3, no exemplo, é a *base* da potência, isto é, o número que se eleva à potência; 4 é o *expoente*, e indica o número de vêzes que a base é repetida como fator; 81 ou 3^4 é a *potência*.

A *potência dois* tem o nome de *quadrado; a potência três* chama-se *cubo*. As outras potências não têm nomes especiais; diz-se *quarta potência, quinta potência*, . . .

Exemplos:

$5^2 = 25$	25 é o quadrado de 5.
$6^3 = 216$	216 é o cubo de 6.
$2^4 = 16$	16 é a 4.ª potência de 2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Calcule os quadrados de 7, 12, 15, 35 e 100.
2 — Eleve ao cubo os números: 4, 9, 13 e 25.
3 — Complete: $2^5 =$ $10^2 =$ $7^3 =$
$6^4 =$ $100^3 =$ $9^5 =$

DIVISÃO

24. Divisão *é a operação que tem por fim dados dois números, calcular um terceiro que multiplicado pelo segundo dê o primeiro.*

Exemplo: 24 dividido por 3 dá 8 porque $8 \times 3 = 24$.

O sinal que indica divisão é ÷ que se lê *dividido por*.

Exemplo: $24 \div 3 = 8$; lê-se 24 dividido por 3 igual a 8.

O 1.º número é chamado *dividendo*, o 2.º *divisor* e o 3.º *quociente*.

Podemos também dizer que a *divisão é a operação que tem por fim calcular quantas vêzes um número contém outro*.

Exemplo: $24 \div 3 = 8$; isto quer dizer que 3 cabe 8 vêzes em 24.

Como $24 \div 3 = 8$, porque $8 \times 3 = 24$, podemos ainda definir *divisão* da seguinte forma: *É a operação que tem por fim, dado o produto de dois números, um dêles calcular o outro.*

Nem sempre um número contém outro exatamente uma ou mais vêzes. Assim, 27 contém 4 seis vêzes sobrando 3 unidades. Neste caso, 27 é ainda dividendo, 4 o divisor e 6 o quociente; 3 é chamado *resto* da divisão.

dividendo	27	4 *divisor*	*chave da divisão*
resto	3	6 *quociente*	

25. Uma divisão se diz *exata* quando o dividendo contém o divisor um número exato de vêzes. Neste caso dizemos que o dividendo é *divisível* pelo divisor.

Exemplo: $18 \div 3 = 6$. 18 é *divisível* por 3. Dizemos que 3 é *divisor* de 18, porque o divide exatamente, isto é, em partes iguais; sem deixar resto.

$18 \div 3 = 6$ então $6 \times 3 = 18$. Por êste exemplo vemos que 3 pode ser chamado *fator* de 18.

Quando um número é divisível por outro, êle é chamado *múltiplo* dêsse outro. Êste outro é, como dissemos, *fator* ou *divisor*, sendo também denominado *submúltiplo* ou *parte alíquota* do primeiro.

Exemplo: 12 é divisível por 3: 12 é *múltiplo* de 3; e 3 é *fator, divisor, submúltiplo* ou *parte alíquota* de 12.

Vejamos uma divisão que não seja exata: Suponhamos 21 balas a serem divididas, dando-se 4 balas a cada menino. Quantos meninos serão contemplados?

$$\begin{array}{r} 21 \\ -\ 4 \\ \hline 17 \\ -\ 4 \\ \hline 13 \\ -\ 4 \\ \hline \end{array}$$

Temos de calcular quantas vêzes 21 contém 4. Para isto tiremos quatro balas das 21 balas, quantas vêzes pudermos. Observamos que as 21 balas contêm 4 balas 5 vêzes, deixando de resto uma bala. Poderão, pois, ser contemplados 5 meninos e sobra uma bala.

Dizemos então que 21 dividido por 4 dá 5 e deixa um resto de uma unidade; 21 não é divisível por 5 porque não contém 5 um número exato de vêzes.

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline 5 \\ -\ 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

Êste exemplo mostra também que o *resto de uma divisão tem que ser sempre menor que o divisor;* êle é no máximo igual ao divisor menos uma unidade.

Façamos agora o problema inverso: "Tenho um certo número de balas para distribuir por 5 crianças. Se cada uma ganhou 4 balas e houve sobra de uma bala, quantas balas eu tinha para distribuir?"

Solução: $4 \times 5 + 1 = 21$

Então: $\begin{array}{r|l} 21 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array}$ $\quad 4 \times 5 + 1 = 21$

Êste exemplo mostra que *numa divisão o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente mais o resto:*

dividendo = divisor × quociente + resto.

26. Propriedades da divisão — 1.ª — *Multiplicando ou dividindo o dividendo de uma divisão exata por um número, o quociente vem multiplicado ou dividido por êsse número, respectivamente, isto é, o quociente varia na razão direta do dividendo.*

EXEMPLO:

$\begin{array}{r|l} 24 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{24 \times 2} \\ 48 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 16 = 8 \times 2 \end{array}$

2.ª — *Multiplicando ou dividindo o divisor de uma divisão exata por um número, o quociente vem dividido ou multiplicado, respectivamente, por êsse número, isto é, o quociente varia na razão inversa do divisor.*

EXEMPLO:

$\begin{array}{r|l} 24 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{4 \div 2} \\ 24 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 12 = 6 \times 2 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{4 \times 2} \\ 24 & 8 \\ \cline{2-2} 0 & 3 = 6 \div 2 \end{array}$

Dessas duas propriedades concluímos: *Se multiplicarmos ou dividirmos o dividendo e o divisor pelo mesmo número o quociente não sofrerá alteração.*

EXEMPLO:

$\begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 48 & 12 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$

3.ª — *Se uma divisão não for exata, multiplicando ou dividindo o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente não se altera, mas o resto virá multiplicado ou vididido por êsse número.*

EXEMPLO:

$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 60 & 16 \\ \cline{2-2} 12 & 3 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 15 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 3 \end{array}$

Quando o dividendo e o divisor eram 30 e 8, respectivamente, o quociente era 3 e o resto 6; multiplicando o dividendo e o divisor por 2, o quociente conservou-se 3, mas o resto que era 6 ficou sendo 12, isto é, ficou multiplicado por 2; dividindo o dividendo e o divisor por 2, o quociente continua ainda 3, mas o resto que era 6, ficou sendo 3, isto é, ficou dividido por 2.

APLICAÇÃO: — Quando tivermos de dividir dois números terminados em zeros, podemos cortar nos dois números o mesmo número de zeros, mas no resto que encontrarmos, se fôr diferente de zero, teremos de acrescentar tantos zeros quantos suprimirmos em cada um dos dois números dados.

EXEMPLO: $56\,000 \div 1\,700$

$\begin{array}{r|l} 56000 & 1700 \\ \cline{2-2} 05000 & 32 \\ 1600 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 560\cancel{00} & 17\cancel{00} \\ \cline{2-2} 50 & 32 \\ 1600 & \end{array}$

27. Na divisão de números inteiros temos a considerar 2 casos:

1.º CASO — *O divisor é um número simples e o dividendo vale menos que 10 vêzes o divisor.*

EXEMPLO: $40 \div 5$.

Usando a multiplicação encontramos: $8 \times 5 = 40$. Logo, $40 \div 5 = 8$.

Outro exemplo: $41 \div 5$.

Não há nenhum número que multiplicado por 5 dê 41 exatamente. Como, porém, 5×8 dá menos que 40 e 5×9 dá mais que 40, dizemos que $41 \div 5$ dá quociente 8 e deixa o resto de uma unidade. 8 é chamado *quociente por falta;* 9 seria o *quociente por excesso.*

2.º Caso — *Divisão de dois números quaisquer.*

Regra: — Separam-se do dividendo, a partir da esquerda, tantos algarismos quantos forem necessários para formar um número que contenha o divisor pelo menos uma vez e no máximo 9 vêzes; efetua-se a divisão e encontra-se o primeiro algarismo do quociente; multiplica-se êsse algarismo pelo divisor e subtrai-se o produto da parte separada do dividendo e obtém-se o primeiro resto; à direita dêste resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo e divide-se o número obtido pelo divisor, obtendo-se o segundo algarismo do quociente; multiplica-se êste algarismo pelo divisor e subtrai-se do primeiro resto, obtendo-se o segundo resto; à direita dêste segundo resto escreve-se o algarismo seguinte do dividendo e divide-se pelo divisor, obtendo-se o terceiro algarismo do quociente; e assim por diante até considerarmos todos os algarismos do dividendo.

Exemplos: I) 77 420 ÷ 245.

```
774'2'0' | 245
          -----
 39 2
 14 7 0    316
  0 0 0
```

O quociente é 316.

II) 43 526 ÷ 13.

```
435 2 6 | 13
         ------
045       3348
 06 2
  1 0 6
    0 2
```

O quociente é 3348 e o resto 2.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Qual o maior valor que pode ter o resto de uma divisão?

2 — Quantos centos de laranjas há em 4532 laranjas?

3 — Quando se diz que uma divisão é exata?

4 — Que acontecerá ao quociente de uma divisão exata se multiplicarmos por 5 o dividendo?

5 — O quociente de uma divisão exata é 24. Qual passará a ser se dobrarmos o valor do divisor?

6 — Que alteração sofrerá uma divisão se dividirmos o dividendo e o divisor por 3?

7 — Se dividirmos o dividendo de uma divisão exata por 2 e multiplicarmos o divisor por 3, como ficará o quocente?

8 — O divisor de uma divisão é 15, o quociente é 4 e o resto é o maior possível. Quanto vale o dividendo? R.: 74.

9 — Numa divisão o divisor é 12, o quociente é 5 e o resto é o maior possível .Se aumentarmos o dividendo de duas unidades, quais serão o novo quociente e o novo resto? R.: 6 e 1.

10 — O quociente de uma divisão é igual ao dividendo quando ....

11 — Qual é o número que é divisível por qualquer outro?

12 — Qual o número pelo qual são divisíveis todos os números?

13 — O quociente da divisão de dois números é um dêles quando, ...

PROVAS DA MULTIPLICAÇÃO E DA DIVISÃO

28. Provas da multiplicação — 1.ª — Já sabemos que a ordem dos fatôres não altera o produto. *Podemos, então, verificar se uma multiplicação está certa, fazendo novamente a multiplicação invertendo a ordem dos fatores; o novo produto tem de ser igual ao primeiro*

Exemplo:

```
   349          Prova:    126
   126                    349
  -----                  -----
  2094                   1134
  698                    504
 349                    378
 -----                  -----
 43974                  43974
```

2.ª — *Divide-se o produto por um dos fatores; temos de encontrar para quociente o outro fator e resto zero.*

EXEMPLO:

316	*Prova:*	77420	245
245		392	316
1580		1470	
1264·		000	
632			
77420			

29. Prova da divisão — A divisão é uma operação inversa da multiplicação. Com a multiplicação podemos, portanto, tirar a prova da divisão: *Multiplicamos o quociente pelo divisor e somamos o resto quando houver; temos de encontrar o dividendo.*

EXEMPLO:

		Prova:	359
			26
9358	26		2154
155			718·
258	359		9334
24			24
			9358

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue, tirando a prova:

296 × 35
372 × 41

418 = 28
9325 = 65

2 — Complete:

3 × . . = 15
. . . × 8 = 24
12 × . . . = 108

. . . × 36 = 180
35 × . . . = 7
. . . × 24 = 69

3 — Qual o divisor numa divisão exata em que o dividendo vale 200 e o quociente 25? R.: 8.

4 — Qual o dividendo numa divisão em que o divisor vale 6, o quociente 10 e o resto 5? R.: 68.

5 — Calcule o valor de *x*:

$$8 \times x = 192$$
$$x \times 4 \times 5 = 360$$
$$70 = x = 14$$
$$x = 58 = 37$$
$$72 \times x = 648$$
$$26 \times x = 12 \times 03$$

6 — Qual o número que, dividido por 47, dá o quociente exato 15?

7 — Por que número devemos dividir 360 para obter o quociente exato 15?

8 — Calcular o valor de *x*:

x	03		0127	*x*
10	34		20	41

9 — Qual o número que, dividido por 7, dá o quociente 14 e o resto 3? R.: 101.

10 — Qual o divisor de uma divisão, sabendo-se que o quociente é 25, o resto é 6 e o dividendo 206? R.: 8.

11 — O produto de dois números é 748 e um dêles é 44; qual é o outro?

12 — Calcular o valor de *x*:

$$13 \times x + 5 =; 74$$
$$x \times 46 + 6 = 1\,340$$
$$31 \times 12 + x = 380$$
$$35 \times 10 = 14 \times x$$

PROBLEMAS DE RECAPITULAÇÃO DAS 4 OPERAÇÕES

1 — João nasceu em 1918; quantos anos terá em 1980?

2 — Mário nasceu em 1901; quantos anos tinha em 1923?

3 — Uma pessoa nasceu em 1895 e morreu em 1924; com quantos anos morreu?

4 — Carlos nasceu em 1927; quando completará 45 anos?

5 — Uma pessoa morreu em 1937 com 25 anos; em que ano nasceu?

6 — Comprei por Cr$ 25,00 um objeto que vendi por Cr$ 34,00. Quanto lucrei?

7 — Por quanto devo vender um objeto que me custou Cr$ 42,00 se quiser ter um lucro de Cr$ 5,00?

8 — Um livro que me custou Cr$ 7,20 foi vendido com um prejuízo de Cr$ 1,30. Qual o preço da venda?

9 — A soma de dois números consecutivos é 29; quais são êsses números? R.: 14 e 15.

10 — A soma de dois números pares consecutivos é 34; quais são êsses números? R.: 16 e 18.

11 — A soma de dois números é 34 e a diferença entre êles é 6; quais são êsses números? R.: 20 e 14.

12 — Repartir entre três meninos a quantia de Cr$ 250,00 de modo que dois ganhem a mesma importância e o 3.º ganhe mais Cr$ 40,00 que cada um dos outros. R.: 70, 70 e 110.

13 — A soma de dois números é 48 e um é 5 vêzes maior que o outro. Quais são êsses números? R.: 40 e 8.

14 — A diferença entre dois números é 52. O maior é o quíntuplo do menor, mais 8. Calcular os dois números. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1943). R.: 63 e 11.

15 — Pedro, João e Carlinhos trouxeram do pomar, em duas caixas, um total de 110 laranjas, das quais 68 foram colhidas por Pedro e Carlinhos. Na primeira foram colocadas as laranjas colhidas por Pedro. Na segunda caixa foram colocadas as colhidas por Carlinhos e as restantes que Pedro havia colhido. Na segunda caixa havia mais 10 laranjas do que na primeira. Quantas, das laranjas colhidos por Pedro foram colocadas na primeira caixa? (Instituto de Educação. — Exame de Admissão — 1944). R.: 8.

16 — João e Pedrinho receberam, ao todo, Cr$ 155,00. Havendo João perdido Cr$ 3.50, verificou-se que Pedrinho ficou com o dôbro do que João recebeu. Quanto recebeu cada um? (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1944). R.: Cr$ 54,00 e Cr$ 101,00.

17 — Quanto custam 5 dúzias e meia de ovos a 2 por Cr$ 1,30? R.: 42,90.

18 — Duas peças de fazenda da mesma qualidade custaram Cr$ 126,00 e Cr$ 216,00. Calcule o comprimento de cada peça, sabendo que uma tem 5 metros mais que a outra. R.: 12 m e 7 m.

19 — Quantos algarismos são necessários para numerar as páginas de um livro de 480 páginas? R.: 1 332.

20 — Quantos números pares há entre 7 e 59? R.: 26.

21 — Quantos algarismos são necessários para escrevermos os números ímpares de 11 a 129? R.: 135.

22 — Para representarmos todos os números da série natural de 1 até 1 231, quantos algarismos escreveremos? Justificar o resultado. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1940). R.: 3 817.

23 — Diminuindo-se 48 de um certo número obtém-se o mesmo resultado que se obteria dividindo êste número por 3. Qual é êsse número? R.: 72.

24 — Um ciclista deveria percorrer 60 quilometros em 5 horas. Percorrida a metade desta distância, verificou que sua velocidade havia

sido de 2 quilômetros por hora menos do que realmente deveria ter sido. Pede-se a velocidade com que deverá percorrer a outra metade a fim de completar o percurso no tempo prèviamente determinado. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1944). R.: 15 km/h.

25 — Do número .... inclusive até 2 573 inclusive há 348 números inteiros e sucessivos. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 2 226.

26 — Numa divisão o quociente é igual ao divisor e o resto é o maior possível. Sendo a soma do divisor e do quociente igual a 6, o dividendo será .... (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 11.

27 — Devo multiplicar 20 por .... para que o produto esteja contido 5 vêzes em 1 300. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 13.

28 — Dividindo-se o número .... por 6, ficam faltando 115 unidades ao quociente para se obter o dividendo. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 138.

29 — Comprei 50 frutas entre peras e maçãs, pagando ao todo Cr$ 90,00. Cada maçã custou Cr$ 2,00 e cada pera Cr$ 1,50. Quantas maçãs e quantas peras comprei? (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 30 e 20.

DIVISIBILIDADE

30. Um número é *múltiplo de outro* quando é *divisível* por êsse outro, isto é, quando dividido por êsse outro não deixa resto. Assim, 15 é *múltiplo* de 3 porque é divisível por 3. Dizemos também que ¼ *divide* 15.

Quando um número é divisível por outro, êste outro é, conforme vimos anteriormente (25), *submúltiplo, fator, divisor* ou *parte alíquota* do primeiro.

No exemplo acima, 15 é *múltiplo* de 3; e 3 é *submúltiplo, fator, divisor* ou *parte alíquota* de 15.

Como o produto de dois números inteiros é sempre divisível por um dêles, se quisermos formar os múltiplos de um número bastará multiplicar êsse número pelos números da sucessão natural dos números inteiros.

Assim, os múltiplos de 7 são: $7 \times 0 = 0$; $7 \times 1 = 7$; $7 \times 2 = 14$; $7 \times 3 = 21$; $7 \times 4 = 28$; $7 \times 5 = 35$, etc.

0, 7, 14, 21, 28, 35, etc., são *múltiplos* de 7, e 7 é *divisor* de 0, 7, 14, 21, 28, 35, etc.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Cite dois múltiplos de 9.
2 — Escreva três divisores de 24.
3 — Risque os múltiplos de 3: 9, 5, 8, 6, 10, 12, 15.
4 — Dê dois números dos quais 4 seja divisor.
5 — Cite quatro múltiplos de 11.
6 — 8 é divisor de que números menores que 39?
7 — 18 é múltiplo de que números?
8 — Escreva dois divisores de 30.
9 — Quantos múltiplos de 7 há menores que 80?
10 — Cite dois divisores de 40 e três múltiplos de 6.
11 — Escreva os divisores de 60 menores que 15.
12 — Dê dois múltiplos de 8 maiores que 68.
13 — Escreva um múltiplo de 9 entre 60 e 70.
14 — Quais são os divisores de 36?
15 — Escreva quatro múltiplos de 5 e três divisores de 28.
16 — Escreva um número compreendido entre 32 e 41 que seja múltiplo de 7.
17 — Escreva um número menor que 150 que seja múltiplo de 60.
18 — Quais são os múltiplos de 9 maiores que 50 e menores que 100?
19 — 14 é múltiplo de ....
20 — 14 é divisor de ....
21 — Qual o maior divisor de um número?
22 — Qual o menor múltiplo de 34?
23 — Qual o número que só admite um divisor?
24 — Qual o múltiplo de 40 mais próximo de 180?

31. De acôrdo com certas regras, observando-se um número, podemos dizer se êle é divisível por outro, e se não fôr divisível, qual o resto da divisão dêle por êsse outro, sem efetuar a divisão. Para isso precisamos conhecer os *caracteres de divisibilidade* por um número.

Vejamos os caracteres de divisibilidade por 10, 2, 5, 9 e 3.

32. Divisibilidade por qualquer potência de 10.

Todo número terminado em zero é divisível por 10: — Com efeito, o produto de um número qualquer por 10 termina sempre em zero:

$$10 \times 0 = 0$$
$$10 \times 1 = 10$$
$$10 \times 2 = 20$$
$$10 \times 3 = 30$$
....

Todo número terminado em dois zeros é múltiplo de 100.

$$100 \times 5 = 500$$
$$100 \times 12 = 1200$$

Podemos concluir então: *Um número é divisível por 10, 100, 1000, etc., quando terminar em 1, 2, 3, etc., zeros, respectivamente.*

O resto da divisão de um número por 10, 100, 1000, etc., é igual ao número formado pelo último algarismo, pelos dois últimos algarismos, pelos três últimos algarismos, etc., à direita, respectivamente.

EXEMPLO: 57 ÷ 10 dá quociente 5 e resto 7. Realmente 5 × 10 = 50; 50 para 57, 7.

127 ÷ 100 dá quociente 1 e resto 27.
4583 ÷ 1000 dá quociente 4 e resto 583.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Risque os números divisíveis por 10: 400, 296, 30, 517, 28.
2 — Cite quatro múltiplos de 100.
3 — Qual o resto da divisão por 10 dos números: 535, 124, 18, 653, 491, 320?
4 — Escreva dois números de 4 algarismos que, divididos por 10, deixem de resto 9.
5 — Cite um número múltiplo de 10, 100 e 1000 ao mesmo tempo
6 — Escreva um número que seja divisível por 100 e que não seja múltiplo de 1 000.
7 — Como terminam os números que, divididos por 10, deixam de resto 7?
8 — Quantas unidades devo juntar ao número 397 para ter um múltiplo de 10?
9 — Quantas unidades devo tirar do número 1 385 para ter um múltiplo de 100?

33. Divisibilidade por 2 — *Um número é divisível por 2 quando termina em* 0, 2, 4, 6 e 8.

EXEMPLO: 24, 138, 96, 50 e 72 são múltiplos de 2.

Os números múltiplos de 2 são chamados *pares* e os que não são múltiplos de 2 são chamados *números ímpares.*

Numa divisão por 2 só podemos encontrar para resto 0 ou 1. Quando um número fôr *par*, será divisível por 2, portanto, o resto da divisão será 0. Quando um número fôr *ímpar*, não será divisível por 2, e o resto da sua divisão por 2 será *1.*

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Risque os números divisíveis por 2:
500, 396, 230, 701, 229.

2 — Qual o resto da divisão por 2 dos números: 138, 1 400, 727, 659, 837, 101, 5 826?

3 — Complete o número 58... de modo que fique divisível, ao mesmo tempo, por 2 e 10.

4 — Complete os números 395... e 83... de modo que, divididos por 2, deixem de resto 1.

5 — Complete o número 61... de modo que dividido por 2 ou por 10, deixe de resto 1.

6 — Complete o número 1 46... de modo que dividido por 2 ou por 10 deixe de resto 1.

7 — Qual o maior número de 3 algarismos divisível por 2? e o menor?

34. Divisibilidade por 5 — *Um número é divisível por 5 quando termina em* 0 *ou* 5.

$0 \times 5 = 0$
$1 \times 5 = 5$
$2 \times 5 = 10$
$3 \times 5 = 15$
$4 \times 5 = 20$

EXEMPLO: 25, 30, 485 e 1060 são divisíveis por 5.

38, 47, 112 e 434 não são múltiplos de 5.

21 ÷ 5 dá quociente 4 e resto 1
22 ÷ 5 dá quociente 4 e resto 2
23 ÷ 5 dá quociente 4 e resto 3

24 ÷ 5 dá quociente 4 e resto 4
26 ÷ 5 dá quociente 5 e resto 1
27 ÷ 5 dá quociente 5 e resto 2
28 ÷ 5 dá quociente5 e resto 3
29 ÷ 5 dá quociente 5 e resto 4

O resto da divisão de um número por 5 é igual ao algarismo das unidades se for menor que 5; o resto será a diferença entre êsse algarismo.

EXEMPLOS: 1523 ÷ 5 = ... resto 3
2916 ÷ 5 = ... resto = 6 − 5 = 1

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Escolha os números divisíveis por 5: 130, 143, 2 001, 895.

2 — Escolha os múltiplos de 2 e 5, ao mesmo tempo: 72, 95, 320, 438, 174, 660.

3 — Complete o número 1 86... de maneira que fique divisível por 2, 5 e 10.

4 — Diga os restos das divisões dos números 61, 124, 315, 410, 649 e 4 830 por 2, 5 e 10.

5 — Quais os restos das divisões por 5 dos números: 591, 637, 245, 799, 168, 653 e 900?

6 — Complete os números 35... e 2 87... de modo que, divididos por 5, deixem de resto 3.

7 — Acrescente um algarismo à direita do número 821 de modo que se forme um número múltiplo de 2 e 5.

8 — Quais os algarismos das unidades dos números que, divididos por 5 deixam de resto 2?

9 — Qual o menor número de 2 algarismos divisível por 5? e o maior?

35. Divisibilidade por 9 — *Um número é divisível por 9, quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos é divisível por* 9.

EXEMPLO: 2358 é múltiplo de 9 porque $2 + 3 + 5 + 8 = 18$ que é múltiplo de 9.

O resto da divisão de um número por 9 é igual ao resto da divisão por 9 da soma dos valores absolutos dos algarismos dêsse número.

EXEMPLOS: 7236 ÷ 9 deixa resto 0 porque
$7 + 2 + 3 + 6 = 18$; 18   9 deixa resto 0.
51926 ÷ 9 deixa resto 5 porque
$5 + 1 + 9 + 2 + 6 = 23$; 23   9 deixa resto 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Quais os restos das divisões do número 1 243 por 2, 5, 9 e 10?

2 — Qual o resto da divisão por 9 dos números:
605, 897, 738, 2 596, 3 145 e 6 837?

3 — Escreva 3 números de 4 algarismos que sejam múltiplos de 9.

4 — Escreva dois números que divididos por 9 deixem de resto 6.

5 — Complete o número 81.6 colocando um algarismo no lugar do ponto de modo que êle fique divisível por 9.

6 — Substitua a letra *a* por um algarismo de modo que o número 635*a* fique múltiplo de 2 e de 9 ao mesmo tempo.

7 — Uma pessoa tem 136 balas para distribuir por 9 crianças. Haverá sobra de alguma bala? Responda sem fazer a divisão.

8 — Escreva cinco números de três algarismos que sejam múltiplos de 9.

9 — Coloque dois algarismos à direita do número 3 258 de modo que se forme um número par múltiplo de 9.

10 — Um aluno obteve mais de 300 pontos e menos de 308 pontos. Quantos pontos obteve realmente se o número de seus pontos é múltiplo de 9?

11 — Certo número compõe-se de três unidades de oitava ordem, duas de sétima, uma de quinta, cinco de quarta e duas de terceira. Escrever o algarismo das unidades de primeira ordem de modo que o número seja, ao mesmo tempo, divisível por 5 e por 9. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1941). R.: 5.

12 — O algarismo que se deve escrever no lugar da letra *a* para o número 356*a*4 ser simultâneamente divisível por 4 e por 9 é .... (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 0.

36. Divisibilidade por 3 — Para verificarmos se um número é ou não divisível por 3 empregamos a regra: *Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 3; o resto da divisão de um número por 3 é igual ao resto da divisão por 3 da soma dos valores absolutos de seus algarismos.*

EXEMPLOS:

135 ÷ 3 deixa resto 0 porque
$1 + 2 + 5 = 9$ e 9 ÷ 3 deixa resto 0.
274 ÷ 3 deixa resto 1 porque
$2 + 7 + 4 = 13$ e 13 ÷ 3 deixa resto 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Cancele os múltiplos de 3: 28, 315, 862, 1 234, 918.

2 — Quais os restos das divisões do número 1 243 por 2, 3, 5, 9 e 10?

3 — Cancele os múltiplos de 3 que não são múltiplos de 9:
390, 801, 474, 6 588, 7 485.

4 — Complete o número 1.86 substituindo o ponto por um algarismo, de maneira que êle fique divisível por 3 e 9, ao mesmo tempo.

5 — Escreva um número compreendido entre 100 e 180 que seja múltiplo de 3 e não seja divisível por 9.

6 — Ache o resto da divisão de 7 586 por 2, 3, 5, 9 e 10.

7 — Complete o número 1.76 de modo que fique múltiplo de 3 e 9, ao mesmo tempo.

8 — Complete os números 3.24 e 54.3 de modo que fiquem múltiplos de 3.

9 — Complete o número 314. de modo que fique divisível por 2 e 3.

10 — Ache o resto da divisão de 5 903 por 2, 3, 5, 9 e 10.

11 — Tenho 93 balas para distribuir por 9 crianças. Haverá sobra? E se fossem 3 crianças?

12 — O número 1 246 que resto deixa quando dividido por 5? e por 10? e por 3?

13 — Escreva um número terminado em 20 que, dividido por 3, deixe resto 2.

14 — Escreva um número de cinco algarismos, terminado em 18, que seja múltiplo de 3.

15 — Quais são os números divisíveis por 1?

PROVA DOS 9 DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

37. A prova dos 9 é baseada no cálculo do resto da divisão de um número por 9.

38. Prova da adição — *Para verificar a probabilidade de estar certa uma soma, achamos os restos, das divisões das parcelas por 9, somamos êsses restos e procuramos o resto desta soma por 9; êste último resto encontrado deve ser igual ao resto da divisão da soma inicialmente dada por 9.*

Exemplo:

371 resto da divisão por 9 = 2
296 resto da divisão por 9 = 8
148 resto da divisão por 9 = 4

$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 8 + 4 = 14 \text{ resto da} \\ \text{da divisão por } 9 = 5 \end{array} \right.$

815 resto da divisão por 9 = 5

$$\frac{5}{5}$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{r l} 760 \ldots\ldots\ldots\ldots & 4 \\ 392 \ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\ \underline{158} \ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \\ 1310 \ldots\ldots\ldots\ldots & 5 \end{array} \left\{ 5 + 5 + 4 = 14 \ldots\ldots \text{ resto } 5 \right. \quad \frac{5}{5}$$

Na prática, nós somamos os valores absolutos dos algarismos das parcelas, subtraindo 9 sempre que possível e juntando o resto aos valores absolutos dos algarismos ainda não somados. Assim, no exemplo acima, faríamos: $1 + 5 = 6$; $6 + 8 = 14$, tirando 9, ficam 5; $5 + 3 = 8$; $8 + 2 = 10$, tirando 9, fica 1: $1 + 7 = 8$; $8 + 6 = 14$, tirando 9, ficam 5. O resto da divisão das parcelas por 9 é 5; o resto da divisão da soma por 9 é também 5.

Em vez da expressão *tirando 9,* usamos também a expressão *noves fora.*

Na segunda parcela não somamos o algarismo 9 porque não adianta juntar 9 unidades e imediatamente tirá-las. Assim, não somamos as unidades do algarismo 9 tôdas as vêzes que calculamos a prova dos noves de uma operação.

Resumindo: A prova dos 9 de uma adição tira-se da seguinte forma: *Tiram-se os noves das parcelas e depois da soma: os resultados devem ser iguais.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 681 \\ 493 \\ \underline{175} \\ 1349 \end{array} \qquad 8$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue e tire a prova dos noves:

816 + 30 + 492 + 7 831
963 + 715 + 18 + 191
0 + 530 + 1 837
7 562 + 173 + 7 + 054

2 — Efetue e tire a prova dos noves:

1 717 + 924 + 83 + 329
587 + 135 + 604
731 + 24 + 686

39. Prova da subtração — Como o minuendo é igual à soma do subtraendo com o resto, agimos assim: *Tiram-se os noves do minuendo; depois tiram-se os noves do subtraendo junto com o resto: os resultados devem ser iguais.*

Exemplo:

$$\begin{array}{r} 865 \\ \underline{173} \\ 692 \end{array} \qquad \frac{1}{1}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue e tire a prova dos noves:

8 397 − 2 876
1 635 − 918
7 038 − 4 217
6 500 − 2 739

2 — Efetue e tire a prova dos noves:

9 218 − 1 499
62 005 − 28 570
3 951 − 386
4 301 − 2 893

40. Prova da multiplicação — *Tiram-se os noves do multiplicando e do multiplicador, separadamente, multiplicam-se* *os dois restos e tiram-se os noves do resultado; o novo resto obtido deve ser igual ao resto que se obtém tirando-se os noves do produto.*

EXEMPLO:

```
  327 ....... 3
   48 ....... 3     3 × 3 = 9 .................... resto 0
 2616
1308                 3 | 0
15696 ........... 0  3 | 0
```

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue e tire a prova dos noves:

651 × 38
9 473 × 29
8 650 × 406
5 837 × 5 208

2 — Efetue e tire as provas:

3 725 × 91
361 × 28
63 × 70
5 108 × 427

41. Prova da divisão — Como o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente somado com o resto, tiramos a prova dos noves da divisão, assim: *Tiram-se os noves do divisor e do quociente, separadamente; multiplicam-se os dois restos e tiram-se os noves do produto obtido. O novo resultado junta-se ao resto encontrado na divisão dada, tirando-se os noves dessa soma. Deve-se encontrar um resto por 9 igual ao resto que se obtém tirando-se os noves do dividendo.*

EXEMPLO:

```
17958 | 51     ........ 6
 265  |
 108    352    ........ 1    6 × 1 = 6...noves fora 6;
  06                         6 + 6 (do resto da divi-
          6 | 3              são) = 12...noves fora 3.
          1 | 3     (do dividendo)
```


(EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue e tire a prova dos nòves:

8 973 ÷ 45
72 518 ÷ 93
29 870 ÷ 84
163 205 ÷ 25

2 — Efetue e tire a prova dos noves:

938 ÷ 5
2 901 ÷ 31
62 854 ÷ 49
391 287 ÷ 65

NÚMEROS PRIMOS

42. Quando um número só é divisível por si e pela unidade chama-se um *número primo.*

EXEMPLOS:

2 só tem dois divisores — 1 e 2.
7 só tem dois divisores — 1 e 7.
2 e 7 são *números primos.*

43 Os números pares são divisíveis por 2. Todos os números pares, com execção de 2, portanto, terão, como divisores, êles mesmos, a unidade e pelo menos mais o divisor 2. Assim sendo, todos os números pares, com exceção do 2, não são primos, porque admitem pelo menos um divisor, além de si mesmos e da unidade.

Os números que não são primos, são chamados *números múltiplos.*

EXEMPLOS: 12, 26, 50, ...

Só há um número par que não é múltiplo, é 2; êle é divisível apenas por si mesmo e por 1 é, portanto, um número primo. 2 é o único número par que é primo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Quais os números primos compreendidos entre 20 e 35?
2 — Quais os números primos maiores que 10 e menores que 25?

3 — Calcule a soma dos números primos compreendidos entre 20 e 30.
4 — Qual o maior número primo compreendido entre 30 e 40?
5 — Qual o menor número primo compreendido entre 15 e 22?

44. Formação de uma tabela de numeros primos — Crivo de Eratóstenes Eratóstenes, um filósofo grego, idealizou um processo para fazer um tabela de números primos, muito simples de ser executado. A tabela é feita até o número que se quiser. Por exemplo, procuremos saber os números primos até 50.

Escrevemos os números de 1 a 50. Cancelamos, a seguir, os números de dois em dois, a partir do número seguinte a 2, para assim eliminarmos todos os múltiplos de 2, isto é, os números pares. Na prática, ao fazermos a tábua, não escrevemos os números pares, porque sabemos que vão ser cancelados por serem múltiplos de 2. Incluímos apenas o 2 que é par e primo. Cancelamos depois os números de 3 em 3, a partir do número seguinte a 3; de 5 em 5 a partir do primeiro número seguinte a 5; e assim por diante. Os números que não tiverem sido cancelados são números primos.

CRIVO DE ERATOSTENES

1 2 3 5 7 ~~9~~ 11 13 ~~15~~ 17 19 ~~21~~ 23

~~25~~ ~~27~~ 29 31 ~~33~~ ~~35~~ 37 ~~39~~ 41 43 ~~45~~ 47 ~~49~~

A essa tábua chamamos *Crivo de Eratóstenes.*

De 1 a 50, os números primos são: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43 e 47.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Que é um número primo?
2 — Que é um número múltiplo?
3 — Qual é o único número par que é primo?

4 — Procure, por meio do Crivo de Eratóstenes, os números primos de 1 a 100.
5 — Quais os números primos compreendidos entre 43 e 67?

45. Processo para verificar se um numero é primo — Podemos verificar se um número é primo sem ser por meio do Crivo de Eratóstenes. Suponhamos que queremos verificar se o número 523 é primo ou múltiplo. Por meio do Crivo de Erastótenes levariamos muito tempo para ter o resultado porque se trata de um número grande. Vejamos outro processo:

Dividimos o número dado pelos números primos em ordem de grandeza crescente, a partir de 2; se encontrarmos resto 0, o número é múltiplo; em caso contrário, prosseguiremos a operação até encontrar um quociente igual ou menor que o divisor, e, neste caso o número é primo.

Exemplo: Verificar se o número 523 é primo.

```
523 | 2       523 | 3       523 | 5
12            22            023
 03   261      13   174       3   104
  1             1
523 | 7       523 | 11      523 | 13
 33           083           003
  5    74      06    47            40
523 | 17      523 | 19      523 | 23
013           143           063
       30      10    27      17    22
```

O número 523 é primo. Paramos no divisor 23 porque já encontramos o quociente 22 menor que 23 e não achamos nenhuma divisão exata.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Verifique se o número 593 é primo.
2 — O número 437 é primo ou múltiplo?
3 — O número 691 é primo?
4 — O número 899 é múltiplo?

46. Divisores comuns — Quando vários números dados são divisíveis por um outro dizemos que êsse outro é divisor *comum* dos números dados. Assim, 36 ,16 e 40 são divisíveis por 4; dizemos que 4 é um divisor comum de 36, 16 e 40.

Observemos agora os divisores de 10 e 21:

Divores de 10 — 1, 2, 5 e 10.
Divisores de 21 — 1, 3, 7 e 21.

10 e 21 só têm um divisor comum, que é a unidade.

Dois ou mais números, que só têm para divisor comum a unidade, são chamados *números primos entre si.*

EXEMPLOS:

10 e 21 são números primos entre si.
12, 16 e 25 são números primos entre si.

OBSERVAÇÕES: — I) Dois ou mais números inteiros consecutivos são sempre primos entre si.

EXEMPLOS: 7, 8 e 9; 15 e 16.

II) Em alguns dos exemplos acima, citamos números que, isoladamente, não são primos, mas, considerados em conjunto, são *primos entre si.*

Assim: 10 é múltiplo e 21 é também um número múltiplo; no entanto, 10 e 21 são primos entre si.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Cite um número primo com 10.
2 — Risque dois números primos entre si: 46, 18, 15, 40, 30.
3 — Cite três números primos entre si.
4 — Dois números múltiplos podem ser primos entre si?
5 — Escreva um número primo com 8.
6 — Cancele o número primo com 28: 12, 21, 15, 18, 20.
7 — Escreva um número primo com 12.
8 — Procure dois números primos com 14.
9 — Cite um divisor comum de 12 e 30.
10 — Cite dois divisores comuns de 16, 24 e 20.
11 — Escreva dois divisores comuns de 34, 24 e 36.
12 — Cite dois divisores comuns de 18, 27 e 24.

13 — Escolha um divisor comum de 285, 30, 321 e 165.
14 — Cite três divisores comuns de 24, 30 e 18.
15 — Escreva um divisor comum de 42, 24 e 30, compreendido entre 5 e 10.
16 — Todos os números pares têm um divisor comum que é ...

47. Decomposição em fatores primos — Todo *numero múltiplo pode ser decomposto num produto de fatores primos.*

EXEMPLO:

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Esse trabalho é chamado *decomposição de um número em fatores primos.*

Na prática, dividimos o número por um número primo diferente da unidade que seja seu divisior e procedemos com o quociente da mesma forma até encontrarmos quociente 1.

EXEMPLO: Decompondo 60 em fatôres primos ,teremos:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Os expoentes 2, 1 e 1, indicam quantas vêzes cada um dos respectivos fatôres primos aparece no número.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Decomponha em fatôres primos: 120 e 84.
2 — Quais os fatôres primos de 1 800?
3 — Decomponha os números 450 e 189 em fatôres primos.
4 — Procure os fatôres primos de 600.
5 — Decomponha o número 108 em fatôres primos.
6 — Decomponha 1 024 em fatôres primos. 1024 admite algum fator ímpar?

48. Divisores múltiplos de um número.

EXEMPLO: O número 60 decomposto em fatôres primos dá

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

60	2
30	2
14	3
5	5
1	

Os fatôres primos que compõem 60 são, pois, 2, 3 e 5.

60 além de ser divisível por êsses números primos, é também divisível pelos números não primos, 6, 10, 4, 20, ... Para determinarmos todos os divisores múltiplos de 60 bastará combinar os fatôres primos que entram na sua formação, de tôdas as maneiras possíveis, isto é, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4,...

Na prática, para formar todos os divisores de um número, decompomos o número em fatôres primos, colocamos um traço à direita dos fatôres primos e acima e à direita do traço escrevemos 1. Multiplicamos depois todos os números primos à esquerda do traço pelos que estão à direita do traço acima dêle. Os resultados que se repetirem são escritos apenas uma vez.

EXEMPLO: Calcular os divisores primos e múltiplos de 180.

		1
180	2	2
90	2	4
45	3	3 – 6 – 12
15	3	9 – 18 – 36
5	5	5 – 10 – 20 – 15 – 30 – 60 – 45 – 90 – 180
1		

$180 = 2^2 \times 3 \times 5.$

Os divisores de 180 são: 1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90 e 180.

Podemos calcular *quantos* são os divisores primos e múltiplos de um número com a seguinte *regra: — Multiplicam-se os expoentes dos fatôres primos que entram na composição do número dado aumentados de uma unidade.*

Assim, como $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, o número de seus divisores primos e múltiplos é

$(2 + 1)\ (2 + 1)\ (1 + 1) = 3 \times 3 \times 2 = 18.$

180 tem 18 divisores: são os que achamos antes.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Calcule todos os divisores de 360.

2 — Calcule todos os divisores primos e múltiplos de 300.

3 — Calcule quantos divisores tem o número 450.

4 — Quantos divisores tem o número A se decompondo-o em fatôres primos encontramos $A = 2^3 \times 3^3 \times 5$?

5 — Temos $A = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ e $B = 2^2 \times 3 \times 5^2$. Qual dos dois números A e B tem mais divisores?

6 — Que valor deve ter x para o número $2^2 \times 3 \times 5^2$ ter 60 divisores?

7 — Calcule os divisores pares de 600.

8 — Calcule os divisores ímpares de 500.

MÁXIMO DIVISOR COMUM

49. Máximo divisor comum de vários números é o maior número que os divide exatamente.

Escrevamos, por exemplo, todos os divisores de 20, 28 e 32:

20 .... 1, 2, 4, 5, 10 e 20.
28 .... 1, 2, 4, 7, 14 e 28.
32 .... 1, 2, 4, 8, 16 e 32.

20, 28 e 32 têm só três divisores comuns: — 1, 2, e 4. Dêsses três divisores, 4 é o maior. Então 4 é o maior dos divisores comuns de 20, 28 e 32, por isto ,4 é denominado *máximo divisor comum* de 20, 28 e 32.

Indicamos assim: m.d.c. (20, 28 e 32) = 4.

50. Cálculo do M.D.C. de dois números.

1.° PROCESSO: *Dividimos o número maior pelo menor. Depois o menor pelo resto da primeira divisão; o primeiro resto pelo segundo e assim por diante até acharmos o resto igual a zero. O último divisor é o m.d.c.* As divisões são feitas como qualquer divisão; apenas colocam-se os quocientes acima dos divisores.

Exemplo: Calcular o m.d.c. de 56 e 32.

	1		
56	32	24	8
24	8	0	

m.d.c. (56 e 32) = 8.

Esse processo para o cálculo do m.d.c. de dois números tem o nome de *processo das divisões sucessivas*, porque fazemos sucessivamente diversas divisões.

51. Quando tivermos de calcular o m.d.c. de mais de dois números, tomamos dois números e calculamos seu m.d.c.; depois procuramos o m.d.c. do resultado e do terceiro número e assim por diante. O último m.d.c. achado é o m.d.c. dos números dados.

Exemplo: Calcular o m.d.c. de 336, 228 e 456.

	1	2	9
336	228	108	12
108	12	00	

	38
456	12
96	
00	

m.d.c. (336, 228 e 456) = 12

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Procure o m.d.c. de 288 e 120.
2 — Calcule o m.d.c. de 42, 36 e 28.
3 — Qual o m.d.c. dos números 20, 25 e 30?
4 — Calcular o valor de x e y:

	1	5	2
x	y	...	7

R.: 91 e 77

5 — 16 é o m.d.c. de dois números. Quais são êsses números sabendo-se que foram encontrados no cálculo dêsse m.d.c. os quocientes 5, 3 e 8? R.: 2 128 e 400.

6 — Calcule o m.d.c. dos números 1 430, 572 e 858. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1940). R.: 286.

52. Quando calculamos o m.d.c. de dois ou mais números e encontramos para resultado 1, concluímos que os números dados são primos entre si, porque só admitem um divisor comum, a unidade.

Assim: m.d.c. (32 e 45) = 1.

	1	2	2	6
45	32	13	6	1
13	6	1	0	

32 e 45 são primos entre si.

Do mesmo modo, quando *dois ou mais números são primos entre si, seu md..c. é a unidade.*

Exemplo: 7, 9 e 20 são primos entre si; seu m.d.c. é 1.

53. Calculemos o m.d.c. de 96, 16 e 80. Observemos que o menor dos três números — 16 — é divisor dos outros dois. Então podemos dizer que 16 é o maior dos divisores comuns de 96, 16 e 80; 16 é o m.d.c. dos três números.

Conclusão: *Quando entre vários números um é divisor dos outros, êle o m.d.c. de todos.*

54. 2.º processo: *O m.d.c. de vários números é igual ao produto dos fatores primos comuns a êsses números com os menores expoentes.*

Exemplo: Calcular o m.d.c. de 180, 630 e 990.

Decompomos os números em fatôres primos.

180	2	630	2	990	2
90	2	315	3	495	3
45	3	105	3	165	3
15	3	35	5	55	5
5	5	7	7	11	11
1		1		1	

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

$990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$
m.d.c. (180, 630 e 990) $= 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

Os fatôres primos tomados para o cálculo do m.d.c. são os fatôres primos comuns considerados com os menores expoentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Ache o m.d.c., pelos dois processos, dos números 525 e 375.
2 — Qual o m.d.c. de 9, 16 e 13?
3 — Qual o m.d.c. de 210, 42 e 294?
4 — Decomponha em fatôres primos 450 e 189 e calcule o seu m.d.c.
5 — Calcule, pelos dois processos, o m.d.c. de 360, 400 e 280.
6 — Ache o m.d.c. de A, B e C, conhecendo:

$$A = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$
$$B = 2 \times 5 \times 11$$
$$C = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

7 — Calcule o m.d.c. dos números:

$$A = 2^2 \times 5 \times 7$$
$$B = 3 \times 5 \times 7$$
$$C = 2^2 \times 3 \times 11$$

8 — Procure o m.d.c. dos números:

$$A = 2^2 \times 5 \times 7 \times 13$$
$$B = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13$$
$$C = 2^2 \times 3 \times 13$$

9 — Um número a é divisível por outro número b. O m.d.c. de a e b é ...
10 — O m.d.c. de dois números primos entre si é igual a ...
11 — Verifique pelo m.d.c. se os números 1 227 e 181 são primos entre si.

55. Divisores comuns de vários números — Como o m.d.c de dois ou mais números é formado dos fatôres primos comuns a êsses números, os divisores comuns de dois ou mais números são os divisores de seu m.d.c. Assim, sendo se quisermos obter os divisores comuns de vários números, achamos o m.d.c. dêsses números e a seguir achamos os divisores dêsse m.d.c.

EXEMPLO: Calcular os divisores comuns de 360 e 420.

	1	6
420	360	60
60	00	

		1
60	2	2
30	2	4
15	3	3 — 6 — 12
5	5	5 — 10 — 20 — 15 — 30 — 60
1		

m.d.c. (360 e 420) = 60.

Os divisores comuns de 360 e 420 são 1, 2, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60.

No caso de querermos apenas alguns dos maiores divisores comuns de vários números, dividimos o m.d.c. pelos seus menores divisores.

EXEMPLO: O m.d.c. de 240 e 600 Os quatro maiores divisores comuns de 240 e 600 são: 120 1 = 120; $120 \div 2 = 60$; $120 \div 3 = 40$; $120 \div 4 = 30$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Calcule os dois maiores divisores comuns de 45 e 60.
2 — Procure todos os divisores comuns de 80, 64 e 112.
3 — Calcule todos os divisores comuns de 330 e 210.
4 — 24 é o m.d.c. de 3 números. Quais são os dois maiores divisores comuns dêsses números?
5 — O m.d.c. de dois números pode ser um dêles? Quando?

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

56. Mínimo múltiplo comum *de vários números é o menor número divisível por êsses números.*

Vejamos alguns dos múltiplos de 6 e 4.

Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...

Múltiplos de 5: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, ...

Entre êsses múltiplos de 6 e 4 há alguns múltiplos comuns de 6 e 4. São êles: 12, 24, 36, 48, etc. Dizemos então que 12, 24, 36, . . . *são múltiplos comuns* de 6 e 4. Dêstes múltiplos comuns de 6 e 4, 12 é o menor. Dizemos por isso que 12 é o *mínimo múltiplo comum* de 4 e 6.

A expressão *mínimo múltiplo comum* é abreviadamente representada por *m.m.c.*

Assim: m.c.c. (4 e 6) = 12.

57. Cálculo do m.m.c. de vários números — Vejamos como calcular o m.m.c. de dois ou mais números.

1.º PROCESSO: *O m.m.c. de vários números é igual ao produto dos fatores primos dêsses números, comuns e não comuns, com os maiores expoentes.*

EXEMPLO: Calcular o m.m.c. (24, 42 e 56).

Decompomos os números dados em fatôres primos:

24	2	42	2	56	2	$24 = 2^2 \times 3$
12	2	21	3	28	2	$42 = 2 \times 3 \times 7$
6	2	7	7	14	2	$56 = 2^2 \times 7$
3	3	1		7	7	
1				1		

m.m.c. (24, 42 e 56) = $2 \times 3 \times 7 = 168$.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Calcule o m.m.c. dos números: 52, 78 e 80.
2 — Calcule o m.m.c. de 24, 60 e 105.
3 — Calcule o m.d.mc. e o m.m.c. dos números *A*, *B* e *C*:

$$A = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$
$$B = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$C = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11$$

4 — Qual o menor número divisível por 36 e 80?
5 — Calcule o m.d.c. e o m.m.c. dos números 70 e 60.

58. 2.º PROCESSO: *Escrevemos todos os números em linha horizontal, separados por virgulas. A seguir, dividimos por* $\frac{1}{2}$ *os que forem divisíveis por* $\frac{1}{2}$*, conservando os que não forem divisíveis. Procedemos depois da mesma forma com 3, 5, . . ., isto é, com os números primos, em ordem de grandeza crescente. Multiplicando finalmente os divisores primos utilizados, teremos o m.m.c.*

EXEMPLO: Calcular o m.m.c. de 24, 42 e 56.

24,	42,	56	2
12,	21,	28	2
6,	21,	14	2
3,	21,	7	3
1,	7,	7	7
1,	1,	1	

m.m.c. (24, 42 e 56) = $2^2 \times 3 \times 7 = 168$.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Ache o m.m.c. de 24, 30 e 40.
2 — Qual o menor número divisível ao mesmo tempo por 36 e 80?
3 — Qual o m.m.c. de 65, 39 e 40?
4 — Calcule o m.m.c. de 48 e 60.
5 — Procure o m.d.c. e o m.m.c. dos números:

$$A = 2^2 \times 5 \times 7 \times 11$$
$$B = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$$
$$C = 2^2 \times 3^2 \times 5$$
$$D = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

59. 3.º PROCESSO: Há mais um processo para calcular o m.m.c. de dois números. Trata-se de um cálculo com o auxílio do m.d.c.

REGRA: *Para se achar o m.m.c. de dois números, multiplicam-se os dois números e divide-se o produto pelo m.d.c.*

EXEMPLO: Calcular o m.m.c. de 60 e 90.

	1	2
90	60	30
30	0	

m.m.c. (60 e 90) = $(60 \times 90) \div$ $\div$ m.d.c. (60 e 90) = $5400 \div$ $\div\, 30 = 180$.

OBSERVAÇÃO: Quando por êste 3.º processo quisermos calcular o m.m.c. de mais de dois números, procuramos o m.m.c. dos dois primeiros, do resultado e do terceiro, do novo resultado e do quarto, e assim por diante.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Calcule, com o auxílio do m.d.c., o m.m.c. de 24 e 30.
2 — Procure, com o auxílio do m.d.c., o m.m.c. de 40 e 25.

60. Observações — 1.ª — Vejamos agora como calcular o m.m.c. de 9, 14 e 25.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2$$
$$14 = 2 \times 7$$
$$25 = 5^2$$

m.m.c. (9, 14 e 25) $= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 3150$.

O m.m.c. foi formado de todos os divisores de 9, todos os divisores de 14 e todos os de 25, porque êstes números são primos entre si. O m.m.c. ficou igual ao produto dos números dados.

m.m.c. (9, 14 e 25) $= 9 \times 15 \times 25 = 3150$.

Resumindo, podemos dizer: *O m.m.c. de dois ou mais números primos entre si, dois a dois, é igual ao produto dêles.*

2.ª — Quando um dos números, dos quais se procura o m.m.c., é múltiplo dos outros, êle é o m.m.c. de todos os números.

Exemplo: Calcular o m.m.c. de 24, 8 e 12.

24, sendo múltiplo de si mesmo e todos outros números, é o m.m.c. dos três números:

m.m.c. (24, 8 e 12) = 24.

3.ª — *Os múltiplos comuns de vários números são múltiplos do seu m.m.c.*

Já vimos que 24 é o m.m.c. de 24, 8 e 12. Multiplicando 24 pelos números da sucessão dos números inteiros, obteremos outros múltiplos comuns de 24, 8 e 12.

$24 \times 2 = 48$
$24 \times 3 = 72$
$24 \times 4 = 96$

Assim: 24 é o m.m.c. de 24, 8 e 12; 24 e 48 são os dois menores múltiplos comuns de 24, 8 e 12; 24, 48 e 72 são os três menores múltiplos comuns de 24, 8 e 12 e assim por diante.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Calcule os três menores múltiplos comuns de 24 e 40.
2 — Procure os dois menores múltiplos comuns de 20 e 25.
3 — Calcule todos os múltiplos comuns de 8 e 12 menores que 100.
4 — Quais os três menores múltiplos comuns de 15, 18 e 20?
5 — Quais os três menores números divisíveis por 10, 15 e 20?
6 — O m.m.c. de dois números é um dêles quando ....
7 — Sendo o m.m.c. de dois números igual ao produto dêles, seu m.d.c. será igual a .... (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1945). R.: 1.

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

61. Este bolo foi dividido em 8 partes iguais. Se eu tomar uma ou duas dessas partes, estarei tomando uma *fração* do bôlo.

De um modo geral, se eu dividir uma unidade em partes iguais, uma ou várias dessas partes formam uma *fração*. *Fração representa uma ou mais partes da unidade dividida em partes iguais.*

62. Observemos novamente o bôlo dividido em 8 pedaços iguais. Cada pedaço se chama *um oitavo* ou *a oitava parte* do bôlo. Quando eu tomar 5 dêsses pedaços, direi que tenho *cinco oitavas partes* do bôlo ou simplesmente *cinco oitavos* do bôlo; representarei por $\frac{5}{8}$, isto é, um traço horizontal tendo o 5 acima e o 8 abaixo.

O símbolo $\frac{5}{8}$ é uma *fração*. O traço que separa o 5 do 8 é denominado *traço de fração*.

O número colocado abaixo do traço de fração indica, como podemos ver no exemplo, em quartas partes a unidade foi dividida e dá assim o *nome* a essas partes — são *oitavos*; chama-se por isso *denominador*.O *numerador*, que é o número colocado acima do traço, indica o número de partes que foram tomadas.

O numerador e o denominador são chamados *têrmos* da fração.

Lemos uma fração dizendo em 1.º lugar o numerador e em seguida o denominador acrescentando a palavra *avos*.

Assim, lemos a fração $\frac{5}{12}$ dizendo *cinco doze avos*.

Desta regra excetuamos as frações cujos denominadores são menores que 10, ou potências de 10, isto é, as frações cujos denominadores são 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1000, ..., nas quais lemos ainda, primeiramente, o numerador e a seguir dizemos *meios, terços, quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos, nonos, décimos, centésimos, milésimos, ...* respectivamente.

Exemplos: $\frac{3}{4}$ lemos *três quartos*; $\frac{7}{9}$ lemos *sete nonos*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Represente as frações: três quintos, seis sétimos, quatro nonos, um quarto, cinco sextos, escrevendo primeiro o traço de fração, depois o numerador e por último o denominador.

2 — Que exprime a fração $\frac{4}{7}$? e $\frac{7}{11}$? Como se lêem estas frações?

3 — Que indica a fração $\frac{5}{6}$?

4 — Que representam as frações $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{8}$?

5 — Desenhe um quadrado e pinte os seus $\frac{3}{4}$ de vermelho.

63. Observemos as frações $\frac{4}{10}$, $\frac{8}{100}$ e $\frac{7}{1000}$. Elas têm para denominador uma potência de 10: formam um grupo especial de frações, chamadas *frações decimais*.

Tôdas as outras, cujos denominadores não são potências de 10, são chamadas *frações ordinárias*.

Trataremos, por enquanto, apenas das *frações ordinárias*.

64. Observemos algumas unidades nossas conhecidas. O *dia*, por exemplo. Sabemos que êle é dividido em 24 partes iguais — as *horas*. Então, uma hora, em relação ao dia, pode ser representada pela fração $\frac{1}{24}$.

Observemos a *semana*; é dividida em 7 partes iguais — os *dias*. Dois dias formam, portanto, a fração $\frac{2}{7}$ da semana.

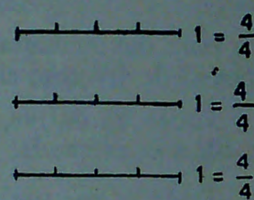
Consideremos agora uma dúzia de ovos — corresponde a 12 ovos, nós sabemos. Três ovos, em relação a uma dúzia, formam a fração $\frac{3}{12}$.

Quando o numerador de uma fração é igual ao denominador, a fração é igual à unidade. Assim: $\frac{8}{8} = 1$.

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Que fração da semana é um dia?
2 — Que fração do ano representam 5 meses?
3 — Que fração do cento representam 60 laranjas?
4 — Que fração da dúzia valem 9 ovos?
5 — Uma fração representando quintos da unidade, qual é seu denominador?
6 — Que fração do dia é uma hora?
7 — Que fração do dia são sete horas?

65. Converter um número inteiro em uma fração cujo denominador seja um dado número — Seja, por exemplo, converter 3 numa fração cujo denominador seja 4.



Como uma unidade tem quatro quartos, 3 unidades terão 3 vêzes mais, isto é, 3×4 quartos ou 12 quartos:

$$3 = \frac{3 \times 4}{4} = \frac{12}{4}$$

Regra: *Para se dar a um número inteiro a forma de uma fração, tendo para denominador um dado númeró, dá-se para denominador êsse número e para numerador o produto do inteiro pelo denominador.*

Observação: Quando o denominador de uma fração é a unidade, a fração é igual ao numerador.

Exemplo: $\frac{5}{1} = 5.$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

0 — Dois bolos inteiros quanto sétimos nos darão?
2 — Três unidades a quantos sétimos correspondem?
3 — Complete: $1 = \frac{}{5}$ $1 = \frac{}{8}$ $1 = \frac{}{9}$

$2 = \frac{}{7}$ $5 = \frac{}{6}$ $3 = \frac{}{4}$ $7 = \frac{}{1}$

4 — Escreva sob a forma de fração com denominador 4, os números: 5, 1, e 9.

5 — Dê forma fracionária ao número 3, tomando 7 para denominador.
6 — Dê forma fracionária aos números 3 e 7, tomando 5 para denominador.

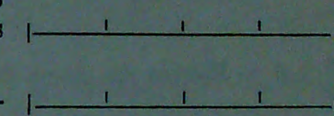
7 — Escreva sob forma de fração: 4, 3, 8 e 7.
8 — Reduza 5 unidades a terços. ;
9 — Quantos quintos formarão 3 unidades?
10 — Quantos sétimos formarão duas unidades?
11 — Quantos terços há em 9 unidades?
12 — Quantos oitavos há em 5 unidades?

13 — Que fração se deve acrescentar a $\frac{2}{5}$ para e ter uma unidade?

14 — Que fração se deve acrescentar a $\frac{3}{8}$ para se ter uma unidade?

15 — Quanto falta a $\frac{4}{7}$ para termos duas unidades?

66. Temos duas unidades iguais divididas em 4 pedaços iguais.



Se eu tomar 3 pedaços da primeira terei a fração 34, que é realmente uma fração porque é menor do que a unidade, é uma parte da unidade. A essas frações, assim menores do que a unidade, chamamos *frações próprias*, nelas o *numerador é menor do que o denominador*.

Se eu tomar, porém, $\frac{5}{4}$, estarei tomando uma unidade inteira e mais $\frac{1}{4}$ da segunda unidade; tomarei, portanto, uma porção maior do que uma unidade. Ao número $\frac{5}{4}$, que *indica uma porção maior do que uma unidade*, chamamos *fração imprópria*. Numa fração imprópria o numerador é maior do que o denominador. Elas são denominadas impróprias porque não são *propriamente* frações, pois fração indica uma parte da unidade e elas valem mais de uma unidade.

Também são frações impróprias as frações cujos têrmos são iguais, como, por exemplo, $\frac{4}{4}$. Elas representam não uma fração, isto é, uma parte da unidade, e sim a unidade inteira.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS;

1 — Das frações $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{4}{7}$, diga:

I — quais as próprias.
II — quais as impróprias .
2 — Escreva duas frações maiores do que a unidade. ;
3 — Escreva duas frações menores que a unidade.
4 — Que é uma fração própria?
0 — Escreva em ordem decrescente de grandeza as frações:

$$\frac{2}{5}, \frac{9}{6}, \frac{4}{4}$$

6 — Escreva em ordem de grandeza crescente as frações:

$$\frac{5}{5}, \frac{8}{7}, \frac{3}{4}$$

7 — Numere em ordem de grandeza decrescente as frações:

$$\frac{3}{3}, \frac{5}{9}, \frac{3}{2}$$

8 — Numere em ordem de grandeza crescente as frações:

$$\frac{6}{4}, \frac{6}{6}, \frac{6}{9}$$

9 — Quanto se deve acrescentar à unidade para se ter a fração $\frac{12}{9}$?

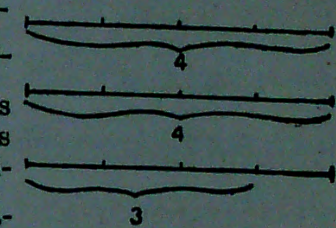
10 — A fração $\frac{6}{5}$ de quando excede o valor de 1 inteiro?

11 — Numa fração, o numerador vale 3 vêzes o denominador; quanto vale essa fração?
12 — Numa fração, o denominador é a metade do numerador; qual o valor dessa fração?
13 — Quantos quintos posso obter com 5 queijos iguais?
14 — Parti 8 queijos iguais em quartos. Quantos quartos obtive?

15 — Se eu comer 3 vêzes consecutivas $\frac{1}{3}$ de uma maçã, terei comido a maçã inteira? Por que?

16 — Qual a fração que, repetida 3 vêzes, forma a unidade?
17 — Qual a fração que, repetida 5 vêzes, forma a unidade?
18 — Qual a fração que se contém 7 vêzes na unidade?
19 — Qual a fração que se contém 10 vêzes na unidade?
20 — Qual a fração 4 vêzes menor que a unidade?
21 — Qual a fração 8 vêzes menor que a unidade?

67. Números mistos — Suponhamos três unidades divididas em 4 partes iguais e tomemos 11 dessas partes, isto é, $\frac{11}{4}$. Olhando o desenho vemos que essas 11 partes valem as duas primeiras unidades e ainda 3 quartos da última. Dizemos então que $\frac{11}{4}$ valem duas unidades inteiras e $\frac{3}{4}$; escrevemos $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$



Este *número* $2\frac{3}{4}$, *composto de um número inteiro e de uma fração* é denominado *número misto*: êle é formado de unidades e de partes da unidade dividida em partes iguais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Como se chama o número $3\frac{5}{8}$?

2 — Que representa o número $2\frac{1}{3}$? e o número $5\frac{3}{5}$?

3 — Que representa o número $4\frac{5}{5}$?

4 — O número $4\frac{2}{7}$ é maior que a unidade? Por quê?