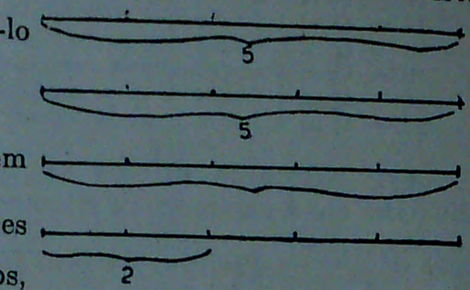
5 — De quanto $1\frac{2}{3}$ excede a unidade ?

68. Transformação de um número misto em fração imprópria — Consideremos o número misto $3\frac{2}{5}$. Vamos transformá-lo numa fração imprópria.



Como uma unidade tem 5 quintos $\left(\frac{5}{5}\right)$, 3 unidades terão 3 vêzes mais 5 quintos, isto é, 15 quintos; somando 15 quintos obtemos $\frac{17}{5}$.

Logo:

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Regra: *Para se reduzir um número misto a fração imprópria multiplica-se o inteiro pelo denominador, soma-se o numerador e conserva-se o mesmo denominador.*

Exemplos: $4\frac{2}{7} = \frac{4 \times 7 + 2}{7} = \frac{30}{7}$

$$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Transforme em fração imprópria os números mistos:

$$1\frac{3}{5},\ 2\frac{7}{8} \text{ e } 5\frac{4}{10}$$

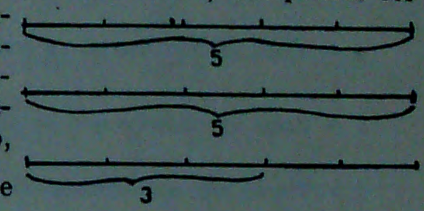
2 — Transforme em fração imprópria os números mistos:

$$4\frac{1}{10},\ 5\frac{1}{2} \text{ e } 3\frac{1}{4}$$

3 — Quantos quintos contêm $2\frac{3}{5}$? quantos quartos têm $5\frac{3}{4}$?

69. Transformação de uma fração imprópria em número misto — Consideremos a fração $\frac{13}{5}$. Ela sendo imprópria conterá uma ou mais unidades. Vamos ver como podemos transformá-la num número misto.

Como 5 quintos formam uma unidade, 13 quintos formarão tantas unidades quantas vêzes 13 quintos contiverem 5 quintos. Ora, 13 quintos contêm 5 quintos duas vêzes e sobram 3 quintos, logo, $\frac{13}{5}$ contêm duas unidades e $\frac{3}{5}$



$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array} \qquad \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Regra: *Para se reduzir uma fração imprópria a número misto, divide-se o numerador pelo denominador: o quociente é a parte inteira do número misto, o numerador é o resto e o denominador o divisor.*

Exemplos: $\frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 25 & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$

$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 6 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 Quantas unidades há em cada uma das frações $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{2}$,

$\frac{8}{3}$ e $\frac{10}{3}$?

2 — Quantas unidades há em $\frac{28}{8}$? em $\frac{19}{3}$? em $\frac{15}{5}$?

3 — Complete as igualdades abaixo reduzindo as frações a números mistos:

$\frac{6}{4} = \ldots \quad \frac{13}{5} = \ldots \quad \frac{7}{3} = \ldots \quad \frac{9}{8} = \ldots \quad \frac{15}{5} = \ldots$

4 — Quantas unidades há na fração $\frac{37}{6}$?

5 — Some as unidades que há nas frações $\frac{24}{7}$ e $\frac{32}{7}$.

6 — Transforme em números mistos as frações:

$\frac{8}{8} \quad \frac{15}{4} \quad \frac{9}{7} \quad \frac{37}{5} \quad \frac{49}{6} \quad \frac{52}{8} \quad \frac{27}{4} \quad \frac{35}{8}$

7 — Escreva sob a forma de números mistos as frações:

$\frac{11}{5} \quad \frac{17}{4} \quad \frac{131}{11} \quad \frac{97}{8} \quad \frac{25}{4}$

70. Extração de inteiros — Conforme acabamos de ver $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$. Quando transformamos $\frac{13}{5}$ no número misto $2\frac{3}{5}$, nós tiramos de $\frac{13}{5}$ todos os quintos necessários à formação de unidades inteiras, isto é, retiramos da fração tôdas as unidades inteiras. A êsse trabalho também chamamos *extrair os inteiros* de uma fração.

REGRA: *Para extrair os inteiros de uma fração transformamos essa fração em número misto.*

EXEMPLO: Extraindo os inteiros das frações $\frac{17}{8}$ e $\frac{20}{3}$,

encontramos: $2\frac{1}{8}$ e $6\frac{2}{3}$.

$$17 \,|\underline{\,8\,} \qquad 20 \,|\underline{\,3\,}$$
$$1 \quad 2 \qquad\quad 2 \quad 6$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Extrair os inteiros das frações:

$\frac{42}{5} \quad \frac{28}{3} \quad \frac{50}{8} \quad \frac{66}{7} \quad \frac{41}{4} \quad \frac{77}{9}$

2 — Transforme em números mistos as frações:

$\frac{15}{2} \quad \frac{48}{5} \quad \frac{48}{6} \quad \frac{84}{16} \quad \frac{61}{4} \quad \frac{91}{8} \quad \frac{125}{12}$

3 — De quantas unidades precisamos para representar as frações

$\frac{5}{3} \quad \frac{9}{7} \quad \frac{30}{11} \quad \frac{26}{5} \quad \frac{17}{8} \quad \frac{51}{13}$?

4 — Quantas unidades há nas frações:

$\frac{5}{5} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{10}{3} \quad \frac{47}{8} \quad \frac{35}{11}$?

5 — Que inteiro há na fração $\frac{43}{8}$

EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO

1 — Quantos quintos há em $1\frac{1}{5}$?

2 — Complete:

$1\frac{1}{4} = \frac{\quad}{4} \qquad 2\frac{3}{5} = \frac{\quad}{5} \qquad 4\frac{1}{8} = \frac{\quad}{8}$

Por que, ao fazer êsses cálculos, encontramos para resultado sempre fração imprópria?

3 — Transforme em fração imprópria os números mistos:

$3\frac{1}{3} \quad 2\frac{1}{4} \quad 4\frac{5}{6} \quad 10\frac{1}{5} \quad 6\frac{3}{7}$

4 — 7 unidades quantos décimos têm?

5 — Quantos quartos de hora há em uma hora? em 3 horas e um quarto?

6 — Escreva sob a forma de fração imprópria os números mistos:

$$1\frac{1}{2} \quad 2\frac{3}{4} \quad 3\frac{2}{5} \quad 4\frac{5}{7} \quad 5\frac{4}{8}$$

7 — Dou a cada um dos meus pobres $\frac{1}{4}$ de litro de leite, por dia. Quantos são os meus pobres se eu distribuir diàriamente 7 litros de leite?

8 — Se eu distribuisse aos meus pobres 8 litros e $\frac{3}{4}$, quantos pobres seriam contemplados, cada um recebendo $\frac{1}{4}$ de litro?

9 — Dê forma fracionária aos números mistos: $4\frac{1}{5}$ e $6\frac{2}{9}$.

10 — Uma pessoa toma pela manhã $\frac{3}{4}$ de litro de leite, no lanche $\frac{1}{4}$ e à noite $\frac{1}{4}$. Que porção de leite toma essa pessoa num dia?

71. O traço de fração corresponde ao sinal de divisão — Observemos êstes dois problemas:

1.º — Tenho 30 balas para distribuir por 5 meninos Quantas balas receberá cada um?

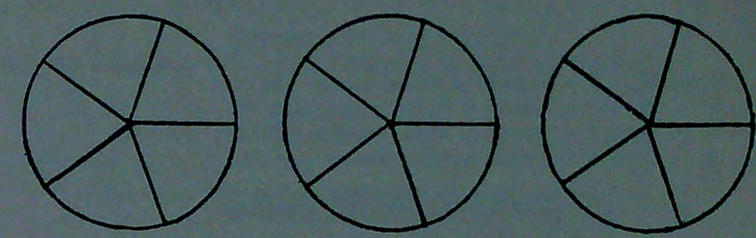
$30 \div 5 = 6$. Cada menino receberá 6 balas.

Poderemos representar esta divisão sob a forma de fração, assim: $\frac{30}{5} = 6$.

2.º — Tenho 3 queijos para distribuir por 5 pessoas. Que porção receberá cada uma?

Como o número de queijos é menor que o de pessoas, cada pessoa receberá menos de um queijo. Vejamos como podemos saber que porção de um queijo cada uma receberá.

Como são 5 pessoas dividimos cada queijo em 5 partes iguais, teremos ao todo 15 partes iguais, cada uma delas valendo $\frac{1}{5}$ de um queijo. Agora podemos dividir essas 15 partes pelas cinco pessoas, e cada uma delas receberá 3 dessas partes,



isto é, cada pessoa vai receber 3 partes de um queijo dividido em 5 partes iguais, logo $\frac{3}{5}$ do queijo. Vemos então que se há 3 queijos para dividir por 5 pessoas, cada uma receberá $\frac{3}{5}$ do queijo: assim $3 \div 5$ equivale a $\frac{3}{4}$.

O traço de fração indica, pois, a divisão do numerador pelo denominador.

Quociente exato: $3 \div 5$ é pois igual a $\frac{3}{5}$ Êste resultado é o *quociente exato* de 3 por 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Represente as seguintes divisões sob a forma de fração ordinária: $40 \div 8 =$ $27 \div 3 =$ $5 \div 8 =$ $4 \div 7 =$.

2 — João, Paulo e Mário ganharam duas maçãs; que porção caberá a cada um?

3 — Tenho de dividir 3 peras por 5 meninos. Que porção de uma pêra ganhará cada um?

4 — Qual o quociente exato de 9 por 17? de 1 por 3? de 3 por 5?

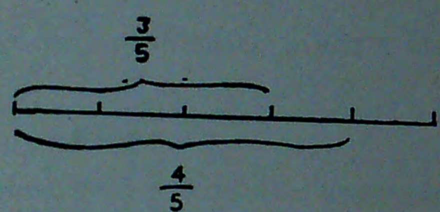
72. Como $\frac{30}{5} = 6$ ou $30 \div 5 = 6$, dizemos que 6 unidades valem 5 vêzes menos que 30, logo: o número cinco vêzes menor que 30 é $30 \div 5$ ou $\frac{30}{5}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Qual é o número 4 vêzes menor que 16?
2 — Qual é a fração 4 vêzes menor que 3?
3 — Qual é a fração 5 vêzes menor que 4?
4 — Qual é a fração 8 vêzes menor que 5?

Comparação de frações

73. Observamos na figura que a unidade foi dividida em 5 partes e tomamos de um lado 3 partes e do outro 4. Evidentemente $\frac{4}{5}$ é maior que $\frac{3}{5}$ porque tomamos mais partes da unidade.



Regra: *De duas frações do mesmo denominador a maior é a de maior numerador.*

Exemplos: $\frac{8}{9} > \frac{3}{9}$ $\frac{5}{8} < \frac{7}{8}$.

O sinal $>$ lê-se *maior que*; o sinal $<$ lê-se *menor que*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — De duas frações que tenham o mesmo denominador, qual é a maior?

2 — Qual a menor, $\frac{4}{7}$ ou $\frac{5}{7}$?

3 — Cancele a maior fração: $\frac{5}{9}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{4}{9}$.

4 — Escreva uma fração maior que $\frac{5}{7}$ com o denominador 7.

5 — Risque a menor:

$\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$

6 — Escreva por ordem crescente de valor as frações:

$\frac{4}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$

7 — Escreva por ordem crescente de valor as frações:

$\frac{5}{11}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{8}{11}$ $\frac{10}{11}$ $\frac{2}{11}$ $\frac{6}{11}$

8 — Coloque em ordem decrescente as frações:

$\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$,

9 — Mário recebeu $\frac{4}{7}$ de um bôlo e Luiz o resto. Quem ganhou mais?

10 — Yára ganhou $\frac{2}{9}$ de um queijo, Lúcia $\frac{1}{9}$ e Maria Carmen $\frac{4}{9}$. Quem recebeu mais? Quem recebeu menos?

11 — Escreva uma fração maior que $\frac{3}{8}$, com o mesmo denominador. Idem com $\frac{4}{11}$.

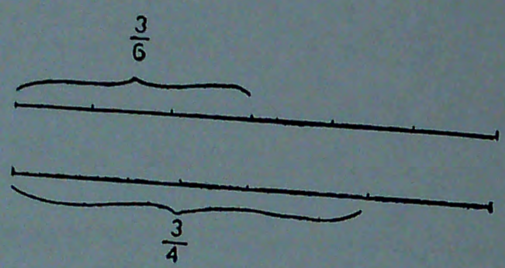
12 — Escreva duas frações menores que $\frac{7}{9}$, com o mesmo denominador.

13 — Numere em ordem crescente as frações:

$$\frac{4}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{6}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{5}{12}$$

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

74. Observemos a figura.



Qual a maior fração, $\frac{3}{6}$ ou $\frac{3}{4}$?

O desenho mostra-nos que a maior é $\frac{3}{4}$. Por que? Porque de ambas as unidades tomamos o mesmo número de partes, mas cada parte da segunda é maior que cada uma da primeira, porque nela a unidade foi dividida em menor número de partes.

REGRA: *De duas frações de mesmo numerador a maior é a que tem menor denominador.*

EXEMPLOS: $\frac{7}{4} > \frac{7}{9}$ $\quad \frac{5}{3} < \frac{5}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Qual a maior fração, $\frac{7}{10}$ ou $\frac{7}{9}$?

2 — Escolha a menor das frações: $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{9}$

3 — Escreva uma fração maior que $\frac{3}{5}$.

4 — Escreva uma fração maior que $\frac{3}{9}$, com o mesmo numerador

5 — Escreva por ordem crescente de valor as frações?

$$\frac{4}{5} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{4}{8}$$

6 — Escolha a menor das frações:

$$\frac{3}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{9} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{3}$$

7 — Escreva em ordem crescente de valor as frações:

$$\frac{2}{9} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{2}{4}$$

usando o sinal $<$.

8 — Coloque em ordem decrescente de valor as frações:

$$\frac{5}{8} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{5}{11} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{5}{10} \quad \frac{5}{7}$$

usando o sinal $>$.

9 — Fernando ganhou $\frac{2}{5}$ de um bôlo e José $\frac{2}{7}$ de outro bôlo igual ao primeiro. Quem ganhou mais?

10 — Escreva uma fração maior que $\frac{5}{9}$ com o mesmo numerador

Idem com $\frac{4}{7}$.

11 — Escreva duas frações menores que $\frac{2}{3}$, conservando o mesmo numerador.

12 — Numere em ordem decrescente de valor as frações:

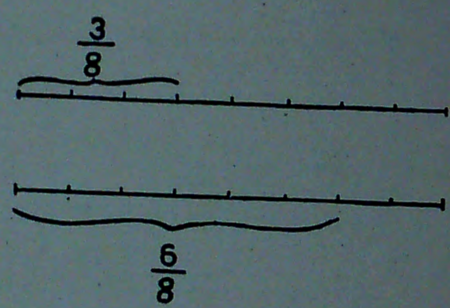
$\frac{6}{11}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{6}{23}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{6}{18}$

( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( ) ( )

13 — Qual a maior fração própria que tem 8 para denominador?
14 — Qual a maior fração própria que tem 12 para denominador?
15 — Qual a maior fração própria que tem 7 para numerador?
16 — Qual a maior fração própria que tem 9 para numerador?

75. Tomemos a fração $\frac{3}{8}$. Ela diz que a unidade foi dividida em 8 partes iguais e que tomamos 3 dessas partes.

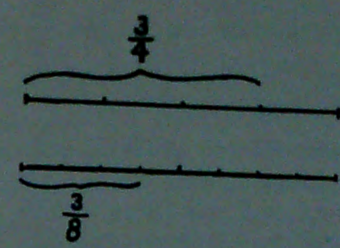
Multiplicando o numerador por 2, ficamos com a fração $\frac{6}{8}$ que indica que tomamos duas vêzes mais partes que na fração $\frac{3}{8}$: assim $\frac{6}{8}$ é duas vêzes maior que $\frac{3}{8}$.



Logo, *quando multiplicamos o numerador de uma fração por um número, a fração fica multiplicada por êsse número.*

76. Tomemos a fração $\frac{3}{4}$. Ela diz que a unidade foi dividida em 4 partes iguais e tomamos três.

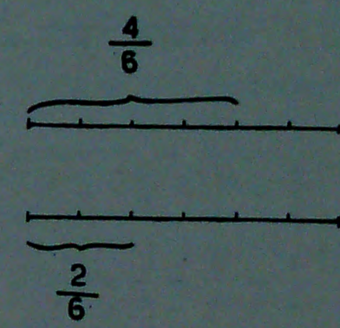
Mutiplicando o denominador por 2, obtemos a fração $\frac{3}{8}$. Ela indica que a unidade foi dividida agora em duas vêzes mais partes, logo cada parte é duas vêzes menor que na fração $\frac{3}{4}$.



Ora, se na fração $\frac{3}{8}$ tomamos o mesmo número de partes que na fração $\frac{3}{4}$, mas cada parte é duas vêzes menor que em $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ é duas vêzes menor que $\frac{3}{4}$.

Logo, *quando multiplicamos o denominador de uma fração por um número a fração fica dividida por êsse número.*

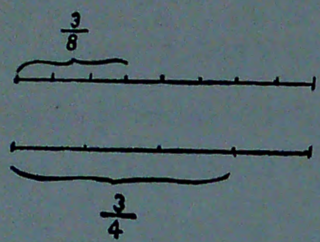
77. Quando dividimos o numerador de uma fração por número a fração fica dividida por êsse número.



Exemplo: Dividindo-se o numerador de $\frac{4}{6}$ por 2, a fração fica dividida por 2, isto é, fica duas vêzes menor.

Quando dividimos o denominador de uma fração por um número, a fração fica multiplicada por êsse número.

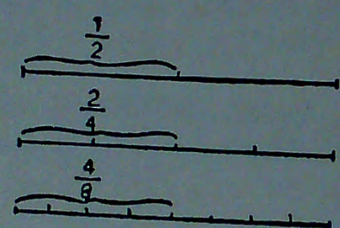
EXEMPLO: Dividindo-se o denominador da fração $\frac{3}{8}$ por 2, ela fica duas vêzes maior, isto é, fica multiplicada por 2.



OBSERVAÇÃO: Mutliplicando o o numerador de uma fração por um número, a fração fica multiplicada por êsse número, e multiplicando o denominador da fração por um número a fração fica dividida por êsse número, logo, *quando multiplicamos os dois têrmos de uma fração pelo mesmo número a fração não se altera.*

EXEMPLO:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$



Anàlogamente, *uma fração não se altera quando dividimos os dois têrmos pelo mesmo número.*

EXEMPLOS:

$$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{9}{18}.$$

$$\frac{30}{18} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

Duas frações de têrmos diferentes e de mesmo valor são chamadas *frações equivalentes.*

EXEMPLO: $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

78. A propriedade que acabamos de estudar, dizendo que uma fração não se altera quando dividimos os dois têrmos por um mesmo número, permite transformar uma fração em outra de têrmos menores que lhe seja equivalente, e, dizemos então que a fração foi *simplificada.*

EXEMPLO: $\frac{18}{20} = \frac{18}{20} \div \frac{2}{2} = \frac{9}{10}.$

Simplificar uma fração é transformá-la em outra equivalente de têrmos menores.

Para simplificar uma fração dividimos os dois têrmos por um dos seus fatores comuns diferente da unidade.

79. Há 3 *processos* para simplificar uma fração.

1.º *processo — Dividimos ambos os têrmos da fração por um divisor comum.*

EXEMPLO $\frac{96}{420} = \frac{48}{120} = \frac{24}{60} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$

Como fazemos várias divisões sucessivamente, chamamos a êste processo de *processo das divisões sucessivas.*

2.º *processo — Dividimos os têrmos da fração pelo seu m.d.c.* A fração ficará irredutível, isto é, não poderá mais ser simplificada porque seus têrmos ficarão primos entre si, pois, quando dividimos dois números pelo seu m.d.c., os quocientes são primos entre si.

EXEMPLO: Simplificar a fração $\frac{96}{240}.$

	2	2
240	96	48
48	0	

m.d.c. (240, 96) = 48.

$$\frac{96}{240} = \frac{96 \div 48}{240 \div 48} = \frac{2}{5}$$

3.° PROCESSO — *Decompomos os têrmos da fração em fatores e cancelamos os fatores comuns.*

EXEMPLO: Simplificar a fração $\frac{96}{240}$.

$$\begin{array}{r|l} 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{96}{240} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{2}{5}$$

80. Quando levamos a simplificação de uma fração até que ela não possa mais ser simplificada, dizemos que a última fração é a *expressão mais simples* a que pode ser reduzida a fração dada.

Assim, no exemplo acima citado, simplificamos a fração $\frac{96}{240}$ até encontrar a fração $\frac{2}{5}$ que não pode mais ser simplificada; a fração ficou reduzida à expressão mais simples.

Os têrmos da fração $\frac{2}{5}$ são primos entre si, só têm para divisor comum a unidade. Dizemos que a fração $\frac{2}{5}$ é *irredutível*, isto é, não pode ser reduzida ou transformada em outra do mesmo valor com têrmos menores.

OBSERVAÇÃO: — Há diferença entre *simplificar uma fração e reduzi-la à expressão mais simples.* Quando *simplificamos* uma fração transformamo-la em outra equivalente de têrmos

mais simples. Não há obrigação de que a fração resultante seja irredutível.

EXEMPLO: Podemos simplificar a fração $\frac{32}{40}$ dividindo os dois têrmos por dois; obteremos $\frac{16}{20}$. Esta fração não é irredutível.

Quando *reduzimos uma fração à expressão mais simples*, temos de simplificá-la, tornando-a irredutível. Assim, reduzindo a fração $\frac{32}{40}$ *à expressão mais simples*, teremos sucessivamente:

$$\frac{32}{40} = \frac{16}{20} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

O resultado é $\frac{4}{5}$; entretanto, $\frac{16}{20}$ e $\frac{8}{10}$ são também valores simplificados da fração $\frac{32}{40}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Simplifique as frações: $\frac{12}{15}$, $\frac{18}{42}$, $\frac{36}{64}$ e $\frac{36}{90}$.

2 — Reduza à expressão mais simples as frações:

$$\frac{108}{144} \quad \frac{15}{75} \quad \frac{21}{120}$$

3 — Torne irredutíveis as seguintes frações:

$$\frac{36}{48} \quad \frac{10}{45} \quad \frac{52}{156}$$

4 — Reduza à expressão mais simples, pelos 3 processos, as frações

$$\frac{84}{240} \quad \frac{56}{88} \quad \frac{30}{42} \quad \frac{18}{21}$$

5 — Torne irredutíveis as frações seguintes e extráia os inteiros:

$$\frac{124}{112} \quad \frac{124}{96} \quad \frac{45}{20} \quad \frac{21}{12} \quad \frac{64}{24}$$

6 — Por que os têrmos de uma fração irredutível são primos entre si?

7 — Como você reconhece que uma fração é irredutível?

8 — A fração de denominador 35 equivalente a $\frac{15}{21}$ é.........

(Instituto de Educação. Exame de Admissão — 1945). R.: $\frac{25}{35}$

REDUÇÃO DE FRAÇÕES AO MESMO DENOMINADOR

81. **Frações homogéneas** são as frações de mesmo denominador.

Exemplo: As frações $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{7}$ e $\frac{3}{7}$, tendo o mesmo denominador 7, os seus numeradores 2, 1, 4 e 3 referem-se a unidades da mesma espécie — são frações homogêneas.

As frações, que têm denominadores diferentes, são denominadas *frações heterogêneas*.

82. Muitas vêzes, nos cálculos sôbre frações, há necessidade de tornar homogêneas as frações, sem lhes alterar o valor. A operação que permite alcançar êste resultado chama-se *redução de frações ao mesmo denominador*.

Dois processos há para reduzir frações ao mesmo denominador.

1.º processo — *Cálcula-se o m.m.c. dos denominadores. Divide-se êsse m.m.c. por cada um dos denominadores e os quocientes obtidos multiplicam-se por ambos os têrmos das respectivas frações.* As novas frações são equivalentes às primitivas porque uma fração não se altera quando multiplicamos os dois têrmos por um mesmo número.

Exemplo: Reduzir ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{8},$$
$$(6) \quad (4) \quad (3)$$
$$\frac{18}{24}, \quad \frac{20}{24}, \quad \frac{9}{24},$$

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 6,\ 8 & 2 \\ 2,\ 3,\ 4 & 2 \\ 1,\ 3,\ 2 & 2 \\ 1,\ 3,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

m.m.c. (4, 6, 8) = 24

Em lugar de se utilizar o m.m.c. dos denominadores pode-se usar qualquer um dos múltiplos comuns dos denominadores. Empregando-se o m.m.c., reduzem-se as frações ao *menor* denominador comum; empregando-se um múltiplo comum dos denominadores, reduzem-se as frações ao *mesmo* denominador que pode não ser o menor. Devemos preferir o m.m.c. porque assim obteremos têrmos menores para as novas frações.

2.º processo — *Multiplicam-se ambos os têrmos de cada fração pelo produto dos denominadores das outras.* Este processo coincide com o anterior, quando os denominadores são primos entre si, dois a dois.

Exemplo: Reduzir ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}$$

$$\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 5}, \quad \frac{2 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 5}, \quad \frac{4 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 5},$$

$$\frac{15}{30}, \quad \frac{20}{30}, \quad \frac{24}{30}$$

83. Problema: *Colocar em ordem de grandeza crescente as frações* $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{4} \qquad \text{m.m.c. } (3,\ 6,4\ ) = 12$$
$$(4) \quad (2) \quad (3)$$

$$\frac{8}{12}, \quad \frac{10}{12}, \quad \frac{9}{12}$$

Temos então $\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$,

ou, voltando às frações primitivas:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

Observação: — Em lugar de reduzir ao mesmo denominador, podemos reduzir as frações ao mesmo numerador — a regra é análoga à da redução ao mesmo denominador.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Reduza ao mesmo denominador as frações:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4}.$$

2 — Coloque em ordem de grandeza crescente as frações:

$$\frac{5}{8}, \quad \frac{3}{9} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{12}.$$

3 — Coloque em ordem de grandeza decrescente as frações:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{4}$$

4 — Qual a maior das frações $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$?

5 — Dadas as frações $\frac{27}{140}$, $\frac{22}{105}$ e $\frac{48}{245}$, dizer qual a maior e qual a menor. Justificar o resultado. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1940). R.: A 2.ª é a maior e a 1.ª é a menor.

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

ADIÇÃO

84. 1.º caso: — *Adição de frações homogêneas.*

Regra: — *Somam-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.*

Exemplo: $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+1+3}{7} = \frac{6}{7}$.

Como tôdas as parcelas são sétimos da unidade, logo, da mesma espécie, bastará somar os numeradores e dar ao resultado ainda a mesma espécie — sétimos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — $\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{2}{8} = \ldots\ldots$

$\frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{4}{11} + \frac{1}{11} = \ldots\ldots$

2 — Efetue as operações seguintes, simplificando os resultados e extraindo os inteiros quando fôr possível:

$$\frac{8}{20} + \frac{13}{20} + \frac{4}{20} = \ldots \qquad \frac{7}{18} + \frac{9}{18} + \frac{8}{18} = \ldots$$

85. 2.º caso: — *Adição de frações heterogêneas.*

Regra: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e depois somam-se os numeradores, dando-se o mesmo denominador.*

Exemplo:

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{20} =$$

$$(15) \qquad (20) \qquad (6)$$

$$= \frac{45}{120} + \frac{20}{120} + \frac{18}{120} =$$

$$= \frac{83}{120}$$

$$\begin{array}{r|l} 8,\ 6,\ 20 & 2 \\ 4,\ 3,\ 10 & 2 \\ 2,\ 3,\ 5 & 2 \\ 1,\ 3,\ 5 & 3 \\ 1,\ 1,\ 5 & 5 \end{array}$$

m.m.c. (8, 6, 20) = 120

Observação: — Quando um dos denominadores é divisível pelos outros, êle é o m.m.c. de todos, não havendo necessidade da pesquisa geral do m.m.c.

Exemplo: $\frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} =$

$(1) \qquad (2) \qquad (4)$ m.m.c. (8, 4, 2) = 8

$$= \frac{7}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{17}{8}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue os cálculos propostos a segir:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{7}{18}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$$

$$\frac{3}{14} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{8} + \frac{4}{6}$$

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$$

2 — Um negociante vendeu $\frac{1}{5}$ de uma peça de fazenda e depois $\frac{7}{10}$ da peça. Que porção êle vendeu?

3 — Efetue:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{7} \qquad \frac{7}{8} + \frac{2}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \qquad \frac{2}{7} + \frac{5}{8}$$

4 — Efetue:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \qquad \frac{7}{20} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{11}{40} + \frac{3}{8} + \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{3} + \frac{4}{21} + \frac{5}{7}$$

$$\frac{7}{30} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} \qquad \frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{7}{12} + \frac{2}{3}$$

86. 3.º CASO: — *Adição de um número inteiro com uma fração e vice-versa.*

REGRA' *Multiplica-se o inteiro pelo denominador e soma-se ao numerador o resultado encontrado é o numerador da nova fração e o denominador é o denominador primitivo.*

EXEEMPLO: $4 + \frac{5}{7}$

Reduzindo 4 a sétimos encontramos $\frac{28}{7}$;.

logo:

$$4 + \frac{5}{7} = \frac{28}{7} + \frac{5}{7} = \frac{33}{7}$$

ou

$$4 + \frac{5}{7} = \frac{4 \times 7 + 5}{7} = \frac{33}{7}$$

Anàlogamente, temos:

$$\frac{3}{5} + 2 = \frac{3}{5} + \frac{10}{5} = \frac{13}{5}$$

ou

$$\frac{3}{5} + 2 = \frac{2 \times 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

OBSERVAÇÃO: $4 + \frac{2}{5} = 4\,\frac{2}{5}$

$$\frac{3}{5} + 2 = 2 + \frac{3}{5} = 2\,\frac{3}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Efetue:

$$4 + \frac{1}{9} = \ldots \qquad 3 + \frac{1}{5} = \ldots \qquad \frac{2}{5} + 3 = \ldots$$

$\frac{4}{8} + 5 = \ldots \qquad 3 + \frac{1}{8} = \ldots \qquad 1 + \frac{3}{4} = \ldots$

$\frac{2}{7} + 3 = \ldots \qquad \frac{3}{4} + 2 = \ldots \qquad \frac{1}{5} + 6 = \ldots$

87. 4.º CASO: — *Adição de números mistos.* — 1

1.º PROCESSO — REGRA: *Reduzem-se os números mistos a frações impróprias e somam-se as frações resultantes.*

EXEMPLO:

$$5\frac{1}{3} + 2\frac{4}{9} + 3\frac{2}{3} = \underset{(3)}{\frac{16}{3}} + \underset{(1)}{\frac{22}{9}} + \underset{(3)}{\frac{11}{3}} =$$

$$= \frac{48}{9} + \frac{22}{9} + \frac{33}{9} = \frac{103}{9} = 11\frac{4}{9}$$

2.º PROCESSO — REGRA: *Sòmam-se separadamente os inteiros e as frações, e somam-se os resultados.*

EXEMPLO: $5\frac{1}{3} + 2\frac{4}{9} + 3\frac{2}{3} =$

$$= 5 + 2 + 3 + \underset{(3)}{\frac{1}{3}} + \underset{(1)}{\frac{4}{9}} + \underset{(3)}{\frac{2}{3}} =$$

$$= 10 + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{6}{9} =$$

$$= 10 + \frac{13}{9} = 10 + 1\frac{4}{9} = 11\frac{4}{9}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue, pelos dois processos:

$2\frac{1}{3} + 5\frac{1}{5} + 1\frac{2}{6} \qquad 4\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}1 + \frac{1}{2}$

2 — Efetue:

$4 + 3\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \qquad 4\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 5\frac{1}{8}$

$1\frac{2}{7} + 3 + \frac{5}{7} \qquad 3\frac{1}{5} + 2 + 7 + \frac{1}{3}$

$2\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + 3\frac{1}{4}$

SUBTRAÇÃO

88. Os cálculos são análogos aos da adição.

1.º CASO — *Subtração de frações homogêneas*

REGRA: *Subtraem-se os numeradores e dá-se o mesmo denominador.*

EXEMPLO: $\frac{9}{13} - \frac{4}{13} = \frac{9-4}{13} = \frac{5}{13}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue: $\frac{8}{12} - \frac{5}{12} \qquad \frac{7}{9} - \frac{3}{9}$

2 — Efetue e simplifique os resultados:

$\frac{6}{15} - \frac{1}{15} \qquad \frac{5}{9} - \frac{2}{9}$

89. 2.º CASO — *Subtração de frações heterogêneas.*

REGRA: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e, depois, subtraem-se os numeradores, dando-se o mesmo denominador.*

EXEMPLOS:

I) $\frac{5}{8} - \frac{1}{6} =$

$$\begin{array}{cc|c} (8, & 6 & 2 \\ 4, & 3 & 2 \\ 2, & 3 & 2 \\ 1, & 3 & 3 \\ 1, & 1 & \end{array}$$

(3) (4)

$= \frac{15}{24} - \frac{4}{24} = \frac{11}{24}$

m.m.c. (8, 6) = 24

II) $\frac{3}{5} - \frac{8}{15} = \frac{9}{15} - \frac{8}{15} = \frac{1}{15}$

( ) ( )

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue:

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{10}$

$\frac{5}{7} - \frac{2}{9}$ $\frac{2}{3} - \frac{1}{7}$ $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}$

2 — Efetue:

$\frac{1}{2} - \frac{5}{14}$ $\frac{7}{8} - \frac{1}{2}$

$\frac{5}{6} - \frac{1}{3}$ $\frac{9}{12} - \frac{1}{6}$ $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

3 — Um negociante vendeu 15 de uma peça de fazenda e depois $\frac{7}{10}$ da peça. Que porção lhe sobrou?

4 — Dadas as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{3}$, substráia da soma das duas maiores a soma das duas menores.

5 — Efetue:

$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ $\frac{2}{3} + \frac{7}{8} - \frac{11}{24}$

90. 3.º CASO — *Subtrair de um inteiro uma fração.*

REGRA: *Multiplica-se o inteiro pelo denominador e subtrai-se o numerador; o resultado encontrado é o numerador da nova fração e o denominador é o denominador primitivo.*

EXEMPLO: $4 - \frac{5}{9} = \frac{36}{9} - \frac{5}{9} = \frac{31}{9}$

ou

$$4 - \frac{5}{9} = \frac{4 \times 9}{9} - \frac{5}{9} = \frac{4 \times 9 - 5}{9} = \frac{31}{9}$$

91. 4.º CASO — *Subtrair de uma fração um inteiro.*

REGRA: *Multiplica-se o inteiro pelo denominador e subtrai-se do numerador; o resultado encontrado é o numerador da nova fração e o denominador é o denominador primitivo.*

EXEMPLO: $\frac{51}{6} - 8 = \frac{51}{6} - \frac{48}{6} = \frac{3}{6}$

ou

$$\frac{51}{6} - 8 = \frac{51}{6} - \frac{8 \times 6}{6} = \frac{51 - 8 \times 6}{6} = \frac{3}{6}$$

Neste caso calculamos o numerador do resultado fazendo: $8 \times 6 = 48$; $51 - 48 = 3$: o numerador será 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Efetue:

$2 - \frac{1}{3}$ $\frac{17}{5} - 3$ $1 - \frac{3}{8}$ $\frac{27}{6} - 4$

$4 - \frac{1}{9}$ $\frac{24}{5} - 4$ $2 - \frac{2}{5}$ $\frac{19}{5} - 3$

$1 - \frac{4}{7}$ $\frac{17}{7} - 2$

92. 5.º CASO — *Subtração de números mistos.*

1.º PROCESSO — REGRA: *Reduzem-se os números mistos a frações impróprias e subtraem-se as frações resultantes.*

EXEMPLOS:

$$3\frac{1}{4} - 2\frac{3}{4} = \frac{13}{4} - \frac{11}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3} - \frac{5}{2} =$$

$$= \frac{34}{6} - \frac{15}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

2.º PROCESSO — REGRA: *Subtraem-se separadamente os inteiros e as frações e somam-se os resultados. Caso a fração minuendo seja menor que o subtraendo, tira-se uma unidade á parte inteira e soma-se á fração minuendo para se poder efetuar a subtração das frações.*

EXEMPLOS:

$$\text{I)}\quad 5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = 5 - 2 + \underset{(2)}{\frac{2}{3}} - \underset{(3)}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 3 + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$\text{II)}\quad 4\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6} = 4 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$$

$$= 3 + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = 2 + 1 + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} =$$

$$= 2 + \frac{10}{6} - \frac{5}{6} = 2 + \frac{5}{6} = 2\frac{5}{6}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 Efetue:

$$5\frac{1}{3} - 2\frac{4}{9} \qquad 2\frac{1}{5} - 1\frac{1}{3} \qquad 7\frac{1}{2} - 4\frac{3}{4}$$

$$3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} \qquad 3\frac{4}{5} - 2\frac{1}{5} \qquad 3\frac{1}{8} - 1\frac{3}{4}$$

2 — Efetue:

$$5\frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$$

MULTIPLICAÇÃO

93. A definição geral de multiplicação é: *Multiplicação é a operação que tem por fim, sendo dados dois números, determinar um terceiro que se forme do primeiro como o segundo se formou da unidade.*

EXEMPLO: 7×3. Temos que obter um número que se forme de 7 como 3 se formou de 1. Como 3 se formou de 1 juntando-se $1 + 1 + 1$, o produto tem de se formar de 7 juntando-se $7 + 7 + 7$.

Quando o multiplicador é inteiro, repete-se o multiplicando como parcela tantas vêzes quantas são as unidades do multiplicador.

94. 1.º CASO — *Multiplicação de uma fração por um inteiro e vice-versa.*

REGRA: *Multiplica-se o inteiro pelo numerador e dá-se o mesmo denominador.*

$$\frac{3}{7} \times 4 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} =$$

$$= \frac{3 + 3 + 3 + 3}{7} = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}$$

Podemos dizer também: Multiplicar $\frac{3}{7}$ por 4 é fornar $\frac{3}{7}$ quatro vêzes maior, o que fazemos multiplicando o numerador por 4.

Observação: — *Quando o denominador for divisível pelo inteiro, podemos conservar o numerador e dividir o denominador pelo inteiro.*

$$\frac{7}{8} \times 4 = \frac{7}{8 \div 4} = \frac{7}{2}$$

A fração ficou 4 vêzes maior porque, conforme vimos antes, quando dividimos o denominador de uma fração por um número, a fração fica multiplicada por êsse número.

A multiplicação de um inteiro por uma fração obedece à mesma regra.

$3 \times \frac{4}{5}$. Como $\frac{4}{5}$ se formou da unidade tomando-se 4 vêzes a quinta parte da unidade, o produto tem de se derivar de 3 tomando-se 4 vêzes a quinta parte de 3. Ora, a quinta parte de 3 é $\frac{3}{5}$; 4 vêzes $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 4}{5}$. Logo:

$$3 \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9 \div 3} = \frac{4}{3}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue:

$\frac{3}{7} \times 5$ $\qquad \frac{3}{5} \times 8$

$\frac{5}{27} \times 3$ $\qquad \frac{5}{8} \times 2$ $\qquad \frac{7}{12} \times 3$

2 — Efetue:

$3 \times \frac{1}{8}$ $\qquad 6 \times \frac{2}{5}$

$4 \times \frac{2}{7}$ $\qquad 7 \times \frac{1}{9}$

3 — Efetue por simplificação:

$4 \times \frac{1}{8}$ $\qquad 10 \times \frac{2}{5}$ $\qquad 2 \times \frac{3}{4}$

$\frac{1}{6} \times 2$ $\qquad 2 \times \frac{1}{8}$ $\qquad \frac{5}{14} \times 7$

$2 \times \frac{1}{2}$ $\qquad 9 \times \frac{2}{3}$ $\qquad 4 \times \frac{3}{8}$

95. 2.º caso — *Multiplicação de frações.*

Regra: *Multiplicam-se os numeradores, multpilicam-se os denominadores e dividem-se os resultados.*

Exemplo: $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8} = \frac{21}{40}$

O produto tem de ser 7 vêzes a oitava parte de $\frac{3}{5}$. Ora $\frac{1}{8}$ de $\frac{3}{5}$ é $\frac{3}{5 \times 8}$; logo os $\frac{7}{8}$ de $\frac{3}{5}$ valerão 7 vêzes mais ou $\frac{3 \times 7}{5 \times 8}$.

Efetuemos agora o produto $\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{10}{49}$ indicando os cálculos:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} \times \frac{10}{49} = \frac{3 \times 7 \times 10}{5 \times 9 \times 49}$$

Antes de efetuar os produtos indicados podemos simplificar em ambos os têrmos os fatôres comuns, 3, 5 e 7; teremos:

$$\frac{3 \times 7 \times 10}{5 \times 9 \times 49} = \frac{1 \times 1 \times 12}{1 \times 3 \times 7} = \frac{2}{21}$$

Sendo assim, podemos simplificar êsses fatôres antes de efetuarmos o produto, e teremos:

$$\overset{1}{\underset{1}{\frac{\cancel{3}^{(3)}}{\cancel{5}^{(1)}}}} \times \overset{1}{\underset{3}{\frac{\cancel{7}^{(7)}}{\cancel{9}^{(3)}}}} \times \overset{2}{\underset{7}{\frac{\cancel{10}^{(10}}{\cancel{49}^{(7)}}}} = \frac{2}{21}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Efetue

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{7} \times \frac{1}{5} \times \frac{9}{4}$

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \times \frac{13}{11}$

2 — Efetue, simplificando, antecipadamente, as multiplicações:

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{12}$ $\qquad$ $\frac{2}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{13}{11}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{7}$

$\frac{1}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{10}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{8}{14} \times \frac{7}{12} \times \frac{1}{2}$

96. 3.º CASO — *Multiplicação de números mistos.*

REGRA: *Reduzem-se os números mistos a frações impróprias e multiplicam-se as frações resultantes.*

EXEMPLOS:

$$2\frac{3}{5} \times 1\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{13}{3}$$

$$4\frac{1}{3} \times 2\frac{5}{6} = \frac{13}{3} \times \frac{17}{6} = \frac{221}{18}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Efetue:

$3\frac{1}{8} \times 4\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \times 2\frac{6}{9}$

$1\frac{2}{5} \times 2\frac{2}{5}$ $\qquad$ $5\frac{2}{6} \times \frac{3}{8}$

97. OBSERVAÇÃO — *Dois números são inversos um do outro quando o seu produto é igual à unidade.* Assim, $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$ são números inversos porque o seu produto é 1:

$$\frac{5}{7} \times \frac{7}{5} = 1$$

Para se obter o inverso de uma fração troca-se o numerador pelo denominador e vice-versa; o inverso de um número inteiro se obtém considerando o inteiro com denominador 1 e trocando-se a seguir o numerador pelo denominador e vice-versa.

EXEMPLO: Os inversos de $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{4}$ e 3 são respectivamente: $\frac{5}{4}$, 4 e $\frac{1}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Quais os inversos de 1, 3, $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{7}$?

2 — Se dois números a e b são inversos, qual é o seu produto?

3 — Some 4 ao seu inverso.

4 — Em que caso o inverso de um número inteiro é igual a êsse número?

5 — O inverso de uma fração pode ser um número inteiro? Quando?

DIVISÃO

98. 1.º CASO — *Divisão de uma fração por um inteiro.*

REGRA: *Se o numerador é divisível pelo inteiro, conserva-se o denominador e divide-se o numerador pelo inteiro; se o numerador não for divisível pelo inteiro, conserva-se o numerador e multiplica-se o inteiro pelo denominador.*

EXEMPLOS:

I) $\frac{12}{5} \div 3$. Dividir $\frac{12}{5}$ por 3 equivale a tornar $\frac{12}{5}$, 3 vêzes menor o que obtemos dividindo o numerador por 3:

$$\frac{12}{5} \div 3 = \frac{12 \div 3}{5} = \frac{4}{5}$$

II) $\frac{7}{4} \div 3$. Dividir $\frac{7}{4}$ por 3 é tornar $\frac{7}{4}$ três vêzes menor, o que obtemos multiplicando o denominador por 3:

$$\frac{7}{4} \div 3 = \frac{7}{4 \times 3} = \frac{7}{12}$$

99. 2.º CASO — *Dividir um inteiro por uma fração.*

REGRA: *Multiplica-se o inteiro pela fração invertida.*

EXEMPLO: $7 \div \frac{5}{6} = 7 \times \frac{6}{5} = \frac{42}{5}$

7 tem de ser os $\frac{5}{6}$ do quociente; logo, $\frac{1}{6}$ do quociente é $7 \div 5$ ou $\frac{7}{5}$, e os $\frac{6}{6}$ do quociente, ou o quociente todo, serão $\frac{7 \times 6}{5}$.

100. 3.º CASO — *Divisão de duas frações.*

REGRA: *Multiplica-se a fração dividendo pela fração divisora invertida.*

EXEMPLO: $\frac{5}{6} \div \frac{2}{3}$

$\frac{5}{6}$ têm de ser os $\frac{2}{3}$ do quociente, logo $\frac{1}{3}$ do quociento é $\frac{5}{6} \div 2$ ou $\frac{5}{6 \times 2}$, e os $\frac{3}{3}$ do quociente, ou o quociente, serão $\frac{5 \times 3}{6 \times 2}$:

$$\frac{5}{6} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{12}$$

De um modo geral podemos dizer que para dividirmos um inteiro por uma fração, uma fração por um inteiro, ou duas frações, multiplicamos o dividendo pelo divisor invertido.

EXEMPLOS:

$$2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{5}{6} \div 4 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

OBSERVAÇÃO — *Tomar a metade, a terça parte, a quarta*

OBSERVAÇÃO — Tomar a metade, a terça parte, a quarta parte, etc., de uma fração é dividir essa fração por 2, 3, 4, etc., respectivamente, ou multiplicá-la por $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc.

EXEMPLO: A metade de $\frac{3}{5}$ é

$$\frac{3}{5} \div 2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Efetue:

$\frac{9}{7} \div 3 \qquad \frac{10}{13} \div 2 \qquad \frac{14}{9} \div 7 \qquad \frac{18}{23} \div 3$

$\frac{3}{5} \div 2 \qquad \frac{4}{7} \div 3 \qquad \frac{3}{7} \div 2 \qquad \frac{7}{9} \div 4 \qquad \frac{3}{8} \div 2$

2 — Efetue:

$4 \div \frac{1}{6} \qquad 5 \div \frac{1}{8} \qquad 3 \div \frac{3}{4}$

$2 \div \frac{1}{6} \qquad 3 \div \frac{2}{8} \qquad 4 \div \frac{1}{7}$

3 — Efetue:

$\frac{2}{3} \div \frac{1}{9} \qquad \frac{2}{5} \div \frac{1}{7} \qquad \frac{3}{5} \div \frac{1}{8}$

$\frac{2}{6} \div \frac{5}{7} \qquad \frac{2}{7} \div \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{8} \div \frac{3}{5}$

$\frac{3}{8} \div \frac{4}{6} \qquad \frac{3}{7} \div \frac{1}{5}$

4 — Tome as metades de $\frac{8}{9}$ e $\frac{10}{15}$.

5 — Multiplique a fração $\frac{3}{5}$ por 6 e divida o resultado por 2.

101. 4.º CASO — *Divisão de números mistos.*

REGRA: *Reduzem-se os números mistos a frações impróprias e dividem-se as frações resultantes.*

EXEMPLO:

$$2\frac{3}{5} \div 1\frac{7}{10} = \frac{13}{5} \div \frac{17}{10} = \frac{13}{5} \times \frac{10}{17} = \frac{26}{17}$$

EXERCICIOS PROPOSTOS

1 — Efetue:

$1\frac{3}{5} \div 2\frac{1}{3} \qquad 4\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4}$

— Efetue:

$5\frac{2}{3} \times 1\frac{4}{17} \div 1\frac{1}{2}$

FRAÇÃO DE FRAÇÃO

102. Suponhamos que temos de calcular $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ da unidade. Como fazer?

$\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ da unidade podem ser obtidos tomando-se duas quintas partes de $\frac{3}{4}$, isto é, tomando-se duas partes de $\frac{3}{4}$ divididos em 5 partes. Ora, a 5.ª parte de $\frac{3}{4}$ é $\frac{3}{4 \times 5}$ e duas dessas partes serão $\frac{3 \times 2}{4 \times 5}$ Logo, $\frac{1}{5}$ de $\frac{3}{4}$ = $= \frac{3}{4 \times 5}$:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

REGRA: *Para se achar uma fração de outra fração, multiplicam-se as duas frações.* A preposição *de* pode ser substituída pelo sinal $\times$.

EXEMPLO: $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

Anàlogamente, teremos:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 9 = \frac{2}{5} \times 9 = \frac{18}{5}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1 — Calcule: $\frac{2}{3}$ de $\frac{6}{7}$ $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{9}$ $\frac{5}{6}$ de 9.

2 — Calcule:

$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de 9

$\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$ de 64

3 — Efetue, cancelando: $\frac{3}{7}$ de 21 $\qquad$ $\frac{2}{3}$ de 9

$\frac{5}{8}$ de 40 $\qquad$ $\frac{3}{4}$ de 24 $\qquad$ $\frac{3}{8}$ de Cr$ 40,00

4 — Quanto valem os $\frac{8}{5}$ de Cr$ 20,000? R.: Cr$ 12,00.

5 — Quanto custarão $\frac{3}{4}$ de uma peça de fazenda avaliada em Cr$ 80,00? R.: Cr$ 60,00.

6 — Quanto se pagará a um empregado por $\frac{2}{3}$ de um mês de trabalho, sabendo-se que seu ordenado mensal é de 600 cruzeiros?....... R.: Cr$ 400,00.

7 — Uma turma tem 44 alunos. Estão presentes $\frac{9}{11}$ dos alunos. Quantos alunos faltaram' R.: 8.

8 — Obtem-se o número $\frac{2}{5}$ quando se toma a fração de $\frac{7}{9}$. (Instituto de Educação — Exame de Admissão) — 1945). R.: $\frac{18}{35}$.

EXERCÍCIOS DE RECAPITULAÇÃO

1 — Divido uma unidade em 7 partes iguais e tomo 5; que fração tenho?
2 — Que é uma fração decimal?
3 — Que representa a fração $\frac{7}{9}$?
4 — Que exprimem as frações $\frac{6}{11}$ e $\frac{3}{8}$?
5 — Que fração do dia são 5 horas?
6 — Que fração da semana são 4 dias?
7 — Qual o denominador de uma fração que representa sextos da unidade?
8 — Por que o *denominador* das frações ordinárias tem êsse nome?
10 — Quantos terços formam 4 unidades?
11 — Complete $3 = \frac{\quad}{5}$ $7 = \frac{\quad}{4}$ $2 = \frac{\quad}{8}$ $12 = \frac{\quad}{3}$
12 — Reduza 4 inteiros a oitavos e 7 unidades a quintos.
13 — Se quizer dividir um bôlo por seis meninos, que fração darei a cada um? E se forem 2 bôlos? E se forem 5 bôlos?
14 — Quantas unidades há em $\frac{\quad}{7}$?
15 — Aqui estão presentes 30 alunos dos 40 que deveriam comparecer. Que fração da turma faltou?
16 — Extráia os inteiros de $\frac{15}{7}$, $\frac{85}{9}$, $\frac{40}{6}$, $\frac{38}{14}$, e $\frac{142}{23}$
17 — Transforme em número misto: $\frac{18}{7}$, $\frac{46}{15}$, $\frac{79}{20}$, $\frac{53}{4}$, $\frac{110}{9}$, $\frac{99}{32}$.
18 — Quantos quintos há em 7 unidades?
19 — Qual é a fração 4 vêzes menor que 3?
20 — Dividindo-se 7 por 9, qual o quociente exato?
21 — Que fração do cento representam 60 laranjas?
22 — Que fração da grosa representam 100 lápis? (uma grosa tem 12 dúzias).
23 — Qual é a fração que é contida na unidade 6 vêzes?
24 — Que fração posso repetir 4 vêzes para formar a unidade?
25 — Qual a fração 7 vêzes menor que a unidade?
26 — Quanto falta a $\frac{3}{7}$ para formar uma unidade?

27 — Complete

$$1 = \frac{4}{11} + \frac{}{11} \qquad 1 = \frac{6}{8} + \frac{}{8} \qquad 1 = \frac{3}{5} + \frac{}{5}$$

$$2 = \frac{3}{5} + \frac{}{5} \qquad 4 = \frac{4}{7} + \frac{}{7}$$

28 — Quanto devo tirar da unidade para ter $\frac{7}{12}$?

29 — Que fração devo acrescentar à unidade para ter $\frac{9}{6}$?

30 — Dê forma fracionária ao número 3, tomando 4 para denominador.

31 — Dê forma fracionária aos números 7 e 8.

32 — Das frações $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{8}{8}$, quais as próprias e quais as impróprias.

33 — Que é uma fração imprópria?

34 — Escreva duas frações menores que a unidade.

35 — Quantos quartos há em 3 inteiros e $\frac{1}{4}$?

36 — Transforme em frações impróprias os números mistos

$$4\frac{3}{7}, \quad 2\frac{5}{9}, \quad 11\frac{1}{6}.$$

37 — Um leiteiro distribue entre seus freguezes 52 quartos de litro de leite e 26 litros. Quantos litros ao todo distribue? R.: 39.

38 — Quais são os $\frac{3}{8}$ de Cr$ 30,00? R.: Cr$ 15,00.

39 — Quanto valem os $\frac{3}{8}$ de Cr$ 24,00? R.: Cr$ 9,00.

40 — Um operário fez os $\frac{3}{4}$ de uma trabalho contratado por..... Cr$ 720,00 Quanto ganhou? R.: 540,00.

41 — Quanto se deve a um operário por $\frac{2}{3}$ de um dia de serviço, a Cr$ 21,00 por dia? R.: Cr$ 14,00.

42 — Que horas são depois de passarem os $\frac{3}{4}$ do dia? R.: 18*h*.

43 — Qual é o preço dos $\frac{5}{8}$ de uma peça de fazenda de 24 metros a Cr$ 7,50 o metro? R.: Cr$ 112,50.

44 — Devia Cr$ 465,00; dei já $\frac{3}{5}$ desta quantia. Quanto fica devendo ainda? R.: Cr$ 186,00.

45 — $\frac{2}{5}$ de um terreno valem Cr$ 24 000,00. Qual o valor do terreno todo? R.: Cr$ 60 000,00.

46 — $\frac{2}{3}$ de uma peça de fita valem Cr$ 30,00. Qual o preço da peça inteira’ Cr$ 40,00.

47 — $\frac{1}{8}$ de um caixão de laranjas custa Cr$ 15,00. Qual o preço do caixão todo? R.: Cr$ 45,00.

48 — Empregaram-se 30 caixotes para despachar os $\frac{5}{6}$ de uma colheita de laranjas. Quantos caixotes teriam sido precisos para despachar a colheita inteira? R.: 36.

49 — Paguei os $\frac{3}{4}$ de uma dívida e devo ainda Cr$ 4 200,00. Qual era a dívida? R.: Cr$ 16 800,00.

50 — Para ladrilhar $\frac{5}{7}$ de um pátio empregaram 49 360 ladrilhos. Para ladrilhar $\frac{3}{8}$ do mesmo pátio, quantos ladrilhos iguais serão necessários? Pede-se a verificação. (Instituto de Educação — Exame de Admissão — 1939). R.: 25 914.

51 — Já fiz os $\frac{3}{5}$ e os $\frac{2}{9}$ de um trabalho. Que resta fazer? R.: $\frac{8}{45}$.

52 — Depois de ter feito $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ de um trabalho, que fração ficará ainda por fazer? R.: $\frac{1}{6}$.