tempos Modernos (década de 1960 e 1970), pois o livro didático veicula os elementos que dão vida e significado às referidas práticas. Neste sentido, Bittencourt (2003) comenta que o estudo dos livros didáticos é de grande importância, porque nos livros há componentes presentes nas práticas escolares: os objetivos, os conteúdos explícitos e os pedagógicos.

> Dentre as fontes mais utilizadas nesta linha, estão os programas curriculares e os livros didáticos, ao lado de obras das ciências de referência. Os livros didáticos têm se constituído uma das fontes privilegiadas para estudos sobre os conteúdos escolares e pode-se, inclusive, identificar pesquisas que se interligam, realizando uma história das disciplinas e, ao mesmo tempo, a do livro didático. (BITTENCOURT, 2003, p. 32).

Os livros didáticos, de modo geral, são veículos de circulação de ideias que traduzem valores e conteúdos que se planeja ensinar. Some-se a isso o fato de que a relação entre livro escolar e escolarização permite pensar na possibilidade de uma aproximação maior do ponto de vista histórico acerca da circulação de idéias sobre o que a escola deveria transmitir/ ensinar e, ao mesmo tempo, saber qual concepção educativa estaria permeando a proposta de formação dos estudantes.

Quanto à circulação e possíveis usos realizados por alunos e professores, podemos citar Bittencourt (1993) que aponta: “O espaço escolar está associado intrinsecamente à construção do livro didático considerando que a escola é, fundamentalmente, uma instituição contraditória onde dominação e conflitos convivem no cotidiano de alunos e professores [...]” (BITTENCOURT, 1993, p. 06).

Um outro autor importante para se construir a história das disciplinas através dos livros didáticos é Alain Choppin. Segundo ele a história da edição escolar constitui, hoje, um dos campos mais promissores da História da Educação e novas questões se colocam para os historiadores, tais como: a relação entre livro didático e a formação de professores; o livro didático e sua interferência no currículo escolar; o uso do livro didático por parte do aluno; sua utilização na educação não-formal; a linguagem e imagem utilizadas nos livros didáticos; o perfil sociológico dos autores; o papel das mulheres na elaboração e difusão dos saberes escolares.

Especialista na história dos livros didáticos, Choppin traz novas contribuições teórico-metodológicas para a utilização do livro didático como fonte de pesquisa para a produção da História da Educação.

Segundo Choppin (2004), a valorização dos livros didáticos como fontes de pesquisa começou a partir do final dos anos 1970 quando os historiadores das disciplinas escolares intensificaram seus trabalhos utilizando esses manuais, e sobre isso comenta:

> Após ter sido negligenciado, tanto pelos historiadores quanto pelos bibliógrafos, os livros didáticos vêm suscitando um vivo interesse entre os pesquisadores de uns trinta anos para cá. Desde então, a história dos livros e das edições didáticas passou a constituir um domínio de pesquisa em pleno desenvolvimento, em um número cada vez maior de países,... (CHOPPIN, 2004, p. 549).

Estudos realizados nos últimos anos abandonam a exclusividade de investigação sobre os conteúdos pedagógicos para dedicar atenção, também, aos aspectos que Choppin chamou de formais e que determinam e atribuem sua especificidade, tais como:

> A organização interna dos livros e sua divisão por partes, capítulos, parágrafos, as diferenciações tipográficas (fonte, corpo de texto, grifos, tipo de papel, bordas, cores, etc.) e suas variações, a distribuição e a disposição espacial dos diversos elementos textuais ou icônicos no interior de uma página (ou de uma página dupla) ou de um livro (CHOPPIN, 2004, p.559).

De forma bastante geral, podemos afirmar que a maioria dos trabalhos ainda concebe o livro didático “como um documento histórico igual a qualquer outro” e “analisa os conteúdos em busca de informações estranhas a ele mesmo” ou se interessa apenas “pelo conteúdo ensinado por meio do livro didático” (CHOPPIN, 2004, p. 554). Para o pesquisador francês, “tal percurso metodológico parece não enfocar o livro didático como objeto de investigação complexo, mas sim a história de um tema, de uma noção, de um personagem, de uma disciplina”. (CHOPPIN, 2004, p. 554).

O livro se caracteriza por si só em um objeto histórico-cultural-social-educativo e didático, sendo que para Choppin (2004), estes elementos são expressos pelos autores de livros didáticos, mesmo que indiretamente. No entanto, acreditamos que ao fazer esta pesquisa, se ficarmos somente nas questões que se referem aos autores e ao que eles escrevem não é suficiente, “é necessário também prestar atenção àquilo que eles silenciam, pois se o livro didático é um espelho, pode ser também uma tela”.(CHOPPIN, 2004, p. 557).

A produção didática nas décadas de 1960 e 1970 tem neste estudo o foco no ensino de função e a análise será a partir das concepções de Choppin. Para esta análise vamos considerar a crítica ideológica e cultural dos livros didáticos e seu conteúdo de acordo com a perspectiva de Choppin:

> Os autores de livros didáticos não são simples espectadores de seu tempo: eles reivindicam um outro status, o de agente. O livro didático não é um simples espelho: ele modifica a realidade para educar as novas gerações, fornecendo uma imagem deformada, esquematizada, modelada, freqüentemente de forma favorável: as ações contrárias à moral são quase sempre punidas exemplarmente; os conflitos sociais, os atos defeituosos ou a violência cotidiana são sistematicamente silenciados. (CHOPPIN, 2004, p. 557).

A partir da década de 60 o interesse pelo livro didático cresce à medida que esse mercado transpõe fronteiras sob o impulso da acumulação do capital e a massificação do ensino, ao mesmo tempo em que, no campo ideológico, acirra-se a disputa conceitual entre educação como mercadoria e educação como formação integral sob a responsabilidade do Estado. Nesse contexto, é de destacar que os livros escolares assumem múltiplas funções associadas aos interesses nacionais. De acordo com Choppin (2004) os livros didáticos exercem quatro funções essenciais, resumidas a seguir:

1. *Função referencial (curricular ou programática):* refere-se às interpretações dadas pelos autores às leis, decretos e programas que regulamentam o ensino em cada época. Nesta função Choppin (2004) nos mostra outros aspectos importantes, como os das normatizações, os de suporte e depósito de conteúdos educativos, dentre outros.

2. *Função instrumental:* refere-se à prática de métodos de aprendizagem que visem facilitar a mesma, como exercícios e outras atividades propostas aos alunos.

3. *Função ideológica e cultural:* a mais antiga delas e que coloca o livro didático como um dos vetores essenciais da língua, da cultura e dos valores das dirigentes.

4. *Função documental:* preocupa-se em desenvolver a criticidade do aluno a partir de documentos, da observação e confrontação no exercício de construção de sua percepção e visão de mundo, que variam de acordo com o contexto nacional e local em que ele se encontra.

Nesta pesquisa utilizaremos principalmente *funções referencial* e *instrumental*. Como base para a análise da *função referencial* utilizaremos a Portaria de 1951, a orientação do GEEM (1962), sugerindo o desenvolvimento de ítens sobre *Assuntos Mínimos* para o curso Ginasial e Colegial, as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* que foram publicadas pelo GEEM em 1965, LDB de 1961 e de 1971, dentre outros documentos. Na *função instrumental*; pela qual pretendemos verificar como o conteúdo de função permeia o livro, ou seja, como os resultados são demonstrados, exemplificados aos alunos, uso de gráficos, os exercícios, entre outros aspectos.

Portanto, podemos dizer que ao se investigar os livros didáticos durante as décadas de 1960 e 1970, especificamente o ensino de funções, temos que levar em conta diversos atores: os legisladores, autores, editores, professores, alunos, entre outros, pois o livro didático não é uma produção que se encontra isolada. Logo, não podemos ignorar essas questões/ observações, caso contrário, é deixar de ler/ ouvir o que as entrelinhas querem nos dizer.

1.4. OS CURRÍCULOS, AS REFORMAS, AS MUDANÇAS EDUCACIONAIS E AS SUAS RELAÇÕES.

Neste trabalho, analisaremos a relação entre o livro didático ginasial de Matemática e as propostas relacionadas durante o período do MMM durante as décadas de 1960 e 1970. Para tanto, julgamos necessário caracterizar o que são reformas de ensino e o que elas implicam. Utilizamos, como base o capítulo *Culturas escolares e reformas Educativas* que integra o livro de Viñao Frago (2007).

Neste capítulo o autor defende que a instituição escolar e os sistemas educativos mudam devido aos aspectos externos e internos do estabelecimento escolar, ou seja, são "organismos vivos" (VIÑAO FRAGO, 2007, p. 89). O autor procura estabelecer relações entre estes aspectos e a escola, assim, acreditamos que esta leitura pode contribuir para entendermos as mudanças educacionais que ocorreram nas décadas de 1960 e 1970, particularmente em relação ao ensino de função nas escolas brasileiras diante do MMM.

Viñao Frago (2007) comenta que muitas das vezes as Reformas não levam em conta a cultura da escola, muito menos os modos de fazer e de pensar que são transmitidos de geração em geração pelos professores. Ou seja, ignora a experiência docente, sua resistência às adaptações das reformas realizadas no interior da instituição.

No entanto, Viñao Frago (2007) nos alerta que em muitos casos numa reforma educacional as tradições das instituições caem em esquecimento daqueles que idealizam e aplicam as reformas, acreditando que podem "reinventar" a escola, ou seja, ignoram o passado da escola. Sobre ignorar o passado, Viñao Frago comenta:

> Não é certo que os reformadores, como por vezes se diz, ignorem o passado, pelo contrário, recorrem a esse mesmo passado, interpretam-no e utilizam-no como suporte às suas teses propostas. Tanto para o demonizar, quando culpam as reformas anteriores, aqueles que os precederam, da descida na qualidade ou no nível educativo, como para mitificar um passado remoto, uma suposta idade de ouro que ninguém concretiza no tempo, em que tudo foi melhor e à qual há que voltar. Neste sentido, não se pode classificar como avanço uma reforma que pretende voltar atrás no tempo. Isto

> só se pode fazer a partir da identificação de avanço com melhoria, pelo menos para os que defendem esse regresso no tempo. (VIÑAO FRAGO, 2007, p. 107).

Para Viñao Frago (2007), quase sempre os reformadores ignoram o passado ao fazer uma reforma educacional e identificam as reformas como "avanço" ou "progresso" com pretensão de "corrigir os problemas sociais e educativos percebidos" (VIÑAO FRAGO, 2007, p. 107).

Sobre estes conflitos, Viñao Frago (2007) ressalta que toda reforma, mudança ou inovação tende a produzir efeitos não previstos e que se não se consolidam em um curto espaço de tempo e podem ter conseqüências contrárias às que se pretendiam.

> Por isso, o historiador deve distinguir entre melhoria e êxito. O facto de uma mudança ou reforma poder ou não ser classificada como melhoria dependerá do juízo pessoal de que é merecedora. Contudo, o seu juízo sobre o êxito ou fracasso de uma reforma emitir-se á em função da adequação entre os propósitos da mesma e os seus efeitos, independentemente do juízo de valor que em relação a eles for feito. [...] o historiador deve distinguir entre os propósitos explícitos e os não ditos ou implícitos, por vezes inclusivamente negados. Ou seja, entre o discurso teórico ou a retórica discursiva da reforma e os objectivos ocultos, assim que sejam detectados, da mesma. Neste caso, o êxito ou o fracasso não devem ser ajuizados em relação aos objetivos manifestados, mas àqueles efectivamente perseguidos e não ditos". (FRAGO, 2007, p. 105/106).

O contraste referido por Viñao Frago entre as teorias e as propostas, a legalidade e as práticas nas salas de aula, tendo como sujeitos os professores, nos orienta como conduziremos esta pesquisa, ou seja, permeada por reformas que ocorreram nas décadas de 1960 e 1970 ocasionando mudanças nos conteúdos presentes nos livros didáticos e no ensino das escolas brasileiras.

Outro autor importante para esta pesquisa é o historiador Ivor Goodson, que considera o currículo a chave para melhor compreender a escola ao longo do tempo e entender suas reformas. Segundo ele o currículo pode ser considerado um processo informal de interação entre aquilo que é deliberado, o que é interpretado e o que é efetivado, às vezes de maneira transformada ou até mesmo subvertida.

> O currículo escrito não passa de um testemunho visível, público e sujeito a mudanças, uma lógica que se escolhe para, mediante sua retórica, legitimar uma escolarização. Como tal, o currículo promulga

> e justifica determinadas intenções básicas de escolarização, à medida que vão sendo operacionalizadas em estruturas e instituições. [...] Em síntese, o currículo escrito nos proporciona um testemunho, uma fonte documental, um mapa do terreno sujeito a modificações; constitui também um dos melhores roteiros oficiais para a estrutura institucionalizada da escolarização (GOODSON, 1995, p. 21).

Segundo Goodson (1995, p.37/38), as matérias (disciplinas) escolares passam por uma seqüência de estágios: partem a princípio da marginalidade com um status inferior no currículo, depois para um estágio utilitário e finalmente alcançam uma definição como disciplina, que tem como configuração um conjunto conhecimentos. Para este autor, as disciplinas escolares não se estabelecem no currículo escolar de maneira pacífica, conformando-se às orientações oficiais, mas ao contrário, guardam relações conflituosas com as teorizações acadêmicas e as recomendações oficiais, ora acatando-as, ora resistindo a elas, ora reformando-as ou deformando-as.

Para Goodson, o principal valor dos estudos em história das disciplinas escolares está na sua capacidade de investigar a realidade e a autonomia relativa da escolarização.

> A história curricular considera a escola algo mais do que um simples instrumento de cultura da classe dominante. Ela põe a descoberto as tradições e legados dos sistemas burocráticos das escolas, ou seja, fatores que impedem homens e mulheres de criar sua própria história em condições de sua própria escolha. Ela analisa as circunstâncias que homens e mulheres conhecem como realidade, e explica como, com o tempo, tais circunstâncias foram negociadas, construídas e reconstruídas. (GOODSON, 1995, p. 120).

Portanto, ao nos apoiar em Goodson, defendemos a importância de se associarem fatores internos e externos na construção da história de uma disciplina. Limitamo-nos, contudo, no presente estudo, a focalizar o ensino de função que está presente no currículo escolar da escola ginasial durante as décadas de 1960 e 1970. Acreditamos que os livros didáticos de matemática tendem a expressar o currículo da disciplina e o ideário vigente nos Tempos Modernos (década de 1960 e 1970). Daí o nosso ofício empenho em analisá-los e responder às questões presentes nesta pesquisa.

O próximo capítulo acrescenta à nossa pesquisa uma breve trajetória histórica da Matemática escolar no Brasil anterior ao MMM. Essa trajetória é fundamental para que possamos situar historicamente o Movimento e as suas relações com ensino de *funções* nas diferentes reformas (como por exemplo, a Reforma Francisco Campos e a Reforma Capanema). Lembramos que Viñao Frago (2007) ressalta que as reformas tendem a ter efeitos não previstos, ou seja, diferentemente do planejados e que não se estabelecem em um curto espaço de tempo, podendo até ter conseqüências contrárias às previstas.

CAPÍTULO II

2. UMA BREVE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA ESCOLAR NO BRASIL E O ENSINO DE FUNÇÃO EM TEMPOS PRÉ-MODERNOS.

> "Compreender, portanto, e não julgar. Eis o objetivo da análise histórica pela qual começa o verdadeiro trabalho do historiador depois da observação e da crítica histórica prévias".
>
> (March Bloch)

Este capítulo apresenta, mesmo que brevemente, um resumo da história da matemática escolar no Brasil, tendo como ponto de partida o surgimento do campo da Educação Matemática, passando por reformas que reestruturaram o ensino, em particular de Matemática em nosso país, como a Reforma Francisco Campos e a Reforma Capanema, bem como suas conseqüências relacionadas ao ensino de função.

2.1 A TRAJETÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO BRASIL

Em 1908, em Roma acontecia o IV Congresso Internacional de Matemática, considerado um marco para o surgimento do campo da Educação Matemática devido a criação de uma comissão internacional - Internationale Mathematische Unterrichtskommission, conhecida pelas siglas IMUK[17], resultando na primeira proposta de internacionalização do ensino de Matemática, sob a liderança de Felix Klein[18], que defendia a necessidade de mudanças no currículo de matemática e da metodologia no ensino, que visava os métodos intuitivos no ensino, como suas aplicações.

Segundo Miorim (1998), o Brasil esteve presente nas atividades da Comissão Internacional para o Ensino de Matemática desde 1908 (sem direito a voto, pois era

---

17 Em 1954, o grupo passou a ser conhecido pela sigla ICMI de Internacional Comission on Mathematical Instruction.

18 Felix Christian Klein nasceu em 1849 Düsseldorf, antiga Prússia, atual Alemanha e faleceu em 1925. Principalmente no final de sua carreira, manifestou um vivo interesse pelo ensino de Matemática, promovendo mudanças efetivas no sistema escolar alemão, para o qual sugeria a introdução de conceitos modernos no ensino, como os rudimentos de Cálculo Diferencial e Integral, a noção de função e o estudo da Geometria no enfoque das transformações.

um país convidado) com uma tímida participação, não tendo conseqüências na prática do ensino de Matemática no Brasil.

> Realmente, a primeira, e única, participação do Brasil nos primeiros anos de atividade dessa Comissão ocorreu em reunião de 1912, durante a realização do V Congresso Internacional de Matemática, realizado de 21 a 28 de outubro, em Cambridge. (MIORIM, 1998, p. 91).

No entanto, entre 1914 e 1918 - período em que houve a primeira guerra mundial, as atividades da Comissão foram interrompidas, mas mesmo assim, as questões relacionadas às reformas do currículo de matemática não desapareceram, ou seja, "resultados daqueles anos efervescentes seguiram fornecendo subsídios e influenciando as propostas de mudanças" (MIORIM, 1998, p. 76).

De acordo com Valente (2004) as idéias modernizadoras apresentadas pela Comissão Internacional começaram a penetrar no ensino de Matemática nas escolas brasileiras a partir de 1929 com os novos programas de matemática que o Colégio Pedro II implementou.

> Segundo o professor Euclides Roxo, a nova proposta de ensino de matemática brasileira tentava reunir as tendências do movimento de reforma internacional, relativas a três questões principais: "metodologia, seleção de doutrina e finalidade de ensino (VALENTE, 2004, p. 101).

Conforme Valente (2004), os professores de matemática do Colégio Pedro II de algum modo estavam interessados nas discussões internacionais sobre a matemática, bem como o ensino desta disciplina. Podemos citar como um destes professores Euclides de Medeiros Guimarães Roxo[19] que em 1915 foi professor substituto de Matemática do Colégio Pedro II, tornando-se anos mais tarde professor catedrático, após o falecimento do professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia[20].

Anos mais tarde (em 1925), Euclides Roxo foi nomeado interinamente Diretor do Externato do Colégio Pedro II e permaneceu no cargo até 1930, quando assumiu

---

19 Nasceu em Aracaju, Sergipe, no dia 10 /12/1890 e faleceu no Rio de Janeiro, em 21/09/1950. Estudou no Internato do Colégio Pedro II, bacharelando-se em 1909. Em 1916, formou-se Engenheiro Civil na Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

20 Segundo Valente (1999,2004), Raja Gabaglia é de origem italiana, lecionou Mecânica, Astronomia, Geografia, História Naval e sobretudo Matemática no Colégio Pedro II. Nesse mesmo estabelecimento se formou em Engenharia Civil na Escola Politécnica e obteve bacharelado em Ciências Físicas e Matemática.Foi diretor do Colégio em 1914 e também professor da Escola Naval e da Escola Politécnica. Faleceu em 1919.

a diretoria do Internato. Nessa época, Euclides Roxo com sua experiência de professor de matemática e responsável pela programação de matemática no colégio Pedro II, propôs uma mudança curricular e metodológica nesse colégio, baseada principalmente nas idéias de Felix Klein implantadas na Alemanha e que vinham sendo veiculadas pelo IMUK. Entre elas destacamos a predominância essencial do ponto de vista psicológico; a escolha da matéria a ensinar tendo em vista às aplicações da Matemática ao conjunto das outras disciplinas; subordinação da finalidade do ensino às diretrizes culturais da época e a conseqüente unificação do curso em uma disciplina única sob a denominação de Matemática.

Segundo Miorim (1998) apesar do Colégio Pedro II ser referência para o ensino secundário do país, as modificações trazidas pelo Decreto seriam seguidas apenas pelo Pedro II.

Romanelli (2007) comenta que até a Reforma Francisco Campos, o Brasil não tinha uma estrutura de ensino organizado à base de um sistema nacional. Cada estado da Federação tinha seu próprio sistema, sem que este estivesse atrelado ao poder central. Por isso, sem ter uma política nacional de educação, o ensino secundário era ministrado na maior parte do território nacional como curso preparatório de caráter propedêutico.

Assim, os programas que já vinham sendo experimentados no Colégio Pedro II, agora eram programas oficiais em todo o território nacional definidos pela Reforma Francisco Campos, sendo que o principal objetivo desta reforma era o alterar a finalidade do curso secundário, que deveria deixar de ser um curso propedêutico para ingresso nas faculdades, para possuir uma finalidade própria. Com este objetivo, a Reforma instituiu dois cursos seriados: o curso fundamental e o curso complementar. O primeiro, com duração de cinco anos, com a finalidade de formação geral e com maior ênfase na cultura humanística, independente do ingresso no ensino superior e a segunda, de dois anos, com propostas curriculares diferenciadas, mais científicas, tinha a finalidade de preparar os alunos para as escolas superiores. Quanto aos programas de matemática e suas instruções pedagógicas, a Reforma Campos apropriou-se das inovações que vinham sendo implementadas de forma paulatina, desde 1929, no Colégio Pedro II, sendo protagonista o professor Euclides Roxo.

Percebemos que a Reforma Francisco Campos teve o mérito de organizar o ensino secundário, estabelecendo definitivamente o currículo seriado e a frequência obrigatória em dois ciclos, um fundamental e outro complementar, e a exigência de habilitação neles para o ingresso no ensino superior. Além disso, equiparou todos os colégios secundários oficiais ao Colégio Pedro II, mediante a inspeção federal e deu a mesma oportunidade às escolas particulares. Estabeleceu normas para admissão do corpo docente e seu registro junto ao Ministério da Educação e Saúde Pública. Estabeleceu normas para a realização da inspeção federal, criou a carreira de inspetor e organizou a estrutura do sistema de inspeção e equiparação de escolas.

Em relação à reforma do ensino secundário Romanelli escreve:

> É inegável que a reforma do ensino secundário foi uma verdadeira reforma, porquanto criou uma situação completamente nova para a escola secundária. Até o final da década de 1920, como já o dissemos antes, imperava o sistema de “preparatórios” e de exames parcelados para o ingresso no ensino superior, sendo o currículo seriado, quando existente, pouco procurado. Nem sequer o Colégio Pedro II, modelo de educação secundária para todo o país, pôde fugir à regra e teve de submeter-se ao regime de exames parcelados que eliminavam a seriação dos cursos secundários. A Reforma Vaz, de 1925, tentou eliminar os preparatórios, mas, ao que parece, em vão, já que a própria Reforma Francisco Campos faz menção à existência deles ainda em 1929 (Decreto 19.890, de 18 de abril de 1931, art. 80). (ROMANELLI, 2007, p.135).

Sintetizando, o professor Euclides Roxo aproveitou-se da posição que ocupava na estrutura educacional do país, a qual lhe proporcionava condições de fazer valer suas idéias, e implementou integralmente, pelo menos na lei, “de cima para baixo”, e sem discussões prévias. Esta decisão autoritária de se implantar as mudanças no ensino da Matemática, em todo território nacional, por meio de decreto, pode ter dificultado a compreensão, por parte de muitos professores, do efetivo intuito da reforma e colaborado para que ocorressem várias críticas à Reforma, sendo que a maioria referente à queda da qualidade do ensino da matemática.

Para se adaptarem às novas diretrizes da Reforma, em relação à criação de uma única disciplina – matemática, Miorim (1998) enfatiza que “os professores recolheram fragmentos de vários livros, sendo que esta tentativa de adaptação, mostrou-se uma descaracterização da proposta” que segundo a autora “constituiria apenas uma união de retalhos de um estilo de ensino que se tentava extinguir.” (MIORIM, 1998, p. 99).

Após a unificação dos distintos ramos da Matemática em uma única disciplina, novas obras surgiram para atender à Reforma. O primeiro livro didático contendo esta proposta de unificação das matemáticas foi o de Euclides Roxo intitulada *Curso de Matemática Elementar.* Neste sentido Valente (2004) considera que,

> Dentre as principais características desse livro didático, vale destacar a adoção da primeira tendência defendida pelo movimento internacional da reforma do ensino de matemática, qual seja, a predominância essencial do ponto de vista psicológico. (VALENTE, 2004, p. 110).

Como este livro de Euclides Roxo era inovador, devido a ir ao encontro com da nova proposta internacional para o ensino de Matemática e o Brasil estar no início da implantação da mesma, dúvidas começaram a surgir. Uma destas dúvidas veio do professor Manuel Ávila Goulart, (professor recém aprovado para lecionar a cadeira de aritmética e álgebra pelo Liceu do Ceará), que escreve uma carta ao diretor geral do Departamento de Ensino, (em 16 de abril de 1930), pedindo esclarecimento sobre a questão: “Quais matérias da matemática do curso secundário lhe competiria ensinar?” (VALENTE, 2004, p. 124).

Como diz Valente (2004) ocorreram muitas “manifestações frontalmente contra a fusão dos ramos matemáticos na constituição da nova disciplina escolar” (VALENTE, 2004, p. 127). O primeiro a se opor à nova proposta foi o ex-professor do Colégio Pedro II, Miguel Ramalho Novo, que não concordava com as idéias modernizadoras internacionais lideradas por Klein e propostas por Euclides Roxo.

> [...] Coincidência ou não, Ramalho Novo, ao que tudo indica, fora um dos professores dispensados do quadro do corpo docente do Colégio Pedro II, quando exercia seu magistério na condição de professor estranho (não catedrático ou interino), fato que, talvez e em princípio, possa ter colaborado com aquelas exacerbadas críticas ao modo de pensar do professor Roxo. (VALENTE, 2004, p. 128).

Euclides Roxo rebatia todas as críticas, mas outros críticos começaram a reagir, como o coronel Sebastião Fontes, professor do Colégio Santo Inácio, Rio de Janeiro, e defensor do ensino das humanidades clássicas que buscava a comparação entre os programas educacionais brasileiros com a de outros paises. Joaquim Ignácio Almeida Lisboa, professor catedrático do Colégio Pedro II, defensor do ensino tradicional de matemática que fez duras críticas públicas, escritas no Jornal do Commercio[21] que Roxo também utilizava para rebatê-las. (Valente,2004).

Segundo Romanelli (2007), a Reforma Francisco Campos teve alguns pontos críticos a serem considerados, dentre eles, a autora cita:

> a) A reforma deixou completamente marginalizados os ensinos primários e normal e os vários ramos do ensino médio profissional, salvo o comercial. Praticamente, a reforma tratou de organizar preferencialmente o sistema educacional das elites. A obrigatoriedade de se prestarem exames para admissão ao ensino médio, nos quais se exigiam conhecimentos jamais fornecidos pela escola primária, importava em reconhecer a nulidade desta.
> b) A reforma tampouco tratou de estabelecer articulação entre os vários ramos do ensino médio. Pelo contrário, ao considerar os ensinos secundário e comercial, tratou, antes, de criar dois sistemas rígidos e fechados, sem qualquer abertura ou possibilidade de transferência de um para o outro.
> c) A reforma, enfim, contribuiu para que a estrutura do ensino se tornasse ultrapassada, em certos aspectos porque: 1) não conseguiu eliminar a velha concepção liberal-aristocrática relativa à educação voltada para as carreiras liberais; 2) não se preocupou com a implantação efetiva de um ensino técnico e científico; 3) implantou uma estrutura de ensino altamente seletiva, dada a rigidez dos critérios de equiparação de escolas (estaduais e particulares) – que acabam por conter a matrícula em limites estreitos – e a oficialização de um esquema de avaliação arcaico, rígido e exagerado, quanto ao número de provas e exames, o qual muito contribuiu para baixo grau de retenção dos alunos nas escolas. (ROMANELLI, 2007, p. 141-142).

Porém, podemos afirmar que pelo menos duas das alterações contidas na Reforma Francisco Campos são aplicadas até os dias de hoje, sendo elas: a presença da matemática em todas as séries do currículo e o estudo do conjunto, em uma única disciplina, dos diversos ramos da matemática elementar (aritmética, álgebra, geometria e trigonometria).

Em 1934, Gustavo Capanema[22] assume o Ministério da Educação e Saúde. Em 1936, inicia os trabalhos para elaboração do Plano Nacional de Educação, previsto pela Constituição de 1934, que seria elaborado pelo Conselho Nacional de Educação e abrangeria todos os graus de ensino. Mas em 1937, com o golpe militar, o Plano Nacional de Educação não foi posto em prática, e permaneceu em vigor a Reforma Francisco Campos.

---

21 Um jornal muito popular no estado do Rio de Janeiro na época.

22 Nasceu em 10/08/1900 na cidade Pitangui de Minas Gerais e faleceu em 10/03/1985. Advogado, formou-se pela Faculdade de Direito de Minas Gerais, em 1923. Em 1927, iniciou sua vida política ao eleger-se Vereador em sua cidade natal.

Em 1939, Gustavo Capanema deu início aos estudos para a elaboração de uma reforma no ensino secundário, que levou seu nome. A Reforma[23], preservava a divisão do ensino secundário em dois ciclos, porém, alterava a configuração da estrutura anterior. O primeiro ciclo compreenderia um só curso, o ginasial e o segundo compreenderiam dois cursos paralelos, o clássico e o científico.

Dessa forma, a disciplina matemática, então sofria novamente modificações com uma nova reforma educacional, que segundo Ciro Braga (2006), viria referendar uma prática escolar induzida pela Reforma Francisco Campos.

O decreto-lei de nº 4.244, de 9 de abril de 1942, previa a criação de uma comissão para a elaboração dos programas dos dois ciclos. Ela foi criada em 27 de abril de 1942 pela portaria ministerial nº 101. Euclides Roxo, entre outros, fazia parte desta comissão. Apesar de a mesma ter sido criada nesta data, as discussões para a elaboração dos programas da matemática tiveram início antes mesmo da promulgação da Lei Orgânica do Ensino Secundário.

Gustavo Capanema foi mediador das discussões para a elaboração dos programas do segundo ciclo, que foram expedidos em 16/03/1943, pela portaria ministerial nº 177. Essa reforma, conhecida como Reforma Capanema, permaneceu vigorando até 1961, com a aprovação da Lei de Diretrizes Bases da Educação Nacional, lei 4.024, de dezembro de 1961.

Segundo Miorim (1998) as Reformas Francisco Campos e Capanema não se mostraram eficazes em resolver os problemas do ensino secundário em geral nem os específicos do ensino da matemática. O ensino tradicional recebia muitas críticas e a matemática tinha como objetivo o adestramento dos alunos por meio de regras, fórmulas e cálculos sem aplicações. Além disso, o currículo apresentava a aritmética, a álgebra, a geometria e a trigonometria como ramos isolados da matemática, com o estudo de um iniciado após o estudo completo do outro.

Em 2 de outubro de 1951, pela Portaria Ministerial nº 966, o Ministro da Educação e Saúde, Simões Filho, iniciou uma nova revisão dos programas de conteúdos e das orientações das disciplinas do Ensino secundário - ginásio e colégio aprovando os programas elaborados pelas comissões de professores do

---

23 A Reforma Gustavo Capanema constituiu dos seguintes decretos-lei: Decreto-lei nº 4.073, de 30 de janeiro de 1942 (Lei Orgânica do Ensino Industrial). Decreto-lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942 (Lei Orgânica do Ensino Secundário). Decreto-lei nº6.141, de 28 de dezembro de 1943 (Lei Orgânica do Ensino Comercial). Decreto-lei nº9.613, de 20 de agosto de 1946 (Lei Orgânica do Ensino Agrícola). Em 1946 saíram também a Lei Orgânica do Ensino Primário e a Lei Orgânica do Ensino Normal.

Colégio Pedro II. Tal legislação ficou denominada de Portaria de 1951 – entrando em vigor progressivamente a partir de 1952.

Esta portaria tinha como intenção a simplificação dos Programas do Ensino Secundário, pois segundo Marques (2005) o número de alunos matriculados nos cursos secundários estavam aumentando na década de 1950 e o cumprimento dos conteúdos estabelecidos pela legislação estava comprometido. Podemos notar esta afirmação conforme a descrição abaixo:

> O objetivo fundamental deste trabalho consistiu, pois, em eliminar dos programas atualmente em vigor os excessos aludidos, reduzindo a prolixidade dos conhecimentos alinhados na estruturação das diversas disciplinas, que tornava penosa a tarefa didática. Ao mesmo tempo, verificava-se o flagrante desajustamento desses programas com o nível de assimilação da população escolar, cujas faculdades intelectuais, ainda mal desabrochadas, não a habilitavam a abranger a enorme soma de deveres e atividades de aprendizagem oferecidas ao seu conhecimento.
> Com efeito, a simples análise desses aspectos tornava evidente a necessidade de serem os programas vigente imediatamente revistos, para uma simplificação mais adequada ao desenvolvimento subjetivo dos alunos e de forma a comportar certa plasticidade, a fim de ajustar-se às diferenciações regionais às conveniências do melhor rendimento do ensino ministrado pelos docentes. (INEP, 1952, p. 515 apud Marques, 2005, p. 52).

A Portaria de 1951 estabelecia novos programas de matemática, especialmente para o ensino secundário, prevendo a elaboração de instruções metodológicas que acompanhavam os novos programas. Conforme aponta Marques (2005), “O termo utilizado por Simões Filho, *Programa Mínimo*, é revelador de suas intenções: estabelecer um limite inferior ao qual todas instituições escolares estariam sujeitas e em condições de executá-lo”.(MARQUES, 2005, p. 53).

Sobre as instruções metodológicas Marques (2005) sintetiza da seguinte forma:

> - cada assunto deve ser ilustrado com aplicações e exemplos;
> - a unidade da matemática deverá ser posta em evidência;
> - o ensino de matemática nos primeiros anos deve ter caráter prático e intuitivo;
> - deve-se despertar aos poucos e cuidadosamente o aluno para o método dedutivo;
> - o rigor deve ser moderado. (MARQUES, 2005, p.61)

Por volta de 1959, Guimarães (2007) comenta que já se havia uma preocupação e interesse de modernização do currículo de Matemática, onde a Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE) tinha como objetivo promover uma reforma geral e profunda no ensino de Matemática nos seus países membros.

Com a realização do Seminário de Royaumont em finais de 1959 na França, com duração de 2 semanas e com a participação de cinqüenta delegados de dezoito países o movimento reformador teve uma grande repercussão internacional, recebendo o nome de Matemática Moderna. (GUIMARÃES, 2007).

A necessidade de mudanças no ensino de Matemática, bem como as razões frente ao progresso científico e tecnológico é manifestada em muitos países europeus, e tais argumentos são expostos no relatório do seminário:

> - "A sociedade exige cada vez mais de todos os cidadãos o conhecimento de noções elementares de Matemática e o reconhecimento da importância do ponto de vista numérico".
> - "Solicitam-se cada vez mais investigadores e engenheiros e que todos eles devam possuir conhecimentos matemáticos sólidos".
> - "As novas aplicações da Matemática na indústria e em outros ramos da atividade econômica obrigam a que sejam necessários mais matemáticos e que eles possuam conhecimentos matemáticos novos". (OECE, 1961, p. 11, apud Guimarães, 2007, p. 28).

Para Miorim (1998) foi em Royaumont que foram estabelecidas as bases do MMM. Nesta conferência Jean Dieudonné justificou a necessidade de modernização:

> Já no século passado se considerava a passagem das matemáticas da escola secundária às da universidade como um salto a um mundo diferente. Com a introdução das matemáticas modernas, esse fosso tem aumentado muito [...] Recentemente, tem sido introduzidos nos últimos programas dos três anos da escola secundária superior (das escolas francesas) os elementos de cálculo diferencial e integral, de álgebra vetorial e de geometria analítica, mas esses temas são sempre relegados a um segundo plano, e o interesse se concentra em primeiro lugar na geometria pura ensinada, mais ou menos, à maneira de Euclides, com um pouco de álgebra e de teoria de números. Estou convencido que o tempo deste "trabalho remediado" já passou e que deveríamos pensar em uma reforma muito mais profunda, a menos que se deixe piorar a situação de comprometer seriamente cada congresso científico ulterior. Se eu quiser resumir em uma frase todo o programa que tenho em mente, tenho de pronunciar o slogan: Abaixo Euclides! (DIEUDONNÉ, apud Miorim, 1998, p. 109).

Segundo Guimarães (2007), após os seminários de Royaumont e de Dubrovnick, deu-se início a um dos maiores movimentos reformadores de matemática. Tendo por conclusão, em 1961, a elaboração de um livro intitulado *Um programme moderne de mathématiques por l´énseignement sécondaires* publicado pela OECE com propostas de programas para os ciclos do ensino secundário. As orientações sistematizadas no livro foram traduzidas para o português pelo professor Jacy Monteiro (diretor de publicações do GEEM) e editado pelo GEEM, em 1965.

Guimarães (2007) ressalta que além das reformas curriculares era necessário mudar o método do ensino, no entanto:

> [...] para além da revisão dos conteúdos matemáticos e da sua organização curricular, mudar os métodos de ensino então praticados era um propósito explícito, como uma visibilidade significativa em muitas das suas orientações e propostas. Na verdade, existem aspectos de natureza metodológica distintivos da reforma da Matemática Moderna que se apresentam sob a forma de grandes perspectivas, princípios gerais ou abordagens de caráter global. É o caso da ênfase na unidade da Matemática e em conceitos unificadores como as estruturas matemáticas, bem como da orientação axiomática e dedutiva subjacente à organização curricular proposta e a correspondente valorização da linguagem e do rigor matemáticos “. (GUIMARÃES, 2007, p.38)

Em relação a valorização da compreensão dos conteúdos a serem ensinados, o relatório do seminário de Royamount presente no livro *Mathématiques Nouvelles* expõe suas críticas a mecanização do ensino e a memorização de regras e fatos, recomendando como método o trabalho experimental “ainda entendida de modos diferentes: como manipulação de objetos ou outros materiais concretos, como elaboração de esquemas ou gráficos e até como experimentação com números” (GUIMARÃES, 2007, p. 39).

Podemos perceber que nesta valorização da compreensão está presente também o papel da descoberta na aprendizagem. (Guimarães 2007).

As primeiras manifestações da introdução de novos programas para o ensino de Matemática no Brasil foram realizadas nos Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática. Na década de 1950 foram realizados três Congressos: O 1º foi realizado em Salvador, Bahia, em 1955, o 2º realizado em Porto Alegre no ano de 1957 e o III Congresso foi sediado na cidade do Rio de Janeiro, em 1959.

Segundo Burigo (1989) o 1º Congresso refletia a influência do escolanovismo e “tendências modernas do ensino”, embora não haja referências neste Congresso, à Matemática Moderna (Burigo, 1989, p. 44). O 2º Congresso teve um temático ampliado onde o tema da matemática moderna esteve presente em três teses: a tese do professor Ubiratan D´Ambrósio que defendia os métodos de ensino com ênfase na intuição e tecia críticas à mudança de conteúdos de uma série para outra, a tese do professor Sangiorgi[24] colocando em questão a utilização da Matemática Clássica ou Matemática moderna na elaboração dos programas do ensino secundário [25] e a tese do Major Prof. Jorge Emanuel Barbosa que defendia a matemática moderna. (Burigo, 1989).

O 3º Congresso foi considerado muito importante, pois segundo Burigo (1989) recomendavam-se cursos para professores, preparando-os para a matemática moderna como também a criação da “Revista de Matemática para o Ensino Médio” e da “Associação Brasileira de Professores e Pesquisadores de Matemática”, dentre outras recomendações. (BURIGO, 1989, p. 49). Mas, ainda segundo Burigo (1989) foi com o IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática, realizado em julho de 1962, em Belém do Pará, que se tratou pela primeira vez, com objetividade e discussões de grande gabarito do problema da introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário Brasileiro.

Na década de 1960 as editoras de livros didáticos promoviam cursos em acordo com a Secretaria de Educação, nos quais o professor e autor de livros didáticos (de grande vendagem) Osvaldo Sangiorgi participava e “tomava conhecimento da realidade do ensino no interior e ao mesmo tempo consolidava uma relação com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo” (BURIGO, 1989, p. 102).

Burigo (1989) comenta que em 1960 Sangiorgi e outros professores da América Latina, participaram de um curso em Kansas[26] que tinha como finalidade difundir as propostas do MMM.

---

24 Professor de Matemática considerado como uma “figura ímpar”, uma referência ao Movimento da Matemática Moderna, autor de vários livros didáticos, ministrante de vários cursos para professores, grande protaqonista do movimento pelos artigos que escreveu. (Valente, 2008c).

25 Para o professor Sangiorgi, a diferença entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna residia, sobretudo no fator de uma “ter por base, os elementos simples” e a segunda um “sistema operatório, isto é, uma série de estruturas (Bourbaki) sobre as quais se assenta o edifício matemático” (Burigo, 1989, p. 46).

26 Os cursos que os professores latino-americanos participavam eram subsidiados pela National Science Foundation e pela OEA (Organização dos Estados Americanos). (DÁmbrósio, 1987, apud Burigo,1989, p.104)

> “Fui convidado a participar dessas reuniões, fiquei lá quatro meses, sabendo que aquele pessoal estava realizando, verificando que o governo americano tinha uma preocupação que nós aqui quase nunca temos que é de reciclar os professores”. (SANGIORGI, depoimento oral para Burigo, 1989, p.104).

Conforme Valente (2008c), após Sangiorgi retornar ao Brasil, em 1961, ele fez um acordo com a National Science Foundation, trazendo Springer[27] ao Brasil, com a intenção de promover um curso de aperfeiçoamento para professores nos mesmos moldes de Kansas. Este curso foi realizado de agosto a setembro de 1961, no Instituto Mackenzie em acordo com a Secretaria de Educação de São Paulo.

Em 31 de outubro de 1961 foi fundado o Grupo de Estudos do Ensino de Matemática em São Paulo – GEEM com sede na Universidade Mackenzie sendo o fundador e presidente o professor Osvaldo Sangiorgi. O GEEM tinha como objetivo desenvolver atividades de divulgação da proposta da matemática moderna visando a formação de professores.

Sobre os membros do GEEM, Valente comenta:

> É muito importante mencionar que os membros do G.E.E.M. eram em geral, professores secundários de três universidades de São Paulo: USP, Mackenzie e PUC e de outros estabelecimentos do ensino superior no país. Eram também, em sua maioria, autores de livros didáticos.” (VALENTE, 2008c, p. 98).

Após a fundação do GEEM, muitos cursos e palestras foram realizados para professores com a intenção de divulgar o MMM. Valente (2008c) comenta:

> [...] A cada curso, eram oferecidos aos professores-alunos e logo após as aulas, palestras sobre novidades que estavam acontecendo, tanto no Brasil, como em outros países. Dessa forma, o G.E.E.M. convidava as pessoas que estavam envolvidas com o Movimento da Matemática Moderna para divulgá-la em seus cursos. Assim, palestrantes como a professora Luciene Felix, da França, vieram a São Paulo e contribuíram com suas experiências, bem como os formadores e os alunos dos cursos que realizavam comunicações orais sobre o que estavam realizando em sala de aula, ou seja, os primeiros resultados da utilização da Matemática Moderna. (VALENTE, 2008c, p.102).

Segundo Miorim (1998), em nenhum outro momento foi tão discutido, divulgado e comentado o ensino da Matemática como durante o período do MMM:

27 George Springer, foi professor de Sangiorgi no curso realizado em Kansas.

“Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos ”aprendiam“ a Matemática Moderna”. (MIORIM, 1998, p. 114).

Em 1963 Sangiorgi publicou o seu primeiro livro didático da coleção ginasial “Matemática Moderna”, para a 1ª série.

A divulgação da Matemática Moderna no Brasil também chegou às mídias. Um exemplo foi a transmissão de um curso, promovido pelo GEEM referente à Matemática Moderna nas férias de julho[28] de 1964.

> [...] O objetivo do curso era expor orientações similares às dos cursos presenciais, aos professores de Matemática do Ensino Secundário As disciplinas oferecidas eram: Teoria dos Conjuntos, ministrada pelo professor Benedito Castrucci; Lógica dos Conjuntos, ministrada pelo professor Sangiorgi; Práticas Modernas para o Ginásio, pelas professoras Elza Babá e Lucília Bechara. [...] no último dia do curso, os professores-alunos fizeram uma prova de avaliação, na sede do G.E.E.M. que garantia aos mesmos um certificado, se aprovado. (VALENTE, 2008c, p. 110).

Para Valente (2008c) a utilização da mídia para a divulgação e a atualização dos professores frente a Matemática Moderna retratou a necessidade da rápida inserção de um novo currículo para a disciplina de matemática.

Resumimos os propósitos da Matemática Moderna segundo as diretrizes internacionais da seguinte forma: (1) Unificação dos três campos fundamentais da matemática por meio da introdução da linguagem dos conjuntos, das estruturas algébricas e das relações que, seriam a base de sustentação do novo edifício matemático.(2) Ênfase na precisão matemática do conceito e na linguagem adequada para expressá-la, substituindo o pragmatismo e a mecanização presentes no ensino antigo da matemática. (3) O ensino deveria refletir o espírito da matemática contemporânea, no qual a matemática se torna mais rigorosa, precisa e abstrata, por meio do processo de algebrização da matemática clássica. (GEEM, 1965a).

As diretrizes nacionais para Matemática Moderna se deram por meio de cursos, palestras e de sugestões que foram propostas pelo GEEM e posteriormente publicadas. O livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário* em sua 1ª edição aponta que a Matemática Moderna tende a envolver o “o conceito de conjunto e

---

28 Este curso foi transmitido pelo canal 2 durante a primeira quinzena de julho de 1964. (Valente, 2008)

deve atender a formação das estruturas matemáticas, que permitem, com menos esforço, melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno e dão ênfase ao caráter da Matemática atual" (GEEM, 1962, p.89).

Sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi, A 1ª edição do livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário* trouxe a descrição de vinte e quatro itens de *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio* (composto pelas quatro primeiras séries do ensino secundário) e dezoito para o colegial (três séries finais), no qual inclui pequenas sugestões didático-metodológicas. Convém comentar que os *Assuntos Mínimos* e as sugestões pedagógicas visavam atender a formação das estruturas matemáticas envolvendo o conceito de conjunto, marca da linguagem moderna.

Especificamente ao tratamento de funções no ginásio, o GEEM (1962) sugeriu abordar o conteúdo como correspondência, introduzir o sistema de coordenadas no plano e estudar a função linear e quadrática e suas respectivas representações gráficas. Já no colegial, a sugestão é o estudo completo da função do 2º grau, bem como suas aplicações e a ressaltar o aspecto gráfico.

Em 1965, o GEEM vê a necessidade de publicar a 2ª edição do *Matemática Moderna para o Ensino Secundário*, onde no prefácio o Grupo enfatizam dois principais motivos para esta nova edição: o sucesso alcançado pela 1ª edição e o êxito do MMM em alguns Estados brasileiros.

Nesta 2ª edição do livro, consta "[...] a publicação das Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática, Curso Secundário: 1º ciclo, 2º ciclo e Normal, da Secretaria da Educação de São Paulo, que constou no Diário Oficial de São Paulo, do dia 19/01/1965. p. 42." (GEEM, 1965b, prefácio). Nestas Sugestões, o GEEM propõe que o ensino de função deve ser tratado na 4ª série ginasial e no 1º e 3º ano do colegial.

Segundo Miorim (1998), considerado um marco histórico da Educação Matemática, o MMM após vinte anos de seus primeiros passos, não conseguiu, tanto no Brasil como em outros países, atingir seus objetivos. Pesadas críticas surgiram, como as de René Thom e Morris Kline que foram alguns dos que combateram os exageros cometidos pelos países em relação ao ideário do Movimento, sendo que "no Brasil essas críticas se intensificaram a partir da segunda metade da década de 70." (MIORIM, 1998, p. 115).

Morris Kline influenciou muitos educadores brasileiros que relacionaram o MMM como movimento fracassado, também devido a obra cujo título *Why Jonny can´t add: the failture of new math*, ter sido traduzida como *O fracasso da Matemática Moderna*.

Mas nos reportando a Viñao Frago (2007) temos que ter muito cuidado para falar de êxito ou fracasso das reformas e das mudanças, pois estes termos “não devem ser ajuizados em relação aos objectivos manifestados, mas àqueles efectivamente perseguidos e não ditos.” (VIÑAO FRAGO, 2007, p.106).

Ainda segundo Viñao Frago (2007),

> A índole polissêmica do termo “reforma” e o seu emprego em jeito de guarda-chuva no qual tem cabido uma ampla diversidade de objectivos, iniciativas e programas, umas vezes “nobres e valiosos” e outras “desencaminhados e censuráveis”, dificulta ainda mais a análise histórica do seu êxito ou fracasso. (VINÃO FRAGO, 2007, p.107).

Mas, o MMM apresentou resultados positivos, como a articulação e organização dos professores em prol das reformas, organizando-se em grupos, como o GEEM, que teve um papel decisivo no que diz respeito à difusão desse movimento e à edição dos livros didáticos.

2.2 O ENSINO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO ESCOLAR BRASILEIRA - DA REFORMA FRANCISCO CAMPOS ATÉ A REFORMA CAPANEMA.

Segundo Miorim (1998), o ministro Francisco Campos preocupado com a modernização dos conteúdos e com os métodos de ensino no ensino secundário, adotou a proposta de modernização do ensino de Matemática apresentados por Euclides Roxo em sua Reforma. Esta proposta contemplava “os pontos defendidos pelo movimento reformador em geral e também aqueles que foram defendidos pelo Movimento Internacional para a Modernização do Ensino da Matemática.” (MIORIM, 1998, p. 94).

Miorim (1998) comenta que a Reforma Francisco Campos apontava a função como idéia central no ensino de matemática, por ser um conceito capaz de unificar esse ensino.

> A **noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino**. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois

> desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação a outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras.
>
> A representação gráfica e a discussão numérica devem acompanhar, constantemente, o **estudo das funções** e permitir, assim, uma estreita conexão entre os diversos ramos das matemáticas elementares.
>
> [...] Como recursos indispensáveis à resolução rápida dos problemas da vida prática, é necessário que o estudante perceba serem tabelas, gráficos e fórmulas algébricas representações da mesma espécie de conexão entre quantidades e verifique a possibilidade de se tomar qualquer desses meios como ponto de partida, conforme as circunstâncias. (DECRETO nº 19890, 1931, apud Miorim, 1998, p.97, grifo nosso).

Portanto, Roxo propõe que o desenvolvimento da idéia de função é perfeitamente acessível ao estudante do curso secundário desde que seja desenvolvida de forma paulatina e gradativa, num estudo que envolvesse toda a matéria, podendo começar por uma "simples e vaga ideia de dependência, passar-se-á depois à de relacionalidade e à de funcionalidade, apresentadas sob o tríplice aspecto (tabelar, gráfico e algébrico), evitando-se de começo as definições formais e as demonstrações rigorosas." (BRAGA, 2006, p.86).

Braga (2006) analisou a coleção didática de Euclides Roxo: *Curso de Matemática Elementar Vol. I,* publicado em 1929, *Curso de Matemática Elementar Vol. II* escrito pelos professores Euclides Roxo, Cecil Thiré e J.C. Mello e Souza e publicado em *1930* e o livro *Curso de Matemática, 3ª série, II – Geometria* que "deveria ser complementado pelo *3ª série, I – Aritmética e Álgebra*, para juntos, constituírem o volume III da coleção *Curso Matemática Elementar.*" (BRAGA, 2006, p.102). Ressaltando que estes livros tinham como objetivo "atender ao programa do Colégio Pedro II dando continuidade à recente reforma implantada, Reforma Francisco Campos, que somente se tornaria pública em 30 de junho de 1931" (BRAGA, 2006, p. 103).

Em suas análises Braga (2006) conclui que no livro didático *Curso de Matemática Elementar Vol. I* Roxo explora o pensamento funcional iniciando no cap. VI, relacionando a dependência entre as quantidades em diversas situações propostas e dedica exclusivamente no capítulo VII ao conceito de função, envolvendo as representações tabelar, gráfica e analítica em diversos contextos que estão relacionados diretamente ao cotidiano do aluno e a outras disciplinas. Braga ressalta que no livro *Curso de Matemática Elementar Vol. II* o conteúdo de função é presente em todo o livro, sendo mais ativo no capítulo VIII, enriquecido pelas diferentes representações funcionais. Já no *Curso de Matemática, 3ª série, II – Geometria* não há presença do conteúdo de função, porém dá oportunidade da construção do desenvolvimento lógico-dedutivo a partir da geometria intuitiva.

Ainda na década de 1930, com relação a análise de livros da época, Braga (2003) conclui: "Em suma, apesar de os autores atenderem ao programa oficial quanto ao ítem de *função*, percebe-se alguma intencionalidade deles em afastar esse assunto do cotidiano escolar ou, no mínimo, relegá-lo a segundo plano." (BRAGA, 2003, p.140).

Braga (2006) ainda conclui que nos livros das três últimas séries do curso fundamental do ensino secundário, há presença do conteúdo de funções com suas diversas representações. Verifica-se em todas as coleções há presença do ideário de Roxo como o emprego da intuição, a idéia de variação e dependência.

Braga (2006) resume as coleções analisadas da seguinte forma:

> -no primeiro e segundo anos os capítulos de função são estrategicamente colocados de modo a facilitar uma rápida ou nenhuma abordagem em sala de aula;
> - em todos os livros do quinto ano, função se apresenta como capítulo preambular aos de Cálculo, onde atuava como ferramenta;
> - nas séries intermediárias, a intervenção funcional restringia-se à interpretação gráfica de sistemas lineares, do trinômio do segundo grau e das funções trigonométricas. (BRAGA, 2006,p. 139).

Em relação a padronização encontradas nos livros, Braga (2006) cita Chervel, conforme a seguir:

> Essa padronização, ou na linguagem de Chervel, a constituição dessa vulgata da abordagem de função é, após dez anos de vigência da Reforma Francisco Campos, de certa forma, referendada pelo programa de matemática da Reforma Capanema, com as devidas adaptações ao novo formato: curso ginasial, clássico e científico. (BRAGA, 2006, p.139).

Segundo Braga (2006) o programa de matemática da Reforma de Capanema vem, de certa forma, "referendar uma prática do cotidiano escolar da Reforma Francisco Campos" (BRAGA, 2006, p. 140). A abordagem funcional na Reforma

Capanema foi rearranjada em pequena parte na 4ª série ginasial e uma maior no clássico ou no científico.

> [...] Aqueles capítulos sobre função, com poucos exercícios, apresentados nos finais do primeiro e segundo anos, agora, são descartados oficialmente. O restante da abordagem funcional que comparecia nos três últimos anos do curso fundamental foi redistribuída em um novo formato: pequena parte na quarta série ginasial e o restante no clássico ou científico. (BRAGA, 2006, p.141)

A partir desse panorama histórico, que relaciona as Reformas Francisco Campos e Capanema, período histórico anterior ao MMM, apresentamos no próximo capítulo a análise de uma coleção didática ginasial que circularam durante a década de 1950 para que possamos comparar com as coleções didáticas do ginásio que foram publicadas e que circulavam durante o MMM.

Separamos em dois tempos as análises: Tempos Pré-Modernos (década de 1950) e Tempos Modernos (décadas de 1960 e 1970) – auge do MMM no Brasil.

Decidimos analisar a coleção didática *Matemática Curso Ginasial* de Osvaldo Sangiorgi em Tempos Pré-Modernos. Já em Tempos Modernos além da coleção didática *Matemática Curso Moderno* do mesmo autor, iremos analisar os *Guias para uso dos Professores,* as coleções de Bóscolo e Castrucci, de Agrícola Bethlem, de Miguel Asis Name e do Grupo de Ensino de Matemática Atualizada – GRUEMA, de autoria de Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez e Manhúcia Perelberg Liberman.

Estaremos considerando e utilizando como modelo de análise a coleção didática moderna de Osvaldo Sangiorgi. Esta coleção oficializou um novo programa para o ensino de matemática no Brasil, sendo a primeira a seguir as sugestões do GEEM (1962), as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* publicadas pelo GEEM (1965b) e ter tido um número expressivo de vendas[29].

Os eixos norteadores das análises estão relacionados à estrutura de apresentação do conceito de função; a definição de função; a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; representação gráfica da função linear e quadrática; e exercícios.

---

29 Segundo o estudo de Villela (2008) a partir dos Mapas mensais de publicações da Cia. Editora Nacional, o número de exemplares vendidos chegou a 4.336.087, de 1964 a 1978.

CAPÍTULO III

3. ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

> "Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel".
>
> (Ary Quintela)

Este capítulo pretende analisar o modo pelo qual os autores dos livros didáticos de matemática propõem o ensino das *funções* no curso ginasial. Para tanto observamos os índices; os prefácios; as referências (ou ausência delas) as legislações, as metodologias e as figuras utilizadas pelo autor para explicar ao aluno o conceito de *função*.

Nesta pesquisa pretendemos caracterizar o ensino de *função* no ginásio a partir da análise de livros didáticos que circulavam durante o MMM. Visamos investigar a existência ou não de uma *vulgata* com relação a esse ensino neste período (décadas de 1960 e 1970).

O conceito de "vulgata" proposto por Chervel (1990), está ligado com a padronização dos manuais didáticos que tem por conseqüência a mesma abordagem de um determinado conteúdo ou que, de certa forma, sejam muito semelhantes uns aos outros num certo período.

Tudo nos leva a crer que esta padronização dos manuais didáticos possa ser adaptada para os conteúdos fixados nos livros didáticos. Assim como o fez Braga (2006) para o ensino de *função* no período entre as Reformas Campos e Capanema.

Segundo nosso entendimento, a identificação dos conteúdos comuns aos livros didáticos fornece uma visão preliminar da parte conceitual que tem sido preservada na Educação Matemática, especialmente a partir das décadas de 1960 e 1970 – auge do MMM no Brasil. Tendo apresentado uma visão geral dos conteúdos propostos pelos livros didáticos da época, passamos a identificar a maneira que o autor trabalha a noção de *função*: como as definições apresentadas, as representações e notações utilizadas, como propriedades selecionadas e tipos de exercícios. Uma vez que tais elementos podem ser objetivamente classificados em função do significado que assumem no contexto do saber matemático. Para isso, vamos tomar como base para a análise dos livros as funções definidas por Choppin (2004).

Das quatro funções estabelecidas por ele, pretendemos utilizar a *instrumental* e a *referencial*. Para a *Função Instrumental* consideramos unidades que tem o significado objetivado no contexto matemático, as quais foram classificadas nas seguintes confluências: axiomas, definições, exemplos, representações, contextualização, propriedades, teoremas, demonstrações, problemas e exercícios. Para a *Função Referencial* que está relacionada à legislação, que conduz a um levantamento de leis, decretos e acordos, identificamos: a portaria de 1951, LDB de 1961 e 1971, os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio* publicados pelo GEEM (1962) e as *Sugestões para um Roteiro de Programa para a Cadeira de Matemática*, publicadas pelo GEEM (1965b).

3.1 ANÁLISE DO LIVRO DIDÁTICO EM TEMPOS PRÉ-MODERNOS

Neste item temos como pretensão sintetizar o período histórico da década de 1950 com ênfase na Portaria de 1951 e no *Programa Mínimo de Matemática* para o ensino ginasial e colegial – clássico e científico. A Portaria de 1951 foi a legislação educacional vigente na década de 1950. Denominamos esta década de Tempos Pré-Modernos.

Na década de 1950, o Ministro da Educação e Saúde, Ernesto Simões da Silva Freitas Filho[30], fez uma reforma, conhecida por Reforma Simões Filho. A Reforma trouxe para o ensino o *Programa Mínimo* [31] que expediu planos de desenvolvimento dos programas de ensino secundário, ginásio e colégio e respectivas instruções metodológicas de modo a garantir uma base comum de conteúdos e metodologia a estarem presentes nas escolas brasileiras.

30 Nasceu no dia 04/10/1886, em Cachoeira (BA). Formou-se em 1907 em Direito pela Faculdade Livre da Bahia, época em que já trabalhava como jornalista. Em 1912, fundou o jornal A Tarde, que seria considerado o grande órgão renovador da imprensa na Bahia. Em 1924, se tornou deputado federal, se reelegendo em 1927 para novo mandato. Por suas ligações com membros da elite baiana que ocupavam o poder até a Revolução de 1930, Simões Filho pediu exílio na Europa no qual retornou ao Brasil em 1932. No mesmo ano de 1932, por apoiar a Revolução Constitucionalista, teve que pedir exílio novamente, retornando ao Brasil somente em 1933. Em janeiro de 1951, com a volta de Getúlio Vargas à presidência, em outubro de 1950 Simões Filho foi nomeado para o Ministro da Educação e Saúde. Em junho de 1953, deixou o cargo de Ministro e voltou à Bahia. Faleceu em 24 de novembro de 1957.

31 Base para as produções didáticas da década de 1950, incluindo o novo modo de escrever e pensar os livros didáticos de matemática.

Em 27 de fevereiro de 1951 foi criada uma comissão[32] de professores para revisar os programas do Ensino Secundário tanto para o primeiro ciclo - ginásio de quatro anos, quanto para o segundo ciclo – curso clássico ou científico de 3 anos cada, no qual ficou “caracterizado um programa mínimo a ser desenvolvido nos currículos escolares” (MARQUES, 2005, p.53).

Segundo Marques (2005), a Reforma foi necessária devido ao aumento considerável de alunos ingressando nos cursos secundários no início da década de 50 e a dificuldade das escolas cumprirem os conteúdos estabelecidos pela legislação. Assim, foi preciso fazer a revisão e a simplificação dos programas, flexibilizando o currículo.

Pela Portaria Ministerial nº 966, publicada no Diário Oficial em 26/11/1951 e retificada em 02/01/1952, o Ministro da Educação e Saúde Simões Filho aprovou os programas elaborados pelas comissões. Esta legislação ficou conhecida como Portaria de 1951.

Em relação aos programas de desenvolvimento previstos pela Portaria de 1951, Marques (2005) ressalta:

> Os planos de desenvolvimento consistem em uma exposição mais detalhada e simplificada, pois os referidos programas completam, pela dosagem e discriminação dos assuntos, os programas básicos já elaborados, e com estes devem entrar em vigor gradativamente, na forma estabelecida pela resolução ministerial. (MARQUES, 2005, p.59).

Em relação à Matemática, em específico ao conteúdo de função, Marques (2005) comenta:

> Entre os conteúdos citados no programa e no plano de desenvolvimento de matemática, estava presente o conceito de função, mas apenas no terceiro ano do 2º ciclo – clássico e científico – em que não houve diferenciação de conteúdos a serem ensinados nessas duas modalidades. (MARQUES, 2005, p.59).

O *Programa Mínimo de Matemática* para o ensino ginasial e colegial – clássico e científico tinha a seguinte estrutura:

---

32 Essa comissão era subdividida em várias comissões, conforme as disciplinas do curso, sendo que cada comissão era formada por um professor da Faculdade Nacional de Filosofia, um professor do Colégio Pedro II, um professor do Instituo de Educação do Distrito Federal e um professor do Sindicato dos professores particulares.

PROGRAMA MÍNIMO DE MATEMÁTICA		
	CURSO GINASIAL	**CURSO COLEGIAL (Clássico e Científico)**
1ª SÉRIE	- Números inteiros; operações fundamentais; números relativos. - Divisibilidade aritmética; números primos. - Números fracionários. - Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais.	- Noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros. - Progressões. - Logaritmos. - Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes. - Seções cônicas; definições e propriedades fundamentais.
2ª SÉRIE	Potências e raízes; expressões irracionais. Cálculo literal; polinômios. Binômio linear; equações e inequações do 1º grau com uma incógnita; sistemas lineares com duas incógnitas.	- Análise combinatória simples. - Binômio de Newton. - Determinantes; sistemas lineares. - Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas. - Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples. - Resolução trigonométrica de triângulos.
3ª SÉRIE	Razões e proporções; aplicações aritméticas. Figuras geométricas planas; reta e círculo. Linhas proporcionais; semelhança de polígonos. Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais.	- **Conceito de função**; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade. - Noções sobre derivada e primitivas; interpretações; aplicações. - Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades, divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformação e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais.
4ª SÉRIE	Trinômio do 2º grau; equações e inequações do 2º grau com uma incógnita. Relações métricas nos polígonos e no círculo; cálculo de π. Áreas das figuras planas.	--

Conforme aponta a Portaria de 1951 e concordando com Marques (2005), o ensino de função ficava restrito à 3ª série do curso colegial – Clássico e Científico. Assim podemos ter como hipótese, até o presente momento, que no curso ginasial o ensino de *função* não tem seu espaço. O aluno do curso secundário, só estudaria o conceito de f*unção* na 3ª série do curso colegial, seja clássico ou científico e mesmo assim de uma forma limitada com a intenção de abrir caminhos para noções de limite e continuidade.

3.1.1 A coleção didática de Osvaldo Sangiorgi para o curso ginasial antes do MMM.

A coleção didática de Osvaldo Sangiorgi para o curso ginasial antes do MMM é uma obra que será analisada na perspectiva da apropriação desse autor com referência à Portaria de 1951.

Escolhemos a coleção "Matemática – curso ginasial" de Osvaldo Sangiorgi pelo fato de ter uma grande tiragem da Cia. Editora Nacional, conforme aponta Valente (2008c):

> Será o "Matemática-curso ginasial" um dos best-sellers da Editora, lançado no ano de 1953. Em fevereiro desse ano foi editado o volume da coleção destinado à 1ª série ginasial, com tiragem de exatos 20213 exemplares. Em julho do mesmo ano, com tiragem de 20216 exemplares, e novembro, com tiragem de 25266, saíram, respectivamente, os volumes para a 2ª e 3ª séries. Ao que tudo indica, a acolhida da coleção foi muito boa, dado que já no final de 1953, ocorreu uma nova tiragem do primeiro volume: são mais 20167 livros que foram utilizados nas primeiras séries ginasiais, de acordo com o "Mapa de Edições" da Cia. Editora Nacional. (VALENTE, 2008c, p. 19).

Através dos estudos de Valente (2008c), percebemos que a coleção "Matemática – curso ginasial" de Osvaldo Sangiorgi teve um grande número de vendas em relação ao número de alunos que estudavam no estado de São Paulo, naquela época:

> Considerando que a população escolar de todo o ensino secundário no estado de São Paulo, da década de 1950 para 1960, como se viu anteriormente, dobrou, passando a 360 mil alunos, tem-se o quão expressivos foram os números alcançados pela coleção "Matemática – curso ginasial", de Osvaldo Sangiorgi. (VALENTE, 2008c, p.23).

Além do sucesso de seus livros, Osvaldo Sangiorgi era um professor de “trânsito fácil” e bom articulador para a educação matemática da época.

> Acesso aos jornais, participação em encontros brasileiros para discussão dos programas de ensino de matemática e sistemática presença com artigos em revista pedagógica de alcance nacional são elementos importantes para a consolidação de Osvaldo Sangiorgi como referência para o ensino de Matemática. O sucesso dos livros atestou isso. (VALENTE, 2008c, p. 23).

A coleção *Matemática – Curso Ginasial* é composta por 4 volumes, um para cada série do ginásio. A publicação dos livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi para o ginásio teve início em 1953, com o lançamento do volume dedicado à primeira série.

Nesta pesquisa são examinadas da versão “pré-moderna” a 66 ª edição de 1962 do volume 1, 60ª edição de 1961 do volume 2, 77ª edição (não consta o ano de publicação) do volume 3 e a 32ª edição de 1959 do volume 4. [33]

Na próxima figura estão as capas dos livros que compõem a coleção didática a ser analisada.

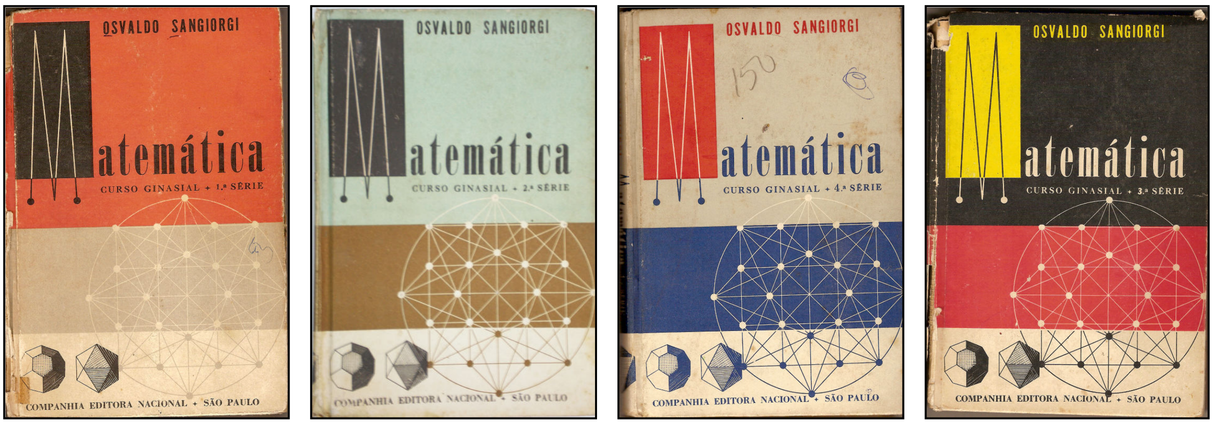


FIGURA 01-Capa da coleção didática *Matemática Curso Ginasial* de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1959 – 32ª edição).

O volume 1 da coleção (destinado à 1ª série do ensino ginasial) é composto por 4 capítulos, sendo eles:

---

33 Esta coleção encontra-se no acervo do Centro de Documentação do GHEMAT, localizado em Osasco – SP.

Capítulo I: Números inteiros; operações fundamentais; números relativos.
Capítulo II: Divisibilidade aritmética; números primos; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum.
Capítulo III: Números fracionários; operações fundamentais; métodos de resolução de problemas sobre frações; frações decimais com os números decimais.
Capítulo IV: Sistema legal de unidades de medir; unidades e medidas usuais; Sistem métrico decimal; sistema de medidas não decimais.

Apêndice: Leitura sobre curiosidades aritméticas – problemas curiosos.

Como visto não há presença do conteúdo de função neste 1º volume e não há também indícios de conteúdos e exercícios que desenvolvam relações com o tema *função*.

O *volume 2* da coleção (destinado a 2ª série do ensino ginasial) é composto pelos seguintes capítulos:

Capítulo I: Potenciação e Radiciação. Expressões Racionais. (1. potências; 2. Expressões do quadrado da soma indicada de dois números e do produto da soma indicada pela diferença de dois números; 3. raíz quadrada; 4. raíz cúbica; 5. grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis. Números racionais e números irracionais. Radicais).
Capítulo II: Cálculo literal. Polinômios (1. Expressão algébrica. Monômios e polinômios; 2. Operações algébricas; 3. Caso simples de fatoração; 4. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de expressões algébricas; 5. Frações literais).
Capítulo III: Binômio linear. Equações e inequações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas lineares com duas incógnitas. Aplicações. (1. Igualdade. Identidade. Equação: 2. Binômio linear; 3. Desigualdade. Inequação; 4. Sistemas lineares com duas incógnitas; 5. Problemas do primeiro grau com uma e com duas incógnitas. Generalização e discussão).

Neste 2º volume também não há indícios de conteúdos, nem de exercícios que desenvolvam relações com o tema *função,* embora seja verificada a presença da álgebra no ensino, através das equações e inequações.

O volume 3 da coleção (*destinado a 3ª série do ensino ginasial)* é composto pelos seguintes capítulos:

> *Capítulo I:* Razões e Proporções. Aplicações aritméticas (1. Razões e proporções, propriedades e aplicações; 2. Números proporcionais. Propriedades e aplicações. 3. Grandezas proporcionais. Regras de três. Aplicações. 4. Percentagem. Taxa milesimal. Juros simples. Aplicações).
> *Capítulo II:* Figuras geométricas planas. Reta e círculo. (1. Entes geométricos. Proposições geométricas. Congruência; 2. Ângulos, classificação e propriedades; 3. Linha poligonal; 4. Triângulos. Congruência. Aplicações; 5. Perpendiculares e oblíquas. Lugares geométricos; 6. Teoria paralelas. Aplicações; 7. Soma dos ângulos de um triângulo e de um polígono. Conseqüências. 8. Quadriláteros. Classificação e propriedades. Translação. Retas concorrentes no triângulo; 9. Circunferência e Círculo; 10. Correspondência entre arcos e ângulos. Medidas respectivas. Construções geométricas).
> *Capítulo III:* Linhas proporcionais. Semelhanças de polígonos. (1. Divisões de um segmento. Divisão harmônica; 2. Feixe de paralelas; 3. Linhas – Semelhança de polígonos).
> *Capítulo IV:* Relações trigonométricas no triângulo retângulo. Tábuas naturais. (1. Razões trigonométricas; 2. Tábuas naturais. Cálculo dos lados de um triângulo retângulo) 3. Proporcionais no triângulo; 4. Semelhança de triângulos.
>
> *Apêndice:* Exercícios de recapitulação (Aritmética); Algumas considerações interessantes sobre a Geometria Dedutiva.

Verificamos que não há presença do conteúdo de *função* e não há também indícios de exercícios que desenvolvam relações com o tema *função*. Percebemos que aproximadamente 75 % do conteúdo apresentado nesta unidade é referente ao ensino de geometria. Estando de acordo com a Portaria de 1951.

O volume 4 da coleção (*destinado a 4ª série do ensino ginasial)* é composto por 4 capítulos sendo eles:

> *Capítulo I:* Trinômio do segundo grau, equações e inequações do segundo grau com uma incógnita. (1. Números reais; 2. Equações do segundo grau; 3. Trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau; 4. Equações redutíveis do segundo grau. Aplicações; 5. Problemas do segundo grau. Aplicações a geometria).

Capítulo II: Relações métricas nos polígonos e no círculo cálculo de π. (1.Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras; 2. Relações métricas com co-senos; 3. Cálculo das medianas das alturas e das bissetrizes de um triângulo; 4. Relações métricas no círculo.

Capítulo III: Áreas das figuras planas. (1. Definições e propriedades fundamentais; 2. Área dos polígonos; 3. Área das figuras circulares; 4. Relações métricas entre as áreas das figuras planas. Construções de figuras equivalentes).

Apêndice: I. Sistemas algébricos do segundo grau. (1.Sistemas simples do segundo grau; 2.Resolução de sistemas simples do segundo grau; 3.Sistemas redutíveis do segundo grau; 4. Exercícios. II. Representações gráficas. Coordenadas cartesianas. (1.Sistema de coordenadas cartesianas; 2.Representação gráfica das funções do primeiro grau; 3. Representação gráfica de um sistema de equações do primeiro grau; 4. Representação gráfica das funções do segundo grau: parábola; 3.Exercícios.

Percebemos pelo índice[34] e pela análise dos conteúdos presentes nesta coleção que o conteúdo de *função* fica restrito ao *Apêndice* do 4º ano do curso ginasial.

Tomando como base a *função referencial* de Choppin (2004) acreditamos que a não exigência legal do ensino de *função* no curso ginasial (Portaria de 1951) tenha levado o autor a tratar deste tema somente no apêndice.

Analisaremos nas próximas páginas o 4º volume desta coleção pré-moderna.

34 Ver anexo 1.

CAPA DO LIVRO *MATEMÁTICA CURSO GINASIAL* DE OSVALDO SANGIORGI 4ª SÉRIE

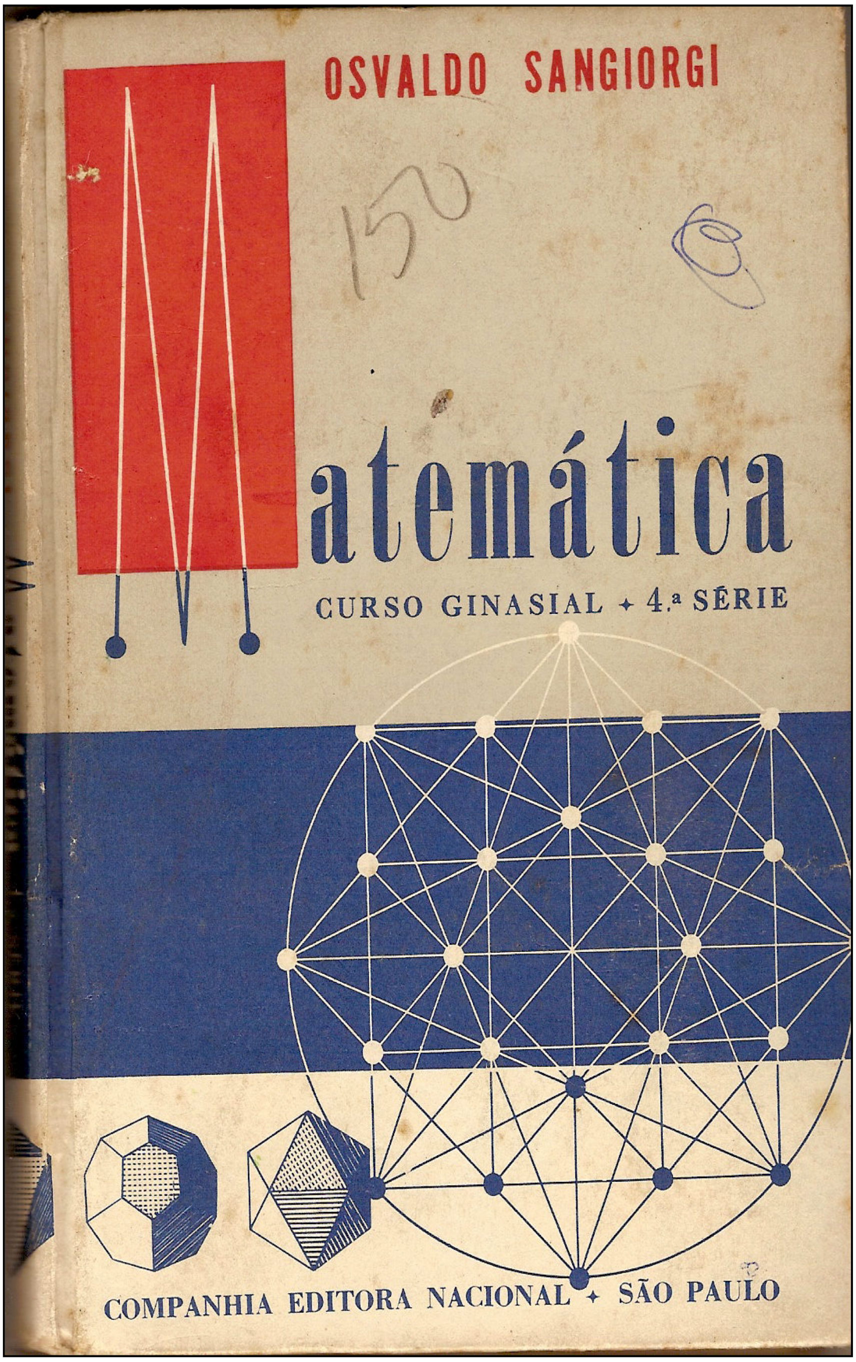


FIGURA 02 - Capa do livro *Matemática Curso Ginasial* - 4ª volume de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição.)

CONTRA-CAPA DO LIVRO

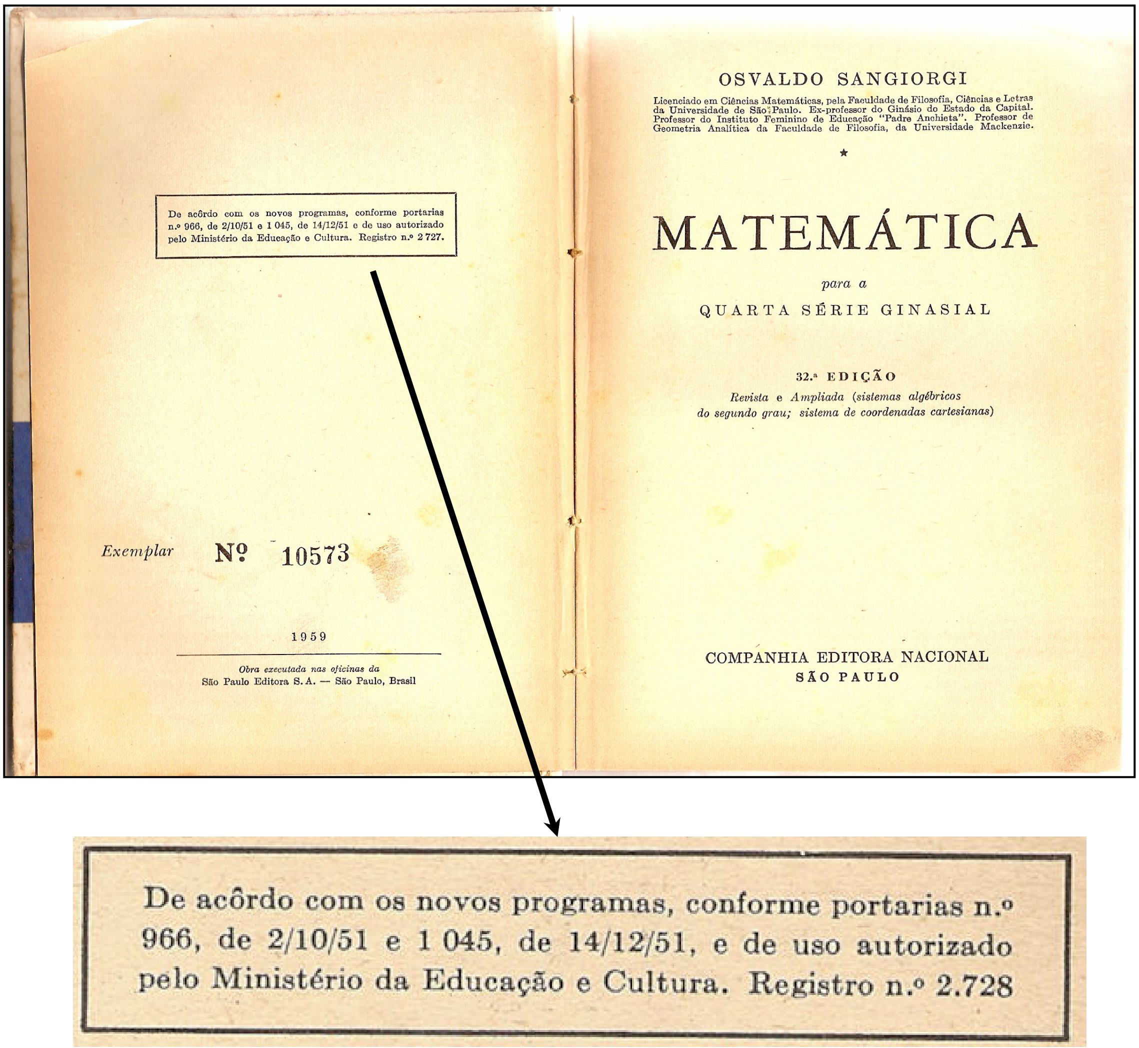


FIGURA 03: Contra -capa do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4º volume de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição.)

Em relação às Portarias citadas na figura acima, a primeira diz respeito à simplificação dos programas do ensino secundário tanto para o primeiro ciclo – ginásio, quanto para o segundo ciclo – curso clássico ou científico, ou seja, os *Programas Mínimos* e a segunda, aos planos de desenvolvimento elaborados pelos professores do Colégio Pedro II.

Lembramos que o ensino de *função* na Portaria de 1951 não é acolhido no 1º ciclo e sim no 2º ciclo, especificamente, na terceira série do curso colegial – clássico e científico.

PREFÁCIO DO LIVRO

Conforme podemos verificar Sangiorgi deixa claro que seu livro está de acordo com a Portaria de 1951, assim, a introdução do plano cartesiano que é importante para o conteúdo de *função* é trabalhada no apêndice, pois o tema não era exigido pela Portaria mencionada.

PREFÁCIO

Com êste volume terminamos a coleção de livros de Matemática, 1.º ciclo, oferecida aos ilustres colegas e aos estudantes de nosso curso secundário.

Seguímos, tanto quanto possível, as instruções metodológicas constantes da Portaria 1045, de 14/12/51. Achamos conveniente, no início da parte algébrica, dar o conceito de número real, a fim de melhor estudar as equações do segundo grau. A resolução dos problemas do segundo grau sucedeu o estudo das equações redutíveis ao segundo grau, pelo fato das soluções de inúmeros problemas dependerem da resolução destas equações.

Deixamos, de acôrdo com as citadas instruções, de introduzir o sistema de referência cartesiano, cujo estudo deve ser feito de um modo mais completo no segundo ciclo.

Esperamos continuar merecendo de nossos prezados colegas a mesma acolhida que tivemos com relação aos três primeiros livros. Confessamo-nos sumamente gratos pelas sugestões recebidas — pois, nunca alimentamos a pretenção de ter realizado obra perfeita, e pelas colaborações que visem melhorar as futuras edições.

Mais uma vez, agradecemos aos professôres, a confiança e o estímulo que, com felicidade, temos recebido na elaboração desta coleção didática.

O AUTOR

FIGURA 04: Prefácio do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4º volume de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição.)

O conteúdo de *função*, neste 4º volume de Sangiorgi fica restrito a representação gráfica, com isso, podemos perceber que Sangiorgi não rompeu totalmente com a legislação vigente à reforma anterior - Reforma Capanema (que estabelecia o ensino de funções, em menor parte no ginásio e em maior no colégio).

O autor destaca a dependência, a correspondência entre as variáveis e a representação gráfica. Na figura abaixo, a definição de *função* aparece como uma correspondência entre valores de duas variáveis, concretizadas nas letras “x” e “y”.

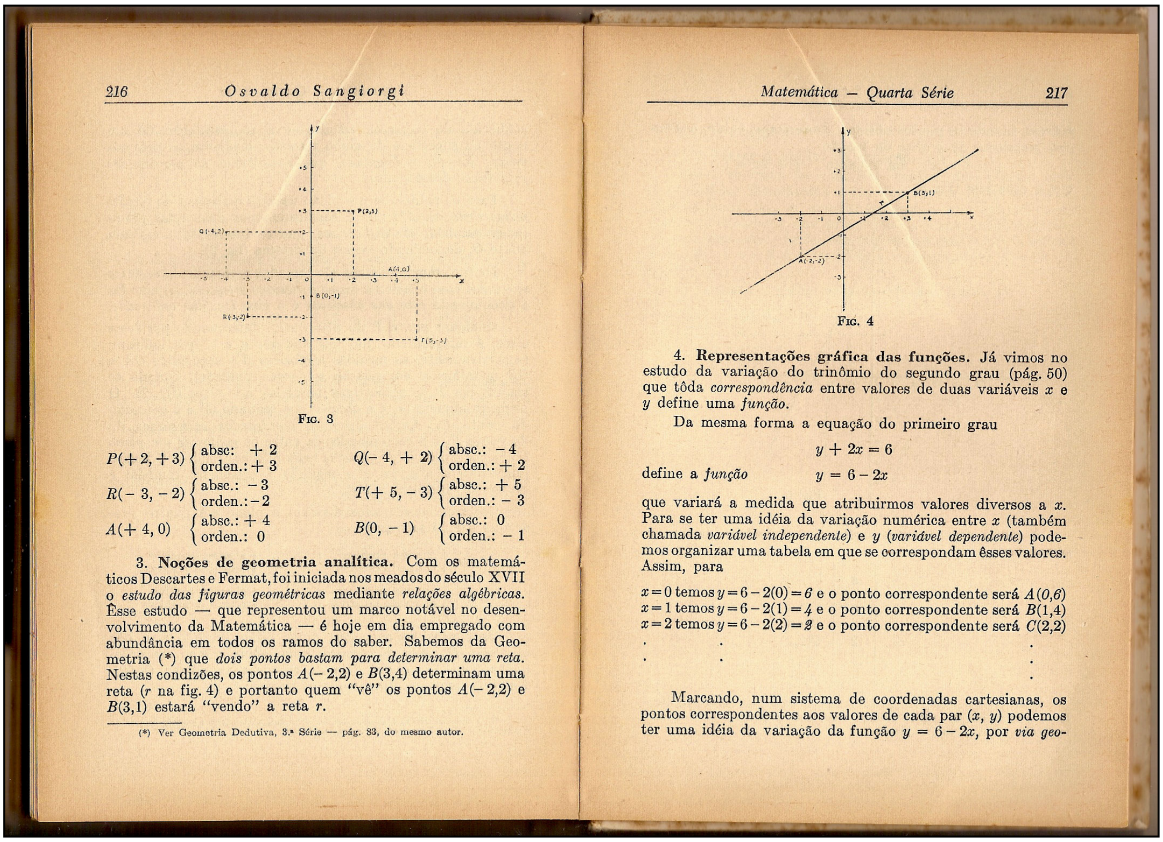

216 *Osvaldo Sangiorgi*

Fig. 3

$P(+2, +3)\begin{cases}\text{absc: } +2\\ \text{orden.: } +3\end{cases}$ $Q(-4, +2)\begin{cases}\text{absc.: } -4\\ \text{orden.: } +2\end{cases}$

$R(-3, -2)\begin{cases}\text{absc.: } -3\\ \text{orden.: } -2\end{cases}$ $T(+5, -3)\begin{cases}\text{absc.: } +5\\ \text{orden.: } -3\end{cases}$

$A(+4, 0)\begin{cases}\text{absc.: } +4\\ \text{orden.: } 0\end{cases}$ $B(0, -1)\begin{cases}\text{absc.: } 0\\ \text{orden.: } -1\end{cases}$

3. **Noções de geometria analítica.** Com os matemáticos Descartes e Fermat, foi iniciada nos meados do século XVII o *estudo das figuras geométricas* mediante *relações algébricas*. Êsse estudo — que representou um marco notável no desenvolvimento da Matemática — é hoje em dia empregado com abundância em todos os ramos do saber. Sabemos da Geometria (*) que *dois pontos bastam para determinar uma reta*. Nestas condizões, os pontos $A(-2,2)$ e $B(3,4)$ determinam uma reta (r na fig. 4) e portanto quem “vê” os pontos $A(-2,2)$ e $B(3,1)$ estará “vendo” a reta r.

(*) Ver Geometria Dedutiva, 3.ª Série — pág. 83, do mesmo autor.

Matemática — Quarta Série 217

Fig. 4

4. **Representações gráfica das funções.** Já vimos no estudo da variação do trinômio do segundo grau (pág. 50) que tôda *correspondência* entre valores de duas variáveis x e y define uma *função*.

Da mesma forma a equação do primeiro grau

$$y + 2x = 6$$

define a *função* $y = 6 - 2x$

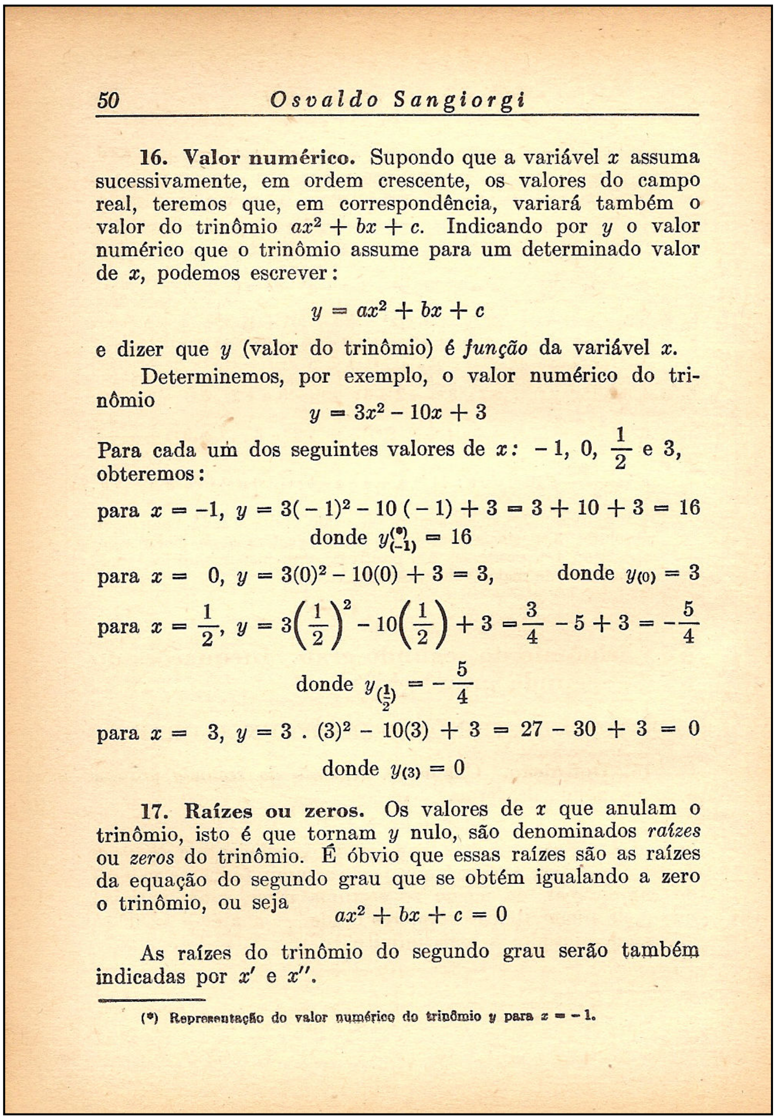
que variará a medida que atribuirmos valores diversos a x. Para se ter uma idéia da variação numérica entre x (também chamada *variável independente*) e y (*variável dependente*) podemos organizar uma tabela em que se correspondam êsses valores. Assim, para

$x=0$ temos $y=6-2(0)=6$ e o ponto correspondente será $A(0,6)$
$x=1$ temos $y=6-2(1)=4$ e o ponto correspondente será $B(1,4)$
$x=2$ temos $y=6-2(2)=2$ e o ponto correspondente será $C(2,2)$
. . .
. . .

Marcando, num sistema de coordenadas cartesianas, os pontos correspondentes aos valores de cada par (x, y) podemos ter uma idéia da variação da função $y = 6 - 2x$, por *via geo-*

FIGURA 05 - Página 217 do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4º volume de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição).

Vimos por esta figura que Sangiorgi faz uma recordação à p.50 do livro no qual vincula o estudo da variação do trinômio do segundo grau com a definição de *função*, conforme a próxima figura.



50 *Osvaldo Sangiorgi*

16. Valor numérico. Supondo que a variável x assuma sucessivamente, em ordem crescente, os valores do campo real, teremos que, em correspondência, variará também o valor do trinômio $ax^2 + bx + c$. Indicando por y o valor numérico que o trinômio assume para um determinado valor de x, podemos escrever:

$$y = ax^2 + bx + c$$

e dizer que y (valor do trinômio) é *função* da variável x.

Determinemos, por exemplo, o valor numérico do trinômio

$$y = 3x^2 - 10x + 3$$

Para cada um dos seguintes valores de x: -1, 0, $\frac{1}{2}$ e 3, obteremos:

para $x = -1$, $y = 3(-1)^2 - 10(-1) + 3 = 3 + 10 + 3 = 16$

donde $y_{(-1)}^{(*)} = 16$

para $x = 0$, $y = 3(0)^2 - 10(0) + 3 = 3$, donde $y_{(0)} = 3$

para $x = \frac{1}{2}$, $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4} - 5 + 3 = -\frac{5}{4}$

donde $y_{\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{5}{4}$

para $x = 3$, $y = 3 \cdot (3)^2 - 10(3) + 3 = 27 - 30 + 3 = 0$

donde $y_{(3)} = 0$

17. Raízes ou zeros. Os valores de x que anulam o trinômio, isto é que tornam y nulo, são denominados *raízes* ou *zeros* do trinômio. É óbvio que essas raízes são as raízes da equação do segundo grau que se obtém igualando a zero o trinômio, ou seja

$$ax^2 + bx + c = 0$$

As raízes do trinômio do segundo grau serão também indicadas por x' e x''.

(*) Representação do valor numérico do trinômio y para $x = -1$.

FIGURA 06 - Página 50 do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4º volume de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição).

Quanto aos exercícios e exemplos predominam as representações gráficas de funções de 1º grau e de 2º grau[35].

As atividades a serem aplicadas aos alunos são apresentadas nas últimas páginas do livro, onde os exercícios são enunciados utilizando os verbos de comando: construa e resolva e exploram a conversão somente num sentido: expressão algébrica $\Rightarrow$ gráficos.

35 Ver anexo 2.

EXERCÍCIOS

1. Construir o gráfico (reta) das seguintes funções do primeiro grau:

1.ª) $y = 4 - 2x$ 3.ª) $y = 3x$ 5.ª) $2y = -6$ 7.ª) $3y + 2x = 12$

2.ª) $y = x + 3$ 4.ª) $3x = 12$ 6.ª) $y = x + 1$ 8.ª) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

2. Resolver gràficamente (sistema de duas retas) os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ 5.º) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 3y - 3x = 6 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 7.º) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 8.º) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 3x - 9 \end{cases}$

3. Construir o gráfico (parábola) das seguintes funções do segundo grau:

1.ª) $y = x^2 - 8x + 12$
2.ª) $y = -x^2 + 2x$
3.ª) $y = 2x^2 - 8x + 8$
4.ª) $y = -5x^2 + 2x - 3$
5.ª) $y = 2x^2 - 8$
6.ª) $y = -\frac{2}{5}x^2$
7.ª) $y = x^2 - 7x + 6$
8.ª) $y = x^2 + 8x + 15$
9.ª) $y = -2x^2 + 12x - 18$
10.ª) $y = x^2 + 2x - 8$
11.ª) $y = x^2 - 2x + 2$
12.ª) $y = x^2 + 4x$

FIGURA 07 - Página 231 do livro *Matemática Curso Moderno* - 4º volume de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional de 1959 – 32ª edição).

3.1.2 Síntese da Coleção Pré-Moderna de Osvaldo Sangiorgi.

Embora o ensino de *função* não estar acolhido no ginásio e sim no 3º ano colegial na portaria de 1951, Sangiorgi aborda o conteúdo no apêndice do 4º livro da coleção ginasial pré-moderna, não rompendo totalmente com a legislação vigente à reforma anterior - Reforma Capanema (que estabelecia o ensino de *funções*, em menor parte no ginásio e em maior no colégio).

Quanto à abordagem do ensino de *função*, Sangiorgi procurou tratar o conceito somente com a representação gráfica. O autor não define *função* e existem poucos exercícios para o aluno.

3.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS EM TEMPOS MODERNOS

Estudar a disciplina matemática verificando como foi ensinado o conteúdo *função* no ensino ginasial na época do MMM obriga-nos, segundo Chervel (1990), a fazermos uma leitura paralela e concomitante da legislação que orienta a prática e o cotidiano escolar, pois a legislação determina o que deve ser ensinado na escola e, o cotidiano escolar, revela, de uma certa forma, como as orientações oficiais chegaram na sala de aula.

Chamamos de Tempos Pré-Modernos a década de 1950 e Tempos Modernos as décadas de 1960 e 1970 – auge do MMM no Brasil.

Assim como a análise do livro em Tempos Pré-modernos também utilizaremos as funções de Choppin (2004) para os livros de Matemática em Tempos Modernos.

Em relação à *Função Referencial*, utilizaremos os *Assuntos Mínimos* propostos pelo GEEM e publicados no livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário* em 1962, as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* propostas pelo GEEM (1965b), a LDB de 1961 e de 1971. Quanto à *Função Instrumental*, analisaremos os seguintes aspectos: axiomas, definições, exemplos, representações, propriedades, teoremas, demonstrações, problemas, exercícios, dentre outros.

Como contribuição para a discussão do tema "Reestruturação do ensino da Matemática na Escola Secundária face à Lei de Diretrizes e Bases" (GEEM, 1962, p.90) o GEEM apresenta 24 itens sobre *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o Ginásio* no qual faz parte do livro *Matemática Moderna para o Ensino Secundário*. Os *Assuntos Mínimos*, além dos programas de matemática a serem ensinados no ensino ginasial, visa também a flexibilidade do currículo apresentam orientações/ sugestões para os professores.

> Atendendo à flexiblidade do currículo e à continuidade que deve existir no ensino dos diversos assuntos, o professor poderá programar o número de itens que achar conveniente (ou outros se achar conveniente, que atendam porém às razões expostas) por série do ginásio. Apenas com caráter de sugestão poder-se-ia desenvolver em classes normais 6 itens por séries (naturalmente na ordem que aparecem). É lógico que a reação da classe, na qual se ensina, e sua maior ou menor rapidez de entendimento constituirão para o professor os fatores decisivos que o aconselharão a

> estender-se além desse limite ou reduzir o número de itens. (GEEM, 1962, p. 90).

É importante ressaltar que os *Assuntos Mínimos* propostos pelo GEEM antes de serem apresentados e aprovados no IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática em julho de 1962, já tinham sido aprovados pela Comissão de Matemática do V Encontro de Mestres, em São Paulo no mesmo ano, conforme a descrição do GEEM:

> Convém assinalar que o programa ora apresentado pelo GEEM, mereceu aprovação unânime do plenário, relativo à Comissão de Matemática do V Encontro de Mestres, realizado na capital de São Paulo, de 27 a 28 de julho últimos, sob o patrocínio da CADES e jurisdição da Inspetoria Seccional de São Paulo, bem como da reunião de professores da Secção K - Educação, relativa a "Introdução da Matemática Moderna no Curso Secundário", da XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, Paraná, em 10 do corrente. (GEEM, 1962, p. 90).

O IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática foi muito importante para o GEEM porque apresentou sua contribuição para o "problema de modernização do ensino de matemática no curso médio" (GEEM, 1962, p. 90), e porque pôde também...

> [...] ir ao encontro do que é possibilitado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, na certeza de que dessa Assembléia máxima dos professores de Matemática do Brasil, reunida, em Belém do Pará, surgirão reais diretrizes para um verdadeiro norte do ensino de Matemática nas escolas do país." (GEEM, 1962, p. 91).

As *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática* que fazem parte do *Programa Moderno* apresentado pelo GEEM (1965b), foram realizadas por uma Comissão designada pelo Departamento de Educação da USP, sendo os integrantes: Profº. Benedito Castrucci, como presidente, o Profº. Osvaldo Sangiorgi como secretário, Profº. Luiz Mauro Rocha como Membro, Profª. Renate G. Watanabe como Membro, e o Profº. Alcides Bóscolo também como Membro.

Os programas de matemática estabelecidos pelo GEEM em 1965 foram distribuídos para o ensino ginasial e colegial com a seguinte estrutura por séries:

PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA		
	CURSO GINASIAL	**CURSO COLEGIAL**
1º ANO	1. Conjunto dos números inteiros: a) representação e sistema de numeração; b) adição operação inversa; propriedades; c) multiplicação e operação inversa, propriedades; d) potenciação e operação inversa, propriedades; e) prática da extração de raiz quadrada. 2. Divisibilidade: a) múltiplos e divisores; b) números primos; c) máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum. 3. Conjunto dos números racionais (inteiros e fracionários): a) representação (fracionária e decimal); b) adição e operação inversa, propriedades; c) multiplicação e operação inversa, propriedades; d) potenciação e operação inversa, propriedades. 4. Estudo intuitivo das principais figuras geométricas. 5. Sistemas de medidas: a) sistema decimal; b) noções sobre outros sistemas, não decimais, em uso.	1. Funções: a) noções gerais; b) função linear, representação gráfica, estudo de reta; c) função trinômio do 2º grau, variação, representação gráfica, inequações do 2º grau; d) função exponencial e logarítmica, uso das tábuas. 2. Seqüências: a) exemplos de seqüências, princípios da indução; b) progressões aritméticas e geométricas. 3. Funções trigonométricas: a) estudo das funções trigonométricas, periodicidade, simetria, representação gráfica; b) relações fundamentais, funções trigonométricas de a (mais ou menos) b, 2ª, a/2, onde a e b representam medidas de arcos; c) transformação de sem a (mais ou menos) sen b, cos a (mais o u menos) cos b em produto; d) equações trigonométricas elementares; e) uso das tábuas trigonométricas e resolução de triângulos. 4. Introdução à Geometria do Espaço: a) axiomas e teoremas fundamentais; b) perpendicularismo e paralelismo; projeção e distância; c) diedros.

PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA		
	CURSO GINASIAL	**CURSO COLEGIAL**
2º ANO	1. Razões e Proporções; a) razões,propriedades, b) proporções, propriedades, c) conjuntos de números direta e inversamente proporcionais, d) regra de três, porcentagens, juros, câmbio. 2. Conjunto de números racionais relativos; a) inteiros relativos, operações, propriedades; b) racionais relativos, operações, propriedades; c) relação de ordem (desigualdades). 3. Equações e inequações do primeiro grau: a) noção de variável, tradução de sentenças com uma variável de linguagem corrente para a linguagem matemática; b) resolução de equações simples do primeiro grau com uma variável no conjunto dos racionais relativos, usando as propriedades das operações; c) resolução de inequações simples do primeiro grau com uma variável no conjunto dos racionais relativos, usando as propriedades. 4. Sistemas de inequações simultâneas com uma variável. 5. Sistemas de duas equações simultâneas com duas variáveis: a) tradução de sentenças com duas variáveis da linguagem corrente para a linguagem matemática. b) técnicas de resolução, substituição.	1. Análise Combinatória e Binômio de Newton: a) análise combinatória simples; b) noção de probabilidade; c) binômio de Newton. 2. Sistemas de Equações lineares: a) matrizes e determinantes; b) resolução de sistemas lineares. 3. Ângulos Poliédricos e Poliedros: a) triedros e ângulos poliédricos; b) poliedros regulares; c) prismas e pirâmides. 4. Superfícies e Sólidos Redondos: a) superfícies elementares: cilíndricas, cônicas e de rotação. b) cilindro, cone e esfera.

<table>
<tr><th colspan="3">PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA</th></tr>
<tr><th></th><th>CURSO GINASIAL</th><th>CURSO COLEGIAL</th></tr>
<tr><td>3º ANO</td><td>1. Cálculo Algébrico:
a) polinômios, operações, propriedades;
b) frações algébricas, operações, propriedades.

2. Complementação do estudo das equações e sistemas:
a) equações e inequações do 1º grau com uma variável;
b) sistemas de equações simultâneas do 1º grau;

3. Introdução à Geometria Dedutiva:
a) elementos fundamentais: ponto, reta, semi-reta, segmento, semiplano, ângulo;
b) polígonos: generalidades, estudo dos triângulos: congruência, propriedades e aplicações.

4. Paralelismo e Perpendicularismo:
a) propriedades fundamentais, postulado de Euclides, conseqüências;
b) quadriláteros, principais propriedades.

5. Circunferência e Círculo:
a) generalidades, arcos e cordas, propriedades;
b) medida de arcos e ângulos.

6. Construções Geométricas e Transformações:
a) construção com régua e compasso,
b) Transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.</td><td>1. Conjunto dos Números Complexos:
a) conceito, representação, operações, propriedades;
b) raízes da unidade, equações binômias.

2. Polinômios e Equações Algébricas;
a) polinômios, operações, propriedades;
b) resolução de equações algébricas.

3. Geometria Analítica:
a) estudo da reta;
b) estudo da circunferência;
c) noções sobre cônicas.

4. Introdução ao Cálculo Infinitesimal:
a) noção de limite e continuidade de funções reais de variável real.
b) derivada de funções racionais e trigonométricas;
c) propriedades das derivadas e aplicações no estudo da variação das funções;

5. Transformações Geométricas:
a) translação, rotação e simetria, propriedades;
b) semelhança, homotetia, propriedades.</td></tr>
</table>

PROGRAMA MODERNO DE MATEMÁTICA		
	CURSO GINASIAL	**CURSO COLEGIAL**
4º ANO	1. Conjunto de números reais; a) primeiras noções de número real e sua representação na reta; b) radicais: potências com expoente racional relativo, operações e propriedades. 2. Equações do Segundo Grau: a) generalidades, resolução; b) equações biquadradas, equações irracionais; c) sistemas simples do 2º grau de duas equações com duas variáveis. **3. Funções:** **a) função linear e sua representação gráfica cartesiana;** **b) resolução gráfica de sistema de equações;** **c) função trinômio do 2º grau, representação gráfica.** 4. Semelhança: a) razão e proporcionalidade de segmentos; b) teorema de Tales, semelhança de triângulos, semelhança de polígonos; c) noção de seno e co-seno. 5. Relações métricas: a) num triângulo retângulo; b) num triângulo qualquer, lei dos senos e lei dos co-senos; c) num círculo. 6. Polígonos regulares e medida da circunferência: a) polígonos regulares inscritíveis e circunscritíveis no círculo; b) construção e relação métrica entre os elementos do quadrado, do triângulo eqüilátero, hexágono e decágono regulares; c) noção sobre medida da circunferência e o número PI. 7. Áreas das principais figuras planas.	----------------------------------

Nos programas de matemática estabelecidos pelo GEEM (1965b) o conteúdo de *função* consta do 4º ano ginasial abrangendo o ensino da função linear, a função do trinômio do 2º grau e as respectivas construções de gráficos. Já no Curso Colegial, o conteúdo *função* aparece de forma mais ampla e aprofundada na 1ª Série dividindo espaço com Introdução à Geometria Espacial e na 3ª Série, de uma forma mais tímida, na Introdução ao Cálculo diferencial e integral. Não há presença de temas relacionados ao conteúdo de *função* na 2ª série do Curso Colegial.

Quanto aos *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio*, o GEEM (1962), comenta:

> O que se deseja essencialmente com Modernos Programas de Matemática (e esta seria a expressão aconselhada) é estudar os mesmos assuntos da Matemática, conhecidos como essenciais na formação do jovem ginasiano, usando porém uma linguagem moderna que seja mais atraente às novas gerações. Essa linguagem moderna envolve substancialmente o conceito de conjunto e deve atender a formação das estruturas matemáticas, que permitam, com menos esforço, melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno e dão ênfase ao caráter da Matemática atual. (GEEM, 1962, p. 89).

Abaixo na tabela, descrevemos os conteúdos e sugestões propostas para o ensino de função no ginásio.

ASSUNTOS MÍNIMOS	**SUGESTÕES**
Função; representação gráfica cartesiana de uma função.	Dar a noção fundamental de função como correspondência; introduzir sistemas de coordenadas no plano; estudar a função linear: y=ax+b.
Equações do 2º grau com uma incógnita; função, trinômio do 2º grau; equações redutíveis ao 2º grau; sistemas redutíveis ao 2º grau.	Estudar as primeiras noções sobre trinômio do 2º grau; representação gráfica e aplicação simples. Estudar as equação redutíveis do 2º grau, estudar as equações biquadradas e as irracionais simples.

3.2.1 A coleção didática de Osvaldo Sangiorgi para o Curso Ginasial durante o MMM.

A coleção *Matemática Curso Moderno* é composta por 4 volumes, um para cada série do ginásio, sendo elaborada com vistas a atender a orientação dos *Assuntos Mínimos*[36] – GEEM (1962) e as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* – GEEM (1965b).

Esta coleção vem orientar os professores frente ao ensino de matemática segundo as diretrizes do MMM, pois na época ainda não havia uma legislação oficial orientadora. Valente (2008c) ressalta a importância desta coleção frente ao ensino de matemática:

> A nova coleção de matemática moderna alterou por completo a organização do ensino de matemática para o ginásio. Sangiorgi, ao que tudo indica, traçou uma estratégia para não depender de portarias ou qualquer outro tipo de legislação educacional, de modo a referendar o novo programa nacionalmente. (VALENTE, 2008c, p. 29).

Segundo Lavorente (2008) o primeiro livro *Matemática Curso Moderno* destinado ao 1º ano ginasial "já existia para a editora desde 1963, tanto que foi indicado para receber o prêmio Jabuti. Porém foi disponibilizado oficialmente para o mercado consumidor somente em 1964, [...] que lançou o livro somente após este ganhar o prêmio" (LAVORENTE, 2008, p. 96). O segundo livro (para o 2º ano ginasial) foi editado em 1965, o terceiro (para o terceiro ano ginasial) em 1966 e o quarto volume e último da coleção (para o quarto ano ginasial) em 1967.

Villela (2007) fez levantamentos das fichas de edição e vendas dos livros didáticos ginasiais de Osvaldo Sangiorgi pela Companhia Editora Nacional (CEN). Nestes levantamentos pudemos constatar que o primeiro livro da coleção *Matemática Curso Moderno* destinado à coleção moderna saem 100.520 exemplares, totalizando de janeiro de 1964 a dezembro de 1970 um total de 1.665.195 livros vendidos com 16 edições.

---

36 Aprovado pela diretoria do ensino secundário, do ministério de Educação e Cultura, no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963, e Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática, Curso Secundário – 1º Ciclo – quarto ano ginasial, da Secretaria de Educação de São Paulo, publicadas no Diário Oficial de 19/01/1965.

O sucesso de vendas da coleção didática de Sangiorgi em tempos modernos nos leva crer que a coleção teve uma grande aceitação nas escolas ginasiais, pois segundo Villela (2008) a tiragem total de livros (1º ao 4º ano ginasial) chegou a 4.336.087 exemplares.[37].

Percebemos que a coleção moderna de Sangiorgi era uma obra inovadora e que teve um número expressivo de vendas, que de certa forma, contraria os estudos de Chervel (1990) no sentido que o historiador afirma que a tendência das obras inovadoras é não "emplacar", por romperem com as práticas didáticas e pedagógicas vigentes numa determinada época. Entretanto, Valente (2008) retrata esta coleção moderna de Sangiorgi como inovadora e "best-seller".

Valente (2008c) salienta a importância do autor Osvaldo Sangiorgi da seguinte forma:

> [...] Osvaldo Sangiorgi está presente em praticamente todos os espaços ligados ao ensino de matemática. Com trânsito fácil por entidades e órgãos oficiais da educação paulista, é responsável por organizar e sugerir programas de ensino; representa São Paulo nos eventos nacionais; é autor de livros didáticos que mais e mais se impõem às escolas secundárias através de dezenas de edições; integra bancas de concurso de professores e de alunos nos exames de admissão ao ginásio, definindo pontos e provas de matemática. (VALENTE, 2008c, p.25).

Nesta pesquisa são examinadas as seguintes edições da coleção *Matemática Curso Moderno*: a 8ª edição de 1966 volume 1, a 2ª edição de 1965 do volume 2, a 6ª edição de 1966 do volume 3 e a 8ª edição do volume 4 de 1967 da coleção moderna.[38]

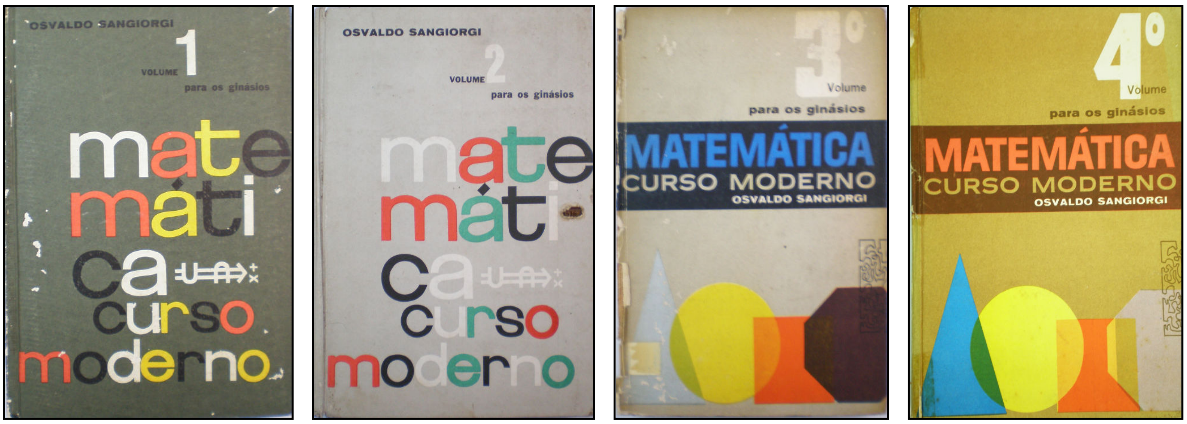


FIGURA 08-Capa da coleção didática *Matemática Curso Moderno* para o curso ginasial de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional).

37 Total de livros assinados pelo Sangiorgi e publicados pela Cia. Editora Nacional, no período de janeiro de 1974 a março de 1978.

38 Esta coleção encontra-se no acervo do Centro de Documentação do GHEMAT, localizado em Osasco – SP.

Essa nova coleção de matemática oficializa um novo programa para o ensino de matemática no Brasil. Assim escreve Sangiorgi, nas páginas iniciais do primeiro volume de sua coleção:

> Os seguintes assuntos, para serem desenvolvidos na primeira Série dos Ginásios, e distribuídos nos seguintes seis itens: 1. número e numeral [...] 2. operações (operações inversas) com os números inteiros [...] 3. divisibilidade [...] 4. números fracionários [...] 5. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais; 6. sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais, estão explicados neste Volume 1, e fazem parte dos *vinte e quatro itens* que compõem os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, com as respectivas *sugestões* para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unanimemente pelo *IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática* (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários (*Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura*), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963. (SANGIORGI, 1963).

Um aspecto considerado inovador é que a cada volume da coleção *Matemática Curso Moderno* acompanhava um Guia para professores, conforme Valente (2008c) aponta:

> [...] Assim, foram publicados os “Guia para uso dos professores”, volume 1, 2, 3 e 4. Neles, Sangiorgi expressou a sua didática da matemática moderna, buscando guiar os professores no trabalho pedagógico com os novos conteúdos. Os Guias apresentavam: “1 – Observações de ordem pedagógica; 2 – Referências bibliográficas; 3 – Respostas às questões propostas no livro”. (VALENTE, 2008c, p. 30-31).

Sobre a preocupação dos autores em apresentarem aos professores um guia para ser usado como apoio em relação à resolução de exercícios e sugestões didáticas, Bittencourt (1993) diz:

> A intervenção dos autores sobre o processo de aprendizagem e uso do livro pelos professores, evoluiu para a confecção dos “livros do professor” que eram distribuídos junto com o livro do aluno, forma de garantir inclusive que os exercícios fossem realizados corretamente e conforme o pensamento do autor. (BITTENCOURT, 1993, p. 271).

Neste estudo, a análise dos *Guias para uso dos professores*[39] será útil, pois acreditamos que neles podemos encontrar pistas sobre a concepção de aprendizagem do autor e sobre sua apropriação em relação ao Movimento.

Apresentamos a capa destes *Guias para uso dos professores* na próxima figura.

FIGURA 09 - Capa dos Guias dos Professores de Osvaldo Sangiorgi (Companhia Editora Nacional)

Nesta pesquisa são examinadas as seguintes edições dos *Guias para uso dos Professores*: a 9ª edição de 1968 volume 1, a 8ª edição de 1970 do volume 2, a 6ª edição de 1966 do volume 3 e a 7ª edição do volume 4 de 1971 que estão localizados no Centro de Documentação do GHEMAT em Osasco – SP.

O *volume 1* da coleção moderna (*destinado a 1ª série do ensino ginasial)* é composto por 4 capítulos, sendo eles:

> *Capítulo I:* Número, numeral; sucessão de números; estrutura de ordem; comparação de números; sistema de numeração; bases; sistema de numeração decimal; sistemas de numeração antigos e modernos; experimentos sobre contagens em diversas bases.
>
> *Capítulo II:* Conceito de operação; operação inversa; adição e subtração; multiplicação e divisão; potenciação e radiciação; divisibilidade; número um, números primos e números compostos; fatoração completa; raiz quadrada aproximada; operações: m.d.c. e m.m.c.
>
> *Capítulo III:* números fracionários classe de frações equivalentes; estrutura de ordem com os números fracionários; operações com os números fracionários; problemas de aplicação; números decimais; operações.
>
> *Capítulo IV:* medidas; sistemas de medidas usuais; sistema métrico (s.m.d.); sistemas de medidas não-decimais.

39 Os Guias para os professores encontram-se no acervo do Centro de documentação do GHEMAT,

Ao analisarmos o índice verificamos que não há presença do conteúdo de *função* neste 1º volume e nem elementos precisamente relacionados com o conteúdo (por exemplo: relações, correspondência e variáveis e suas aplicações). No entanto ao analisarmos o livro percebemos que Sangiorgi dá uma certa relevância à ideia de correspondência, que será muito importante para a apresentação posterior do conceito de *função*.

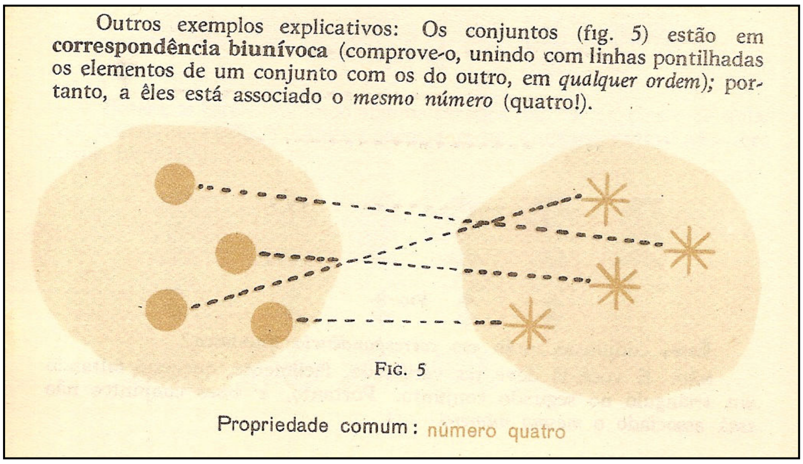

Outros exemplos explicativos: Os conjuntos (fig. 5) estão em **correspondência biunívoca** (comprove-o, unindo com linhas pontilhadas os elementos de um conjunto com os do outro, em *qualquer ordem*); portanto, a êles está associado o *mesmo número* (quatro!).

FIG. 5

Propriedade comum: número quatro

FIGURA 10 - Página 09 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 1º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1966 – 8ª edição).

A coleção analisada representa de forma clara a tendência matemática seguida pelo autor que era a da Matemática Moderna, na medida em que permeia na coleção a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações, visando uma maior ênfase no conceito e na linguagem de conteúdos da matemática.

Em relação à correspondência biunívoca citada no texto da figura 09, o autor faz as seguintes observações pedagógicas no *Guia do Professor* – volume 1 :

> A idéia de correspondência biunívoca (um a um) entre conjuntos é o tema dominante dessa parte, principalmente pelas aplicações. Assim, os conjuntos equipotentes (não se trata de usar um novo nome e sim precisar melhor os conjuntos que tem o mesmo número de elementos), com as propriedades que lhes são peculiares (reflexiva, simétrica, transitiva),preparam o aluno para a idéia de número natural [...] (SANGIORGI, 1968, p. 10-11).

O *volume 2* da coleção moderna (*destinado à 2ª série do ensino ginasial)* é composto por 4 capítulos, sendo eles:

---

localizado em Osasco – SP.

Capítulo I: Números racionais absolutos; operação com conjuntos; propriedades estruturais; reta numerada; razões e proporções; por cento; porcentagem; aplicações práticas.
Capítulo II: Números proporcionais; problemas com novas estruturas; grandezas proporcionais; regra de três; juros simples; desconto-câmbio.
Capítulo III: novos números e novas estruturas; números inteiros relativos; estrutura de Ordem; valor absoluto; operações com números inteiros relativos; propriedades estruturais; números racionais relativos; propriedades estruturais.
Capítulo IV: Sentenças e expressões; Conjunto-Universo; Conjunto-Verdade; Equações e Inequações; Relações Binárias; Sentenças abertas com duas variáveis; Sistemas de

Ao analisar este volume percebemos que os conteúdos propostos pelo autor estão de acordo com os *Assuntos Mínimos* propostos pelo GEEM (1962).

O que nos chamou a atenção neste volume foi o conteúdo do capítulo IV que ensina *variáveis*, um conceito muito importante o estudo das *funções*.

O autor aborda o conceito de *variável* para tratar o conteúdo do Conjunto-Verdade de uma sentença aberta, conforme a seguir:

> Considere, por exemplo, a seguinte sentença aberta: O dia “X” é o dia da semana cujo nome começa por “s”.
> Os possíveis valores da variável “X” são: domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado que constituem, em Português, todas as possibilidades lógicas de “X”, isto é, são todos os nomes possíveis para os dias que compõem a semana. O conjunto desses valores recebe o nome de Conjunto-Universo da variável “X”. Indicação: U
> Logo:
> U = {domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}
> Para que elementos de U a sentença proposta é verdadeira?
> Você conclui, facilmente, que a sentença é V para os dias: segunda, sexta e sábado, cujos nomes começam por s, e F para os demais. O conjunto dos valores de U para os quais a sentença é V, denomina-se Conjunto-Verdade dessa sentença. Indicação: V. Logo:
> V= {segunda, sexta, sábado}
> (SANGIORGI, 1965, p. 174-175)

Com isto o autor vai construindo o conceito de *variável* para os alunos da 2ª série do ensino ginasial.

A partir da página 182 do 2º volume desta coleção moderna, Sangiorgi utiliza o conceito de *variáveis* para a resolução de equações e problemas referentes a equações.

LEMBRETE AMIGO

Se um problema envolve sòmente:

uma variável, então **uma equação** é suficiente para resolvê-lo;

duas variáveis, então **um sistema de duas equações distintas** é suficiente para resolvê-lo.

FIGURA 11 - Página 244 do livro *Matemática Curso Moderno* do 2º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1965 – 2ª edição).

Percebemos que neste volume há uma tendência para o ensino da álgebra, isto é relatado pelo autor no Guia dos Professores – volume 2, no qual consta o seguinte comentário:

> O tratamento moderno dado à Álgebra Elementar, por intermédio da linguagem das sentenças matemáticas e do uso das propriedades estruturais das operações, constitui um dos grandes credores da atual modernização do ensino da Matemática na Europa e nos Estados Unidos da América do Norte.
> Procurando desenvolver a parte técnica dos cálculos algébricos no devido tempo (e não como se exigia nos antigos programas da 2ª série) e dando mais precisão aos conceitos, o ensino da Álgebra, propriamente dita, sofreu uma ordenação comprovadamente benéfica na formação do jovem estudante. Esse é o aspecto seguido neste Capítulo. (SANGIORGI, 1970, p. 28-29).

O *volume 3* da mesma coleção é composto também por 4 capítulos, sendo descritos abaixo:

Capítulo I: números reais - números racionais e números irracionais – operações no conjunto R – propriedades estruturais;

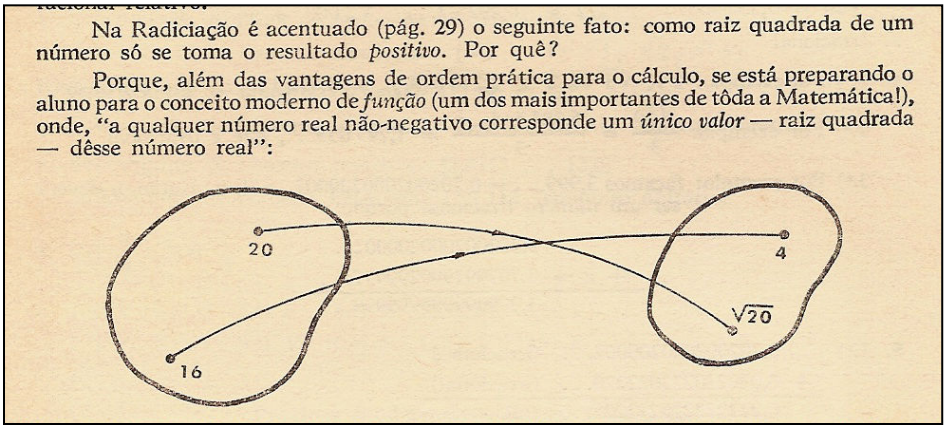
Capítulo II: Cálculo algébrico – cálculo literal em R – expressões equivalentes; reduções – técnicas de fatoração – complementação dos estudos das equações, inequações e sistemas de equações simultâneas do primeiro grau;Polinômios numa variável – tratamento elementar moderno – operações – propriedades estruturais;

Capítulo III: Introdução à Geometria Dedutiva = elementos fundamentais da reta, plano, semi-reta, segmento, semi-plano, ângulo – congruência .

Capítulo IV: Estudo dos polígonos em geral e dos triângulos e quadriláteros em particular; Estudo da circunferência – disco – círculo – arcos e cordas, propriedades – medida de arcos e ângulos;

Apêndice: Construções geométricas e transformações – transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.

Embora não encontremos o ensino de *função* e nem elementos precisamente relacionados (por exemplo: relações, correspondência e variáveis e suas aplicações), verificamos que o autor faz uma observação de ordem pedagógica relacionada com o tema.


Na Radiciação é acentuado (pág. 29) o seguinte fato: como raiz quadrada de um número só se toma o resultado *positivo*. Por quê?

Porque, além das vantagens de ordem prática para o cálculo, se está preparando o aluno para o conceito moderno de *função* (um dos mais importantes de tôda a Matemática!), onde, "a qualquer número real não-negativo corresponde um *único valor* — raiz quadrada — dêsse número real":

FIGURA 12- Página 05 dos Guias dos Professores - 3º volume
(Companhia Editora Nacional - de 1966 – 6ª edição).

O último volume desta coleção (volume 4) destinado aos alunos do 4º ano ginasial é composto por 3 capítulos, onde há especificamente um capítulo inteiro destinado ao conteúdo de *função*, conforme os conteúdos especificados abaixo:

Capítulo I: Números reais - prática com números irracionais - radicais: potências com expoente racional relativo – operações e propriedades; Equações do segundo grau – generalidades – resolução – relações entre os coeficientes e as raízes; equações biquadradas e equações irracionais; sistemas simples do segundo grau – problemas

Capítulo II: Funções – domínio e conjunto imagem; função linear e sua representação gráfica cartesiana – resolução gráfica de sistemas de equações; função trinômio do segundo grau e sua representação gráfica cartesiana; inequações do segundo grau;

Capítulo III: Semelhança – razão e proporcionalidade de segmentos – Teorema de Tales – semelhança de triângulos – semelhança de polígonos; razões trigonométricas; Relações métricas – num triângulo retângulo – Teorema de Pitágoras; num triângulo qualquer – lei dos senos e lei dos co-senos; relações métricas num círculo; Polígonos regulares e medida da circunferência – polígonos regulares inscritíveis e circunscritíveis numa circunferência; construção e relações métricas entre os elementos do quadrado, do triângulo eqüilátero, do hexágono e decágono regulares; noções sobre a medida da circunferência – cálculo de π.

Apêndice: Números complexos: Áreas de regiões planas; Mapas topológicos.

Estaremos analisando este 4º volume juntamente o *Guia para os professores*, para que assim possamos identificar quais eram as formas pedagógicas que Sangiorgi propunha para o ensino de *função*, e a relacionarmos com o ideário do MMM.

CAPA DO LIVRO *MATEMÁTICA CURSO MODERNO* DE OSVALDO SANGIORGI

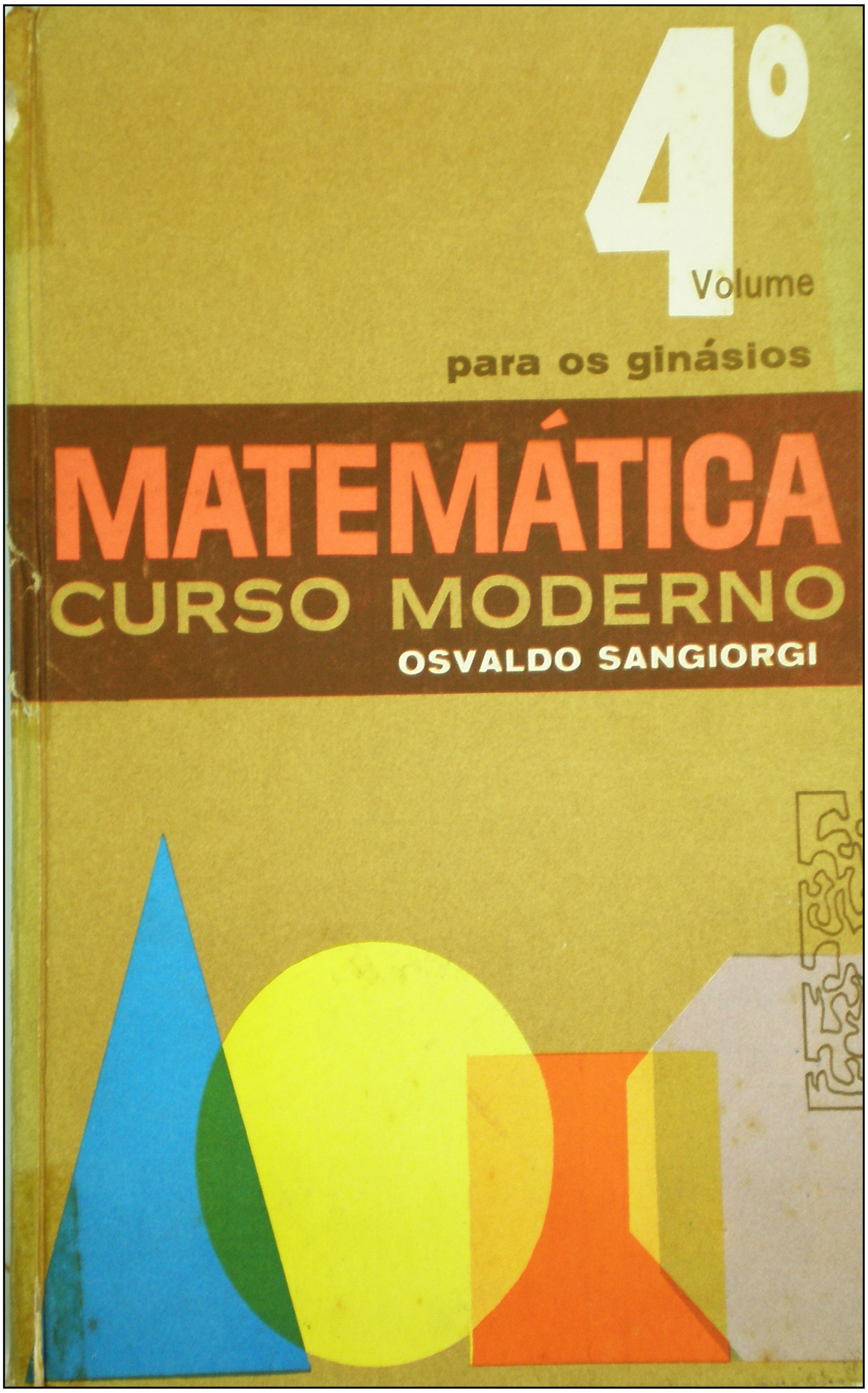


FIGURA 13 - Capa do livro *Matemátiica Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição.)

Ao abrirmos este 4º volume já tivemos uma surpresa, Sangiorgi utiliza o diagrama de flechas logo na contra-capa do livro, utilizando-os até mesmo antes de iniciar a abordagem dos conteúdos presentes no livro.

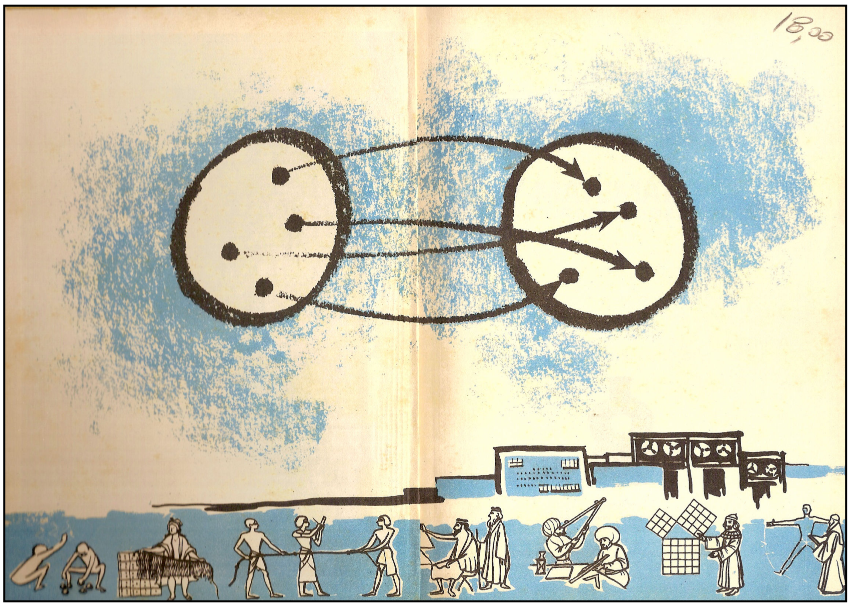


FIGURA 14 – Contra-capa do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

A importância do estudo de *funções* na 4ª série pode ser percebida pelo seguinte trecho extraído do prefácio do livro:

> Neste livro o conceito moderno de função é o dominante, participando ativamente da Álgebra e da Geometria. As equações do segundo grau, bem como os problemas que envolvem, terão um tratamento atualizado, segundo a linha já empregada no estudo das equações em outras séries. (SANGIORGI, prefácio, 1967).

Sabendo que os autores são “agentes” de uma cultura com representação social, educacional e didática e que eles expressam suas representações em suas obras didáticas e certamente suas apropriações, olhamos para a figura 14 e percebemos que “é necessário também prestar atenção àquilo que eles silenciam, pois se o livro didático é um espelho, pode ser também uma tela”.(CHOPPIN, 2004, p. 557).

Notamos que logo abaixo do diagrama de flechas Sangiorgi faz menção ao desenvolvimento da Matemática. Acima desta linha do tempo nos parece que o desenhista coloca desenhos que representam tecnologias. Sabemos que as décadas de 1960 e 1970 foram um marco importante para o crescimento do Brasil, inclusive tecnológico. Tudo nos leva a crer que estas figuras caracterizaram uma concepção do autor ligando o MMM com as novas tecnologias, com a modernidade.

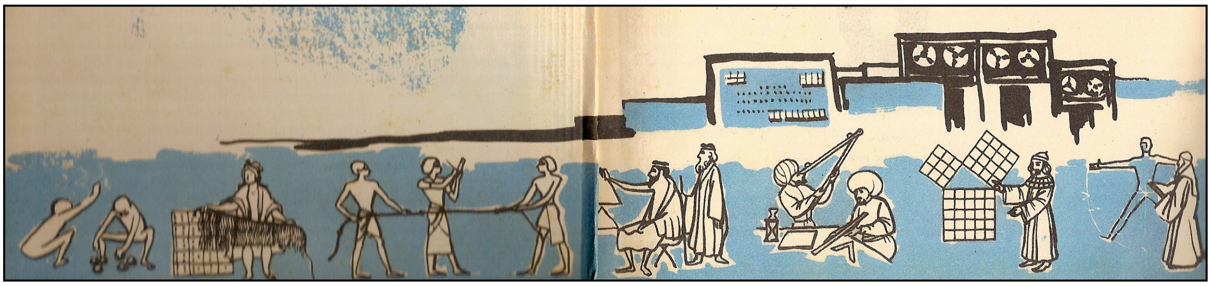


FIGURA 15 – Contra-capa do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Sangiorgi escreve no prefácio:

> Ao final deste volume, você ficará de posse dos assuntos de Matemática relativos aos quatro anos de estudos do Ginásio. E não se esqueça**: você estará incluído no primeiro grupo de jovens brasileiros que completa seu curso ginasial conhecendo as belas estruturas da Matemática Moderna**, a exemplo do que já vem ocorrendo nos grandes países civilizados de nossa época. [...] Está, pois, encerrada a coleção de livros didáticos para o Ginásio, destinada à sua formação matemática e humanística, de acordo com os anseios renovadores dos atuais homens de Ciência. (SANGIORGI, 1967 – **grifo nosso**).

Da citação acima, notamos claramente que o autor utiliza uma estratégia para que o aluno se encante com as estruturas da Matemática Moderna, e completa dizendo que a sua coleção didática para o Ginásio está "de acordo com os anseios renovadores dos atuais homens de Ciência", ou seja, está preparando o aluno para enfrentar os desafios da sociedade moderna.

No 4º volume do Guia para o Professor, Sangiorgi escreve:

> É com satisfação que, depois de três anos de atividades ininterruptas desenvolvidas por grupos de professores universitários e secundários, podemos registrar o êxito da reformulação do ensino da Matemática na escola média brasileira. [...] Não basta a criança adquirir rudimentos de leitura, de escrita e de cálculo, como coisas sem ligação; é essencial que, por intermédio do cálculo (como

> técnica) e desenho (como fonte emuladora de seu espírito criador), ela possa, por meio das estruturas comuns, estar apta a compreender o mundo em que está vivendo. (SANGIORGI, 1971,p.01)

Nesta citação fica clara a preocupação que o autor tem com a aprendizagem do aluno e com a intenção de prepará-lo para enfrentar os desafios da sociedade moderna.

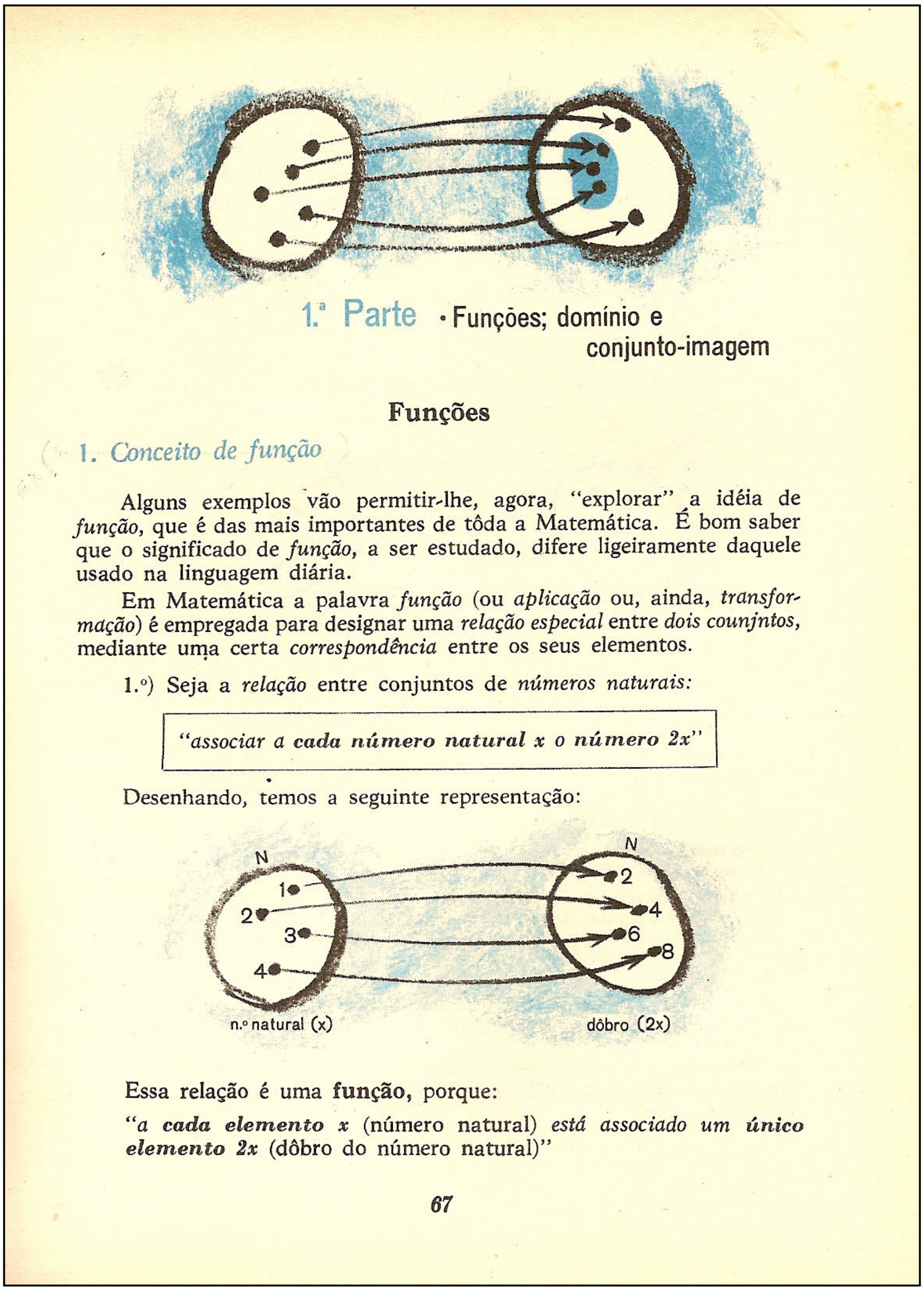
No capítulo 3, Sangiorgi dividiu o conteúdo de funções em 4 partes, sendo elas:

> 1ª Parte: Funções; domínio e conjunto-imagem;
> 2ª Parte: Sistemas de coordenadas cartesianas; gráficos das funções;
> 3ª Parte: Funções lineares, iniciação à Geometria Analítica;
> 4ª Parte: Funções trinômio do segundo grau: gráfico;
> Estudo algébrico do trinômio: inequações do segundo grau.

Neste 4º volume o conteúdo de *função* encontra-se nas páginas intermediárias do livro. Há uma ampliação na abordagem com ênfase na linguagem dos conjuntos. Sangiorgi começa a desenvolver o tema *funções* através das *relações*, iniciando com a apresentação de alguns exemplos, dando a definição de *relação*, utilizando diagramas de flechas, mostrando o "conjunto de partida", e o "conjunto de chegada", justamente quando se definem domínio e imagem da relação. Então, seguem-se posteriormente os exercícios resolvidos e propostos.

A seguir, analisamos cada uma das partes compostas do capítulo 3 deste volume, tentando verificar como o autor abordou o ensino de *funções* nesta coleção didática em Tempos Modernos.

1ª PARTE: Funções: domínio e conjunto-imagem



1.ª Parte • Funções; domínio e conjunto-imagem

Funções

1. *Conceito de função*

Alguns exemplos vão permitir-lhe, agora, "explorar" a idéia de *função*, que é das mais importantes de tôda a Matemática. É bom saber que o significado de *função*, a ser estudado, difere ligeiramente daquele usado na linguagem diária.

Em Matemática a palavra *função* (ou *aplicação* ou, ainda, *transformação*) é empregada para designar uma *relação especial* entre *dois counjntos*, mediante uma certa *correspondência* entre os seus elementos.

1.º) Seja a *relação* entre conjuntos de *números naturais:*

"*associar a* ***cada número natural x*** *o* ***número 2x***"

Desenhando, temos a seguinte representação:

Essa relação é uma **função**, porque:

"*a* ***cada elemento x*** (número natural) *está associado um* ***único elemento 2x*** (dôbro do número natural)"

67

FIGURA 16 - Página 67 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

O autor inicia o capítulo "explorando" o significado de *função* na perspectiva moderna, que enfatiza a correspondência única e sua importância para "toda matemática".

Sangiorgi apresenta uma situação de correspondência entre duas grandezas, para introduzir o conceito de *função* como um conjunto de pares ordenados, conforme os exemplos a seguir:

Exemplo 1. Associar a cada número natural x o número 2x.

"a cada elemento x (número natural) está associado um único elemento 2x (dobro do número natural)".

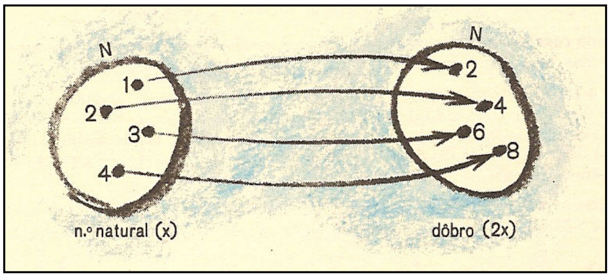


FIGURA 17 - Página 67 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Exemplo 2. Associar a cada criança o seu pai.

"a cada elemento (criança) do conjunto A está associado um único elemento (pai) do conjunto B".

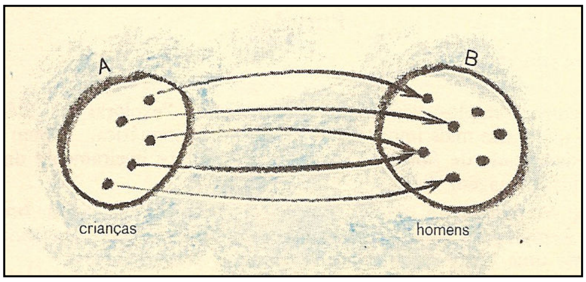


FIGURA 18 - Página 68 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Com estes dois exemplos o autor formula que os alunos já podem compreender o "traço característico" de uma *função*: "a **cada elemento** do conjunto A está associado um **único elemento** do conjunto B" (SANGIORGI, 1967, p. 68).

O autor também utiliza os seguintes contra-exemplos:

Contra-exemplo 1. A relação: "associar a um número natural x um número maior que x" entre conjuntos de números naturais, não é uma função. Por quê?

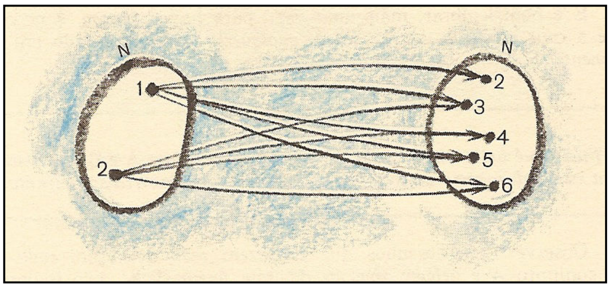


FIGURA 19 - Página 69 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Neste contra exemplo Sangiorgi destaca a importância da correspondência única: “Porque a cada elemento x (número natural) não está associado um único elemento e, sim, muitos (todos os números naturais maiores que x)”.(SANGIORGI, 1967, p.69).

Contra-exemplo 2. A relação: “associar a cada pai o seu filho” entre o conjunto A (de homens) e o conjunto B (de crianças), também não é função! (Sangiorgi, 1967, p. 69).

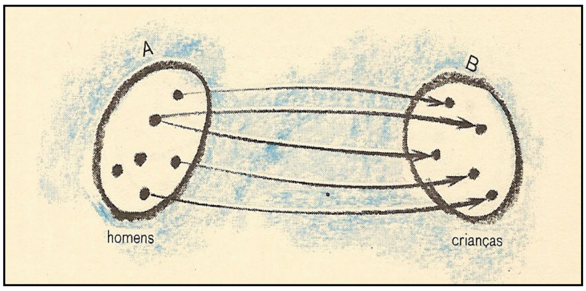
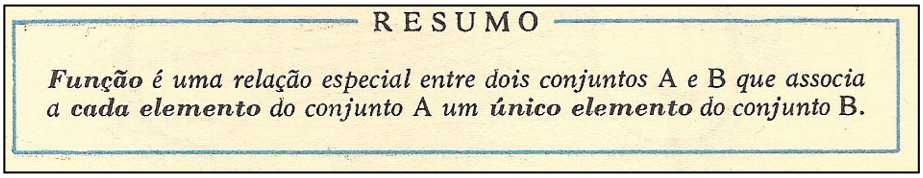


FIGURA 20 - Página 69 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

O autor resume a definição de função na página 70, conforme abaixo:


RESUMO

***Função** é uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a **cada elemento** do conjunto A um **único elemento** do conjunto B.*

FIGURA 21 – Página 70 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Em nenhum momento, as palavras *variação* ou *dependência* são mencionadas. O autor utiliza as relações gerais através de conjuntos para representar o conjunto Imagem e contra-domínio de uma *função*.

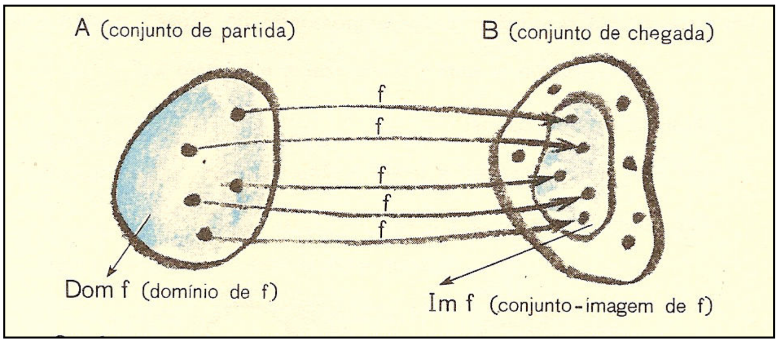


FIGURA 22 - Página 77 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume ginasial, de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Percebemos que o ensino *função* neste livro de Osvaldo Sangiorgi, constitui um capítulo à parte e ministrado num período limitado do curso ginasial, ou seja, não estabelece união de vários assuntos tratados na escola, mesmo que Sangiorgi procure algumas vezes contextualizar o conceito, como no seguinte lembrete amigo contido na página 76 deste livro:

LEMBRETE AMIGO

As *funções* estão presentes na maioria de nossas atividades.

Quando os jornais dão destaque ao "gráfico" que mostra o crescimento da produção anual de automóveis no Brasil, estão ressaltando a *relação* entre o *ano de produção* e o *número de automóveis produzidos nesse ano*.

Está, pois, presente uma *função:* a que associa a *cada ano* (elementos de um conjunto *A* de anos) um *único número de automóveis produzidos* (que são elementos de um conjunto *B* de números inteiros).

Também a *relação* entre a *temperatura* e o *volume de mercúrio* de um termômetro é uma *função,* porque:

"*a cada temperatura* está associado *um único valor para o volume de mercúrio* que o termômetro registra"

Você já pensou que confusão seria se essa relação não fôsse função? Num mesmo instante o doente poderia ter duas febres diferentes!. . .

FIGURA 23 - Página 76 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume ginasial, de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Em relação às atividades propostas aos alunos, são divididas em exercícios resolvidos que o autor chama de aplicação[40] e exercícios de fixação[41].

O autor propõe atividades que possibilitam a conversão expressão algébrica $\Rightarrow$ diagrama de flechas nos dois sentidos, ou seja, o autor pretende que o aluno compreenda tanto a expressão quanto a representação, diferentemente do 4º volume da coleção dos tempos pré-modernos, onde os enunciados apresentam a conversão somente num sentido: expressão algébrica $\Rightarrow$ gráficos.

Os exercícios enunciados apresentam os seguintes verbos de comando: associar, assinalar, caracterizar e calcular, ou seja, Sangiorgi procura diversificar mais os exercícios em relação à antiga coleção.

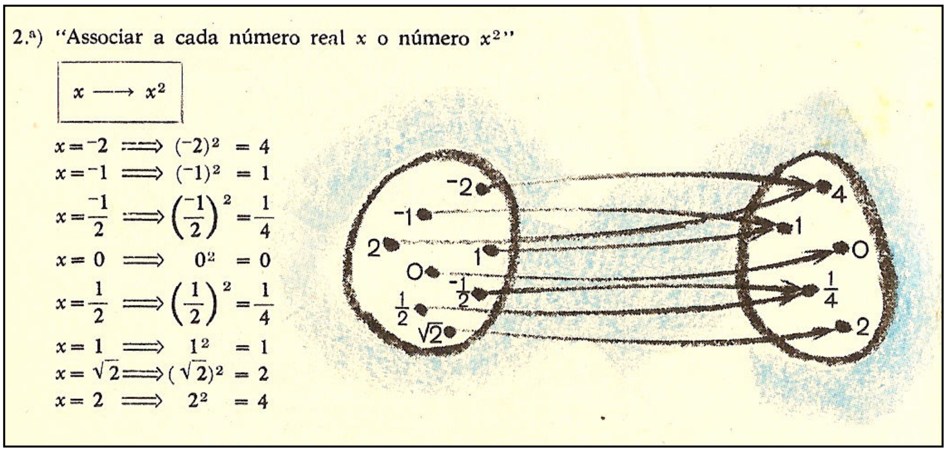


FIGURA 24 - Página 74 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Percebe-se claramente nesta análise que a *linguagem de conjuntos* é a referência para a introdução do conceito de *função*, conforme a orientação do GEEM (1962). O autor utiliza os diagramas de flechas freqüentemente para enfatizar a *correspondência*, que define a *função*.

Quanto aos Guias para os professores, Sangiorgi faz suas observações de ordem pedagógica em relação a esta 1ª parte da seguinte forma: "Dependendo da reação da classe, o professor poderá, mediante novos exemplos, caracterizar as funções (ou aplicações) sobrejetora, injetora e bijetora (ou biunívoca ou um a um)".(SANGIORGI, 1971, p. 18)

40 Ver anexo III.
41 ver anexo IV.

O autor define a *função sobrejetora*, *injetora* e *bijetora* e apresenta exemplo de cada uma por meio das relações entre elementos de dois conjuntos, permitindo que o professor possa destacar o conjunto-imagem do contra-domínio. Trazemos os exemplos que Sangiorgi propõe ao professor:

a) Função sobrejetora;

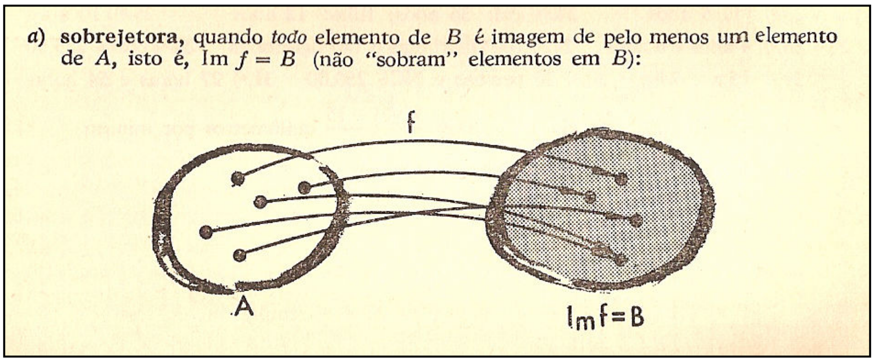

a) **sobrejetora,** quando *todo* elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, $\text{Im } f = B$ (não "sobram" elementos em B):

FIGURA 25 – Página 18 do Guia para professores para a 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1971 – 7ª edição).

b) Função injetora;

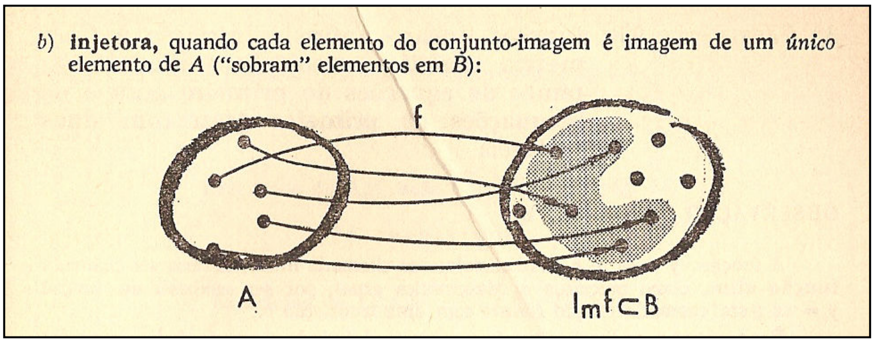

b) **injetora,** quando cada elemento do conjunto-imagem é imagem de um *único* elemento de A ("sobram" elementos em B):

FIGURA 26 – Página 18 do Guia para professores para a 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1971 – 7ª edição).

b) Função bijetora;

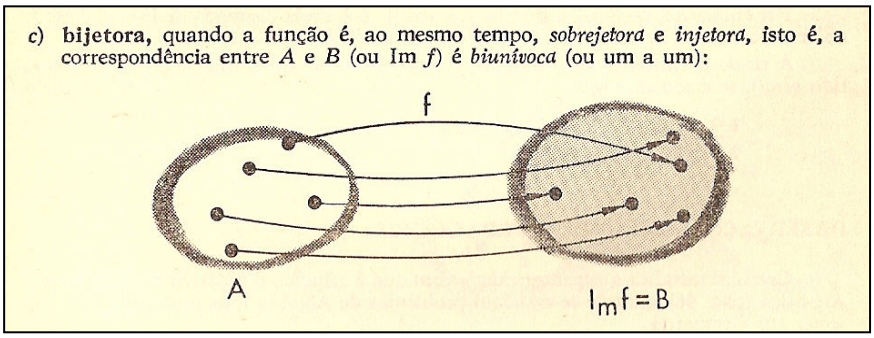
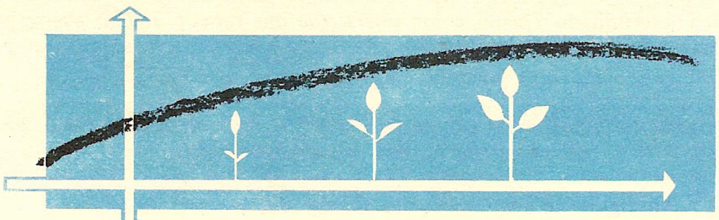

c) **bijetora,** quando a função é, ao mesmo tempo, *sobrejetora* e *injetora,* isto é, a correspondência entre A e B (ou $\text{Im } f$) é *biunívoca* (ou um a um):

FIGURA 27 – Página 19 do Guia para professores para a 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1971 – 7ª edição).

2ª PARTE: Sistemas de Coordenadas cartesianas; gráfico das funções.



2.ª Parte • Sistema de coordenadas cartesianas; gráfico das funções

Gráfico das funções

4. *Coordenadas cartesianas no plano*

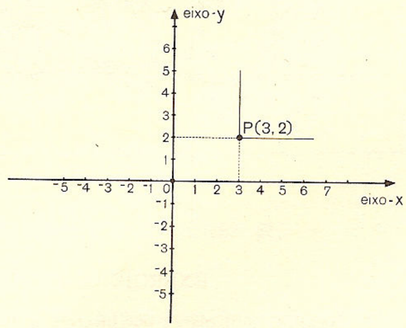
Você já aprendeu, nas outras séries, a localizar exatamente a *posição de um ponto* na *reta numerada*, mediante a sua *abscissa* (que é um número real, lembra-se?).

Agora você vai aprender a localizar a *posição* exata de um *ponto* no *plano*. Como?

Por intermédio de *duas retas numeradas* — também chamadas *eixos* — que se interceptam num ponto *O*, denominado *origem*. De preferência, consideram-se:

1) os eixos *perpendiculares* entre si;

2) a *mesma unidade de medida* nos eixos.



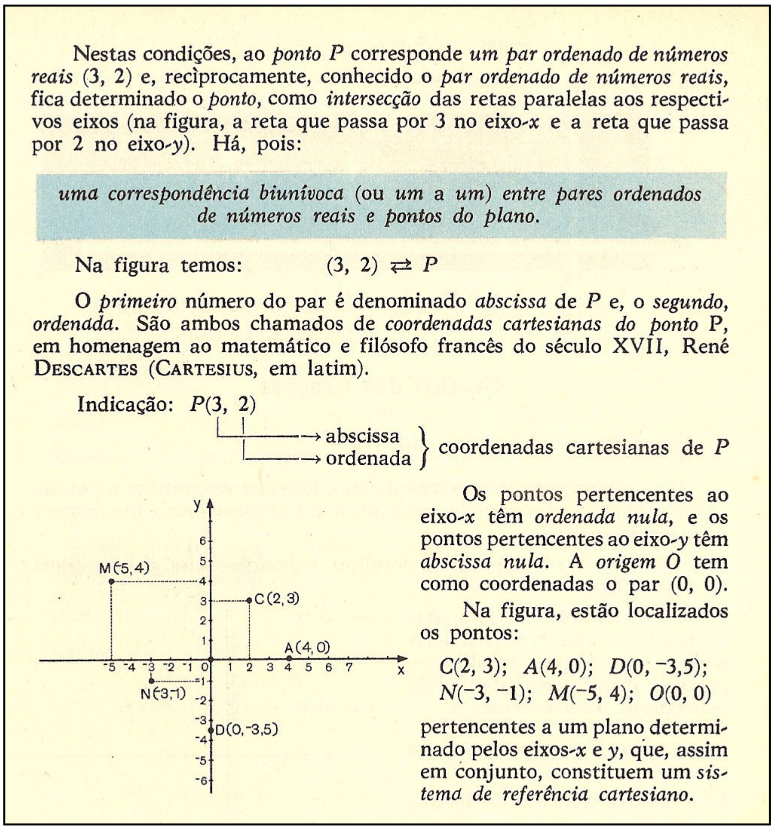
O eixo horizontal é denominado *eixo-x* e, o outro, *eixo-y*.

A localização de *um ponto* (*P* na figura) *no plano* (determinado pelos eixos) é feita por intermédio de um *par ordenado de números reais* (3 e 2 na figura). Êstes números reais são conhecidos quando se traçam por *P* as *paralelas* aos eixos-*x* e *y*, respectivamente. A paralela ao eixo-*y* intercepta o eixo-*x* num ponto que possui determinada abscissa (3, na figura), assim como a paralela ao eixo-*x* intercepta o eixo-*y*, num ponto de determinado valor (2, na figura).

85

FIGURA 28 - Página 85 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume ginasial de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

O autor utiliza nos exemplos as relações de pares ordenados de números reais para localizar os pontos das coordenadas cartesianas no plano.



Nestas condições, ao *ponto P* corresponde *um par ordenado de números reais* (3, 2) e, reciprocamente, conhecido o *par ordenado de números reais*, fica determinado o *ponto*, como *intersecção* das retas paralelas aos respectivos eixos (na figura, a reta que passa por 3 no eixo-*x* e a reta que passa por 2 no eixo-*y*). Há, pois:

uma correspondência biunívoca (ou *um a um*) *entre pares ordenados de números reais e pontos do plano.*

Na figura temos: $(3, 2) \rightleftarrows P$

O *primeiro* número do par é denominado *abscissa* de *P* e, o *segundo*, *ordenada*. São ambos chamados de *coordenadas cartesianas do ponto* P, em homenagem ao matemático e filósofo francês do século XVII, René Descartes (Cartesius, em latim).

Indicação: *P*(3, 2) → abscissa, ordenada } coordenadas cartesianas de *P*

Os pontos pertencentes ao eixo-*x* têm *ordenada nula*, e os pontos pertencentes ao eixo-*y* têm *abscissa nula*. A *origem O* tem como coordenadas o par (0, 0).

Na figura, estão localizados os pontos:

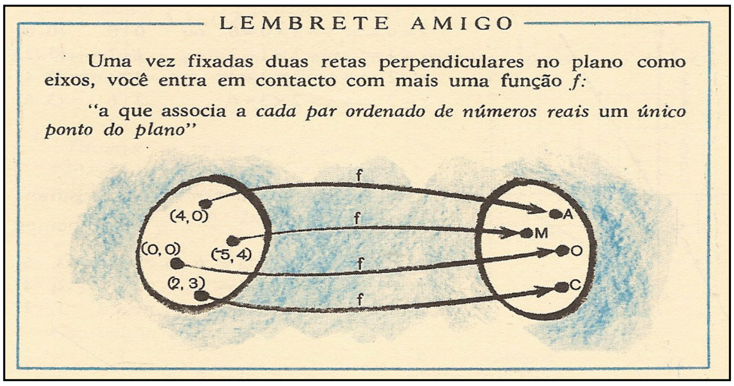
C(2, 3); *A*(4, 0); *D*(0, ⁻3,5); *N*(⁻3, ⁻1); *M*(⁻5, 4); *O*(0, 0)

pertencentes a um plano determinado pelos eixos-*x* e *y*, que, assim em conjunto, constituem um *sistema de referência cartesiano.*

FIGURA 29 - Página 86 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Nesta parte destinado à introdução do conceito de *função*, a conversão efetuada é: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$ representação gráfica.

Sangiorgi deixa uma preocupação com a resolução dos exercícios propostos quando ao enunciar os exercícios, deixa o seguinte lembrete amigo:



LEMBRETE AMIGO

Uma vez fixadas duas retas perpendiculares no plano como eixos, você entra em contacto com mais uma função *f*:

"a que associa a *cada par ordenado de números reais* um *único ponto do plano*"

FIGURA 30 - Página 87 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Na página 91 consta um exercício muito interessante, que Sangiorgi denomina de "Exercício exploratório" [42]. Neste exercício, o autor pede para que o aluno reveja o conteúdo de *função* e justifique a sentença: "O gráfico que representa, num sistema cartesiano de referência, uma função é interceptado por qualquer reta paralela ao eixo y num ÚNICO ponto". Após enunciar a sentença, Sangiorgi diz: "Lembre-se de que o eixo-x está representando o domínio da função e e o eixo y o conjunto imagem [...]" (SANGIORGI, 1967a, p. 91). Para a realização deste exercício o aluno precisa ter o conceito de função já trabalhado nas páginas anteriores.

Os exercícios enunciados apresentam os seguintes verbos de comando: localizar, marcar, representar, assinalar e rever. Mais uma vez o autor procura diversificar os enunciados dos exercícios. Diferentemente da coleção pré-moderna que os exercícios tinham somente dois verbos de comando construa e resolva.

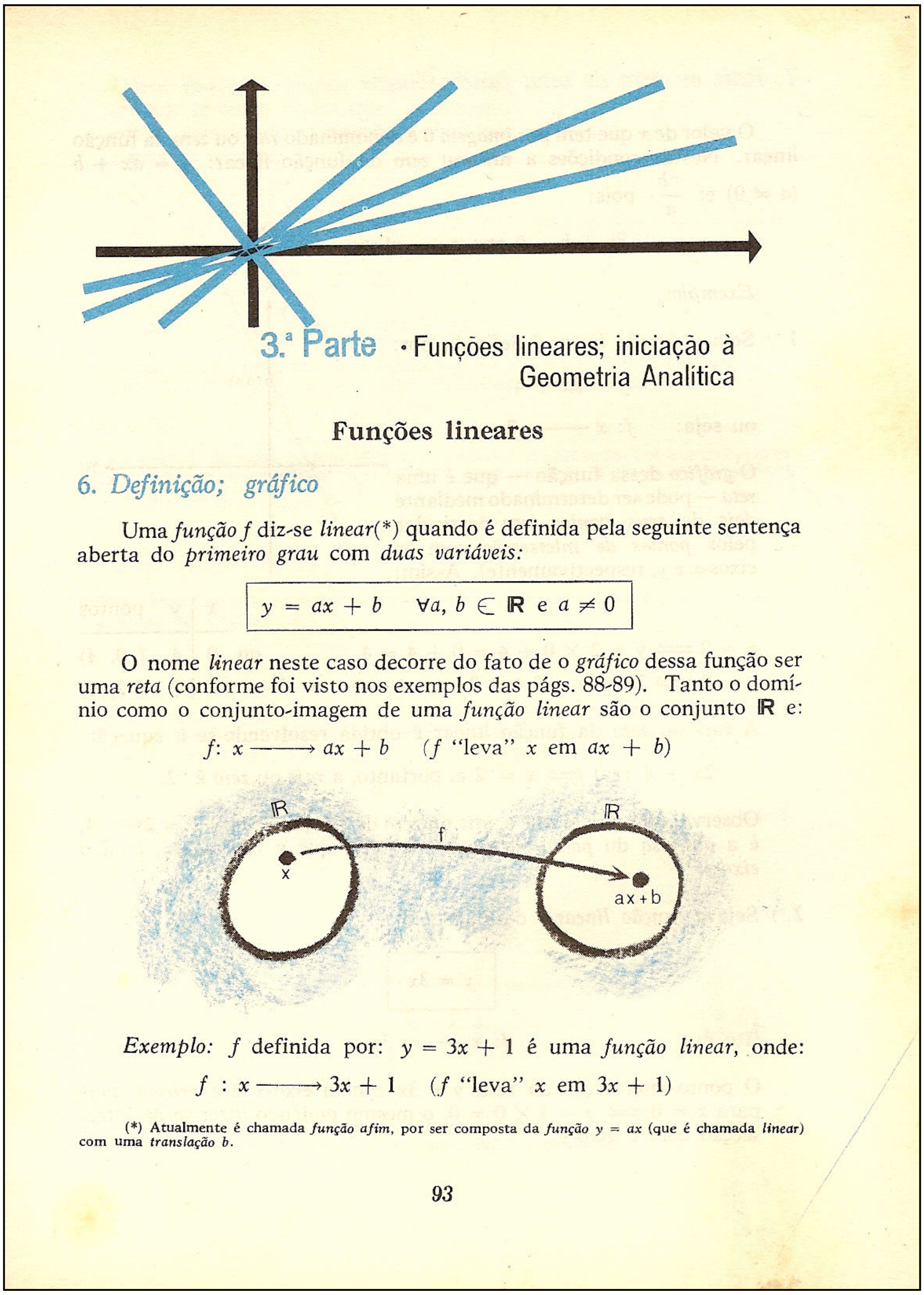
No Guia para os professores – 4ª parte, Sangiorgi (1971) faz o seguinte e único comentário para esta 2ª parte do capítulo 2: "A introdução do sistema de coordenadas cartesianas (pág. 85) – intuitivamente conhecido pelos alunos – vem facilitar a representação gráfica das funções. É óbvia a vantagem em se dizer eixo-x em vez de eixo dos x, como antigamente."(SANGIORGI, 1971, p. 19).

Este comentário traz uma informação importante frente ao ideário do MMM, a de que o aluno possa construir intuitivamente um conceito, que neste caso é o da introdução do sistema de coordenadas cartesianas, que certamente seria utilizado pelos alunos para fazer a representação gráfica. Este comentário se alinha com a ideia de trabalhar os conceitos da matemática de uma forma mais intuitiva, substituindo a mecanização que era muito presente no ensino Pré-Moderno da matemática.

---

42 Ver anexo V.

3ª PARTE: Funções Lineares; iniciação à Geometria Analítica



3.ª Parte • Funções lineares; iniciação à Geometria Analítica

Funções lineares

6. *Definição; gráfico*

Uma *função f* diz-se *linear*(*) quando é definida pela seguinte sentença aberta do *primeiro grau* com *duas variáveis:*

$$\boxed{y = ax + b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

O nome *linear* neste caso decorre do fato de o *gráfico* dessa função ser uma *reta* (conforme foi visto nos exemplos das págs. 88-89). Tanto o domínio como o conjunto-imagem de uma *função linear* são o conjunto $\mathbb{R}$ e:

$$f\colon x \longrightarrow ax + b \qquad (f \text{ “leva” } x \text{ em } ax + b)$$

Exemplo: f definida por: $y = 3x + 1$ é uma *função linear*, onde:

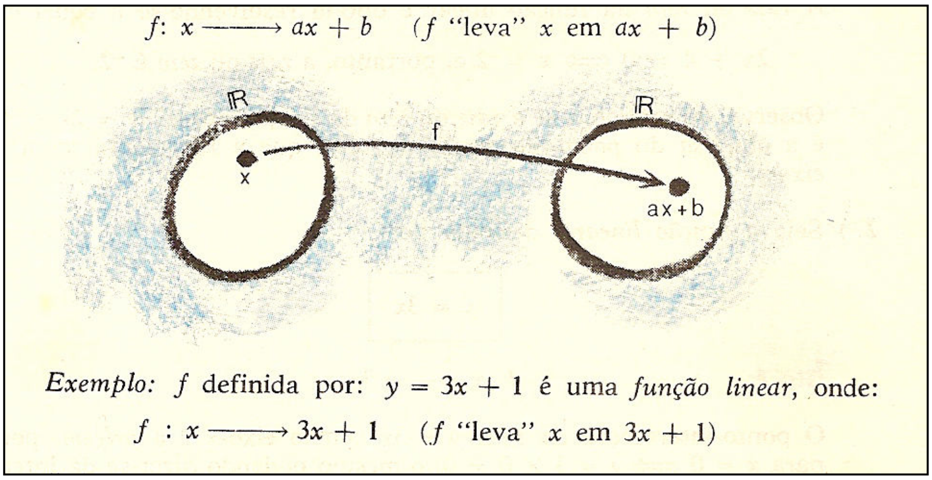
$$f : x \longrightarrow 3x + 1 \qquad (f \text{ “leva” } x \text{ em } 3x + 1)$$

(*) Atualmente é chamada *função afim*, por ser composta da *função* $y = ax$ (que é chamada *linear*) com uma *translação b*.

93

FIGURA 31 - Página 93 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Como todo o conteúdo de função do livro, Sangiorgi apresenta exemplos usando diagrama de flechas para explicar função linear.


$f: x \longrightarrow ax + b$ (f "leva" x em $ax + b$)

Exemplo: f definida por: $y = 3x + 1$ é uma *função linear*, onde:

$f : x \longrightarrow 3x + 1$ (f "leva" x em $3x + 1$)

FIGURA 32 - Página 93 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Nesta 3ª parte predomina a conversão somente no sentido: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$ representação gráfica, sendo que nos exemplos propostos não há qualquer tipo de contextualização e aparecem os verbos de comando usados são: resolva, construa e determine.

O autor mistura *função* com *equações*, inequações com abordagem gráfica, contendo até um modelo de uma prova mensal [43].

No *Guia para o uso do professor*, Sangiorgi comenta que a *função afim* define-se pela expressão do tipo $f(x) = ax + b$, mas no livro é chamada de função linear devido "associar a palavra linear à reta". (SANGIORGI, 1971, p.19). Sabemos que toda a função afim que passe pela origem diz-se função linear.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:

A função: $y = ax + b$, tradicionalmente chamada *linear*, deveria ser chamada **função afim**, como preceitua a Matemática atual, por ser *composta* da função $y = ax$ (esta chamada função *linear*) com uma *translação* b.

Por enquanto, no livro, a função $y = ax + b$ é ainda chamada de *linear*, porém no sentido *restrito* de se associar a palavra linear à *reta*.

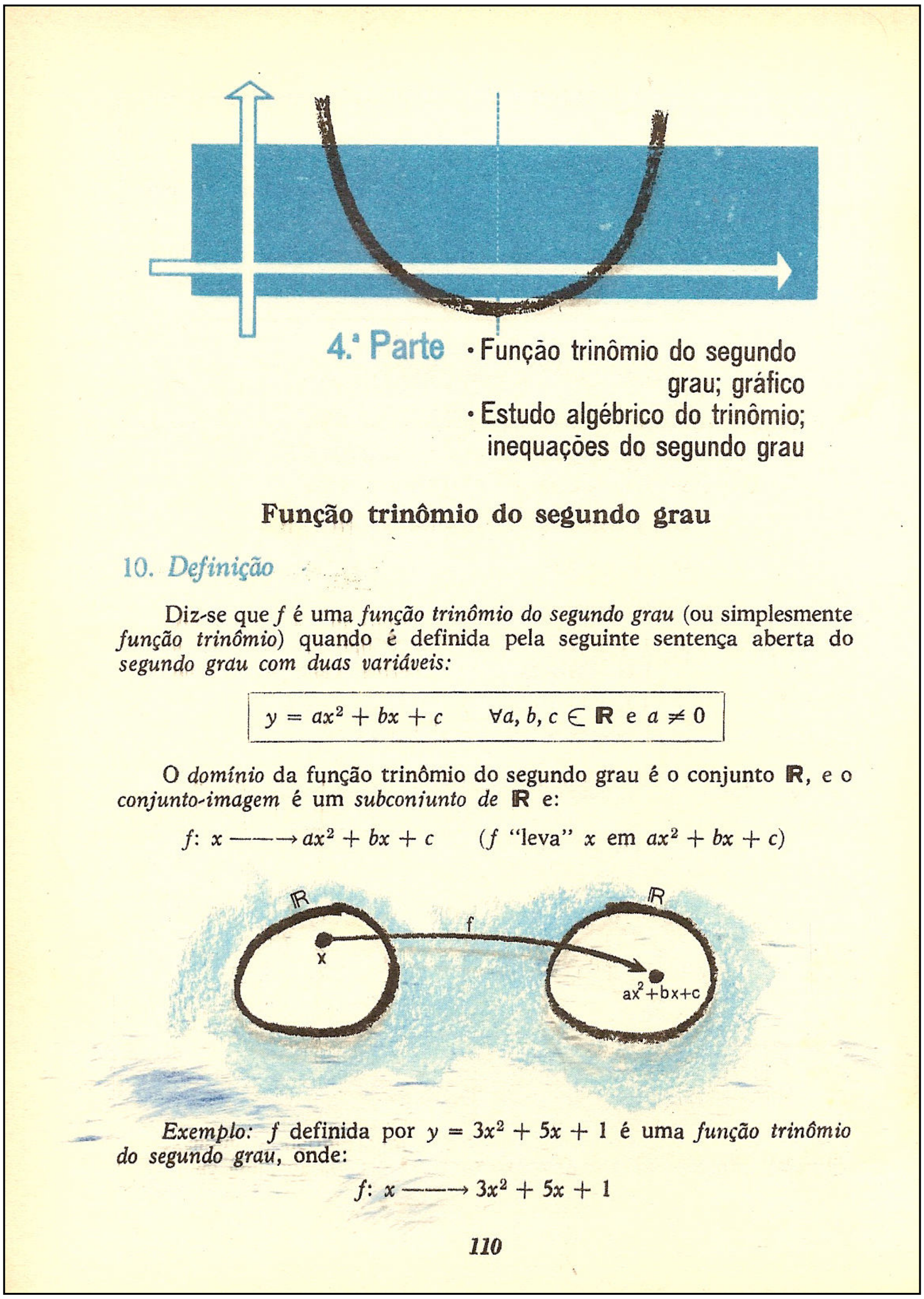
A título de informação a função: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se *linear* (agora no sentido *geral*), se e sòmente se:

1.º) $f(x_0 + x_1) = f(x_0) + f(x_1)$
2.º) $f(k \cdot x_0) = k \cdot f(x_0)$

FIGURA 33 - Página 19 do Guia para os professores - 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1971 – 7ª edição).

43 Ver anexo VI.

4ª PARTE: Funções trinômio do segundo grau; gráfico e estudo algébrico do trinômio; inequações do segundo grau.



4.ª Parte

- Função trinômio do segundo grau; gráfico
- Estudo algébrico do trinômio; inequações do segundo grau

Função trinômio do segundo grau

10. *Definição*

Diz-se que f é uma *função trinômio do segundo grau* (ou simplesmente *função trinômio*) quando é definida pela seguinte sentença aberta do *segundo grau com duas variáveis:*

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0}$$

O *domínio* da função trinômio do segundo grau é o conjunto $\mathbb{R}$, e o *conjunto-imagem* é um *subconjunto de* $\mathbb{R}$ e:

$$f\colon x \longrightarrow ax^2 + bx + c \qquad (f \text{ “leva” } x \text{ em } ax^2 + bx + c)$$

Exemplo: f definida por $y = 3x^2 + 5x + 1$ é uma *função trinômio do segundo grau*, onde:

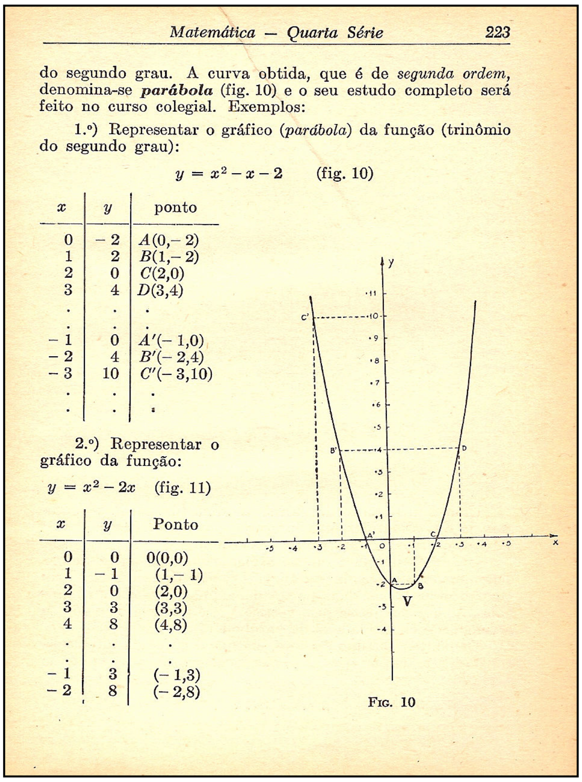
$$f\colon x \longrightarrow 3x^2 + 5x + 1$$

110

FIGURA 34 - Página 110 do livro *Matemática Curso Moderno* do 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Nesta 4ª parte o autor após definir a *função* trinômio do segundo grau, leva o aluno a atribuir valores para a variável x, depois construir tabela e por fim construir o gráfico, predominando a conversão: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$gráfico utilizando quase os mesmos modelos de gráficos e resolução que foram utilizados na versão da década de 1950 (versão pré-moderna) já analisada anteriormente.

Versão pré-moderna



Matemática — Quarta Série 223

do segundo grau. A curva obtida, que é de *segunda ordem*, denomina-se ***parábola*** (fig. 10) e o seu estudo completo será feito no curso colegial. Exemplos:

1.º) Representar o gráfico (*parábola*) da função (trinômio do segundo grau):

$y = x^2 - x - 2$ (fig. 10)

x	y	ponto
0	− 2	$A(0,-2)$
1	2	$B(1,-2)$
2	0	$C(2,0)$
3	4	$D(3,4)$
.	.	.
.	.	.
− 1	0	$A'(-1,0)$
− 2	4	$B'(-2,4)$
− 3	10	$C'(-3,10)$
.	.	.
.	.	.

2.º) Representar o gráfico da função:

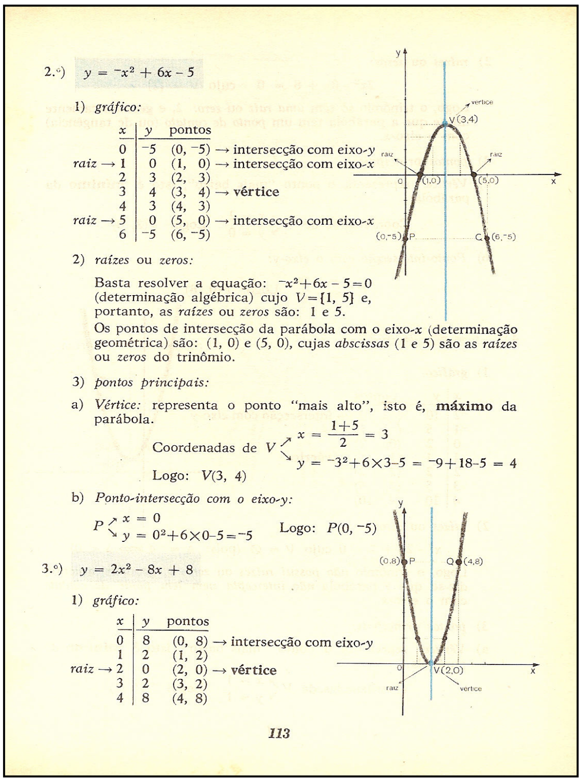
$y = x^2 - 2x$ (fig. 11)

x	y	Ponto
0	0	0(0,0)
1	− 1	(1,− 1)
2	0	(2,0)
3	3	(3,3)
4	8	(4,8)
.	.	.
.	.	.
− 1	3	(− 1,3)
− 2	8	(− 2,8)

FIG. 10

FIGURA 35 - Página 226 do livro *Matemática Curso ginasial* – 4º volume para os ginasios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1959 – 32ª edição).

Versão moderna



2.º) $y = {}^-x^2 + 6x - 5$

1) *gráfico:*

	x	y	pontos
	0	−5	(0, −5) → intersecção com eixo-*y*
raiz →	1	0	(1, 0) → intersecção com eixo-*x*
	2	3	(2, 3)
	3	4	(3, 4) → **vértice**
	4	3	(4, 3)
raiz →	5	0	(5, 0) → intersecção com eixo-*x*
	6	−5	(6, −5)

2) *raízes* ou *zeros:*

Basta resolver a equação: ${}^-x^2+6x-5=0$ (determinação algébrica) cujo $V=\{1, 5\}$ e, portanto, as *raízes* ou *zeros* são: 1 e 5.

Os pontos de intersecção da parábola com o eixo-*x* (determinação geométrica) são: (1, 0) e (5, 0), cujas *abscissas* (1 e 5) são as *raízes* ou *zeros* do trinômio.

3) *pontos principais:*

a) *Vértice:* representa o ponto "mais alto", isto é, **máximo** da parábola.

Coordenadas de V ↗ $x = \frac{1+5}{2} = 3$ ↘ $y = {}^-3^2+6\times3-5 = {}^-9+18-5 = 4$

Logo: $V(3, 4)$

b) *Ponto-intersecção com o eixo-y:*

P ↗ $x = 0$ ↘ $y = 0^2+6\times0-5={}^-5$ Logo: $P(0, {}^-5)$

3.º) $y = 2x^2 - 8x + 8$

1) *gráfico:*

	x	y	pontos
	0	8	(0, 8) → intersecção com eixo-*y*
	1	2	(1, 2)
raiz →	2	0	(2, 0) → **vértice**
	3	2	(3, 2)
	4	8	(4, 8)

113

FIGURA 36 - Página 113 do livro *Matemática Curso Moderno* – 4º volume para os ginásios de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

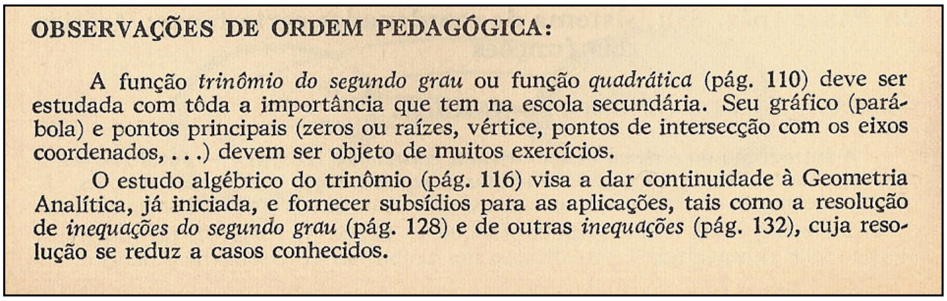
O que predomina nesta parte é a representação gráfica com exemplos propondo exercícios de *fixação*[44] e *exploratórios*[45], aparecendo os verbos de comando: estude e determine.

O termo *fixação* utilizado por Sangiorgi nos remete a ideia de fixar a aprendizagem por meio de exercícios mecânicos e repetitivos para conduzir o ensino, diferentemente do ideário do MMM que propõe a exploração e descoberta como estratégias para a compreensão das noções e conceitos matemáticos.

44 Ver anexo VII.

45 Ver anexo VIII.

Com relação ao *Guia para uso do professores* a este volume, Sangiorgi, faz as seguintes observações de ordem pedagógica:



OBSERVAÇÕES DE ORDEM PEDAGÓGICA:

A função *trinômio do segundo grau* ou função *quadrática* (pág. 110) deve ser estudada com tôda a importância que tem na escola secundária. Seu gráfico (parábola) e pontos principais (zeros ou raízes, vértice, pontos de intersecção com os eixos coordenados, . . .) devem ser objeto de muitos exercícios.

O estudo algébrico do trinômio (pág. 116) visa a dar continuidade à Geometria Analítica, já iniciada, e fornecer subsídios para as aplicações, tais como a resolução de *inequações do segundo grau* (pág. 128) e de outras *inequações* (pág. 132), cuja resolução se reduz a casos conhecidos.

FIGURA 37 - Página 20 do Guia para os professores - 4º volume para os Ginásios de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1971 – 7ª edição).

Depois destas observações, o autor destina as próximas páginas às respostas das questões referentes a 4ª parte do livro.

No próximo item analisamos a coleção didática de Alcidez Bóscolo e Benedito Castrucci para o curso ginasial durante o MMM intitulada *Matemática Curso Moderno*.

3.2.2 Síntese da Coleção Moderna de Osvaldo Sangiorgi

Sangiorgi procurou tratar conceitos importantes para a abordagem moderna de *função* anteriormente à 4ª série, como por exemplo, o conceito de *variável*, *relações* e *correspondências*, seguindo as orientações estabelecidas nos *Assuntos Mínimos* (GEEM, 1962) e a abordagem do conceito de funções na 4ª série ginasial (função linear, função trinômio do 2º grau e suas representações gráficas), conforme as *Sugestões para um Roteiro de Programa para a Cadeira de Matemática* (GEEM, 1965b).

Pudemos verificar na coleção didática moderna de Sangiorgi que o ensino de *função* é muito mais ampliado tanto na estrutura quanto na abordagem do tema em relação à coleção didática pré-moderna. Percebemos também uma certa diversificação dos enunciados dos exercícios.

Percebemos que o autor desenvolve o ensino de função utilizando a ideia de *correspondência* e *associação* entre conjuntos com diagramas de flechas, procurando abordar o conceito com menor rigor e utilizando exemplos do cotidiano do aluno para depois definir *função*.

O autor inova ao fazer lembretes durante a explicação do conteúdo *função*, expondo exemplos e cartas endereçadas ao amigo leitor (que seriam os alunos do ensino ginasial), estabelecendo assim uma nova forma pedagógica e metodológica de abordar os conteúdos matemáticos naquela época.

Considerando esta coleção inovadora, elencamos como categorias de análise das próximas coleções a estrutura de apresentação do conceito de função; como se deu a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; a representação gráfica das funções linear e quadrática; e os exercícios.

3.2.3 A coleção didática de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci para o Curso Ginasial durante o MMM.

Inicialmente iremos fazer uma apresentação dos autores para que o leitor tenha a noção da importância destes para o cenário da Educação Matemática na época.

Segundo Duarte (2007), Castrucci teve

> [...] diversos artigos publicados em periódicos científicos especializados internacionais, inúmeras participações em congressos nacionais e internacionais,foi eleito membro titular da Academia de Ciências de São Paulo e da Academia Paulista de Educação. Foi fundador da Sociedade de Matemática de São Paulo, do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) e da Sociedade Brasileira de Matemática. Pertenceu à Sociedade Brasileira de Educação Matemática, American Mathematical Society, Circolo Matemático de Palermo, entre outras sociedades. (DUARTE, 2007, p.241).

Alcides Bóscolo era licenciado em Matemática, foi professor das cadeiras de Fundamentos de Matemática e Prática de Ensino da Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras – F.F.C.L. de Santo André – SP, foi professor efetivo de Matemática do Magistério Oficial do Estado de São Paulo e membro do GEEM.

Uma das coleções didáticas publicadas de Bóscolo com Castrucci foi *Matemática curso moderno* para o ciclo ginasial, cuja publicação teve início em 1967. Esta coleção será nosso alvo de estudo neste item para que possamos verificar qual é o tratamento pedagógico e metodológico que os autores utilizam para explicar o conceito de função em sua coleção didática e se há alguma semelhança (uma certa padronização) ou não com a forma de apresentação do conteúdo *função* na coleção moderna de Sangiorgi.

Segundo Duarte (2007) os autores desta coleção se apropriaram da obra de Sangiorgi, mais especificamente, da coleção didática moderna para o ensino ginasial. Contudo não ocorreu a grande vendagem como a coleção de Sangiorgi. Segundo Duarte, “Essa apropriação do livro de Sangiorgi revela-se como outra tática de Castrucci, porém, a nosso ver, como meio de inserir-se no ambiente do ensino secundário.” (DUARTE, 2007, p.362).

Nesta pesquisa serão analisadas a 2ª edição de 1973 do livro volume 1, a 3ª edição de 1972 do volume 2, a 5ª edição de 1972 do volume 3 e a 2ª edição do volume 4 de 1971da coleção *Curso Moderno* para o ensino ginasial.[46]

FIGURA 38-Capa da coleção didática ginasial de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci: *Matemática Curso Moderno*. (Editora FTD. S.A.).

Analisando a coleção didática, encontramos no 1º volume, uma nota dos autores no prefácio em relação ao caráter intuitivo e a praticidade da Matemática:

> Embora conservando no desenvolvimento um caráter prático intuitivo, não descuramos de substituir, sempre que possível, a simples verificação experimental das propriedades por um procedimento dedutivo, muito mais fecundo, iniciando assim os jovens alunos no estudo lógico que os aguarda nas séries seguintes. (BÓSCOLO e CASTRUCCI, prefácio,1973).

Em relação à Matemática moderna, neste mesmo prefácio os autores escrevem:

> A modernização do ensino da Matemática que no Brasil, como em quase todas as partes do mundo, está empolgando todos quantos possuem uma parcela de responsabilidade na educação de jovens é sem dúvida um movimento irreversível que não pode prescindir da preciosa colaboração dos professores em exercícios. (BÓSCOLO e CASTRUCCI, prefácio, 1973).

Acreditamos que ao analisar este livro também teremos indícios de como estes autores se apropriaram do MMM em relação ao ensino de *função*. Como o primeiro volume dessa coleção, lançado em 1967, ano em que Sangiorgi estava lançando seu 4º volume da coleção Moderna, é possível que Bóscolo e Castrucci se

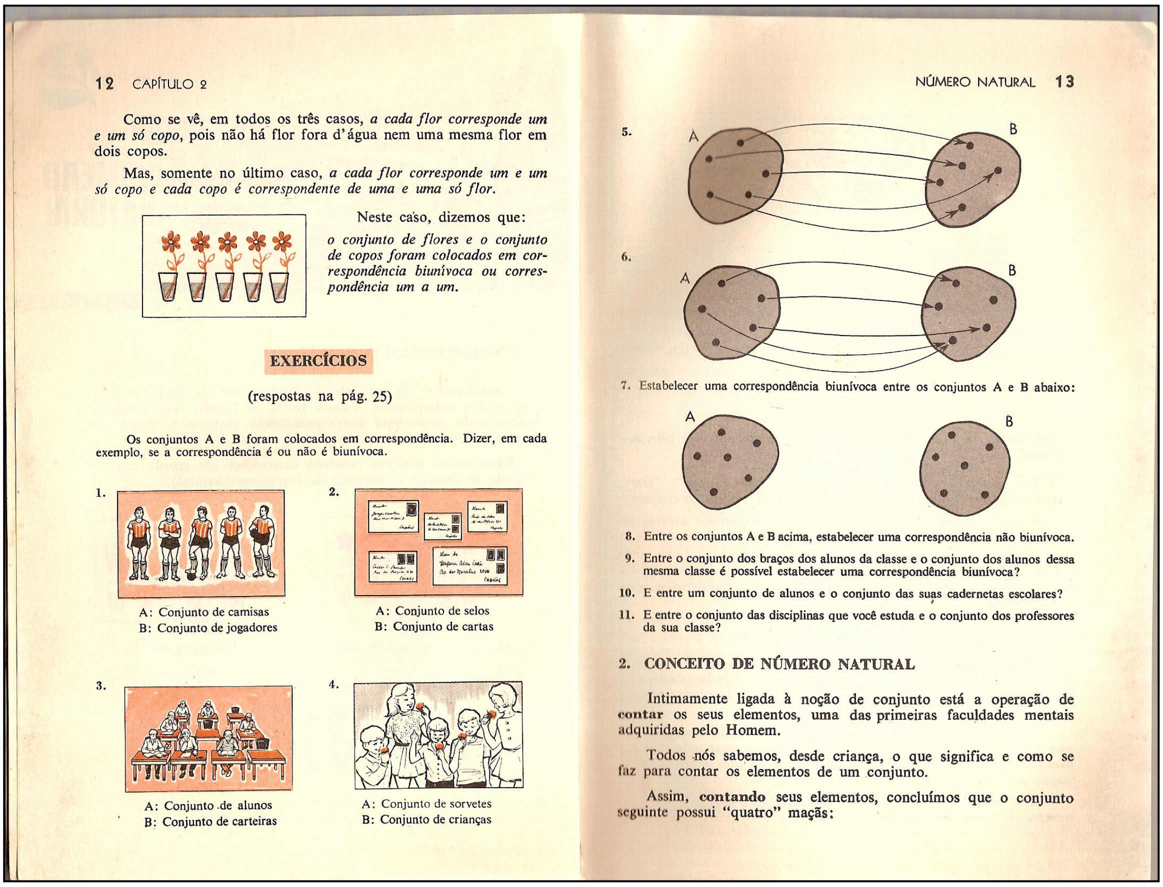
46 Esta coleção foi adquirida/ comprada num Sebo em São Paulo.

tenham sido influenciados pela coleção de Sangiorgi. Esta análise vem no sentido de verificar se há ou não um indício do fenômeno *vulgata* estabelecido por Chervel (1990).

É interessante observar que como para Sangiorgi o conceito de *função* era considerado fundamental para a matemática, para Bóscolo e Castrucci este conceito também era fundamental e seria um conteúdo que poderia permear toda a coleção. Um dos indicativos seria o fato de que toda a coleção já aparece logo em todas as capas e contra-capas a correspondência biunívoca entre dois conjuntos.

Analisando o índice e o conteúdo deste 1º volume da coleção, observamos que embora não haja o conteúdo *função*, os autores abordam conceitos importantes que serão usados posteriormente para introduzir o conceito de *função*, como por exemplo, as *relações*, *correspondências* e *variáveis*.

No Capítulo II, para explicar o conceito de número natural os autores consideram um conjunto de flores e um conjunto de copos de água, estabelecendo uma correspondência entre o conjunto de flores e o conjunto de copos.


12 CAPÍTULO 2

Como se vê, em todos os três casos, *a cada flor corresponde um e um só copo*, pois não há flor fora d'água nem uma mesma flor em dois copos.

Mas, somente no último caso, *a cada flor corresponde um e um só copo e cada copo é correspondente de uma e uma só flor.*

Neste caso, dizemos que:

o conjunto de flores e o conjunto de copos foram colocados em correspondência biunívoca ou correspondência um a um.

EXERCÍCIOS

(respostas na pág. 25)

Os conjuntos A e B foram colocados em correspondência. Dizer, em cada exemplo, se a correspondência é ou não é biunívoca.

1. A: Conjunto de camisas
B: Conjunto de jogadores

2. A: Conjunto de selos
B: Conjunto de cartas

3. A: Conjunto de alunos
B: Conjunto de carteiras

4. A: Conjunto de sorvetes
B: Conjunto de crianças

NÚMERO NATURAL 13

5. A B

6. A B

7. Estabelecer uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B abaixo:

A B

8. Entre os conjuntos A e B acima, estabelecer uma correspondência não biunívoca.
9. Entre o conjunto dos braços dos alunos da classe e o conjunto dos alunos dessa mesma classe é possível estabelecer uma correspondência biunívoca?
10. E entre um conjunto de alunos e o conjunto das suas cadernetas escolares?
11. E entre o conjunto das disciplinas que você estuda e o conjunto dos professores da sua classe?

2. CONCEITO DE NÚMERO NATURAL

Intimamente ligada à noção de conjunto está a operação de **contar** os seus elementos, uma das primeiras faculdades mentais adquiridas pelo Homem.

Todos nós sabemos, desde criança, o que significa e como se faz para contar os elementos de um conjunto.

Assim, **contando** seus elementos, concluímos que o conjunto seguinte possui "quatro" maçãs:

Figura 39 – Página 12-13 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 1ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1973 – 2ª edição)

Os autores abordam o conceito de número natural através da *correspondência biunívoca*, como a seguinte descrição: “Número natural, que é uma idéia associada a um conjunto através da operação de contar, **constitui também um atributo comum a conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca.”** (BÓSCOLO e CASTRUCCI, 1973 p. 15)

Percebemos que Bóscolo e Castrucci tiveram como orientação os *Assuntos Mínimos* pelo GEEM (1962) devido a recomendação destes *Assuntos* enfatizarem a idéia de trabalhar os números naturais com a idéia de conjuntos, destacando as propriedades estruturais das operações.

No final do capítulo II os autores colocam exercícios[47] para os alunos resolverem, vários deles são de correspondência biunívoca.

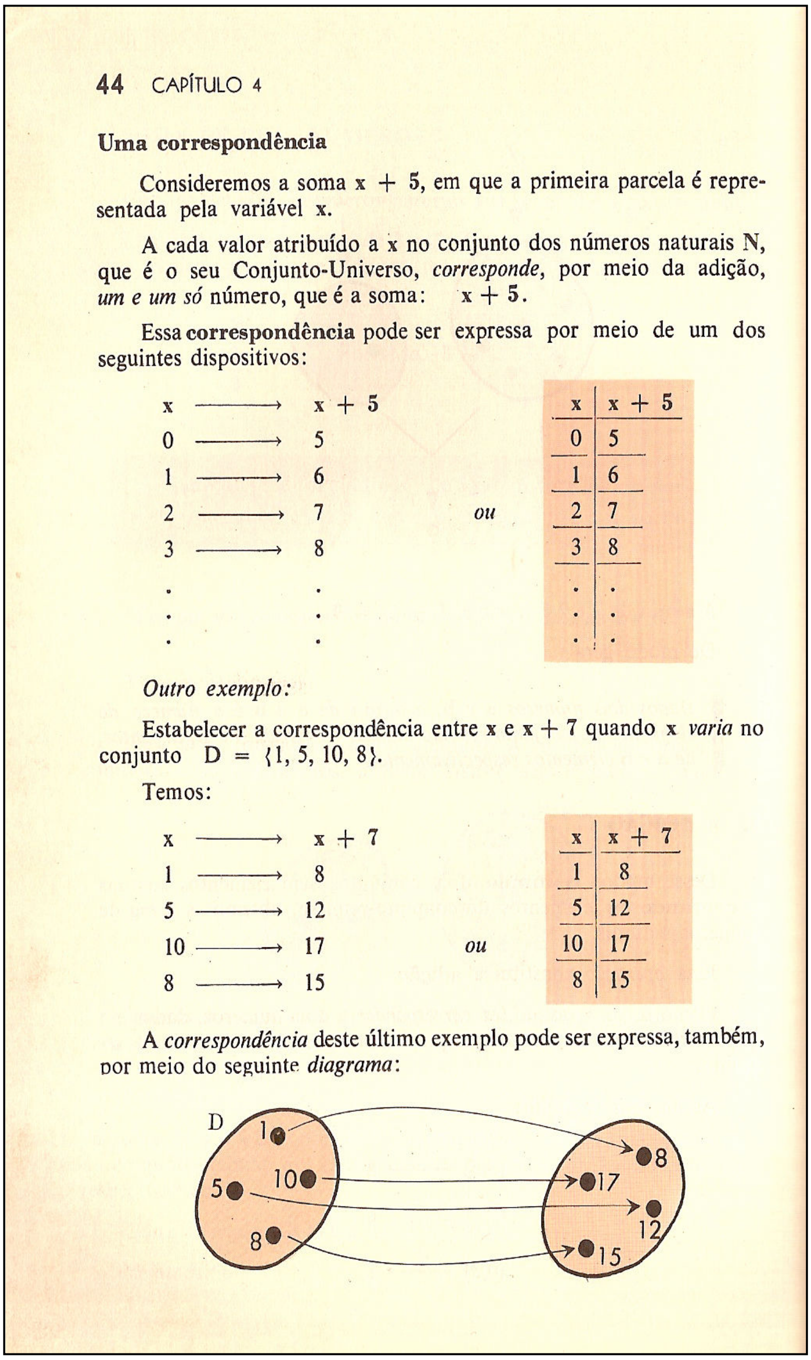
No capítulo IV, para trabalhar a soma, os autores também utilizam a *correspondência*, e a ideia de *função* está subentendida. Não há explicação sobre o conceito de *variável*.

Na lista de exercícios propostos para os alunos, os autores colocam dois exercícios que envolvem a correspondência e a variável x, conforme descritos abaixo:

> 20. Tomando como Conjunto-Universo da variável x o conjunto D= {0,2,5,9,3,7,1}, estabelecer a correspondência entre x e cada uma das seguintes somas:
> a) x+4 b) 10+x c) 8+x
> d) x+1 e) x+x f) x+0
>
> 21. Por meio de um diagrama, exprimir a correspondência: $x \rightarrow 3+x$, quando x varia no conjunto D={10,2,5,8,1}.
> 22. Mesma questão pra a correspondência: $x \rightarrow x+0$, quando x varia no conjunto D={10,2,5,8,1}.
> (BÓSCOLO e CASTRUCCI, 1973, p. 48);

---

47 Ver o anexo IX.



44 CAPÍTULO 4

Uma correspondência

Consideremos a soma $x + 5$, em que a primeira parcela é representada pela variável x.

A cada valor atribuído a x no conjunto dos números naturais N, que é o seu Conjunto-Universo, *corresponde*, por meio da adição, *um e um só* número, que é a soma: $x + 5$.

Essa **correspondência** pode ser expressa por meio de um dos seguintes dispositivos:

$$\begin{array}{lcl} x & \longrightarrow & x+5 \\ 0 & \longrightarrow & 5 \\ 1 & \longrightarrow & 6 \\ 2 & \longrightarrow & 7 \\ 3 & \longrightarrow & 8 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

ou

x	x + 5
0	5
1	6
2	7
3	8
.	.
.	.
.	.

Outro exemplo:

Estabelecer a correspondência entre x e $x + 7$ quando x *varia* no conjunto $D = \{1, 5, 10, 8\}$.

Temos:

$$\begin{array}{lcl} x & \longrightarrow & x+7 \\ 1 & \longrightarrow & 8 \\ 5 & \longrightarrow & 12 \\ 10 & \longrightarrow & 17 \\ 8 & \longrightarrow & 15 \end{array}$$

ou

x	x + 7
1	8
5	12
10	17
8	15

A *correspondência* deste último exemplo pode ser expressa, também, por meio do seguinte *diagrama*:

Figura 40 – Página 44 do livro *Matemática Curso* Moderno para a 1ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1973 – 2ª edição)

Nos capítulos V, VI e VII os autores não utilizam a correspondência para explicar as operações de subtração, multiplicação e divisão, porém na lista de exercícios propostos aos alunos de cada capítulo a correspondência está presente em alguns dos exercícios.

Nos demais capítulos não encontramos os conteúdos de *relações*, e *correspondências*.

Os assuntos tratados neste 1º volume procuravam seguir os *Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio* estabelecidos pelo GEEM (1962) e as *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática* que fazem parte do *Programa Moderno* apresentado pelo GEEM (1965). Mas, tudo nos leva a crer que os autores fizeram suas apropriações e interpretações distintas de Osvaldo Sangiorgi ao trabalharem a adição como *função*, sem se afastarem da abordagem moderna. Um diferencial!

Dando continuidade ao volume I, os autores publicam o volume II seguindo ainda as orientações do GEEM (1965) em relação aos conteúdos a serem ensinados aos alunos da 2ª série ginasial. Os autores escrevem no prefácio do 2º volume da coleção:

> Seguimos a mesma orientação utilizada no 1º volume, desenvolvendo com simplicidade e clareza os diversos assuntos constantes de um moderno programa de Matemática para as escolas de grau médio. (BÓSCOLO e CASTRUCCI, prefácio, 1972).

Ao analisar este volume, percebemos que não há presença do conteúdo *função* e nem elementos precisamente relacionados ao conteúdo (por exemplo: relações, correspondência e variáveis e suas aplicações), não havendo também exercícios que desenvolvam relações com o tema *função*.

No volume 3 da coleção *Curso Moderno* para o ciclo ginasial os autores deixam claro o rigor dos conceitos matemáticos presente no volume:

> Seguindo a mesma orientação dos volumes anteriores, procuramos desenvolver com simplicidade os assuntos do programa, mantendo tanto quanto possível o rigor dos conceitos. (BÓSCOLO e CASTRUCCI, prefácio, 1972).

Percebemos que predomina no volume 3 desta coleção a geometria. O conceito de *função* não consta neste volume.

O último volume desta *coleção (volume 4)* destinado aos alunos do 4º ano ginasial é composto também por 27 capítulos, onde há especificamente 3 capítulos destinados ao conteúdo de *função*.

Analisaremos a seguir com mais detalhes o volume IV que compreende o ensino de *função*.

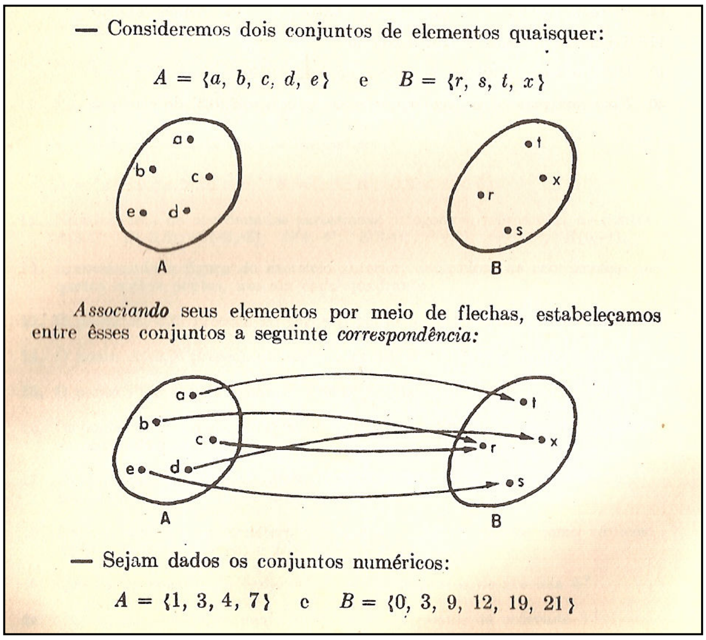
Nas páginas iniciais do volume IV os autores escrevem para o leitor:

> Concluímos com este volume a nossa coleção destinada ao ciclo ginasial. [...] Seguimos a mesma orientação que tão bem foi aceita pelos ilustres colegas que nos honraram com a adoção dos três primeiros volumes. [...] Sem abandonar o rigor necessário dos conceitos, a exposição é feita **dentro de um esquema mínimo para que o livro possa ser inteiramente desenvolvido numa quarta série**. (BÓSCOLO E CASTRUCCI, 1971, prefácio).

Pela escrita (grifo nosso) citada acima, acreditamos que os autores fazem menção que estão de acordo com a orientação do GEEM: *Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio* de 1962.

Neste 4º volume da coleção, o conceito de *função* é abordado nas páginas intermediárias (como no 4º volume da coleção moderna de Sangiorgi), especificamente em 3 capítulos (VII, VIII e IX).

No capítulo VII os autores trabalham a definição de *função*. Começam dizendo aos alunos que “A idéia de função, que é uma das mais importantes da Matemática, não nos é inteiramente estranha, pois está ligada à idéia de correspondência, já conhecida” (BÓSCOLO e CASTRUCCI, p.96, 1971). Assim, os autores desenvolvem o conceito de *funções* através das correspondências entre conjuntos, utilizando associações de seus elementos através de flechas. Veja os exemplos na próxima figura.


— Consideremos dois conjuntos de elementos quaisquer:

$A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{r, s, t, x\}$

Associando seus elementos por meio de flechas, estabeleçamos entre êsses conjuntos a seguinte *correspondência:*

— Sejam dados os conjuntos numéricos:

$A = \{1, 3, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 9, 12, 19, 21\}$

Figura 41 – Página 96 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição.)

Ao analisarmos a página 97 deste livro percebemos que os autores utilizam praticamente o mesmo exemplo de correspondência por diagramas para associar pais e filhos, que foi apresentado por Sangiorgi em sua coleção moderna.

Bóscolo e Castrucci

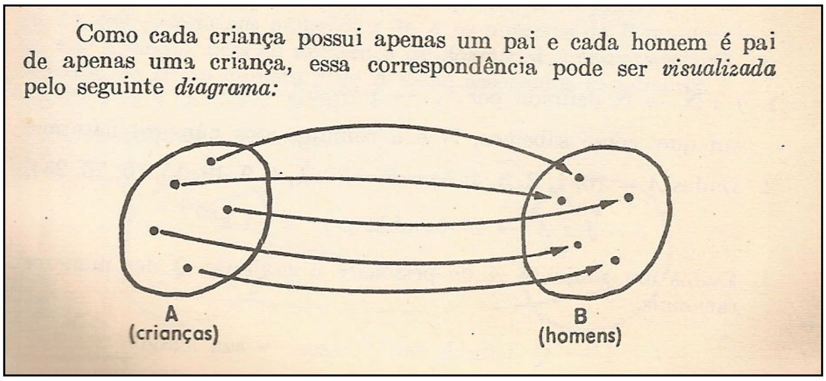


Figura 42 – Página 97 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Sangiorgi

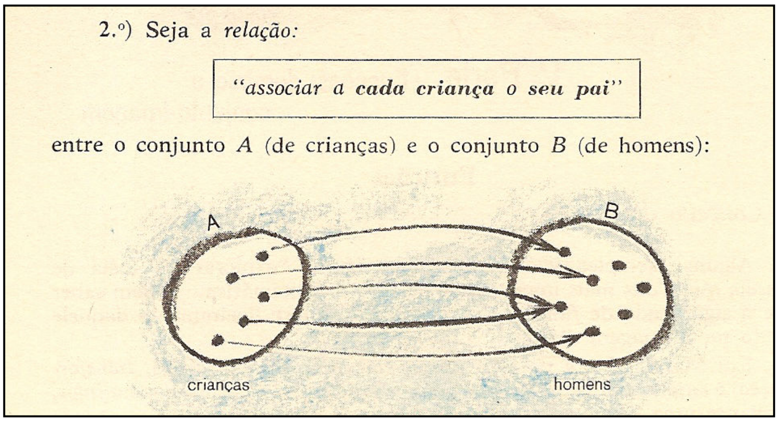


Figura 43– Página 68 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Veja abaixo a definição de *função* adotada pelos dois livros:

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO	
Osvaldo Sangiorgi	**Bóscolo e Castrucci**
É uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B.	A todo elemento do conjunto A está associado um único elemento do conjunto B.

Em nenhum momento na coleção de Bóscolo e Castrucci, as palavras *variação* ou *dependência* são mencionadas para construção do conceito de *função* com o aluno e sim as palavras *relações* e *associações*, conforme as orientações do GEEM (1962).

Os autores ao trabalharem o conceito de *função* somente utilizam números inteiros e estabelecem as relações gerais através de conjuntos para representar o conjunto Imagem e contra-domínio de uma *função*. Podemos ver nas figuras 46 e 47 que Castrucci e Bóscolo utilizam praticamente o mesmo diagrama de Sangiorgi para explicar que o conjunto imagem é sempre um subconjunto do conjunto contra-domínio.

Bóscolo e Castrucci

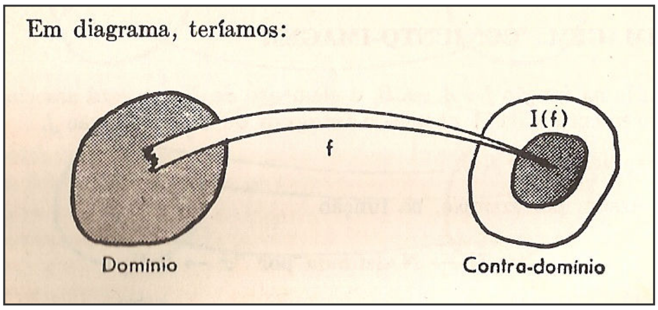


Figura 44 – Página 102 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Sangiorgi

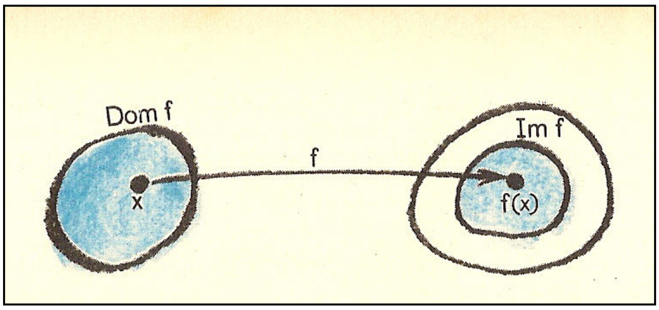


Figura 45– Página 78 do livro *Matemática- Curso Moderno para a 4ª série ginasial*, de Osvaldo Sangiorgi. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Bóscolo e Castrucci tomaram certos cuidados com os novos termos da matemática que seriam utilizados em seus livros didáticos. Para que os alunos se familiarizassem com estes termos e símbolos os autores ao aplicar o conteúdo de *funções* fazem a questão de fazer suas definições.

As funções são *definidas* dando-se:

a) o *domínio;*

b) o *contra-domínio;*

c) a *"lei"* que *associa* (a *associação*) a *todo elemento do domínio* um *único* elemento do contra-domínio.

Nas funções expressas por diagramas, a associação é dada pelas flechas.

De modo geral, as funções são designadas por f e para indicar uma função como a do segundo exemplo, escreve-se:

$$f : A \rightarrow B \text{ definida por } \text{"}x \rightarrow 3x\text{"}.$$

O símbolo $f : A \rightarrow B$ lê-se: "função definida em A com valores em B", ou "aplicação f de A em B".

No caso do terceiro exemplo, escreve-se:

$$f : A \rightarrow B \text{ definida por "filho} \rightarrow \text{pai"}.$$

Figura 46 – Página 98 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Em relação às atividades propostas aos alunos por meio de exercícios, os autores propõem atividades que possibilitam associações de diagramas e a conversão expressão algébrica $\Rightarrow$ diagrama de flechas.

Os exercícios enunciados apresentam os seguintes verbos de comando: associar, dar, representar e calcular, dizer, definir, ou seja, os autores procuram diversificar os enunciados dos exercícios. [48]

Os primeiros exercícios propostos pelos autores (página 100) são muito parecidos também com os primeiros exercícios propostos por Sangiorgi (página 72 e 73 do seu quarto volume em *tempos modernos*). Neles os autores propõem aos alunos que assinalem quais das *relações* representam *funções*. Como pode-se observar nas próximas figuras.

48 Ver o anexo X.

Sangiorgi

Bóscolo e Castrucci

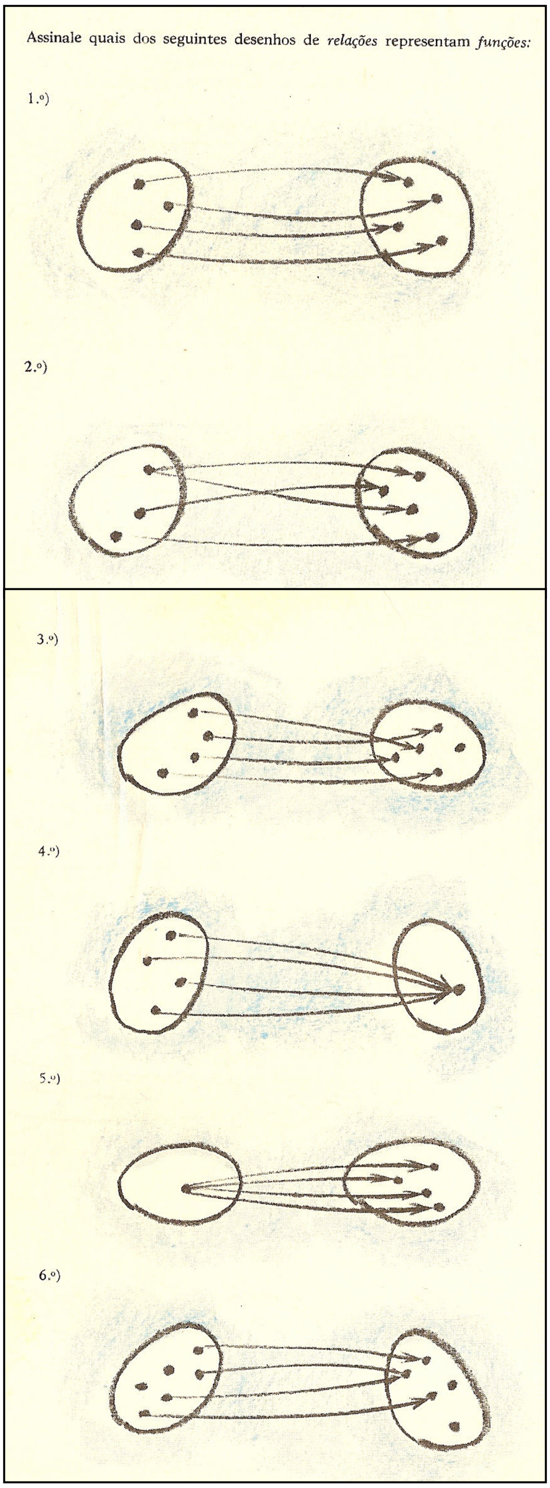


Figura 47 – Página 72 e 73 do livro *Matemática - Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional – 1959 – 32ª edição)

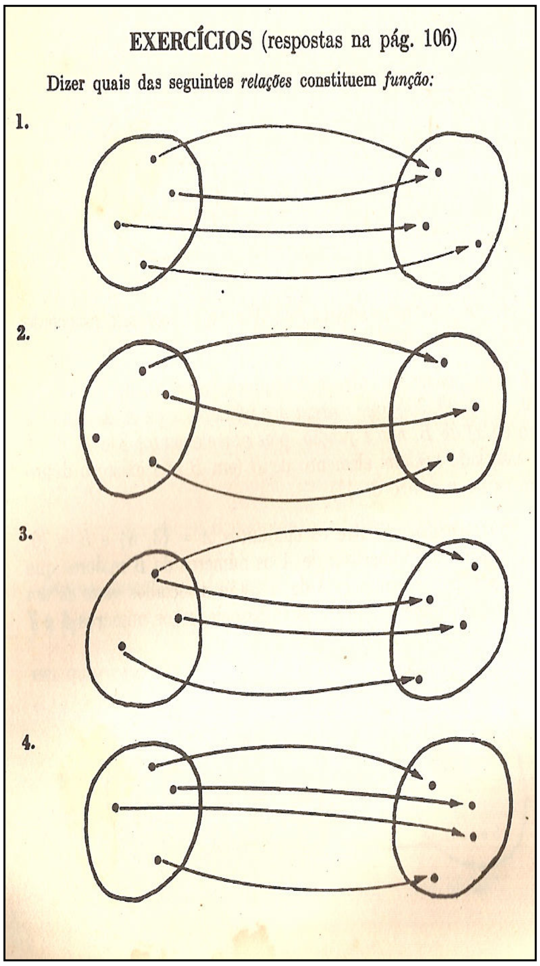


Figura 48 – Página 100 do livro *Matemática - Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci
(Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Percebemos que tanto no 4º volume da coleção didática de Sangiorgi quanto na de Castrucci e Bóscolo a *linguagem de conjuntos* é a referência para a introdução do conceito de *função*.

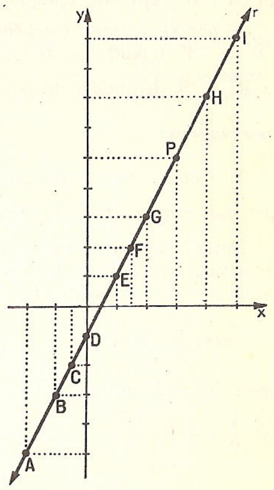
Os autores utilizam diagramas de flechas para explicar o conceito de *relação* e a *correspondência* entre conjuntos.

No capítulo VIII, os autores abordam a função binômio do primeiro grau, com definições e ênfase em gráficos do primeiro grau (*tradicionalmente chamada como função linear*) .

Neste volume os autores tratam o ensino de função com a representação: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$gráfico, através das variáveis x e y, como podemos ver na próxima figura;

Temos:

x	y	Pontos
–2	–5	$A(-2,-5)$
–1	–3	$B(-1,-3)$
–0,5	–2	$C(-0,5\ ;\ -2)$
0	–1	$D(0,-1)$
1	1	$E(1,1)$
1,5	2	$F(1,5\ ;\ 2)$
2	3	$G(2,3)$
4	7	$H(4,7)$
5	9	$I(5,9)$
.	.	



A figura constituída pela infinidade de pontos A, B, C, D, ... chama-se **gráfico** da função binômio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida pela equação $y = 2x - 1$.

FIgura 49 – Página 109 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Como recurso didático o autor apresenta exemplos de *função binômio* articulando com a física - movimento retilíneo uniforme de um móvel numa velocidade constante num determinado tempo e a passagem da escala Centígrados para Fahrenheit. Nestes dois tipos de exemplos os autores trabalham novamente somente a conversão: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$gráfico, como Sangiorgi no 4º volume da coleção didática moderna.

No capítulo IX os autores ensinam a *função trinômio do segundo grau* com ênfase nos gráficos.

Castrucci e Bóscolo apresentam um exemplo parecido de *função trinômio do segundo grau* que Sangiorgi aborda em *Tempos Modernos*, porém os primeiros autores atribuem aos valores de x números decimais para a função $y = x^2 + x - 6$, o que não ocorre no exemplo de Sangiorgi.

Temos:

x	y	Pontos
3	6	$A(3,6)$
2,5	2,75	$B(2{,}5\ ;\ 2{,}75)$
2	0	$C(2,0)$
1	–4	$D(1,-4)$
0	–6	$E(0,-6)$
–1	–6	$F(-1,-6)$
–2	–4	$G(-2,-4)$
–3	0	$H(-3,0)$
–3,5	2,75	$I(-3{,}5\ ;\ 2{,}75)$
.	.	
.	.	
.	.	

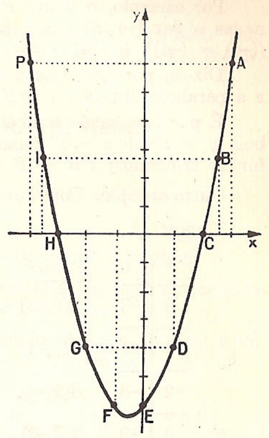


FIgura 50 – Página 123 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

Para explicar o que é parábola, o autor coloca uma nota de rodapé:

*__Parábola__ é uma curva constituída pelo conjunto dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo (*foco*) e de uma reta fixa (*diretriz*) que não se pertencem, situados nesse plano.

FIgura 51 – Página 123 do livro *Matemática Curso Moderno* para a 4ª série ginasial, de Bóscolo e Castrucci. (Editora FTD - de 1971 – 2ª edição)

De uma forma mais geral tanto a coleção de Sangiorgi, quanto a de Castrucci e Bóscolo tratam o conceito de *função* relacionando-o com a linguagem de conjuntos. Estes autores procuram novas formas de abordar o enunciado dos exercícios, e definem certas propriedades para que o aluno se familiarize com as estruturas matemáticas.

Ambas coleções contêm vários exercícios que na maioria das vezes encontram-se no final de cada capítulo.

3.2.4 Síntese da coleção didática de Alcides Bóscolo e Benedito Castrucci.

Assim como Osvaldo Sangiorgi, Bóscolo e Castrucci também procuraram abordar conceitos de variável, relações e correspondências anteriormente à 4ª série e o ensino de funções especificamente na 4ª série ginasial, procurando estar de acordo com os *Assuntos Mínimos* sugeridos pelo GEEM (1962) e com as *Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de Matemática* propostas pelo GEEM (1965b).

Percebemos que a forma pedagógica e metodológica que Bóscolo e Castrucci abordam o conteúdo de *função* em sua coleção didática é muito parecida com a de Sangiorgi em tempos modernos, pois ambas coleções ensinam *funções* destacando a os de diagramas de flechas, simbologias, linguagem de conjuntos, domínio e contra-domínio, e etc.

Partindo do fato de que as crianças vivem em um mundo de relações, os conceitos de *correspondência biunívoca* e de *relações* são apresentados a partir de das relações do dia a dia, como por exemplo, conjunto de alunos e de carteiras, conjunto de selos e de cartas, conjunto de sorvetes e de crianças, dentre outros, para depois apresentar a definição de *função* ao aluno.

Nos exercícios propostos por Bóscolo e Castrucci há diversos verbos de comando, no qual há uma clara intenção de diversificar os enunciados dos exercícios, exigindo do aluno o uso da “moderna” linguagem matemática a ser praticado nas escolas, como os diagramas para relacionar elementos, o conjunto imagem, domínio e contra-domínio, etc.

3.2.5 A coleção didática de Agrícola Bethlem para o Curso Ginasial.

Agrícola Bethlem, autor da coleção didática para o curso ginasial que analisaremos neste item era tenente-coronel, engenheiro civil e militar, bacharel em Matemática e Ciências Físicas[49]. Era professor de Matemática do Colégio Militar do Rio de Janeiro e da Escola Aeronáutica. Além do cargo de professor, Bethlem ocupou várias vezes cargos na Administração do Ensino e foi autor de múltiplos artigos especializados em revistas cientificas sobre matemática.

A coleção didática de Bethlem publicada no ano de 1969. Em todos os livros da coleção não há menção à edição, somente ao ano de publicação. [50]

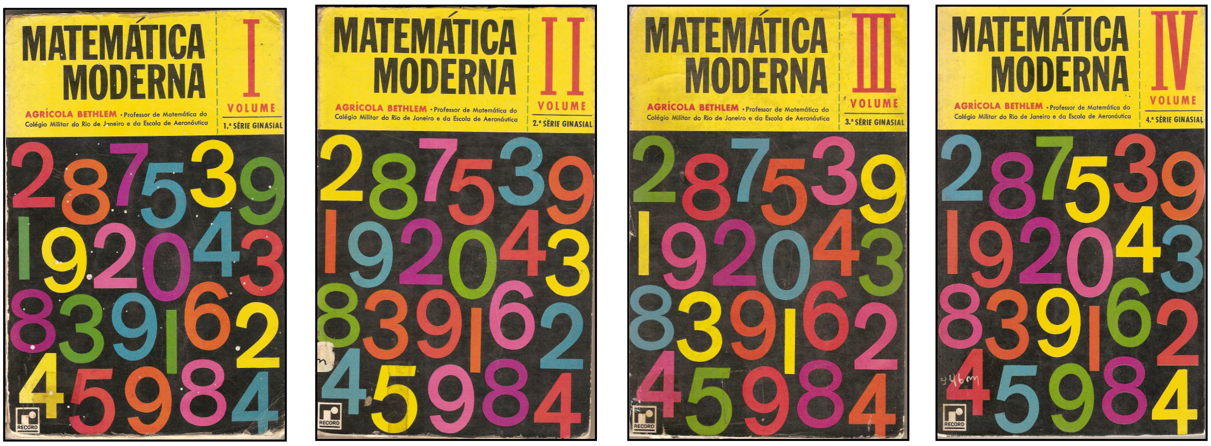


FIGURA 52-Capa da coleção didática *Matemática Moderna* para o ginásio de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A.).

Em todos os livros, na dobra da capa há um texto escrito por Paschoal Villaboim Filho[51] saudando a editora e autor pela obra lançada:

> Enfim!
> Eis um livro que o público estudioso exigia: - amálgama clássico-moderno da Matemática, harmonizando passado e presente, abrindo horizontes para incursões novas no campo da Matemática do Futuro!
> Tudo, nesta obra em quatro volumes, destinada ao Curso Ginasial, reflete método, experiência e atualização das mais recentes prospecções nos domínios da Matemática Moderna que são matéria

---

49 Não encontramos nenhuma informação quanto à qual universidade Betlhem obteve estes títulos.

50 Esta coleção foi localizada num sebo em Pernambuco e adquirida pelo site <www.estantevirtual.com.br>.

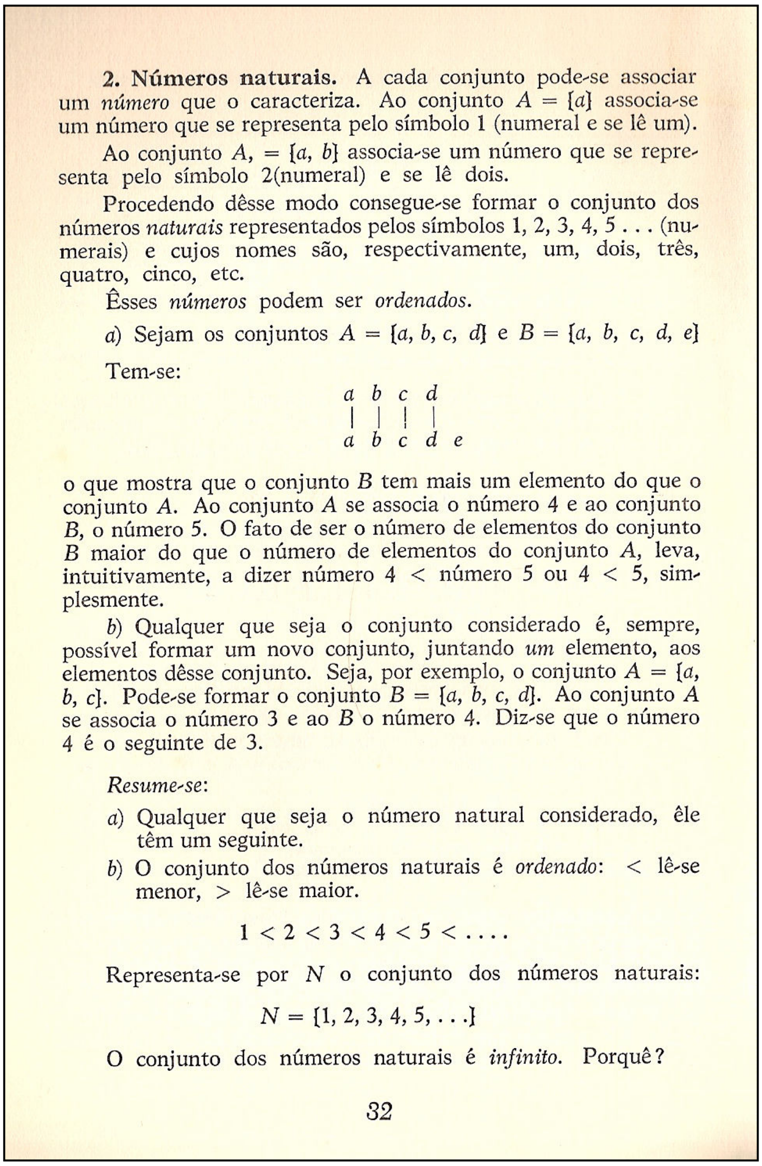
51 Catedrático de Complemento de Matemática e Diretor da Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado de Guanabara. (Em 1975, com a fusão dos estados da Guanabara e Rio de Janeiro, passou a ser chamada Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ).

> básica para sondagens mais profundas e rigorosas nos campos dos Cursos Científico e Superior que lhe seguem.
> Não lhes falta rigor na formulação dos conceitos, nem tampouco, clareza em suas definições.
> Os capítulos fluem de maneira tão amena que o jovem irá se assenhoreando de conceitos da Matemática Moderna de alto teor científico sem se aperceber dos obstáculos que eram, até bem pouco tempo, quase intransponíveis, ao estudante de nível médio.
> A Record está de parabéns por trazer à luz obra tão magnífica que será, sem dúvida, de grande interesse para Mestres e Alunos.
> É como se costuma dizer, na linguagem pitoresca da nossa juventude: "Uma obra pra frente!"
> O eminente Professor Gal. Agrícola Bethlem, lavrando mais um tento, acaba de demonstrar que não existe incompatibilidade entre clareza, precisão e rigor no ensino da Matemática.
> Merece, por isso, calorosos aplausos!
> (PASCHOAL VILLABOIM FILHO, dobra da capa da coleção de Bethlem)

Em relação ao objetivo do livro e à matemática moderna Bethlem escreve na introdução do volume I:

> [...] O objetivo deste livro é dar uma orientação moderna de todos os assuntos já estudados, dando-lhes uma estrutura que permita o aluno explicar, justificar e mesmo criar sentenças matemáticas.
> Os cálculos trabalhosos serão abandonados, bem como as regras cansativas e desnecessárias (que serão substituídas por técnicas) os problemas sem caráter formativo, enfim todo um sistema que fazia da Matemática um fantasma e permitia que, ciculasse a lenda de que nem todos "davam" para a matemática.
> Aprenderá as novas estruturas da matemática, essência do que se chama "Matemática Moderna", a formular conclusões em vez de enunciar regras cediças e de certo modo longas e imperfeitas, e, através de induções simples, proceder as generalizações.
> [...] Procura-se dar ênfase à compreensão e ao entendimento e orientá-lo, convenientemente, para que saiba aplicar o que aprendeu. A estrada natural da aprendizagem que consiste em compreender para saber e, por fim fazer, donde a importância vital dos exercícios.
> [...] Os diversos capítulos do livro versam assuntos da Matemática Moderna e conduzem o menino a aprender as principais estruturas da Matemática e sentir que essa ciência que na época em que vivemos ampliou imensamente o seu campo de aplicação, é, também um guia para o pensamento, uma linguagem universal, uma arte. (BETHLEM, prefácio, 1969).

Analisando o índice e o conteúdo do volume I da coleção, verificamos que o autor inicia o capítulo com a noção de conjunto, estendendo para operações de conjuntos no capítulo II. No capítulo III para explicar o conceito de número natural, sistemas de numeração e bases, o autor utiliza a correspondência biunívoca entre elementos de dois conjuntos.



2. Números naturais. A cada conjunto pode-se associar um *número* que o caracteriza. Ao conjunto $A = \{a\}$ associa-se um número que se representa pelo símbolo 1 (numeral e se lê um).

Ao conjunto $A, = \{a, b\}$ associa-se um número que se representa pelo símbolo 2(numeral) e se lê dois.

Procedendo dêsse modo consegue-se formar o conjunto dos números *naturais* representados pelos símbolos 1, 2, 3, 4, 5 . . . (numerais) e cujos nomes são, respectivamente, um, dois, três, quatro, cinco, etc.

Êsses *números* podem ser *ordenados*.

a) Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$

Tem-se:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \\ | & | & | & | & \\ a & b & c & d & e \end{array}$$

o que mostra que o conjunto B tem mais um elemento do que o conjunto A. Ao conjunto A se associa o número 4 e ao conjunto B, o número 5. O fato de ser o número de elementos do conjunto B maior do que o número de elementos do conjunto A, leva, intuitivamente, a dizer número 4 $<$ número 5 ou $4 < 5$, simplesmente.

b) Qualquer que seja o conjunto considerado é, sempre, possível formar um novo conjunto, juntando *um* elemento, aos elementos dêsse conjunto. Seja, por exemplo, o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Pode-se formar o conjunto $B = \{a, b, c, d\}$. Ao conjunto A se associa o número 3 e ao B o número 4. Diz-se que o número 4 é o seguinte de 3.

Resume-se:

a) Qualquer que seja o número natural considerado, êle têm um seguinte.

b) O conjunto dos números naturais é *ordenado*: $<$ lê-se menor, $>$ lê-se maior.

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots.$$

Representa-se por N o conjunto dos números naturais:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

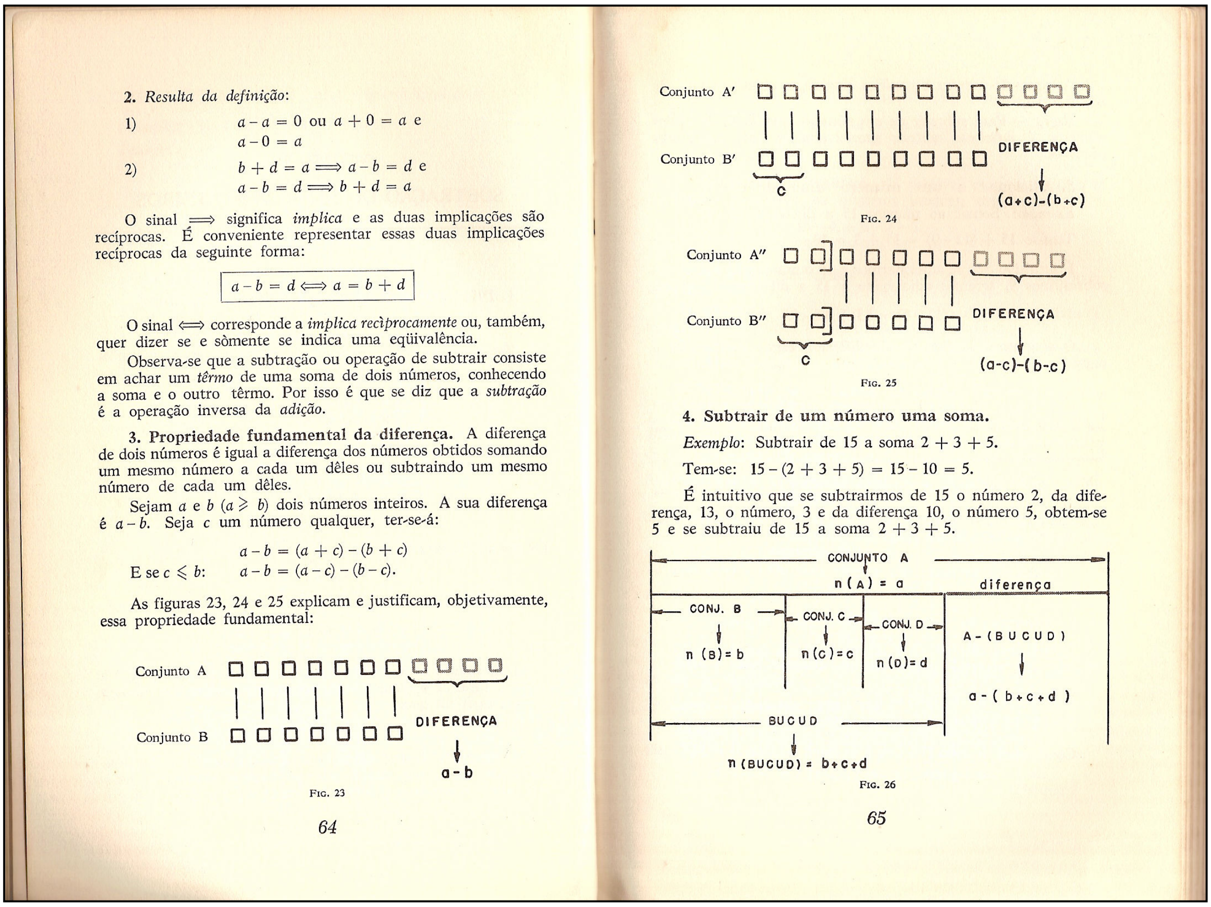
O conjunto dos números naturais é *infinito*. Porquê?

32

Figura 53 – Página 32 do livro *Matemática Moderna* para a 1ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Percebemos que o autor ao explicar os números naturais seguiu as orientações dos *Assuntos Mínimos* sugeridas GEEM (1962), que recomendavam trabalhar os números naturais a partir da noção de conjuntos. Esta abordagem também foi realizada pelos autores dos livros didáticos da coleção moderna analisados anteriormente.

Para ensinar a subtração de número inteiros, bem como a propriedade fundamental da diferença, o autor estabelece correspondência entre elementos de dois conjuntos como podemos verificar na próxima figura.



2. *Resulta da definição:*

1) $a - a = 0$ ou $a + 0 = a$ e
$a - 0 = a$

2) $b + d = a \Longrightarrow a - b = d$ e
$a - b = d \Longrightarrow b + d = a$

O sinal $\Longrightarrow$ significa *implica* e as duas implicações são recíprocas. É conveniente representar essas duas implicações recíprocas da seguinte forma:

$$\boxed{a - b = d \Longleftrightarrow a = b + d}$$

O sinal $\Longleftrightarrow$ corresponde a *implica recìprocamente* ou, também, quer dizer se e sòmente se indica uma eqüivalência.

Observa-se que a subtração ou operação de subtrair consiste em achar um *têrmo* de uma soma de dois números, conhecendo a soma e o outro têrmo. Por isso é que se diz que a *subtração* é a operação inversa da *adição*.

3. Propriedade fundamental da diferença. A diferença de dois números é igual a diferença dos números obtidos somando um mesmo número a cada um dêles ou subtraindo um mesmo número de cada um dêles.

Sejam a e b $(a \geqslant b)$ dois números inteiros. A sua diferença é $a - b$. Seja c um número qualquer, ter-se-á:

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

E se $c \leqslant b$: $\quad a - b = (a - c) - (b - c)$.

As figuras 23, 24 e 25 explicam e justificam, objetivamente, essa propriedade fundamental:

Fig. 23

64

Fig. 24

Fig. 25

4. Subtrair de um número uma soma.

Exemplo: Subtrair de 15 a soma $2 + 3 + 5$.

Tem-se: $15 - (2 + 3 + 5) = 15 - 10 = 5$.

É intuitivo que se subtrairmos de 15 o número 2, da diferença, 13, o número, 3 e da diferença 10, o número 5, obtem-se 5 e se subtraiu de 15 a soma $2 + 3 + 5$.

Fig. 26

65

Figura 54 – Página 64 e 65 do livro *Matemática Moderna* para a 1ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Até o capítulo X do volume I os números naturais com suas operações de soma, de subtração, de igualdade e desigualdade são trabalhados a partir das noções de relação e correspondência.

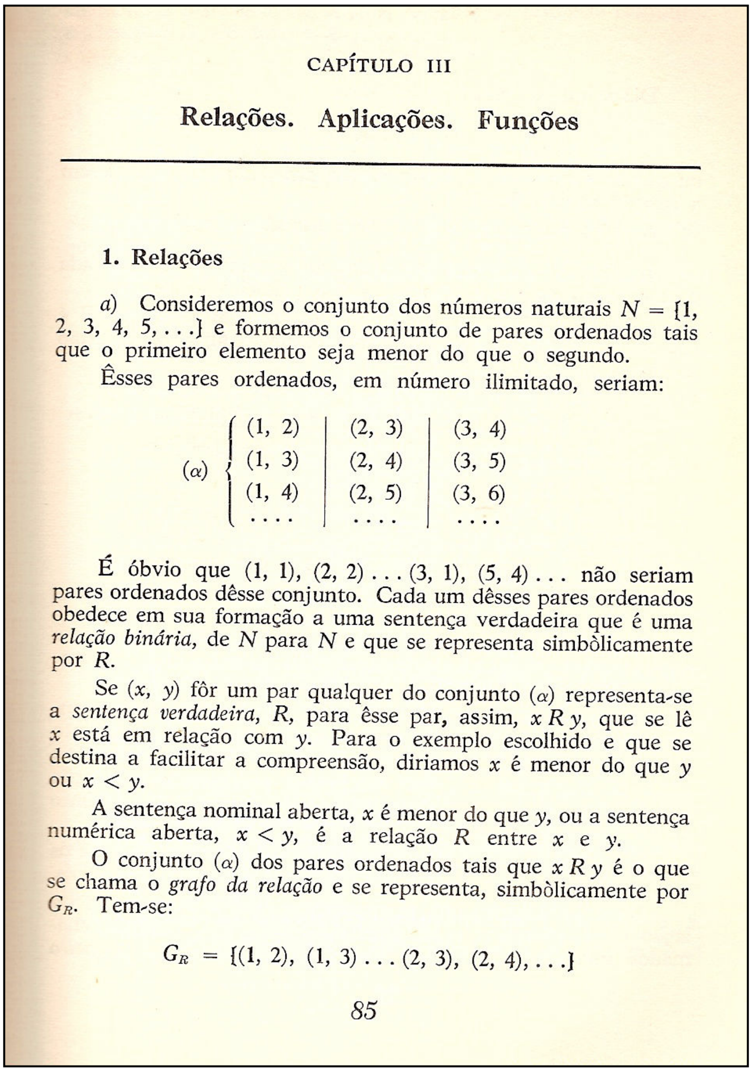
No volume II não há presença do conteúdo *função* e nem elementos precisamente relacionados ao conteúdo.

No volume III, o autor dedicou todo o capítulo III para o ensino de *relações*, *aplicações* e *funções*.[52]

O autor começa o capítulo III explicando o que é relação, considerando o conjunto dos números naturais, propondo que seja formado o conjunto dos pares

52 Ver anexo XI.

ordenados tais que o primeiro elemento do par seja menor do que o segundo. Após mostrar o conjunto ilimitado, o autor reescreve a relação e o conjunto que a satisfaz de maneira simbólica.



CAPÍTULO III

Relações. Aplicações. Funções

1. Relações

a) Consideremos o conjunto dos números naturais $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ e formemos o conjunto de pares ordenados tais que o primeiro elemento seja menor do que o segundo.

Êsses pares ordenados, em número ilimitado, seriam:

$$(\alpha) \begin{cases} (1,\ 2) & (2,\ 3) & (3,\ 4) \\ (1,\ 3) & (2,\ 4) & (3,\ 5) \\ (1,\ 4) & (2,\ 5) & (3,\ 6) \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

É óbvio que (1, 1), (2, 2) . . . (3, 1), (5, 4) . . . não seriam pares ordenados dêsse conjunto. Cada um dêsses pares ordenados obedece em sua formação a uma sentença verdadeira que é uma *relação binária*, de N para N e que se representa simbòlicamente por R.

Se (x, y) fôr um par qualquer do conjunto (α) representa-se a *sentença verdadeira*, R, para êsse par, assim, $x R y$, que se lê x está em relação com y. Para o exemplo escolhido e que se destina a facilitar a compreensão, diriamos x é menor do que y ou $x < y$.

A sentença nominal aberta, x é menor do que y, ou a sentença numérica aberta, $x < y$, é a relação R entre x e y.

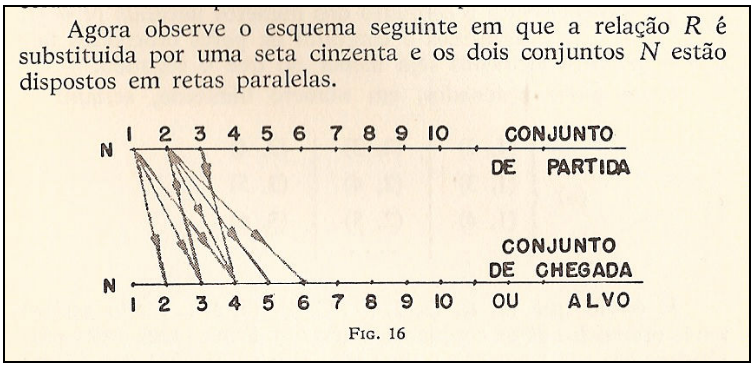
O conjunto (α) dos pares ordenados tais que $x R y$ é o que se chama o *grafo da relação* e se representa, simbòlicamente por G_R. Tem-se:

$$G_R = \{(1, 2), (1, 3) \ldots (2, 3), (2, 4), \ldots\}$$

85

Figura 55 – Página 85 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Betlhem estabelece uma relação binária entre números dispostos em retas paralelas para estabelecer a relação entre conjunto de partida e conjunto de chegada. Esta forma de representação (entre retas paralelas) é um diferencial, pois nos livros analisados até o momento não encontramos nada similar. Podemos verificar o esquema na próxima figura.

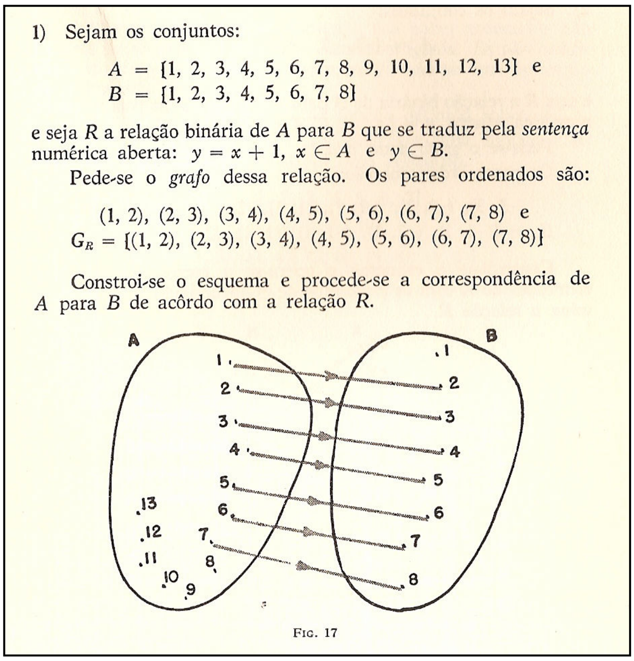


Agora observe o esquema seguinte em que a relação R é substituida por uma seta cinzenta e os dois conjuntos N estão dispostos em retas paralelas.

Fig. 16

Figura 56 – Página 86 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

No entanto, na página 87, o autor aborda a correspondência entre dois conjuntos com o mesmo esquema de representação visto nos livros já analisados, conforme podemos observar na figura abaixo.



1) Sejam os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ e
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

e seja R a relação binária de A para B que se traduz pela *sentença* numérica aberta: $y = x + 1$, $x \in A$ e $y \in B$.

Pede-se o *grafo* dessa relação. Os pares ordenados são:

$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)$ e
$G_R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)\}$

Constroi-se o esquema e procede-se a correspondência de A para B de acôrdo com a relação R.

Fig. 17

Figura 57 – Página 87 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

A partir da representação visualizada na figura 58 o autor estabelece o *domínio* e o *contra-domínio* da mesma.

> O domínio da relação é o subconjunto de A, {1,2,3,4,5,6,7} e o contra-domínio é o sub-conjunto {2,3,4,5,6,7,8} de B. Observe que

há uma diferença entre as relações traduzidas pelas sentenças numéricas abertas:

$$x < y \quad e$$
$$y = x + 1$$

(BETHLEM, Vol. III, 1969, p. 87-88).

Observamos que há um erro conceitual, pois o contra-domínio não é {2,3,4,5,6,7,8} como descrito por Bethlem e sim {**1,**2,3,4,5,6,7,8}.

Bethlem define *função* e *aplicação* na p.89 do volume III da seguinte forma:

> "Sejam dois conjuntos A e B e uma relação binária R de A para B. Se a cada elemento x de A corresponder pela relação R um elemento, no máximo de B, diz-se que essa relação é uma função.
> Isto quer dizer que no conjunto dos pares ordenados não há dois pares tendo os primeiros elementos iguais. Se não existir elemento A sem correspondente em B, tem-se uma aplicação de A em B.
> A aplicação é, por isso, uma função definição sobre A" (BETHLEM, vol. III, 1969, p. 89).

Com a intenção de mostrar ao aluno a diferença de *função* e *aplicação*, o autor mostra os seguintes esquemas:

- Para *função*:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$
$$R : y = 2x \qquad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
$$G_R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 6)\}$$
$$\text{domínio} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ que é sub-conjunto de } A.$$

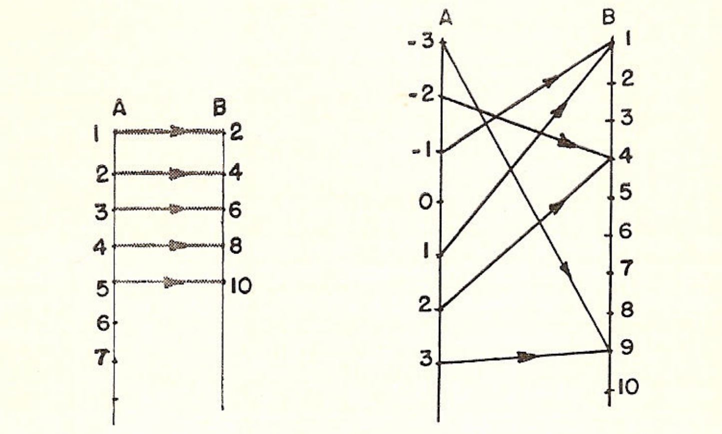


FIG. 19 FIG. 20

Figura 58 – Página 89 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

- Para *aplicação*:

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$R : y = x^2 \qquad B = N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

$$G_R = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 6)\}$$

domínio $= \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ que é sub-conjunto de A.

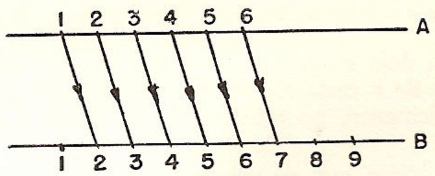


FIG. 21

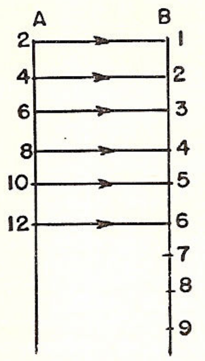
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$G_R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7)\}$$

domínio $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que é conjunto A.

A aplicação é a função definida sôbre o conjunto A.



$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

FIG. 22

$$R : y = \frac{x}{2} \qquad G_R = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6)\}$$

domínio $(D_R) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} = A$.

A *aplicação* é a função definida sôbre o conjunto A.

Figura 59 – Página 90 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Para explicar as *qualidades da aplicação de função* o autor constrói uma relação binária entre dois conjuntos denominados A e B. Nesta construção o autor define a aplicação sobrejetiva, injetiva e bijetiva.

a) função sobrejetiva;

1.ª) *f* é *sobrejetiva* ou é uma sobrejeção quando todo o elemento de *B* é imagem, por *f* de, pelo menos um elemento de *A*.

Suponhamos:

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$B = \{a', b', c', d'\}$$

Observe o esquema:

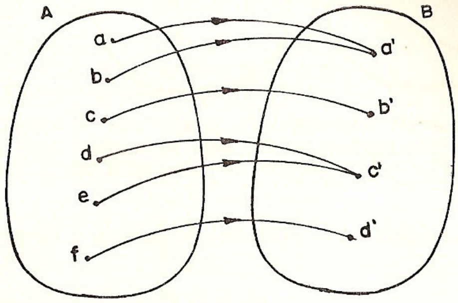


FIG. 23

Trata-se de uma aplicação porque não há elemento de *A* que não tenha imagem em *B*. Essa aplicação é sobrejetiva porque não há elemento de *B* que não seja imagem de pelo menos um elemento de *A*.

Figura 60 – Página 91 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record. S.A. -1969).

b) função injetiva;

Observe o esquema:

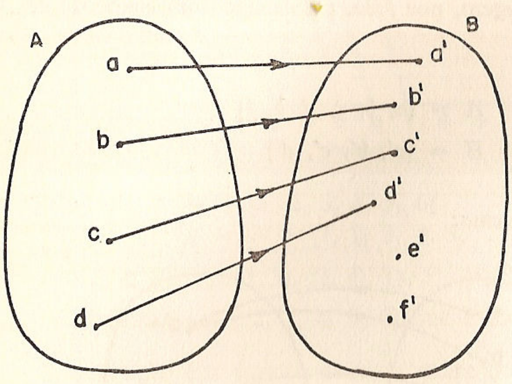


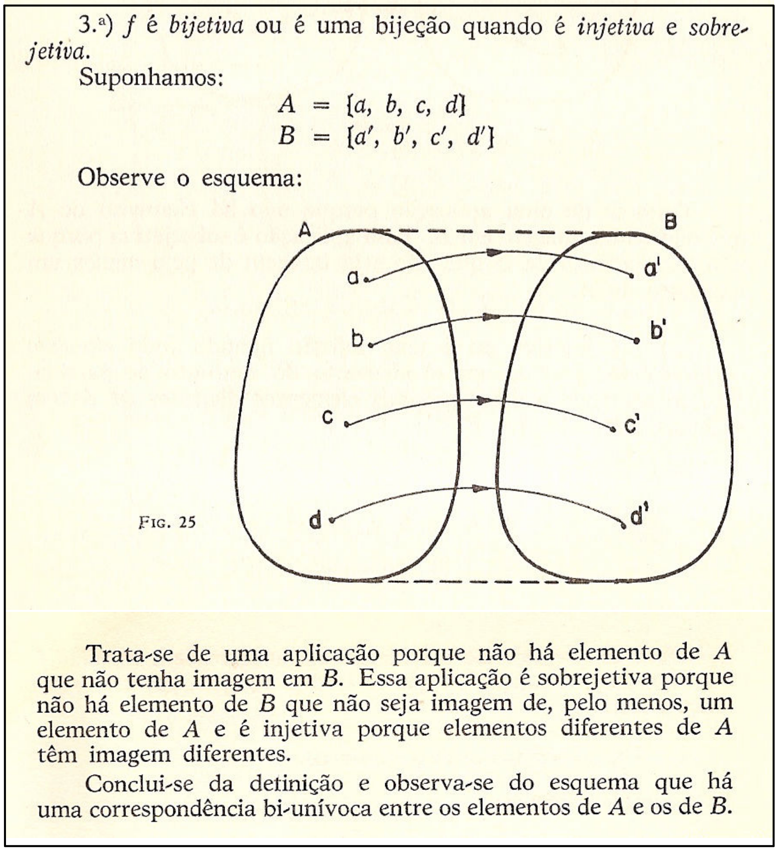
FIG. 24

Trata-se de uma aplicação porque não há elemento de *A* que não tenha imagem ou *B*. Essa aplicação é injetiva porque as imagens de dois elementos distintos de *A* são diferentes:

$$a \neq b \Longrightarrow a' \neq b'$$

Figura 61 – Página 92 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

c) função bijetiva;



3.ª) *f* é *bijetiva* ou é uma bijeção quando é *injetiva* e *sobrejetiva*.

Suponhamos:

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \{a', b', c', d'\}$$

Observe o esquema:

Fig. 25

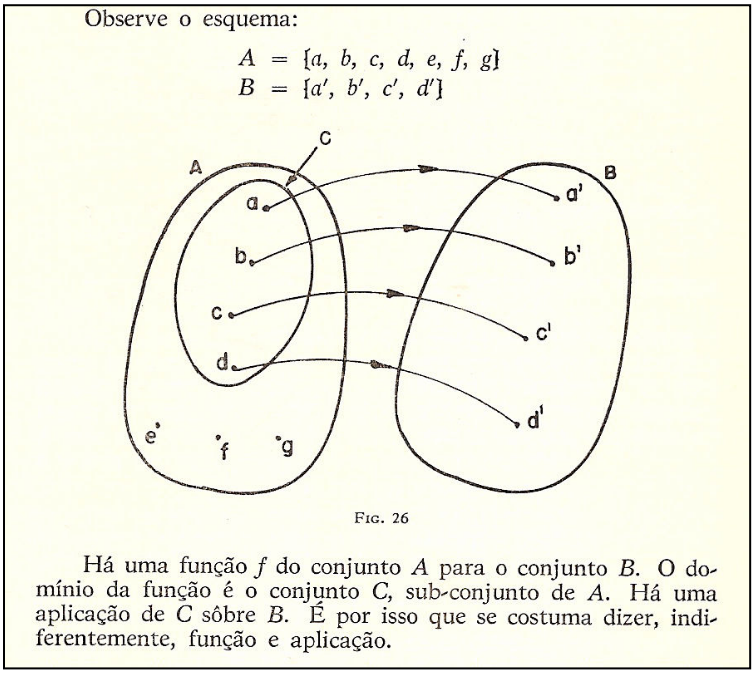
Trata-se de uma aplicação porque não há elemento de A que não tenha imagem em B. Essa aplicação é sobrejetiva porque não há elemento de B que não seja imagem de, pelo menos, um elemento de A e é injetiva porque elementos diferentes de A têm imagem diferentes.

Conclui-se da definição e observa-se do esquema que há uma correspondência bi-unívoca entre os elementos de A e os de B.

Figura 62 – Página 92 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Percebemos que Bethlem utiliza a mesma forma de abordar a função sobrejetora, injetora e bijetora de Sangiorgi apresentada nos *Guias para uso dos Professores*, ou seja, através da associação entre diagramas de flechas, mostrando o conjunto de partida e o conjunto de chegada, destacando o conjunto-imagem do contra-domínio. Contudo isso é tratado no volume IV para a 4ª série ginasial que analisaremos posteriormente.

Para explicar que uma função nem sempre é uma aplicação e uma aplicação é sempre uma função, Bethlem enfatiza que “Pode-se considerar, no entanto, a função como uma aplicação se tomarmos como conjunto de partida o conjunto domínio da função” (BETHLEM, 1969, p. 93), conforme o esquema apresentado pelo autor na próxima figura.



Observe o esquema:

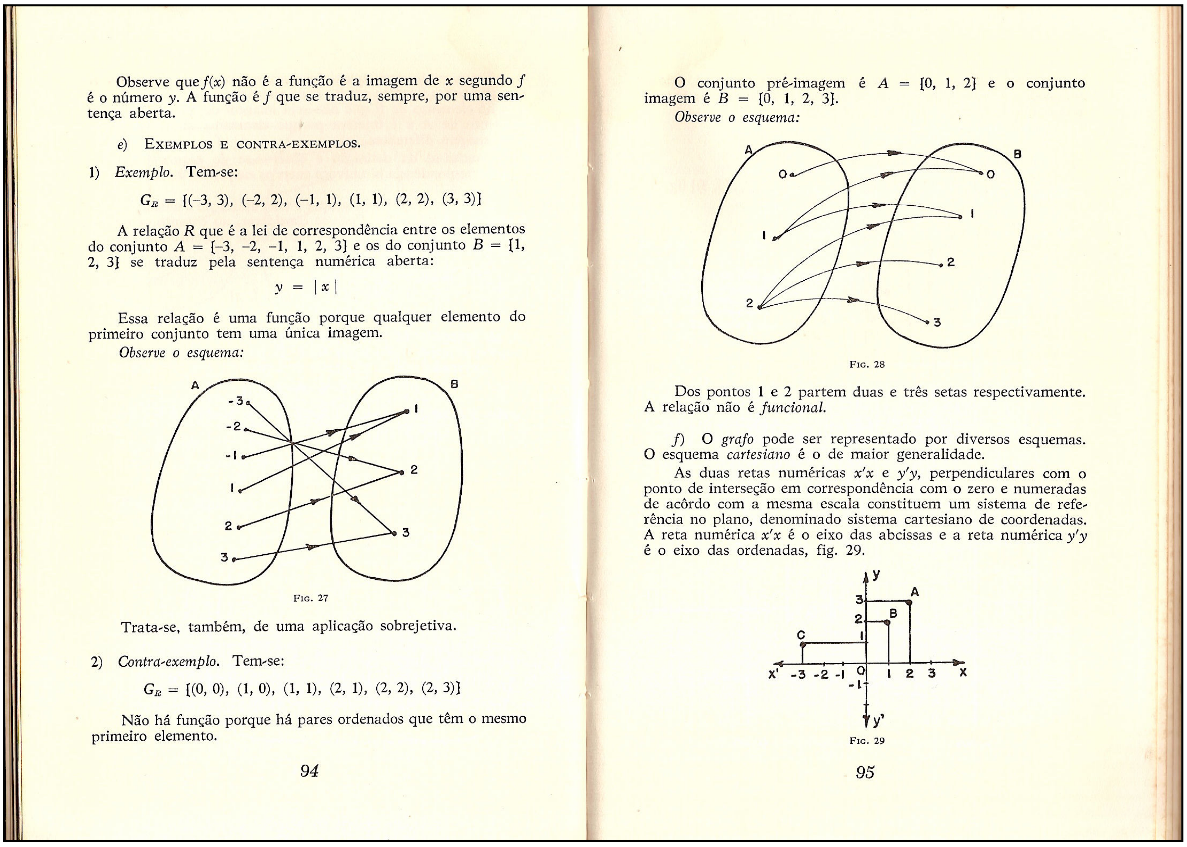
$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
$B = \{a', b', c', d'\}$

Fig. 26

Há uma função f do conjunto A para o conjunto B. O domínio da função é o conjunto C, sub-conjunto de A. Há uma aplicação de C sôbre B. É por isso que se costuma dizer, indiferentemente, função e aplicação.

Figura 63 – Página 93 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

O autor exemplos e contra-exemplos que relacionam elementos entre dois conjuntos, já que a relação pode não ser uma função.



Observe que $f(x)$ não é a função é a imagem de x segundo f é o número y. A função é f que se traduz, sempre, por uma sentença aberta.

e) Exemplos e contra-exemplos.

1) *Exemplo.* Tem-se:

$$G_R = \{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

A relação R que é a lei de correspondência entre os elementos do conjunto $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ e os do conjunto $B = \{1, 2, 3\}$ se traduz pela sentença numérica aberta:

$$y = |x|$$

Essa relação é uma função porque qualquer elemento do primeiro conjunto tem uma única imagem.

Observe o esquema:

Fig. 27

Trata-se, também, de uma aplicação sobrejetiva.

2) *Contra-exemplo.* Tem-se:

$$G_R = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

Não há função porque há pares ordenados que têm o mesmo primeiro elemento.

94

O conjunto pré-imagem é $A = \{0, 1, 2\}$ e o conjunto imagem é $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

Observe o esquema:

Fig. 28

Dos pontos 1 e 2 partem duas e três setas respectivamente. A relação não é *funcional.*

f) O *grafo* pode ser representado por diversos esquemas. O esquema *cartesiano* é o de maior generalidade.

As duas retas numéricas $x'x$ e $y'y$, perpendiculares com o ponto de interseção em correspondência com o zero e numeradas de acôrdo com a mesma escala constituem um sistema de referência no plano, denominado sistema cartesiano de coordenadas. A reta numérica $x'x$ é o eixo das abcissas e a reta numérica $y'y$ é o eixo das ordenadas, fig. 29.

Fig. 29

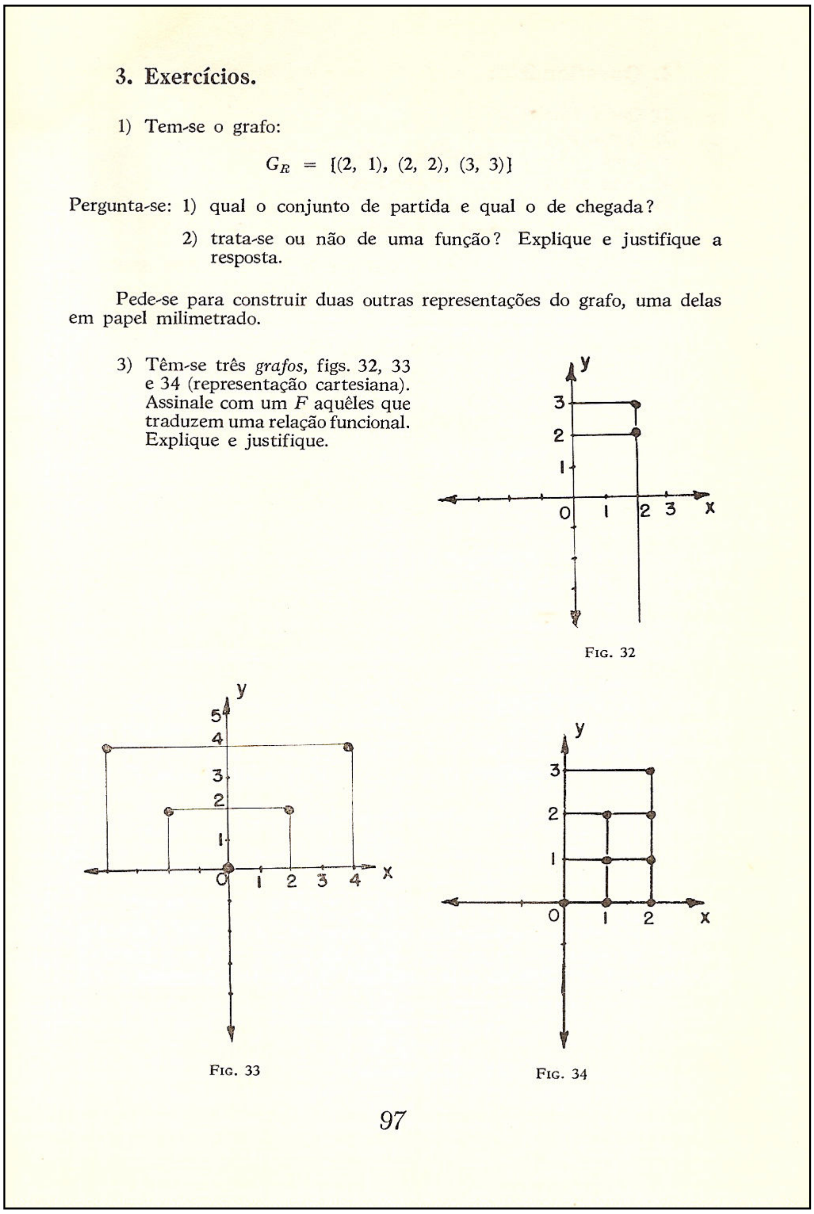
95

Figura 64 – Página 94 e 95 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Percebemos que a maneira que Bethlem representa os contra-exemplos por meio da correspondência entre elementos de dois conjuntos através de diagrama de flechas é muito parecida com a representação que Osvaldo Sangiorgi faz em sua coleção moderna ao tratar o ensino de funções. Contudo, Sangiorgi não faz tantas distinções em relação à diferença de *aplicação* ou *função*, *domínio* e *pré-imagem*.

Nesta mesma figura 62 o autor dá introdução ao sistema de coordenadas por intermédio de duas retas numeradas, localizando os pontos nos eixos x e y, que correspondem a construção de pares ordenados de números reais.

Na página 97 o autor são propostos exercícios que enfatizam o conceito de grafo e suas representações, conforme a figura a seguir.



3. Exercícios.

1) Tem-se o grafo:

$$G_R = \{(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3)\}$$

Pergunta-se: 1) qual o conjunto de partida e qual o de chegada?

2) trata-se ou não de uma função? Explique e justifique a resposta.

Pede-se para construir duas outras representações do grafo, uma delas em papel milimetrado.

3) Têm-se três *grafos*, figs. 32, 33 e 34 (representação cartesiana). Assinale com um *F* aquêles que traduzem uma relação funcional. Explique e justifique.

FIG. 32

FIG. 33

FIG. 34

97

Figura 65 – Página 97 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Para representar o sistema de coordenadas, o autor faz menção à palavra *grafo* que, segundo ele, “pode ser representado por diversos esquemas” (BETHLEM, 1969. p. 95). O autor não explica o significado da palavra grafo, no entanto constrói exemplos de representação cartesiana de alguns grafos dados por pares ordenados inicialmente.[53]

Bethlem complementa à definição de *função* neste volume III da coleção afirmando que:

> Uma função é definida quando são dados:
> a) conjunto de partida
> b) conjunto de chegada
> c) a lei de correspondência, ou relação funcional, que liga cada elemento do conjunto de partida ao seu associado no conjunto de chegada. Essa relação que em geral se representa pela letra f se traduz por uma sentença aberta.
> (BETHLEM, Vol. III, 1969, p. 99)

Outro diferencial em relação à coleção de Sangiorgi é que, ainda no volume III, Bethlem define a *função polinômio* numa perspectiva da generalização e da abstração – marcas do pensamento que permeava a Matemática Moderna, como podemos verificar na figura abaixo.

10. Função polinômio. Aritmética dos polinômios.

a)

$$f_n(x) \xrightarrow{f_n} a_n x^n$$
$$f_{n-1}(x) \xrightarrow{f_{n-1}} a_{n-1} x^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_2(x) \xrightarrow{f_2} a_2 x^2$$
$$f_1(x) \xrightarrow{f_1} a_1 x$$
$$f_0(x) \xrightarrow{f_0} a_0$$

sendo $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ e n um número inteiro não negativo ou $n \in I_+$

Representando por $P(x)$ a soma dessas funções, tem-se:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

que é a função polinômio.

O domínio da variável, x, é o conjunto dos números reais, R, e, por isso, diz-se que x é uma variável real e que o *polinômio* é definido sôbre o corpo dos números reais.

Figura 66 – Página 109 do livro *Matemática Moderna* para a 3ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

---

53 Ver anexo XII.

Os exercícios apresentados capítulo III utilizam os seguintes verbos de comando: construir, explicar, justificar e organizar, ou seja, o autor procura diversificar os enunciados dos exercícios, incluindo até um questionário, pedindo para que o aluno use o diagrama de Venn caso julgue necessário para explicar e justificar suas respostas.[54]

Nos demais capítulos do volume III não encontramos nada mais relativo ao ensino de *função*.

Bethlem dedica um capítulo inteiro para o ensino de *funções* no volume IV [55] (capítulo III) totalizando 77 páginas que contém: Funções: domínio e conjunto imagem; Função Linear e sua representação gráfica cartesiana; Resolução gráfica de sistemas de equações; Função trinômio do 2º grau e sua representação gráfica cartesiana; inequações do 2º grau.

No prefácio do volume IV, Wilson Choeri[56] faz as seguintes considerações para este volume IV da coleção de Bethlem:

> [...] O que predomina na Matemática Moderna é a relação. O autor estuda relações e funções de forma rigorosa e acessível. Distingue entre função e aplicação o que poucos autores fazem.
> No estudo das funções lineares e quadráticas apresenta funções lineares e quadráticas afins.
> Dá um tratamento atualizado às funções inversas e compostas.
> A originalidade deste capítulo é o procedimento visual, através de gráfico para distinguir uma relação de uma função. Apresenta também como novidade diagramas de ajuda para construir o gráfico de uma função quadrática. [...] (CHOERI, 1969, p.09)

Percebemos que o autor busca estudar as *funções* de uma forma mais rigorosa do que já vinha sendo feito nos livros didáticos, introduzindo maior especificidade no tratamento dos termos e apresentando um novo diagrama para construção de gráficos.

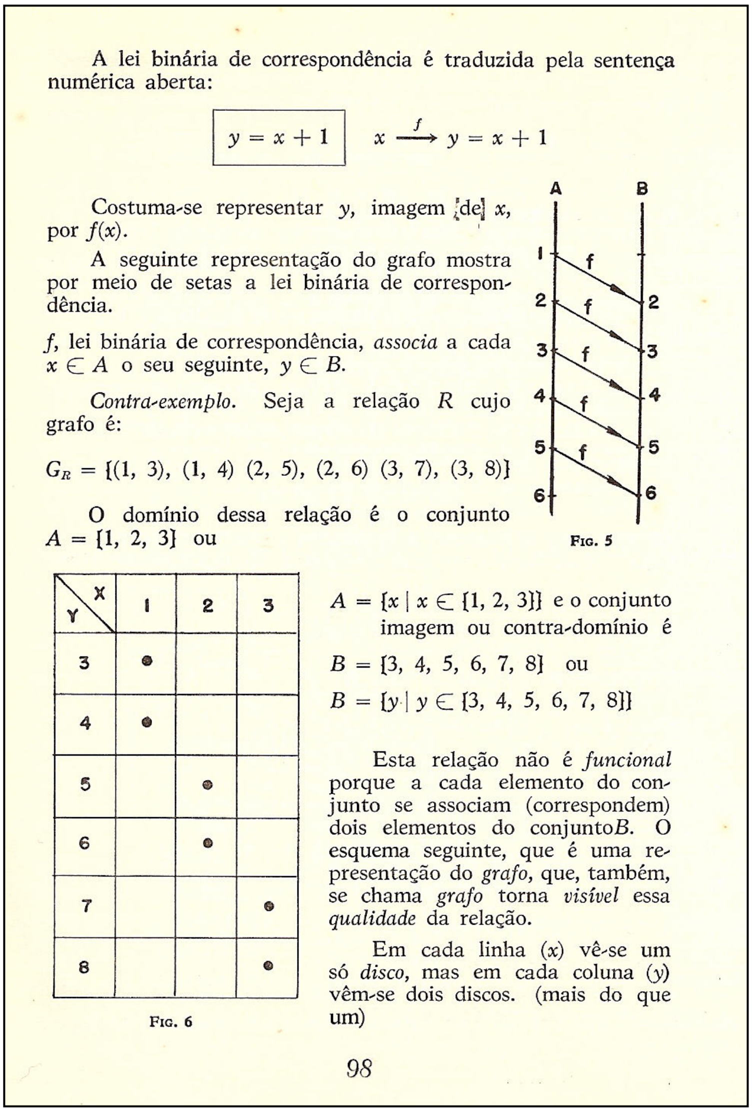
Bethlem traz novamente a definição de *função* acrescentando a escrita grifada por nós:

> Função (definição). Sejam dois conjuntos A e B e uma relação R de A para B. Se cada elemento de A corresponder, pela relação R, um

54 Ver o anexo XIII.
55 Ver o anexo XIV.
56 Professor de Matemática e Estatística e Secretário Geral da Universidade do Estado de Guanabara, atual Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

elemento, no máximo, de B, diz-se que essa relação, R, é uma função.
Isto quer dizer que no conjunto dos pares ordenados não há 2 pares tendo os primeiros elementos iguais.
(BETHLEM, 1969, p. 97, grifo nosso).

No entanto para apresentar um contra-exemplo de *função*, o autor faz uma nova representação além daquelas que já tinha utilizado no volume III da coleção e diferentemente de Osvaldo Sangiorgi, por meio de uma tabela que relaciona linha e coluna, como podemos verificar na figura abaixo:



A lei binária de correspondência é traduzida pela sentença numérica aberta:

$\boxed{y = x + 1}$ $\quad x \xrightarrow{f} y = x + 1$

Costuma-se representar y, imagem [de] x, por $f(x)$.

A seguinte representação do grafo mostra por meio de setas a lei binária de correspondência.

f, lei binária de correspondência, *associa* a cada $x \in A$ o seu seguinte, $y \in B$.

Contra-exemplo. Seja a relação R cujo grafo é:

$G_R = \{(1, 3), (1, 4)\ (2, 5), (2, 6)\ (3, 7), (3, 8)\}$

O domínio dessa relação é o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ ou

FIG. 5

Y \ X	1	2	3
3	●		
4	●		
5		●	
6		●	
7			●
8			●

FIG. 6

$A = \{x \mid x \in \{1, 2, 3\}\}$ e o conjunto imagem ou contra-domínio é

$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ou

$B = \{y \mid y \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$

Esta relação não é *funcional* porque a cada elemento do conjunto se associam (correspondem) dois elementos do conjunto$B$. O esquema seguinte, que é uma representação do *grafo*, que, também, se chama *grafo* torna *visível* essa *qualidade* da relação.

Em cada linha (x) vê-se um só *disco*, mas em cada coluna (y) vêm-se dois discos. (mais do que um)

98

Figura 67 – Página 98 do livro *Matemática Moderna* para a 4ª série ginasial de Agrícola Bethlem.
(Editora Record. S.A. -1969).

Percebemos que o além de utilizar o domínio para *função* o autor também utiliza-o para *relação*.

O autor aborda o ensino de *Relação e função*, e *Aplicação de função* no capítulo III do volume IV da coleção, da mesma forma que no volume III, porém identificamos um maior grau de rigor e maior ênfase na linguagem simbólica. O autor utiliza além da representação em forma de esquemas, os símbolos. Como por exemplo, citaremos uma representação simbólica descrita pelo autor para representar a *qualidade de uma aplicação sobrejetiva*:

> Seja f uma aplicação do conjunto A em um conjunto B.
> 1. Se todo elemento de B é imagem, por f, de pelo menos um elemento de A. diz-se que f é sobrejetiva ou é uma sobrejeção.
> Se x é a representação simbólica dos elementos de A e y é a representação simbólica dos elementos de B ou
> $$x \in A \qquad e \qquad y \in B$$
> a qualidade de aplicação sobrejetiva se traduz assim:
> $$\forall \ \ y \in B, \ \exists x \in A, tal \ \ que:$$
> $$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$
> (BETHLEM, 1969, p.111)

Bethlem define a *função quadrática* da seguinte forma:

> A função: $x \xrightarrow{f} y = f(x) = ax^2 + bx + c, \ \ a \neq 0,$ cujo domínio é o conjunto dos números reais e cujo contra-domínio é um sub-conjunto desse conjunto, se domina função quadrática (trinômio do 2º grau). (BETHLEM, 1969, p.150)

Com esta definição e a partir da forma canônica geral[57] $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ desenvolvida na página 151 do volume IV[58], o autor deduz três formas canônicas particulares, com $\Delta < 0, \ \Delta = 0, \ \Delta > 0$, como podemos verIficar na próxima figura.

---

57 Segundo Bethlem por “abuso de linguagem” a forma canônica geral dos valores numéricos do trinômio é considerada como “forma canônica geral do trinômio do segundo grau” (BETHLEM, 1969, p. 151).
58 Ver anexo XV.

1) *Primeira forma particular.*

$\triangle < 0, \; -\dfrac{\triangle}{4a^2} > 0$. Faz-se $-\dfrac{\triangle}{4a^2} = k^2$ e se obtém, qualquer que seja o valor de x:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k^2\right]}$$

2) *Segunda forma particular.*

$\triangle = 0, \; -\dfrac{\triangle}{4a^2} = 0$ e se obtém, qualquer que seja o valor de x:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}$$

OBSERVAÇÃO: O trinômio possui um *zero duplo.*

3) *Terceira forma particular.*

$\triangle > 0$. A equação associada tem duas raízes:

$$x' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\triangle}}{2a} \text{ e}$$

$$x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}$$

Ora,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\triangle}}{2a}\right)\right]$$

$$= a\,(x - x')\,(x - x'') \quad \text{ou}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'')}$$

152

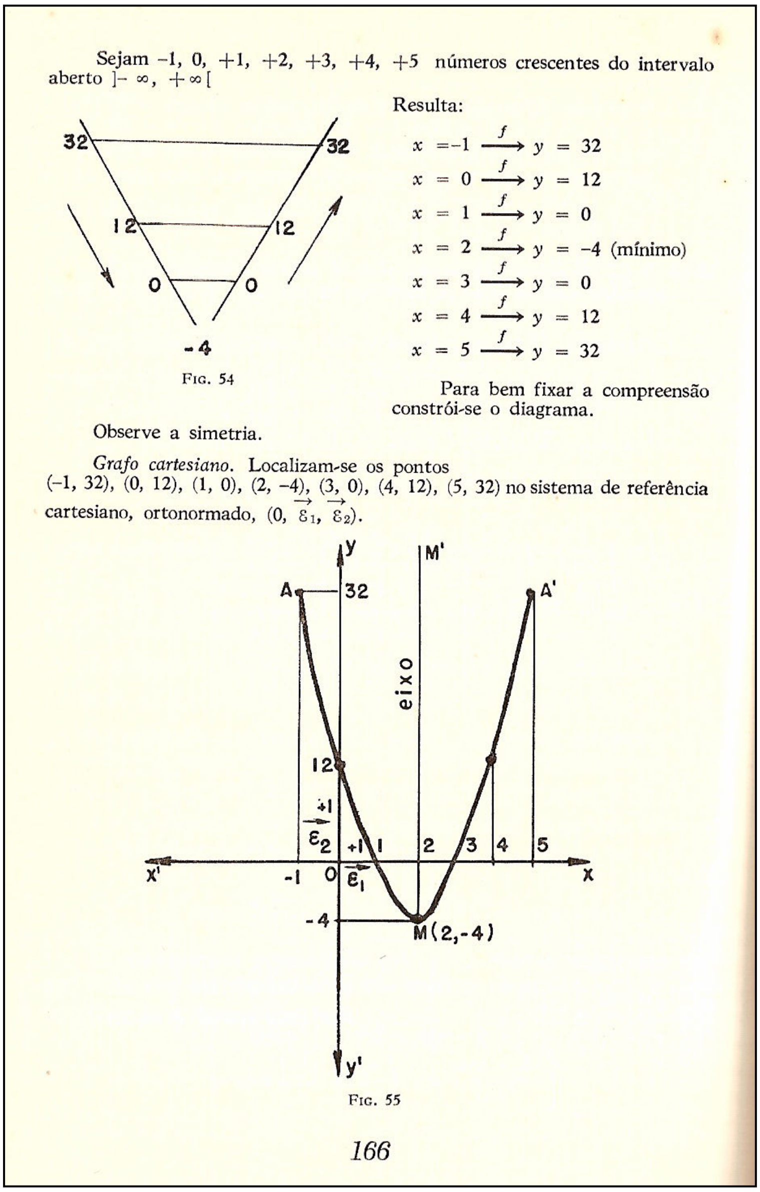
Figura 68 – Página 152 do livro *Matemática Moderna* para a 4ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record. S.A. -1969).

Para ensinar a variação do *trinômio do segundo grau* o autor inova ao colocar em sua explicação um diagrama que segundo ele “robustece a compreensão” (BETHLEM, 1969, p. 167).

Iremos citar um exemplo que o autor coloca entre as páginas 165 e 167 que tem como finalidade estudar a variação do trinômio do segundo grau da função $y = 4x^2 - 16x + 12$.

Para estudar a variação deste *trinômio do segundo grau* o autor faz a decomposição $y = [(x-2)^2 - 1]$ onde $-\dfrac{b}{2a} = 2$ e $\dfrac{4ac - b^2}{4a} = -4$. (BETHLEM, 1969, P.165).

Logo após, o autor fez um diagrama e traçou o gráfico, conforme a figura abaixo.



Sejam −1, 0, +1, +2, +3, +4, +5 números crescentes do intervalo aberto]− ∞, + ∞[

FIG. 54

Resulta:

$x = -1 \xrightarrow{f} y = 32$

$x = 0 \xrightarrow{f} y = 12$

$x = 1 \xrightarrow{f} y = 0$

$x = 2 \xrightarrow{f} y = -4$ (mínimo)

$x = 3 \xrightarrow{f} y = 0$

$x = 4 \xrightarrow{f} y = 12$

$x = 5 \xrightarrow{f} y = 32$

Para bem fixar a compreensão constrói-se o diagrama.

Observe a simetria.

Grafo cartesiano. Localizam-se os pontos (−1, 32), (0, 12), (1, 0), (2, −4), (3, 0), (4, 12), (5, 32) no sistema de referência cartesiano, ortonormado, $(0, \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$.

FIG. 55

166

Figura 69 – Página 166 do livro *Matemática para a* 4ª série ginasial de Agrícola Bethlem. (Editora Record S.A. -1969).

Com o diagrama mostrado na figura acima o autor mostra a simetria da parábola , que é evidenciada na parábola, onde seus pontos são simétricos em relação ao raio $M\overrightarrow{M'}$.

Em relação às atividades propostas aos alunos por meio de exercícios, estas possibilitam associações de diagramas e a conversão expressão algébrica $\Rightarrow$ diagrama em forma triangular $\Rightarrow$ gráfico trinômio do segundo grau .

Os exercícios enunciados neste último volume da coleção apresentam os seguintes verbos de comando: estudar, traçar, resolver, determinar, decompor, assinalar, achar, classificar, construir e calcular, ou seja, o autor procura mais uma vez diversificar os enunciados dos exercícios.

3.2.6 Síntese da coleção didática de Bethlem.

Na coleção analisada, observamos a marcante utilização de ilustrações em diagramas antecedendo e acompanhando as definições. A maioria das definições são acompanhadas de comprovações numéricas, sugerindo uma intenção de clarificar a idéia apresentada e atribuir-lhe credibilidade.

Percebemos que após abordar o ensino de *funções* no volume III de sua coleção Matemática Moderna, o autor privilegia no volume IV a abstração, a generalização, e o rigor, marcas do pensamento axiomático que permeava a Matemática Moderna.

Notamos que o autor aborda as relações binárias com diferentes representações, ora por pares ordenados, ora com diagramas de flechas.

Observamos que o ensino de *função* na coleção didática de Bethlem procurava seguir os *Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio* estabelecidos pelo GEEM (1962), porém o autor procurou abordar o estudo de função na 3ª série ginasial, diferentemente da recomendação do GEEM (1965b), que propunha o ensino do conteúdo na 4ª série do ginásio.

Embora a definição de função adotada pela coleção de Bethlem ser de forma semelhante a de Sangiorgi, notamos que Bethlem fez suas apropriações e interpretações distintas de Osvaldo Sangiorgi ao trabalhar com um maior rigor e com novas formas de representação para o ensino do conteúdo.

Os exercícios propostos por Bethlem sugerem um autor focado no uso da Linguagem dos Conjuntos, a representação tabular de conjuntos, a preocupação com a generalização e abstração. Tais registros sugerem o comprometimento do professor na concepção formalista do ensino do conteúdo matemático, conforme as diretrizes gerais do MMM.

3.2.7 A coleção didática de Miguel Asis Name.

Após diversas buscas realizadas na Internet, no Centro de Documentação do GHEMAT, localizado em Osasco-SP e no acervo do Projeto LIVRES da USP não encontramos nenhuma informação adicional sobre Miguel Asis Name.

A análise desta coleção se dá na perspectiva de identificar como o autor ensina *função* em sua coleção didática da década de 1970. Para isso utilizamos categorias de análise que emergiram após o trabalho com a coleção didática moderna de Sangiorgi.[59]

Nesta pesquisa são examinadas as seguintes edições da coleção *Matemática Ensino Moderno*: a 10ª edição de 1973 do volume I, a 47ª edição de 1973 do volume II, a 6ª edição de 1973 do volume III e a 8ª edição do volume IV de 1973.[60]

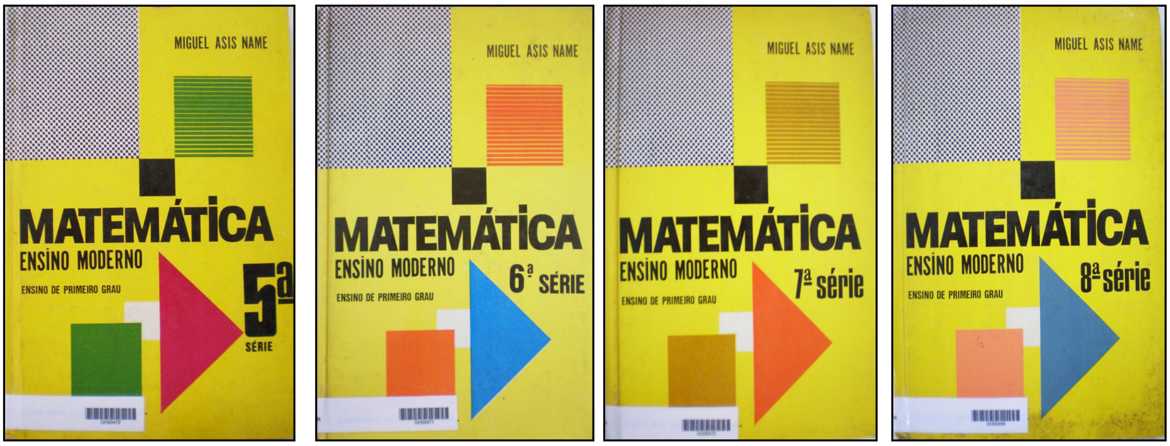


FIGURA 70 -Capa da coleção didática *Matemática Ensino Moderno* para 1º Grau, de Miguel Assis Name. (Editora do Brasil S.A.).

Percebemos que na capa desta coleção há uma nova nomenclatura de séries: 5ª a 8ª série. Em 1971, a Lei 5692/71 promulgou uma mudança na nomenclatura das séries às quais os livros didáticos analisados se destinavam, ou seja, essa lei unificou o ensino primário e o ginasial em um curso único de 8 anos de duração, denominado 1º Grau. Dessa forma, o ensino de 1ª a 4ª série ginasial passou a ser denominado de 5ª a 8ª série do primeiro grau.

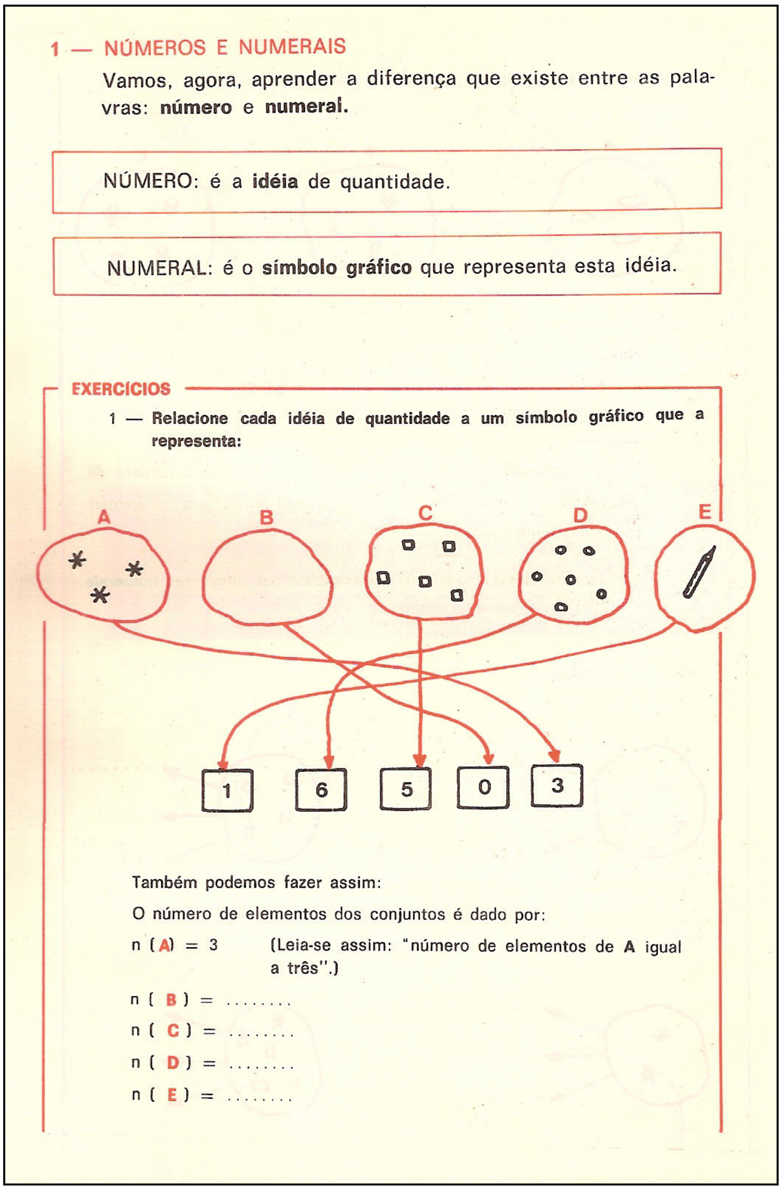
---

59 Estrutura de apresentação do conceito de função; a sua definição; como se deu a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; a representação gráfica das funções linear e quadrática; e os exercícios.

60 Esta coleção encontra-se no Centro de Documentação do GHEMAT, em Osasco-SP.

O autor inicia sua coleção com um livro destinado a alunos da 5ª série, onde apresenta a definição de conjuntos e relações, antecedendo os números naturais, assim como Sangiorgi fez em sua coleção moderna.

Neste volume o autor explica o que é número e numeral e exercícios que correspondem á ideia de relação entre símbolo e quantidade, conforme a figura abaixo.



1 — NÚMEROS E NUMERAIS

Vamos, agora, aprender a diferença que existe entre as palavras: **número** e **numeral**.

NÚMERO: é a **idéia** de quantidade.

NUMERAL: é o **símbolo gráfico** que representa esta idéia.

EXERCÍCIOS

1 — **Relacione cada idéia de quantidade a um símbolo gráfico que a representa:**

A B C D E

1 6 5 0 3

Também podemos fazer assim:

O número de elementos dos conjuntos é dado por:

n (A) = 3 (Leia-se assim: "número de elementos de **A** igual a três".)

n (B) = ...

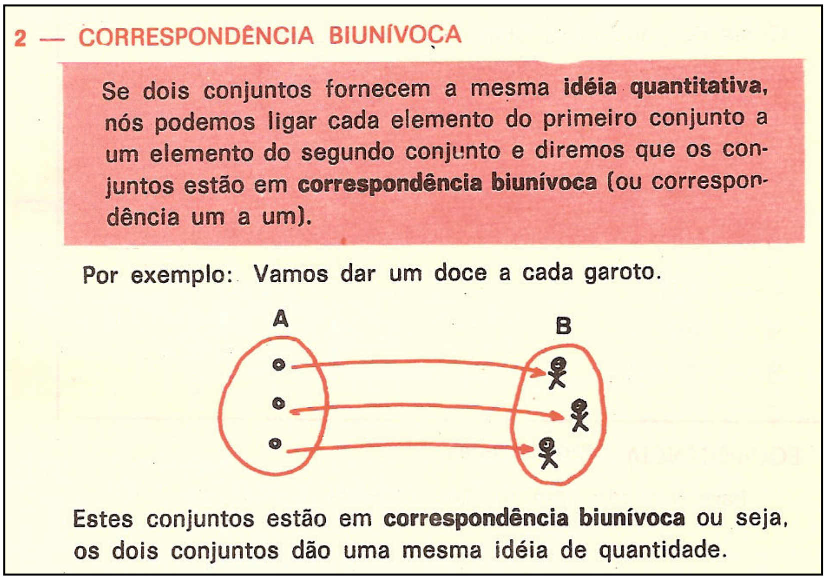
n (C) = ...

n (D) = ...

n (E) = ...

Figura 71 – Página 41 do volume I do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau de Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Após esta definição de número e numeral e os respectivos exercícios o autor apresenta uma explicação de correspondência biunívoca, conforme figura a seguir.



2 — CORRESPONDÊNCIA BIUNÍVOCA

Se dois conjuntos fornecem a mesma **idéia quantitativa**, nós podemos ligar cada elemento do primeiro conjunto a um elemento do segundo conjunto e diremos que os conjuntos estão em **correspondência biunívoca** (ou correspondência um a um).

Por exemplo: Vamos dar um doce a cada garoto.

Estes conjuntos estão em **correspondência biunívoca** ou seja, os dois conjuntos dão uma mesma idéia de quantidade.

Figura 72 – Página 43 do volume I do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau de Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Notamos que ao abordar os números naturais, o autor seguiu as orientações dos Assuntos Mínimos sugeridas pelo GEEM (1962), que recomendavam a idéia de trabalhar os números naturais com a idéia de conjuntos.[61]

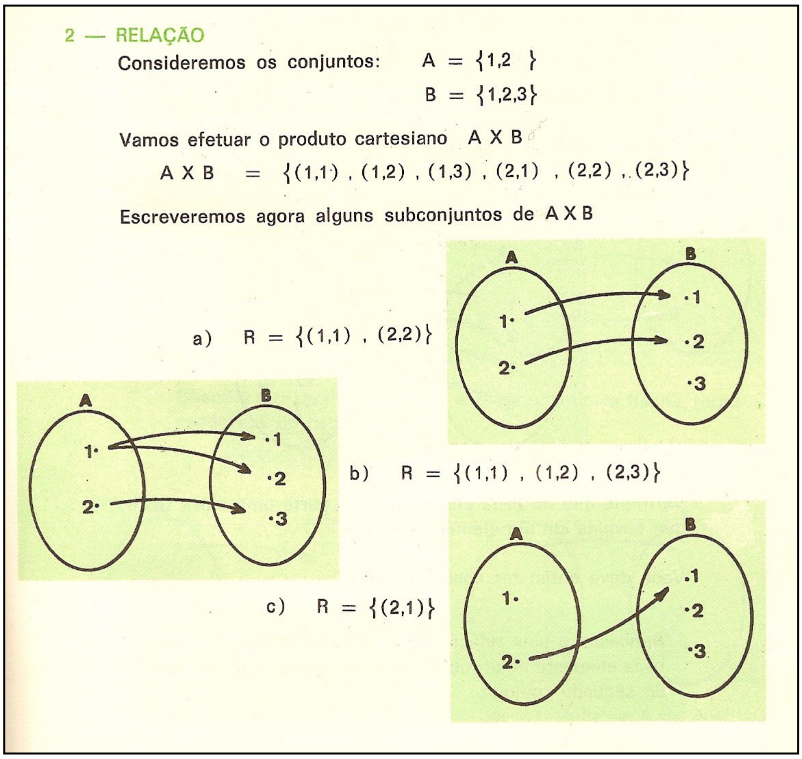
Nos volumes II e III da coleção de Miguel Asis Name não há presença de conteúdos relacionados à *função*, como por exemplo, a idéia de relação, correspondência, variáveis e aplicações, um diferencial das outras analisadas que vinham abordando conceitos relacionados com funções paulatinamente em suas coleções.

No volume IV da coleção, destinado aos alunos da 8ª série, o autor apresenta a abordagem do conceito de *funções* somente em um capítulo, com o tratamento das *funções lineares* e *quadráticas*.[62]

O autor começa o capítulo IV – *Funções Lineares e Quadráticas* explicando o produto cartesiano com o seguinte exemplo: “Dados os conjuntos: A = {1,2} e B = {1,2}, então A x B = {(1,5) , (1,7) , (2,5) , (2,7)}” (NAME, 1973, p.67).

Após esta explicação, o autor relaciona os pares ordenados com os elementos do conjunto A com o conjunto B com o diagrama de flechas, para conceituar *relação*.

61 Esta forma de abordar os números naturais conforme as orientações do GEEM (1965), também foi seguida pelas demais coleções analisadas.
62 Ver anexo XVI.



2 — RELAÇÃO

Consideremos os conjuntos: A = {1,2 }

B = {1,2,3}

Vamos efetuar o produto cartesiano A X B

A X B = {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (2,1) , (2,2) , (2,3)}

Escreveremos agora alguns subconjuntos de A X B

a) R = {(1,1) , (2,2)}

b) R = {(1,1) , (1,2) , (2,3)}

c) R = {(2,1)}

Figura 73 – Página 67 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau de Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Após escrever os subconjuntos de A x B, conforme a figura acima, o autor escreve que todos esses subconjuntos são relações da seguinte forma: “A relação de A para B é um subconjunto de A x B” (NAME, 1973, p. 68).

Após a definição de *relação*, autor apresenta o conceito de *aplicação* ou *função*. Para o autor estas palavras são sinônimas[63] e consideradas “um tipo especial de relação”. (NAME, 1973, p. 68).

Com esta consideração Name define função ou aplicação, como sendo: “Aplicação é uma relação entre dois conjuntos, em que a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um único do segundo conjunto.” (NAME, 1973, p.68).

Esta definição de função é semelhante à de Sangiorgi encontrada no volume IV da coleção moderna, embora Name denomine *Aplicação* ao invés de *Função*.

Veja a seguir a definição de f*unção* adotada por Sangiorgi e Name.

63 A palavra *sinônimas* não é utilizada pelo autor, porém, sempre quando o autor menciona aplicação ele cita *aplicação ou função*, fazendo-nos entender que estas palavras tem significados semelhantes.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO	
Osvaldo Sangiorgi	**Miguel Asis Name**
Função é uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B.	Aplicação é uma relação entre dois conjuntos, em que a cada elemento do primeiro conjunto corresponde um único do segundo conjunto.

Após a definição de *aplicação*, o autor faz ilustrações para exemplificar relações entre conjuntos que podem ou não ser denominadas como aplicação, conforme podemos verificar nas figuras 74,75 e 76.

Exemplos de aplicações:

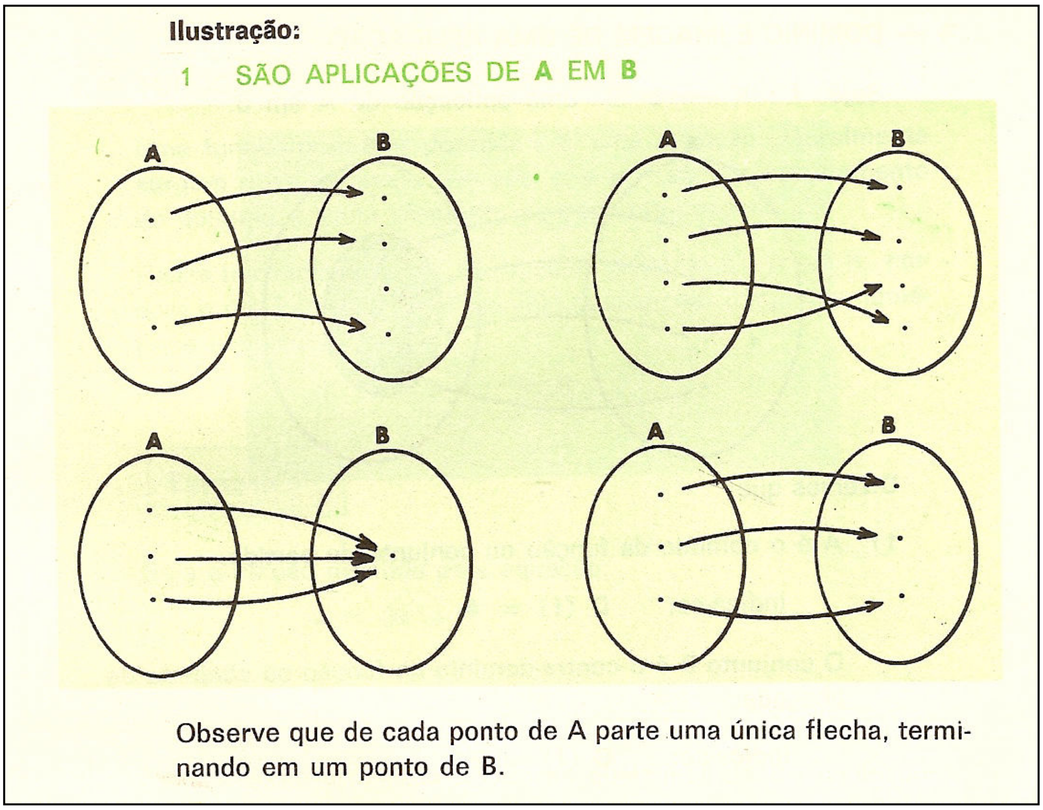


Figura 74 – Página 69 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau de Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Contra-exemplos de aplicações:

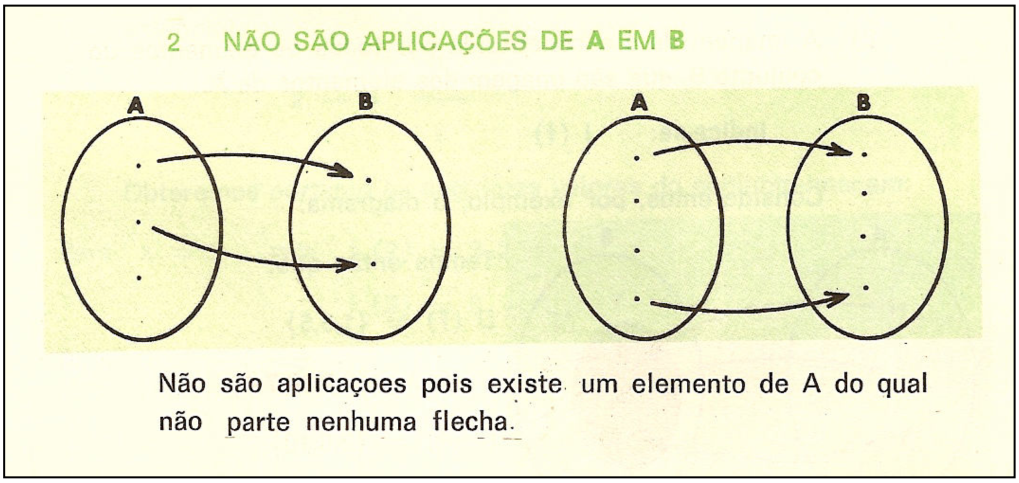


Figura 75 – Página 69 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

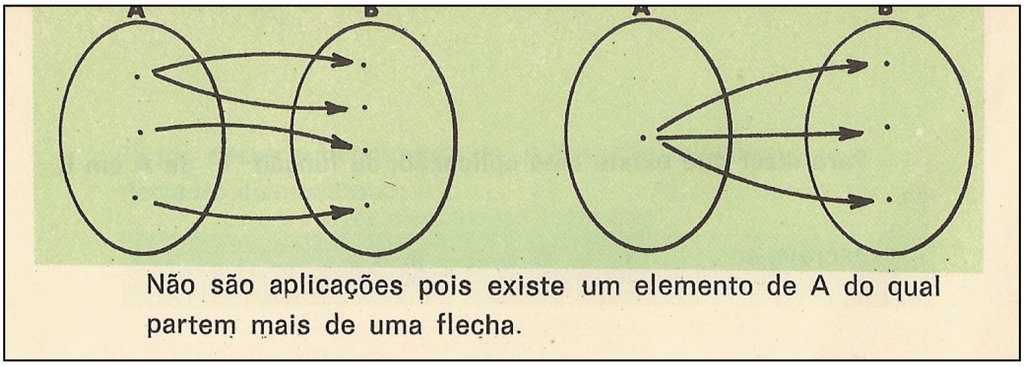


Figura 76 – Página 70 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

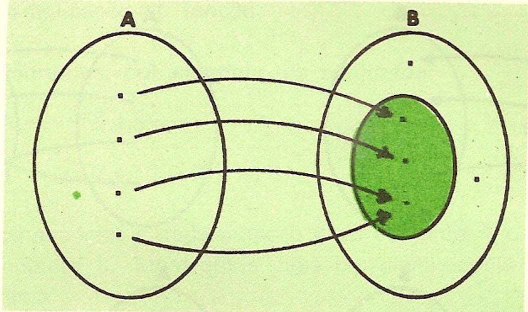
Após mostrar exemplos de aplicação e contra-exemplos de aplicação o autor utiliza as relações entre conjuntos para explicar o conjunto imagem e contra-domínio salientando que o conjunto imagem é sempre um subconjunto do contra-domínio.

Percebemos que a metodologia que Name adota para ensinar o que é domínio, contra-domínio e imagem de aplicação é semelhante com a de Sangiorgi em tempos modernos. Ambos utilizam diagramas de flechas bastante parecidos para tais explicações.

Miguel Asis Name

4 — DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA APLICAÇÃO

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação de A em B.



Dizemos que:

1) A é o domínio da função ou conjunto de partida.

Indica-se: $D(f) = A$

O conjunto B é o contra-domínio da função ou conjunto de chegada.

Indica-se: $C(f) = B$

2) A imagem de f é constituída por todos os elementos do conjunto B, que são imagem dos elementos de A.

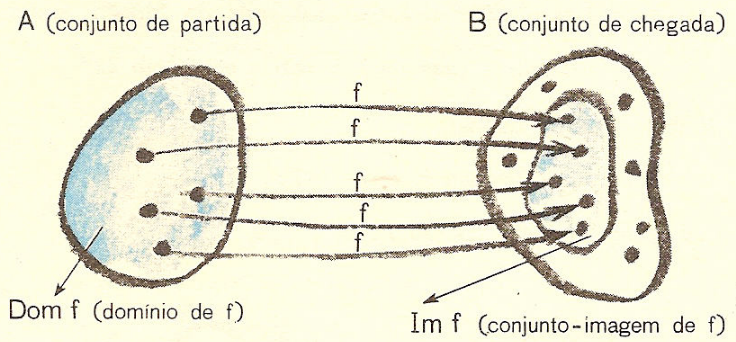
Indica-se: $I(f)$

Figura 77 – Página 70 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Sangiorgi

O conjunto A é denominado *domínio* da função f, e o conjunto de todos os elementos de B, associados aos elementos de A pela função f, é denominado *conjunto-imagem* ou *contra-domínio* da função f. Indicações:

domínio: Dom f *conjunto-imagem:* Im f



Os elementos do *conjunto-imagem* (Im f) são denominados IMAGENS dos respectivos elementos do *domínio* (Dom f).

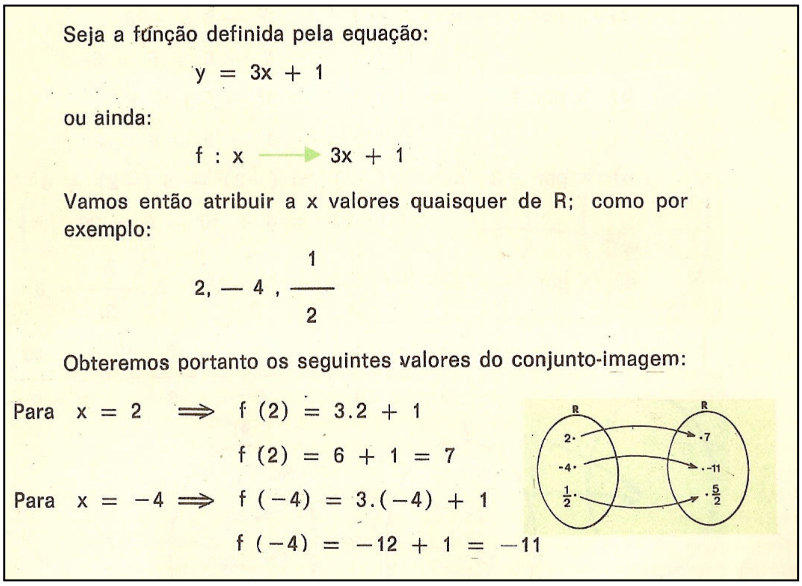
Figura 78 – Página 76 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para o Ginásio de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Após a definição de domínio, contra-domínio e imagem o autor trabalha a ideia de variáveis com o conceito de *função* definida por equação, atribuindo valores a *x* e obtendo os valores do conjunto imagem e fazendo os diagramas.

Ao tratar uma *função definida por equação* o autor comete uma confusão conceitual.

Apesar disso, percebemos que Name ao tratar o conceito de *função*, atribui valores à x, de forma semelhante à de Sangiorgi.

Miguel Asis Name


Seja a função definida pela equação:

$$y = 3x + 1$$

ou ainda:

$$f : x \longrightarrow 3x + 1$$

Vamos então atribuir a x valores quaisquer de R; como por exemplo:

$$2, -4, \frac{1}{2}$$

Obteremos portanto os seguintes valores do conjunto-imagem:

Para $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 3.2 + 1$

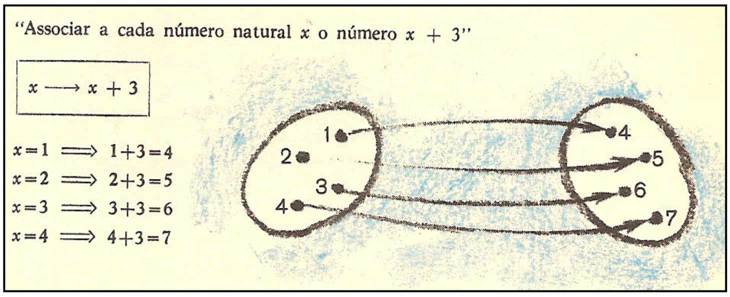
$f(2) = 6 + 1 = 7$

Para $x = -4 \Longrightarrow f(-4) = 3.(-4) + 1$

$f(-4) = -12 + 1 = -11$

Figura 79 – Página 71 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Sangiorgi


"Associar a cada número natural x o número $x + 3$"

$\boxed{x \longrightarrow x + 3}$

$x=1 \Longrightarrow 1+3=4$

$x=2 \Longrightarrow 2+3=5$

$x=3 \Longrightarrow 3+3=6$

$x=4 \Longrightarrow 4+3=7$

Figura 80 – Página 74 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para o Ginásio de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Na seqüência são propostos exercícios, pedindo ao aluno que assinale o diagrama que representa *função*. Exercícios semelhantes estão também no volume 4 da coleção *Matemática Curso Moderno* de Sangiorgi, como podemos verificar nas figuras 81 e 82.

Miguel Asis Name

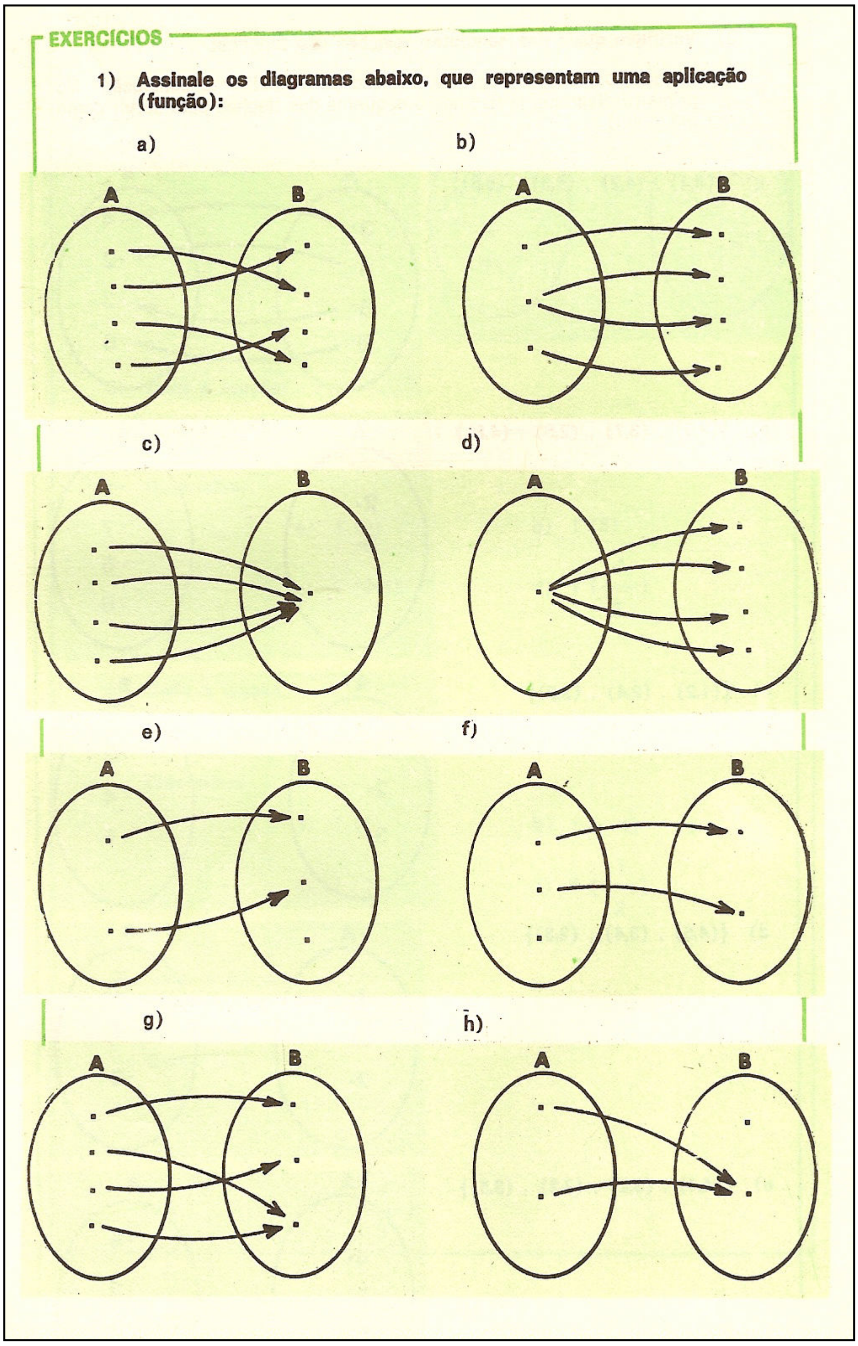


Figura 81 – Página 73 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name.
(Editora do Brasil S.A. -1973).

Sangiorgi

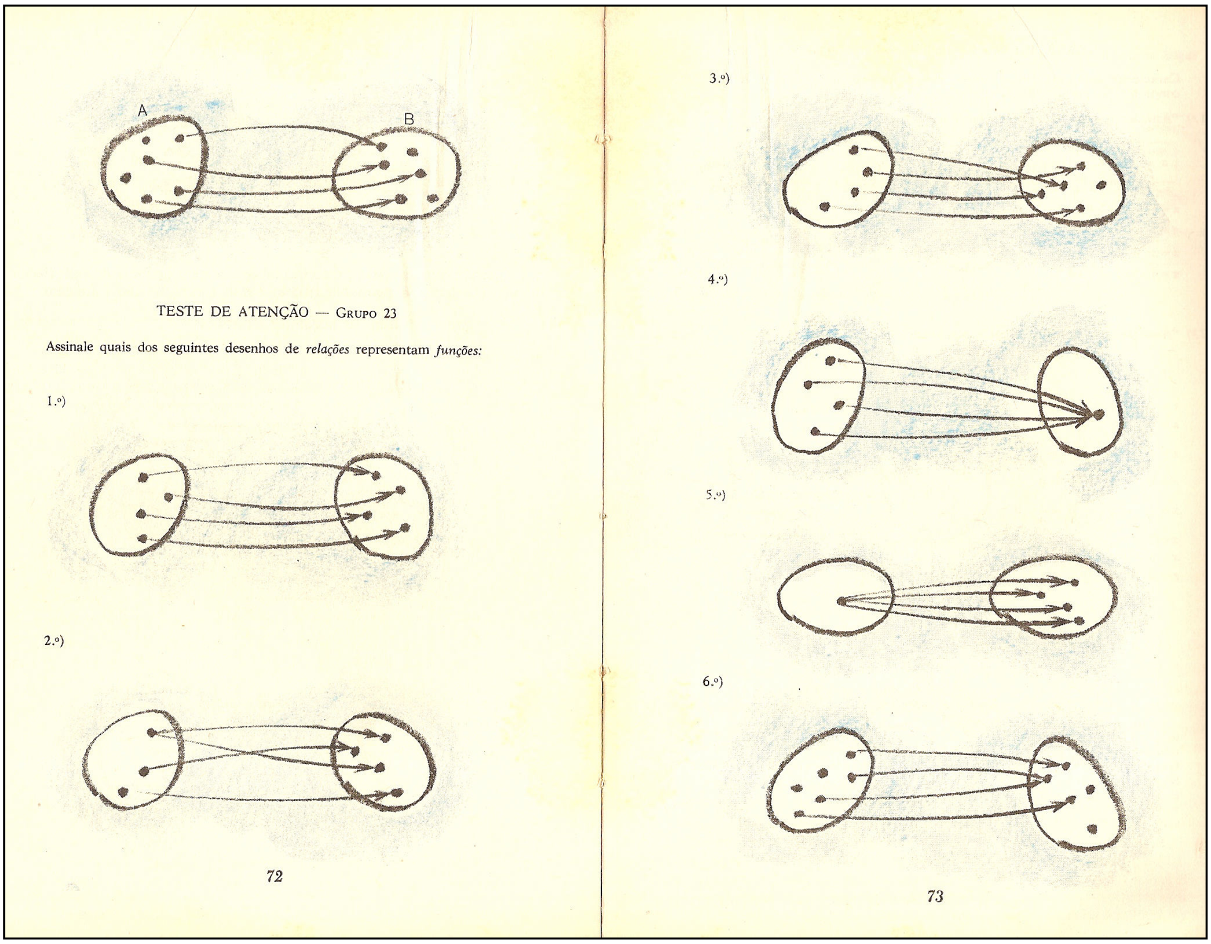


Figura 82 – Página 72 e 73 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para o Ginásio de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

O autor aborda a definição de *função linear* como "toda função do tipo y =ax+b com a, $b \in \mathrm{R}$ e $a \neq 0$ recebe o nome de função linear ou do primeiro grau." (NAME, 1973, p. 77). Logo após esta definição, o autor trabalha com a representação gráfica com exercícios resolvidos[64] e com exercícios propostos aos alunos. [65]

O autor trabalha com a representação: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$gráfico. A metodologia que Name aborda em seu livro para o ensino da função linear é semelhante a de Sangiorgi.

64 Exemplo na figura 83.
65 Veja anexo XVII.

Miguel Asis Name

Exemplo 1

Representa graficamente a função: $y = 2x - 1$

Solução:

Para $x = 0 \Longrightarrow y = 2.0 - 1 = -1$

Para $x = 1 \Longrightarrow y = 2.1 - 1 = 1$

TABELA

x	y	PONTOS
0	-1	$(0, -1)$
1	1	$(1, 1)$

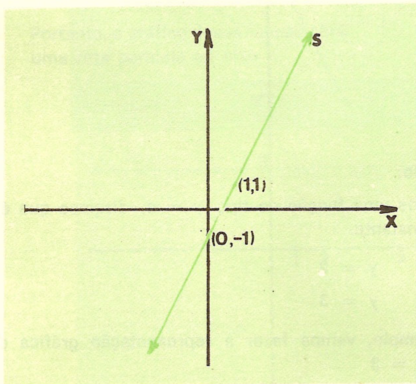


Figura 83 – Página 79 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Sangiorgi

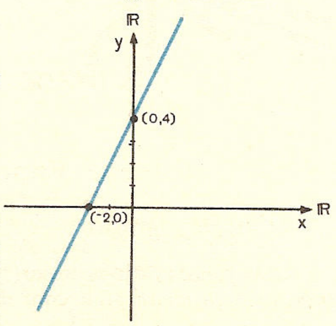
Exemplos:

1.º) Seja a *função linear* f definida por:

$$y = 2x + 4$$

ou seja: $f\colon x \longrightarrow 2x + 4$

O *gráfico* dessa função — que é uma *reta* — pode ser determinado mediante *dois de seus pontos* (em particular pelos *pontos de intersecção* com os eixos-x e y, respectivamente). Assim:



	x	y	pontos
ou	0	4	$(0, 4)$
	$^-2$	0	$(^-2, 0)$

$x = 0 \Longrightarrow y = 2 \times 0 + 4 = 0 + 4 = 4$

$y = 0 \Longrightarrow 2x + 4 = 0 \Longleftrightarrow 2x = {}^-4 \Longleftrightarrow x = {}^-2$

A *raiz* ou *zero* da função linear é obtida resolvendo-se a equação:

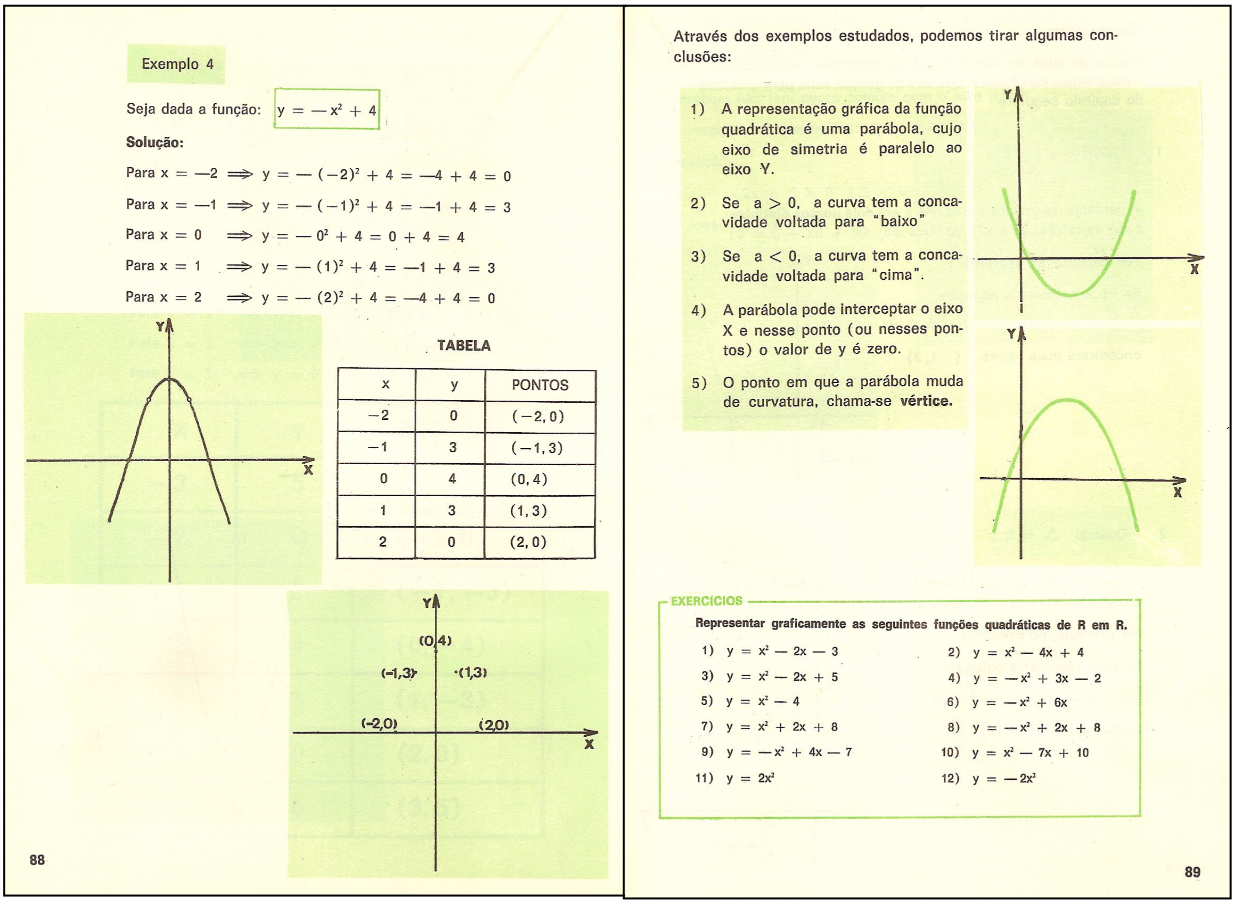
$2x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = {}^-2$ e, portanto, a *raiz* ou *zero* é $^-2$.

Observe, no gráfico, que a *raiz* ou *zero* da função linear: $y = 2x + 4$, é a *abscissa* do *ponto-intersecção* da reta, que a representa, com o *eixo-x*.

Figura 84 – Página 94 do livro *Matemática-Curso Moderno* do 4º volume para o Ginásio de Osvaldo Sangiorgi.
(Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Na página 83, Name define função quadrática como: “Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$ recebe o nome de função quadrática ou do segundo grau”. (NAME, 1973, p. 83).

Para ensinar a função quadrática Name utiliza a mesma estratégia do ensino da função linear, ou seja, a representação: expressão algébrica $\Rightarrow$ tabela $\Rightarrow$ gráfico. Seguido do estudo das parábolas e exercícios para que o aluno resolva.



Exemplo 4

Seja dada a função: $\boxed{y = -x^2 + 4}$

Solução:

Para $x = -2 \Rightarrow y = -(-2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$

Para $x = -1 \Rightarrow y = -(-1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$

Para $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 + 4 = 0 + 4 = 4$

Para $x = 1 \Rightarrow y = -(1)^2 + 4 = -1 + 4 = 3$

Para $x = 2 \Rightarrow y = -(2)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$

TABELA

x	y	PONTOS
−2	0	(−2, 0)
−1	3	(−1, 3)
0	4	(0, 4)
1	3	(1, 3)
2	0	(2, 0)

88

Através dos exemplos estudados, podemos tirar algumas conclusões:

1) A representação gráfica da função quadrática é uma parábola, cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo Y.

2) Se $a > 0$, a curva tem a concavidade voltada para “baixo”

3) Se $a < 0$, a curva tem a concavidade voltada para “cima”.

4) A parábola pode interceptar o eixo X e nesse ponto (ou nesses pontos) o valor de y é zero.

5) O ponto em que a parábola muda de curvatura, chama-se **vértice**.

EXERCÍCIOS

Representar graficamente as seguintes funções quadráticas de R em R.

1) $y = x^2 - 2x - 3$
2) $y = x^2 - 4x + 4$
3) $y = x^2 - 2x + 5$
4) $y = -x^2 + 3x - 2$
5) $y = x^2 - 4$
6) $y = -x^2 + 6x$
7) $y = x^2 + 2x + 8$
8) $y = -x^2 + 2x + 8$
9) $y = -x^2 + 4x - 7$
10) $y = x^2 - 7x + 10$
11) $y = 2x^2$
12) $y = -2x^2$

89

Figura 85 - Página 88 e 89 do volume IV do livro *Matemática Ensino Moderno* destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau - Miguel Asis Name. (Editora do Brasil S.A. -1973).

Esta forma de ensinar *função quadrática* também é semelhante a de Sangiorgi.

Em relação às atividades propostas aos alunos por meio de exercícios, de uma maneira geral o autor propõem atividades que possibilitam associações de diagramas e a conversão expressão algébrica $\Rightarrow$ diagrama de flechas.

Notamos que o autor procurou diversificar os enunciados dos exercícios com os seguintes verbos de comando: determinar, assinalar, verificar e representar, como assim ocorreu com outros autores nas outras coleções já analisadas.

3.2.8 Síntese da coleção didática de Name.

Percebemos que a coleção de Name aborda diversos conteúdos a partir da idéia de conjunto, seguindo a tendência moderna de apropriação da linguagem simbólica dos conjuntos, conforme as orientações/ sugestões do GEEM (1962, 1965b).

No que se refere à comparação dos livros destinados ao ginásio (como os de Sangiorgi, Bóscolo e Castrucci - em tempos modernos) e ao primeiro grau (como esta coleção analisada), verificamos uma equivalência entre os conteúdos de funções presentes nas obras destinadas aos dois cursos, o que dá indícios que a legislação que propôs a alteração do ginasial para o 1º grau não representou uma mudança significativa nos currículos, pelo menos em relação ao conteúdo de *função*.

Os conteúdos do livro de Name da 8ª série do 1º grau se equivalem àqueles que figuravam no livro da 4ª série ginasial de Sangiorgi da coleção moderna. O autor aborda os mesmos conteúdos de Osvaldo Sangiorgi, no livro da 4ª série, porém sem a mesma ênfase no estudo das *funções*, ou seja, o autor ensina *funções* de uma maneira mais simplificada que Sangiorgi.

Percebemos que antes do autor definir *função*, ele explica o conceito de relação e correspondência biunívoca, como vem sendo utilizado também pelos outras coleções já analisadas.

Quanto aos exercícios propostos, notamos que Name os propôs em menor quantidade em relação à coleção moderna de Sangiorgi, porém, notamos que os dois autores procuraram diversificar os enunciados dos exercícios.

3.2.9 A coleção didática do GRUEMA.

A coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau,* publicada pela Companhia Editora Nacional foi elaborada pelo GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada[66], composto pelas professoras Anna Averbuch[67], Franca Cohen Gottieb[68], Lucília Bechara Sanchez[69] e Manhucia Perelberg Liberman[70], com consultoria de Luiz Henrique Jacy Monteiro[71].

Desenvolver uma pesquisa sobre livros didáticos do ponto de vista de um historiador das disciplinas escolares envolve localizá-los em todo um contexto histórico-cultural, percebê-los em um tempo e espaço determinados e entendê-los no contexto no qual foram produzidos; identificando similaridades e diferenças em relação às outras coleções didáticas e dimensionando o seu papel nas culturas escolares em que foram veiculados. Assim, apresentaremos brevemente o caminho percorrido pelas autoras, suas relações com o ensino primário e com o MMM, e algumas considerações sobre o que as levou à publicação da coleção a ser analisada.

Segundo Medina (2008), em 1964 a Editora Nacional fez um convite à professora Manhucia Perelberg Liberman para elaborar uma coleção didática de matemática para o ensino primário, que então convidou suas colegas do GEEM, Lucília Bechara Sanchez e Anna Averbuch para elaborar uma coleção de matemática que seguiria a proposta estruturalista defendida pelo MMM.

No início da década de 1960 as professoras eram bastante conhecidas pelos cursos que ministravam pelo GEEM e "respeitadas pelo professorado, consideradas como referência em relação às modernizações do ensino nas séries iniciais e pertencentes a instituições reconhecidas nacionalmente, legitimando a publicação". (MEDINA, 2008, p. 153).

66 Ao citarmos o Grupo de Ensino de Matemática Atualizada, iremos representá-lo como GRUEMA.

67 Anna Averbuch (1928-2004). Licenciada e Bacharel em Matemática pela UFRJ, professora da Universidade de Santa Ursula (RJ), sócia fundadora do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática – GEPEM.

68 Licenciada e Bacharel em Matemática pela UFRJ, professora da Universidade de Santa Ursula (RJ), sócia fundadora do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática GEPEM.

69 Mestre em Metodologia de Ensino, doutora em Administração Escolar, sócia fundadora do GEEM e da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

70 Bacharel e Licenciada pela UFRJ, sócia fundadora do GEEM.

71 Jacy Monteiro (1921-1975). Professor da Universidade de São Paulo, membro do GEEM.

Em 1966 aconteceu o I Seminário de Matemática Moderna do ensino primário em São Paulo, com patrocínio do Departamento Nacional de Educação, com a participação de professores de diversos estados brasileiros e representantes de órgãos educacionais. Neste seminário foi aprovada uma comissão[72] para elaborar o texto *Ensino de Matemática Moderna na Escola Primária – experiências e resultados obtidos* que fora "utilizado mais tarde, para subsidiar as reformas curriculares divulgadas pelo governo" (MEDINA, 2008, p. 154).

A década de 1960 foi marcada pela expansão dos sistemas de ensino no Brasil, devido a "democratização" do acesso aos alunos para o ensino primário, com isso atraiu o mercado de livros escolares, aumentando o interesse das editoras em publicarem livros didáticos, inclusive de matemática.

No início do ano de 1967, Lucília Bechara Sanchez e Manhucia Perelberg Liberman publicam o 1º volume da coleção *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar*, cuja 1ª edição superou o best-seller de Sangiorgi, com o total de 102.849 exemplares. (VILLELA, 2007).

Neste contexto histórico, em 31 de maio de 1967 foi promulgado o Ato 148 que constituiu um grupo de trabalho[73] para elaborar o projeto de reorganização curricular e programas para o curso primário no Estado de São Paulo que norteou novas diretrizes para a educação primária e reorganização dos sistemas de ensino.

Em 1968, Manhucia Perelberg Liberman participou da elaboração do Programa da Escola Primária do Estado de São Paulo, onde continha as ideias para o MMM no ensino primário, como por exemplo, a introdução da linguagem de conjuntos. Este programa foi divulgado nas escolas e colocado em prática a partir de 1969. (Medina, 2008).

No ano de 1971 a Lei 5692/71 promulgou uma mudança na nomenclatura das séries aos quais os livros didáticos analisados se destinavam, ou seja, essa lei unificou o ensino primário e o ensino ginasial em um curso único de 8 anos de duração, denominado 1º grau. Dessa forma, o ensino de 1ª a 4ª série ginasial passou a ser denominado de 5ª a 8ª série do primeiro grau.

Com esta implementação da Lei 5692/71, os Estados tinham que se adaptar e reorganizar sua estrutura de ensino, a demanda por professores com novas metodologias de ensino era necessária. Em 1972, Bechara é convidada para

72 Segundo Medina (2008), Bezerra, Liberman, Sanchez, entre outros participaram desta comissão.
73 Liberman participou do grupo como representante do GEEM.

organizar cursos para professores no Colégio Vera Cruz, em São Paulo. Nesse mesmo período o Estado de São Paulo, lançou o seu Plano de Ação para a Reforma de Ensino de 1º Grau.

Em 1973, a coleção *Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar* deixou de ser publicada. Foi criado o Grupo de Ensino de Matemática Atualizada - GRUEMA, em 1974, quando foi reformulada e lançada uma nova coleção com o título *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau* em 8 volumes para as oito séries do 1º Grau, de acordo com as reformas propostas na Lei 5.692/71.

Na página de abertura de todos os volumes as autoras escrevem na seção *Falando aos Mestres*:

> A reforma do ensino no Brasil, que estabeleceu uma Escola Fundamental de oito anos – Ensino de 1º Grau – veio a exigir a continuação da nossa coleção didática de Matemática para as quatro primeiras séries.
> A publicação do trabalho Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar chamou a atenção pela sua metodologia, pois estimula a descoberta, sugere o trabalho e atende às diferenças individuais dos alunos, exatamente os aspectos preconizados pela Reforma. Nada mais natural, portanto, que prosseguir a coleção, tornando-a completa para o ensino de 1º Grau.
> Para a elaboração dos quatro últimos volumes, destinados às 5ª, 6ª,7ª e 8ª séries, as professoras Lucília B. Sanchez e Manhúcia P. Liberman, autoras da coleção citada, julgaram necessário unir-se a elementos representativos de outros grupos, ampliando a equipe que agora conta com a presença de Anna Averbuch e Franca Cohem Gottlieb, para os trabalhos de elaboração de textos, experimentação e controle de resultados, a fim de que a preocupação com a linguagem adequada ao nível dos alunos não sacrifique a precisão de conceitos, para que os alunos não sejam mais tarde forçados a destruir para construir. (GRUEMA, 1977, p. 1).

Diferentemente das demais obras analisadas, já na apresentação, as autoras destacam a importância da metodologia da descoberta, bem como da relação da coleção com a experiência didática das autoras.

Sobre o nome GRUEMA, as autoras escrevem:

> GRUEMA – sigla por nós escolhida para Grupo de Ensino de Matemática Atualizada – foi inspirada no fato de que este trabalho não é obra exclusiva dos autores, mas de um grupo.
> O GRUEMA 5, antes de ser lançado, foi experimentado, com sucesso, em escolas particulares e oficiais de São Paulo e do Rio de Janeiro, onde professores controlaram os resultados.
> A eles os nossos cumprimentos pela eficiência e colaboração.

> Foi a dedicação de todos e de cada um dos compontes GRUEMA que permitiu o aperfeiçoamento e a melhoria do trabalho, que acreditamos ser mais um passo no progresso do ensino da Matemática no Brasil. (GRUEMA, 1977, p. 1).

Nesta pesquisa são examinadas os seguintes os livros da coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau* [74] : 5ª série - publicado em 1977, 6ª série - publicado em 1975, 7ª série – publicado em 1975 e 8ª série – publicado em 1976. [75]

Esta coleção é destinada ao professor, sendo dividida em duas partes: a primeira contempla os aspectos pedagógicos, que abrangem os objetivos gerais, os específicos, os instrucionais, as estratégias e a sugestão de programação por bimestre; a segunda parte corresponde ao livro do aluno, no qual contempla os exercícios resolvidos (*preliminares* e de *aplicação*), história em quadrinhos, generalizações e algumas anotações deixadas como sugestão para o professor trabalhar um determinado conteúdo na sala de aula.

FIGURA 86-Capa da coleção didática ginasial do GRUEMA: *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* (Companhia Editora Nacional)

Embora nossa pesquisa esteja concentrada no ensino de *função* da 5ª a 8ª série do 1º grau, consideramos relevante verificar se há indícios ou não de conceitos relacionados a ele nos livros de 1ª a 4ª série.

---

74 Esta coleção digitalizada nos foi cedida por Lucila Villela.
75 Nestes livros não há menção quanto à edição.

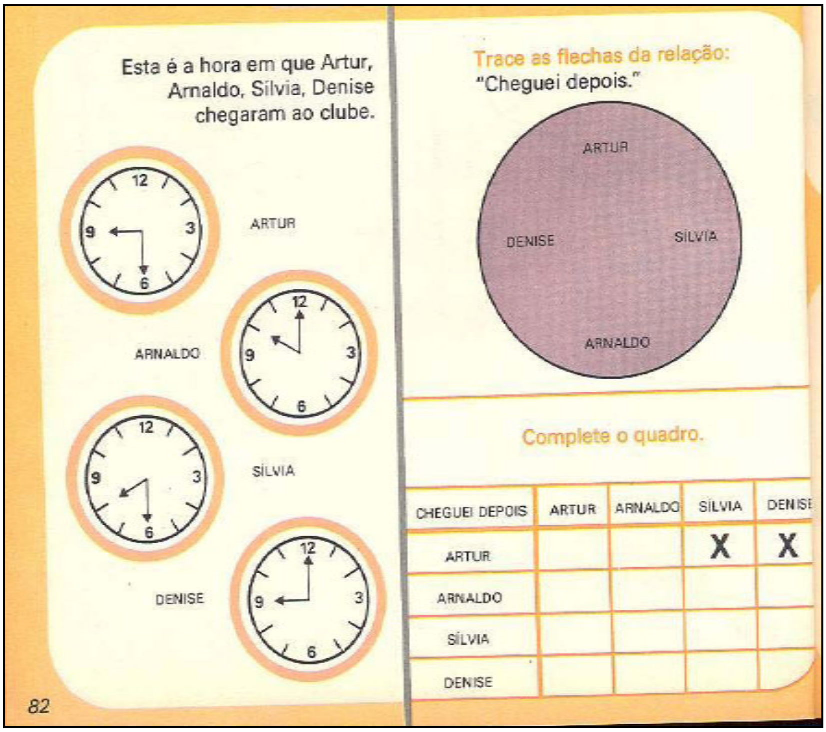
No volume 1 da coleção, verificamos que o GRUEMA aborda a ideia de *relação* na 1ª série, apresentando aos alunos a relação de medida como, por exemplo, *ser mais alto que, ser menos que,* dentre outras. [76]

No volume 2, destinado aos alunos da 2ª série, notamos que não há presença de conteúdo de *função* e nem elementos relacionados.

No volume 3, o GRUEMA retoma o conceito de *relações*. Na parte pedagógica estão os seguintes objetivos a serem atingidos ao ensinar *relações* aos alunos:

> 1) Levar a criança a estabelecer relações entre elementos de um mesmo conjunto, através de flechas, gráficos.
> 2) Formar os conceitos de "fator", "múltiplo".
> 3) Utilizar pares ordenados para focalizar pontos num gráfico.
> 4) Relacionar elementos de um conjunto, utilizando o gráfico de linhas e colunas. (GRUEMA, 1974, p.18)

Na parte correspondente ao livro do aluno, o GRUEMA explica o conceito de *relação* com exercícios que associam conjuntos de objetos, nomes e desenhos de crianças por meio de diagramas de flechas, como podemos verificar abaixo:



CHEGUEI DEPOIS	ARTUR	ARNALDO	SÍLVIA	DENISE
ARTUR			X	X
ARNALDO				
SÍLVIA				
DENISE				

Figura 87 – Página 82 do volume III da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 3ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1974)

76 Ver anexo XVIII.

O GRUEMA aborda o conceito de *pares ordenados*, que será importante para a representação gráfica de uma *função*, conforme a próxima figura.

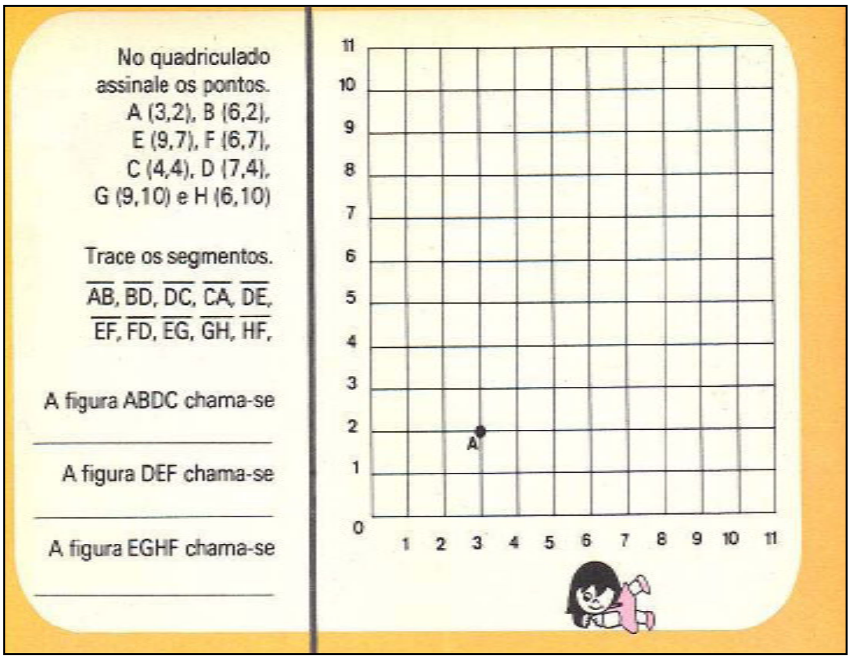


Figura 88 – Página 82 do volume III da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 3ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1974)

Analisando o volume 4 da coleção, observamos que não há presença de conteúdos relacionados ao tema *função*.

No volume 5, destinado aos alunos da 5ª série, há uma retomada do conceito de *relação* e enfatiza o ensino de *função*. [77]

Os objetivos instrucionais para o ensino de *relações* no livro para a 5ª série são:

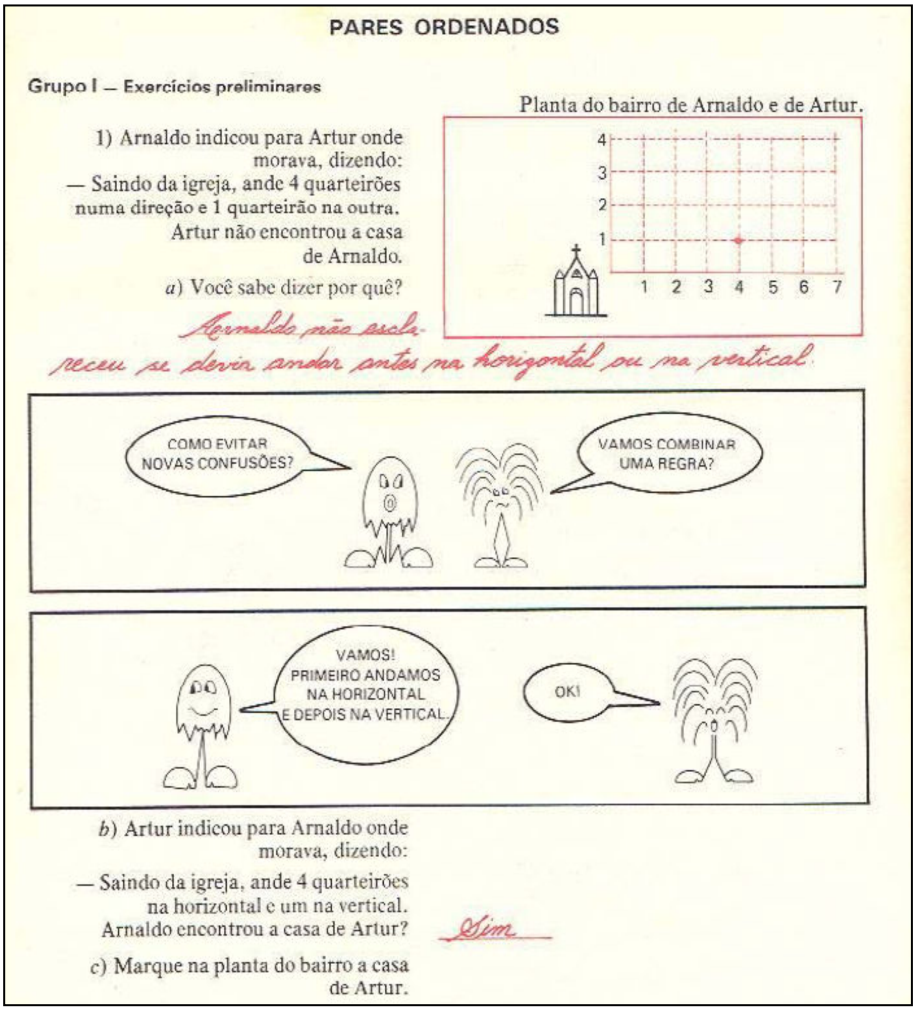
> 1. Identificar um par ordenado.
> 2. Representar um par ordenado em um gráfico cartesiano.
> 3. Descobrir leis que relacionam elementos de conjuntos.
> 4. Relacionar elementos de conjuntos por meio de uma lei dada.
> 5. Representar por meio de flechas, pares ordenados, tabelas ou gráficos os elementos de uma relação.
> 6. Identificar os gráficos de relação com os gráficos usados em outras áreas como geografia e estatística.
> 7. Determinar produto cartesiano de conjuntos.
>
> (GRUEMA, 1977, p.4).

Analisando a parte do livro do aluno, que contempla exercícios resolvidos, percebemos que o GRUEMA pretende ensinar o conceito de *par ordenado* a partir

---

77 Ver anexo XIX.

de situações do dia a dia do aluno, como, por exemplo, ir a igreja. As histórias em quadrinhos são usadas para sistematizar os conhecimentos.


PARES ORDENADOS

Grupo I — Exercícios preliminares

Planta do bairro de Arnaldo e de Artur.

1) Arnaldo indicou para Artur onde morava, dizendo:
— Saindo da igreja, ande 4 quarteirões numa direção e 1 quarteirão na outra.
Artur não encontrou a casa de Arnaldo.

a) Você sabe dizer por quê?

Arnaldo não esclareceu se devia andar antes na horizontal ou na vertical.

b) Artur indicou para Arnaldo onde morava, dizendo:
— Saindo da igreja, ande 4 quarteirões na horizontal e um na vertical.
Arnaldo encontrou a casa de Artur? Sim

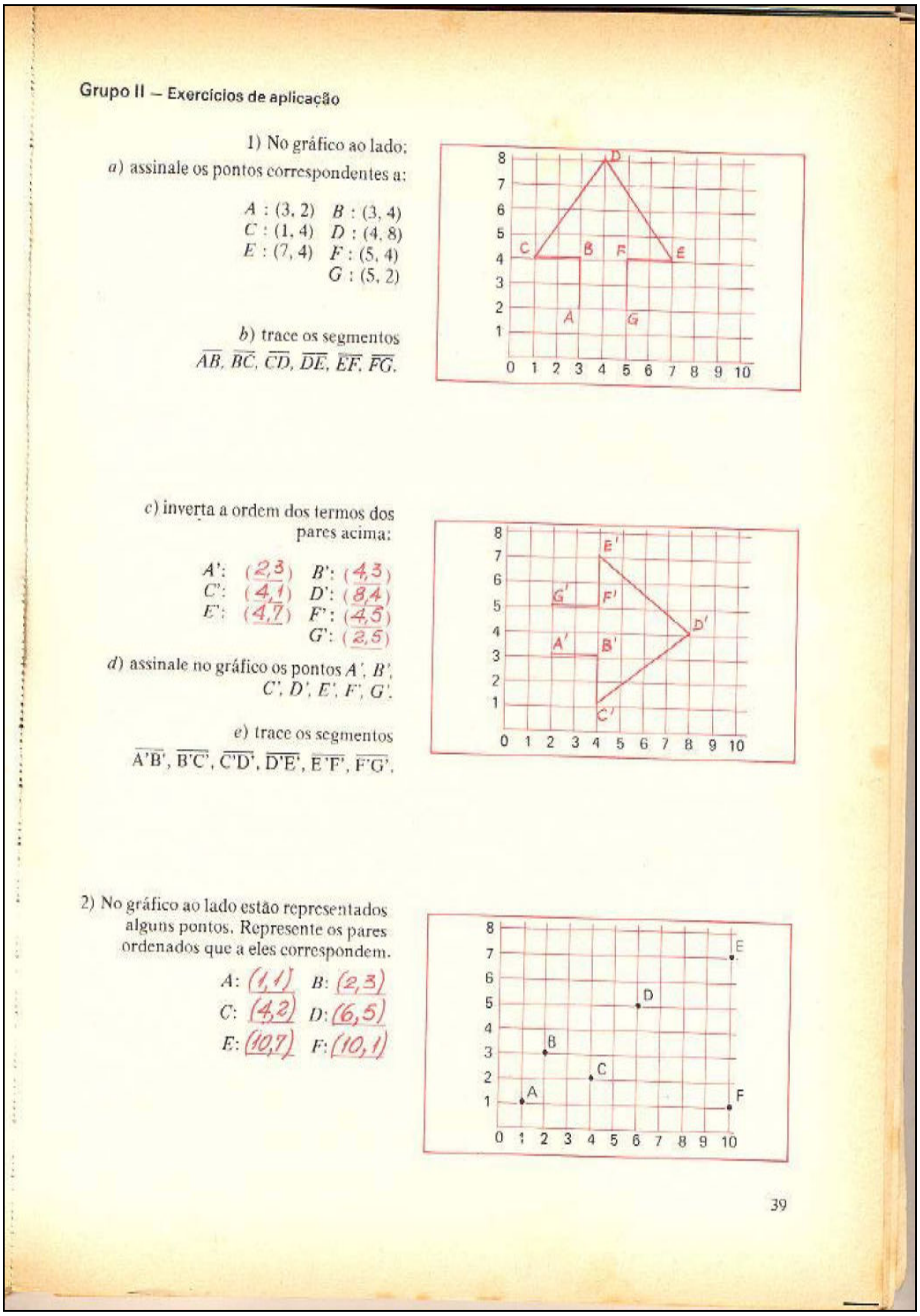
c) Marque na planta do bairro a casa de Artur.

Figura 89 – Página 38 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

A definição de *par ordenado*:

> Um par de elementos em que a ordem é importante chama-se par ordenado, e indica-se (a, b). Numa representação gráfica (gráfico cartesiano) o 1º elemento do par indica a direção horizontal e a 2º indica a vertical. (GRUEMA, 1977, p. 38).

Após a definição de *par ordenado*, são apresentados os *exercícios de aplicação* com nível crescente de dificuldades. Dessa forma o professor pode agir e respeitando os estágios de aprendizado dos alunos, como podemos verificar nos exercícios na figura 90 e 91.



Grupo II – Exercícios de aplicação

1) No gráfico ao lado:

a) assinale os pontos correspondentes a:

$A : (3, 2)$ $B : (3, 4)$
$C : (1, 4)$ $D : (4, 8)$
$E : (7, 4)$ $F : (5, 4)$
$G : (5, 2)$

b) trace os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$.

c) inverta a ordem dos termos dos pares acima:

A': (2,3) B': (4,3)
C': (4,1) D': (8,4)
E': (4,7) F': (4,5)
G': (2,5)

d) assinale no gráfico os pontos A', B', C', D', E', F', G'.

e) trace os segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'F'}$, $\overline{F'G'}$.

2) No gráfico ao lado estão representados alguns pontos. Represente os pares ordenados que a eles correspondem.

A: (1,1) B: (2,3)
C: (4,2) D: (6,5)
E: (10,7) F: (10,1)

39

Figura 90 – Página 39 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

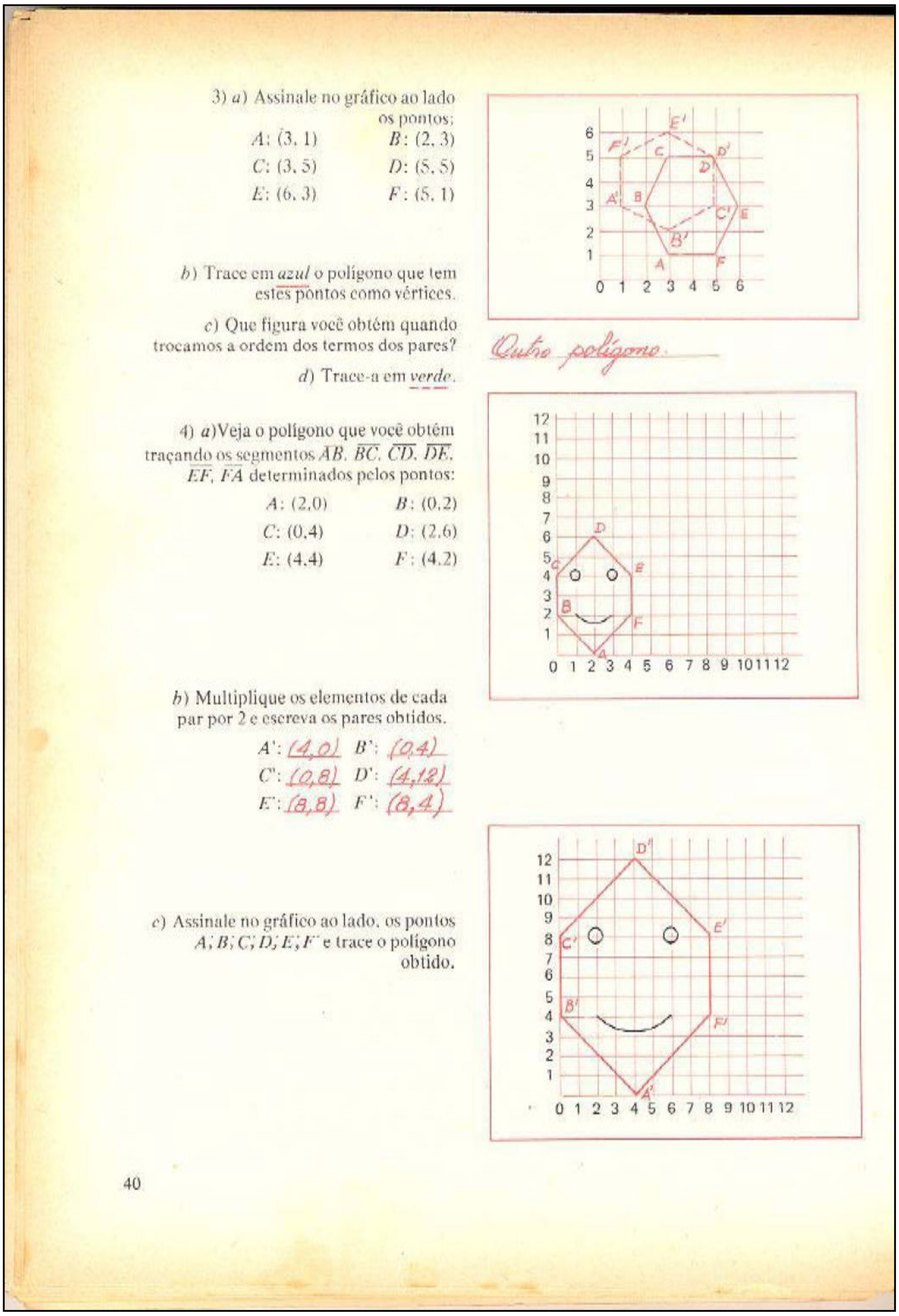
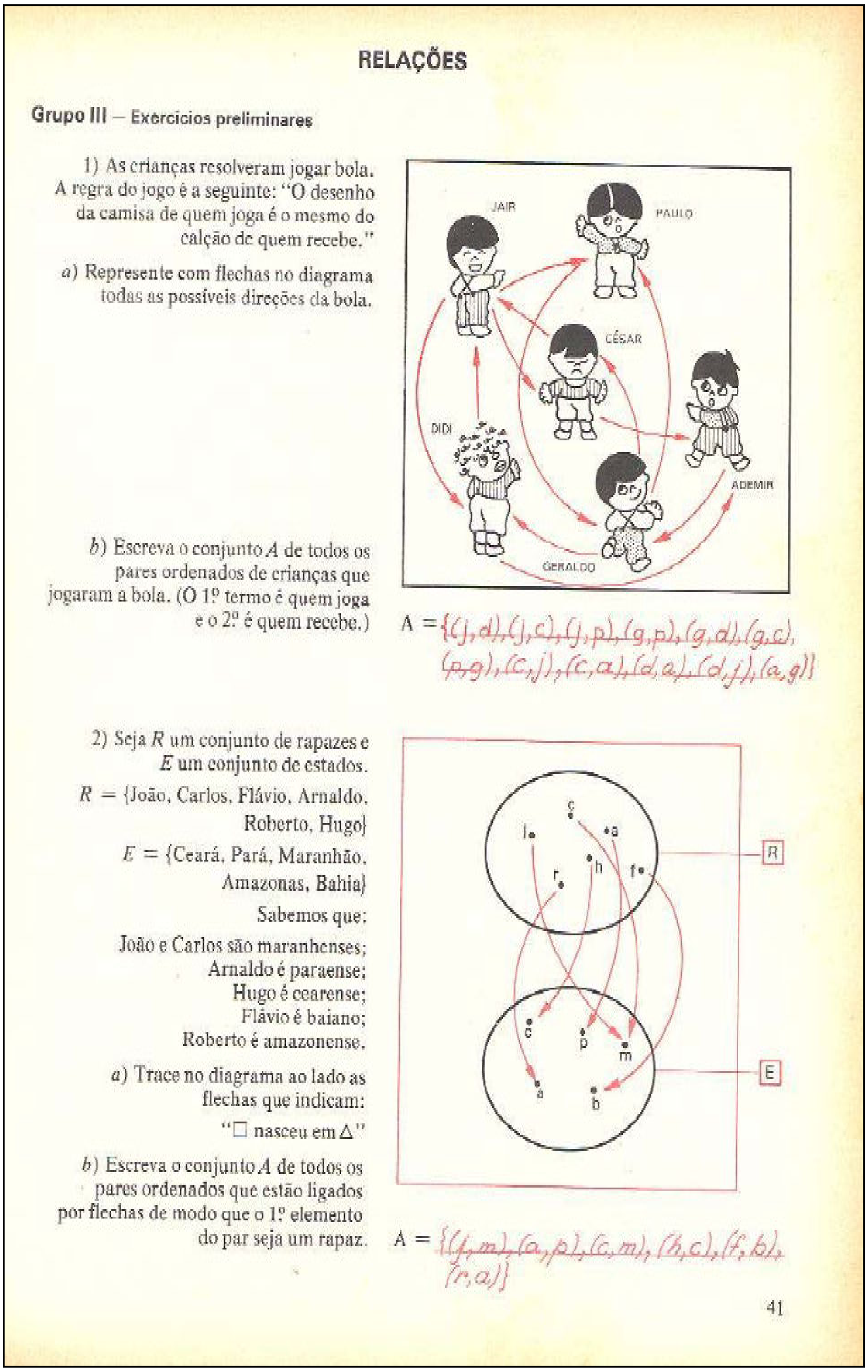


Figura 91 – Página 40 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

Ao tratar do tema *relações*, o GRUEMA também faz uso do diagrama de flechas de forma intuitiva, vai proporcionando ao aluno a oportunidade de utilizá-lo em situações contextualizadas, como podemos verificar na figura a seguir.



RELAÇÕES

Grupo III — Exercícios preliminares

1) As crianças resolveram jogar bola. A regra do jogo é a seguinte: "O desenho da camisa de quem joga é o mesmo do calção de quem recebe."

a) Represente com flechas no diagrama todas as possíveis direções da bola.

b) Escreva o conjunto *A* de todos os pares ordenados de crianças que jogaram a bola. (O 1º termo é quem joga e o 2º é quem recebe.)

A = {(j,d),(j,c),(j,p),(g,p),(g,d),(g,c),(p,g),(c,j),(c,a),(d,a),(d,j),(a,g)}

2) Seja *R* um conjunto de rapazes e *E* um conjunto de estados.

R = {João, Carlos, Flávio, Arnaldo, Roberto, Hugo}

E = {Ceará, Pará, Maranhão, Amazonas, Bahia}

Sabemos que:

João e Carlos são maranhenses;
Arnaldo é paraense;
Hugo é cearense;
Flávio é baiano;
Roberto é amazonense.

a) Trace no diagrama ao lado as flechas que indicam: "□ nasceu em △"

b) Escreva o conjunto *A* de todos os pares ordenados que estão ligados por flechas de modo que o 1º elemento do par seja um rapaz.

A = {(j,m),(a,p),(c,m),(h,c),(f,b),(r,a)}

41

Figura 92 – Página 41 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

Os *exercícios preliminares* possibilitam ao aluno que descubra uma outra forma de representar os pares ordenados, por diagrama de flechas, regras para descobrir as flechas. As autoras definem relação, como "um conjunto de pares ordenados" (GRUEMA, 1977, p. 42).

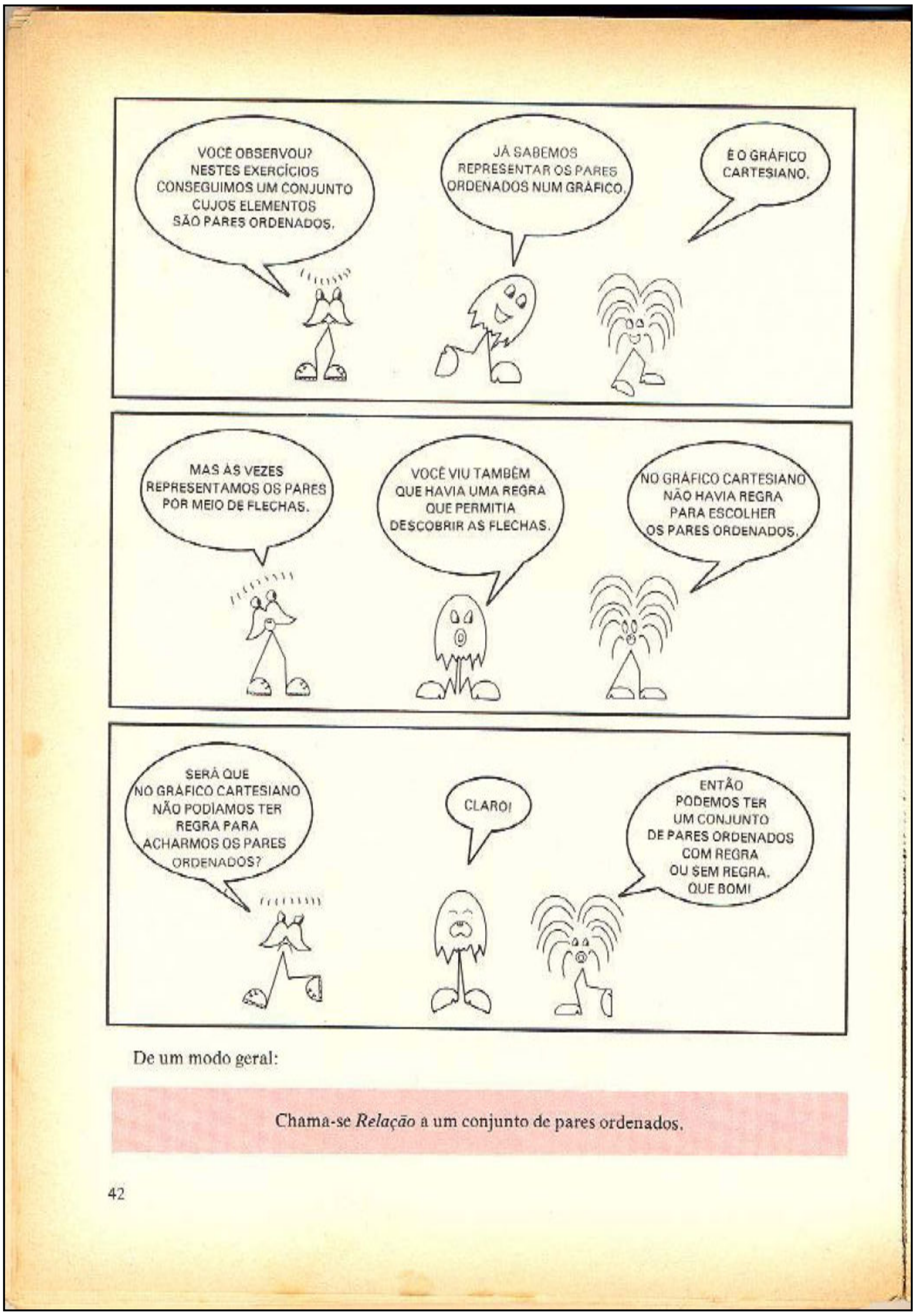
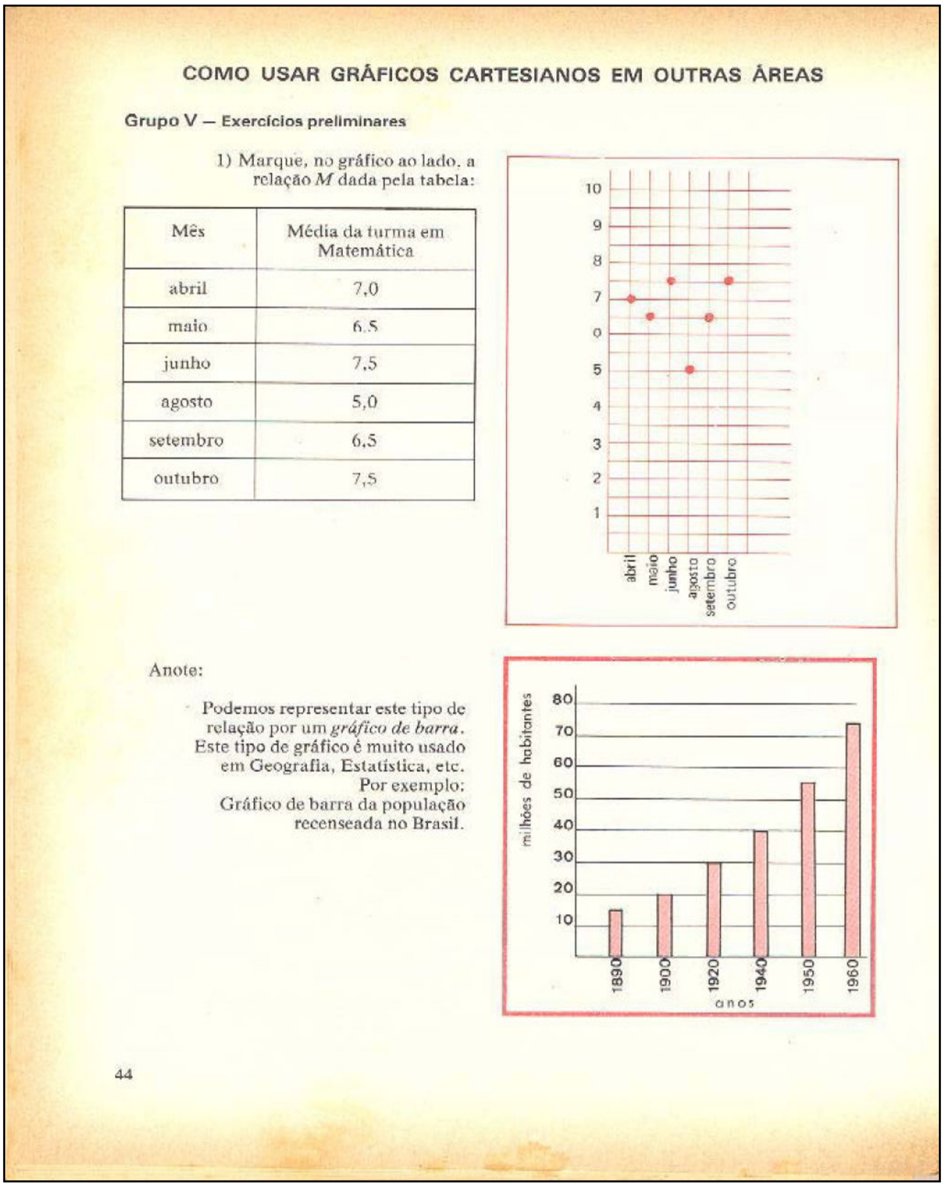


Figura 93 – Página 42 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

Observamos que o GRUEMA tende a fazer matemática partindo de situações contextualizadas, com espaço para o aluno refletir, duvidar, trocar ideias, participar coletivamente do conhecimento de forma ativa. Também são notáveis as articulações da Matemática com outras áreas do conhecimento, propostas pelas autoras, como na figura a seguir.



COMO USAR GRÁFICOS CARTESIANOS EM OUTRAS ÁREAS

Grupo V — Exercícios preliminares

1) Marque, no gráfico ao lado, a relação *M* dada pela tabela:

Mês	Média da turma em Matemática
abril	7,0
maio	6,5
junho	7,5
agosto	5,0
setembro	6,5
outubro	7,5

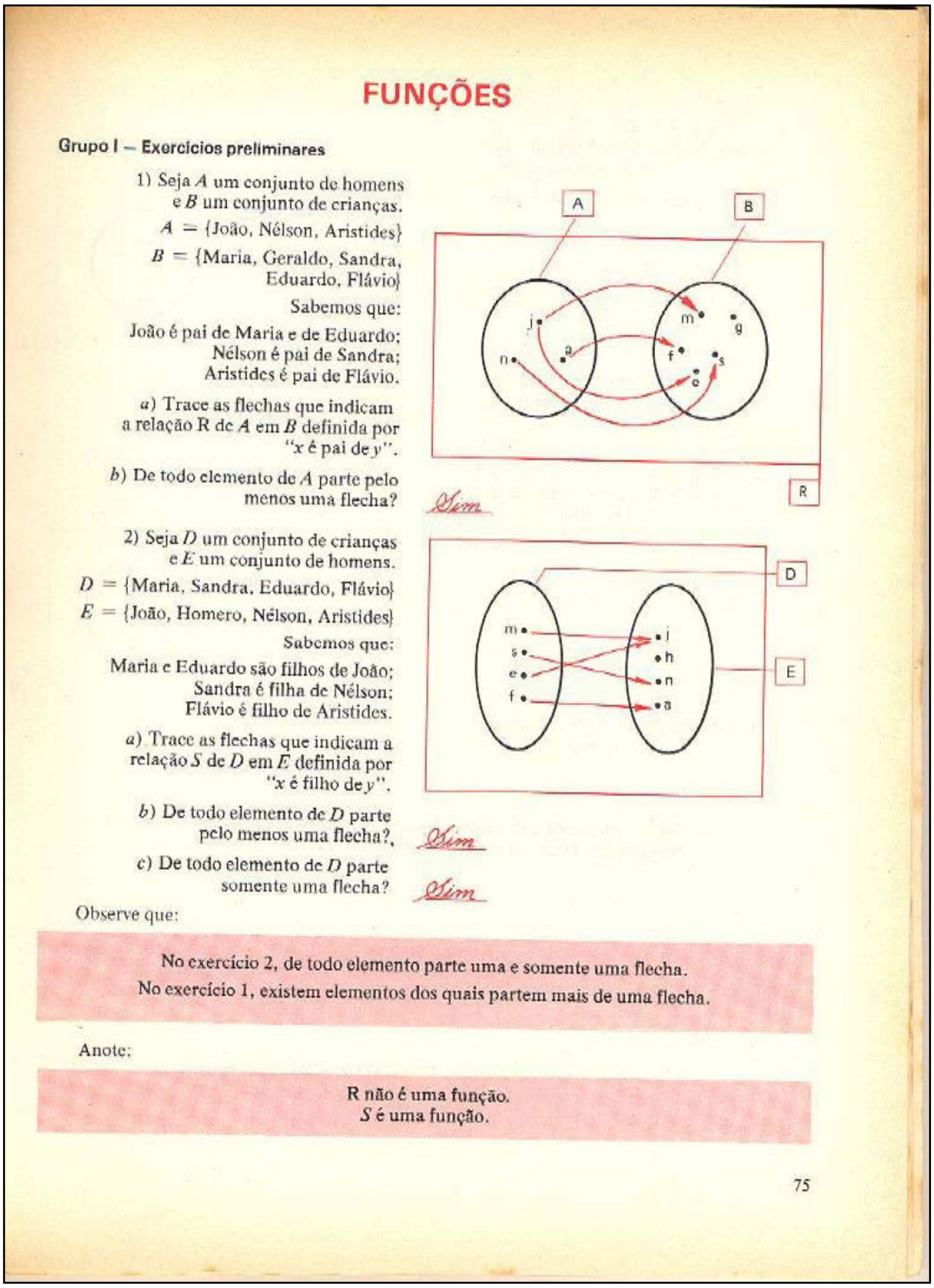
Anote:

Podemos representar este tipo de relação por um *gráfico de barra*. Este tipo de gráfico é muito usado em Geografia, Estatística, etc. Por exemplo: Gráfico de barra da população recenseada no Brasil.

44

Figura 94 – Página 44 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

O conceito de *função* é explicado a partir da página 75, explorando seu significado na perspectiva moderna, ou seja, enfatizando a relação entre conjuntos por meio de diagrama de flechas, fazendo com que o aluno possa perceber se a *relação* é ou não uma *função*. As autoras utilizaram a linguagem de conjuntos para introdução do conceito de *função*, conforme a orientação do GEEM (1962 e 1965b).



FUNÇÕES

Grupo I – Exercícios preliminares

1) Seja A um conjunto de homens e B um conjunto de crianças.

$A = \{$João, Nélson, Aristides$\}$

$B = \{$Maria, Geraldo, Sandra, Eduardo, Flávio$\}$

Sabemos que:

João é pai de Maria e de Eduardo;
Nélson é pai de Sandra;
Aristides é pai de Flávio.

a) Trace as flechas que indicam a relação R de A em B definida por "x é pai de y".

b) De todo elemento de A parte pelo menos uma flecha? Sim

2) Seja D um conjunto de crianças e E um conjunto de homens.

$D = \{$Maria, Sandra, Eduardo, Flávio$\}$

$E = \{$João, Homero, Nélson, Aristides$\}$

Sabemos que:

Maria e Eduardo são filhos de João;
Sandra é filha de Nélson;
Flávio é filho de Aristides.

a) Trace as flechas que indicam a relação S de D em E definida por "x é filho de y".

b) De todo elemento de D parte pelo menos uma flecha? Sim

c) De todo elemento de D parte somente uma flecha? Sim

Observe que:

No exercício 2, de todo elemento parte uma e somente uma flecha.
No exercício 1, existem elementos dos quais partem mais de uma flecha.

Anote:

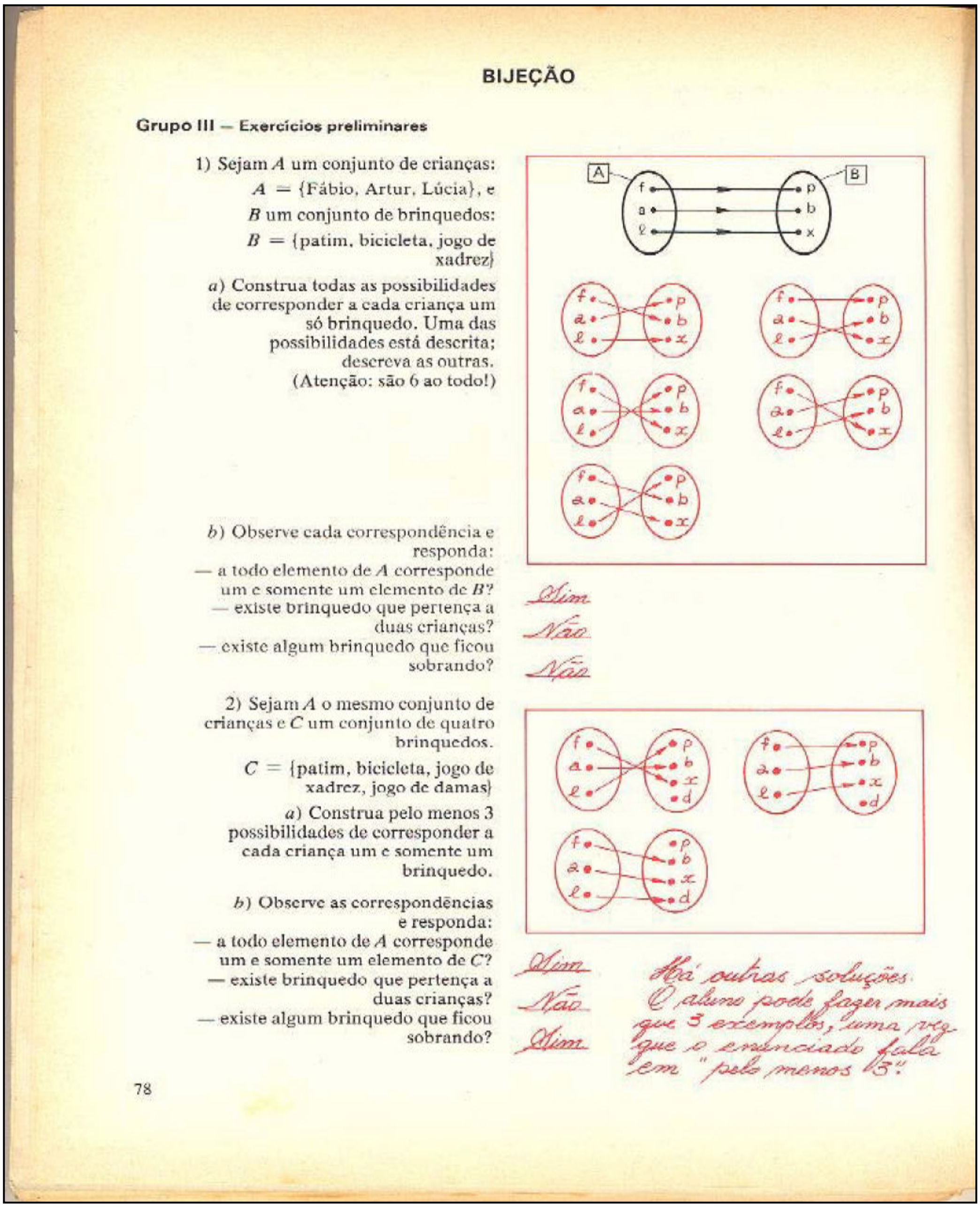
R não é uma função.
S é uma função.

75

Figura 95 – Página 75 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO	
Osvaldo Sangiorgi	**GRUEMA**
Função é uma relação especial entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B.	Uma relação de A e B é uma FUNÇÃO quando cada elemento de A corresponde a um e somente um elemento de B.

Após a definição de *função,* o GRUEMA explora o conceito de *bijeção*, por meio de exercícios que contemplam contextos dos alunos.



BIJEÇÃO

Grupo III — Exercícios preliminares

1) Sejam A um conjunto de crianças:
$A = \{$Fábio, Artur, Lúcia$\}$, e
B um conjunto de brinquedos:
$B = \{$patim, bicicleta, jogo de xadrez$\}$

a) Construa todas as possibilidades de corresponder a cada criança um só brinquedo. Uma das possibilidades está descrita; descreva as outras.
(Atenção: são 6 ao todo!)

b) Observe cada correspondência e responda:
— a todo elemento de A corresponde um e somente um elemento de B? Sim
— existe brinquedo que pertença a duas crianças? Não
— existe algum brinquedo que ficou sobrando? Não

2) Sejam A o mesmo conjunto de crianças e C um conjunto de quatro brinquedos.
$C = \{$patim, bicicleta, jogo de xadrez, jogo de damas$\}$

a) Construa pelo menos 3 possibilidades de corresponder a cada criança um e somente um brinquedo.

b) Observe as correspondências e responda:
— a todo elemento de A corresponde um e somente um elemento de C? Sim
— existe brinquedo que pertença a duas crianças? Não
— existe algum brinquedo que ficou sobrando? Sim

Há outras soluções. O aluno pode fazer mais que 3 exemplos, uma vez que o enunciado fala em "pelo menos 3".

78

Figura 96 – Página 78 do volume V da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 5ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1977)

Na página 79, o GRUEMA define *função bijetora* da seguinte maneira: "dizemos que uma função é uma bijeção, quando cada elemento do segundo conjunto é o correspondente de um e um só elemento do primeiro conjunto.” (GRUEMA, 1977, p. 79).

Percebemos que os enunciados dos exercícios são bastante diversificados. São utilizados os seguintes verbos de comando: assinalar, representar, construir, traçar, etc. Inclusive há questões propostas ao aluno, cujas respostas levam à definição dos conceitos sem que o professor os diga.

Referente ao volume VI da coleção, destinado aos alunos da 6ª série, o GRUEMA retoma o ensino de *relações*, explorando as propriedades das *relações reflexiva*; simétrica e anti-simétrica; *transitiva* e *relações de ordem e equivalência*. [78]

Segundo as autoras, os objetivos instrucionais deste volume são:

> Conjuntos e relações
> 1. identificar uma partição como um particular conjunto de conjuntos.
> 2. Reconhecer propriedades reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.
> 3. Reconhecer relações de ordem, relações de equivalência e relações que não são de nenhum dos dois tipos.
> 4. Relacionar classes de equivalência com uma partição.
> (GRUEMA, 1975, p.5)

A sugestão do GRUEMA é para que as *relações* sejam ensinadas pelos professores no 1º bimestre. Há duas sugestões de provas. [79 e 80]

No que se refere à Relações Reflexivas, o GRUEMA ressalta que “O professor deve tomar cuidado para que não surja confusão entre uma relação reflexiva qualquer e a identidade. Chamar atenção para o fato de que na identidade não há outras flechas além das alças”.(GRUEMA, 1975, p.19).

Definição de Relações Reflexiva*:* “Uma relação R sobre X é reflexiva, quando para todo x, x está relacionado com x.”. (GRUEMA, 1975, p. 20).

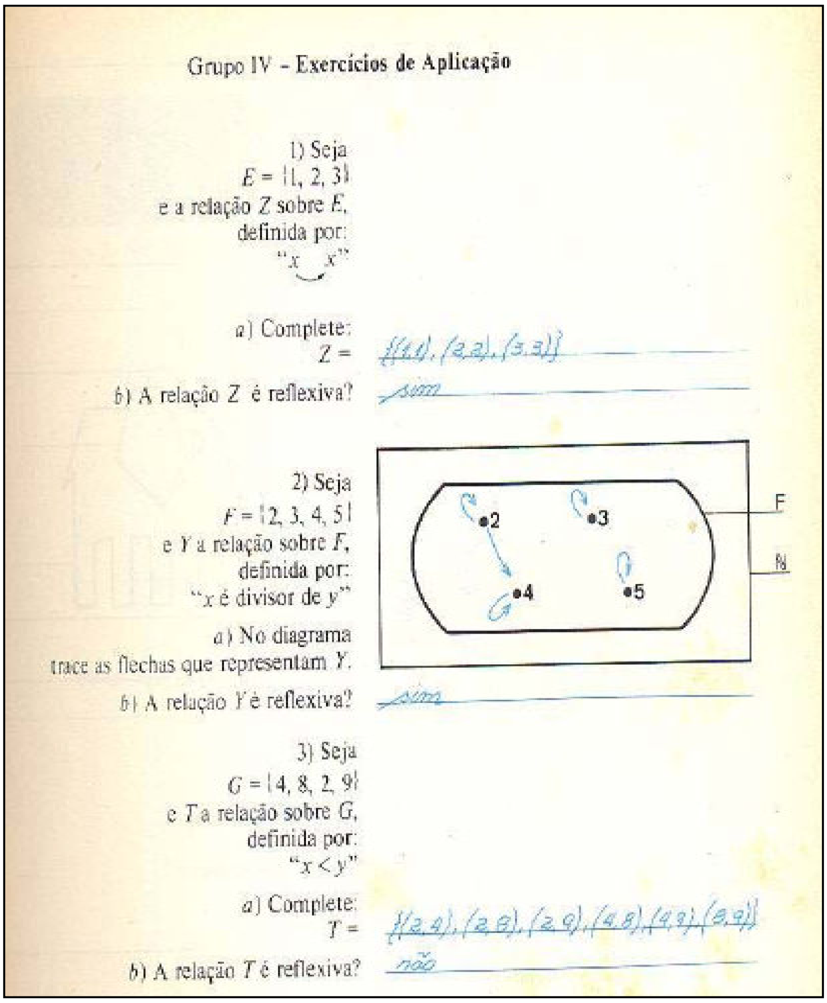
---

78 Ver anexo XX.

79 Ver no anexo XXI a 1ª sugestão de prova para o 1º bimestre, contida no volume VI da coleção na parte destinada ao professor.

80 Ver no anexo XXII a 2ª sugestão de prova para o 1º bimestre, contida no volume VI da coleção na parte destinada ao professor.

Exemplo de exercícios:



Grupo IV – Exercícios de Aplicação

1) Seja
$E = \{1, 2, 3\}$
e a relação Z sobre E,
definida por:
"x x"

a) Complete:
$Z =$ {(1,1), (2,2), (3,3)}

b) A relação Z é reflexiva? sim

2) Seja
$F = \{2, 3, 4, 5\}$
e Y a relação sobre F,
definida por:
"x é divisor de y"

a) No diagrama
trace as flechas que representam Y.

b) A relação Y é reflexiva? sim

3) Seja
$G = \{4, 8, 2, 9\}$
e T a relação sobre G,
definida por:
"$x < y$"

a) Complete:
$T =$ {(2,4), (2,8), (2,9), (4,8), (4,9), (8,9)}

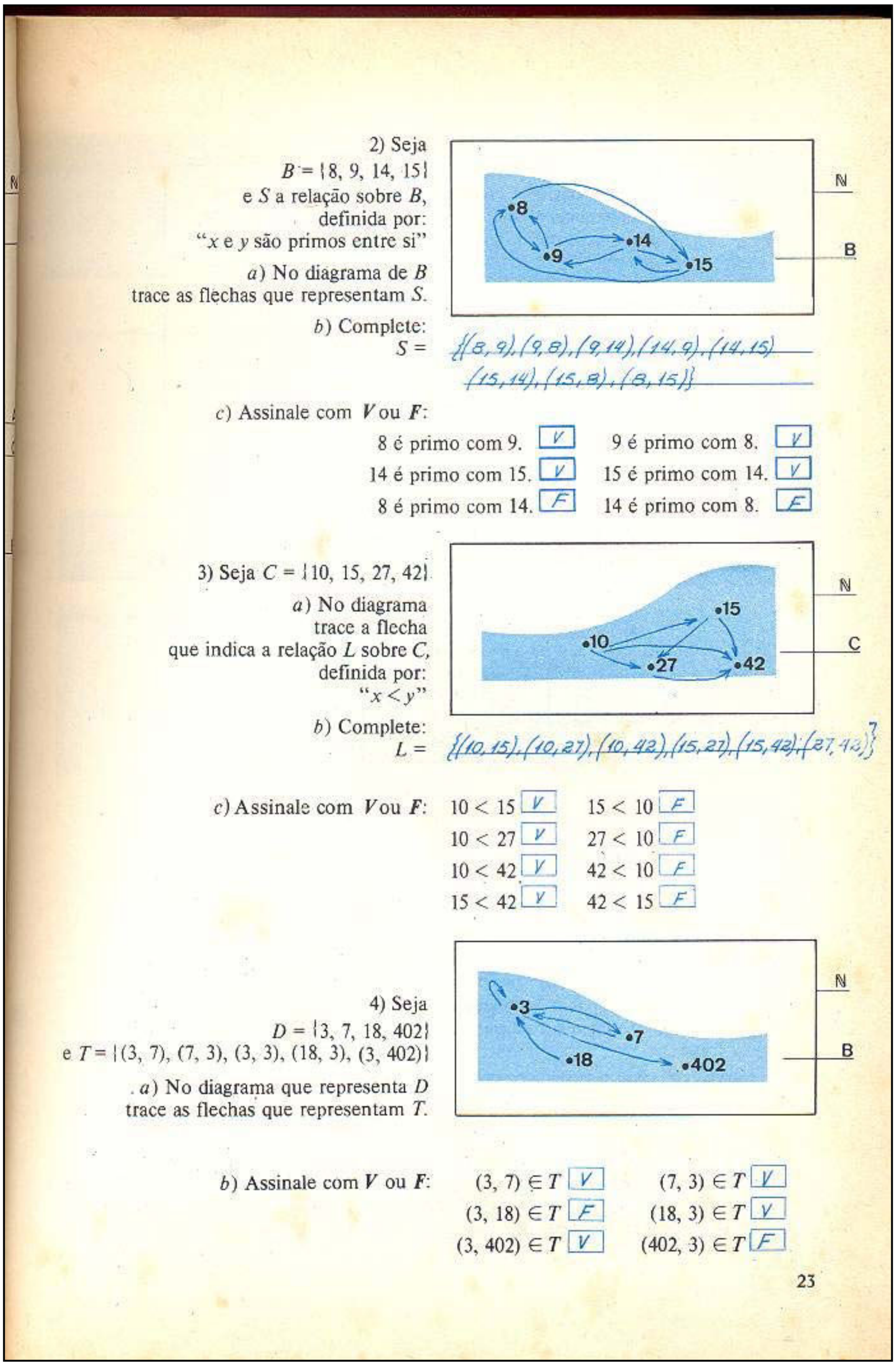
b) A relação T é reflexiva? não

Figura 97 – Página 21 do volume V I da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 6ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Definição de Relação Simétrica: "Uma relação R sobre X é simétrica quando: para todo elemento x relacionado com y temos y relacionado com x". (GRUEMA, 1975, p. 24).

Definição de Relação Anti-simétrica: "Uma relação R sobre X é anti-simétrica, quando para todo para de elementos distintos x e y: Se todo x está relacionado com y, y não está relacionado com x. (GRUEMA, 1975, p. 24).

Exemplo de exercícios:



2) Seja
$B = \{8, 9, 14, 15\}$
e S a relação sobre B,
definida por:
"x e y são primos entre si"

a) No diagrama de B
trace as flechas que representam S.

b) Complete:
$S = \{(8,9), (9,8), (9,14), (14,9), (14,15), (15,14), (15,8), (8,15)\}$

c) Assinale com *V* ou *F*:

8 é primo com 9.	V	9 é primo com 8.	V
14 é primo com 15.	V	15 é primo com 14.	V
8 é primo com 14.	F	14 é primo com 8.	F

3) Seja $C = \{10, 15, 27, 42\}$

a) No diagrama
trace a flecha
que indica a relação L sobre C,
definida por:
"$x < y$"

b) Complete:
$L = \{(10,15), (10,27), (10,42), (15,27), (15,42), (27,42)\}$

c) Assinale com *V* ou *F*:

$10 < 15$	V	$15 < 10$	F
$10 < 27$	V	$27 < 10$	F
$10 < 42$	V	$42 < 10$	F
$15 < 42$	V	$42 < 15$	F

4) Seja
$D = \{3, 7, 18, 402\}$
e $T = \{(3, 7), (7, 3), (3, 3), (18, 3), (3, 402)\}$

a) No diagrama que representa D
trace as flechas que representam T.

b) Assinale com *V* ou *F*:

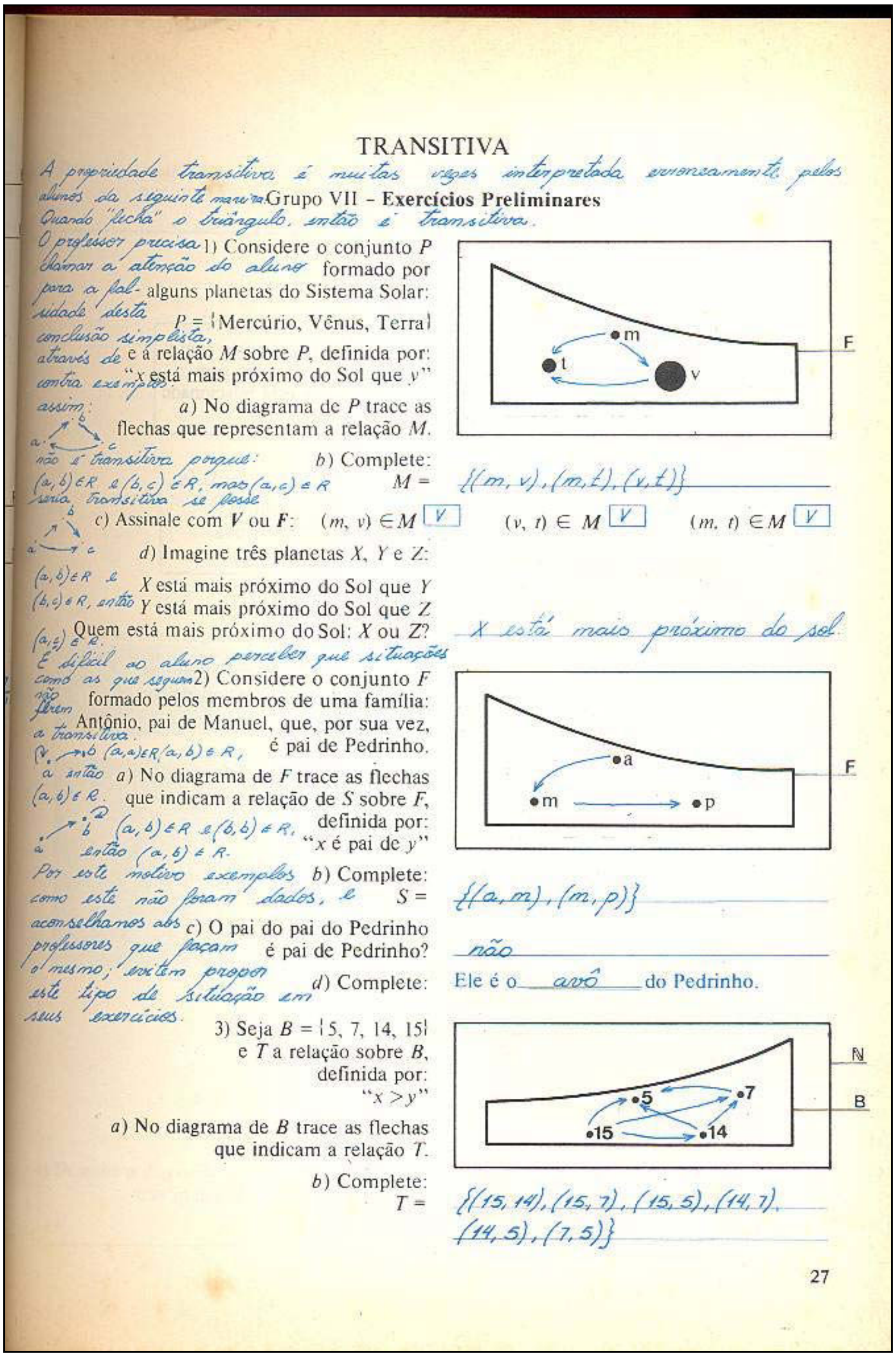
$(3, 7) \in T$	V	$(7, 3) \in T$	V
$(3, 18) \in T$	F	$(18, 3) \in T$	V
$(3, 402) \in T$	V	$(402, 3) \in T$	F

23

Figura 98 – Página 25 do volume V I da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 6ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Definição de Relação Transitiva: "Uma relação R sobre X é transitiva quando, quaisquer que sejam os elementos x, y e z, se x está relacionado com y e y está relacionado com z então x está relacionado com z." (GRUEMA, 1975, p.28).

Exemplo de exercícios:



TRANSITIVA

A propriedade transitiva é muitas vezes interpretada erroneamente pelos alunos da seguinte maneira: Quando "fecha" o triângulo, então é transitiva. O professor precisa chamar a atenção do aluno para a falsidade desta conclusão simplista, através de contra exemplos, assim:

não é transitiva porque: $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, mas $(a,c) \in R$ seria transitiva se fosse

$(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R$, então $(a,c) \in R$.

É difícil ao aluno perceber que situações como as que seguem não ferem a transitiva.

$(a,a) \in R$, $(a,b) \in R$, então $(a,b) \in R$.

$(a,b) \in R$ e $(b,b) \in R$, então $(a,b) \in R$.

Por este motivo exemplos como este não foram dados, e aconselhamos aos professores que façam o mesmo; evitem propor este tipo de situação em seus exercícios.

Grupo VII – Exercícios Preliminares

1) Considere o conjunto P formado por alguns planetas do Sistema Solar:

$P = \{$Mercúrio, Vênus, Terra$\}$

e a relação M sobre P, definida por: "x está mais próximo do Sol que y"

a) No diagrama de P trace as flechas que representam a relação M.

b) Complete: $M =$ $\{(m, v), (m, t), (v, t)\}$

c) Assinale com **V** ou **F**: $(m, v) \in M$ $\boxed{V}$ $(v, t) \in M$ $\boxed{V}$ $(m, t) \in M$ $\boxed{V}$

d) Imagine três planetas X, Y e Z:
X está mais próximo do Sol que Y
Y está mais próximo do Sol que Z
Quem está mais próximo do Sol: X ou Z? X está mais próximo do sol.

2) Considere o conjunto F formado pelos membros de uma família: Antônio, pai de Manuel, que, por sua vez, é pai de Pedrinho.

a) No diagrama de F trace as flechas que indicam a relação de S sobre F, definida por: "x é pai de y"

b) Complete: $S =$ $\{(a, m), (m, p)\}$

c) O pai do pai do Pedrinho é pai de Pedrinho? não

d) Complete: Ele é o avô do Pedrinho.

3) Seja $B = \{5, 7, 14, 15\}$ e T a relação sobre B, definida por: "$x > y$"

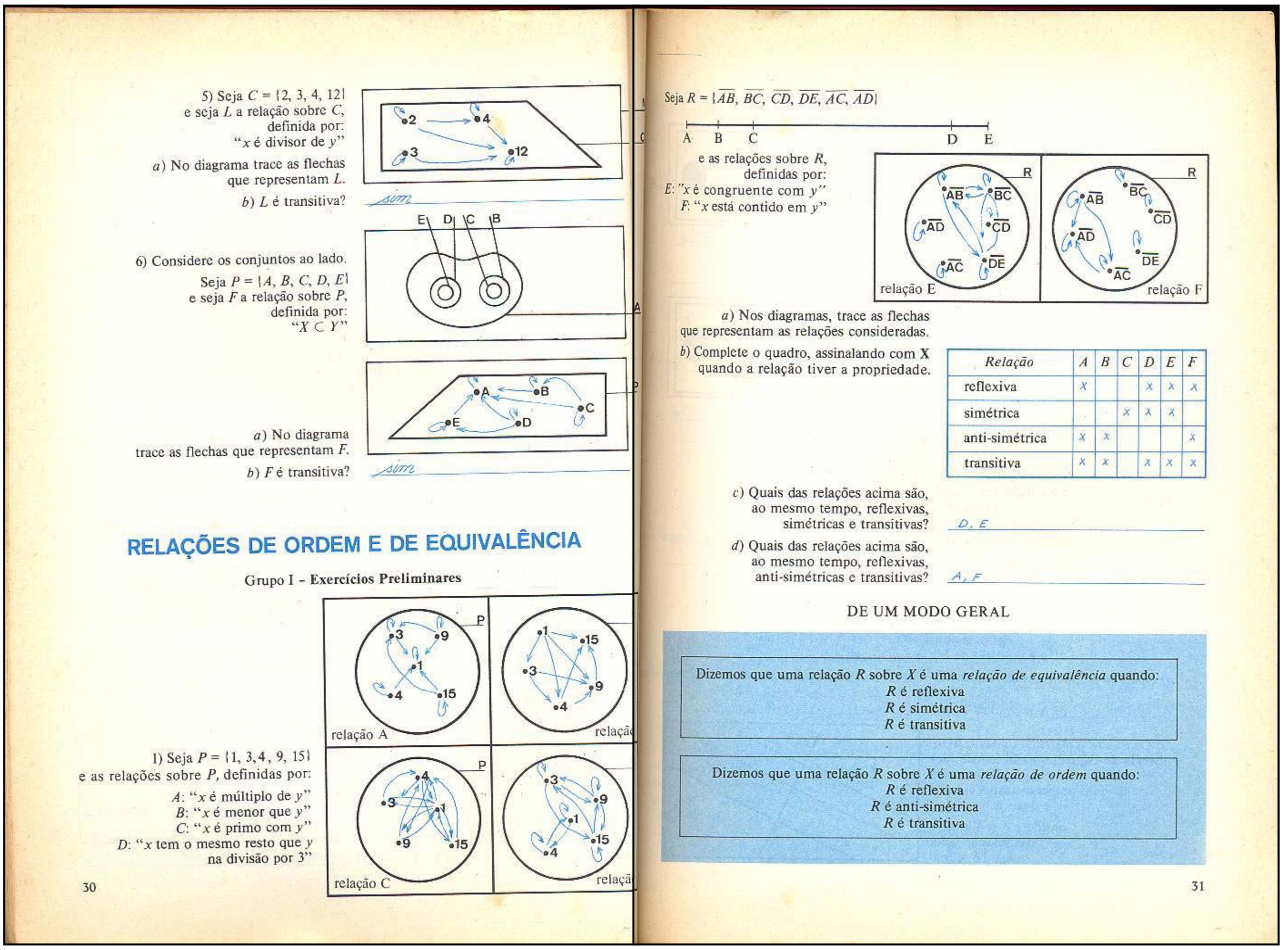
a) No diagrama de B trace as flechas que indicam a relação T.

b) Complete: $T =$ $\{(15, 14), (15, 7), (15, 5), (14, 7), (14, 5), (7, 5)\}$

27

Figura 99 – Página 27 do volume V I da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 6ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

O tema *de relações de ordem* e *equivalência* é tratado da página 30 à 36, no mesmo modelo dos outros exercícios, ou seja, partindo de exercícios mais fáceis até os mais complexos, mas sempre com perguntas que fazem o aluno refletir e buscar uma conexão com os temas já estudados anteriormente.



5) Seja $C = \{2, 3, 4, 12\}$ e seja L a relação sobre C, definida por: "x é divisor de y"

a) No diagrama trace as flechas que representam L.

b) L é transitiva? sim

6) Considere os conjuntos ao lado. Seja $P = \{A, B, C, D, E\}$ e seja F a relação sobre P, definida por: "$X \subset Y$"

a) No diagrama trace as flechas que representam F.

b) F é transitiva? sim

RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA

Grupo I - Exercícios Preliminares

1) Seja $P = \{1, 3, 4, 9, 15\}$ e as relações sobre P, definidas por:

A: "x é múltiplo de y"
B: "x é menor que y"
C: "x é primo com y"
D: "x tem o mesmo resto que y na divisão por 3"

30

Seja $R = \{\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{AC}, \overline{AD}\}$ e as relações sobre R, definidas por:

E: "x é congruente com y"
F: "x está contido em y"

a) Nos diagramas, trace as flechas que representam as relações consideradas.

b) Complete o quadro, assinalando com X quando a relação tiver a propriedade.

Relação	A	B	C	D	E	F
reflexiva	x			x	x	x
simétrica			x	x	x	
anti-simétrica	x	x				x
transitiva	x	x		x	x	x

c) Quais das relações acima são, ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas? D, E

d) Quais das relações acima são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas? A, F

DE UM MODO GERAL

Dizemos que uma relação R sobre X é uma *relação de equivalência* quando:
R é reflexiva
R é simétrica
R é transitiva

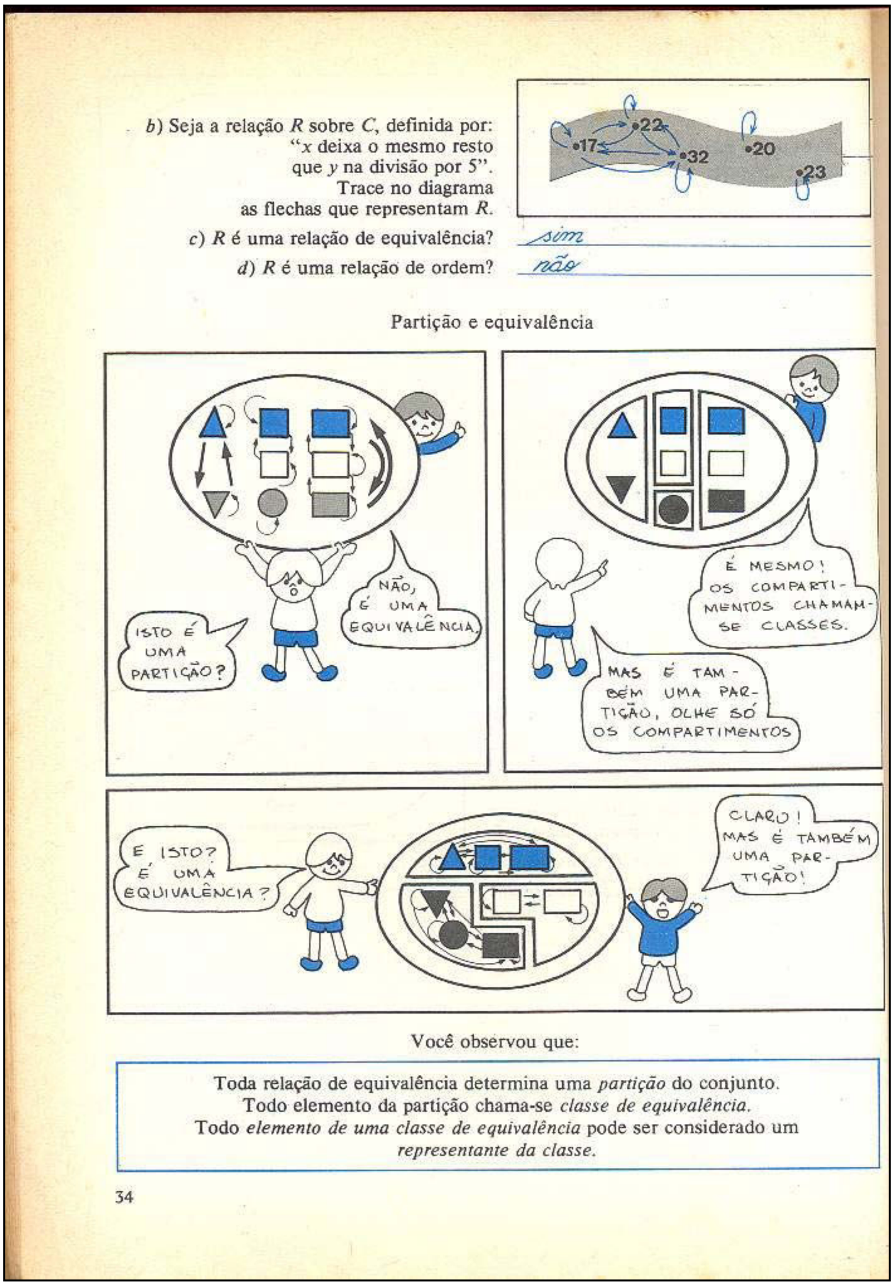
Dizemos que uma relação R sobre X é uma *relação de ordem* quando:
R é reflexiva
R é anti-simétrica
R é transitiva

31

Figura 100 – Página 30 e 31 do volume V I da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 6ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Nas páginas 30 e 31 o GRUEMA, por meio de exercícios preliminares, faz com que o aluno conclua que uma relação reflexiva, simétrica e transitiva é uma relação de equivalência enquanto que uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva é uma relação de ordem.

As autoras abordam o ensino de *partição e equivalência* por meio de *estórias em quadrinhos* na página 34, que explicam ao aluno que quando operamos com relações de equivalência, podemos identificar conjuntos de elementos que possuem critérios comuns de associação.



b) Seja a relação R sobre C, definida por: "x deixa o mesmo resto que y na divisão por 5". Trace no diagrama as flechas que representam R.

c) R é uma relação de equivalência? sim

d) R é uma relação de ordem? não

Partição e equivalência

Você observou que:

Toda relação de equivalência determina uma *partição* do conjunto.
Todo elemento da partição chama-se *classe de equivalência*.
Todo *elemento de uma classe de equivalência* pode ser considerado um *representante da classe*.

34

Figura 101 – Página 34 do volume V I da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 6ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Podemos verificar até o momento que para ensinar o conceito de *função*, o GRUEMA utiliza a linguagem de conjuntos e o diagrama de flechas, que estão presentes em praticamente todos os exercícios, sejam *preliminares* ou de *aplicação*.

No volume 7, são trabalhadas as *relações* , *composições* e as *funções polinomiais*.[81]

---

81 Ver anexo XXIII.

Segundo as orientações instrucionais para os professores, o GRUEMA propõe para *relações* os seguintes objetivos:

> 1. Construir relação inversa de uma relação conhecida.
> 2. Efetuar, quando possível, a relação composta de duas relações dadas.
> 3. Reconhecer a não comutatividade da composição de relações.
> 4. Reconhecer que a composta de duas funções é uma função e que a composta de duas bijeções é uma bijeção.
>
> (GRUEMA, 1975, p. 1)

Em relação às observações de ordem pedagógica, as autoras sugerem o método heurístico, para que assim o aluno possa se familiarizar com a descoberta nas demonstrações, evitando assim que ele as decore. Isto nos remete à década de 1930, com a Reforma Francisco Campos.

Os objetivos instrucionais relativos ao ensino de função polinomial são:

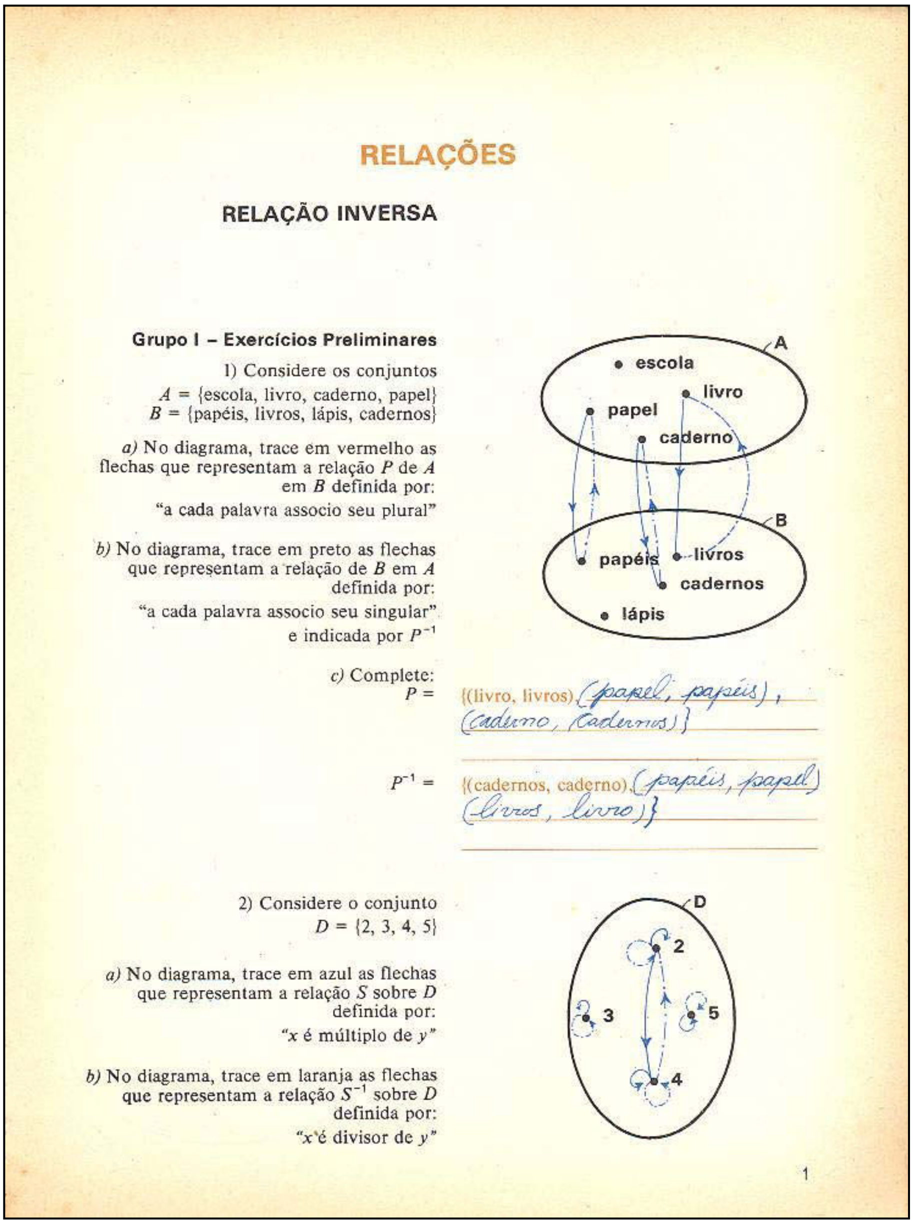
> 1. Reconhecer uma função polinomial.
> 2. Representar graficamente no plano cartesiano, funções lineares e funções afim.
> 3. Resolver graficamente sistemas de duas equações do 1º grau com duas variáveis.
> 4. Resolver algebricamente sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis.
>
> (GRUEMA – Guia para os professores, 1975, p. 1)

As observações de ordem didática são respectivamente:

> O professor notará que neste capítulo não abordamos as operações com polinômios, pois elas não passam de casos particulares de operações com expressões literais já estudados. O aluno deverá reconhecer que todo polinômio é uma expressão literal, mas nem toda expressão literal é um polinômio.
> Procuramos dar maior ênfase à função polinomial do que ao polinômio em si, pois observamos que as função se constituem num dos tópicos da Matemática que mais larga aplicação em outras áreas" (GRUEMA – Guia para os professores, 1975,p.3).

Notamos que nas coleções analisadas anteriormente, não consta o ensino das *funções polinomiais*.

Ao ensinar a *relação inversa* o GRUEMA utiliza o mesmo método que vem sendo utilizado nos volumes anteriores ao tratar do ensino de *relação* e *função*, ou seja, parte dos exercícios preliminares, que enfatizam situações/ objetos já conhecidas pelos alunos (como por exemplo: escola, papel, livro e caderno) com certa ordem de estrutura, tendo como finalidade levar ao aluno ao conceito de relação inversa.



RELAÇÕES

RELAÇÃO INVERSA

Grupo I – Exercícios Preliminares

1) Considere os conjuntos
$A = \{$escola, livro, caderno, papel$\}$
$B = \{$papéis, livros, lápis, cadernos$\}$

a) No diagrama, trace em vermelho as flechas que representam a relação P de A em B definida por:
"a cada palavra associo seu plural"

b) No diagrama, trace em preto as flechas que representam a relação de B em A definida por:
"a cada palavra associo seu singular"
e indicada por P^{-1}

c) Complete:
$P =$ {(livro, livros), (papel, papéis), (caderno, cadernos)}

$P^{-1} =$ {(cadernos, caderno), (papéis, papel) (livros, livro)}

2) Considere o conjunto
$D = \{2, 3, 4, 5\}$

a) No diagrama, trace em azul as flechas que representam a relação S sobre D definida por:
"x é múltiplo de y"

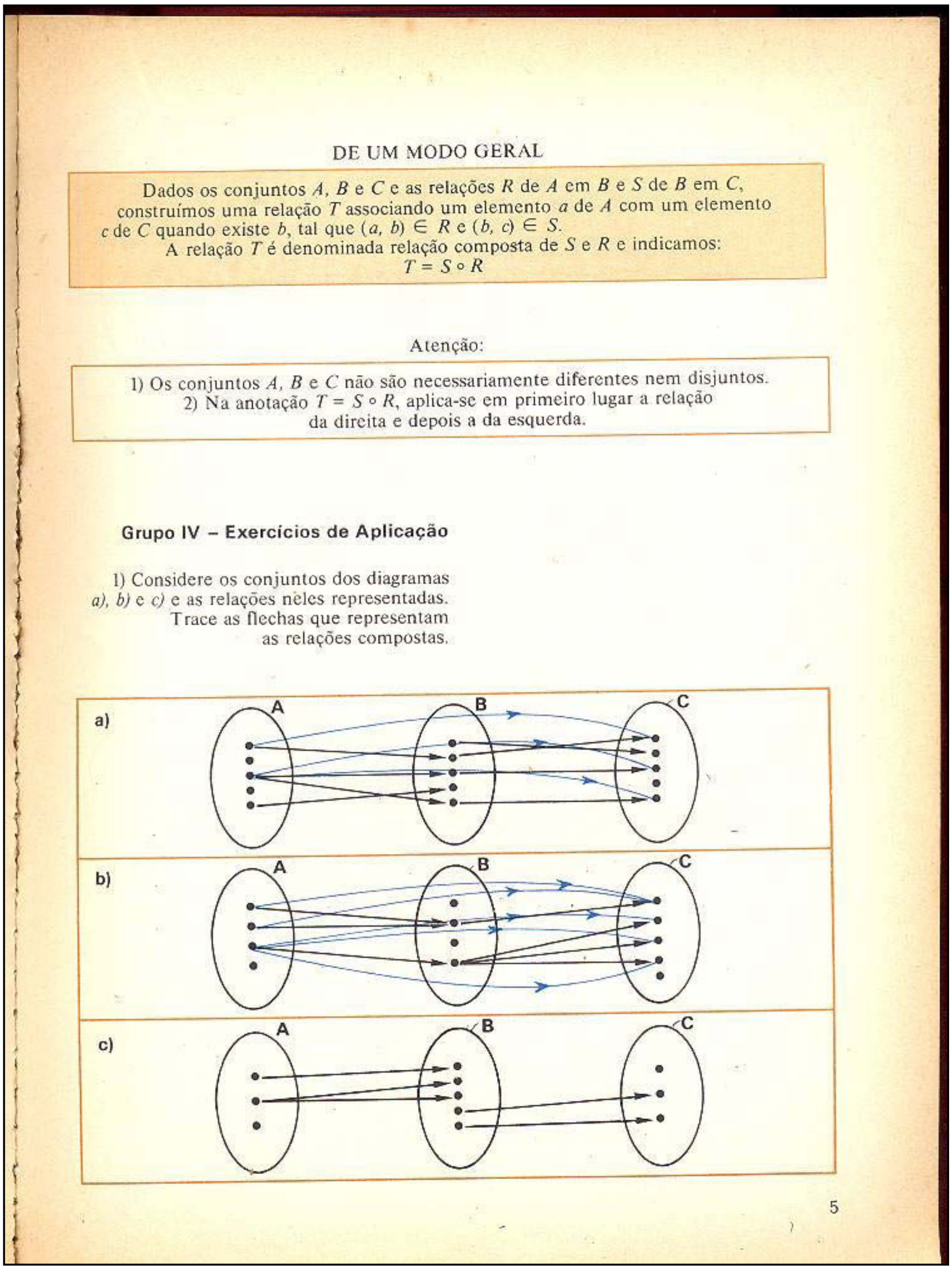
b) No diagrama, trace em laranja as flechas que representam a relação S^{-1} sobre D definida por:
"x é divisor de y"

1

Figura 102 – Página 01 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Verificamos que a linguagem de conjunto e o diagrama de flechas são utilizados para ensinar relações.

Após os exercícios preliminares o GRUEMA define a *relação composta* e realiza uma série de exercícios de aplicação, considerados um pouco mais complexos, que exigem do aluno uma maior concentração para solução.



DE UM MODO GERAL

Dados os conjuntos A, B e C e as relações R de A em B e S de B em C, construímos uma relação T associando um elemento a de A com um elemento c de C quando existe b, tal que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in S$.
A relação T é denominada relação composta de S e R e indicamos:
$T = S \circ R$

Atenção:

1) Os conjuntos A, B e C não são necessariamente diferentes nem disjuntos.
2) Na anotação $T = S \circ R$, aplica-se em primeiro lugar a relação da direita e depois a da esquerda.

Grupo IV – Exercícios de Aplicação

1) Considere os conjuntos dos diagramas *a)*, *b)* e *c)* e as relações nêles representadas. Trace as flechas que representam as relações compostas.

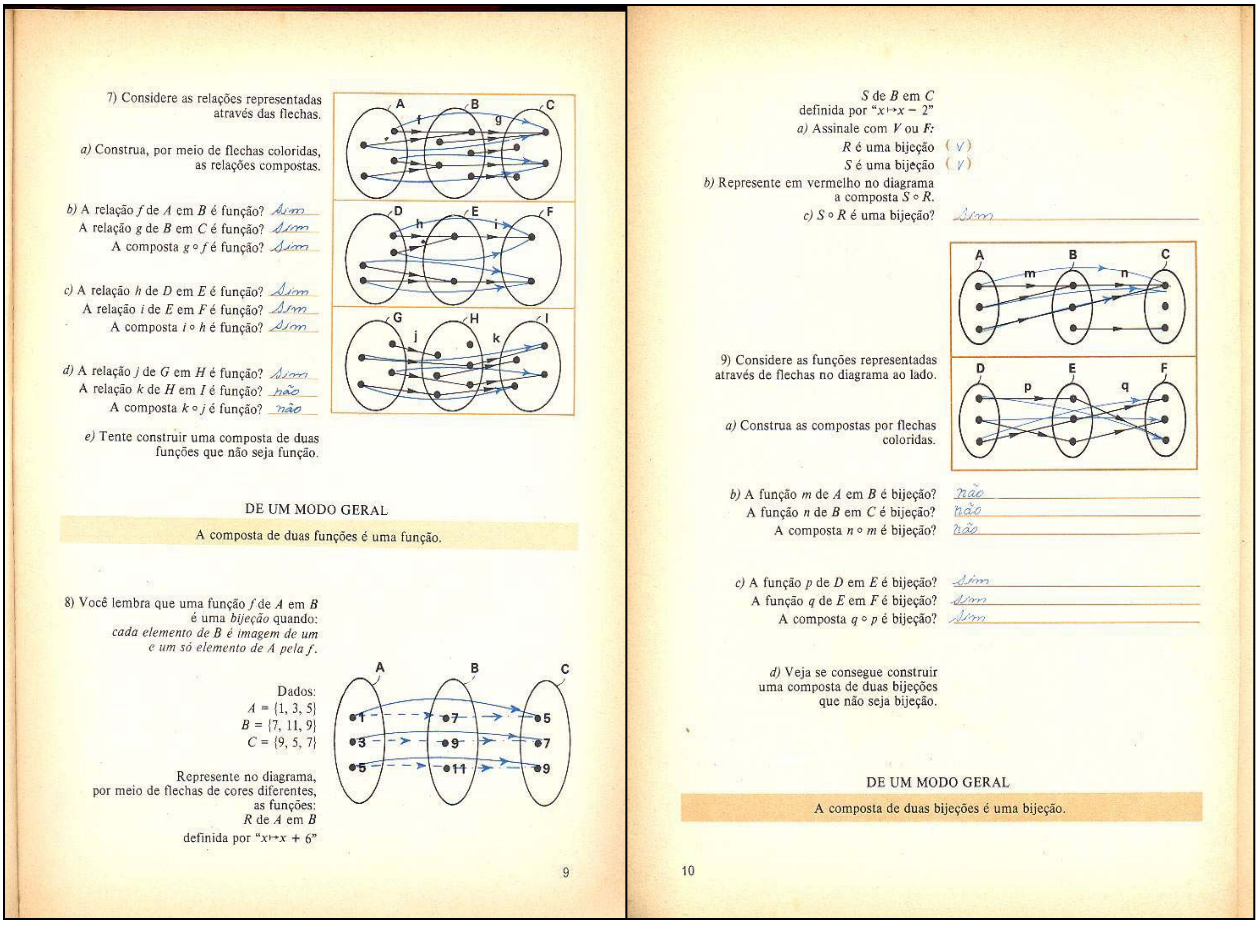
5

Figura 103 – Página 05 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

As autoras fazem uma sugestão para trabalhar a *relação composta*: “O professor mostrará aos alunos que nem sempre é possível encontrar a composta de duas funções. Fará os alunos a concluírem que a composta só existe quando o conjunto de chegada da primeira coincide com o conjunto de partida da segunda” (GRUEMA, 1977, p.06).

Na figura 104, notamos a utilização de três conjuntos distintos A, B e C para definir que uma *função composta* é uma relação de outra relação, ou seja, é uma relação que depende de outra para existir.

Observamos também pelos exercícios da figura abaixo que as autoras levam ao aluno concluir que toda composta de duas bijeções também é uma bijeção.



7) Considere as relações representadas através das flechas.

a) Construa, por meio de flechas coloridas, as relações compostas.

b) A relação f de A em B é função? sim
A relação g de B em C é função? sim
A composta $g \circ f$ é função? sim

c) A relação h de D em E é função? sim
A relação i de E em F é função? sim
A composta $i \circ h$ é função? sim

d) A relação j de G em H é função? sim
A relação k de H em I é função? não
A composta $k \circ j$ é função? não

e) Tente construir uma composta de duas funções que não seja função.

DE UM MODO GERAL

A composta de duas funções é uma função.

8) Você lembra que uma função f de A em B é uma *bijeção* quando: *cada elemento de B é imagem de um e um só elemento de A pela f.*

Dados:
$A = \{1, 3, 5\}$
$B = \{7, 11, 9\}$
$C = \{9, 5, 7\}$

Represente no diagrama, por meio de flechas de cores diferentes, as funções:
R de A em B definida por "$x \mapsto x + 6$"

9

S de B em C definida por "$x \mapsto x - 2$"

a) Assinale com V ou F:
R é uma bijeção (V)
S é uma bijeção (V)

b) Represente em vermelho no diagrama a composta $S \circ R$.

c) $S \circ R$ é uma bijeção? sim

9) Considere as funções representadas através de flechas no diagrama ao lado.

a) Construa as compostas por flechas coloridas.

b) A função m de A em B é bijeção? não
A função n de B em C é bijeção? não
A composta $n \circ m$ é bijeção? não

c) A função p de D em E é bijeção? sim
A função q de E em F é bijeção? sim
A composta $q \circ p$ é bijeção? sim

d) Veja se consegue construir uma composta de duas bijeções que não seja bijeção.

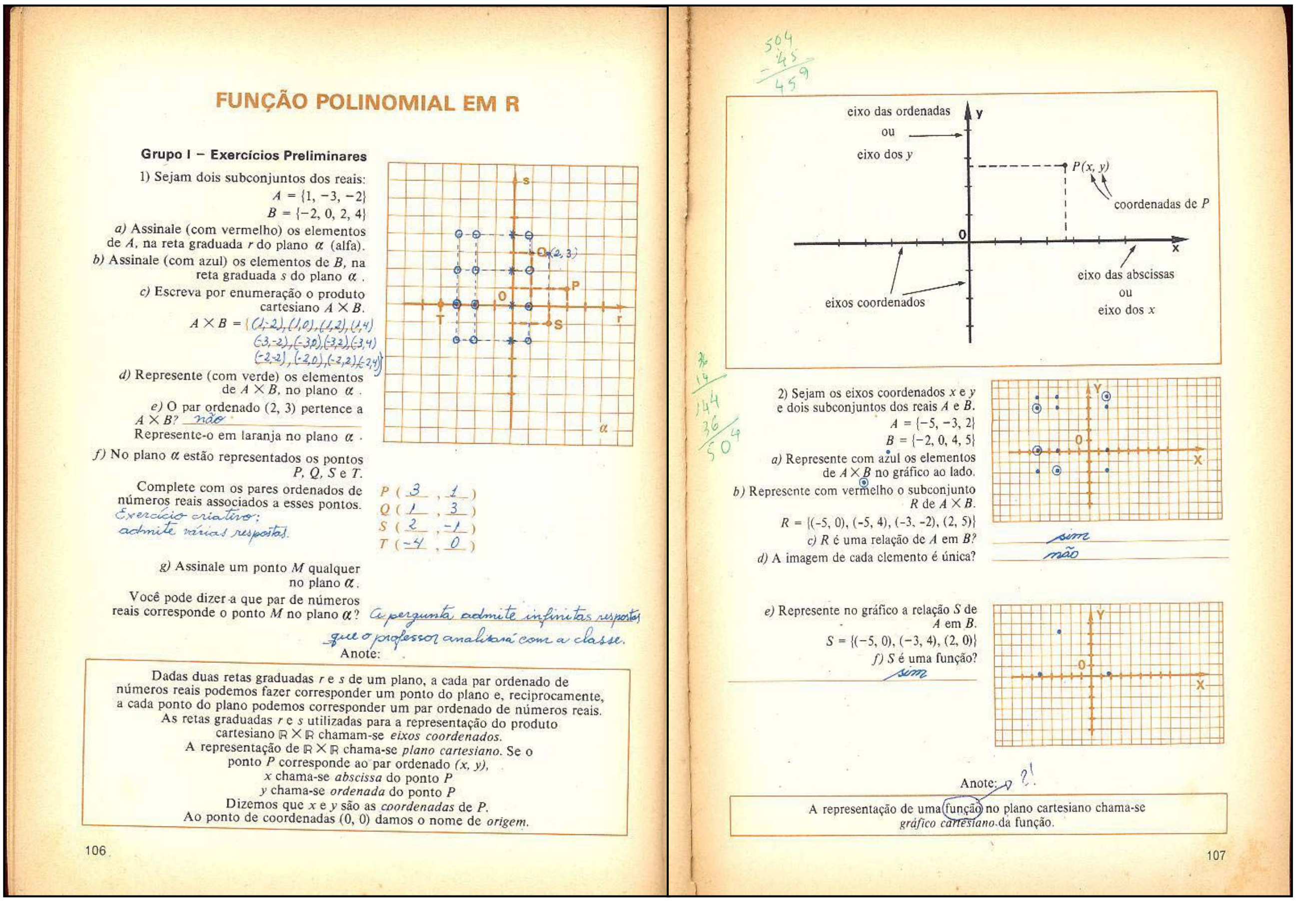
DE UM MODO GERAL

A composta de duas bijeções é uma bijeção.

10

Figura 104 – Página 09 e 10 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

No que se refere ao ensino da *função polinomial*, é explorado inicialmente o plano cartesiano e produto de dois subconjuntos dos números reais, formando o par ordenado (x, y), onde x é abscissa e y é a ordenada. Assim, podemos vincular cada par ordenado a um ponto P no plano cartesiano, como podemos verificar na próxima figura.



FUNÇÃO POLINOMIAL EM R

Grupo I – Exercícios Preliminares

1) Sejam dois subconjuntos dos reais:

$A = \{1, -3, -2\}$

$B = \{-2, 0, 2, 4\}$

a) Assinale (com vermelho) os elementos de A, na reta graduada r do plano α (alfa).

b) Assinale (com azul) os elementos de B, na reta graduada s do plano α.

c) Escreva por enumeração o produto cartesiano $A \times B$.

$A \times B = \{(1,-2), (1,0), (1,2), (1,4), (-3,-2), (-3,0), (-3,2), (-3,4), (-2,-2), (-2,0), (-2,2), (-2,4)\}$

d) Represente (com verde) os elementos de $A \times B$, no plano α.

e) O par ordenado (2, 3) pertence a $A \times B$? não

Represente-o em laranja no plano α.

f) No plano α estão representados os pontos P, Q, S e T.

Complete com os pares ordenados de números reais associados a esses pontos.

Exercício criativo: admite várias respostas.

P (3, 1)
Q (1, 3)
S (2, −1)
T (−4, 0)

g) Assinale um ponto M qualquer no plano α.

Você pode dizer a que par de números reais corresponde o ponto M no plano α? A pergunta admite infinitas respostas que o professor analisará com a classe.

Anote:

Dadas duas retas graduadas r e s de um plano, a cada par ordenado de números reais podemos fazer corresponder um ponto do plano e, reciprocamente, a cada ponto do plano podemos corresponder um par ordenado de números reais.
As retas graduadas r e s utilizadas para a representação do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chamam-se *eixos coordenados*.
A representação de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chama-se *plano cartesiano*. Se o ponto P corresponde ao par ordenado (x, y),
x chama-se *abscissa* do ponto P
y chama-se *ordenada* do ponto P
Dizemos que x e y são as *coordenadas* de P.
Ao ponto de coordenadas (0, 0) damos o nome de *origem*.

106

2) Sejam os eixos coordenados x e y e dois subconjuntos dos reais A e B.

$A = \{-5, -3, 2\}$

$B = \{-2, 0, 4, 5\}$

a) Represente com azul os elementos de $A \times B$ no gráfico ao lado.

b) Represente com vermelho o subconjunto R de $A \times B$.

$R = \{(-5, 0), (-5, 4), (-3, -2), (2, 5)\}$

c) R é uma relação de A em B? sim

d) A imagem de cada elemento é única? não

e) Represente no gráfico a relação S de A em B.

$S = \{(-5, 0), (-3, 4), (2, 0)\}$

f) S é uma função? sim

Anote: ?!

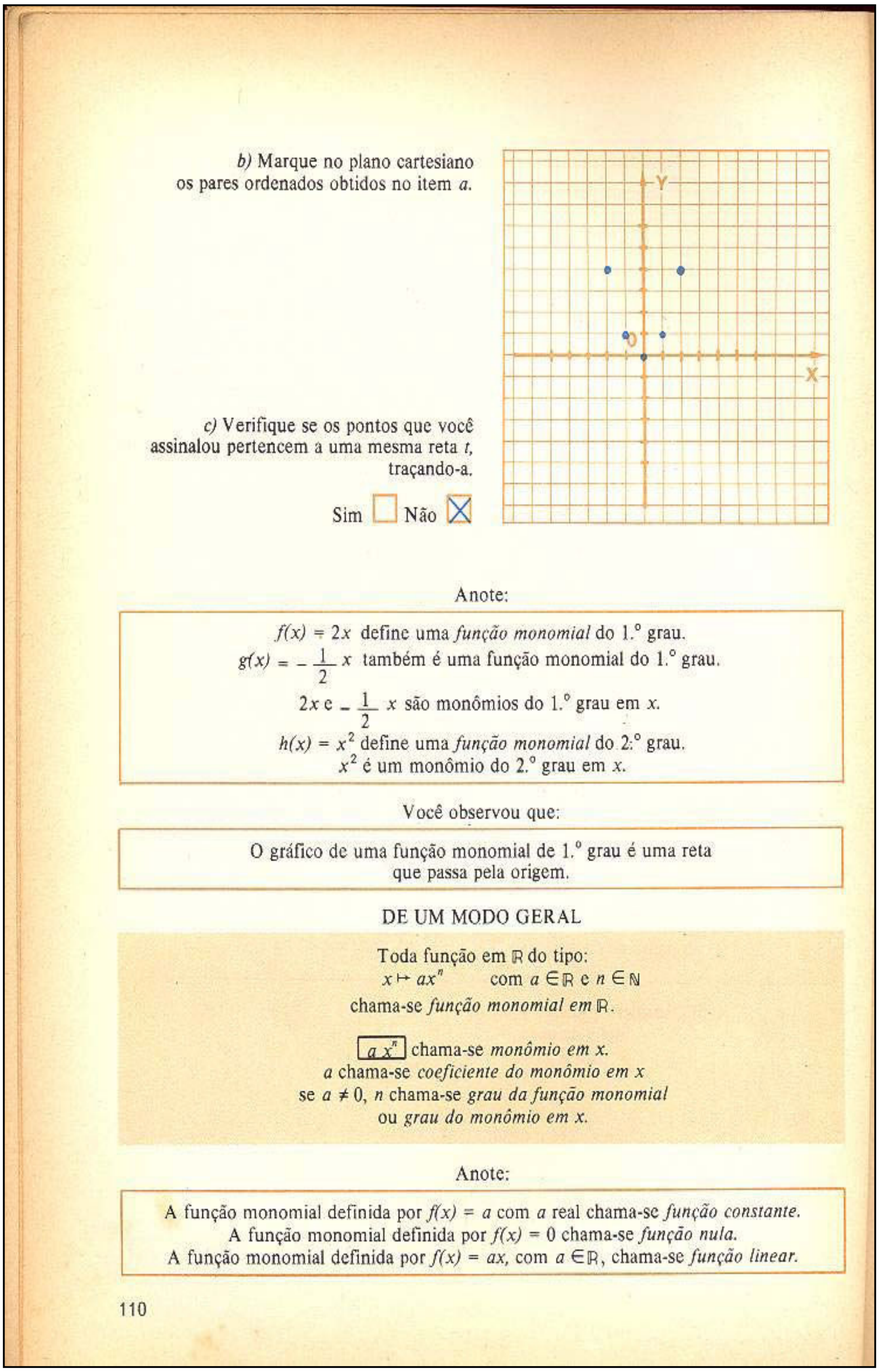
A representação de uma função no plano cartesiano chama-se *gráfico cartesiano* da função.

107

Figura 105 – Página 106 e 107 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Na parte destinada ao ensino de *função constante*, *nula* e *linear* a conversão efetuada é: expressão algébrica ⇒ tabela ⇒ representação gráfica ⇒ verificação. Buscando relacionar essas diferentes representações, as autoras solicitam que o aluno verifique se os pontos assinalados no plano cartesiano pertencem a uma mesma reta.

As autoras denominam a *função monomial do 1º grau*, cuja função tem uma única variável, e seu expoente tem valor 1 e a do 2º grau, o expoente igual a 2 respectivamente. A *função afim* é denominada como qualquer função *f* dada por uma lei da forma f(*x*) = a*x* + b, onde a e b são números reais.



b) Marque no plano cartesiano os pares ordenados obtidos no item *a*.

c) Verifique se os pontos que você assinalou pertencem a uma mesma reta *t*, traçando-a.

Sim ☐ Não ☒

Anote:

$f(x) = 2x$ define uma *função monomial* do 1.° grau.

$g(x) = -\frac{1}{2}x$ também é uma função monomial do 1.° grau.

$2x$ e $-\frac{1}{2}x$ são monômios do 1.° grau em x.

$h(x) = x^2$ define uma *função monomial* do 2.° grau.

x^2 é um monômio do 2.° grau em x.

Você observou que:

O gráfico de uma função monomial de 1.° grau é uma reta que passa pela origem.

DE UM MODO GERAL

Toda função em $\mathbb{R}$ do tipo:

$x \mapsto ax^n$ com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

chama-se *função monomial em* $\mathbb{R}$.

$\boxed{ax^n}$ chama-se *monômio em x*.

a chama-se *coeficiente do monômio em x*

se $a \neq 0$, *n* chama-se *grau da função monomial* ou *grau do monômio em x*.

Anote:

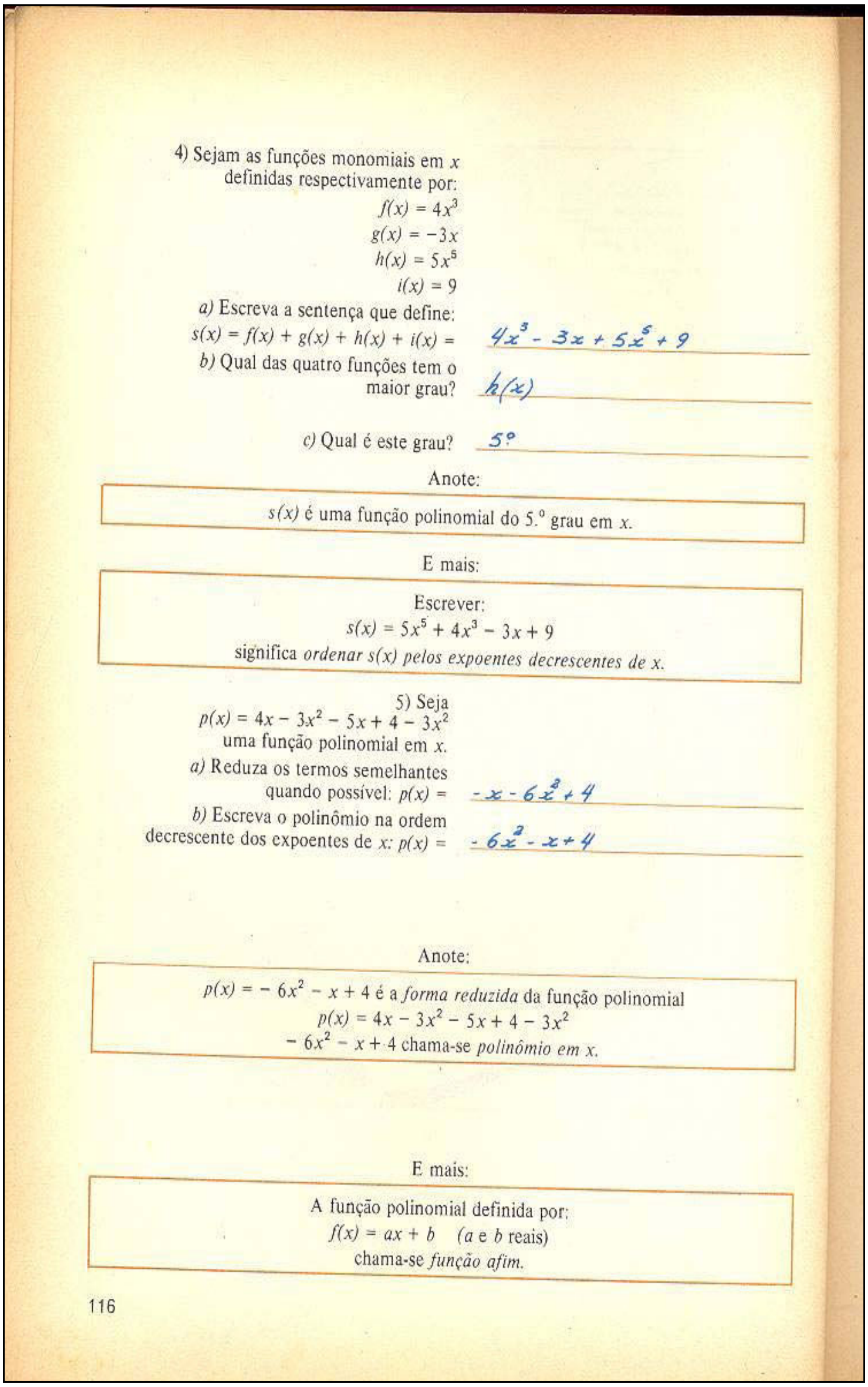
A função monomial definida por $f(x) = a$ com a real chama-se *função constante*.

A função monomial definida por $f(x) = 0$ chama-se *função nula*.

A função monomial definida por $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$, chama-se *função linear*.

110

Figura 106 – Página 110 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)



4) Sejam as funções monomiais em x definidas respectivamente por:

$f(x) = 4x^3$

$g(x) = -3x$

$h(x) = 5x^5$

$i(x) = 9$

a) Escreva a sentença que define:

$s(x) = f(x) + g(x) + h(x) + i(x) =$ $4x^3 - 3x + 5x^5 + 9$

b) Qual das quatro funções tem o maior grau? $h(x)$

c) Qual é este grau? 5º

Anote:

$s(x)$ é uma função polinomial do 5.º grau em x.

E mais:

Escrever:

$s(x) = 5x^5 + 4x^3 - 3x + 9$

significa *ordenar* $s(x)$ *pelos expoentes decrescentes de* x.

5) Seja

$p(x) = 4x - 3x^2 - 5x + 4 - 3x^2$

uma função polinomial em x.

a) Reduza os termos semelhantes quando possível: $p(x) =$ $-x - 6x^2 + 4$

b) Escreva o polinômio na ordem decrescente dos expoentes de x: $p(x) =$ $-6x^2 - x + 4$

Anote:

$p(x) = -6x^2 - x + 4$ é a *forma reduzida* da função polinomial

$p(x) = 4x - 3x^2 - 5x + 4 - 3x^2$

$-6x^2 - x + 4$ chama-se *polinômio em* x.

E mais:

A função polinomial definida por:

$f(x) = ax + b \quad$ (a e b reais)

chama-se *função afim*.

116

Figura 107 – Página 116 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

Os exercícios que contemplam representação gráfica, há duas *funções* em um mesmo sistema de eixos, como podemos verificar na próxima figura.

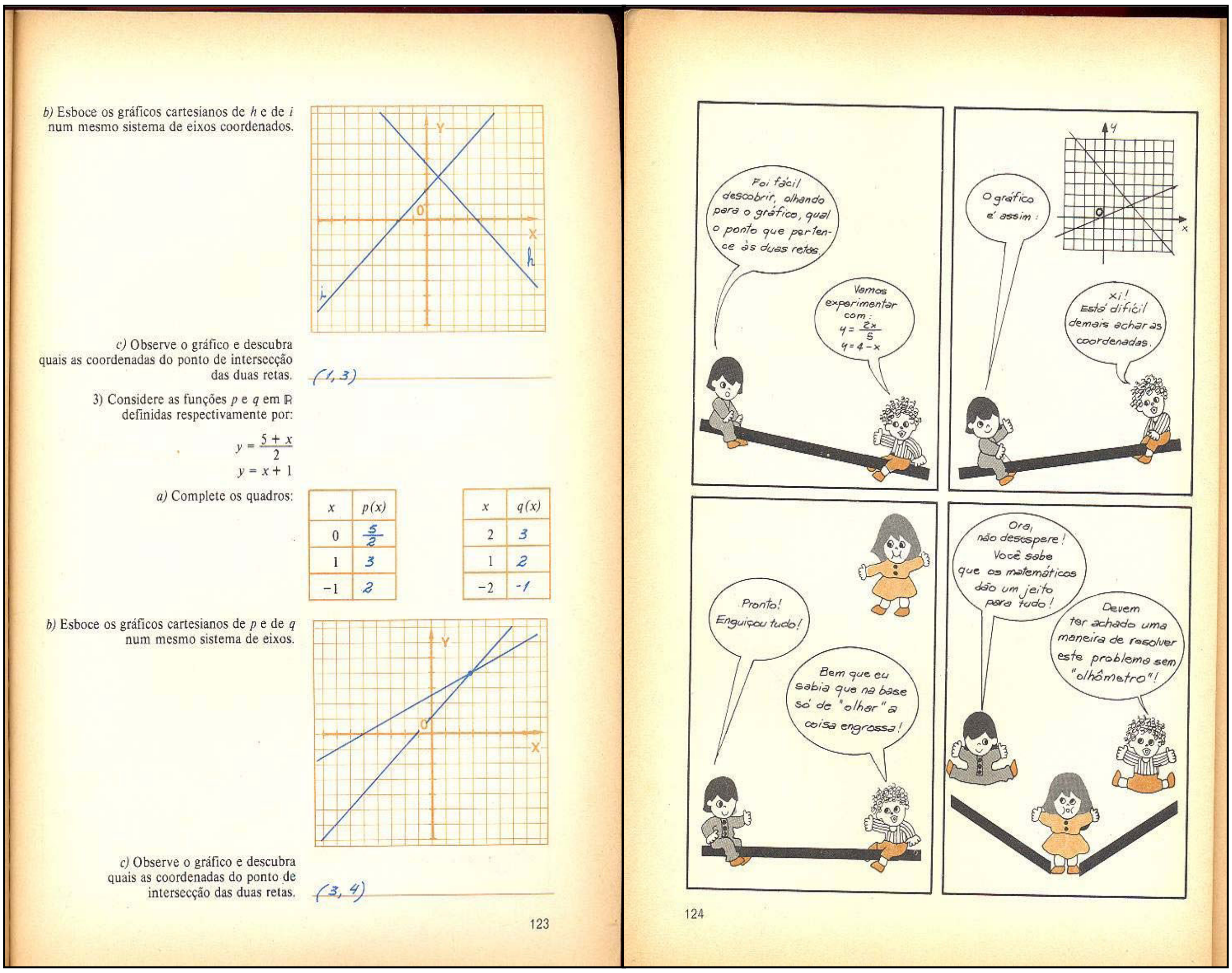


Figura 108 – Página 123 e 124 do volume V II da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 7ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1975)

No volume VIII, destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau as autoras destinaram três capítulos ao ensino de conceitos relacionados à *função,* que abrangem *domínio, conjunto-imagem* e *função quadrática*[82], tendo como objetivo:

> 1. Reconhecer uma função.
> 2. Diferenciar uma bijeção de outra função.
> 3. Identificar o domínio e conjunto-imagem de uma relação, de uma função.
> 4. Reconhecer a função quadrática.
> 5. Esboçar o gráfico cartesiano de uma função quadrática.
> (GRUEMA – Parte destinada aos professores, 1976, p.3).

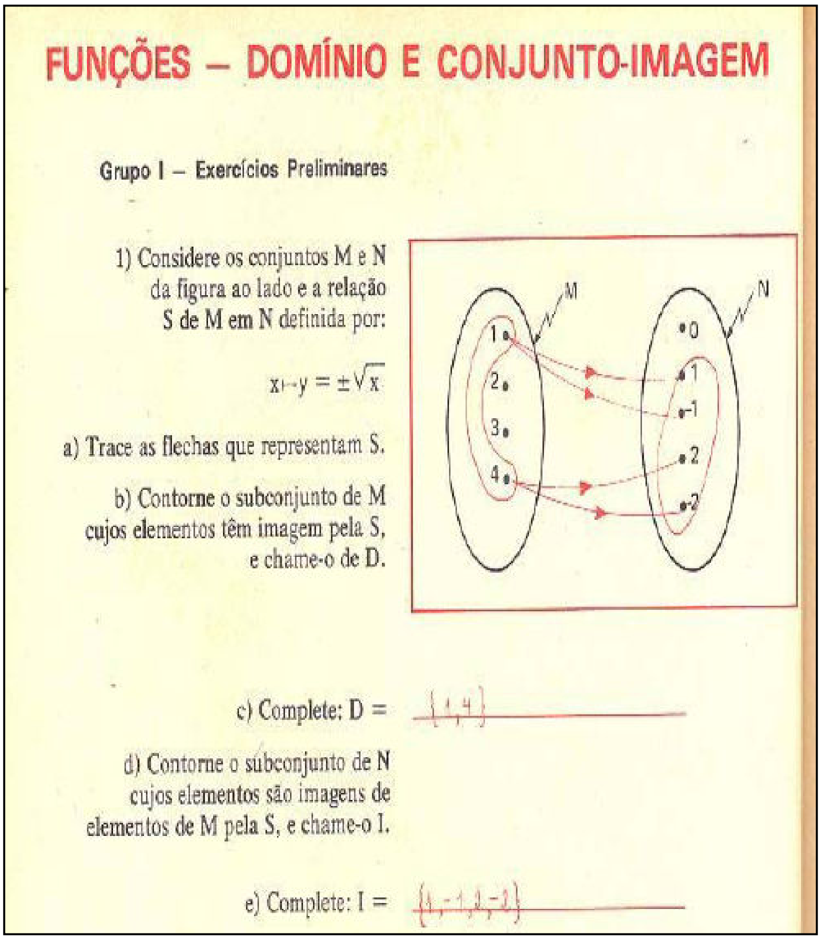
Percebemos que as autoras trabalham a *função afim* na 7ª série e a *função quadrática* na 8ª série do 1º Grau.

82 Ver anexo XXIV.

Segundo as autoras, "[...] O capítulo em questão dá um tratamento específico à função quadrática para encaminhar o aluno à compreensão do significado da resolução da equação do 2º grau".(GRUEMA, 1976, p.3).

Notamos que no volume 8, na parte pedagógica, há sugestões de questões de prova que abrangem domínio e conjunto-imagem[83] e função quadrática. [84]

No que se refere a análise do conteúdo *domínio* e conjunto *imagem*, notamos que as autoras apresentam uma situação de correspondência entre dois conjuntos (M e N) por diagrama de flechas, muito parecida com a de Sangiorgi, porém, nesta, o aluno participa da construção da definição, como podemos verificar na próxima figura.



FUNÇÕES – DOMÍNIO E CONJUNTO-IMAGEM

Grupo I – Exercícios Preliminares

1) Considere os conjuntos M e N da figura ao lado e a relação S de M em N definida por:

$x \mapsto y = \pm\sqrt{x}$

a) Trace as flechas que representam S.

b) Contorne o subconjunto de M cujos elementos têm imagem pela S, e chame-o de D.

c) Complete: D = {1, 4}

d) Contorne o subconjunto de N cujos elementos são imagens de elementos de M pela S, e chame-o I.

e) Complete: I = {1, -1, 2, -2}

Figura 109 – Página 36 do volume V III da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1976)

83 Ver no anexo XXV uma questão referente à *domínio* e *conjunto imagem*, sugerida pelo GRUEMA no volume VIII da coleção na parte destinada ao professor.

84 Ver no anexo XXVI uma questão referente à *função quadrática*, sugerida pelo GRUEMA no volume VIII da coleção na parte destinada ao professor.

Pela análise, notamos que as autoras diversificaram os enunciados dos exercícios, exploram o fato de que nem toda relação possa ser uma *função* e retomam a representação gráfica de uma *função linear*, que já foi ensinada na 7ª série.

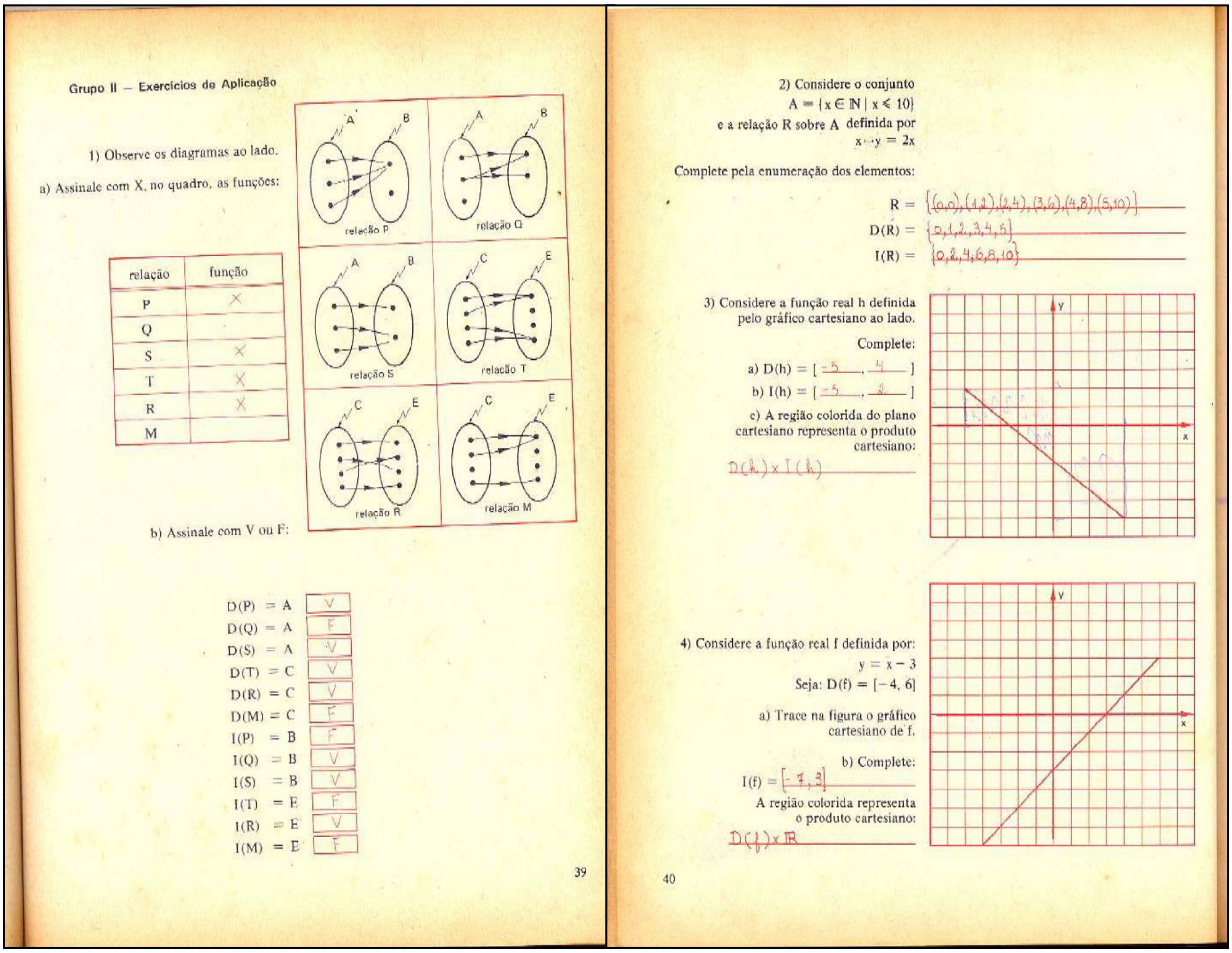
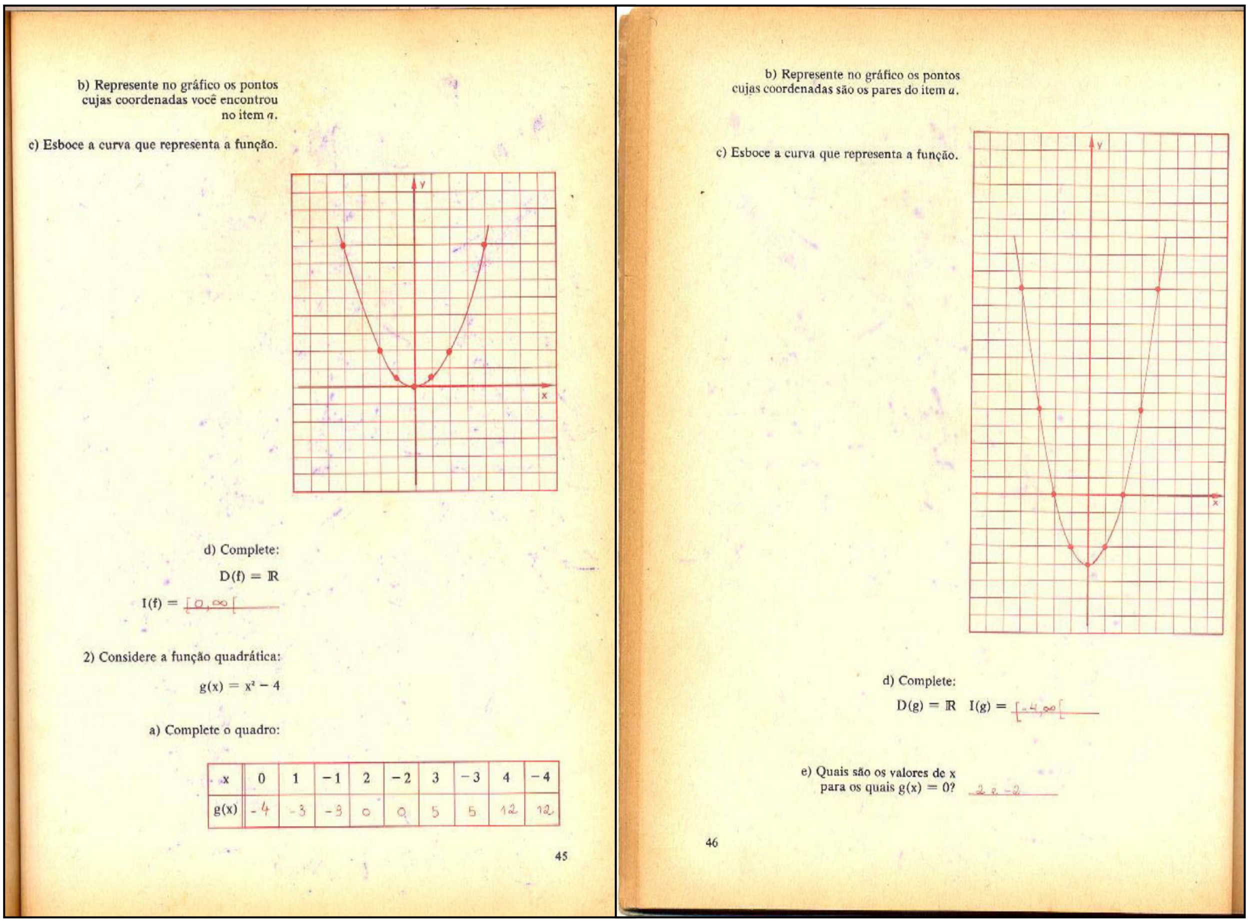


Figura 110 – Página 39 e 40 do volume V III da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1976)

No capítulo que se destina ao ensino da *função quadrática* as autoras enfatizam primeiramente a redução dos termos semelhantes para obter os monômios, binômios e trinômios.

Ao apresentar a definição de *função quadrática*, as autoras dedicam um item específico para a representação gráfica, no qual predomina a conversão: expressão algébrica ⇒ tabela ⇒ gráfico, de forma semelhante à utilizada por Sangiorgi, Castrucci e Bóscolo e Name, porém o GRUEMA acrescenta que o domínio da função quadrática, que sempre será em R.



x	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4
g(x)	-4	-3	-3	0	0	5	5	12	12

Figura 111 – Página 45 e 46 do volume V III da coleção *Curso Moderno de matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA, destinado aos alunos da 8ª série do 1º Grau (Companhia Editora Nacional-1976)

Os enunciados dos exercícios apresentam os seguintes verbos de comando: completar, esboçar, traçar, observar, descobrir, marcar, representar e assinalar. Esta diversificação também é verificada nas outras coleções didáticas analisadas, porém, nesta, verificamos a tendência de exigir mais do aluno uma postura crítica e reflexiva diante das resoluções.

3.2.10 Síntese da coleção didática do GRUEMA.

Percebemos pela análise que a coleção *GRUEMA* é uma inovação para a década de 1970, pois está voltada às experiências realizadas juntamente com os alunos e professores nas escolas, propondo ao professor o método heurístico, tendo como objetivo fazer com que o aluno possa analisar situações, renunciar à memorização sem raciocínio e ao enunciado abusivo de definições, regras e demonstrações, etc, sem abandonar a Matemática Moderna.

Estes objetivos, já vinham sendo trabalhados na coleção moderna de Sangiorgi, porém o GRUEMA se apropriou de uma maneira distinta do MMM, com mais "ousadia" na abordagem ligada ao cotidiano, de uma forma mais contextualizada e com um ensino que estabelecia mais relações com as demais áreas do conhecimento.

Notamos que de uma maneira geral a abordagem do conceito de *função* desta coleção se configura de uma maneira distinta das demais coleções já analisadas. O uso de ilustrações, o papel dos exercícios, história em quadrinhos, figuras, nomes e elementos utilizados do cotidiano do aluno possivelmente representam a intenção do GRUEMA em abordar o conteúdo de forma concreta e contextualizada.

Os conceitos que antecedem o ensino de *função*, como por exemplo, o conceito de pares ordenados e relação já são abordados no ensino da 1ª e 4ª série, sendo aprofundados no ensino de 5ª a 8ª com a definição de *função*. Percebe-se claramente que a intenção das autoras não é definir *função* logo a princípio, como vinha sendo feito nos outros livros didáticos analisados. Ou seja, o GRUEMA propõe exercícios que estimulam o aluno descobrir por si só a definição de função, sendo estabelecida a definição geralmente ao final dos exercícios.

Notamos que a definição de *função* do GRUEMA é semelhante à de Sangiorgi e às dos demais autores das coleções analisadas, porém abordagem do conceito de *função* difere. O conceito de *relação* é muito mais explorado que nas demais coleções.

Por todas as características presentes na coleção didática analisada, não podemos deixar de admitir a inovação apresentada pelo GRUEMA, sobretudo na utilização de história em quadrinhos, com uma linguagem mais próxima ao cotidiano do aluno, no sentido de auxiliá-lo em seu aprendizado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação é o resultado de um percurso de trabalho, que demandou cerca de dois anos e envolveu diversas etapas que foram percorridas, na maior parte do tempo, simultaneamente. A primeira delas se constituiu pelas leituras indicadas nas diferentes cadeiras do curso de Mestrado, envolvendo o ensino da Matemática, a História da Educação, a História da Educação Matemática, a História do Livro Didático e das Disciplinas Escolares. A segunda foi a busca e a seleção dos livros, que foram encontrados no Centro de Documentação do GHEMAT, localizado em Osasco, na biblioteca da Faculdade de Educação da USP – Projeto LIVRES, e em sebos localizados em São Paulo e Pernambuco. A terceira foi a análise dos livros didáticos, que se caracterizou também pelo manuseio repetido dos mesmos para a definição de categorias e desenvolvimento do processo dos aspectos a serem analisados. E por último, a elaboração do texto que veio a se constituir na presente dissertação.

A análise dos livros possibilitou a identificação de diversos aspectos, entretanto, a partir do livro de Osvaldo Sangiorgi em tempos modernos elencamos as categorias de análise que estabelecemos como eixos norteadores: a estrutura de apresentação do conceito de função; como se deu a exploração dos conceitos de domínio, contra-domínio e imagem; a utilização de diagramas de flechas para estabelecer relações; a representação gráfica das funções linear e quadrática; e os exercícios.

O período delimitado para estudo na presente dissertação (décadas de 1960 e 1970) abrangeu transformações significativas na abordagem do conceito de função, pois nestas décadas o MMM teve seu auge nas escolas brasileiras. O livro didático foi um elemento fundamental na divulgação do conhecimento matemático. Em específico quanto ao conteúdo de função, a abordagem fica restrita a um tipo especial de relação entre conjuntos, sendo enfatizado o estudo daqueles que definem função: imagem, domínio, contra-domínio. Outro aspecto enfatizado no período foi a representação das funções a partir de diagramas de flechas.

Na década anterior, durante a vigência da Portaria de 1951 os conteúdos relacionados com função apareciam somente na 3ª série do Colegial. Com as sugestões do GEEM nos *Assuntos mínimos para um moderno programa de* *matemática para o ginásio*, publicado pela primeira vez no livro *Matemática Moderna para o ensino Secundário* em 1962, e com as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* que foram publicadas pelo GEEM em 1965, o ensino de funções foi redistribuído entre o ginásio e o colégio, sendo que no ginásio, o conteúdo seria abordado na 4ª série ginasial.

Apesar da legislação na década de 1950 propor que o conteúdo de funções estivesse presente somente no colegial, Osvaldo Sangiorgi, em sua coleção Pré-Moderna o traz no apêndice do volume da 4ª série, se restringindo à representação gráfica. Isto nos remete ao conceito de apropriação e de representação segundo Chartier (1990) e Certeau (2007), podemos supor que ou Sangiorgi achava importante este conteúdo para o ensino da matemática ou teve uma atitude cautelosa em relação à retirada desse conteúdo da 4ª série do ginásio, na medida em que na Reforma Capanema de 1942, isto estava previsto.

Em meados da década de 1960 é publicada a coleção moderna para o ginásio do professor Osvaldo Sangiorgi. Eram os primeiros livros totalmente envolvidos com a proposta modernizadora: introdução de novos conteúdos, como por exemplo, conjuntos, modificação da forma de abordagem de diversos tópicos ao utilizar linguagem simbólica e a linguagem de conjuntos. Esta nova coleção acabou sendo também inovadora devido ao seu aspecto visual, como o uso das cores, diferentes representações gráficas, uso de figuras, caixas de texto para chamar a atenção do aluno. Quanto ao tratamento do autor para com seu público, Sangiorgi procurou ao longo da explicação dos conteúdos dialogar com o aluno, cativá-lo e mostrar que a Matemática Moderna não era tão complicada, chegando a chamar o leitor de *Caro Amigo*. Esta coleção pode ser considerada um “best-seller” e tornou-se um referencial para outros autores fazerem seus livros didáticos para o ginásio, o que segundo Valente (2008b), contraria a hipótese de Chervel (1990); que um manual inovador não tem sucesso e sim, os que vem posteriores a ele.

O aspecto visual, como as ilustrações e cores presentes nas publicações dos livros analisados em Tempos Modernos, aumentaram significativamente em relação à década de 1950. Especificamente quanto à abordagem do conteúdo de funções, os autores procuraram tratar os conceitos relacionados anteriormente à 4ª série, como por exemplo, a noção de variável, relação e correspondências, que são assuntos importantes para o estudo do ensino de funções na perspectiva do MMM.

É interessante ressaltar, que os exercícios propostos na década de 1950 eram limitados em relação ao desenvolvimento e a resolução. Um indicativo disso é, por exemplo, que a maioria deles usavam verbos de comando tais como construa e resolva, não apresentando contextualização e articulações com a realidade do aluno, nem com outras disciplinas. Já com a análise dos livros didáticos em Tempos Modernos, pudemos verificar a preocupação dos autores quanto à diversificação dos enunciados dos exercícios, propondo até aos alunos exercícios denominados exploratórios (no caso da coleção didática de Osvaldo Sangiorgi). Em particular, a coleção GRUEMA se diferencia, pois compreende em quase sua totalidade de exercícios para os alunos resolverem, história em quadrinhos, que são utilizadas para sistematizar o conteúdo e notas das autoras. Percebemos que na coleção GRUEMA há uma ênfase no raciocínio lógico indutivo e dedutivo do aluno, análise de situações reais, próximas à realidade dos estudantes, na contextualização e nas articulações com outras disciplinas - partindo de situações concretas conhecidas, até chegar em algumas conclusões que possibilitem o desenvolvimento do seu raciocínio. Nesta coleção, cabe ao professor ensinar os conteúdos por meio de acompanhamento, encorajando os alunos à descoberta e à procura de novos caminhos para solucionar problemas e com discussões, tanto individuais quanto em grupos.

Foi possível perceber que cada autor das coleções analisadas manifestou características e concepções acerca do MMM. Em relação à comunicação com o estudante, Sangiorgi procurou nos prefácios conversar com o aluno dizendo que a matemática que ele ia estudar era diferente do que seus irmãos e colegas estudaram – fazendo menção à Matemática Moderna. As cartas ou as apresentações presentes no início de cada livro tinham a intenção de cativar o aluno e conquistá-lo para estudar matemática.

A coleção de Bethlem se diferencia quanto ao formalismo na abordagem dos conceitos, enfatizando já no prefácio que o aluno ao estudar com seu livro, irá conhecer os conceitos da Matemática Moderna de “alto teor científico”. Já a coleção do GRUEMA utiliza os exercícios para desenvolver o conteúdo e o recurso das histórias em quadrinhos para sistematizar alguns conceitos numa linguagem mais acessível.

Comparando a abordagem dada ao ensino de função por Sangiorgi em Tempos Pré-Modernos e em Tempos Modernos, percebemos na coleção moderna que o conceito de função foi mais ampliado. Os exercícios da coleção moderna são diversificados, o autor procura conversar com o aluno e expor exemplos para facilitar o seu aprendizado, embora a representação gráfica das funções de 1º e 2º grau tenha tratamento semelhante.

A forma pela qual, Bóscolo e Castrucci abordam o conteúdo de função em sua coleção didática é muito parecida com a de Sangiorgi, em todas as categorias de análise: estrutura de apresentação; definição; exploração dos conceitos de contra-domínio e imagem; utilização de diagrama de flechas; representação gráfica das funções linear e quadrática e exercícios. Porém nessa coleção de Bóscolo e Castrucci, há menos exercícios propostos aos alunos do que na de Sangiorgi.

Notamos que as coleções de Bethlem e do GRUEMA se diferenciam na metodologia para explicar o conceito de função.

Betlhem privilegia mais a abstração, a generalização e o rigor em sua coleção. Utilizando as relações binárias com diferentes representações, ora por pares ordenados, ora com diagramas de flechas e inovando com um diagrama em forma triangular para que o aluno possa observar a simetria da parábola. O conceito de função começa a ser tratado no 3º ano ginasial, o que extrapola as *Sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática* que foram publicadas pelo GEEM em 1965 – sugerindo que o conteúdo seja ensinado no 4º ano ginasial.

A coleção de Name se assemelha à de Sangiorgi em Tempos Modernos, porém, de forma resumida, incluindo à quantidade de exercícios.

A coleção *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º Grau* do GRUEMA pode ser considerada como uma inovação para a década de 1970, pois nos livros didáticos para o aluno contém somente exercícios, histórias em quadrinhos e algumas notas das autoras. O conceito de função é ensinado no modo heurístico, por meio de seqüências de atividades propostas aos alunos, com sistematizações ao final (fazendo-nos recordar da década de 30 – Reforma Francisco Campos). Na coleção do GRUEMA o conceito de relação é mais explorado que nas demais coleções analisadas, pois este é explorado desde a 1ª série do 1º Grau com o ensino das relações de medida, ampliando o conceito nas demais séries, com o estudo das relações inversa, afim, polinomial, simétrica, anti-simétrica, transitiva, de ordem, equivalência e relações que não são nem de ordem e nem de equivalência, como mencionam o Grupo. O conteúdo de funções é tratado na 5ª, 7ª e 8ª série. Uma característica marcante foi a utilização da história em quadrinhos para orientar o aluno no aprendizado.

Percebemos que a definição de função é muito semelhante à dada por Sangiorgi nas coleções analisadas. O diagrama de flechas é também considerado um aspecto de destaque em todas as coleções analisadas, também podemos encontrá-lo até hoje em livros didáticos de matemática, o que comprova a idéia de Chervel (1990), de que os sistemas antigos permanecem nas disciplinas escolares, no momento em que o novo se instala, co-existindo assim o novo e o antigo em proporções variáveis.

Em relação aos livros didáticos, Chervel (1990) observou que numa dada época, para o ensino de uma disciplina, todos os livros didáticos "dizem a mesma coisa, ou quase isso" (p. 203), referindo-se ao conceito de "vulgata" ou melhor, à padronização dos manuais. Adaptamos este conceito para o tratamento didático e metodológico dado ao ensino de função nas coleções analisadas.

Os resultados indicam que há uma certa padronização em relação à seleção de aspectos como: função, como no caso particular de relação; exploração dos conceitos de imagem, domínio e contra-domínio; ampla utilização de diagrama de flechas, etc. Os aspectos que mais diferenciam as coleções analisadas são: a ênfase na linguagem simbólica, o rigor na abordagem do tema, a preocupação com a abstração, o recurso ao método heurístico; a existência de alguma contextualização; a articulação com outras disciplinas; a utilização de recursos como cartas ao leitor, a presença de histórias em quadrinhos e a utilização de diversos tipos de representação.

Com as análises realizadas, não podemos concluir que houve uma vulgata na abordagem do conceito de função de uma forma geral, mas sim, uma certa padronização como na definição de função, no uso dos diagrama de flechas, na exploração dos conceitos de imagem, domínio e contra-domínio.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para outros estudos sobre o tema que ainda caberiam, por exemplo, como se deu a continuidade do ensino de funções no colegial a partir do MMM.

REFERÊNCIAS

BITTENCOURT, C. M. F. **Livro Didático e Conhecimento Histórico: uma história do saber escolar.** São Paulo: USP, Faculdade de Educação. Tese de doutorado, 1993.

______.Disciplinas Escolares: História e Pesquisa. **História das disciplinas Escolares no Brasil: contribuições para o debate.** São Paulo: Universidade São Francisco, 2003.

BÜRIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. (Dissertação de Mestrado), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

BLOCH, M**. Apologia da História ou o ofício do historiador.** Tradução André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

BRAGA, C. **O Processo Inicial de Disciplinarização de Função na Matemática do Ensino Secundário.** (Dissertação de Mestrado) PUC/SP, 2003.

______. **Função, a alma do ensino da matemática.** Annablume. São Paulo. Annablume; Fapesp, 2006.

CERTEAU, M. de. **A escrita da história.** Tradução: Maria de Lourdes Menezes. 2ª ed., Rio de Janeiro, RJ: Forense Universitária, 2007.

CHARTIER, R. **La Historia o la lectura del tiempo**. Gedisa Editorial, 1990.

______. O mundo como representação. Tradução: Andréa Daher e Zenir Campos Reis. **Estudos Avançados**, 11 (5), 1991, p. 173-191.

CHERVEL, A. **Histórias das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa.** Teoria & Educação, n.2. Porto Alegre: Pannonica, 1990, p. 177-229.

CHOPPIN, A. **História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Revista: Educação e Pesquisa.** São Paulo, v. 30, n.3, p.549-566, set/dez.2004.

DUARTE, A. R. S**. Matemática e Educação Matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** (Tese de Doutorado), PUC/SP, 2007.

GEEM. **Assuntos mínimos para um moderno programa de matemática para o ginásio.** In: _____. Matemática moderna para o ensino secundário. Série Professor n. 1, 1ª edição, São Paulo, SP: GEEM, 1962.

______. **Um programa moderno de matemática para o ensino secundário.** O.E.C.E. Série Professor n. 2, tradução de Luiz Henrique Jacy Monteiro. São Paulo: GEEM, 1965.

______. **Sugestões para um roteiro de programa para a cadeira de matemática.** In: _____. Matemática moderna para o ensino secundário. Série Professor n. 1, 2ª edição, São Paulo, SP: GEEM, 1965b.

GOODSON, I. F. **Currículo: teoria e história.** 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

GUIMARÃES, H. M. **Por uma Matemática nova nas Escolas Secundárias – Perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna**. In: A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos. São Paulo, Brasil, 2007. p. 21-45.

JULIA, D. **A Cultura Escolar como Objeto Histórico.** Tradução: Gizele de Souza. Universidade Federal do Paraná, 2001.

LAVORENTE, C. R. **A Matemática Moderna nos livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi.** (Dissertação de Mestrado) PUC/SP, 2008.

MARQUES, A. S. **Tempos Pré-Modernos: A matemática escolar dos anos de 1950.** (Dissertação de Mestrado), PUC-SP, 2005.

MEDINA, D. **História da Educação Matemática nas séries iniciais: uma cronologia em construção (1949-1988).** In: A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil e de Portugal: novos estudos. Porto Alegre, Brasil, 2008. p. 147-163.

MIORIM, M.A. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo. Editora Atual, 1998.

ROMANELLI, O. O. **História da Educação no Brasil.** São Paulo. Editora Vozes, 2007.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).** São Paulo: Annablume, 1999.

______. Org. **O nascimento da matemática do ginásio.** São Paulo: Annablume; Ghemat; Fapesp, 2004.

VALENTE, W. R. **A matemática na escola: um tema para a história da educação**. In: MOREIRA, Darlinda; MATOS, José Manuel. (Orgs.). **História do Ensino da Matemática em Portugal**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005. p.21-32.

______. **História da Educação Matemática: Interrogações Metodológicas.** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática - V2. 2, p. 28-49, UFSC, 2007.

______. **Livro didático e educação matemática: uma história inseparável.** ZETETIKÉ – cempem – Unicamp – v. 16 – n.30 – jul./dez. – p. 139-162, 2008a.

______.**Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil.** Rev. Diálogo Educ. Curitiba, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008b

______. Org. **Osvaldo Sangiorgi, um professor moderno.** São Paulo: Annablume; Ghemat; CNPq, 2008c.

VILLELA, L.M.A. **Mapa de edições de livros didáticos de Matemática – Cia. Editora Nacional, 1964-1978.** São Paulo: Ghemat, 2007. Mimeografado.

VILLELA, L.M.A. **Os livros didáticos de matemática de maior vendagem, na companhia editora nacional, no período de 1964 a 1980.** In: A Matemática Moderna nas Escolas do Brasil e de Portugal: novos estudos. Porto Alegre: Redes Editora/ Capes/ Ghemat, 2008. p. 118-132.

VIÑAO FRAGO, Antonio. **Sistemas educativos, culturas escolares e reformas.** Edições pedago, 2007.

Obras analisadas em Tempos Pré-Modernos

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Ginasial.** 1ª Série. 66ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1962.

______. ______. 2ª Série. 60ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1961.

______. ______. 3ª Série. 77ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 19**.

______. ______. 4ª Série. 32ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

Obras analisadas em Tempos Modernos

BETHLEM, A. **Matemática Moderna.** 1ª série. São Paulo: Editora São Paulo, 1969.

______. ______. 2ª Série. São Paulo: Editora São Paulo, 1969.

BETHLEM, A. **Matemática Moderna.** 3ª Série. São Paulo: Editora São Paulo, 1969.

______. ______. 4ª Série. São Paulo: Editora São Paulo, 1969.

BÓSCOLO A.; CASTRUCCI B. **Matemática Curso Moderno.** 1ª Série. 2ª ed. São Paulo: FTD, 1973.

______. ______. 2ª Série. 2ª ed. São Paulo: FTD, 1967.

______. ______. 3ª Série. 5ª ed. São Paulo: FTD, 1972.

______. ______. 4ª Série. 2ª ed. São Paulo: FTD, 1971.

GRUEMA. **Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º Grau.** 1ª Série do 1º Grau. São Paulo: Editora do Brasil,S.A, 1977. ***

______. ______. 6ª Série do 1º Grau. São Paulo: Editora do Brasil,S.A, 1975. ***

______. ______. 7ª Série do 1º Grau. São Paulo: Editora do Brasil,S.A, 1975. ***

______. ______. 8ª Série do 1º Grau. São Paulo: Editora do Brasil,S.A, 1976. ***

NAME, M.A. **Matemática Ensino Moderno.** 5ª Série do 1º Grau. 10ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1973

______. ______. 6ª Série do 1º Grau. 47ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1973.

______. ______. 7ª Série do 1º Grau. 6ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1973.

______. ______. 8ª Série do 1º Grau. 8ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1973.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno.** 1ª Série. 8ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966.

______. ______.2ª Série. 2ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

______. ______.3ª Série. 6ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966.

______. ______.4ª Série. 8ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967.

______. **Guias para professores: Matemática Curso Moderno.** 1ª Série. 9ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.

______. ______. 2ª Série. 8ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970.

______. ______. 3ª Série. 6ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966.

SANGIORGI, O. 4ª Série. 7ª ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1971.

** A obra não continha o ano de publicação.
*** A obra não continha a edição.

ANEXOS

ANEXO I

Conteúdos presentes no Apêndice – página 9 do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1959 – 32ª edição).

APÊNDICE

ANEXO II

Exemplo de exercícios com representação gráfica de função de 1º e 2º grau – página 219 do livro *Matemática Curso Ginasial* – 4ª série ginasial, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1959 – 32ª edição).

para $a > 0$, o *trinômio passa por* ***mínimo,*** e as *parábolas* correspondentes, uma para cada sinal de $\triangle$ serão (figs. 18):

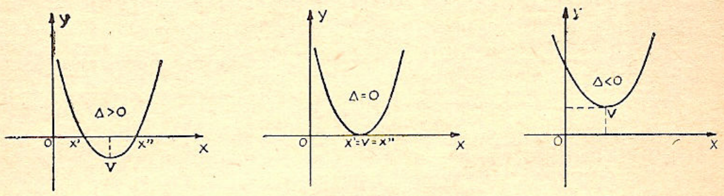


FIG. 18

EXERCÍCIOS

1. Construir o gráfico (reta) das seguintes funções do primeiro grau:

1.ª) $y = 4 - 2x$ 3.ª) $y = 3x$ 5.ª) $2y = -6$ 7.ª) $3y + 2x = 12$

2.ª) $y = x + 3$ 4.ª) $3x = 12$ 6.ª) $y = x + 1$ 8.ª) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$

2. Resolver gràficamente (sistema de duas retas) os seguintes sistemas:

1.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ 5.º) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases}$

2.º) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3y - 2x = 6 \end{cases}$ 6.º) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 3y - 3x = 6 \end{cases}$

3.º) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ 7.º) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

4.º) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 8.º) $\begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 3x - 9 \end{cases}$

3. Construir o gráfico (parábola) das seguintes funções do segundo grau:

1.ª) $y = x^2 - 8x + 12$
2.ª) $y = -x^2 + 2x$
3.ª) $y = 2x^2 - 8x + 8$
4.ª) $y = -5x^2 + 2x - 3$
5.ª) $y = 2x^2 - 8$
6.ª) $y = -\dfrac{2}{5}x^2$

7.ª) $y = x^2 - 7x + 6$
8.ª) $y = x^2 + 8x + 15$
9.ª) $y = -2x^2 + 12x - 18$
10.ª) $y = x^2 + 2x - 8$
11.ª) $y = x^2 - 2x + 2$
12.ª) $y = x^2 + 4x$

ANEXO III

Exercícios de Aplicação – Página 74 do livro *Matemática Curso Moderno -* 4º volume para os Ginásios, de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

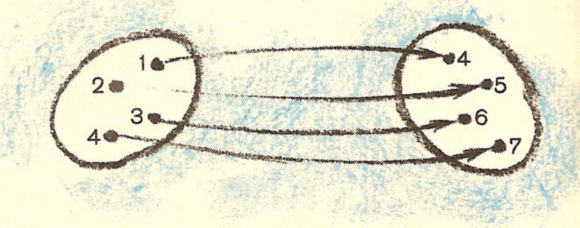
EXERCICIOS DE APLICAÇÃO — GRUPO 24

Caracterize cada uma das seguintes *funções*, destacando a correspondência entre os conjuntos por intermédio de desenho.

1.ª) "Associar a cada número natural x o número $x + 3$"

$\boxed{x \longrightarrow x + 3}$

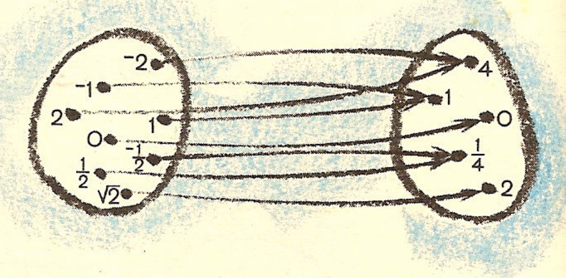
$x = 1 \Longrightarrow 1 + 3 = 4$
$x = 2 \Longrightarrow 2 + 3 = 5$
$x = 3 \Longrightarrow 3 + 3 = 6$
$x = 4 \Longrightarrow 4 + 3 = 7$



2.ª) "Associar a cada número real x o número x^2"

$\boxed{x \longrightarrow x^2}$

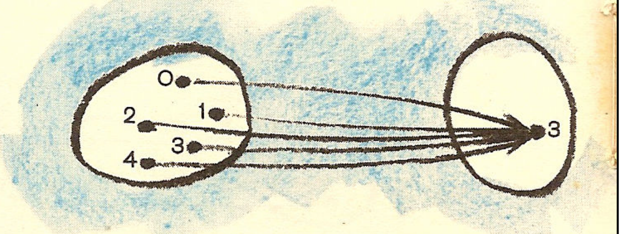
$x = {}^-2 \Longrightarrow ({}^-2)^2 = 4$
$x = {}^-1 \Longrightarrow ({}^-1)^2 = 1$
$x = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$x = 0 \Longrightarrow 0^2 = 0$
$x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
$x = 1 \Longrightarrow 1^2 = 1$
$x = \sqrt{2} \Longrightarrow (\sqrt{2})^2 = 2$
$x = 2 \Longrightarrow 2^2 = 4$



3.ª) "Associar a cada número real x o número 3"

$\boxed{x \longrightarrow 3}$

NOTA: A qualquer valor atribuído a x está sempre *associado*, pela função, o *único* valor 3. Neste caso a função é denominada CONSTANTE.



74

ANEXO IV

Exercícios de Fixação – Página 118 e 119 do livro *Matemática Curso Moderno - 4º volume para os Ginásios,* de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 25

1. Assinale, entre as seguintes relações, as que são *funções*. Justifique.

   1.ª) Associar a cada número natural x o número $3x$
   2.ª) Associar a cada número inteiro x o número $x - 2$
   3.ª) Associar a cada número real x o número $2x + 1$
   4.ª) Associar a cada número real x o número 5
   5.ª) Associar a cada número real x o número x^2

   6.ª) Associar a cada número real x o número $4x^2$
   7.ª) Associar a cada número real x o número $3x^2 - x$
   8.ª) Associar a cada número real x o número $x^2 - 5x + 4$
   9.ª) Associar a cada número inteiro par o número 2 e a cada número inteiro ímpar o número 3
   10.ª) Associar a cada número inteiro múltiplo de 3 o número 5 e a cada número primo o número 1

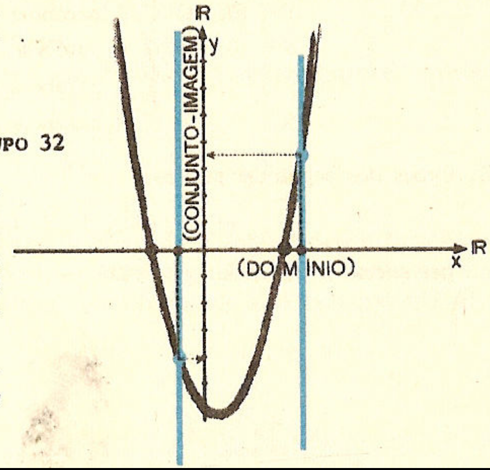
2. Caracterize cada uma das seguintes *funções*, destacando a correspondência entre os conjuntos por intermédio de desenho:

   1.ª) Associar a cada pessoa o seu nome
   2.ª) Associar a cada nome a pessoa que atende por êsse nome
   3.ª) Associar a cada animal a classe zoológica a que pertence (Ex.: cachorro → mamífero)
   4.ª) Associar a cada Estado do Brasil a sua capital
   5.ª) Associar a cada jovem a sua altura
   6.ª) Associar a cada altura (dada por uma medida) o jovem que possui essa altura
   7.ª) Associar a cada aluno a sua nacionalidade
   8.ª) Associar a cada palavra em Português a sua classificação gramatical
   9.ª) Associar a cada pessoa o seu tio
   10.ª) Associar a cada pessoa o seu sobrinho
   11.ª) Associar a cada Estado brasileiro a pessoa nascida nesse Estado
   12.ª) Associar a cada ano entre 1960 e 1967 o atual presidente do Brasil

ANEXO V

Exercício Exploratório – Página 91 do livro *Matemática Curso Moderno - 4º volume para os Ginásios,* de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

A curva que se vai "esboçando" recebe o nome de *parábola*. O seu estudo, com mais pormenores, será feito com as *funções quadráticas* (segundo grau).



EXERCÍCIO EXPLORATÓRIO — GRUPO 32

Revendo a definição de *função*, justifique a seguinte sentença:

"O gráfico que representa, num sistema cartesiano de referência, uma *função* é interceptado por qualquer reta paralela ao eixo-*y* num ÚNICO ponto."

Lembre-se de que o eixo-*x* está representando o *domínio* da função e o eixo-*y* o *conjunto-imagem*. . .

ANEXO VI

Modelo de prova mensal – Página 102 do livro *Matemática Curso Moderno - 4º volume para os Ginásios,* de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

Modêlo de uma prova mensal(*)

Represente, num mesmo sistema cartesiano de referência, as retas:

$$y = x + 5 \quad \text{e} \quad y = {}^{-}x + 1$$

Considere a reta: $y = {}^{-}x + 1$ e responda:

1.º) quais as coordenadas do *ponto-intersecção* com o eixo-x?
2.º) quais as coordenadas do *ponto-intersecção* com o eixo-y?
3.º) para que valôres de x, $y < 0$? (o mesmo que: quais as *abscissas* dos pontos localizados "abaixo" do eixo-x?)
4.º) para que valôres de y, $x > 0$? (o mesmo que: quais as *ordenadas* dos pontos localizados "à direita" do eixo-y?)
5.º) resolva o sistema formado pelas duas equações dadas e verifique a solução com o gráfico das respectivas retas

LEMBRETE AMIGO

Quem fala em *funções lineares:* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$, está falando:

em *equações do primeiro grau com duas variáveis* e/ou em *retas situadas num plano*

(*) A *Prova* foi elaborada e dada em classe (4.ª série) pela Prof.ª Renate G. Watanabe, do C. E. 'Virgília Rodrigues Alves de Carvalho Pinto".

ANEXO VII

Exercícios de Fixação – Página 115 do livro *Matemática Curso Moderno - 4º volume para os Ginásios,* de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO — GRUPO 38

Estude as seguintes *funções trinômio do segundo grau*, construindo o *gráfico*, determinando as *raízes* ou *zeros* e os *pontos principais:*

1.ª) $y = x^2 - 8x + 7$
2.ª) $y = {}^{-}x^2 + 5x - 4$
3.ª) $y = {}^{-}x^2 + 2x - 2$
4.ª) $y = {}^{-}2x^2 + 8x - 8$
5.ª) $y = 2x^2 - x + 4$
6.ª) $y = x^2 + 8x + 15$
7.ª) $y = {}^{-}x^2 + 2x + 15$
8.ª) $y = 3x^2 - 6x$
9.ª) $y = x^2$
10.ª) $y = {}^{-}2x^2$

115

ANEXO VIII

Exercício exploratório – Página 116 do livro *Matemática Curso Moderno - 4º volume para os Ginásios,* de Osvaldo Sangiorgi. (Companhia Editora Nacional - de 1967 – 8ª edição).

EXERCÍCIO EXPLORATÓRIO — GRUPO 39

"Travessuras" do coeficiente a . . .

Seria possível — sem desenhar — reconhecer a *posição* do *vértice* da parábola ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$) como um *mínimo* ($\cup$) ou *máximo* ($\cap$), conhecendo-se *sòmente* o *sinal* do coeficiente a?

SIM. Basta você prestar bem atenção ao *sinal qualificativo* do coeficiente a nos exemplos há pouco estudados.

Assim, no trinômio:

$$y = x^2 - 7x + 10 \quad \text{(1.º exemplo, pág. 111)}$$

o coeficiente $a = {}^{+}1$ tem o sinal qualificativo *positivo* e o *vértice* da parábola correspondente é um ponto de *mínimo* ($\cup$) (o mesmo ocorrendo nos exemplos 3.º e 4.º).

Já no trinômio:

$$y = {}^{-}x^2 + 6x - 5 \quad \text{(2.º exemplo, pág. 113)}$$

cujo coeficiente $a = {}^{-}1$ tem o sinal qualificativo *negativo*, o *vértice* da parábola correspondente é um ponto de *máximo* ($\cap$) (o mesmo ocorrendo com alguns exercícios do Grupo 37).

Conclusão: Agora você já pode reconhecer — **sem desenhar!** — se o *vértice* da parábola $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) é um ponto de *mínimo* ou de *máximo:*

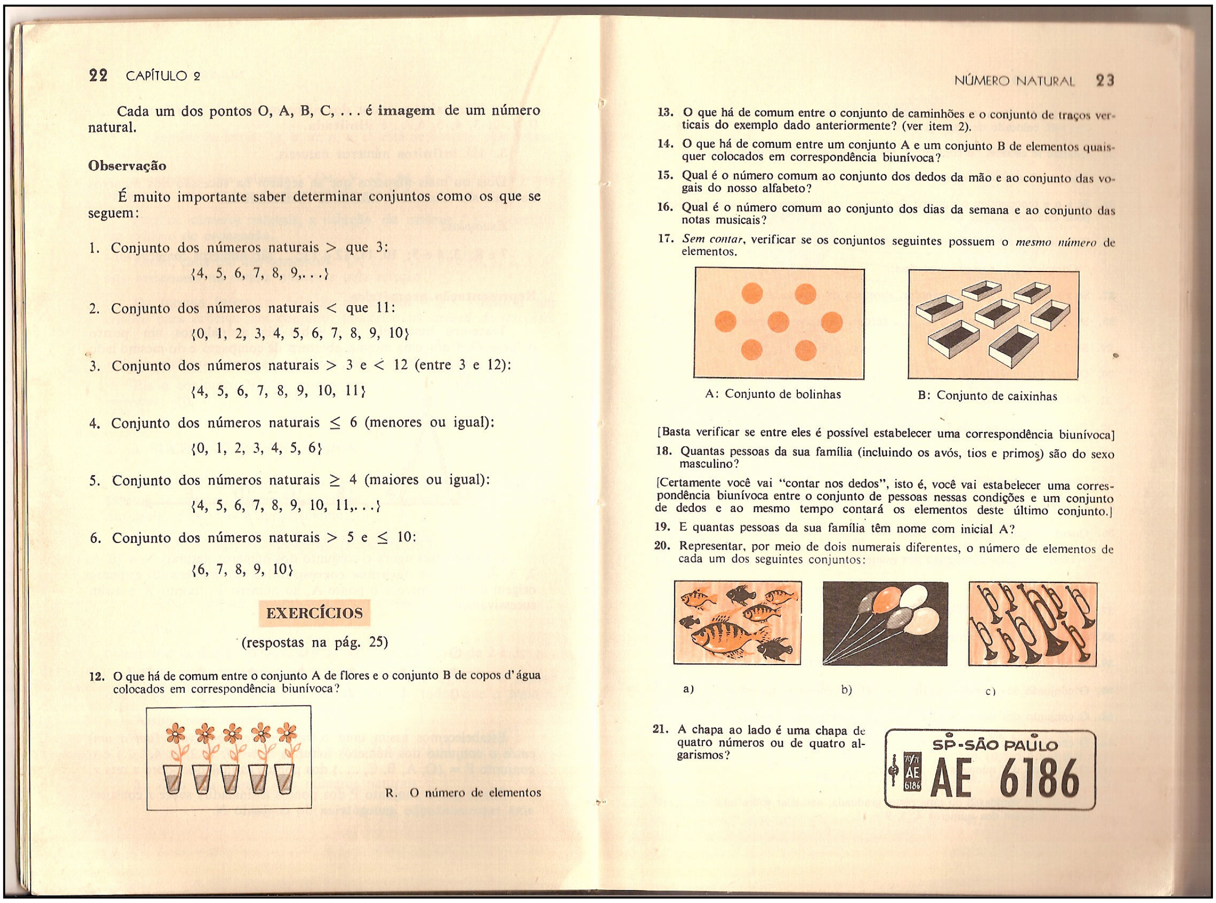
se $a > 0 \Longrightarrow V$ é um ponto de *mínimo*

se $a < 0 \Longrightarrow V$ é um ponto de *máximo*

Procure verificar, com outros exemplos, esta *conclusão.*

ANEXO IX

Exercícios – Página 22 e 23 do livro *Matemática Curso Moderno - 1º volume para os Ginásios,* de Bóscolo e Castrucci. (FTD - de 1973 – 2ª edição).



22 CAPÍTULO 2

Cada um dos pontos O, A, B, C, . . . é **imagem** de um número natural.

Observação

É muito importante saber determinar conjuntos como os que se seguem:

1. Conjunto dos números naturais > que 3:
   {4, 5, 6, 7, 8, 9,. . .}
2. Conjunto dos números naturais < que 11:
   {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
3. Conjunto dos números naturais > 3 e < 12 (entre 3 e 12):
   {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}
4. Conjunto dos números naturais ≤ 6 (menores ou igual):
   {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
5. Conjunto dos números naturais ≥ 4 (maiores ou igual):
   {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,. . .}
6. Conjunto dos números naturais > 5 e ≤ 10:
   {6, 7, 8, 9, 10}

EXERCÍCIOS

(respostas na pág. 25)

12. O que há de comum entre o conjunto A de flores e o conjunto B de copos d'água colocados em correspondência biunívoca?

R. O número de elementos

NÚMERO NATURAL 23

13. O que há de comum entre o conjunto de caminhões e o conjunto de traços verticais do exemplo dado anteriormente? (ver item 2).
14. O que há de comum entre um conjunto A e um conjunto B de elementos quaisquer colocados em correspondência biunívoca?
15. Qual é o número comum ao conjunto dos dedos da mão e ao conjunto das vogais do nosso alfabeto?
16. Qual é o número comum ao conjunto dos dias da semana e ao conjunto das notas musicais?
17. *Sem contar*, verificar se os conjuntos seguintes possuem o *mesmo número* de elementos.

A: Conjunto de bolinhas

B: Conjunto de caixinhas

[Basta verificar se entre eles é possível estabelecer uma correspondência biunívoca]

18. Quantas pessoas da sua família (incluindo os avós, tios e primos) são do sexo masculino?

[Certamente você vai "contar nos dedos", isto é, você vai estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de pessoas nessas condições e um conjunto de dedos e ao mesmo tempo contará os elementos deste último conjunto.]

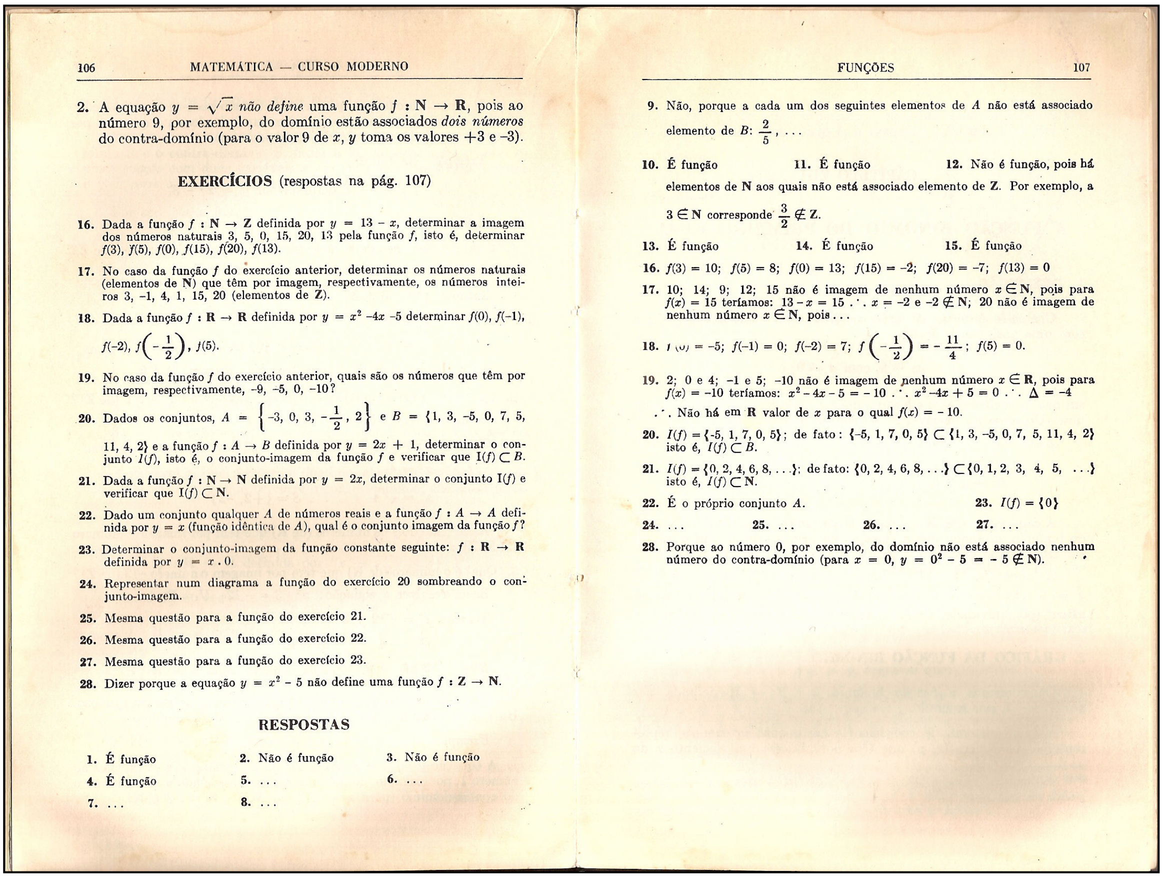
19. E quantas pessoas da sua família têm nome com inicial A?
20. Representar, por meio de dois numerais diferentes, o número de elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

a) b) c)

21. A chapa ao lado é uma chapa de quatro números ou de quatro algarismos?

ANEXO X

Exercícios – Página 106 e 107 do livro *Matemática Curso Moderno* - 4º volume para os Ginásios, de Bóscolo e Castrucci. (FTD de 1971 – 2ª edição).



106 MATEMÁTICA — CURSO MODERNO

2. A equação $y = \sqrt{x}$ *não define* uma função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, pois ao número 9, por exemplo, do domínio estão associados *dois números* do contra-domínio (para o valor 9 de x, y toma os valores $+3$ e -3).

EXERCÍCIOS (respostas na pág. 107)

16. Dada a função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ definida por $y = 13 - x$, determinar a imagem dos números naturais 3, 5, 0, 15, 20, 13 pela função f, isto é, determinar $f(3)$, $f(5)$, $f(0)$, $f(15)$, $f(20)$, $f(13)$.

17. No caso da função f do exercício anterior, determinar os números naturais (elementos de **N**) que têm por imagem, respectivamente, os números inteiros 3, -1, 4, 1, 15, 20 (elementos de **Z**).

18. Dada a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $y = x^2 - 4x - 5$ determinar $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(5)$.

19. No caso da função f do exercício anterior, quais são os números que têm por imagem, respectivamente, -9, -5, 0, -10?

20. Dados os conjuntos, $A = \left\{-3, 0, 3, -\frac{1}{2}, 2\right\}$ e $B = \{1, 3, -5, 0, 7, 5, 11, 4, 2\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $y = 2x + 1$, determinar o conjunto $I(f)$, isto é, o conjunto-imagem da função f e verificar que $I(f) \subset B$.

21. Dada a função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por $y = 2x$, determinar o conjunto $I(f)$ e verificar que $I(f) \subset \mathbf{N}$.

22. Dado um conjunto qualquer A de números reais e a função $f : A \to A$ definida por $y = x$ (função idêntica de A), qual é o conjunto imagem da função f?

23. Determinar o conjunto-imagem da função constante seguinte: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $y = x \cdot 0$.

24. Representar num diagrama a função do exercício 20 sombreando o conjunto-imagem.

25. Mesma questão para a função do exercício 21.

26. Mesma questão para a função do exercício 22.

27. Mesma questão para a função do exercício 23.

28. Dizer porque a equação $y = x^2 - 5$ não define uma função $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$.

RESPOSTAS

1. É função 2. Não é função 3. Não é função
4. É função 5. ... 6. ...
7. ... 8. ...

FUNÇÕES 107

9. Não, porque a cada um dos seguintes elementos de A não está associado elemento de B: $\frac{2}{5}$, ...

10. É função 11. É função 12. Não é função, pois há elementos de **N** aos quais não está associado elemento de **Z**. Por exemplo, a $3 \in \mathbf{N}$ corresponde $\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}$.

13. É função 14. É função 15. É função

16. $f(3) = 10$; $f(5) = 8$; $f(0) = 13$; $f(15) = -2$; $f(20) = -7$; $f(13) = 0$

17. 10; 14; 9; 12; 15 não é imagem de nenhum número $x \in \mathbf{N}$, pois para $f(x) = 15$ teríamos: $13 - x = 15 \therefore x = -2$ e $-2 \notin \mathbf{N}$; 20 não é imagem de nenhum número $x \in \mathbf{N}$, pois ...

18. $f(0) = -5$; $f(-1) = 0$; $f(-2) = 7$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{4}$; $f(5) = 0$.

19. 2; 0 e 4; -1 e 5; -10 não é imagem de nenhum número $x \in \mathbf{R}$, pois para $f(x) = -10$ teríamos: $x^2 - 4x - 5 = -10 \therefore x^2 - 4x + 5 = 0 \therefore \Delta = -4$ $\therefore$ Não há em **R** valor de x para o qual $f(x) = -10$.

20. $I(f) = \{-5, 1, 7, 0, 5\}$; de fato: $\{-5, 1, 7, 0, 5\} \subset \{1, 3, -5, 0, 7, 5, 11, 4, 2\}$ isto é, $I(f) \subset B$.

21. $I(f) = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$; de fato: $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ isto é, $I(f) \subset \mathbf{N}$.

22. É o próprio conjunto A. 23. $I(f) = \{0\}$

24. ... 25. ... 26. ... 27. ...

28. Porque ao número 0, por exemplo, do domínio não está associado nenhum número do contra-domínio (para $x = 0$, $y = 0^2 - 5 = -5 \notin \mathbf{N}$).

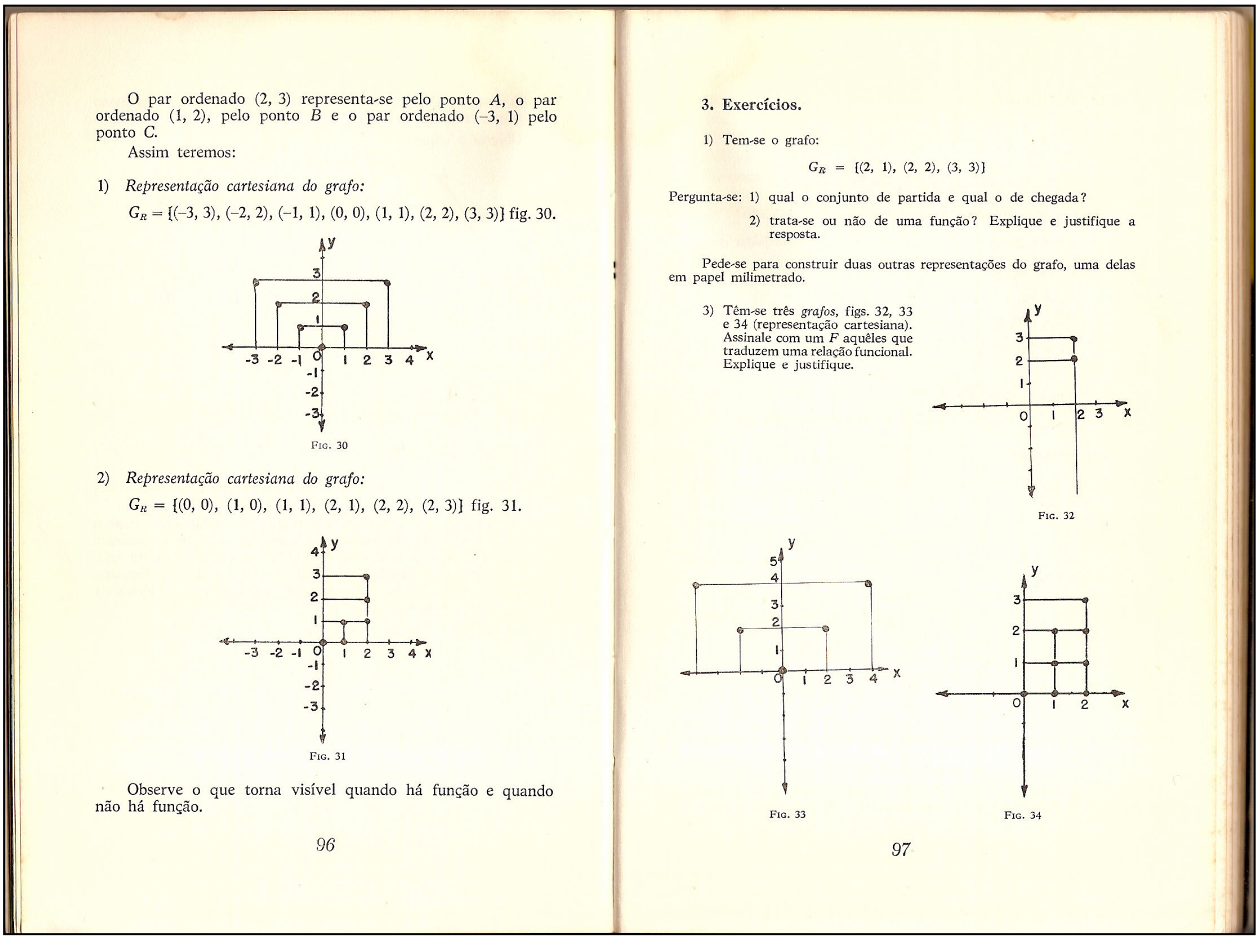
ANEXO XI

Índice do livro *Matemática Moderna* - 3º volume para os Ginásios, de Agrícola Bethlem. (Editora Record de 1969).

ÍNDICE

ANEXO XII

Representação cartesiana de grafo - Página 96 e 97 do livro *Matemática Moderna* - 3º volume para os Ginásios, de Agrícola Bethlem. (Editora Record de 1969).


O par ordenado (2, 3) representa-se pelo ponto A, o par ordenado (1, 2), pelo ponto B e o par ordenado (–3, 1) pelo ponto C.

Assim teremos:

1) *Representação cartesiana do grafo:*

$G_R = \{(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ fig. 30.

Fig. 30

2) *Representação cartesiana do grafo:*

$G_R = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ fig. 31.

Fig. 31

Observe o que torna visível quando há função e quando não há função.

96

3. Exercícios.

1) Tem-se o grafo:

$G_R = \{(2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Pergunta-se: 1) qual o conjunto de partida e qual o de chegada?

2) trata-se ou não de uma função? Explique e justifique a resposta.

Pede-se para construir duas outras representações do grafo, uma delas em papel milimetrado.

3) Têm-se três *grafos*, figs. 32, 33 e 34 (representação cartesiana). Assinale com um F aquêles que traduzem uma relação funcional. Explique e justifique.

Fig. 32

Fig. 33

Fig. 34

97

ANEXO XIII

Questionário - Página 98 do livro *Matemática Moderna* - 3º volume para os Ginásios, de Agrícola Bethlem. (Editora Record de 1969).

4. Questionário:

1) Que é uma relação?
2) Que é uma função?
3) Uma função é, sempre, uma relação?
4) Uma relação é, sempre, uma função?
5) Que é uma aplicação?
6) Uma função pode ser transformada em uma aplicação?

Explique e justifique. Use o diagrama de Venn se julgar necessário.

ANEXO XIV

Índice do livro *Matemática Moderna* - 4º volume para os Ginásios, de Agrícola Bethlem. (Editora Record de 1969).

ÍNDICE

8

ANEXO XV

Forma canônica geral - Página 151 do livro *Matemática Moderna* - 4º volume para os Ginásios, de Agrícola Bethlem. (Editora Record de 1969).

No caso de $\triangle = 0$, essas raízes, são iguais ou

$$x' = x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Diz-se que x' é uma raíz dupla da equação ou da ordem 2 de multiplicidade.

Por isso, diz-se, também, que x' é um zero do trinômio de ordem 2 de multiplicidade. É um zero duplo do trinômio.

3) $\triangle < 0$. O trinômio *não tem zeros reais.*

d) Formas eqüivalentes do trinômio do 2.º grau. (função quadrática)

$$ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Qualquer que seja $x \in R$, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\right]} \qquad (1)$$

A forma que está escrita no segundo membro é a forma *canônica geral* dos *valôres numéricos* do trinômio e que "por um abuso de linguagem" costuma-se dizer forma canônica geral do trinômio do segundo grau.

Dessa forma *canônica geral* deduzem-se três formas canônicas particulares ligadas as hipóteses.

1) $\triangle < 0$
2) $\triangle = 0$
3) $\triangle > 0$

151

ANEXO XVI

Conteúdo do capítulo IV do livro *Matemática Ensino Moderno* 8ª série do ensino de primeiro grau, de Miguel Asis Name – 8ª edição de 1973 (Editora do Brasil)

CAPÍTULO IV

FUNÇÕES LINEARES E QUADRÁTICAS

1 — Produto Cartesiano

2 — Relação

3 — Aplicação ou função

4 — Domínio e imagem de uma aplicação

5 — Funções definidas por equações.

6 — Coordenadas cartesianas no plano

7 — Função linear

8 — Função quadrática

65

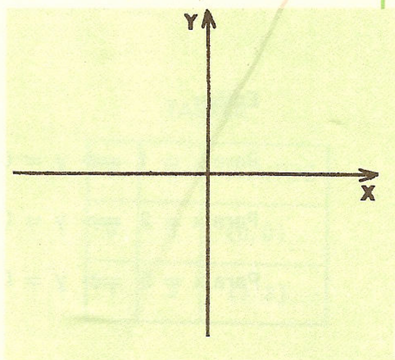
ANEXO XVII

Exercícios – Página 115 do capítulo IV do livro *Matemática Ensino Moderno* para a 8ª série do ensino de primeiro grau, de Miguel Asis Name – 8ª edição de 1973 (Editora do Brasil)

EXERCÍCIOS

1) **Representar no plano ao lado, os seguintes pontos:**

a) (2,4)
b) (4,2)
c) (—3,1)
d) (—1,5)
e) (—3, —4)
f) (—2, —5)
g) (4, —2)
h) (—4,0)
i) (0,6)
j) (0,0)



2) **Representar graficamente as seguintes funções de R em R:**

a) $y = 3x + 1$
b) $y = x + 4$
c) $y = 2x + 3$
d) $y = -2x + 1$
e) $y = x$
f) $y = 3x$
g) $y = 2$
h) $2y - 4x = 6$
i) $y = -x$
j) $y = \dfrac{x}{2} + 1$

3) **Quais dos seguintes pontos pertencem à reta $y = 2x$?**
a (1,2) ; b (2,3) ; c (2,4) ; d (3,5)

4) **Quais dos seguintes pontos pertencem à reta $y = x + 3$?**
m (1,4) ; n (2,6) ; p (3,5) ; q (6,9)

5) **Represente os seguintes pares de funções lineares, num mesmo plano cartesiano (use papel milimetrado).**

a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x + 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

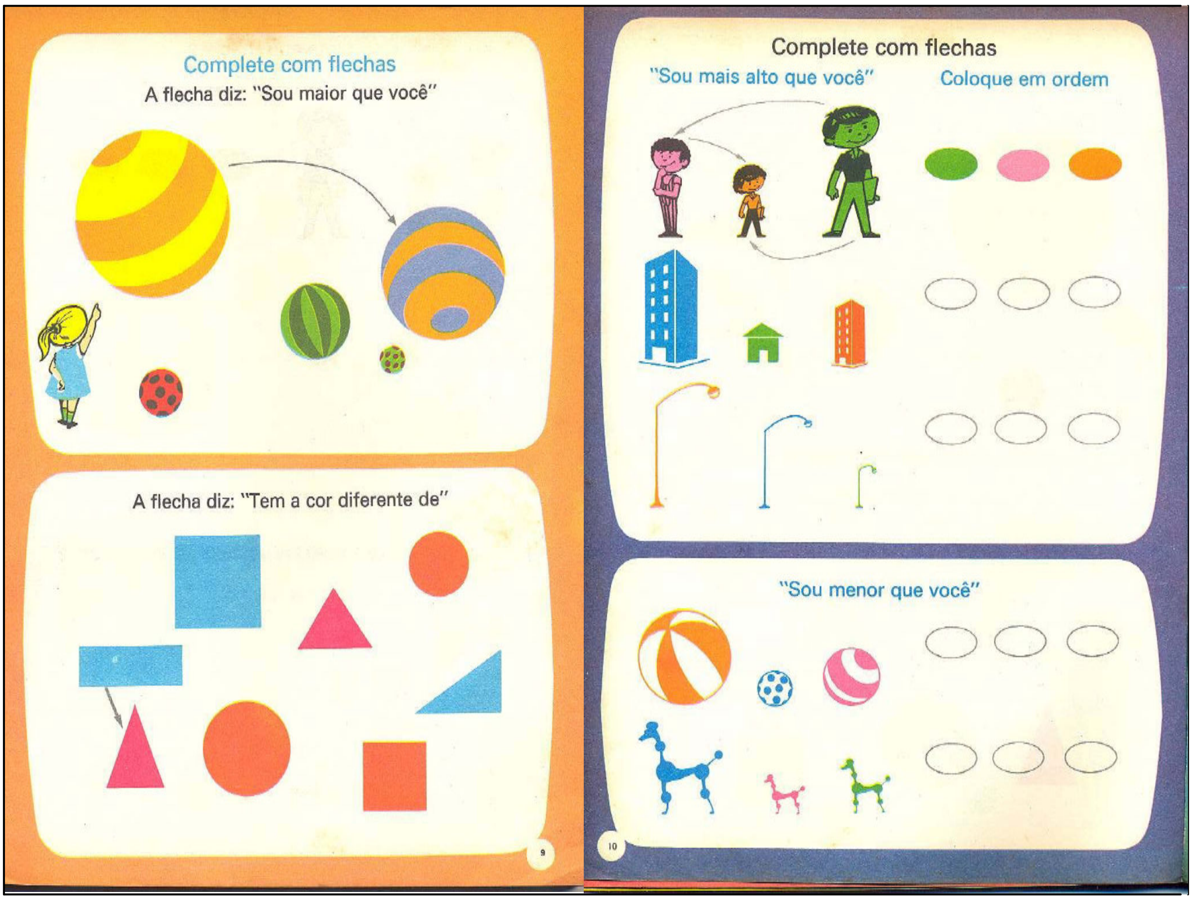
c) $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

82

ANEXO XVIII

Relações de Medidas - Página 09 e 10 do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau –1ª série,* do GRUEMA. (Companhia Editora Nacional - de 1977).



ANEXO XIX

Índice do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 5ª série,* do GRUEMA. (Companhia Editora Nacional – de 1977).

Você vai aprender neste livro:

ANEXO XX

Índice do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 6ª série*, do GRUEMA. (Companhia Editora Nacional – de 1975).

VOCÊ VAI APRENDER NESTE LIVRO:

ANEXO XXI

1ª Sugestão de Prova do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 6ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1975).

A idéia de propor um programa e, principalmente, as sugestões para provas foram inspiradas na lembrança que tivemos de nossos colegas que dispõem de pouco tempo para isto, dadas as necessidades econômicas e de aperfeiçoamento profissional de cada um, e por outro lado porque acreditamos que os resultados de experiências devem ser divulgados para serem enriquecidos e criticados.

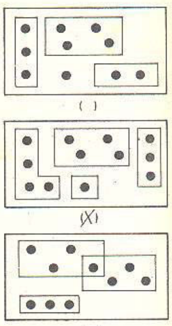
SUGESTÕES DE PROVAS

1.ª Prova do 1.º Bimestre

1. a) Seja $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e os subconjuntos de S:
$A = \{x \in S \mid x < 5\}$ e $B = \{x \in S \mid x > 5\}$
$\{A, B\}$ é uma partição de S? *sim*

b) Seja N o conjunto dos naturais, M_3 o conjunto dos múltiplos de 3 e M_5 o conjunto dos múltiplos de 5.
$\{M_3, M_5\}$ é uma partição de N? *não*

c) Assinale o esquema que representa uma partição em A.



( )

(X)

( )

2. Seja $A = \{x \in N \mid x < 6\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\}$

a) Complete com $\in$ ou $\notin$ de modo a ter sentenças verdadeiras:
$(1, 1)$ $\notin$ R $\qquad$ $(1, 5)$ $\in$ R $\qquad$ $(4, 3)$ $\notin$ R

b) Complete o quadro, colocando X quando R tiver a propriedade.

Relação	R
reflexiva	
simétrica	
anti-simétrica	X
transitiva	X

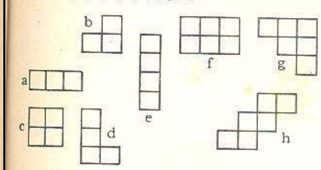
X

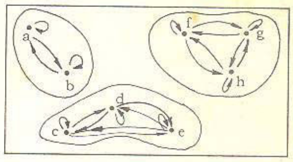
3. Seja C o conjunto de crianças de sua turma. Considere:
$A = \{(x, y) \in C \times C \mid$ x tem o mesmo número de anos de y$\}$
$B = \{(x, y) \in C \times C \mid$ x não segue y na ordem de chamada$\}$
$D = \{(x, y) \in C \times C \mid$ x senta à esquerda de y$\}$

a) Complete o quadro, colocando X quando as relações dadas são do tipo indicado.

Relação	A	B	D
de equivalência	X		
de ordem		X	

4. Seja o conjunto F de figuras:
$F = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$



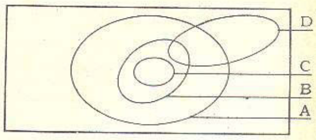


a) No diagrama trace as flechas que indicam a relação R sobre M, definida por: "x tem a mesma área que y".

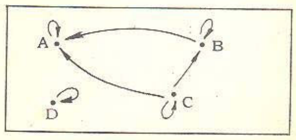
b) R é uma relação de equivalência? *sim* De ordem? *não*

c) No diagrama contorne as classes de equivalência determinadas por R.

5. Considere o conjunto $Q = \{A, B, C, D\}$, cujos elementos são os conjuntos do diagrama ao lado. Seja S a relação sobre Q, definida por: $X \subset Y$



a) No diagrama ao lado, trace as flechas que representam S.



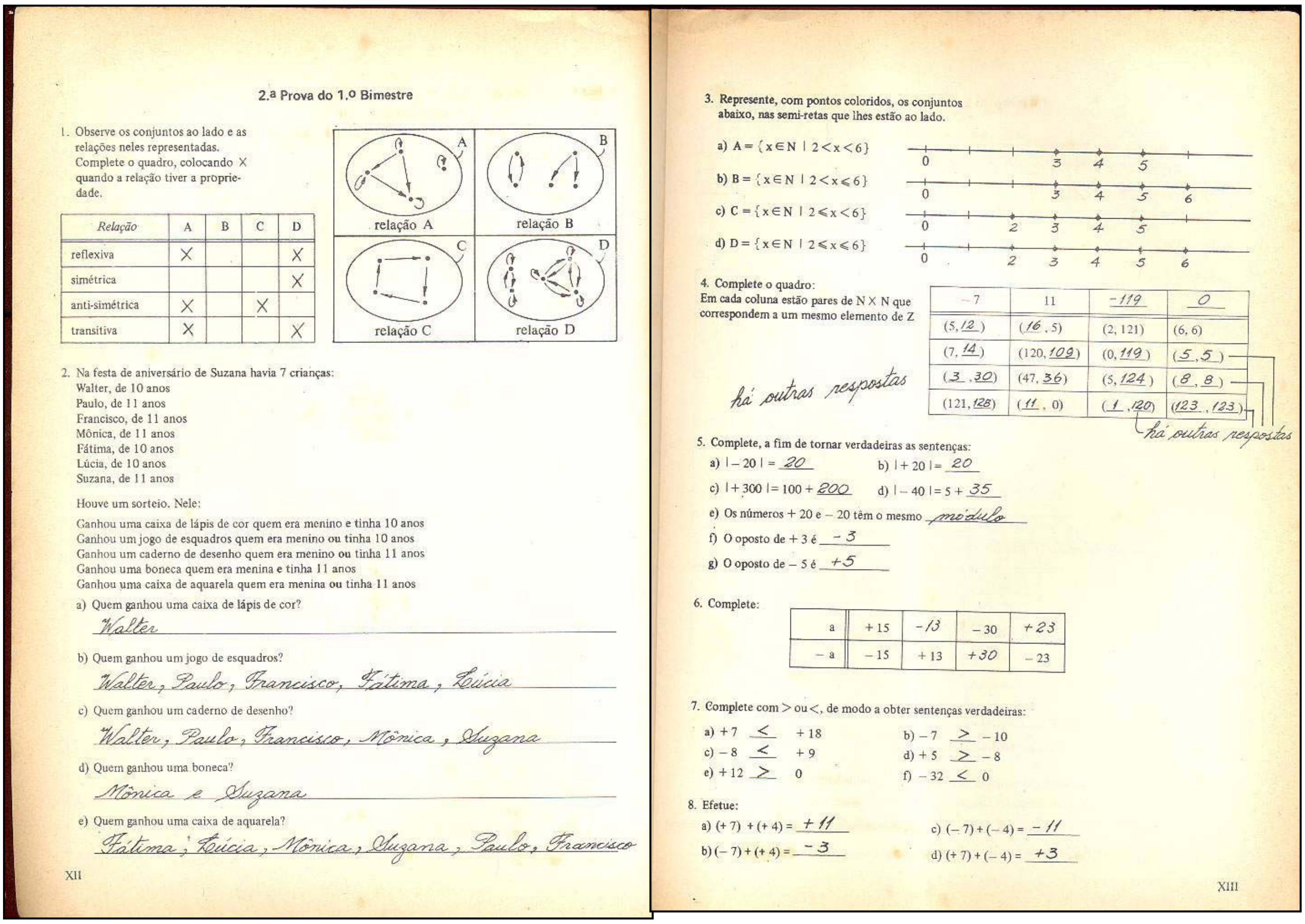
b) Quais as propriedades de S?
reflexiva
anti-simétrica
transitiva

c) S é uma relação de *ordem*

XI

ANEXO XXII

2ª Sugestão de Prova do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 6ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1975).



2.ª Prova do 1.º Bimestre

1. Observe os conjuntos ao lado e as relações neles representadas. Complete o quadro, colocando X quando a relação tiver a propriedade.

Relação	A	B	C	D
reflexiva	X			X
simétrica				X
anti-simétrica	X		X	
transitiva	X			X

A B C D

relação A — relação B — relação C — relação D

2. Na festa de aniversário de Suzana havia 7 crianças:
Walter, de 10 anos
Paulo, de 11 anos
Francisco, de 11 anos
Mônica, de 11 anos
Fátima, de 10 anos
Lúcia, de 10 anos
Suzana, de 11 anos

Houve um sorteio. Nele:

Ganhou uma caixa de lápis de cor quem era menino e tinha 10 anos
Ganhou um jogo de esquadros quem era menino ou tinha 10 anos
Ganhou um caderno de desenho quem era menino ou tinha 11 anos
Ganhou uma boneca quem era menina e tinha 11 anos
Ganhou uma caixa de aquarela quem era menina ou tinha 11 anos

a) Quem ganhou uma caixa de lápis de cor?
Walter

b) Quem ganhou um jogo de esquadros?
Walter, Paulo, Francisco, Fátima, Lúcia

c) Quem ganhou um caderno de desenho?
Walter, Paulo, Francisco, Mônica, Suzana

d) Quem ganhou uma boneca?
Mônica e Suzana

e) Quem ganhou uma caixa de aquarela?
Fátima, Lúcia, Mônica, Suzana, Paulo, Francisco

XII

3. Represente, com pontos coloridos, os conjuntos abaixo, nas semi-retas que lhes estão ao lado.

a) $A = \{x \in N \mid 2 < x < 6\}$ — 0 *3 4 5*

b) $B = \{x \in N \mid 2 < x \leqslant 6\}$ — 0 *3 4 5 6*

c) $C = \{x \in N \mid 2 \leqslant x < 6\}$ — 0 *2 3 4 5*

d) $D = \{x \in N \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$ — 0 *2 3 4 5 6*

4. Complete o quadro:
Em cada coluna estão pares de N × N que correspondem a um mesmo elemento de Z

há outras respostas

− 7	11	*− 119*	*0*
(5, *12*)	(*16*, 5)	(2, 121)	(6, 6)
(7, *14*)	(120, *109*)	(0, *119*)	(*5*, *5*)
(*3*, *30*)	(47, *36*)	(5, *124*)	(*8*, *8*)
(121, *128*)	(*11*, 0)	(*1*, *120*)	(*123*, *123*)

há outras respostas

5. Complete, a fim de tornar verdadeiras as sentenças:

a) $|-20| =$ *20* b) $|+20| =$ *20*

c) $|+300| = 100 +$ *200* d) $|-40| = 5 +$ *35*

e) Os números + 20 e − 20 têm o mesmo *módulo*

f) O oposto de + 3 é *− 3*

g) O oposto de − 5 é *+5*

6. Complete:

a	+ 15	*− 13*	− 30	*+ 23*
− a	− 15	+ 13	*+ 30*	− 23

7. Complete com > ou <, de modo a obter sentenças verdadeiras:

a) + 7 *<* + 18 b) − 7 *>* − 10
c) − 8 *<* + 9 d) + 5 *>* − 8
e) + 12 *>* 0 f) − 32 *<* 0

8. Efetue:

a) (+ 7) + (+ 4) = *+ 11* c) (− 7) + (− 4) = *− 11*
b) (− 7) + (+ 4) = *− 3* d) (+ 7) + (− 4) = *+ 3*

XIII

ANEXO XXIII

Índice do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 7ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1975).

ÍNDICE

ANEXO XXIV

Índice do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 8ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1976).

SUMÁRIO

ANEXO XXV

Questões como sugestão para a prova referente à domínio e conjunto-imagem do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 8ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1976).

FUNÇÕES – DOMÍNIO E CONJUNTO-IMAGEM

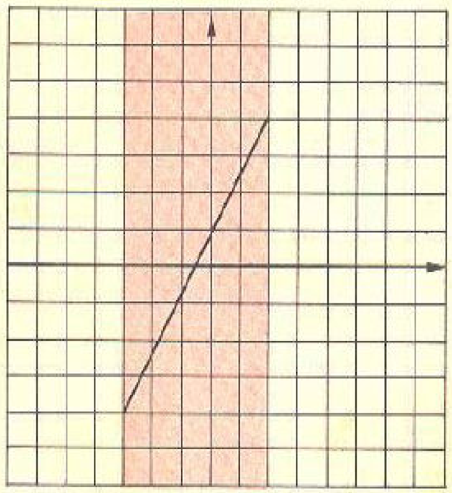
1) Dados os conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{5, 7, 9\}$

e as relações de A em B:

$F = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$
$G = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$
$H = \{(1, 5), (1, 7), (1, 9)\}$
$M = \{(1, 5), (2, 5), (3, 9), (4, 7)\}$

a) complete: $D(F) = A$ $\quad I(F) = \{5\}$
$D(G) = \{1, 2, 3\}$ $\quad I(G) = B$
$D(H) = \{1\}$ $\quad I(H) = B$
$D(M) = A$ $\quad I(M) = B$

b) quais das 4 relações é função? F e M

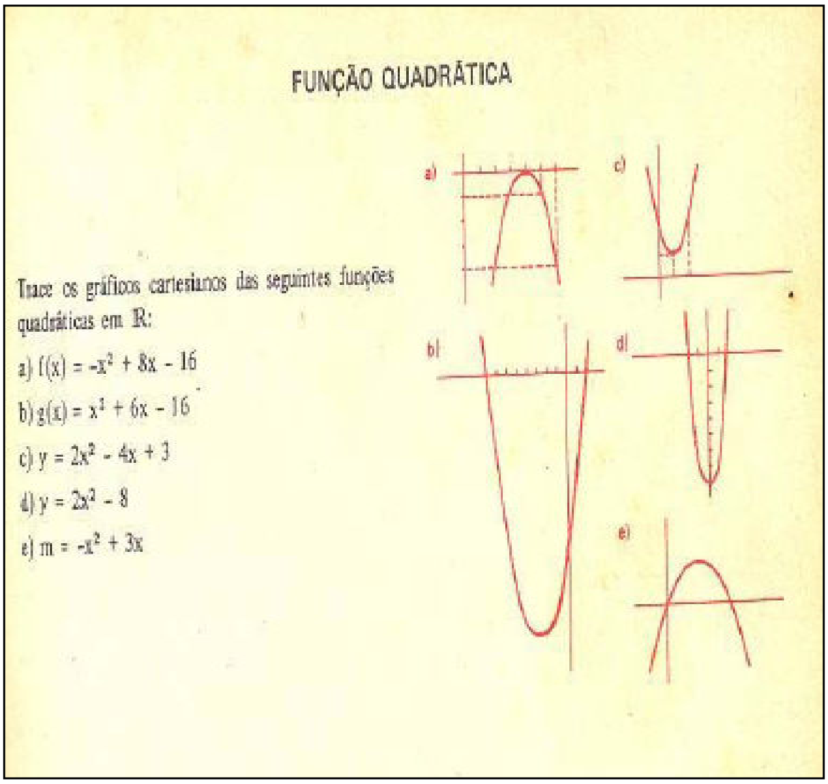


2) Considere a função real f definida pelo gráfico cartesiano ao lado.
Complete:

a) A região hachurada representa o produto cartesiano: $[-3, 2] \times \mathbb{R}$
b) $D(f) = [-3, 2]$
c) $I(f) = [-4, 5]$

ANEXO XXVI

Questão como sugestão para a prova referente à função quadrática do livro *Curso Moderno de Matemática para o ensino de 1º grau – 8ª série, do GRUEMA.* (Companhia Editora Nacional – de 1976).



FUNÇÃO QUADRÁTICA

Trace os gráficos cartesianos das seguintes funções quadráticas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

b) $g(x) = x^2 + 6x - 16$

c) $y = 2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 2x^2 - 8$

e) $m = -x^2 + 3x$