Escola

Politécnica

da Universidade de

São Paulo.

Aluno — David Carneiro Junior

do curso de

Engenheiros mecânicos e eletricis-
tas.

Caderno de Cálculo.

Amor,
Ordem,
Progresso.

1945

Cálculo vetorial.

Aulas do professor Dr. Camargo.

6/4/45.

__Vetôr.__ Consideremos o conjunto de pontos entre dois outros __A__ e __B__, pontos êstes que possam ser orientados. Sendo escolhida uma unidade, o segmento dado (conjunto dos pontos) terá uma medida, que será representada por um número real.

Podemos supôr vários segmentos equipolentes a este dado __AB__, isto é, que tenham igual sentido, direção e numero real. Dizemos então que estes segmentos possuem o mesmo __vetôr__.

$$\text{vetor } \vec{v} \begin{cases} \text{direção} \\ \text{sentido} \\ \text{numero real (modulo } |\vec{v}|) \end{cases}$$

Dado um ponto, para se obter um outro, soma-se a este um certo vetor. Assim,

$A + \vec{v} = B$; isto levou Grassmann a adotar a notação seguinte para a representação dos vetores: – $\vec{v} = B - A$.

Indica-se o modulo: – $|\vec{v}| = |B - A|$

Por extensão, $A + \vec{v} = A$, representa um vetor nulo, cujo modulo é nulo e a direção e o sentido são arbitrarios.

Vetor – é um número absoluto associado a uma direção e a um sentido.

Dois vetôres são iguais quando têm mesma grandeza, direção e sentido e indica-se $\vec{a} = \vec{b}$. Em particular, vetores nulos são iguais.

Produto de 1 nº real por 1 vetôr $\vec{v} = m\vec{v}$

É um vetor de igual direção á de $\vec{v}$, de modulo igual ao produto do valôr absoluto de m pelo modulo de $\vec{v}$ e cujo sentido varía da seguinte maneira: –

Si $m > 0$ → sentido igual ao de $\vec{v}$

Si $m < 0$ → " oposto ao " "

Si $m = 0$ → " indeterminado.

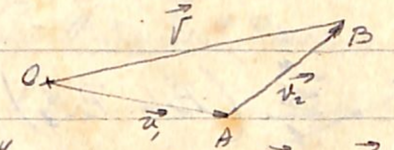
$|m.\vec{v}| = |m|.|\vec{v}|$

Considerando-se n não nulo e real, e ainda $m = \frac{1}{n}$, será $m\vec{v} = \frac{1}{m}.\vec{v} = \frac{\vec{v}}{m}$

—x—

Adição e subtração entre vetores.

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Tomemos um ponto arbitrario O. Construamos $A = O + \vec{v}_1$ e $B = A + \vec{v}_2$



"Por definição", $B - O = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$B = O + \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

A soma será então $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{V}$.

Construamos ainda $A' = O + \vec{v}_2$ e $B' = A' + \vec{v}_1$; daqui resulta $B = O + \vec{v}_2 + \vec{v}_1$, $B - O = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$, donde $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$, o que indica ser a soma de vetores uma operação comutativa.

Sejam os pontos $P_1 = O + \vec{v}_1$

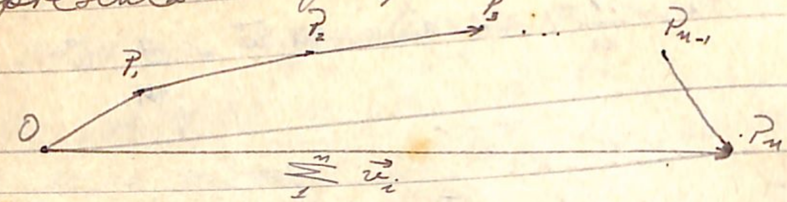
$P_2 = P_1 + \vec{v}_2$ $(i = 1, 2, 3, \dots n)$

$\vdots$

$P_n = P_{n-1} + \vec{v}_i$

Representa-se $\sum_1^n \vec{v}_i = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$

I, representa-se graficamente:-



——— × ———

22/5/45.

Propriedade associativa da soma de vetores.

$$\sum_1^n \vec{v}_i = \sum_1^n (P_i - P_{i-1})$$

——— × ———

Sejam por exemplo, 5 vetores, e façamos

$$\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5$$

Temos:- $\sum_1^3 \vec{v}_i + \sum_4^5 \vec{v}_i = \vec{V}$, donde, generalizando:-

$$\sum_{i=1}^{p+q} \vec{v}_i = \sum_1^p \vec{v}_i + \sum_{p+1}^{p+q} \vec{v}_i$$

——— × ———

Subtração de vetores.

A diferença entre dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é:-

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2).$$

Por definição, a diferença entre dois vetores é a soma do primeiro com o oposto ao segundo. Fica assim a subtração reduzida a um caso de soma.

Teoremas.

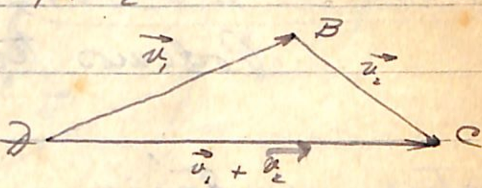
1) O modulo da soma de dois vetores é menor ou igual á soma dos modulos dos vetores.

Sejam $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, tais que

$B = A + \vec{v}_1$

$C = B + \vec{v}_2$ e $C - A = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Pela observação do △ABC, tiramos:-



$AC \leq AB + BC$, o que dá:- $\text{mod}(C-A) \leq \text{mod.}(B-A) + \text{mod.}(C-B)$

Demonstra-se de modo identico que "o modulo da diferença entre dois vetôres é igual ou maior que a diferença entre os seus modulos" (II).

No △ABC temos:- $AC \geq BC - AB$, logo, $\text{mod.}(C-A) \geq \text{mod.}(C-B) - \text{mod.}(B-A)$

ou:- $C - A = (C-B) - (A-B)$ ou

$$|C-A| \geq |C-B| - |A-B|.$$

[illegible]

Expressões lineares de vetores.

Teorema 1.

Dados dois vetores paralelos, é sempre possível exprimir-se um, linearmente em função do outro.

Sejam dois vetores não nulos $\vec{v}$ e $\vec{u}$.

$\boxed{\text{versor } \vec{v} = + \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$

Podemos ter $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ e $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, que são vetores unitários. Sendo paralelos, têm igual direção; podendo ser iguais e opostos, então: —

$\vec{v} = \pm \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}\vec{u} \longrightarrow \vec{v} = x.\vec{u}$.

Esta expressão se traduz dizendo que $\vec{v}$ é expressão linear de $\vec{u}$.

Se $\vec{u}$ fosse nulo, x seria zero para $\vec{u}$ não nulo.

Esta expressão é ~~nula~~ única, pois se outra houvesse, teríamos $\vec{v} = x'.\vec{u}$, as quais subtraídas dariam $0 = (x - x').\vec{u}$,

mas $\vec{u} \neq 0 \longrightarrow x = x'$.

Teorema 2.

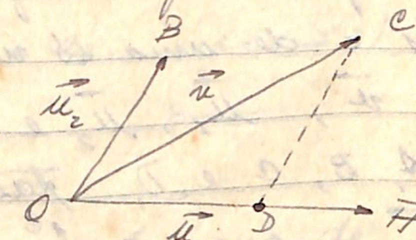
Dados três vetores coplanares não paralelos, é sempre possível exprimir-se um em função linear dos outros dois, e de uma só maneira.

Com efeito sejam $\vec{v}$, $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, vetores coplanares não paralelos. Se construirmos a partir de um ponto O o ponto A e os pontos B e C, tais —

$O + \vec{u}_1 = A$

$O + \vec{u}_2 = B$

$O + \vec{v} = C$



teremos no mesmo plano, quatro pontos.

A paralela tirada por C a B − O, vai determinar D, que encontra A − O, teremos

$C - O = (D - O) + (C - D)$, ora, D − O é paralelo a A − O, logo,

$C - O = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$ ou

$\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$

Esta é a única expressão, pois se outra existisse: $\vec{v} = x_1' \vec{u}_1 + x_2' \vec{u}_2$ as quais subtra das dariam

$$(v_1 - v_1')\vec{u}_1 = (v_2 - v_2')\vec{u}_2,$$ o que é contrário à hipótese, pois $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ não são paralelos.

$v_1 - v_1' = 0$ e $v_2 - v_2' = 0$, logo $v_1 = v_1'$ e $v_2 = v_2'$.

Teorema 3.

Dados quatro vetores não coplanares, é sempre possível exprimir um em função linear dos outros três e de uma só maneira.

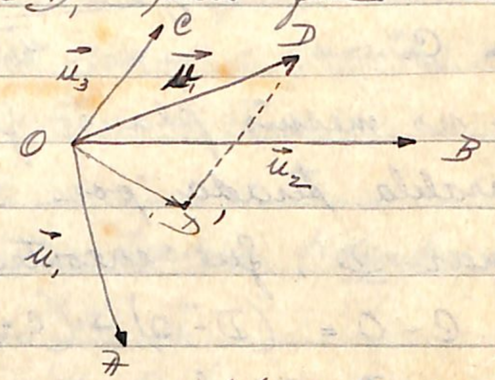
Sejam $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$; construamos os pontos A, B, C e D, tais que:—

$A = O + \vec{u}_1$

$B = O + \vec{u}_2$

$C = O + \vec{u}_3$ e

$D = O + \vec{v}$



Por D tiramos a paralela a OC, que dará o ponto D'.

Teremos:— $D - O = (D' - O) + (D - D')$, ora, $D - O = \vec{v}$, $D' - O$ é igual ao vetor coplanar aos outros dois $B - O$ e $A - O$.

Logo — $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{u}_1 + v_2 \cdot \vec{u}_2 + v_3 \cdot \vec{u}_3$.

É único esse terno, pois se outro existisse, teríamos

$$\vec{v} = v_1' \vec{u}_1 + v_2' \cdot \vec{u}_2 + v_3' \cdot \vec{u}_3,$$ as quais por subtração dariam:—

$$0 = (v_1 - v_1')\vec{u}_1 + (v_2 - v_2')\vec{u}_2 + (v_3 - v_3')\vec{u}_3,$$ o que indicaria a coplanaridade dos três vetores, e isto é absurdo, logo o primeiro membro é igual ao segundo e

$$v_i = v_i' \quad (i = 1, 2, 3).$$ CQD

24/5/45.

Expressão cartesiana de vetor.

Seja $\vec{u}_i$, para $i = 1, 2, 3$, um terno de vetores não coplanares, que chamaremos de vetores base. Qualquer vetor pode ser expresso em função dos vetores base desde que esses não sejam coplanares.

Então:— $\vec{v} = v_1 \bar{u}_1 + v_2 \bar{u}_2 + v_3 \bar{u}_3$.

v_i para $i = 1, 2, 3$, são as coordenadas do vetor no sistema de base $\vec{u_i}$. Tomemos um ponto P e um ponto fixo O. Teremos que $P - O = v_1 \vec{u}_1 + v_2 \vec{u}_2 + v_3 \vec{u}_3$.

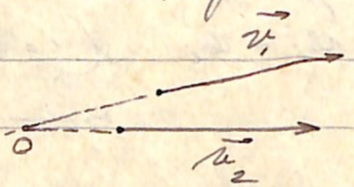
O ponto P tem como coordenadas v_1, v_2 e v_3

no sistema analítico (O, u_1, u_2, u_3)

Produto de vetores.

a) Produto escalar — $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Lê-se $\vec{v}_1$ ~~vetoria~~ escalar $\vec{v}_2$.

Nota — Angulo de dois vetores é o angulo definido de 0 a π, de duas semirretas passando por um ponto O, paralelas aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.



$0 \leq (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \leq \pi$

b) Produto vetorial — $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, lê-se $\vec{v}_1$ vetorial $\vec{v}_2$. É um vetor de direção perpendicular a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, modulo igual ao produto dos modulos dos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e pelo seno do angulo que êles formam.

Vejamos o sentido — Sejam $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, respectivamente os vetores e seu vetor produto vetorial. Indica-se com o polegar da mão direita o vetôr $\overline{v_2}$, com o indicador o vetor $\vec{v}_2$, o medio, em angulo reto dará o sentido do vetor produto.

Vejamos dois vetores paralelos ou perpendiculares:—

1) Perpendiculares — Será $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \pi/2 \to \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$. Então se o produto escalar de dois vetores é nulo, êles são perpendiculares.

2) Paralelismo — Será $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \to \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0$. Se o produto vetorial de dois vetores é nulo, estes são paralelos.

———— × ————

Terno fundamental — dá-se esta denominação a três vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, triortogonais, unitarios, orientados positivamente.

Gozam de algumas propriedades:—

$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 1$

$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$ e mais

$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{k} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{i} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{j} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{k} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$

Comutatividade.

a) Do produto escalar - $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 =$
$= |\vec{v}_1| |\vec{v}_2| \cdot \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_2| . |\vec{v}_1| . \cos(\vec{v}_2, \vec{v}_1) =$
$= \vec{v}_2 \times \vec{v}_1$. CQD

b) O produto vetorial é anti-comutativo.

Com efeito, $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = - \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$; isto porque $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ e $\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$ são vetores opostos, com igual direção, mesmo modulo, tendo sentidos opostos.

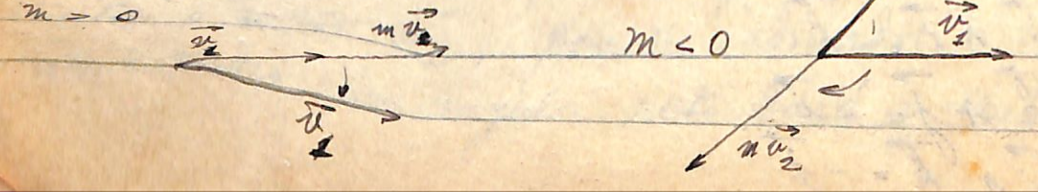
$$\left.\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 & \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \end{array}\right\} \text{Regra dos Dedos!}$$

x

Associatividade -

$\vec{v}_1 \times m\vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |m \vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$
$= |\vec{v}_1| . |m| . |\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$
* $= |m\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$
$= m |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = m\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$

Vejamos porque foi feita a transformação * :-



O produto vetorial goza da mesma propriedade, isto é: - $\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.

A direção é sempre normal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, isto por serem $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $m\vec{v}_1$ e $m\vec{v}_2$ paralelos ao mesmo plano (coplanares); segue-se logicamente que a direção normal a este plano é a mesma. Quanto ao modulo:-

$|\vec{v}_1 \wedge m\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| . |m\vec{v}_2| . \text{sen}(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$
$= |\vec{v}_1| . |m| . |\vec{v}_2| . \text{sen}(\vec{v}_1, m\vec{v}_2) =$
$= |m . \vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \text{sen}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) =$
$= |\vec{v}_2 \wedge m\vec{v}_1| = m\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$

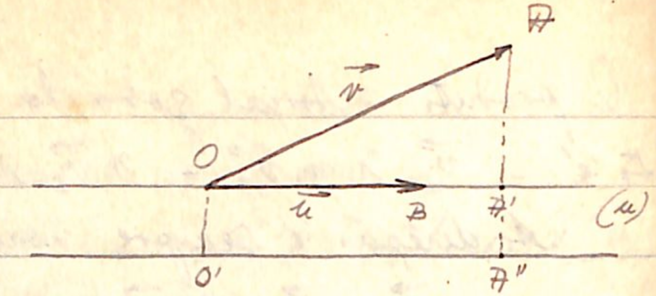
Vejamos o sentido - quando fôr $m = 0$, não há dúvida - $\vec{v}_1$, $m\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $m\vec{v}_2$ são paralelos e de igual direção.

Sendo $m < 0$ → dois vetores mudam de sentido e não há alteração. O produto vetorial goza da propriedade associativa.

Significação geométrica

Consideremos $\vec{v} \times \vec{u}$. Tomemos $|\vec{u}| = 1$ → $\vec{v} \times \vec{u} = |\vec{v}| \cos(\vec{v}, \vec{u})$. Construamos $A = O + \vec{v}$ e

$B = O + \vec{u}$



Resulta que —

$\vec{v} \times \vec{u} = OA' =$

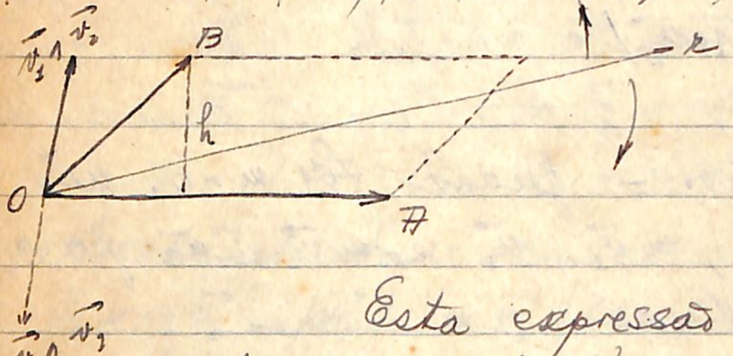
$= \text{proj}_u\, OA.$

Donde se conclue que o produto escalar é uma projeção. Se $\vec{u}$ não fôr unitário, teremos o caso generalizado.

— x —

Chamemos $A = O + \vec{v}_1$ e $B = O + \vec{v}_2$ →

$|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\,\text{sen}\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \overline{OA}.h$



Esta expressão OA. h, pela observação da figura nos mostra que o produto vetorial representa a area do paralelogramo construído sobre dois segmentos representativos dos vetores dados.

O produto vetorial representa uma área orientada.

D.ſ.

25/5/45

Distributividade do produto escalar em relação á soma.

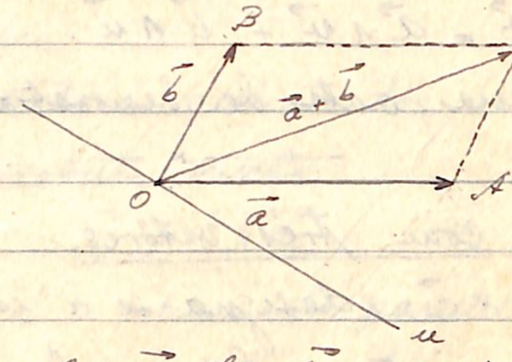
$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} + \vec{b} \times \vec{v}$

Sejam

$A = O + \vec{a}$

$B = O + \vec{b}$

$C = O + (\vec{a} + \vec{b})$



Consideremos o versor $\vec{u}$ de $\vec{v}$; a partir de um ponto O tracemos o eixo u de mesma orientação que $\vec{u}$. A projeção sôbre $\vec{u}$ de OB é igual á projeção de AC e igual a $\vec{b} \times \vec{u}$.

A projeção AO sobre u é $\vec{a} \times \vec{u}$

" " CO " " " $(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{u}$.

Um teorema elementar da teoria das projeções nos diz que —

$\text{proj}_u\, OC = \text{proj}_u\, OA + \text{proj}_u\, AC$, o que nos dá

$(\vec{a} + \vec{b})\,\vec{u} = \vec{a} \times \vec{u} + \vec{b} \times \vec{u}.$

Multipliquemos esta relação por $|\vec{v}|$ —

$\vec{a} \times |\vec{v}|\,\vec{u} + \vec{b} \times |\vec{v}|\,\vec{u} = (\vec{a} + \vec{b}) \times |\vec{v}|\,\vec{u}$, donde

$\vec{a} \times \vec{v} + \vec{b} \times \vec{u} = (\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{u}$, isto porque $|\vec{u}| . \vec{u} = \vec{v}$.

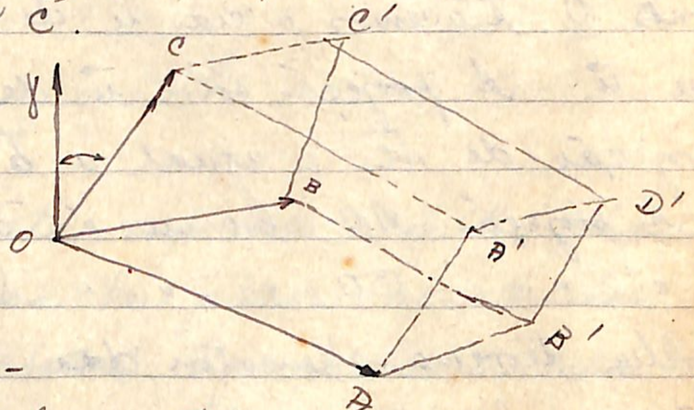
— × —

A propriedade distributiva em relação à soma, do produto vetorial é verdadeira, isto é, $(\vec{a}+\vec{b}) \wedge \vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{v} + \vec{b} \wedge \vec{u}$. Vejamos, porem outros teoremas antes de demonstra-la.

— × —

<u>Produtos com três vetores.</u>

$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \times \vec{c}$ designa-se a esta expressão como produto mixto, a qual pode ser escrita sob a forma $\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c}$.



Construamos

$O + \vec{a} = A$

$O + \vec{b} = B$

$O + \vec{c} = C$

e mais o paralelogramo OABB'D, sobre os três vetores como arestas. Já vimos que $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{\delta}$, dá a área da face OAB'B.

$\vec{\delta} \times \vec{c} = |\vec{\delta}|.|\vec{c}|.\cos(\vec{c}, \vec{\delta}) = |\vec{\delta}|.h$, ora, isto será $|\vec{\delta}|.h = V$. No caso geral o volume poderia estar com sinal.

"O produto mixto de três vetores exprime o volume construído sobre três segmentos equipolentes aos vetores dados a partir do mesmo ponto O." O volume é dotado de um sinal ±.

<u>Propriedades.</u>

1. Uma permutação cíclica dos vetores não altera o produto mixto.

$\underbrace{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}_{a} \times \vec{v}_3 \qquad \underbrace{\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3}_{b} \times \vec{v}_1 \qquad \underbrace{\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1}_{c} \times \vec{v}_2$

O produto a é o volume do paralelepípedo de base $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$; b é o volume do paralelepípedo de base $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ e $c \rightarrow \vec{v}_3$ e $\vec{v}_2$ e os outros vetores que faltam continuam com a mesma orientação.

2. A inversão da ordem cíclica muda o sinal do produto mixto.

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$. Multipliquemos escalarmente por $\vec{v}_3 \rightarrow$

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \times \vec{v}_3$

1, 2, 3   2, 1, 3.

3. O produto não se altera pela permutação do sinal dos produtos vetorial e produto es-

calar. $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$.

Com efeito, sejam $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$; multipliquemos escalarmente por $\vec{v}_3$:

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \vec{v}_3 \times \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$, usando a propriedade associativa $\rightarrow$ $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \cdot \wedge \vec{v}_3$.

——— × ———

Voltando à propriedade distributiva em relação ao produto vetorial, teremos: —

Consideremos o vetor

$\vec{\alpha} = \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{a} \wedge \vec{c}$, multipliquemos escalarmente por um vetor constante, não nulo e arbitrário $\vec{c}_1$: —

$\vec{\alpha} \times \vec{c}_1 = \vec{c}_1 \times \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{c}_1 \times \vec{a} \wedge \vec{b} - \vec{c}_1 \times \vec{a} \wedge \vec{c}$.

Apliquemos a propriedade demonstrada: —

$c_1 \wedge [\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c}]$.

No entretanto

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = 0$, logo

$\vec{\alpha} \times \vec{c}_1 = 0$, então será $\alpha = 0 \rightarrow$

$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$. C.Q.D.

Duplo produto vetorial

Consideremos $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$. Será

$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = l\vec{v}_2 + m\vec{v}_1$. (I) Isto porque o vetor produto vetorial dado será perpendicular ao vetor $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$; como este vetor é perpendicular ao plano formado por $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, segue-se que o produto $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$ é coplanar dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$; podendo então ser representado, conforme demonstrámos atraz, como uma combinação linear deles dois.

Multipliquemos a expressão (I), escalarmente por $\vec{v}_3$: — $(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 \times \vec{v}_3 = 0$, resulta

$l\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 + m\vec{v}_1 \times \vec{v}_3 = 0$, donde

$$\frac{l}{\vec{v}_1 \times \vec{v}_3} = \frac{m}{-(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)} = c$$

Se alguma destas relações for nula, $\underline{c}$ será dada pela outra. (Consideramos o produto nulo).

$l = c(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3)$ $\quad m = -c(\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$

Substituindo estes valores em (I), virá —

$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = c[(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{v}_1]$

Este produto independe de $\underline{c}$, isto é, $\underline{c}$ é sempre igual, quaisquer que sejam os vetores considerados.

Ora, $\vec{v}_1 = \vec{a} + \vec{b}$, então

$$\left[(\vec{a}+\vec{b}) \wedge \vec{v}_2\right] \wedge \vec{v}_3 = (\vec{a} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 + (\vec{b} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3$$

Expressão esta que é ainda igual a:

$$C\left[(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{v}_3 . \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)(\vec{a}+\vec{b})\right] =$$

$$= C\left[(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{v}_1\right] \quad \text{II}$$

Suponhamos

$$(\vec{a} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = C_a\left[(\vec{a} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{a}\right]$$

e

$$(\vec{b} \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = C_b\left[(\vec{b} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{b}\right]$$

Desenvolvendo II resulta,

$$C\left[(\vec{a} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 + (\vec{b} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{a} - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{b}\right] =$$

$$= C_a\left[(\vec{a} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{a}\right] + C_b\left[(\vec{b} + \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{b}\right]$$

$$(C - C_a)\left[\overbrace{(\vec{a} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{a}}^{A}\right] =$$

$$= (C_b - C)\left[\underbrace{(\vec{b} \times \vec{v}_3)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)\vec{b}}_{B}\right]$$

As expressões A e B não são nulas, logo só podemos ter $C = C_a$ e $C_b = C$ donde $C_a = C_b = C$.

Determinemos então o valor de C: —

Suponhamos

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i} = C\left[(\vec{i} \times \vec{i})\vec{j} - (\vec{i} \times \vec{j})\vec{i}\right],$$

mas $\vec{k} \wedge \vec{i} = c\vec{j} \rightarrow \vec{j} = c\vec{j} \rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$

Segue-se que

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 =$$

$$= (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3).\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3).\vec{v}_1$$

expressão esta que nos dá o duplo produto vetorial.

×

29/5/45.

$$(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) \wedge \vec{v}_3 = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_3).\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3).\vec{v}_1$$

Se em $\frac{l}{\vec{v}_1 \times \vec{v}_3} = \frac{-m}{\vec{v}_2 \times \vec{v}_3}$, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_3 = 0$ e $\vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = 0$, fica tambem demonstrado o duplo produto vetorial.

— x —

Expressão cartesiana das operações —

Sejam

$$\vec{v}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} \qquad v_1(a_1, b_1, c_1)$$

$$v_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}.$$

Teremos para o produto escalar —

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \times \vec{v}_2 = a_1 \vec{i} \times v_2 + b_1 \vec{j} \times \vec{v}_2 + c_1 \vec{k} \times v_2 =$$

$$= a_1 \vec{i} \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) + b_1 \vec{j} \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) + c_1 \vec{k} \times (a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k}) =$$

$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$; a expressão cartesiana de $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ será então

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 =$$

$$= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Isso não deve ser senão a expressão cartesiana.

Teremos para o produto vetorial: —

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \wedge \vec{v}_2 =$$

$$= a_1 \vec{i} \wedge (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) + b_1 \vec{j} \wedge (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) + c_1 \vec{k} \wedge (\quad " \quad) =$$

$$= a_1 b_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + a_1 c_2 \vec{i} \wedge \vec{k} + b_1 a_2 \vec{j} \wedge \vec{i} + b_1 c_2 \vec{j} \wedge \vec{k} + c_1 a_2 \vec{k} \wedge \vec{i} + c_1 b_2 \vec{k} \wedge \vec{j} =$$

$$= (a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{k} + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \vec{j} + (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{i} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Expressão cartesiana do produto vetorial.

— x —

Produto misto.

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$, sendo $\vec{v}_3 = a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k}$;

como fizemos para o produto escalar: —

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \times \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nunca usar as expressões cartesianas em exercícios de calculo vetorial.

Soluçãs de algumas equações vetoriais encerrando uma só operação, isolada ou em sistema.

Vejamos antes o seguinte:—

Dados quatros vetores $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, estes últimos não coplanares ($\delta = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times \vec{u}_3$), exprimir-se o primeiro em função dos últimos consiste no seguinte:—

$\vec{v} = v_1 \vec{u}_1 + v_2 \vec{u}_2 + v_3 \vec{u}_3$; calculemos os numeros v_1, v_2 e v_3.

Multipliquemos escalarmente por $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3$ →

$\vec{v} \times \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = v_1 \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 + 0 + 0$!!

$$v_1 = \frac{\vec{v} \times \vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times \vec{u}_3} = \vec{v} \times \frac{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times \vec{u}_3}.$$

Permutando-se ciclicamente os indices resulta—

$$v_2 = \frac{\vec{v} \times \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1}{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \times \vec{u}_1} = \vec{v} \times \frac{\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1}{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 \times \vec{u}_1}$$

$$v_3 = \vec{v} \times \frac{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\delta}$$

Façamos, para simplificar:—

$\vec{\mathcal{U}}_1 = \dfrac{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\delta}$ $\vec{\mathcal{U}}_2 = \dfrac{\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1}{\delta}$ e

$\vec{\mathcal{U}}_3 = \dfrac{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2}{\delta}$; temos então um terno de vetores $\vec{\mathcal{U}}_i$ e outro terno $\vec{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$), donde resulta:—

$v_1 = \vec{v}\, \vec{\mathcal{U}}_1$, $v_2 = \vec{v}\, \vec{\mathcal{U}}_2$ e $v_3 = \vec{v}\, \vec{\mathcal{U}}_3$

generalizando—

$v_i = \vec{v}\, \vec{\mathcal{U}}_i$ ($i = 1, 2, 3$)

Substituindo os valores de v_i na relação inicial, temos

$\vec{v} = \vec{v} \times \vec{\mathcal{U}}_1 . \vec{u}_1 + \vec{v} \times \vec{\mathcal{U}}_2 . \vec{u}_2 + \vec{v} \times \vec{\mathcal{U}}_3 . \vec{u}_3$ ou

$$\vec{v} = \sum^{3} (\vec{v} \times \vec{\mathcal{U}}_i)\, \vec{u}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Vamos desde já denominar aos ternos $\vec{\mathcal{U}}_i$ e $\vec{u}_i$ de ternos recíprocos.

—×—

Propriedades dos ternos recíprocos.

1) $\vec{\mathcal{U}}_i \times \vec{u}_i = 1$. Ora, $\vec{\mathcal{U}}_1 \times \vec{u}_1 =$

$= \dfrac{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times u_3} \times \vec{u}_1 = 1$. Fazendo-se as rotações cíclicas, fica demonstrado o teorema, digo propriedade.

2) $\vec{U}_1 \times \vec{u}_2 = 0$, c/ efeito

$$\frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2}{\delta} \times \vec{u}_2 = 0 \longrightarrow \vec{U}_i \times \vec{u}_j = 0 \qquad i \neq j \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 1,2,3 \end{pmatrix}$$

— × —

5) O termo maiúsculo provem do minúsculo, como o minúsculo do maiúsculo. Ver pg. 23

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3}{\vec{U}_1 \times \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3} = \frac{\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1}{\delta} \wedge \vec{U}_3 \cdot \frac{\delta^3}{(\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \times [(\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)]}$$

$$= \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 \wedge \vec{U}_3 \cdot \frac{\delta^2}{(\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \times (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) \wedge (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)} =$$

$$= \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 \wedge \vec{U}_3 \, \frac{\delta^2}{(\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3) \times (\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1) \wedge \vec{U}_3} =$$

$$= \frac{\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times \vec{u}_3}{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3} = \vec{u}_1. \quad \text{C.Q.D.}$$

Do mesmo modo se chegaria a que

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1}{\vec{U}_1 \times \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3} = \frac{\vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1}{\Delta} \quad \text{e}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2}{\Delta}.$$

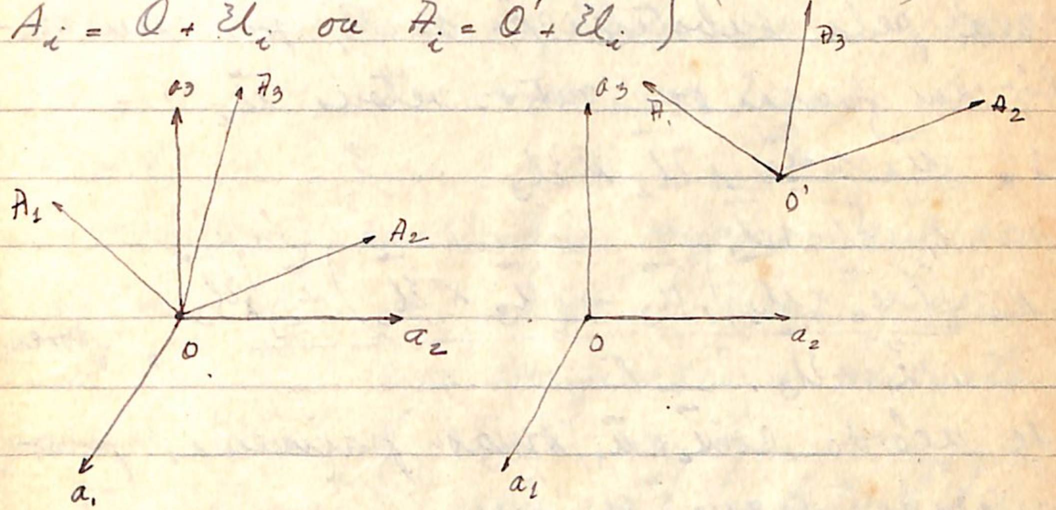
Do que ficou dito resulta que $\delta \Delta = 1$.

— × —

Geometricamente vejamos a representação geométrica desta terceira propriedade.

Sejam

$$\left.\begin{aligned} a_i &= O + \vec{u}_i \\ A_i &= O + \vec{U}_i \quad \text{ou} \quad A_i = O' + \vec{U}_i \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3)$$



Nos triedros representados acima, as arestas de um são normais às faces do outro; donde, podemos escrever genericamente:-

1) $\vec{v} = \sum_1^3 (\vec{v} \times \vec{U}_i)\, \vec{u}_i$

2) $\vec{v} = \sum_1^3 (\vec{v} \times \vec{u}_i)\, \vec{U}_i$

Identidades estas que têm muita importancia para o nosso estudo.

—— × ——

Podemos ainda demonstrar a terceira propriedade dos termos recíprocos, provando que $\delta\Delta = 1$, isto é, $\Delta = 1/\delta$.

Teremos:—

$\delta = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \times u_3$ e sendo $\Delta = \vec{\mathfrak{U}}_1 \wedge \vec{\mathfrak{U}}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_3$, virá pela substituição de $\vec{\mathfrak{U}}_1$ por seu valôr em função dos outros vetores $\vec{u}_i$:—

$$\Delta = \frac{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3}{\delta} \wedge \vec{\mathfrak{U}}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_3 \quad \therefore$$

$$\therefore \Delta = \frac{\left[(\vec{u}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_2).\vec{u}_3 - (\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_2)\vec{u}_2\right] \times \vec{\mathfrak{U}}_3}{\delta},$$ porem

de acôrdo com as duas primeiras propriedades segue-se que

$\vec{u}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_2 = 1$ e $\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_2 = 0$, donde

$$\Delta = \frac{\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_3}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$ por ser $\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_3 = 1$.

Logo — $\Delta\delta = 1$ CQD.

Demonstrêmos a terceira propriedade dos vetôres recíprocos.

3) $$\vec{u}_1 = \frac{\vec{\mathfrak{U}}_2 \wedge \vec{\mathfrak{U}}_3}{\vec{\mathfrak{U}}_1 \wedge \vec{\mathfrak{U}}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_3} \therefore$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 \wedge \vec{\mathfrak{U}}_3}{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_2 \wedge \vec{\mathfrak{U}}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_3},$$ Substituindo $\vec{\mathfrak{U}}_2$ no numerador e $\vec{\mathfrak{U}}_1$ no denominador.

$$\vec{u}_1 = \frac{(\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_3)\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \times \vec{\mathfrak{U}}_3)\vec{u}_3}{\left[(\vec{u}_2 \times \vec{\mathfrak{U}}_2)\vec{u}_3 - (\vec{u}_3 \times \vec{\mathfrak{U}}_2)\vec{u}_2\right] \times \vec{\mathfrak{U}}_3} = \frac{\vec{u}_1}{1} = \vec{u}_1$$ CQD

—— × ——

1/6/45.

Como caso particular vejamos que acontece ao ser $\vec{\mathfrak{U}}_i = \vec{u}_i$. Dirá o termo fundamental $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cuja verificação é imediata.

Segue-se que

$$\vec{v} = (\vec{v} \times \vec{i})\vec{i} + (\vec{v} \times \vec{j})\vec{j} + (\vec{v} \times \vec{k})\vec{k}.$$

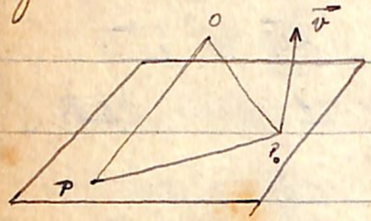
—— × ——

Resolução de um sistema de três equações

$$\begin{cases} \vec{u} \times \vec{v}_1 = C_1 \\ \vec{u} \times \vec{v}_2 = C_2 \\ \vec{u} \times \vec{v}_3 = C_3 \end{cases} \quad ;$$

Aplicando a identidade dos vetores recíprocos $\vec{u} = \sum_{1}^{3} (\vec{u} \times \vec{v}_i)\, \vec{V}_i$; isto vale desde que $\delta = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \neq 0$, donde $\vec{u} = \sum_{1}^{3} C_i \vec{V}_i$

Vejamos o significado geometrico:— Suponhamos $P-O$, e os pontos P e P_0, enquanto P está sobre o plano resulta $(P-P_0)\times\vec{v}=0$



e qualquer ponto do plano satisfará a esta equação, logo esta é a equação do plano.

Numa forma mais geral, tomemos um ponto O do espaço, será $P-P_0=(P-O)+(O-P_0)$, donde $[(P-O)-(P_0-O)]\times\vec{v}=0$

$(P-O)\times\vec{v}-(P_0-O)\times\vec{v}=0$,

$(P-O)\times\vec{v}=c$ isto é a representação da equação geral de um plano. No sistema considerado, se fizermos $\vec{u}=P-O$, obteremos a simultaneidade de 3 planos e $\vec{u}$ será um ponto interseção deles três.

—×—

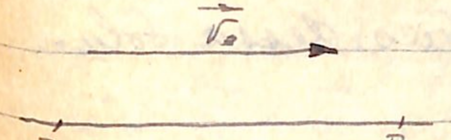
Sistemas de duas equações.

Sejam elas $\begin{cases}\vec{u}\times\vec{v}_1=c_1\\ \vec{u}\times\vec{v}_2=c_2\end{cases}$. Ora, dois planos sucessivos dão uma reta e a solução será a equação de uma reta. Reduzamos este caso ao anterior. Para isto façamos $\vec{u}\times\vec{v}_3=\lambda$, tal que tenhamos $\vec{v}_1\wedge\vec{v}_2\times\vec{v}_3\neq 0$

Então, com este plano virá,

$P-O=C_1\vec{V}_1+C_2\vec{V}_2+\lambda\vec{V}_3$, que é a equação paramétrica da reta.

$O+C_1\vec{V}_1+C_2\vec{V}_2=P_0$, donde $P-P_0=\lambda\vec{V}_3$.



P então descreve a reta paralelamente a $\vec{V}_3$

—×—

Vejamos a equação:— $\vec{u}\wedge\vec{v}_1=\vec{v}_2$ deve então ser $\vec{v}_1$ perpendicular a $\vec{v}_2$, donde $\vec{v}_1\times\vec{v}_2=0$.

Então — 1) Se existir uma solução singular para a equação, existirá uma infinidade. Com efeito, seja $\vec{u}_0$ a solução singular, teremos — $\vec{u}_0\wedge\vec{v}_1=\vec{v}_2$, logo, por subtração virá $(\vec{u}-\vec{u}_0)\wedge\vec{v}_1=0 \longrightarrow (\vec{u}-\vec{u}_0)=\lambda\vec{v}_1$ e

$\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{v}_1$. Daí $-\infty < \lambda < +\infty$

Supponhamos uma solução particular

$\vec{x}_0 = \dfrac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|v_1|^2}$, virá $\dfrac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|v_1|^2} \wedge \vec{v}_1 =$

$$= \frac{(\vec{v}_1 \times \vec{v}_1)\vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \times \vec{v}_1)\vec{v}_1}{|v_1|^2} = \frac{|v_1|^2}{|v_1|^2}\vec{v}_2 = V$$

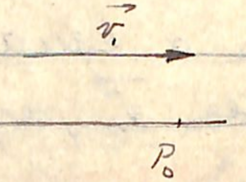
logo $\vec{x}_0$ é uma solução particular.

— × —

A solução geral da equação é $\vec{x} = \dfrac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|v_1|^2} + \lambda \vec{v}_1$

Vejamos o significado geometrico dessa solução —

Consideremos $P - O = \vec{x}$ e $P_0 - O = \vec{x}_0$ e dado o vetor $\vec{v}_1$

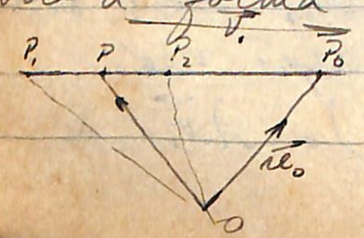


$(P - P_0) \wedge \vec{v}_1 = 0$

$P - P_0 = \vec{x} - \vec{x}_0$

$(\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge \vec{v}_1 = 0$ ou $\vec{x} \wedge \vec{v}_1 = \vec{x}_0 \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ ∴

∴ $\vec{x} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ (Equação geral da reta sob a forma de Plücker.



P varia de acordo com λ, O sendo fixo.

Solução para o seguinte sistema: —

Intersecção de um plano com uma reta.

Será 1) $\vec{x} \wedge \vec{v}_1 = \vec{v}_2$ (reta) → $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 0$

2) $\vec{x} \wedge \vec{v} = c$ (plano π).

Sua simultaneidade indicará o traço da reta com o plano.

Tiremos os valores em ①: $\vec{x} = \dfrac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|v_1|^2} + \bar{\lambda}\vec{v}_1$

Substituindo em ②, virá

$\dfrac{(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{|\vec{v}_1|^2} \wedge \vec{v} + \bar{\lambda}(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}) = c$. Calcularemos agora $\bar{\lambda}$; pela substituição de $P - O =$

$= \vec{x} = \dfrac{\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2}{|\vec{v}_1|^2} + \lambda \vec{v}_1$

Distâncias. (Geom. Anal.)

Supponhamos P_0 e P_1, calculemos a distancia entre P_0 e P_1. Admitamos que P_0, num sistema cartesiano tenha a representação

$P_0 = O + x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$ e mais

$P_1 = O + x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, subtraindo membro a membro virá: —

$P_0 - P_1 = (x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j} + (z_0 - z_1)\vec{k}$;

Sabendo-se que a <u>expressão cartesiana do produto escalar</u>, sendo $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é $\vec{v} \times \vec{v} = a^2 + b^2 + c^2 = |v|^2$ e

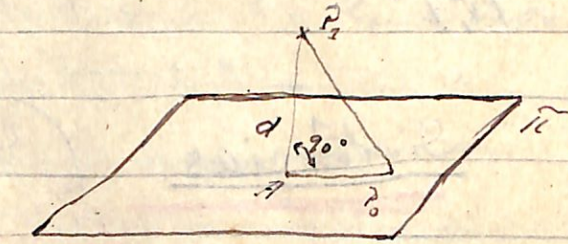
$|\vec{v}| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0$, segue-se

$$d = |P_0 - P_1| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

— × —

Vejamos a distancia de um ponto a um plano. —

Teremos AP_1 parallela a $\vec{v}$, $\hat{A} = \pi/2$ donde $(P_1 - P_0) \times \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = d$.

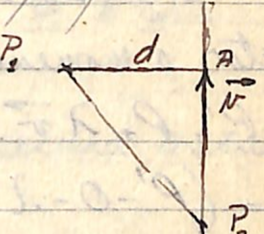


Aparece o sinal, conforme o sentido do vetôr e conforme o semiespaço que se considere, em relação ao plano π.

Quando se quizer só $d > 0$,

$$\left|(P_1 - P_0) \times \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right| = d \quad \text{(Forma de Hesse)}$$

Distância de um ponto P_1 a uma reta passando por P_0, de versor $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ($\vec{u}$ = versôr de $\vec{v}$).



Será $d = \left|(P_1 - P_0) \wedge \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right|$

Df. — × —

5/6/45.

Vetôres ligados a pontos.

É o conjunto do vetor ($\vec{v}$) e do ponto P, ($\vec{v}$, P); como por exemplo as forças em Física, um campo de velocidade. Neste último caso temos um sistêma de vetores ligados a pontos.

Seja um sistema $(\vec{v}_i, P_i)$, S $(i = 1, 2, 3 \dots n)$

Chama-se <u>resultante geral</u> do sistêma á expressão $\vec{R} = \sum_1^n \vec{v}_i$.

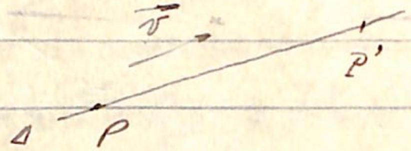
<u>Momento do sistema</u> em relação ao polo <u>O</u> é a expressão $\vec{M}_0 = \sum_1^n (P_i - O) \wedge \vec{v}_i$

Como caso particular, considerêmos o sistema

de um único vetor. Teremos $\vec{R} = \vec{v}$ e
$\vec{M}_0 = (P-O)\wedge\vec{v}$

Se deslocarmos o ponto P paralelamente ao vetor, o momento não se altera. Com efeito, seja $P' = P + \lambda\vec{v}$. Teremos:-

$\vec{M}_0 = (P'-O-\lambda\vec{v})\wedge\vec{v} = (P'-O)\wedge\vec{v}$



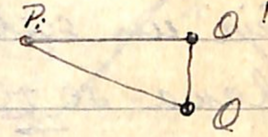
Surge daí, o nome, que evitaremos usar, de vetor deslizante.

Primeiro invariante escalar — é obtido pela expressão $\vec{R}\times\vec{R} = |\vec{R}|^2 = I_1$

— x —

Estudemos a mudança de polo —

$P_i - O = P_i - O' + (O'-O)$



Obteremos:—

$\vec{M}_0 = \sum_1^n [(P_i-O') + (O'-O)]\wedge\vec{v}_i =$

$= \sum_1^n (P_i-O')\wedge\vec{v}_i + \sum_1^n (O'-O)\wedge\vec{v}_i =$

$= \vec{M}_{0'} + (O'-O)\wedge\sum_1^n \vec{v}_i$, logo,

$\boxed{\vec{M}_0 - \vec{M}_{0'} = (O'-O)\wedge\vec{R}}$ (1) Relação esta, que exprime a diferença entre os momentos relativos a dois pontos distintos O e O'.

— x —

Multiplicando a expressão acima escalarmente por $\vec{R}$, segue —

$\vec{M}_0\times\vec{R} - \vec{M}_{0'}\times\vec{R} = (O'-O)\wedge\vec{R}\times\vec{R} = 0 \longrightarrow$

$\vec{M}_0\times\vec{R} = \vec{M}_{0'}\times\vec{R} = I_2$ Expressão esta que constitue o segundo invariante escalar do sistema de vetores aplicados.

— x —

Eixo central.

Procuremos o lugar geometrico dos polos em relação aos quais o módulo do momento é mínimo.

Suponhamos ser E esse polo, $\vec{M}_E$ o momento, determinemos $|\vec{M}_E|$ mínimo.

Ora, temos que $I_2 = \vec{M}_E\times\vec{R} = |\vec{M}_E|.|\vec{R}|.\cos(\vec{M}_E,\vec{R})$, logo $\frac{I_2}{|\vec{R}|} = |\vec{M}_E|.\cos(\vec{M}_E,\vec{R})$,

o primeiro membro $I_2/\vec{R}$ é constante, logo para que $|\vec{M}_E|$ seja mínimo, é preciso que $\cos(\vec{M}_E,\vec{R})$ seja máximo, então deverá ser $\vec{M}_E = h\vec{R}$.

— × —

Cálculo de h.

Temos $(E-O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_0 - \vec{M}_E$ (para mudança de polo).

Deverá ser $\vec{R} \times (\vec{M}_0 - h\vec{R}) = 0$ donde $\vec{R} \times \vec{M}_0 = h\vec{R} \times \vec{R}$, logo $h = \dfrac{I_2}{I_1}$

— × —

$(E-O) \wedge \vec{R} = \vec{M}_0 - \vec{M}_E \longrightarrow$

$$E - O = \frac{\vec{R} \wedge (\vec{M}_0 - \vec{M}_E)}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R} =$$

$$= \boxed{\frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}}$$

Esta expressão representa a equação de uma reta, o que nos leva a concluir que o lugar geométrico pedido, em que o modulo do momento é mínimo, é uma reta, paralela a $\vec{R}$. Denomina-la-emos de eixo central do sistema.

— × —

Sistemas equivalentes.

Dois sistemas são equivalentes quando geram o mesmo campo de momentos.

Campo de momentos sendo o conjunto de vetores aplicados. A cada ponto está aplicado um vetor, distribuidos de maneira arbitrária.

Se tomarmos um polo para o mesmo sistema, a cada polo corresponderá um momento, logo, os polos e os momentos formam um campo e a este denominaremos de campo de momentos.

Então - dois sistemas são equivalentes quando geram o mesmo campo de momentos.

Consideradas $S(\vec{v}_i, P_i)$ $(i = 1, 2, 3, \dots n)$ e $S'(\vec{v}_j, P_j)$ $(j = 1, 2, 3, \dots, m)$ eles serão equivalentes se $\vec{M}_0 = \vec{M}'_0$ por definição.

— × —

Sistema reduzido - é o sistema mais simples que se possa imaginar.

— × —

Teorema - "Um sistema de vetores reduz-se à resultante geral aplicada ao ponto do eixo central mais o momento de modulo mínimo (de transporte)

$\vec{M}_0 = \vec{M}_E + (E-O) \wedge \vec{R}$ $\quad \vec{M}_E = h\vec{R}$ (este é o momento de transporte)

Vejamos o momento da resultante geral, aplicada ao ponto E $(\vec{R}, E)$.

Será $(E-O) \wedge \vec{R} + \vec{M}_E = \vec{M}_0$.

Isto quer dizer que esses dois sistemas são equivalentes.

———— × ————

7/6/45.

Campo de vetores – assim se denomina a um conjunto de pontos aos quais se associam vetores. Se tivermos varios polos, existirão varios momentos e então teremos um campo de momentos.

Dois sistemas, por definição são equivalentes quando produzem o mesmo campo de momento.

$$\left.\begin{matrix} S \rightarrow \vec{M}_p \\ S' \rightarrow \vec{M}'_p \end{matrix}\right\} \vec{M}_p = \vec{M}'_p \rightarrow S \text{ equivalente a } S'.$$

O sistema será reduzido quando se compuzer do menor número possivel de elementos. O sistema S de vetores $\vec{v}_i$ e pontos P_i $(i=1,2,3,\ldots n)$; $S(\vec{v}_i, P_i)$, reduz-se á sua resultante geral aplicada num ponto do eixo central e ao momento de transporte $\vec{\mu} = h\vec{R}$ $(\equiv M_E) = \frac{I_2}{I_1} \cdot \vec{R}$

Com efeito, pela mudança de polo, o momento $\vec{M}_0 = \vec{M}_E + (E-O) \wedge \vec{R}$ e $(E-O) \wedge \vec{R}$ é o momento do sistema $(E, \vec{R})$, então temos escrito que para um polo qualquer, o momento de um sistema e o momento do sistema reduzido são

Discutamos de quantas maneiras este resultado se apresenta. Classifiquemos pelos invariantes – $I_1 = \vec{R} \times \vec{R}$ $\quad I_2 = \vec{M}_0 \times \vec{R}$.

Será: –

1. $\left.\begin{matrix} I_2 \neq 0 \\ I_1 \neq 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{R} \neq 0$ e $\vec{M}_0 \neq 0$.

Neste caso o eixo central $E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{|R|^2} + \rho\vec{R}$ tem existencia real. Teremos ainda $\vec{\mu} = \frac{I_2}{I_1} \vec{R}$

2. $\left.\begin{array}{l} I_2 = 0 \\ I_1 \neq 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \vec{R} \neq 0 \\ \vec{M}_0 = 0 \end{array}$ virá $E = O + \rho \vec{R}$. O eixo central passa pelo ponto O. Constitúe um sistema de forças concentradas num ponto, e $\vec{\mu} = 0$

— x —

3. $\left.\begin{array}{l} I_2 = 0 \\ I_1 \neq 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \vec{R} \neq 0 \\ \vec{M}_0 \neq 0 \end{array}$ (ortogonais) Serão

$$E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_0}{|R|^2} + \rho \vec{R} \quad \text{e} \quad \vec{\mu} = 0$$

Constitúe exemplo notável deste caso, os vetores paralelos que estudaremos a seguir.

— x —

4. $\left.\begin{array}{l} I_2 = 0 \\ I_1 = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} R = 0 \\ \vec{M}_0 \neq 0 \end{array}$ Constituirão dois vetores $(A, \vec{v})$ e $(B, -\vec{v})$ opostos, aplicados a dois pontos A e B. É o caso do binário e será $\vec{R} = \vec{v} - \vec{v} = 0$

Para os momentos:-

$$\vec{M}_A = (A-A)\wedge\vec{v} + (B-A)\wedge(-\vec{v}) = (A-B)\wedge\vec{v}.$$
$$\vec{M}_B = (A-B)\wedge\vec{v} + (B-B)\wedge(-\vec{v}) = (A-B)\wedge\vec{v}$$
$$\vec{M}_0 = (A-O)\wedge\vec{v} + (B-O)\wedge(-\vec{v}) = [(A-O)+(O-B)]\wedge\vec{v} = (A-B)\wedge\vec{v}.$$

Isto mostra serem os momentos independentes dos pontos em relação aos quais êles forem tomados.

— x —

5. $\left.\begin{array}{l} I_2 = 0 \\ I_1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_0 = 0 \end{array}\right.$ Constitúe este, o caso do equilíbrio de forças.

— x —

Vejamos um exemplo do 3º caso:- Consideremos vários vetores paralelos, que sejam por exemplo os pesos, aplicados aos vários pontos de um corpo.

Então o sistema é $S_n(P_i, m_i\vec{a})$

Como resultante temos

$$\vec{R} = \sum_1^n m_i\vec{a} = \left(\sum_1^n m_i\right)\vec{a} \quad (\text{Suporemos } |\vec{a}| = 1)$$

Para o momento - $\vec{M}_0 = \sum_1^n (P_i - O)\wedge m_i\vec{a} = \left[\sum_1^n m_i(P_i-O)\right]\wedge\vec{a}$.

Para o eixo central resulta a expressão

$$E - O = \frac{\left(\sum_1^n m_i\right)\vec{a}\wedge\left[\left(\sum_1^n m_i(P_i-O)\right)\wedge\vec{a}\right]}{\left(\sum_1^n m_i\right)^2} + \rho\,\vec{a}$$

$$= \frac{\sum_1^n m_i (P_i - O) + \vec{a} \times \sum_1^n m_i (P_i - O)\vec{a}}{\sum_1^n m_i} + \lambda \vec{a}$$

$$= \frac{\sum_1^n m_i (P_i - O)}{\sum_1^n m_i} - \left[\frac{\vec{a} \times \sum_1^n m_i (P_i - O)}{\sum_1^n m_i} - \lambda \right] \vec{a}$$

Existe um ponto privilegiado do eixo. Ora, se fizermos $\lambda = \frac{\vec{a} \times \sum_1^n m_i (P_i - O)}{\sum_1^n m_i}$, resulta $E - O = O$ e aparece então um ponto que não depende de $\vec{a}$ $\longrightarrow$

$G = O + \frac{\sum_1^n m_i (P_i - O)}{\sum_1^n m_i}$, ponto este que será o centro de massa ou baricentro.

—— × ——

Exercício —

Sejam os vetôres $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, aplicados aos pontos P_1, P_2, P_3, tais que

$\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \longrightarrow P_1 = O + \vec{i} + 2\vec{k}$

$\vec{v}_2 = \vec{j} \longrightarrow P_2 = O - \vec{i} + \vec{k}$

$\vec{v}_3 = -2\vec{j} + 2\vec{k} \longrightarrow P_3 = O + \vec{j}$

Quais são: — a resultante geral, o momento, o eixo central e o momento de transporte?

$\vec{R} = \sum_1^n \vec{v}_i = \vec{i} + \vec{k}$

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} - \vec{i} - \vec{k} + 2\vec{i} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

donde $I_1 = 2$ e $I_2 = 1$.

Eixo central =

$$E = O + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \rho(\vec{i} + \vec{k}) =$$

$$= O + \frac{1}{2}(-3\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) + \rho(\vec{i} + \vec{k}) =$$

Para o momento de transporte obtemos $\mu = \frac{-1}{2}(\vec{i} + \vec{k})$.

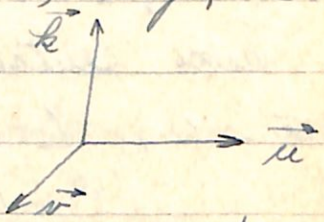
O sistema reduzido obteremos ao fazer $\rho = 0$.

—— × ——

8/6/45.

Operadores vetoriais.

Consideremos dois vetores $\vec v$ e $\vec u$ e o versôr $\vec v \wedge \vec u = \vec k$ (este unitário) e façamos $\vec k \wedge \vec v = \vec u$, $\vec u$ é ortogonal a $\vec v$ e a $\vec k$, mas $\vec k$ é ortogonal a $\vec v$ e a $\vec u$, logo, a representação desta relação é um triedro triortogonal.



Vejamos os modulos —

$|\vec k||\vec v|.\text{sen}(\vec k, \vec v) = |\vec u| \to |\vec u| = |\vec v|$, portanto $\vec v$ e $\vec u$ têm mesmo modulo. Segue-se daí que $\vec u$ provem de $\vec v$ por uma rotação de $\pi/2$.

$\vec k \wedge \vec v = \vec u$ define então uma correspondência entre os vetores $\vec u$ e $\vec v$, estes normais a $\vec k$. Chamemos à expressão $\vec k \wedge$, de i isto é $\to \vec k \wedge \equiv i$; resulta que $\vec k \wedge \vec v = i\vec v = \vec u$ e assim ficou estabelecida a correspondencia acima. $\underline{i}$ chama-se de operador à esquerda entre vetores.

$\underline{i}$ é um operador vetorial linear, pois goza da propriedade de satisfazer às condições $\begin{cases} \theta m \vec v = m \theta \vec v \\ \theta(\vec v_1 + \vec v_2) = \theta \vec v_1 + \theta \vec v_2 \end{cases} \longrightarrow$ ora,

$i m \vec v = m i \vec v$

$\vec k \wedge (m \vec v) = m \vec k \wedge \vec v$ c.q.d.

$i(\vec v_1 + \vec v_2) = i\vec v_1 + i\vec v_2 = \vec k \wedge \vec v_1 + \vec k \wedge \vec v_2 = i\vec v_1 + i\vec v_2$

É ainda $\underline{i}$, operador vetorial linear axial, pois gira de $\pi/2$ em torno de $\vec k$ e registraremos este fato da seguinte maneira: —

$i \equiv R(\vec k, \pi/2)$

Operação repetida.

$\vec u = i\vec v \to i\vec u = i(i\vec v) = i^2\vec v$ (representa i aplicado duas vezes) é a caracteristica de uma operação repetida.

$$i^2 \vec v = \vec k \wedge (\vec k \wedge \vec v) = -\vec v$$

$(i^2 + 1)\vec v = 0 \to i^2 + 1 = 0 \to i^2 = -1$ (formalmente!) Daqui deduzimos que a operação repetida equivale a uma oposição.

Podemos notar que $i = \vec k \wedge$, goza das mesmas propriedades de $i = \sqrt{-1}$. E resulta então uma confusão devida à deficiência do símbolo do operador.

Temos

$i \equiv \vec{k}\wedge$ $\qquad\qquad$ $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$ $\qquad\qquad$ $i^2 = -1$

$i^3 = -i$ $\qquad\qquad$ $i^3 = -i$

$i^4 = 1$ $\qquad\qquad$ $i^4 = 1$, no

entretanto $\vec{k}\wedge$ e $\sqrt{-1}$ são distintos. Com efeito, consideremos $i = \vec{k}\wedge$ e $i = \vec{k_1}\wedge$ (identificados como planos distintos)

Se supuzessemos $i = \sqrt{-1}$, será

$\sqrt{-1} = \vec{k}\wedge$ e $\sqrt{-1} = \vec{k_1}\wedge \to \vec{k_1}\wedge = \vec{k}\wedge$, o que indicaria o paralelismo de todos os planos.

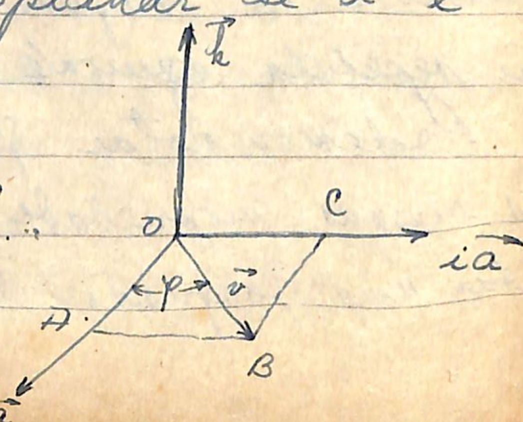
—— × ——

Tomemos um vetor unitário $\vec{a}$, e o vetor $i\vec{a}$ ($i \equiv \vec{k}\wedge$), segue a seguinte identidade:- $\vec{v} = (\vec{v} \times \vec{a})\vec{a} + (\vec{v} \times i\vec{a})i\vec{a}$, para qualquer vetor $\vec{v}$ coplanar de $\vec{a}$ e de $i\vec{a}$.

$B - O = (B - A) + (A - O)$

$\vec{v} = (\vec{v} \times i\vec{a})i\vec{a} + (\vec{v} \times \vec{a})\vec{a}$ ..

O que indica ser a com-



ponente relativa a $\vec{k}$, nula.

Chamemos $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) \to$

$\vec{v} = |\vec{v}| \cos\varphi . \vec{a} + |\vec{v}| \operatorname{sen}\varphi . i\vec{a} \to$

$\vec{v} = |\vec{v}| (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\, \vec{a}$.

Na Análise ordinária existem as formulas de Euler, que fornecem a soma $\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi = e^{i\varphi}$ (números complexos) usaremos simbolicamente a mesma notação para indicar o operador vetorial $\to$

$\vec{v} = |\vec{v}| e^{i\varphi} \vec{a}$ $\qquad$ $\cos\varphi + i . \operatorname{sen}\varphi \equiv e^{i\varphi}$.

Façamos $|\vec{v}| \vec{a} = \vec{v_1}$ resulta que $\to$

$\vec{v} = e^{i\varphi} . \vec{v_1}$.

Portanto, $e^{i\varphi}$ é um operador vetorial, que estabelece a correspondência entre vetóres de mesmo modulo; $\vec{v}$ provem de $\vec{v_1}$ por uma rotação de φ radianos em torno do eixo $\vec{k}$.

Êste operador deveria ser indicado como $e^{i\varphi} \equiv R(\vec{k}, \varphi)$

Vejamos o operador $e^{i\varphi}$. Êle é linear, pois —

1). $e^{i\varphi} m \vec{v} = (\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)\, m\vec{v} =$

$= \cos\varphi . m\vec{v} + i \operatorname{sen}\varphi . m\vec{v} =$

$= m\cos\varphi.\vec v + m i\,\text{sen}\,\varphi.\vec v =$

$= m(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\vec v =$

$= m\,e^{i\varphi}\vec v$

2.) $e^{i\varphi}(\vec v_1 + \vec v_2) = (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)(\vec v_1 + \vec v_2) =$

$= \cos\varphi(\vec v_1 + \vec v_2) + i\,\text{sen}\,\varphi(\vec v_1 + \vec v_2) =$

$= \cos\varphi.\vec v_1 + i\,\text{sen}\,\varphi\,\vec v_1 + \cos\varphi.\vec v_2 + i\,\text{sen}\,\varphi\,\vec v_2 =$

$= (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\vec v_1 + (\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi)\vec v_2 =$

$= e^{i\varphi}\vec v_1 + e^{i\varphi}\vec v_2$ cqd.

Exercícios de cálculo vetorial.

1) Consideremos uma reta passando por $P_0 = O + \vec i + \vec j$ e $P_1 = O + \vec i - \vec j + \vec k$.
Qual sua forma pluckeriana?
Temos que —
$P_1 - P_0 = -2\vec j + \vec k$, que é o vetor paralelo à reta.
Pode-se escrever que um ponto qualquer da reta é: $(P - P_0)\wedge(P_1 - P_0) = 0$ (forma de Plücker)
Refiramos a um ponto O —
$(P - O)\wedge(P_1 - P_0) = (P_0 - O)\wedge(P_1 - O) \longrightarrow$
$[(P - O) - (P_0 - O)]\wedge(P_1 - P_0) = 0$ é a equação

pedida.

$(P - O)\wedge(-2\vec j + \vec k) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec i - \vec j - 2\vec k$

Esta equação é do tipo $\vec x \wedge \vec v_1 = \vec v_2$ ($x = P - O$)
Deve ser $\vec v_1 \times \vec v_2 = 0$, donde
$(-2\vec j + \vec k)\times(\vec i - \vec j - 2\vec k) = 0$ cqd. Logo $\rightarrow$

$P - O = \frac{\vec v_1 \wedge \vec v_2}{|\vec v_1|^2} + \rho\vec v_1 \longrightarrow P = O + \frac{1}{5}\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} +$

$+ \rho(-2\vec j + \vec k) \rightarrow P - O = \frac{1}{5}(5\vec i + \vec j + 2\vec k) - 2\rho\vec i + \rho\vec k =$

$= \vec i + \left(\frac{1}{5} - 2\rho\right)\vec j + \left(\frac{2}{5} + \rho\right)\vec k$

$\frac{1}{5} - 2\rho = 1 \quad 1 - 10\rho = 5 \rightarrow \rho = -\frac{2}{5}$, isto

fazendo $P - O = P_0 - O$,
Em $\vec k \rightarrow \frac{2}{5} + \rho = 0 \rightarrow \rho = -\frac{2}{5}$ cqd.

2) Determinar o plano passando por $P_2 = O + 2\vec i + \vec k$, paralelamente a $\vec v_1 = \vec i - \vec j$ e $\vec v_2 = \vec j + 2\vec k$.
Será — $(P - P_2)\times\vec v_1 \wedge \vec v_2 = 0$

$\vec v_1 \wedge \vec v_2 = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec i - 2\vec j + \vec k$

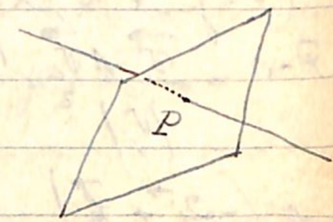
$[(P-O)-(P_2-O)]\times \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (P-O)\times(-2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}) =$

$= -4+1 = -3.$

Que é a equação do plano.

Supondo exigida a condição de que a reta do problema anterior satisfaça a esta equação, teremos –

$$-2-2\left(\frac{1}{5}-2\rho\right)+\frac{2}{5}+\rho=-3$$



$-10-2+20\rho+2+5\rho=-15$

donde $\rho=-\frac{1}{5}$. Ponto em que a reta fura o plano

$P'=O+\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}+\frac{\vec{k}}{5}.$

3) Distância mínima entre duas retas –

Sejam $(P-O)\wedge(\vec{i}+\vec{j})=\vec{k}$ (r_1) e

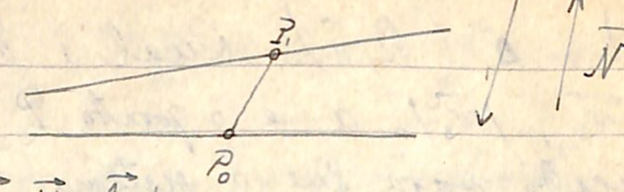
$P=O+\lambda(\vec{i}+\vec{k})$ (r_2)

Achemos o vetor normal às duas retas –

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\vec{n}=\dfrac{\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}}{\pm\sqrt{3}}$ é o versor unitário que lhe

corresponde.



$$P_1-O=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\vec{i}-\vec{j}) \quad \text{(ponto de } r_1\text{)}$$

$P_2=O \longrightarrow P_1-P_2=P_1-O$

$$d_{min.}=(P_1-P_2)\times\vec{N}=\frac{1+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) Reta passando por duas retas

$r_1\equiv(P-O)\wedge\vec{v}_1=\vec{v}_2$ $r_2\equiv(P-O)\wedge\vec{v}_1'=\vec{v}_2'$ e por um ponto P_1.

Determinemos o plano passando por P_1 e por (r_1). Tiremos antes dois pontos A e B da reta. $(P-P_1)\times\underbrace{(P_1-A)}_{\vec{a}}\wedge(P_1-B)=0 \longrightarrow$

$(P-P_1)\times\vec{a}=0$ para o primeiro e para o segundo – $(P-P_1)\times\vec{b}=0$

Tomemos um plano auxiliar $(P-P_1)\times\vec{a}\wedge\vec{b}=\lambda$, virá – $(P-P_1)=\lambda\vec{v}_3-\lambda\dfrac{(\vec{a}\wedge\vec{b})}{(\vec{a}\wedge\vec{b})\times(\vec{a}\wedge\vec{b})}$

5) Sejam $\vec{v}_1 \longrightarrow P_1$ $(\vec{v}_2, P_2)$

$\vec{v}_2 \longrightarrow P_2$ $(\vec{v}_2, P_2)$ determinar

(v_3, P_3) e Δ $(Q, \vec a)$. Qual a direcção e o sentido de $\vec v_3$, $|\vec v_3| = a$ e o ponto P_3 em que deve ser aplicado para que o sistema formado por $\vec v_1, \vec v_2, \vec v_3$, aplicado em P_1, P_2, P_3 tenha a reta Δ como eixo central.

19/6/45.

6) Retas passando por

$P_0 = O + \vec i - \vec j + \vec k$ e passando por $P_1 = O + 2\vec j$ e dado $\vec v_1 = 2\vec i - \vec j$, achar um plano paralelo à reta dada, ao vetor $\vec v_1$, passando por P_0.

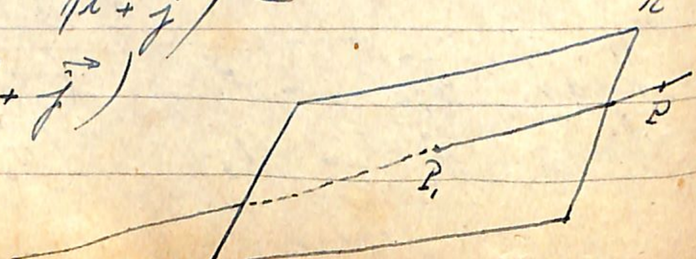
$P_0 - P_1 = \vec i - 3\vec j + \vec k$

$(P - P_0) \times (P_0 - P_1) \wedge \vec v_1 = 0$ (I) (coplanaridade dos três vetores).

$(P - P_1) \wedge (\vec i + \vec j) = \vec k$. Devemos achar o traço desta reta sobre o plano dado.

Temos — $(P - P_1) = \frac{(\vec i + \vec j)}{|\vec i + \vec j|^2} + \lambda(\vec i + \vec j) =$

$= \frac{\vec i + \vec j}{2} + \lambda(\vec i + \vec j)$



$P = O + 2\vec j + \frac{1}{2}\vec i - \frac{\vec j}{2} + \lambda(\vec i + \vec j)$.

Substituindo em (I), $P_0 = O + \vec i - \vec j + \vec k$

$P_1 - P_0 = -\frac{i}{2} + \frac{5}{2}\vec j + \vec k + \lambda(\vec i + \vec j)$. (II)

Então — $\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{5}{2} + \lambda & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Isto, efetuando a expressão cartezeana do produto vetorial.

Daqui tiramos o valôr de λ →

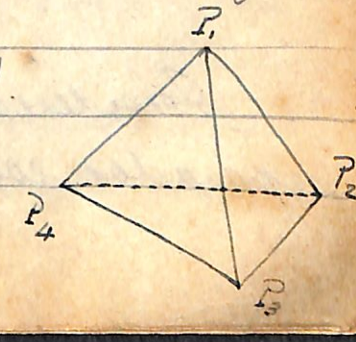
$\lambda - \frac{1}{2} - 5 + 2\lambda - 1 + 6 = 0$ $\quad 3\lambda - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$

Substituindo em (II) → $P_1 - P_0 = -\frac{\vec i}{2} + \frac{5\vec j}{2} + \vec k + \frac{\vec i}{6} + \frac{\vec j}{6}$.

7) Seja um tetraedro dado por P_1, P_2, P_3, P_4. Verificar que a soma das areas orientadas das faces do tetraedro é nula.

Área $P_1 P_2 P_3 = (P_3 - P_2) \wedge (P_1 - P_2)$

Área $P_4 P_2 P_1 = (P_1 - P_2) \wedge (P_4 - P_2)$



Área $P_3 P_4 P_1 = (P_1 - P_4) \wedge (P_3 - P_4)$

Área $P_4 P_3 P_2 = (P_2 - P_3) \wedge (P_4 - P_3)$ a sua soma deve ser nula.

$$(P_3 - P_2) \wedge (P_1 - P_2) + (P_1 - P_2) \wedge (P_4 - P_2) + (P_1 - P_4) \wedge (P_3 - P_4) + (P_2 - P_3) \wedge (P_4 - P_3) = 0$$

$$(P_1 - P_3) \wedge [(P_2 - P_3) + (P_4 - P_2)] + (P_3 - P_4) \wedge [(P_4 - P_1) + (P_2 - P_3)] = 0$$

$$(P_1 - P_2) \wedge (P_4 - P_3) + (P_3 - P_4) \wedge [(P_4 - P_1) + (P_2 - P_3)] = 0$$

$$(P_4 - P_3) \wedge [(P_2 - P_1) + (P_1 - P_4) + (P_3 - P_2)] = 0$$

$$(P_4 - P_3) \wedge (P_3 - P_4) = 0 \quad \text{cqd}$$

Fim.

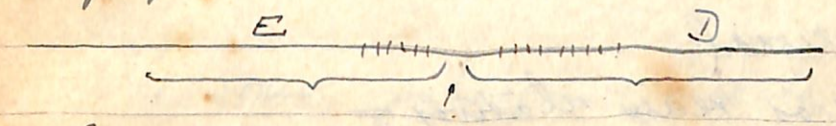
Análise

Teoria dos números

Consideremos todos os numeros racionais separados em duas classes, uma da esquer-

da e outra da direita. Todo elemento da classe da esquerda precede um elemento da classe da direita. A classe da direita esquerda não tem maximo e a da direita não tem minimo.

Essas propriedades definem um corte ou secção no campo racional. A esse corte em que entram todos os numeros, diremos irracional, é improprio.



Então, por definição a um corte irracional corresponde um numero que chamamos irracional.

Admitimos outro sistema de corte, o racional.

Separamos todos os números racionais menos um, em duas classes, uma da esquerda e outra da direita, de maneira que a da esquerda não tenha maximo e a da direita não tenha minimo.

O numero que excluimos corresponde ao corte feito.

Juntamos os dois cortes num só tipo de definição: —

→ Todos os números racionais menos um.

→ Duas classes, a E podendo admitir máximo (eventualmente um) e a D podendo admitir mínimo (eventualmente um), mas não simultaneamente admitindo maximo e mínimo; a esse número se denomina de número real.

Com essa definição fica garantida a propriedade de continuidade dos números reais.

Indicamos um corte com a notação (E, D), definindo um número real α. São os cortes no campo racional.

Nos números reais relativos —

→ i) Todos os racionais relativos, menos um.

→ ii) Duas classes E, D;

→ iii) Uma sem max. ou um só e outra sem min. ou um, não conjuntamente os admitindo.

— × —

Zero – É um corte. Em E os relativos, em D os reais.

× —

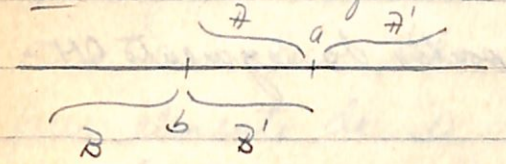
Noção de igualdade e desigualdade.

Um real é igual a outro quando são gerados pela mesma secção.

$(A, A')\ a = (B, B')\ b$, se $A = B$ e $A' = B'$.

— " —

a é maior que b quando algum elemento de A fôr elemento de B'



— " —

Será $a < b$, quando algum elemento de A' for de B.

— " —

Vêr soma, subtração, produto e quociente no caderno de Exercícios do Dr. Breves.

— " —

Suponhamos que D seja uma classe vazia. Não será mais um corte. Faremos corresponder então $(E, V)\ +\infty$, e por analogia a $(V, D)\ -\infty$

Números absolutos são os números cujos cortes são simétricos em relação à origem O, considerados sempre positivos, tais que $|\alpha| = |-\alpha|$.

— " —

Fim do 1º semestre de 1940.

! ??

17/7/45.

Postulado de Dedekind –
– da continuidade.

i) Se separarmos todos os pontos do segmento OM em duas classe E, D.

ii) Colocarmos O em E e M em D.

iii) Se todo o segmento com extremidade na primeira fôr menor que qualquer segmento com extremidade na segunda, então existe um ponto x de OM que pode estar em E ou em D, tal que todo o ponto que precede x pertença a E e todo ponto que sucede x pertença a D.

Deste postulado pode-se deduzir o postulado da continuidade de Cantor –

i) Se duas classes E e D de segmentos de uma reta fôrem tais que

ii) Nenhum segmento de E seja maior que qualquer de D

iii) Prefixado um segmento σ, se possa determinar dois segmentos um da classe D, outro da classe E, cuja diferença seja menor que σ.

Dedekind verificou que um ponto de uma reta separa todos os pontos em duas classes E e D e que todo elemento de E precede qualquer elemento de D.

A reciproca, que constitue o postulado de Dedekind, dá a definição de corte.

i) Repartamos todos os números racionais absolutos R_a, excluido o zero, em duas classes E e D, de maneira que dado um elemento de E, todos os que o precedem, lhe pertencem.

ii) Dado um elemento de D, todos os que o sucedem pertencem a D.

Então –

iii) Se E tiver maximo ou D minimo, existe um numero racional, ou

iii') Se E não tiver maximo e D não tiver minimo, existe um numero irracional, tal que qualquer elemento de E preceda o numero dado ou qualquer elemento de D suceda ao numero obtido à exceção de um.

Temos assim dois cortes.

Resumindo -

1) Todo número racional absoluto diferente de zero excetuando um no máximo pertença a uma, ou só a uma ou à outra classe.

2) a classe E contem com cada um de seus numeros, todos os números menores; a classe D contem com cada um de seus numeros, todos os numeros maiores.

3) a classe E não tem maximo, a classe D não tem minimo.

Esse corte define o número real absoluto.

Podemos extende-lo a R_r, campo racional relativo. Definiriamos os números racionais relativos, que chamaremos numeros racionais.

Definiriamos o zero → Seria um corte E, D no campo R, sendo E numeros positivos e D numeros negativos.

" —

Comparação de números reais.

$\alpha = (A/A')$ $\beta = (B/B')$ Será $\alpha = \beta$, quando A coincidir com B e A' com B'.

Analogamente $\beta > \alpha$ e depois $\beta < \alpha$.

" —

Operações com numeros reais.

Soma - $\alpha + \beta = (A + B / A' + B')$.

Um corte no campo racional dá o numero real.

De maneira analoga à que procedemos para a soma, teriamos diferença, produto, quociente, etc.

" —

Teorema de Dedekind - Separados todos os numeros reais em duas classes E, D (R) tais que -

1) todo número real pertença a uma ou a outra.

2) cada classe contenha pelo menos um elemento (não vazios)

3) Qualquer numero de E menor que qualquer número de D; então existe um numero α que goza das propriedades → todos os numeros que lhe são menores pertencem a E,

e maiores a D, α podendo pertencer a uma ou a outra classe.

Se retirarmos de E todos os numeros irracionais e de D todos os irracionais, ficarão duas classes E e D de numeros racionais, que definem um numero real.

Observe-se que o corte no campo real produziu um número real, isto é, cortando o campo racional criamos o numero irracional. Cortando-se o campo real, nada mais se obtem.

"

Podemos fazer uso das classes contíguas.

1) Dividimos os números racionais em duas classes E e D.

2) Nenhum numero de E seja maior que qualquer numero de D.

3) Seja possivel, dado um ε arbitrário, encontrar-se um d e um e, tais que $d - e < \varepsilon$.

São as classes contíguas e existe então entre elas um numero real de separação.

Para demonstrá-lo, demonstremos uma propriedade das secções. Tomemos uma secção no campo racional; é sempre possivel encontrar-se um elemento e e um elemento d, cuja diferença seja $d - e < \varepsilon$.

Escolhemos um e_0 de E, e outro $\delta < \varepsilon/2$.

Construimos a seguinte sucessão de numeros $e_0, e_0+\delta, e_0+2\delta, \ldots, e_0+n\delta, e_0+(n+1)\delta \ldots$

Sabe-se que é sempre possivel, dados dois números, achar-se um número natural m, tal que o produto de m pelo menor, supere o maior. Então existirá o número $e_0+n\delta$ e $e_0+(n+1)\delta$, tal que $e_0+(n+1)\delta > (E, D)$ e $e_0+n\delta < (E, D)$, cuja diferença será δ.

19/7/45.

Consideremos no campo dos numeros racionais, um número real definido pelo corte (E, D). É possivel, dado um numero arbitrário σ, encontrarem-se dois números e e d tais que $e - d < \sigma$. Consideremos $\delta < \frac{\sigma}{2}$, a partir de um número qualquer da classe da esquerda, e_0, construamos a sequência $e_0, e_0+\delta,$

$l_0 + 2\delta, \ldots, l_0 + (n-1)\delta < \alpha, \; l_0 + n\delta \geq \alpha,$
$, l_0 + (n+1)\delta > \alpha$

Certo é que, $\left.\begin{array}{l} l_0 + (n-1)\delta \rightarrow E \\ l_0 + (n+1)\delta \rightarrow D \end{array}\right\}$ logo

$l_0 + (n-1)\delta - l_0 + (n+1)\delta \longrightarrow$

$d - e = 2\delta < 2\dfrac{\sigma}{2} \longrightarrow d - e < \dfrac{\sigma}{2}$ c.q.d.

Para fixar um numero, não é necessário tomarem-se todos os números racionais, bastam apenas alguns proximos dele.

1) Sejam duas classes de números reais E, D.

II) Todo numero de E menor que qualquer de D.

III) Dado o número real pozitivo ε, que seja possivel encontrarem-se dois numeros $\underline{e}$ e $\underline{d}$, tais que $d - e < \varepsilon$.

Podemos assim definir um numero real.

Ora, I) Os números racionais, todos, ficam separados em duas classes $\bar{E}, \bar{D}$.

II) Em $\bar{E}$, os numeros que são superados por qualquer número de $\bar{D}$, em $\bar{D}$ os que superarem qualquer numero de $\bar{E}$, e são todos

os números que consideramos, pois se existisse um por exemplo, tal que $\bar{e} > e$, $d = \bar{d} \longrightarrow$

$\therefore d - e > d - \bar{e}$; $d - \bar{e}$, sendo $\underline{d}$ e $\underline{e}$ numeros de $\underline{D}$ e $\underline{E}$ e $\bar{d}$ e $\bar{e}$ de $\bar{D}$ e $\bar{E}$ logo $d - e < d - \bar{e}$

Sendo $d - \bar{e} = \sigma$, será $d - e > \sigma$, o que é impossivel.

Isto constitue um corte de Dedekind no campo racional e é numero real. Logo, as classes contiguas definem um número real.

Seja $\sqrt{2}$. $\longrightarrow$

E	D
1	2
1,4	1,5
1,41	1,42
1,414	1,415
1,4142	1,4143
⋮	⋮

Temos em E uma aproximação por falta e em D por excesso.

$\underline{E}$ é a classe minorante.

$\underline{D}$ é a classe majorante.

Representação de um número absoluto α —

Achamos o maior inteiro contido em α, α_0 e fazemos –

$$\underbrace{\alpha_0 + \frac{1}{10},\ \alpha_0 + \frac{2}{10},\ \ldots,\ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}}_{E}\quad \underbrace{\alpha_0 + \frac{\alpha_1+1}{10}}_{D}$$

$$\underbrace{\alpha_0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2},\ \alpha_0 + \frac{2}{10} + \frac{1}{10^2},\ \ldots,\ \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}}_{E}\quad \underbrace{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2+1}{10^2}}_{D}$$

$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha$ e temos praticado um corte.

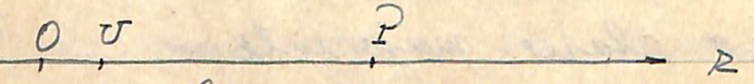
Se, por exemplo, em α_3 não fôsse possivel mais aproximaçaõ, α_2 será um numero decimal representando um numero real.

Por exemplo – $7{,}24 = 7 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10^2}$

O número $\sqrt{2}$ é irracional.

–

Representaçaõ dos números reais sobre uma reta.



Seja uma reta orientada r, a cada ponto P pode-se fazer corresponder um número x

que é real e representa a abcissa de P.

–

Conjunto dos números reais.

Para o número x, relativamente ao ponto P, diremos indistintamente ponto x ou P.

Um conjunto de numeros se diz ordenado, quando dado um elemento a, fôr possivel, conhecido outro b, dizer se a precede b ou vice-versa.

O conjunto dos numeros reais é ordenado.

O conjunto é denso, quando entre dois elementos a e b, couber mais um. O conjunto dos numeros racionais e reais é denso.

–

Continuidade – Um conjunto C é dito continuo, se fôr possivel dizer-se –

I) Se todo elemento de C pertence a uma e só a uma de duas classes E ou D.

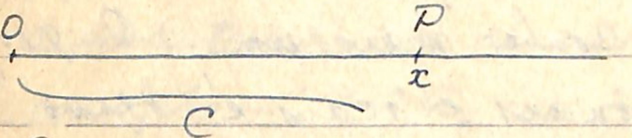
II) Se todo elemento de E preceder qualquer elemento de D.

III) Se existir um elemento de separaçaõ maximo de E ou minimo de D. Estes são conjuntos contínuos.

Aplicando este criterio aos numeros racionais, vemos que seu conjunto não é contínuo.

Os números reais constituem conjunto contínuo.

Vejamos os conjuntos lineares — A idéia de conjunto é primitiva. Se tivermos o conjunto de numeros reais, conhecê-mo-lo se soubermos se um numero real pertence a ele.



Seja um conjunto de pontos P.

E c + ———— ,, ————

20/7/1945.

Conjuntos lineares

São os formados pelos numeros reais. São lineares por poderem ser representados sobre uma reta. Chamemos x ao elemento P do conjunto C. Um conjunto é dado quando é

$\frac{1}{n}$ ... 1, 2, 3, ... São restrições acima, porem 1 é restrição superior.

possivel dizer-se se um numero real pertence ou não ao conjunto.

Seja x o elemento de um conjunto C.

O conjunto é restrito acima ou á direita se existir um numero R_a, tal que $x \leq R_a$.

Restrição superior — é a menor das restrições acima — R. Ex.°:— $1/n$ não admite minimo.

Ora, quando falamos em restrição superior é necessário provar a sua existência.

Dividamos o conjunto de todos os números reais em duas classes. Em D colocamos todos os números que não sejam superados por nenhum do conjunto; em E os restantes. Provocamos deste modo as hipoteses do teorema de Dedekind e temos um corte no campo real, existindo um numero R separador que é único e goza das propriedades:—

1) Á direita de R não existe ponto algum do conjunto. Decorre da separação das classes.

2) Á direita de $R - \varepsilon$ existe pelo menos um

ponto do conjunto (que pode ser o proprio R), sendo ε arbitrário e positivo.

? O ponto R é unico. Com efeito, se existisse outro R' á direita, seria $R' = R + \eta$ (com um certo η determinado)

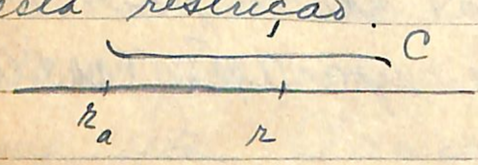
Podemos considerar $R' + \frac{\eta}{2}$ e $R - \frac{\eta}{2}$. Á direita de $R - \frac{\eta}{2}$ cái um ponto do conjunto que é $R' + \frac{\eta}{2}$. Isto nega a primeira propriedade.

Ainda $R' - \frac{\eta}{2}$ cai num ponto do conjunto, o que é contradição. (R' á direita de R)

R pode pertencer ou não ao conjunto.

Se pertence á classe E_1 é o extremo superior do conjunto ou máximo absoluto do conjunto $R \equiv E \, (\equiv M)$

Podemos enunciar — conjunto é restrito abaixo, restrição inferior do conjunto e demonstrar o teorema da existencia e unicidade desta restrição.



O conjunto é dito restrito quando é restrito abaixo e acima. Esta

compreendido no segmento rR. O conjunto é irrestrito superiormente ou acima ou á direita quando não admite R_a. Neste caso diz-se que $+\infty$ é uma restrição acima.

Igualmente o conjunto é irrestrito abaixo quando não existe a restrição abaixo; neste caso, por extensão, $-\infty$ é dito uma restrição abaixo.

Intervalo — é o conjunto dos números reais (todos os) entre dois pontos dados; a e b determinam um segmento AB cujos pontos formam um intervalo ou segmento. Surgem quatro casos a saber —

$a < x < b \rightarrow$ aberto

$a \leq x < b \rightarrow$ fechado á esquerda, aberto á direita

$a < x \leq b \rightarrow$ fechado á direita aberto á esquerda.

$a \leq x \leq b \rightarrow$ fechado.

Usa-se ainda a notação :— $a - b$, $a \vdash b$, $a \dashv b$, $a \vdash\!\dashv b$.

Chamaremos de extensão do intervalo ao número $b-a$, supondo $b > a$ e positivo.

Vizinhança á direita de um ponto é o

intervalo aberto á direita $a, a+\varepsilon$, aberto ou fechado á esquerda. ε é um numero real, pozitivo e arbitrario.

$$\left\{\begin{array}{l} a < x < a+\varepsilon \\ a \leq x < a+\varepsilon \end{array}\right. \longrightarrow \underline{V_d}$$

Vizinhança á esquerda do ponto $\underline{a}$ é o intervalo aberto á esquerda $(a-\varepsilon, a)$, aberto ou fechado á direita.

$$\left\{\begin{array}{l} a-\varepsilon < x < a \\ a-\varepsilon < x \leq a \end{array}\right. \longrightarrow \underline{V_e}$$

O conjunto das duas vizinhanças á esquerda e á direita de $\underline{a}$ é a vizinhança V de $\underline{a}$, e é o intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ao qual o ponto $\underline{a}$ pode pertencer ou não. A vizinhança é simetrica quando $\varepsilon = \varepsilon'$.

"

Ponto isolado - quando fôr possivel determinar um intervalo $a-\varepsilon, a+\varepsilon$ (ε determinado), no qual não haja outro ponto do conjunto. Então, é aquele que pertence ao conjunto e ao intervalo $a-\varepsilon, a+\varepsilon$, sendo ε um certo numero pozitivo.

"

Ponto de acumulação ou ponto limite - é o ponto não isolado. É um ponto tal que em suas vizinhanças arbitrarias caia pelo menos um ponto do conjunto; a vizinhança podendo ser á esquerda ou á direita; donde ponto de acumulação á esquerda ou á direita.

O ponto $\underline{a}$ pode pertencer ou não ao conjunto.

Exemplo - conjunto dos numeros $1/n$.

$1/1, 1/2, 1/3, \dots$ Zero é o ponto de acumulação e não pertence, no entretanto, ao conjunto; logo, é o ponto de acumulação do conjunto.

"

24/7/45

Recapitulando: -

Dado um conjunto $\underline{C}$, $\underline{a}$ é um ponto isolado, se não existir ponto algum do conjunto numa certa vizinhança simetrica de $\underline{a}$; i.é, em $a-\eta, a+\eta$ não caia ponto algum do conjunto.

Ponto de acumulação é o ponto não isolado. Podemos defini-lo — a é ponto de acumulação de um conjunto, pertencente ou não ao conjunto, se nas suas vizinhanças arbitrárias cair pelo menos um ponto do conjunto distinto dele.

Ao "ponto de acumulação" tambem se dá a denominação de "ponto limite", e só ao ponto de acumulação se aplica esta palavra.

Dado o conjunto C, chama-se primeiro derivado C' de C, ao conjunto dos pontos de acumulação de C.

Um conjunto é discreto se não tem ponto de acumulação e então C' é vazio.

O conjunto C e seu primeiro derivado podem ser: —

1) conjunto fechado ou cerrado, se C contem C'.

2) denso em si mesmo; tal que C é contido por C'.

3) perfeito, quando C e C' coincidem.

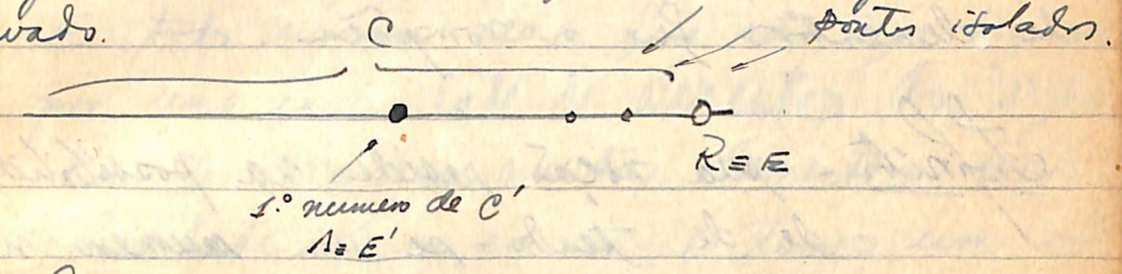
(restrição superior do conjunto derivado)
$\lim x = \Lambda$

Consideremos um conjunto C, cujo elemento representativo seja x e chamemos —

$\Lambda \equiv$ máximo limite de x (Cauchy)

$\lambda \equiv$ mínimo limite de x;

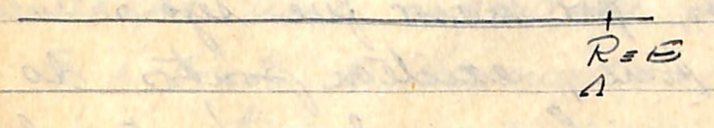
respectivamente às restrições superior do conjunto derivado e inferior do conjunto derivado.



Propriedades de Λ. —

Λ é ponto de acumulação pela esquerda ou pela direita.

Tomemos um conjunto tal que R pertença a ele. Neste caso R é extremo e portanto entre R − ε e R há uma infinidade de elementos; e será R o proprio Λ, pertencendo ao conjunto e sendo ponto de acumulação.



restrição inferior do conjunto derivado é mínimo limite.

Teorêma de Bolzano.

Preliminares –

Quanto ao numero de elementos, um conjunto pode ser finito – quando se pode conhecer o número de elementos, e infinito quando não se pode obtecer o numero de elementos que o compõem.

Infinito – sua noção reside na possibilidade de, tendo-se um numero n, poder-se ter outro número $n+1$.

Teorema de Bolzano –

"Todo conjunto infinito admite pelo menos um ponto de acumulação"

O conjunto pode ser: –

a) irrestrito – (acima ou abaixo), nesse caso o infinito é ponto de acumulação, pois se ele é irrestrito, por maior que seja o intervalo que se tome, existem pontos do conjunto nas vizinhanças do infinito, logo ∞ é ponto de acumulação.

b) restrito (abaixo e acima); cabe dentro de um intervalo.

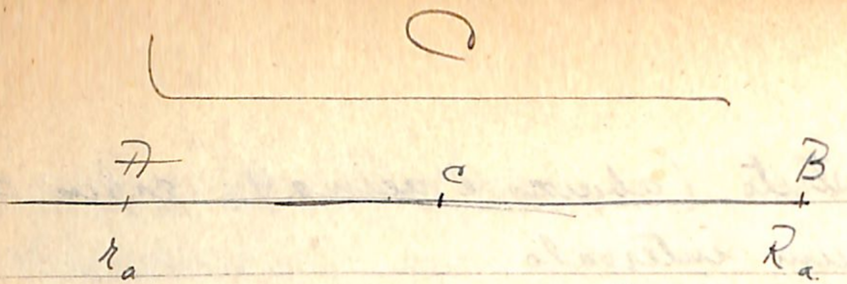
C

r R_a

Pode-se separar os números reais em duas classes, uma E e outra D, colocamos em E todo número real que não seja superado por uma infinidade de elementos do conjunto. Em D ficaram muitos elementos, mas a infinidade ficou em E e temos um corte no campo real. Podemos dizer ainda que em D só existe um número finito de elementos.

As classes E e D não são vazias, por existirem r_a e R_a. Qualquer elemento de E precede qualquer elemento de D. Então existe um elemento r_e que separa a classe E de D e esse número admite nas suas vizinhanças uma infinidade de elementos, logo r_e é ponto de acumulação do conjunto.

Demonstremos o teorema por meio do postulado de Cantor –

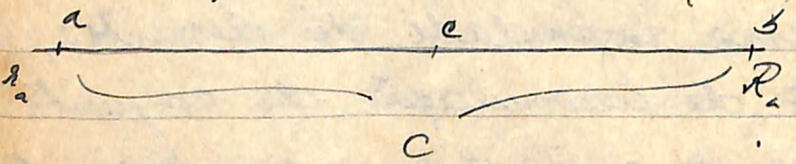


dividamos C ao meio (dicotomia), ou AC ou CB, contem uma infinidade de pontos; ficamos por exemplo com CB que os contem, e a CB dividamos em duas partes CD e DB, em uma delas deve haver uma infinidade de elementos ...

Formamos uma serie de segmentos uns internos aos outros, de maneira tal que se possa determinar um segmento $s_n < \delta$. O postulado de Cantor diz que existe um ponto comum a todos esses elementos, que é o ponto de acumulação. Cqd.

26/7/45

Vejamos a demonstração seguinte—



Seja um conjunto restrito que admite r_a e R_a

o conjunto C cabe então no intervalo a, b.

Podemos dividir o intervalo por um ponto qualquer c, ao meio por exemplo.

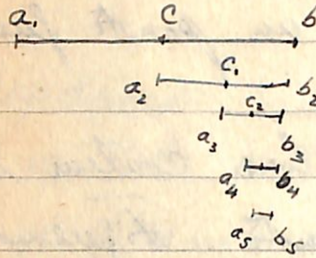
Quer ac, quer cb, ou ambos, contem uma infinidade de elementos do conjunto. Fiquemos sempre que possivel com o conjunto da direita.

Neste caso suponhamos que ac contenha infinitos elementos. Dividamos ac ao meio, em d.

Será b o extremo superior do primeiro intervalo, c o extremo superior do segundo intervalo. Repetindo-se a operação, os pontos b e c etc serão restrições acima dos conjuntos parciais com infinitos elementos.

Essas restrições acima conduzirão á existencia de uma restrição superior. A menor das restrições superior (acima) é um ponto $\bar{e}$, tal que contem na vizinhança arbitrária $\bar{e}-\varepsilon$, $\bar{e}$ uma infinidade de elementos. E $\bar{e}$ será o ponto de acumulação.

Com auxilio do postulado de Dedekind e das classes contiguas demonstremos este teorema — Seja o conjunto que está contido em $a_1 b_1$, tomemos o meio $c b_1 = a_2 b_2$ com infinitos elementos, depois $c_1 b_2 = a_3 b_3$ com infinitos elementos ainda, e assim por diante até $a_n b_n$.



Teremos $a_1 b_1$

$a_2 b_2$

.

$a_n b_n$ e pelo postulado de Cantor $a_n b_n < \delta$ e as classes contíguas (A, B) definem o número $\bar{x}$.

— 11 —

Consideremos um conjunto $\underline{C}$ de números reais, sendo x o seu elemento representativo.

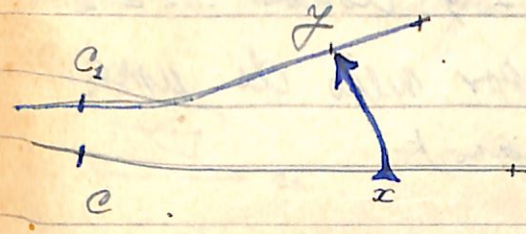
$\underline{x}$ pode ser chamado variável e toma todos os valores do conjunto, suposto não vazio; será a variável real.

A noção de correspondencia já deve ser conhecida — associação subjetiva de dois objetos.

Vejamos, com Dirichlet o que é função: —

Sejam dois conjuntos lineares de números reais — C cujo elemento representativo é $\underline{x}$;
C_1 " " " é y

Representemo-lo num diagrama —



Se a um elemento $\underline{x}$ corresponde um elemento y, então há correspondencia entre um elemento de $\frac{C}{\underline{x}}$ e um de $\frac{C_1}{y}$. Diz-se que y é função univalente de $\underline{x}$. Será a correspondência unívoca.

Poder-se-ia dar o caso de, tendo-se y, obter-se $\underline{x}$.

Representa-se uma função — $y(x)$ ou $y = f(x) = \varphi(x)$; onde $\underline{x}$ é a variável independente e y é a variável dependente.

$\underline{C}$ é o campo de definição da função

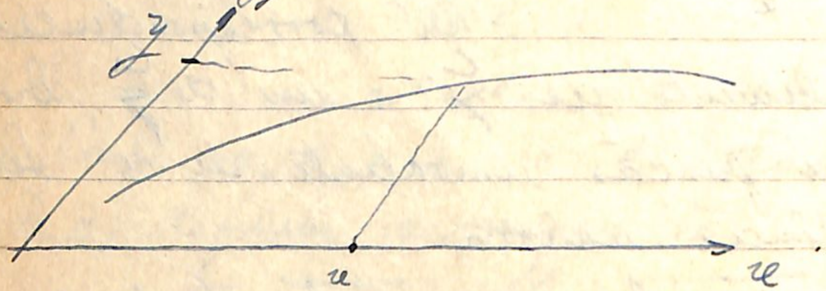
$\underline{C_1}$ é o campo de variação da função, cuja extensão chama-se oscilação da função.

No intervalo C, a função $y(x)$ tem uma oscilação $R - r = \Omega$

As funções podem ser dadas de diversas maneiras.

Por exemplo uma tabela como a dos senos, em que x é conjunto discreto; a oscilação de $y = \operatorname{sen} x$ é de -1 a 1, donde $\Omega = 2$

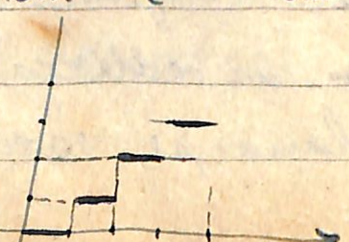
Podemos apresentar por meio de uma curva (diagrama cartesiano)



O caso de $y = \sqrt{x}$, é o de uma função que pode ser desdobrada —

$$\begin{cases} y_1 = +\sqrt{x} \\ y_2 = -\sqrt{x} \end{cases}$$

A função $y = [x] = I(x)$, maior inteiro contido em x tem como representação —



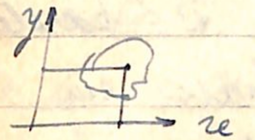
Exercícios —

Representar — $y = x \cdot I(x)$

$y = I(x) - [I(x)]^2$

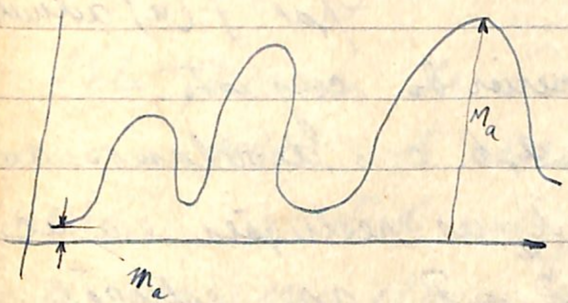
$y = x^2 I(x)$.

O número complexo é um par de números reais e são definidos por um conjunto real



$z = x + iy$.

Os conjuntos C_1 dos valores da função cujo elemento representativo é y, são extensíveis as definições de restrição acima, restrição superior, restrição abaixo, etc.



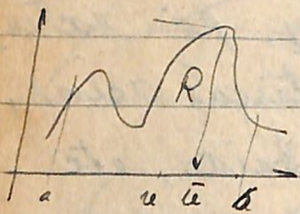
$M_a - m_a = R - r = \Omega$.

27/7/45

Os campos C e C_1 podem ser de números reais, naturais, irracionais, impares, etc.

Teorema de Weierstrass. (característica das restrições superiores de uma função).

Seja uma função $f(x)$ definida no conjunto C onde admite uma restrição superior R. Existe um ponto $\bar{x}$, dito ponto de Weierstrass em cujas vizinhanças a função $f(x)$ tem a mesma restrição R.



$a \leq x \leq b$

Provemos que existe $\bar{x}$ em cujas vizinhanças $f(x)$ admite R como restrição superior do conjunto.

Tomemos o intervalo a, b e o dividamos ao meio, chamemos R_1 e R_2 as restrições em ac e bc → $R_1 \leq R$ e $R_2 \leq R$, as restrições nos intervalos parciais não ~~sempre~~ superam a restrição total.

Supondo C restrito, ele cabe num intervalo ab. Dividamo-lo ao meio – ou em ac ou em cb ou em ambos a restrição de $f(x)$ ainda é R. Estabelecemos um critério de escolha – ficamos com o intervalo onde a restrição de $f(x)$ seja R; no caso de ser em ambos, tomamos o da direita.

Proseguindo no processo, chamamos de intervalos os extremos inferiores dos segmentos, de E, e de D os extremos superiores dos segmentos, onde $f(x)$ admite R como restrição superior; pelo processo de dicotomia teremos:—

$E_1, E_2, E_3, E_4 \ldots \quad D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots$

É possível encontrar-se um número n tal que $E_n D_n = \frac{b-a}{2^n} < \sigma$

Pelo teorema de Cantor existe um ponto comum a todos. A esses pontos correspondem números. Existirá um ponto do conjunto definido por essas classes contíguas, que será $\bar{x}$; e o qual é o ponto de Weierstrass.

Este será o primeiro ponto de Weierstrass à direita.

Existe o ponto. Provemos que nas suas vizinhanças a restrição ainda é R.

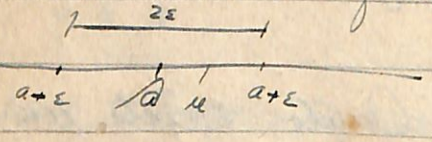
Escolhamos de $E \rightarrow x - \eta$ e

de $D \rightarrow x + \eta$. Teremos uma certa vizinhança na qual a restrição superior será R por não poder ser maior nem menor pela demonstração anterior.

LIMITES

Recordar ponto de acumulação

Devido à sua definição –



$\rightarrow |x-a| < \varepsilon$

Chamalo-emos ponto limite.

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

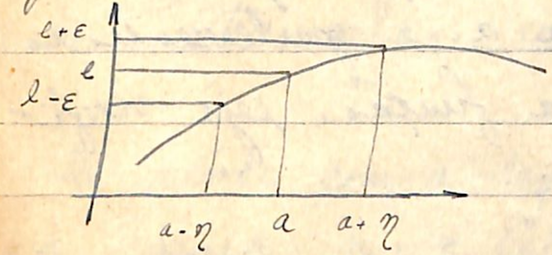
Consideremos $f(x)$ que é um conjunto de pontos no campo C_1. É possível que exista um ponto l para os valores de $f(x)$, isto quer dizer que $|f(x)-l| < \varepsilon$ sendo $\varepsilon > 0$, arbitrário.

Se x varia num campo C onde exista um ponto de acumulação a (pertencente ou não ao conjunto) será $|x-a| < \eta$, sendo $\eta > 0$, arbitrário.

Se eles não tem nada a ver um com o outro, η e ε são arbitrários.

O ponto $f(a)$ não nos interessa; excluímos $f(a)$ inteiramente da definição.

Pode ser que η corresponda a ε e deste dependa.



Se para um ε dado for possível determinar η, escrevemos –

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$ e dizemos que l é limite de $f(x)$ quando para ε arbitrário, tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ exista em correspondência um η tal que $|x-a| < \eta$.

2/8/45.

Teorema de Cauchy. (para funções definidas no campo dos numeros naturais) "A condição necessaria e suficiente para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é que, dado um número ε positivo e arbitrário, seja possivel determinar em correspondencia, uma vizinhança de a, de modo que, sendo x' e x'' dois pontos quaisquer dessa vizinhança, diferentes de a e pertencentes ao campo de definição da função, seja verificada a desigualdade:-
$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$."

Demonstraremos só para as funções definidas no campo dos numeros naturais, isto é, as sucessões.

Neste caso particular o teorema tem o seguinte enunciado

"A condição necessária e suficiente para que a função $a_n = f(n)$ admita limite é que exista $\lim_{n \to \infty} a_n$, é que dado ε positivo e arbitrário, seja possivel determinar em correspondencia, uma vizinhança do infinito, isto é, um número natural n_0 tal que, sendo n' e n'' dois números naturais quaisquer maiores que n_0, seja verificada a desigualdade- $|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$.

A condição é necessária —

Com efeito, suponhamos a existência do limite. Chamaremos a: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$

De acôrdo com a definição de limite, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n > n_0(\varepsilon)$, portanto, sendo n' e n'' dois números naturais quaisquer maiores que n_0, tem-se- $|a_{n'} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e

$|a_{n''} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ Somando-se membro a membro estas desigualdades virá:-
$|a_{n'} - a| + |a_{n''} - a| < \varepsilon$

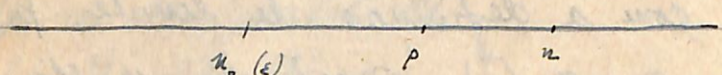
Com maior razão tem-se

$|a_{n'} - a + a - a_{n''}| < \varepsilon$ ou

$|a_{n'} - a_{n''}| < \varepsilon$ c.q.d.

A condição é suficiente, com efeito, suponhamos verificada a desigualdade

$|a_p - a_n| < \varepsilon$, sendo p e n dois números naturais quaisquer maiores que $n_0(\varepsilon)$. Fixemos p e façamos variar n além de p

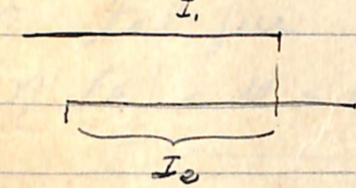


Como ε é arbitrário atribuamos a ε os valores da sucessão: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4} \dots$

Para ε igual a $1/2$ existirá um certo $p = p_1$, tal que $|a_{p_1} - a_n| < \frac{1}{2}$, isto é,

$a_{p_1} - 1/2 < a_n < a_{p_1} + \frac{1}{2}$

Estas desigualdades mostram que a a_n está compreendido no intervalo aberto I_1 de extremos $a_{p_1} - 1/2$ e $a_{p_1} + 1/2$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, será verificada a desigualdade $a_{p_2} - \frac{1}{2^2} < a_n < a_{p_2} + \frac{1}{2^2}$ onde podemos supor $p_2 > p_1$. Estas desigualdades mostram que a_n pertence a um certo intervalo I_2 que podemos supor estar compreendido em I_1 $(p_2 > p_1)$



O mesmo raciocínio pode se aplicar para os demais valores de ε, da sucessão aludida.

Deste modo obtem-se uma sucessão de intervalos "encaixantes" $I_1, I_2, I_3, \dots$

As amplitudes desses intervalos tendem a zero porque $\varepsilon \to 0$.

Estes intervalos, de acordo com o postulado da continuidade de Cantor determinam um ponto a pertencente a todos eles.

Provemos que a é o limite da sucessão a_n.
Com efeito, dado ε positivo e arbitrário, é sempre possível determinar um intervalo pertencente aos intervalos considerados anteriormente com amplitude suficientemente pequena $\left[2 \cdot \frac{1}{2^p} = \varepsilon\right]$ tal que seja verificada a desigualdade $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
O que mostra ser $\lim a_n = a$ Cqd.

3/8/45

Recordando:-

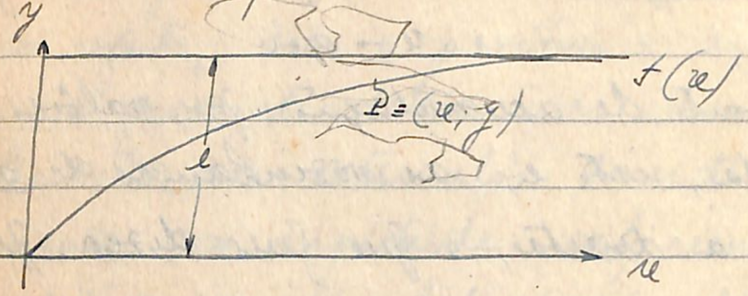
Para $f(x)$ definida em C, onde a é ponto de acumulação pertencente ou não a C e l ponto de acumulação de C_1, se, para um ε arbitrario: $|f(x) - l| < \varepsilon \rightarrow |x - a| < \eta(\varepsilon)$, poderemos dizer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Limite à direita - $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l$, quando a é ponto de acumulação por valôres de x à direita, isto é, as vizinhanças de a são vizinhanças à direita, o que quer dizer que - $|f(x) - l| < \varepsilon$ para $a < x < a + \eta(\varepsilon)$

Limite à esquerda - $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ quando em correspondencia a ε arbitrário existir um η tal que $|f(x) - l| < \varepsilon \longrightarrow a - \eta(\varepsilon) < x < a$

Vejamos quando a é infinito - as definições são as mesmas.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ exista um ε tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$, lhe corresponda um $N(\varepsilon)$ tal que $N(\varepsilon) < x$, isto significa que $+\infty$ é ponto de acumulação de x.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ se hou-

ver em correspondencia $N(\varepsilon) > x$

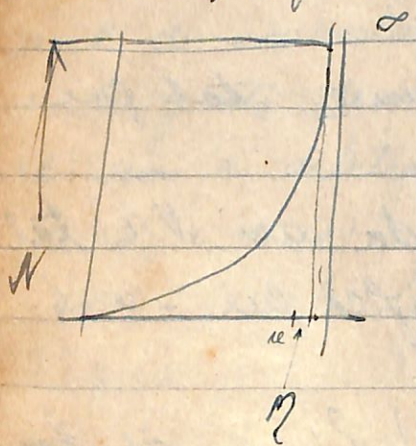


l é limite quando $x \to +\infty$

<u>Limite infinito para a finito</u> — Inver-

tem-se as proposições

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se, $f(x) > N$ (N arbitrário) para valores $|x-a| < \eta(N)$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$f(x) < N$ quando $|x-a| < \eta(N)$

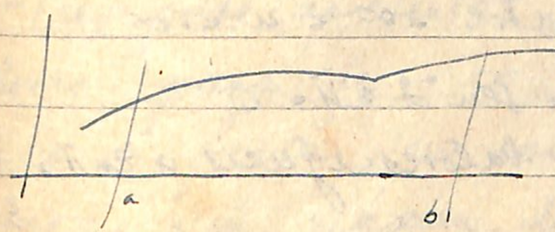
<u>Funções monotonicas</u>

Suponhamos $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$; quando isto se verifica simultaneamente no campo de definição, a função é crescente; se tivessemos $f(x_1) \leq f(x_2)$, a função seria "não decrescente".

Inversamente, se $x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2)$ a função é decrescente e se $f(x_1) \geq f(x_2)$ a função seria "não crescente".

Reunindo as duas "não crescente" e "não decrescente", chamamo-las <u>funções monotonicas</u>.

<u>Teorema de Weierstrass</u> — (caso particular das monotonicas). Seja $f(x)$ monotonica do conjunto C, compreendido no intervalo (a, b) admite uma restrição superior $f(x) \leq K$



O ponto de Weierstrass é <u>b</u>, pertencente ou não ao conjunto.

Dividindo <u>ab</u> ao meio, a restrição está á direita e assim por diante até que chegaremos a π que corresponde a <u>b</u>.

O ponto de Weierstrass para a restrição inferior se demonstra de igual maneira que coincide com <u>a</u>.

Se a função fosse não crescente, invertiam-se as conclusões, <u>a</u> seria a restrição superior e <u>b</u> a inferior.

Estudo da função $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, sendo <u>x</u> real. Nas vizinhanças do ponto zero não há sentido.

Tomemos valôres particulares —

1) $\frac{1}{x} = 2n\pi \to x = \frac{1}{2n\pi}$, neste conjunto, $C(n)$ variando <u>n</u> entre $-\infty < n < +\infty$

Teremos então $y = \operatorname{sen} 2n\pi = 0$

2) Mas $\frac{1}{x}$ pode ter valores iguais a $2n\pi + \frac{\pi}{2} = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ ~~logo $\frac{1}{x} = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$~~

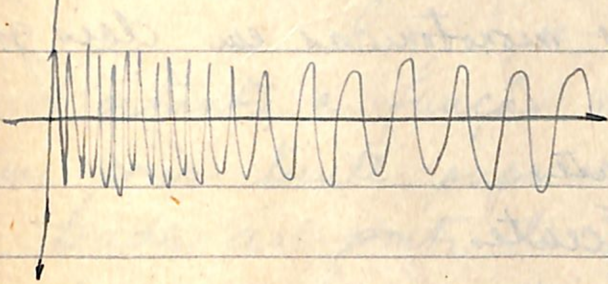
$x = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to$ e $\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +1.$

3) $\frac{1}{x} = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \to x = \frac{2}{(4n-1)\pi} \to$

$\operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

Quando <u>n</u> cresce, $x \to 0$. Para <u>n</u> muito grande há valôres muito próximos de zero.

A função toma o aspecto



A questão parece complicada para $x \to \infty$

Estudemos o caso geral.

$f(x)$ pode apresentar uma infinidade de valores para $x \to \infty$. Então, sendo simetrica a função, no campo de variação, teremos um máximo limite e mínimo limite, logo existe o conjunto derivado

$\Lambda \quad \Lambda'$

$\lambda \quad \lambda'$ } que são ditos limites de indeterminação.

7/8/45

Teorema geral de convergencia.

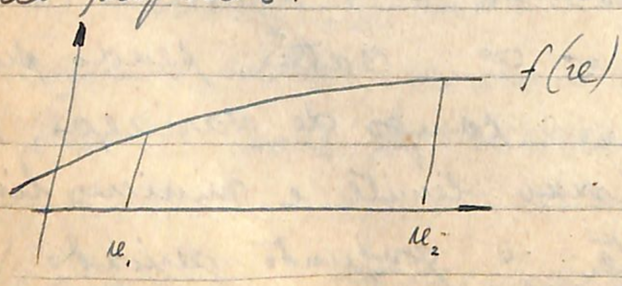
Para isto vejamos antes um teorema sôbre funções monotonicas.

Separamos as monotonicas em dois grupos –

1) as não crescentes
2) as não decrescentes

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$x_1 \leq x_2$$

Em $\bar{x}$, $f(x)$ admite $+\infty$ como restrição superior.



Sejam suas vizinhanças à esquerda (de $\bar{x}$); se existir a restrição ∞, superior, quer dizer que $f(x_1) > A$

$$\bar{x} - \delta < x_1 < \bar{x} \rightarrow f(x_1) > A$$

Para outro ponto $f(x)$, à direita de x_1,

$f(x) \geq f(x_1) > A \rightarrow f(x) > A$,

sendo $x_1 < x < \bar{x}$.

Dado A, determinamos em correspondencia δ e qualquer ponto do intervalo satisfaz $f(x) > A$, logo $\lim\limits_{x \to \bar{x}-} f(x) = +\infty$.

Portanto a função monotonica irrestrita tem como limite superior a $+\infty$ quando x tende ao ponto de Weierstrass pela esquerda.

Se a função for restrita, seja R a sua restrição superior. Tomemos o ponto de Weierstrass $\bar{x}$ em que R ainda é restrição superior. Tomamos $+\varepsilon$, arbitrário, existirá sempre um valor da função superior a $R - \varepsilon$ $\longrightarrow$ $R - \varepsilon < f(x_1)$

Então $\bar{x} - \delta < x_1 < \bar{x}$

de $R - \varepsilon < f(x_1) \longrightarrow -\varepsilon < f(x_1) - R$ (1)

ou (2) $\bar{x} - \delta < x_1 < \bar{x}$

$R - f(x_1) < \varepsilon$

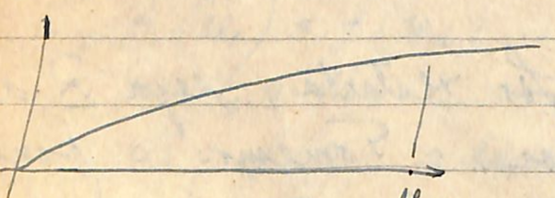
$-\varepsilon < f(x_1) - R$

Para cada ε determinamos δ de maneira que dado $\varepsilon \to \delta$, para pontos x_1 internos ao intervalo. Dada a arbitrariedade de ε, (1) e (2) permitem escrever

$|f(x) - R| < \varepsilon \longrightarrow$

$|x - \bar{x}| < \eta(\varepsilon)$ logo,

$\lim_{x \to \bar{x}-} f(x) = R$ que é, portanto o limite superior da função monotônica. x é R, mas não é ponto limite.



Para as funções não decrescentes existe um ponto de Weierstrass para o qual o limite por valores à direita das monotônicas não decrescentes é R.

Para as funções monotônicas não crescentes as conclusões se invertem.

Teorema de Cauchy

A condição necessária e suficiente para que $f(x)$ admita limite restrito, finito, é que

1) $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, ε arbitrário, sendo

2) $0 < |x' - \bar{x}| < \eta(\varepsilon)$

3) $0 < |x'' - \bar{x}| < \eta(\varepsilon)$, isto é, a ε corresponde um η tal que acarreta 2 e 3.

A condição é necessária —

Admitamos que o limite exista e seja l; resulta, por definição:—

$|f(x') - l| < \varepsilon/2$ quando $|x' - \bar{x}| < \eta(\varepsilon)$

$|f(x'') - l| < \varepsilon/2$ " $|x'' - \bar{x}| < \eta(\varepsilon)$

Escolhemos o menor η.

Temos que:—

$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - l - [f(x'') - l]| \le$

$\le |f(x') - [\text{illegible}] + |f(x'') - l| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

para os pontos $|x' - \bar{x}| < \eta$ e
$|x'' - \bar{x}| < \eta$ e a condição é portanto necessária.

A condição é suficiente —

Partindo das conclusões vejamos se existe o limite l: —

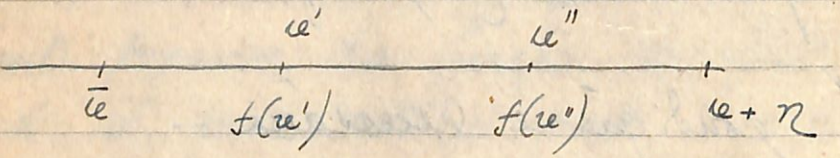
Demonstremos pelas vizinhanças à direita —

Seja a relação (1) $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

teremos

$\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$

$f(x'') - \varepsilon < f(x') < f(x'') + \varepsilon$



Fixado o δ, podemos fixar um dos pontos — seja x'', x' continua movel, satisfazendo às condições iniciais.

Então, a função $f(x')$ é restrita.

$f(x'') - \varepsilon \le \lambda \le \Lambda \le f(x'') + \varepsilon$

Para cada valor de ε correspondem um λ e um Λ, tais que

$f(x'') - \varepsilon \le \lambda(\varepsilon) \le \Lambda(\varepsilon) \le f(x'') + \varepsilon$.

Fazendo variar ε, λ e Λ são duas funções monotonicas restritas; logo $\lambda(\varepsilon)$ admite limite $\Lambda(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon) \le 2\varepsilon$

$\lambda(\varepsilon)$ admitirá uma restrição λ_0 e $\Lambda(\varepsilon)$ admitirá uma restrição Λ_0, quando $\varepsilon \to 0$. λ_0 só pode aumentar, logo

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(\varepsilon) \le \lambda_0 \\ \Lambda(\varepsilon) \ge \Lambda_0\end{array}\right\} \Lambda_0 - \lambda_0 < \Lambda(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)$$

mas sendo λ_0 e Λ_0 constantes e 2ε arbitrário, é preciso que $\Lambda_0 = \lambda_0$ e chamaremos então $\underline{\Lambda_0 = \lambda_0 = l}$.

Provamos que a partir das conclusões chegamos à existência de um limite.

Λ e λ são os limites de indeterminação

Pode-se demonstrar o teorema para vizinhanças à esquerda. Aparecem então quatro números Λ_e, λ_e e Λ_d e λ_d os quais devem ser necessariamente iguais para que haja limite l. c.q.d.

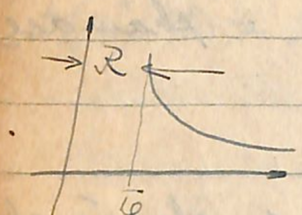
Na função $y = \operatorname{sen} 1/x$, temos

$\Lambda_d = \Lambda_e = +1$ $\quad \lambda_d = \lambda_e = -1$, logo não existe lim y.

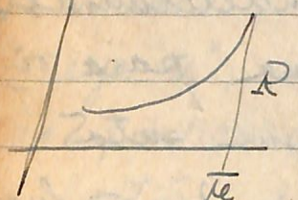
Observe-se que estes dois limites poderiam ser diferentes.

9/8/45

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = R$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{finito} \\ \text{infinito} \end{array} \right.$



Supondo funções não decrescentes —

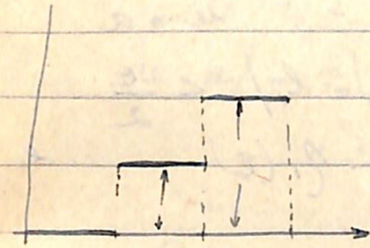


$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = R.$

$\eta > \eta'$ $\quad \Lambda(\eta) \geq \Lambda(\eta')$

$\quad \lambda(\eta) \leq \lambda(\eta')$

Se $\left. \begin{array}{l} \Lambda_d = \lambda_d = l_d \\ \Lambda_e = \lambda_e = l_e \end{array} \right\} l_d = l_e$



$\left\{ \begin{array}{l} l_e = 1 \\ l_d = 2 \end{array} \right.$ São diferentes.

Unicidade do limite — $\lim_{x \to a} f(x) = l$ é único. Si existisse: —

$|l - l'| = |[f(x) - l'] - [f(x) - l]| \leq$

$\leq |f(x) - l'| + |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

Tomando o menor η

$|x - a| < \eta(\varepsilon)$ $\quad |x - a| < \eta(\varepsilon)$ e

$|l - l'| < \varepsilon$ donde, $l = l'$

Limite da soma, da diferença, produto quociente, etc. consideradas conhecidas.

Vejamos o caso da soma —

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x)$$

Hipotese — Existem $\begin{cases} |f_1(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x - a| < \eta_1(\varepsilon) \end{cases}$ e

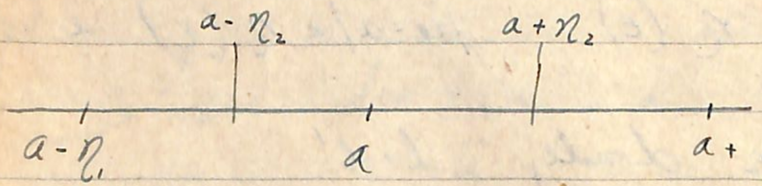
$$\begin{cases} |f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x - a| < \eta_2(\varepsilon) \end{cases}$$

Partindo da identidade —

$$|[f_1(x) + f_2(x)] - [l_1 + l_2]| = |[f_1(x) - l_1] +$$

$$+ [f_2(x) - l_2]| \leq$$

$$\leq |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



Escolhemos o menor intervalo (η_2)

$|x - a| < \eta(\varepsilon)$

Analogamente para diferença, produto e quociente.

Infinitesimo — é uma função cujo limite é zero quando $\lim x = a$

$|x - a| < \varepsilon$

$\lim (x - a) = 0$ (infinitesimo).

Rever apontamentos sobre limites.

21/8/45.

Infinitesimos.

Seja $\varphi(x) = x$.

Se $\lim_{x \to 0} \varphi_1(x) = 0$, resulta que x é por definição infinitesimo no ponto zero.

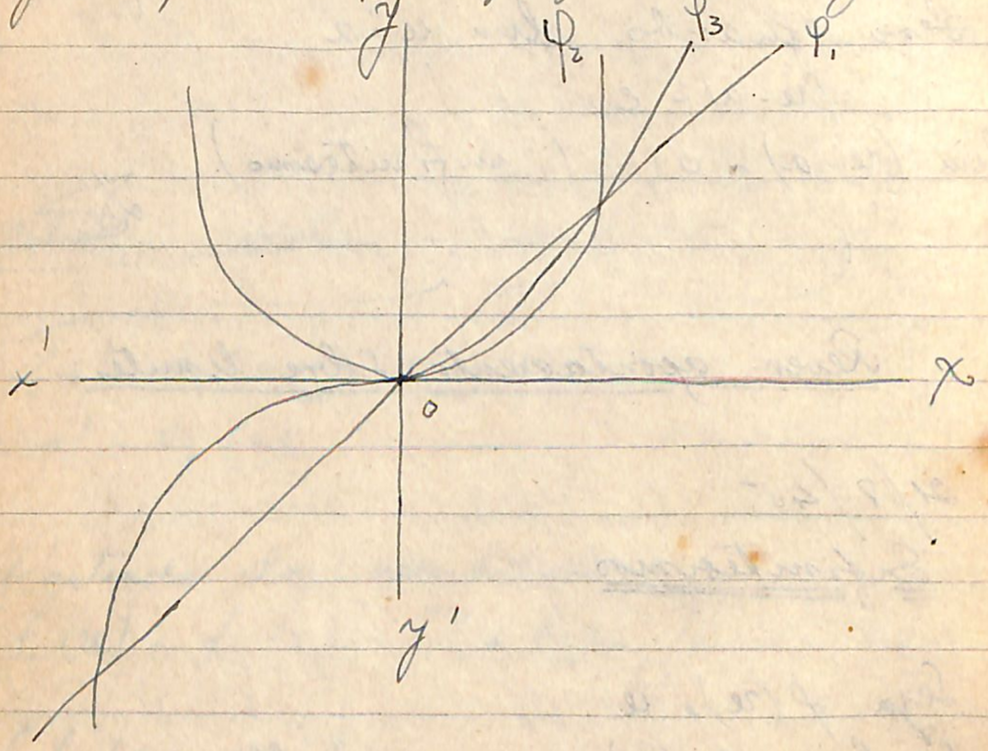
Vejamos então três funções infinitesimas no ponto zero —

$\varphi_1(x) = x \quad \lim_{x \to 0} \varphi_1(x) = 0$

$\varphi_2(x) = x^2 \quad \lim_{x \to 0} \varphi_2(x) = 0$

$\varphi_3(x) = x^3 \quad \lim_{x \to 0} \varphi_3(x) = 0$

cuja representação gráfica é a seguinte –



Estudando em conjunto estes três infinitésimos, vejamos sua "capacidade" de anulação –

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_3}{\varphi_2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to 0} x = 0$$

Suponhamos $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, duas funções infinitésimas no ponto a. Resulta então que sua comparação pode ser –

$$\begin{cases} 0 & (1) \\ A \neq 0 & (2) \\ \infty & (3) \end{cases}$$

, no caso de existir o limite e elas são "comparáveis".

Surgem então algumas definições –

Em (1) – ordem infinitesimal de $\varphi(x)$ > ordem infinitesimal $\psi(x)$.

Em (2) as ordens infinitesimais são iguais.

Em (3) ord. inf. $\varphi(x)$ < ord. inf. $\psi(x)$

A ordem goza da propriedade de igualdade e desigualdade.

Por exemplo (A) –

ord. $\varphi(x)$ > ord. $\psi(x)$ ≥ ord. $f(x)$, segue-se – ord. $\varphi(x)$ > ord. $f(x)$

Ora, quando dizemos

ord. $\varphi(x)$ > ord. $\psi(x)$ $\rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$ e

ord. $\psi(x)$ ≥ ord. $f(x)$ $\rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{f(x)} = A$

sendo $A \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$.

Observemos a identidade $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$

Passando ao limite –

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{\psi(x)}{f(x)} = 0,$$

logo, de acordo com a definição –

ord. $\varphi(x) >$ ord. $f(x)$. c.q.d.

Deduzimos desde logo que as ordens formam conjunto ordenado.

Meçamos a ordem infinitesimal. Para isto escolhamos uma função, seja ela $f(x) = (x-a)$

Diremos, por definição –

ord. $(x-a) = 1$ e

ord. $(x-a)^n = n$, então –

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{ord. } \varphi(x) > n \\ A \neq 0 & \text{ord. } \varphi(x) = 0 \\ \infty & \text{ord. } \varphi(x) < n. \end{cases}$$

Consideremos o ponto impróprio –

$a = \infty$ e a função $1/x$, será

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Será ord. $\frac{1}{x} = 1$

ord. $\left(\frac{1}{x}\right)^n = n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{(1/x)^n} = \begin{cases} 0 & \text{ord. } \varphi(x) > n \\ A \neq 0 & \text{"} \quad = n \\ \infty & \text{"} \quad < n \end{cases}$$

Isto é o mesmo que considerar a função $\lim_{x\to\infty} x^n \cdot \varphi(x)$ e as considerações são as mesmas para $\underline{n}$ real positivo.

Ex.: – 1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \}$ ord. sen $x = 1$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$

$= \frac{1}{2} \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$, e será

ord. $1 - \cos x = \frac{1}{2}$.

Definições — $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 \rightarrow$

A é a parte principal e

$A(x-a)^n$ é o valôr principal.

Ordem infinitesimal da soma.

Admitamos a existência de

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^n} = A \neq 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{(x-a)^m} = B \neq 0 \quad (2)$$

Seja $n < m$, será a ordem infinitesimal da soma igual a n.

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{(x-a)^n} = A + 0,$$

de acordo com a hipotese e a ordem da soma é n. cqd.

Suponhamos $n = m$, resulta

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^n} + \frac{\lim f_2(x)}{(x-a)^n} =$$

$$= A + B = \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}.$$

Finalmente podemos dizer "a ordem infinitesimal da soma de dois infinitesimais num ponto é a ordem da menor das parcelas ou a mesma ordem que as parcelas (se estas fôrem iguais) ou ainda, de ordem superior."

A ordem da soma não será inferior á menor ordem das parcelas.

Conservando (1) e (2), vejamos a ordem do produto.

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{(x-a)^{n+m}} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{(x-c)^n} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f_2(x)}{(x-a)^m} = A \cdot B \neq 0.$$

O que nos leva a concluir que "a ordem infinitesimal de um produto de dois infinitesimais num ponto é a soma das ordens infinitesimais dos fatores no mesmo ponto."

Consideremos o quociente —

$n > m$

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x) / f_2(x)}{(x-a)^{n-m}} \rightarrow$$ resulta ser in-

tão a ordem infinitesimal de um quociente de dois infinitesimais num ponto é a diferença entre as ordens do quociente e do divisor, supondo $n > m$.

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi_1(x) / \varphi_2(x)}{(x-a)^{n-m}} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^n}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^m}} = \frac{A}{B} \neq 0.$$

Corolários

1) Do 1º teorema (soma). A ordem infinitesimal não se altera se a uma função somarmos outra de maior ordem.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = A \rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{(x-a)^n} - A \right) = 0$$

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} - A = \psi(x)$$

$f(x) = A(x-a)^n + (x-a)^n \psi(x)$; donde ainda

2) O infinitesimo se decompõe em sua parte principal e um infinitesimo de maior ordem.

3) Do terceiro teorema —

Principio da substituição dos infinitesimos —

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, supostos de igual ordem.

Temos $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi_1(x) + \overline{\varphi}_1(\overline{x})}{\varphi_2(x) + \overline{\varphi}_2(x)}$, sendo

ord. $\varphi_{1,2}(x) >$ ordem $\overline{\varphi}_{\frac{1}{2}}(x)$

igual a —
$$\frac{\lim \frac{\varphi_1}{(x-a)^n} + \lim \frac{\overline{\varphi}_1}{(x-a)^n}}{\lim \frac{\varphi_2}{(x-a)^n} + \lim \frac{\overline{\varphi}_2}{(x-a)^n}} =$$

$$= \frac{\lim \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^n}}{\lim \frac{\varphi_2(x)}{(x-a)^n}} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \text{ isto}$$

quer dizer que juntando $\overline{\varphi}_1(x)$ e $\overline{\varphi}_2(x)$, não houve alteração no limite.

Então, ao escrevermos que —

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{\varphi_1(x) + \bar{\varphi}_1(x)}{\varphi_2(x) + \bar{\varphi}_2(x)}$$, cometemos um erro, pois isto só é verdade no limite.

Êste é o princípio da substituição dos infinitésimos.

23/8/45

Funções contínuas

Seja $f(x)$, definida no conjunto C, onde ela é restrita, determinemos um ponto de acumulação a de C.

1) Suporemos que existe $f(x)$

2) Suporemos que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3) Suporemos que

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

4) Suporemos mais

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim f(x)$$

5) e mais $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se todas as condições fôrem satisfeitas diremos que a função é contínua no ponto a

Outra maneira de apresentar a continuidade, e que encerra todas as 5 condições é —

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to a} x\right)$ neste caso são permutáveis os símbolos de função e de limite. $|f(x) - f(a)| < \varepsilon \rightarrow |x-a| < \eta$ ou

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon \rightarrow a - \eta < x < a + \eta$.

Todas dão a característica da continuidade.

Observe-se que a deve pertencer ao conjunto.

Então, o conjunto de definição precisa ser denso em si.

Fala-se então em continuidade em um intervalo.

Nos casos dos extremos de intervalos ou dos conjuntos parciais i — s, sendo $f(x)$ contínua em a →

satisfazendo 1, 2 e 5, e neste caso particular a função é contínua em a.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

no ponto b satisfazendo 1, 3 e 5 ou

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

Dispensamos portanto algumas exigências.

Exemplo. $I(x)$ — no ponto 2 a função não é contínua por admitir dois limites, um à direita, outro à esquerda.

A continuidade depende do limite —

Por exemplo: duas funções contínuas num ponto, sua soma tambem é contínua.

O produto de duas funções contínuas é uma função contínua no mesmo ponto.

Tambem o quociente, excetuado o zero em denominador.

Em geral — Uma função racional composta de funções contínuas é uma função contínua, excetuados os zeros do denominador.

Teoremas fundamentais —

1) Da permanência do sinal —

Seja $f(x)$ contínua no campo C e no ponto a de C.

Então, suponhamos $f(a) > 0$, diremos que nas vizinhanças de a ela mantem seu sinal (positivo no caso)

$$a - \eta < x < a + \eta \rightarrow f(x) > 0$$

Ora, por hipotese $f(x)$ é contínua, então —

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ para ε positivo e arbitrário, e existe um η tal que

$$a - \eta < x < a + \eta$$

Escolhamos um valor para ε — $\frac{1}{2} f(a)$.

Resulta que — $f(a) - \frac{1}{2} f(a) < f(x) < f(a) + \frac{1}{2} f(a)$

e $a - \eta < x < a + \eta$.

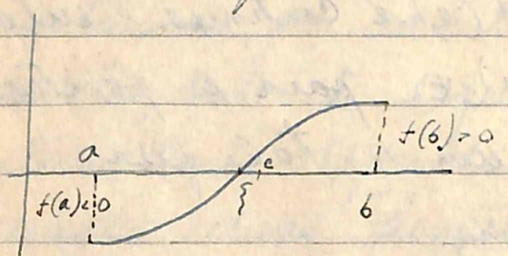
Então — $\frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$, mas — $\frac{1}{2} f(a)$ e $\frac{3}{2} f(a)$ são positivos ambos, logo

$$0 < f(x) \quad \text{c.q.d.}$$

Analogamente se demonstraria se a função tivesse valôr negativo.

2) De Cauchy-

Se uma função $f(x)$ contínua num intervalo fechado a, b tomar valores de sinais opostos nos extremos do intervalo, então existe um ponto do intervalo aberto $a < \xi < b$, no qual $f(\xi) = 0$



Demonstremos pela dicotomia, para isto dividamos ab ao meio. Seja c este ponto de divisão, ou $f(c) = 0$ e o teorema está demonstrado ou $f(c) \neq 0$; suponhamos $f(c) > 0$. Tomamos $a = a_1$, $c = b_1$ e neste intervalo fechado a_1, b_1, será $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Dividamos ainda ao meio, em c_1, e será $f(c_1) \gtreqless 0$. Se $f(c_1) = 0$ o teorema está demonstrado; se $f(c_1) \geq 0$

recaímos no caso anterior. Continuamos com este processo e - ou caímos em um c em que $f(c) = 0$ ou formamos uma serie de intervalos

$$ab \text{ — } b-a$$
$$a_1 b_1 \text{ — } \frac{b-a}{2}$$
$$\dots$$
$$a_n b_n \text{ — } \frac{b-a}{2^n}$$

e temos construído uma serie de 2 classes contíguas de números $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, $b_1, b_2 \dots b_n$ tal que seja possível escolher um número da primeira e um número da segunda de tal maneira que $b_i - a_i < \sigma$. Elas então definem um número real $\xi = (\bar{a}, \bar{b})$ e dizemos que $f(\xi) = 0$. Com efeito, pois se não fosse, $f(\xi)$ teria sinal $\pm$ e pelo teorema anterior seria possível determinar uma vizinhança $\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$ na qual o sinal de $f(x)$ fosse o mesmo que $f(\xi)$; ora ξ é o elemento separador das classes a e b e seria possível escolher um par $\bar{a}$ e $\bar{b}$ tais que $f(\bar{a})$ e $f(\bar{b})$ tivessem sinais opostos, quando deviam ter sinais iguais pelo teorema anterior; logo

$f(\xi) = 0$

—— // ——

24/8/45.

3) Seja $f(x)$ contínua num ponto a e restrita no intervalo que o contem.

$a \le x \le b$, admite portanto (R) e (r)

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$

$a - \eta < x < a + \eta$

Para esta vizinhança — $f(x) < f(a) + \varepsilon$

$a \quad x \quad a+\eta$

Se ela é restrita numa parte do intervalo a, b, mostremos que é restrita em todo o intervalo. Para isso, repartamos os pontos de a, b em duas classes — em E os números reais para os quais $f(x)$ é restrita, em D os pontos para os quais $f(x)$ não é restrita. Pelo teorema de Dedekind fica determinado o número ξ do intervalo. A função é contínua em a, b, portanto também o é em ξ. e

$f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon$

$\xi - \eta < x < \xi + \eta$

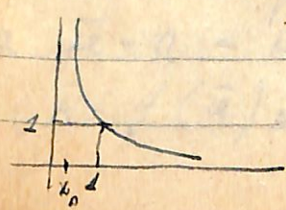
$E \quad \xi \quad D$

Existem pontos $f(x) < f(\xi) + \varepsilon$; portanto, pela continuidade, existem pontos onde a função é restrita e estamos em face a uma contradição.

A classe D só pode então ser vazia e então não define ξ e não há a separação de classes. Se a função é restrita acima, admite R.

Analogamente demonstraríamos que é restrita abaixo, no intervalo a, b, admitindo r.

Observação — É necessário que o intervalo seja fechado, pois por exemplo da função $1/x$, no intervalo aberto $0 < x \le 1$ ela é contínua. Em 0 ela não é definida e tem o aspecto ao lado.



Escolhamos um ponto $x_0 > 0$

$\frac{1}{u_0} - \varepsilon < \frac{1}{u} < \frac{1}{u_0} + \varepsilon$ (1) Existe, portanto, dado um ε, para u_0 uma vizinhança $u_0 - \eta < u < u_0 + \eta$ (2) para a qual as relações são verificadas. Os pontos desta vizinhança são positivos e podemos multiplicar (1) por $u u_0$ →

$$u - \varepsilon u u_0 < u_0 < u + \varepsilon u u_0 \quad \text{ou}$$

$$u_0 - u < \varepsilon u u_0 < \varepsilon u_0^2$$

com maior razão pois $u_0 > u$, porem (2) →

$$u_0 - u < \eta .$$

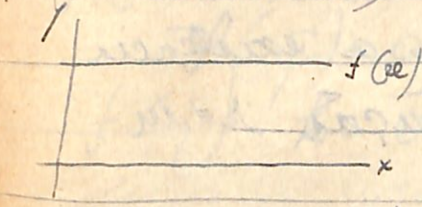
$$\varepsilon u_0^2 = \varepsilon' \to \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{u_0^2}$$

Então — Dado o número arbitrário ε', podemos determinar η, porem, fixado ε' o número ε não pode ser fixado pois depende de u_0. ε será muito grande. Se o intervalo fôr aberto haverá incompatibilidade.

Num intervalo fechado, onde $f(x)$ é contínua, essa função atinge seus extremos.

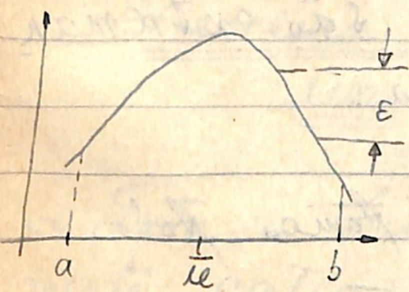
Seja o intervalo a, b e $f(x)$ contínua. Pelo teorema de Weierstrass ela admite um ponto $\bar{x}$ em cujas vizinhanças a restrição ainda é R.

Então — 1) A função é constante em a, b



Será — $f(x) = R = k$ e o teorema está demonstrado.

2) a função não é constante



Para um dado $\varepsilon > 0$, existe um valôr da função, um ou mais, nas vizinhanças de R onde $R - f(x) < \varepsilon$ pelas propriedades de R.

Nesse ponto $\bar{x}$ a função é contínua.

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon .$$

Existe para este ε uma vizinhança $\bar{x} - \eta < x < \bar{x} + \eta$ →

$$R - f(\bar{x}) = R - f(x) + f(x) - f(\bar{x}) \quad \text{ou}$$

$R - f(\bar{x}) \leq |R - f(x)| + |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon + \varepsilon \rightarrow$

$R - f(\bar{x}) < 2\varepsilon$,

sendo 2ε arbitrario e R e $f(\bar{x})$ constante. R (E) $\equiv f(\bar{x}) \equiv M$ (máximo e extremante).

Então – o ponto de Weierstrass para funções continuas é extremante.

Analogamente se demonstra a existencia de $f(\bar{\bar{x}})$ onde há a restrição $r \equiv m$, que é extremante inferior.

"Os pontos de Weierstrass para funções continuas são extremantes". É a dedução lógica.

– Uma função continua toma todos os valores entre seus extremos –

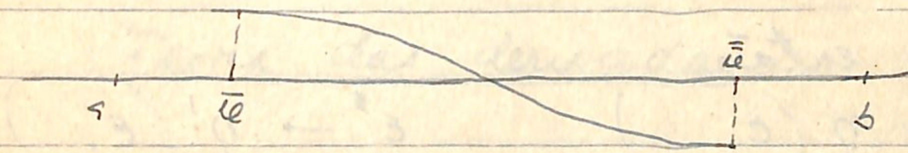
Seja $f(x)$ uma função de extremos $\underline{R}$ e $\underline{r}$ ou $\underline{M}$ e $\underline{m}$, ou ainda $\underline{E}$, $\underline{e}$.

Consideremos o número $r < k < R$ e a função $f(x) = \varphi(x) + k \rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = M \\ f(\bar{\bar{x}}) = m \end{array}\right\}$ ela tem minimo e maximo,

e teremos $\varphi(\bar{x}) = M - k > 0$

$\varphi(\bar{\bar{x}}) = m - k < 0$



Existe um ponto $\bar{x} < \xi < \bar{\bar{x}}$ onde $\varphi(x)$ se anula

$\varphi(\xi) = 0$ mas $\varphi(x) = f(x) - k \rightarrow$

$f(\xi) - k = 0 \rightarrow f(\xi) = k$ cqd.

Teorema da continuidade uniforme.

Toda a função continua é uniformemente continua (demonstremos com Peano).

Continuidade uniforme –

Uma função é continua em x_0. Será então $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$x_0 - \eta < x < x_0 + \eta$

e em x_0'

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0') + \varepsilon$

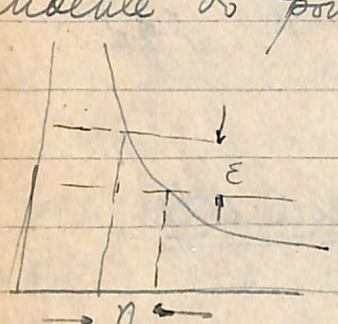
$x_0' - \eta' < x < x_0' + \eta'$

Temos então

$\varepsilon \rightarrow \eta(\varepsilon, \quad)$ $\quad\quad \varepsilon \rightarrow \eta'(\varepsilon,$

Vemos que η depende de ε e do ponto — $\eta(\varepsilon, x_0)$.

Poderá existir um número η independente do ponto?



Se existir, a função é uniformemente contínua; isto é, $\underline{\eta}$, para um mesmo ε independe do ponto.

CÁLCULO DIFERENCIAL.

Teoria das derivadas

28/8/45

Consideremos $f(x)$, contínua em um ponto $\underline{c}$ e a diferença dos números $f(x) - f(c)$, $\underline{x}$ na vizinhanças de $\underline{c}$; dividindo pelo número não nulo $\underline{x - c}$ vem

$\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Pode acontecer que exista

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$. Esta é a derivada da função $f(x)$ no ponto $\underline{c}$.

Da maneira apresentada, não notamos derivada à esquerda nem à direita.

Derivada à direita

$\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c+)$ e

à esquerda —

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c-)$$

Em vista da existencia do limite —

$$\lim \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right] = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c) = \theta(x)$$ é uma

função infinitesima, logo

$$f(x)-f(c) = f'(c)(x-c) + \theta(x)(x-c) \quad \text{e}$$

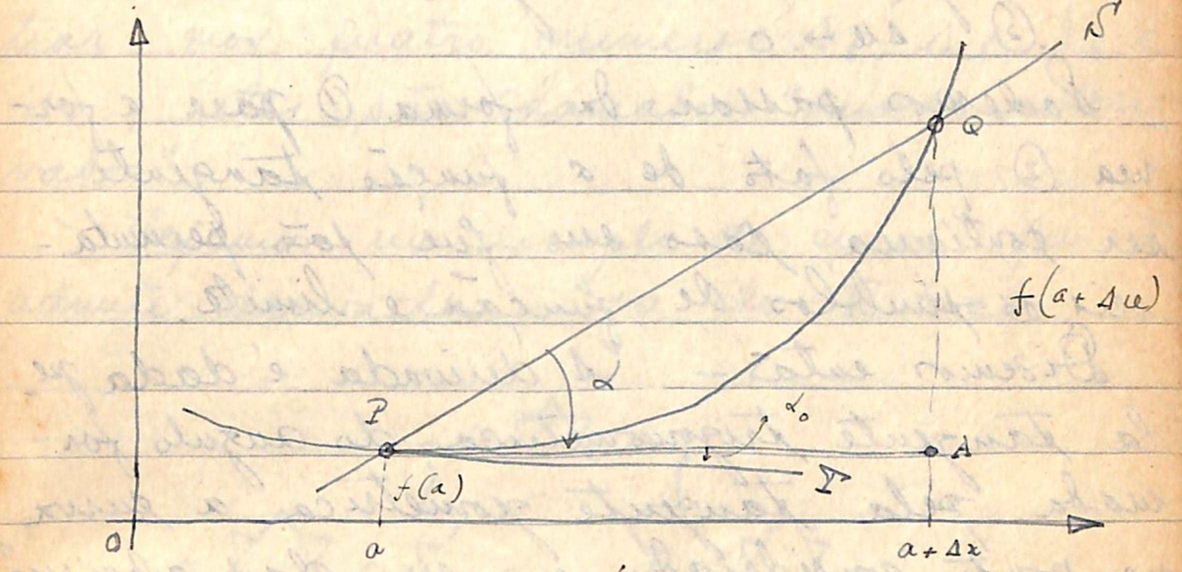
Quando $x \to c$ a função é infinitesima.
A parte principal do infinitesimo é $f'(c)(x-c)$. $\theta(x)(x-c)$ é infinitesimo de ordem superior.

Consideremos $\lim_{x\to c} f(x) - f(c) = 0$, isto é, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Verificamos que a função é continua em c. A continuidade é necessária, porem não é suficiente.

A primeira função continua sem derivada foi construida por Weierstrass, tendo sido mais tarde apresentadas outras.

Vejamos o significado geometrico das derivadas.



Suponhamos uma função continua, derivável num ponto a, e a sua representação cartesiana.

A secante S permite considerar o Δ PQA, então — $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = tg\,\alpha$

sendo $AQ = f(a+\Delta x) - f(a)$; $PA = \Delta x$ e $tg\,\alpha = \frac{AQ}{AP}$.

Ao passarmos ao limite, virá —

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \overset{1}{=} \lim_{\Delta \alpha \to 0} tg\, \alpha =$$

$$= tg \overset{2}{(} \lim_{\Delta \alpha \to 0} \alpha) = tg\, \alpha_0 = f'(a)$$

Podemos passar da forma ① para a forma ② pelo fato de a função tangente ser continua, caso em que são permutáveis os simbolos de função e limite.

Dizemos então — "A derivada é dada pela tangente trigonometrica do angulo formada pela tangente geometrica à curva no ponto considerado e o eixo das abcissas".

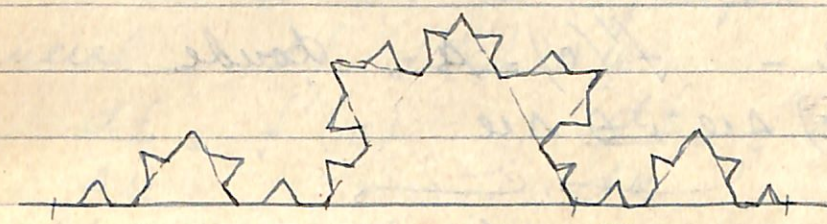
De uma maneira geral — "A derivada é o limite da relação do acrescimo da função para o acrescimo da variável num ponto considerado, quando o acrescimo tende a zero."

A interpretação cinemática da derivada, já conhecida é $\lim_{\Delta t \to 0} V_m = V$

isto é, o limite da velocidade media quando o acrescimo do tempo tende a zero é a velocidade verdadeira ou instantanea num certo ponto.

Se, ao derivarmos uma função, encontrarmos quatro números Λ_e, Λ_d, λ_e e λ_e, estes são chamados "números derivados".

Vejamos um exemplo de curva que não admite derivada — a de V. Koch.



Ao fim da construção de n triangulos, de acordo com a figura, temos dois pontos tão proximos quanto queiramos e uma linha continua.

Esta curva como podemos observar fácilmente, não admite uma tangente e sua função correspondente não admitiria derivada. (Ex. de Pascal)

Função diferenciada

Consideremos a diferença $f(c+\Delta x) - f(c)$, este é o acréscimo Δf da função. Se êle puder ser posto sob a forma $A.\Delta x + \theta.\Delta x$ (θ infinitésimo), a função se diz *diferenciável*.

Dada esta definição – $\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \theta$; e no limite – $f'(c) = A$, donde

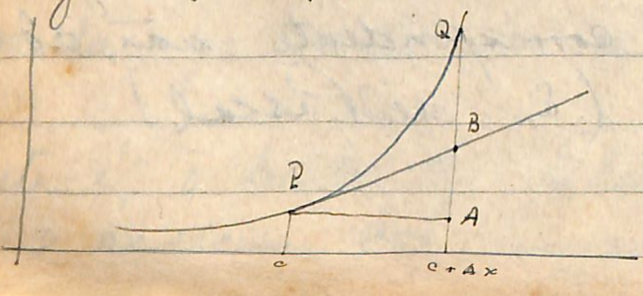
$\Delta f = f'(c).\Delta x + \theta.\Delta x.$

Vejamos outra definição –

A função que tem como diferencial no ponto *c* $df = f'(c).\Delta x$.

Diferencial – é o produto da derivada no ponto, pelo acréscimo da variável.

Logo $\Delta f = df + \theta.\Delta x$.



$AB = df = PA.\,tg\,\alpha.$

$BQ = \theta.\Delta x$ (infinitesimo)

$\Delta f = AQ$

Caso particular – Consideremos $f(x) = x$. A diferencial será $df = 1.\Delta x$, logo $dx = \Delta x$. A diferencial da variável independente é o próprio acréscimo.

Substituindo na definição de diferencial – $df = f'(c).\Delta x$

$\frac{df}{\Delta x} = f'(c)$ $\qquad$ $\frac{df}{dx} = f'(c)$

Observe-se que temos o quociente de dois infinitésimos diferente de zero.

Então, neste caso – a derivada é o quociente da diferencial da função pela diferencial da variável. Observamos que isto só acontece neste caso particular.

20/8/45.

Teoremas sôbre derivadas.

1)

Vimos que $\Delta f = f'(c)\Delta x + \theta . \Delta x$. Dividamos esta expressão por $f'(c).\Delta x$. Virá —

$$\frac{\Delta f}{f'(c)\Delta x} = 1 + \frac{\theta}{f'(c)}$$. Por definição

$$\frac{\Delta f}{df} = 1 + \frac{\theta}{f'(c)}$$ Passando ao limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{df} = 1 \neq 0$$. Logo, o acréscimo e a diferencial da função são infinitésimos de mesma ordem, portanto, substituíveis um pelo outro. É preciso porem observar que são distintos. Não devemos confundi-los.

Teorema — A derivada de uma função constante é nula.

Com efeito — $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$ por definição. Se a função for constante, $f(c+\Delta x) = f(c)$, logo $f'(c) = 0$. c.q.d.

Teoremas gerais —

① Derivada da soma de duas funções derivaveis num ponto.

Sejam $f_1(x)$ e $f_2(x)$, continuas e derivaveis no ponto $\underline{c}$ de seu campo de definição.

Existem portanto —

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(c+\Delta x) - f_1(c)}{\Delta x} = f_1'(c) \text{ e}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(c+\Delta x) - f_2(c)}{\Delta x} = f_2'(c).$$

Tese — $$\frac{d\,[f_1(x) + f_2(x)]}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}.$$

Ora, $$\frac{d(f_1+f_2)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(c+\Delta x) + f_2(c+\Delta x) - [f_1(c) + f_2(c)]}{\Delta x}$$

Aplicando teorema conhecido de limites, vem $\frac{d(f_1+f_2)}{dx} =$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(c+\Delta x)-f_1(c)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_2(c+\Delta x)-f_2(c)}{\Delta x}$$

porem, existem estes limites, por hipotese e será $\frac{d(f_1+f_2)}{dx} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dx}$ cqd.

Sob as mesmas hipoteses, vejamos —

2) Derivada do produto de duas funções deriváveis em um ponto.

$$\frac{d(f_1 . f_2)}{dx} = \frac{df_1}{dx} . f_2 + \frac{df_2}{dx} . f_1 \quad \text{ou}$$

$$D(u.v) = Du . v + u . Dv = u'v + uv'$$

Com efeito,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(c+\Delta x) . f_2(c+\Delta x) - f_1(c) . f_2(c)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(c+\Delta x)-f_1(c)}{\Delta x} . f_2(c+\Delta x) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} f_1(c) \frac{f_2(c+\Delta x)-f_2(c)}{\Delta x}$$

isto, somando e subtraindo $f_1(c) . f_2(c+\Delta x)$

No limite teremos —

$$\left[\frac{d(f_1 . f_2)}{dx}\right]_{x=c} = \left[\frac{df_1}{dx}\right]_{x=c} f_2(c) + f_1(c) \left[\frac{df_2}{dx}\right]_{x=c}$$

3) Derivada do inverso ou reciproco de uma função.

Admitamos existente —

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'(c), \text{ no ponto}$$

c onde $f(c) \neq 0$

Determinemos a derivada de $\frac{1}{f(x)}$.

$$\text{Será} \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{f(c+\Delta x)} - \frac{1}{f(c)}\right] \frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(c)-f(c+\Delta x)}{f(c) . f(c+\Delta x)}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{-\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}}{f(c) . f(c+\Delta x)} = -\frac{f'(c)}{[f(c)]^2}$$

cqd

Podemos representar

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Corolário - A derivada do quociente no ponto em que o denominador é diferente de zero.

Por hipotese, existam as derivadas do numerador e do denominador no ponto c.

Será

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]_{x=c} = \frac{dx}{dx}\left[f_1(x)\frac{1}{f_2(x)}\right]_{x=c}$$

Temos a derivada de um produto, e então vem

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{df_1}{dx}\right]_{x=c} \cdot \frac{1}{f_2'(c)} - f_1(c)\,\frac{f_2'(c)}{f_2(c)^2}$$

$$= \frac{f_1'(c) \cdot f_2(c) - f_1(c) \cdot f_2'(c)}{f_2(c)^2}$$

Que, sob outra forma se expressa

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.\,Du - u.\,Dv}{v^2}.$$

Se multiplicarmos por $dx \rightarrow$

$$d\,\frac{u}{v} = \frac{v.\,du - u.\,dv}{v^2}$$ que é a diferencial do quociente de duas funções.

Função de função

A função de função continua é ainda função continua.

Considerando $y = f(z)$, continua e $z = \varphi(x)$, tambem continua; e para $\begin{cases} b = \varphi(a) \\ c = f(b) \end{cases}$ ainda continuas, admitindo derivadas.

Demonstremos que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

Temos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b+\Delta z) - f(b)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b+\Delta z) - f(b)}{\Delta z} \cdot \frac{\varphi(a+\Delta x) - \varphi(a)}{\Delta x},$$

sendo $\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)=\Delta z$ Temos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)}{\Delta x}=\varphi'(a)+\varepsilon,$$

desde que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(b+\Delta z)-f(b)}{\Delta z}\cdot\frac{\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)}{\Delta x}=$$

$$=\lim\frac{f(b+\Delta z)-f(b)}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\varphi'(a)+\varepsilon\right]$$

e no limite

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

c.q.d.

Cálculo das derivadas das funções elementares.

Consideremos a função $y=x^m$.

Será $\frac{dy}{dx}=m\,x^{m-1}$.

Com efeito, $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^m-x^m}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^m+m\,x^{m-1}\Delta x+\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}\Delta x^2+\dots+\Delta x^m-x^m}{\Delta x}=$$

$$=m\,x^{m-1}+\lim\Delta x\left[\frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}+\dots\right]=m\,x^{m-1}$$

c.q.d.

Observação - Não confundir com a derivada de $y = a^u$

Consideremos $y = e^u$. Será

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{e^{u+\Delta u} - e^u}{\Delta u} = e^u \lim_{\Delta u \to 0} \frac{e^{\Delta u} - 1}{\Delta u}$$

Façamos

$$e^{\Delta u} - 1 = \alpha \rightarrow e^{\Delta u} = 1 + \alpha \text{ e}$$

$$\Delta u = l(1+\alpha) \qquad (l = \log_e)$$

Donde →

$$\frac{dy}{dx} = e^u \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{l(1+\alpha)} = e^u \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} l(1+\alpha)} =$$

$$= e^u \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = e^u \frac{1}{\lim\limits_{\alpha \to 0} l(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

sendo log. uma função constante →

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^u}{l\left[\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]} = \frac{e^u}{le} = e^u.$$

Função esta, cuja derivada é a própria função.

Consideremos $y = a^u$. Calculemos sua derivada. Para isto, vejamos a identidade

$$a^u = e^{u.la} \rightarrow u.la = u.la$$

Então $y = a^u = e^{u.la} = e^z$ sendo $z = u.la$.

Será → $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} = e^z . la$ →

$$\frac{dy}{dx} = e^{u.la} . la = a^u . la.$$

Derivada do Seno.

$$y = \operatorname{sen} u \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(u+\Delta u) - \operatorname{sen}(u)}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u . \cos \Delta u + \cos u . \operatorname{sen} \Delta u - \operatorname{sen} u}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos u . \operatorname{sen} \Delta u + \operatorname{sen} u (1 - \cos \Delta u)}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \cos u \frac{\operatorname{sen} \Delta u}{\Delta u} = \cos u$$

Observe-se que a expressão $1 - \cos \Delta u$ é um infinitesimo de segunda ordem.

$y = \cos u$.

Por definição →

$\cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \rightarrow \quad y = \operatorname{sen} z$

$\frac{dy}{dz} = \cos z; \; \frac{dz}{du} = -1$

$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot -1 =$

$= -\operatorname{sen} u$

Nota - as derivadas das co-funções trigonometricas são todas negativas.

Sabemos, da teoria dos numeros complexos, ser $e^{iu} = \cos u + i \cdot \operatorname{sen} u$

$e^{-iu} = \cos u - i \cdot \operatorname{sen} u$

daqui se deduz →

$\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} = \cos u \qquad \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2} = \operatorname{sen} u$

e por analogia se define —

$\left.\begin{array}{l} \cos h. u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2} \\ \operatorname{sen} h. u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} \end{array}\right\}$ seno e coseno hiperbolicos.

Daqui —

$(\cos h. u)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} + 2e^{u} \cdot e^{-u}\right)$

$(\operatorname{sen} h. u)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + e^{-2u} - 2e^{u} \cdot e^{-u}\right)$

$(\cos h. u)^2 - (\operatorname{sen} h. u)^2 = 1$

Comparando $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \\ (\operatorname{sen} h. t)^2 - (\cos h. t)^2 = 1 \end{array}\right.$

Analiticamente -

$\left\{\begin{array}{l} y = \cos h. t \\ u = \operatorname{sen} h. t \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y^2 = (\cos h. t)^2 \\ u^2 = (\operatorname{sen} h. t)^2 \end{array}\right. \rightarrow$

$y^2 - u^2 = 1$

Que é a equação de uma hiperbole equilatera. Temos assim, fundamentada a trigonometria hiperbolica.

Derivada de cos hiperb. →

$\frac{d}{dx} \cos h.\, u = \frac{1}{2}\left(e^{u} - e^{-u}\right) = \operatorname{sen}h.\, u$

do ~~sen~~ hip →

$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}h.\, u = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right) = \cos h.\, u$

Note-se que não aparece o sinal negativo.

Por definição, temos

$\operatorname{tg} h.\, u = \frac{\operatorname{sen}h.\, u}{\cos h.\, u} = \frac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}}$

Em $y = \operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$, sabemos ser

$\frac{dy}{du} = \frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$.

Identicamente em

$y = \operatorname{tgh}.\, u = \frac{\operatorname{sen}h.\, u}{\cos h.\, u}$ →

$\frac{dy}{du} = \frac{(\cos h.\, u)^2 - (\operatorname{sen}h.\, u)^2}{(\cos h.\, u)^2} = \frac{1}{(\cos h.\, u)^2}$

Por analogía poderíamos definir todas as outras funções trigonométricas.

A função inversa de $y = \operatorname{sen} u$ é $u = \operatorname{arc.sen} y$.

Nas funções hiperbolicas –

$y = \operatorname{sen}h.\, u \rightarrow u = \operatorname{ar.sen}h\, y$

u é a área cujo seno hiperbólico é y.

São facilmente dedutiveis suas derivadas por meio das funções de função.

4/9/45.

<u>Teoréma de Rolle</u> –

Se a função $f(x)$, definidada e continua no intervalo fechado a, b $(a \leq x \leq b)$, admitir derivada única, finita ou infinita no intervalo aberto $a < x < b$, e anular-se nos extremos do intervalo, existe pelo menos um ponto do intervalo aberto, $\bar{x}$, onde sua derivada se anula.

Temos dois casos –

1) Se a função no intervalo a, b, tiver $M = m$ (máximo igual ao mínimo), ela é constante e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = 0$$ e

qualquer ponto satisfaz ao teorêma.

2) Se $M \neq m$, provemos a existencia de $\bar{x}$.

Observemos que existe um ponto onde a função atinge seu máximo ou onde atinge seu mínimo;

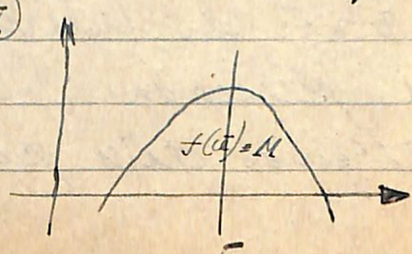
$M = f(\bar{x})$ $m = f(\bar{\bar{x}})$

Consideremos um ponto de máximo, que é tambem de Weierstrass, nas suas vizinhanças à esquerda, e à direita

$$\frac{f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x})}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{(à esquerda)} \quad \text{I}$$

$$\frac{f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x})}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{(à direita)} \quad \text{II}$$

A derivada no ponto $\bar{x}$ por hipotese existe,



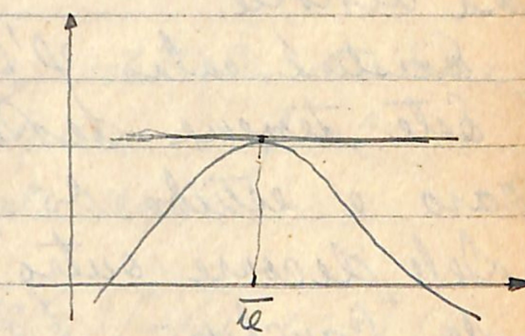
portanto $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x})}{\Delta x} = 0.$$

Devem ser iguais os limites à esquerda e à direita, logo, $f'(x) = 0$ e existe o ponto $\bar{x}$. c.q.d.

Para m, se fôsse o caso, analogamente se provaria a existência de $\bar{\bar{x}}$, apenas se invertiam as desigualdades I e II.

Significado geometrico do teorema —

Se a curva corta o eixo dos x em dois pontos, existe um ponto intermediário para o qual a tangente é paralela ao eixo dos x.

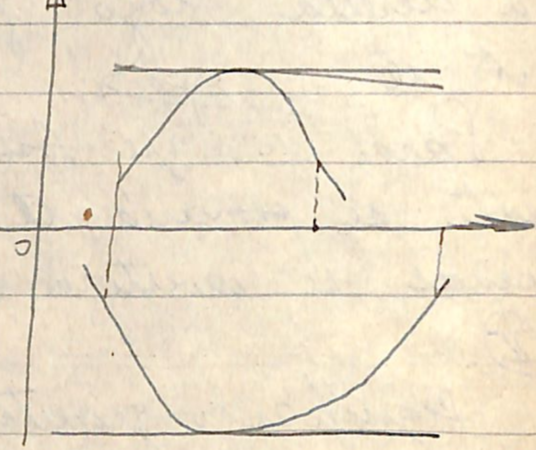


Corolário — Se uma função contínua no intervalo fechado a, b admitir derivada unica, finita ou infinita no intervalo aberto a, b e se nos extremos do intervalo toma valores iguais, existe um ponto do intervalo aberto onde a derivada se anula.

Seja $f(x)$ a função e

$f(a) = f(b) = k$

Consideremos



$\varphi(x) = f(x) - k$

$\varphi(a) = f(a) - k = 0$

$\varphi(b) = f(b) - k = 0$

e recaímos nas condições do teorema de Rolle.

Existirá então $\varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$.

Este teorema de Rolle é fundamental para o estudo do cálculo diferencial.

Dele decorre outro teorema importante, o de Cauchy: — (dos acrescimos finitos)

Teorema — Dadas no intervalo fechado a, b, duas funções $f(x)$ e $F(x)$, contínuas, deriváveis, admitindo derivada única, não simultaneamente nulas e

$f(b) - f(a) \neq 0$,

será

$$\frac{F'(b) - F'(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{F'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$ no intervalo

$a < \bar{x} < b$.

Ora, consideremos

$\Phi(x) = f(x)[F(b) - F(a)] - F'(x)[f(b) - f(a)]$

Será no ponto a —

$\Phi(a) = f(a)[F(b) - F'(a)] - F(a)[f(b) - f(a)]$

e no ponto b —

$\Phi(b) = f(b)[F(b) - F(a)] - F'(b)[f(b) - f(a)]$

porem elas são iguais; condições do teorema de Rolle e existe $\bar{x}$ para o qual $\Phi'(\bar{x}) = 0$. Neste ponto será

$f'(\bar{x})[F'(b) - F'(a)] = F'(\bar{x})[f(b) - f(a)]$ (I)

Observe-se agora porque não devem ser $f'(x) = F'(x)$ — teríamos uma identidade e porque $f(b) - f(a) \neq 0$ — haveria um absurdo em (I) se isso não acontecesse.

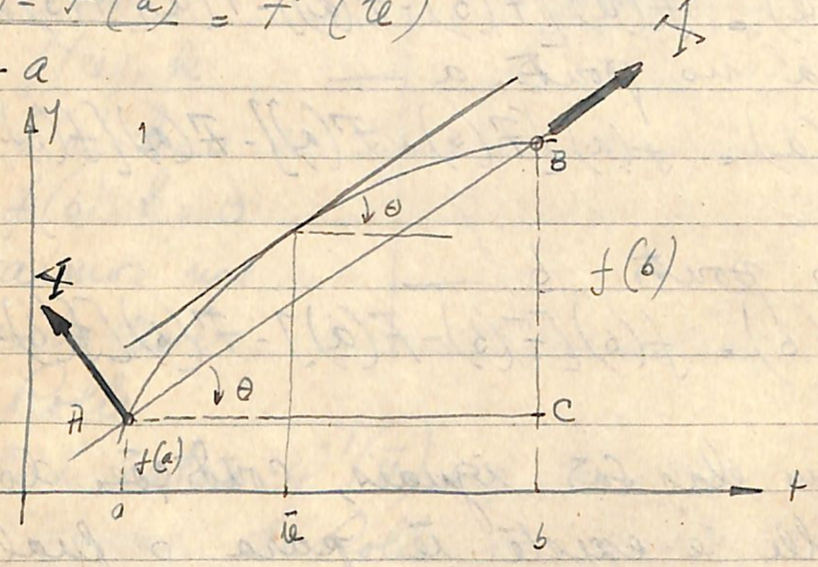
Finalmente $$\frac{F'(b) - F(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{F'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Teorema da média

<u>Corolário</u> (ou Teorêma de Lagrange)

Sob as mesmas hipoteses consideremos $f(x) = x$, será $f'(x) = 1$ e pelo teorema anterior –

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\bar{x})$$



$f'(\bar{x}) = tg\,\theta$

$tg\,\theta = \frac{BC}{AC}$

Significado geometrico – existe um ponto onde a tangente é paralela à corda

Se fizermos uma transformação de coordenadas para X e Y, caimos no teorema de Rolle.

Derivadas e diferenciáis de ordem superiôr à primeira.

Seja $f(x)$ definida num conjunto $C(x)$, sendo $\underline{a}$ ponto de acumulação do conjunto.

Será $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$

Póde acontecer que os pontos em que a função é derivável constituam um conjunto C_1 de elementos $\underline{x}$ e será

$f'(x) = F_1'(x)$

Póde acontecer que num ponto a_1 dos pontos $\underline{x}$ de C_1, exista

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a_1)}{x - a_1} = F_1'(a_1) = f''(a_1)$$

esta será a derivada segunda da função e assim successivamente à derivada de ordem $\underline{n}$ num ponto $\underline{a}$ qualquer, $f^{(n)}(a)$.

Diferencial de ordem superiôr à primeira – $dy = f'(x)\,dx$ é por definição a diferencial da diferencial primeira

$d(dy) = d[f'(x).dx] \longrightarrow$

$d^2y = [f'(x).dx]'dx$, porem, como $\underline{x}$ é variável independente, dx é fixo, logo será $d^2y = f''(x).dx^2$

Daqui se tira –

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \text{ (notação de Leibniz)}$$

e assim $\dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

6/9/45.

Teorema generalizado de Cauchy.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, contínuas no ponto $\underline{c}$ e suas vizinhanças, admitindo derivada até á ordem $\underline{n}$, sob as condições: –

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$$

$$g(c) = g'(c) = g''(c) = \dots = g^{(n-1)}(c) = 0$$

Exista $f^{(n)}(x)$ e seja $g^{(n)}(x) \neq 0$, havendo um ponto $\underline{x}$ nas vizinhanças de $\underline{c}$.

Então – $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(\bar{x})}{g^{(n)}(\bar{x})}$ existe um ponto $\bar{x}$ nessas condições.

Provemos antes que $g(x) \neq 0$.

Com efeito, $g^{(n)}(x) \neq 0$, nas vizinhanças de $\underline{c}$, exige que $g^{(n-1)}(x) \neq 0$ nas vizinhanças, pois se assim não fôsse, nos pontos $\underline{x}$ haveria um ponto tal que

$$g^{(n-1)}(x) = 0$$

$$g^{(n-1)}(c) = g^{(n-1)}(x) = 0 \longrightarrow$$

$$g^{(n)}(c) = g^{(n)}\bar{x} = 0$$ por igual razão $g^{(n-2)}(x) \neq 0$ até $g(x) \neq 0$.

Demonstração do teorema – pelo teorema de Cauchy, temos –

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} =$$

$$= \frac{f'(x_1) - f'(c)}{g'(x_1) - g'(c)} = \frac{f''(x_2)}{g''(x_2)}$$ sendo

$$x > x_1 > x_2 > c$$

e assim por diante até ao ponto $\bar{x}$ —
$x > x_1 > x_2 > \dots > \bar{x} > c$, nas vizinhanças
de c, que demonstra o teorema.

Consideremos o caso particular
$g(x) = (x-c)^n$, será
$$g'(x) = n(x-c)^{n-1} \text{ e}$$
$$g^{(n)}(x) = n.(n-1)(n-2)\dots 3.2.1 = \lfloor n$$
Vejamos o que acontece no ponto c —
$g(c) = 0,\ g'(c) = 0 \dots g^{(n)}(c) \neq 0$, função
que satisfaz às condições do teorema
de Cauchy e
$$\frac{f(x)}{(x-c)^n} = \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{\lfloor n}, \text{ mudando de}$$
notação — $\phi(x) = \dfrac{(x-c)^n}{\lfloor n}\, \phi^{(n)}(\bar{x})$

$$\boxed{c < \bar{x} < x}$$

Formula de Taylor (Importante!)

Construamos uma função $\phi(x)$, a partir
de outra $f(x)$, esta definida e contínua
num certo intervalo, admitindo derivada
até à ordem $n-1$ e admitindo derivada
única (existente) de ordem n, finita ou
não, contínua ou não.
$$\phi(x) = f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) - \frac{(x-c)^2}{\lfloor 2} f''(c) +$$
$$+ \dots + \frac{(x-c)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{(n-1)}(c)$$
Suas derivadas —
$$\phi'(x) = f'(x) - f'(c) - \frac{(x-c)}{\lfloor 1} f''(c) + \dots$$
$$+ \dots + \frac{(x-c)^{n-2}}{\lfloor (n-2)} f^{(n-1)}(c)$$
$$\phi''(x) = f''(x) - f''(c) - \dots + \frac{(x-c)^{n-3}}{\lfloor n-3} f^{(n-1)}(c)$$
$$\phi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(c) \longrightarrow$$
$$\phi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

No ponto c — $\phi(c) = 0$ $\phi'(c) = 0$,
$\phi''(c) = 0 \dots \phi^{(n-1)} = 0$.

Esta função satisfaz às condições do

teorema de Cauchy no caso particular acima, portanto –

$$f(x) - f(c) - (x-c)f'(c) - \frac{(x-c)^2}{2!}f''(c) + \dots - \frac{(x-c)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{(n-1)}(c) = \frac{(x-c)^n}{\lfloor n} \cdot f^{(n)}(\bar{x})$$

$x < \bar{x} < c$.

Desta formula tiramos –

$$f(x) = f(c) + \frac{(x-c)}{\lfloor 1} f'(c) + \frac{(x-c)^2}{\lfloor 2} f''(c) + \dots + \frac{(x-c)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{(n-1)}(c) + \frac{(x-c)^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\bar{x})$$

que é a formula de Taylor.

A expressão $\frac{(x-c)^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\bar{x}) = C_n$, chama-se termo complementar (resto) que no caso é o de Lagrange.

Podemos fazer $\bar{x} = c + \theta h$

$x - c = h \quad 0 < \theta < 1$

será $C_n = \frac{h^n}{\lfloor n} f^{(n)}(c + \theta h)$

Observação – Não se sabe o valor de θ, porem sabe-se que existe. Esta é a primeira formula de Taylor.

Termo complementar de Peano –

Admitamos que a derivada n-ésima seja continua – $f^{(n)}(c+\theta h) = f^{(n)}(c) + \varepsilon_n$ sendo $\lim_{h\to 0} \varepsilon = 0$, será

$C_n = \frac{h^n}{\lfloor n}\left[f^{(n)}(c) + \varepsilon_n\right]$, deduzido do de Lagrange.

Pode-se deduzir o teorema se esta ultima condição. Este termo complementar deriva do de Schlömilch e Roche, que deduziram a formula geral.

Segunda formula de Taylor ou de Mac-Laurin

Obtem-se quando $c = 0$ e $h = x$

$$f(x) = f(0) + h f'(0) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(0) + \dots + \frac{h^n}{\lfloor n} f^{(n)}(\theta h), \text{ se } h = dx \to$$

$f(x) - f(c) = \Delta f = f'(c) \cdot dx + \frac{f^{(n)}(c) \cdot dx}{\lfloor n}$

$\Delta f = df + \frac{1}{\lfloor 2} d^2 f + \frac{1}{\lfloor 3} d^3 f + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-1} d^{n-1} f +$

$+ C_n$

11/9/45

Regras de l'Hospital.

Referem-se aos casos de indeterminação que se apresentam na pesquiza de limites.

São duas as regras:—

1) Quando se obtem 0/0.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funcões definidas numa vizinhança do ponto a e que se anulam juntamente com as derivadas até á de ordem $(n-1)$ inclusives, porem as derivadas de ordem n não se anulam simultaniamente numa vizinhança de a.

Se existir $\lim\limits_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}$, existirá tambem $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ e estes serão iguais.

Com efeito, de acordo com o teorema generalizado de Cauchy, tem-se:

$\frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{F^{(n)}(\xi)}$ sendo ξ um ponto conveniente compreendido entre a e x; porem $f(a)$ e $F(a)$ são nulas, logo $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{F^{(n)}(\xi)}$. Por hipotese o segundo membro admite limite quando $x \to a$ (tambem $\xi \to a$) portanto $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ (\xi \to a)}} \frac{f(\xi)}{F(\xi)}$ c.q.d.

Observação — a regra tambem se aplica no caso de a ser ∞. Com efeito, substituindo-se x por $1/t$ obtem-se $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(1/t)}{F(1/t)}$ e recaimos no caso anterior.

---

2) Quando se apresenta ∞/∞.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ funções definidas numa vizinhança de a, excluído a e admitindo derivada nessa vizinhança.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} F(x) = \infty$ e se existir $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{F'(x)}$, existirá também $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)}$ e eles serão iguais.

Por aplicação do teorema de Cauchy, obtem-se:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{F(x) - F(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

onde x e x_0 são dois pontos situados de um mesmo lado de a e dele suficientemente próximos, e ξ é um ponto conveniente entre x e x_0

$a \quad x \quad \xi \quad x_0$

Por transformação desta relação, obtem-se —

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{F(x_0)}{F(x)}} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

portanto

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{F(x_0)}{F(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \quad \text{I}$$

De acordo com o enunciado existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$. Suponhamos que este limite seja finito e igual a $\underline{A}$, portanto, para x_0 suficientemente próximo de a, $\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ vai diferir de a por menos de ε.

Fixado então x_0 vê-se que para $x \to a$, a segunda fração de I tende para $\underline{1}$, donde se conclue que

A é tambem limite da expressão (II).
Em conclusão —

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad \text{cqd}$$

No caso de $A = \infty$, a demonstração é feita com igual raciocinio.
Para $x \to \infty$ o teoréma tambem é verdadeiro, bastando substituir x por $1/t$.

13/9/45

Integrais definidas.

Consideremos $f(x) = y$, restrita no intervalo fechado $a \leq x \leq b$, restrita simplesmente, sendo então $r \leq f(x) \leq R$

Estejamos de acôrdo com Riemann o conceito de integral definida.

Divisão normal de um intervalo — introduzamos num certo intervalo, pontos de divisão seja a, b o intervalo será $x_0 = a$ e $x_n = b$; os pontos estarão colocados da seguinte maneira $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b$
Será essa divisão ordenada, se os pontos estiverem ordenados.
Observa-se que $x_i - x_{i-1} = h_i > 0$
Este sistema normal de divisão se designa com a letra D.
Introduzamos neste sistema, novos pontos distintos dos que temos —

$$x_{p-1} < \xi < x_p$$

O intervalo terá mais uma subdivisão e teremos uma divisão normal consecutiva. Em todos estes intervalos existirá para $f(x)$ duas restrições

$$r_i \leq f(x) \leq R_i$$

Somas associadas — Tomemos R_i e multipliquemos por h_i, façamos sua soma, será $S = \sum_1^n R_i h_i$; tomemos r_i e multipliquemos por h_i — $s = \sum_{i}^{n} r_i h_i$. Estas são as somas superiores e inferiores associadas a $f(x)$.

A cada D (divisão normal) corresponde uma soma S e outra s, e estas formam conjunto.

Propriedades de S e s

1) Consideremos $r \leq r_i \leq R_i \leq R$, será $r h_i \leq r_i h_i \leq R_i h_i \leq R h_i$, se efetuarmos as somas — $r \sum h_i \leq \sum r_i h_i \leq \sum R_i h_i \leq R \sum h_i$ ou $r(b-a) \leq s \leq S \leq R(b-a)$.

O que se enuncia — "As somas superiores e inferiores são restritas". Esta é a primeira propriedade.

2) Perturbação introduzida nas somas pela colocação de um ponto ξ, no intervalo p.

Chamemos de D ao sistema, antes da introdução de ξ; e de D_1 ao sistema depois da introdução de ξ. A eles corresponderão as somas — S e s, e S_1 e s_1.

Mostremos que $0 \leq S - S_1$; isto é a diferença entre duas somas superiores não pode ser negativa.

Sejam R_p, r_p as restrições no intervalo h_p. ξ divide-o em dois e teremos

$$h'_p = \xi - x_{p-1} \longrightarrow r'_p \text{ e } R'_p$$

$$h''_p = x_p - \xi \longrightarrow r''_p \text{ e } R''_p$$

$$x_{p-1} \qquad \xi \qquad x_p$$

Consideremos a diferença $S - S_1$. Ora, todas as parcelas conservaram-se inalteráveis na soma, excetuando a parcela relativa ao intervalo p; logo, a diferença permanece constante, a não ser em p.

Feitas estas considerações, vemos que —

$$R_p h_p - [R'_p h'_p + R''_p h''_p] = S - S_1 =$$

? $$= R_p (h'_p + h''_p) - R'_p h'_p - R''_p h''_p =$$

$$= \underbrace{(R_p - R'_p)}_{\geq 0} h'_p + \underbrace{(R_p - R''_p)}_{\geq 0} h''_p$$

Sendo $R_p - R'_p \geq 0$ e $R_p - R''_p \geq 0$ pois R_p é a restrição total →

$S - S_1 \geq 0$ — c.q.d.

Diz-se então ser zero uma restrição inferior de $S - S_1$.

Analogamente se demonstrará que

$0 \leq s_1 - s$.

3) Calculemos uma restrição superior para $S - S_1$.

Temos $S - S_1 = R_p h_p - (R'_p h'_p + R''_p h''_p)$, substituindo R_p por R que sabemos ser $R \geq R_p$ resulta

$$S - S_1 \leq R h_p - (r h'_p + r h''_p) \leq$$
$$\leq R h_p - r(h'_p + h''_p) \leq (R - r) h_p.$$

Observe-se que nesta desigualdade, para seu reforço foram substituidos R'_p e R''_p por r.

Num certo intervalo, esta foi a diferença obtida para ~~a~~ introdução de um só ponto.

Introduzamos m pontos. Será então —

$S - S_1 \leq m(R - r)h$, sendo h o maior dos intervalos.

Analogamente $s_1 - s \leq m(R - r)h$

Resumindo 2) e 3) —

$0 \leq S - S_1 \leq m(R - r)h$

$0 \leq s_1 - s \leq m(R - r)h$.

Façamos $R - r = \Omega$ (oscilação da função), virá

$0 \leq S - S_1 \leq m\Omega h$

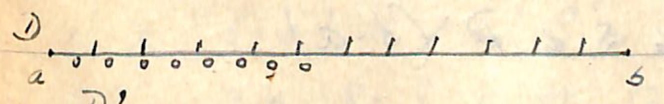
$0 \leq s_1 - s \leq m\Omega h$.

Estas propriedades são validas para "somas consecutivas".

Comparemos sistemas quaisquer, sem as divisões serem consecutivas.

4) Toda soma inferior é menor que qualquer soma superior.

Tomemos um sistema D de divisão normal



sobre a, b, depois outro D' também sobre a, b porem independente de D.

Podemos considerá-los simultaneamente, e então superpondo-os teremos novo sistema D'' que é consecutivo de D e de D'

Chamemos as somas respectivas de S, s, S', s', S'', s''. Para D'' será $s'' \leq S''$ (de acordo com a propriedade 1)

Considerando 3, comparemos S com S''.

$$0 \leq S - S' \longrightarrow \quad S'' \leq S \quad \text{(analogamente)}$$
$$S'' \leq S'$$

e também para s. Então —

$$\left.\begin{array}{l} s' \leq s'' \leq S'' \leq S' \\ s \leq s'' \leq S'' \leq S \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s' \leq S \text{ e} \\ s \leq S' \end{array}$$

O que se enuncia —

"Toda soma inferior é menor que a soma superior.

5) Para uma divisão existirem —

$$r(b-a) \leq s \leq S \leq R(b-a)$$
$$s \leq R(b-a)$$
$$S \geq r(b-a)$$

As somas inferiores admitem uma restrição superior e as somas superiores uma restrição inferior.

Chamemos de I a restrição superior de s e de J a restrição inferior de S.

Pela 5ª propriedade —

$I \leq J$ (consequência da 4ª propriedade)

Chamemos I de integral inferior de $f(x)$ no intervalo ab e J de integral superior de $f(x)$ no mesmo intervalo.

14/9/45

Recordando —

Se $f(x) \rightarrow r \leq f(x) \leq R$ em
$a \leq x \leq b$

temos as cinco propriedades de S e s —

1) $r(b-a) \leq s \leq S \leq R(b-a)$

2) $0 \leq S - S_1 \leq m\,\Omega\,h$

3) $0 \leq s_1 - s \leq m\,\Omega\,h$

4) $s' \leq S$
$s \leq S'$

5) $I \leq J$.

I — restrição superior das somas inferiores.

J — restrição inferior das somas superiores.

Teorema de Darboux

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} S = J$$

Isto é, J é ponto de acumulação das somas S.

Demonstração —

Tomemos o intervalo a, b onde $f(x)$ é definida e um numero $\varepsilon > 0$.

Podemos dividir a, b em intervalos e construir as somas correspondentes.

Suponhamos que se tenha uma divisão D' à qual corresponde S'.

Será $S' < J + \varepsilon/2$ (I)

Tomemos agora uma divisão arbitraria D. Considerando D e D' simultaneamente, teremos D'' que é consecutivo de ambas e —

(II) $S - S'' \leq m(R - r)h$ (m é nº finito)

(III) $S'' - S' \leq 0$

somando-se (I), (II), (III) —

$$S < J + \frac{\varepsilon}{2} + mh(R - r)$$

Fazendo $mh(R - r) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ →

$$h = \frac{\varepsilon}{2m(R - r)} \to S - J < \varepsilon \to h < h(\varepsilon)$$

Isto significa que $\lim\limits_{h \to 0} S = J$, logo J é ponto de acumulação de S. qfd.

Analogamente demonstrariamos que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} s = I$$

(Importante Entender!)

Suponhamos ser $I = J$, a integral superior é igual à integral inferior, então será

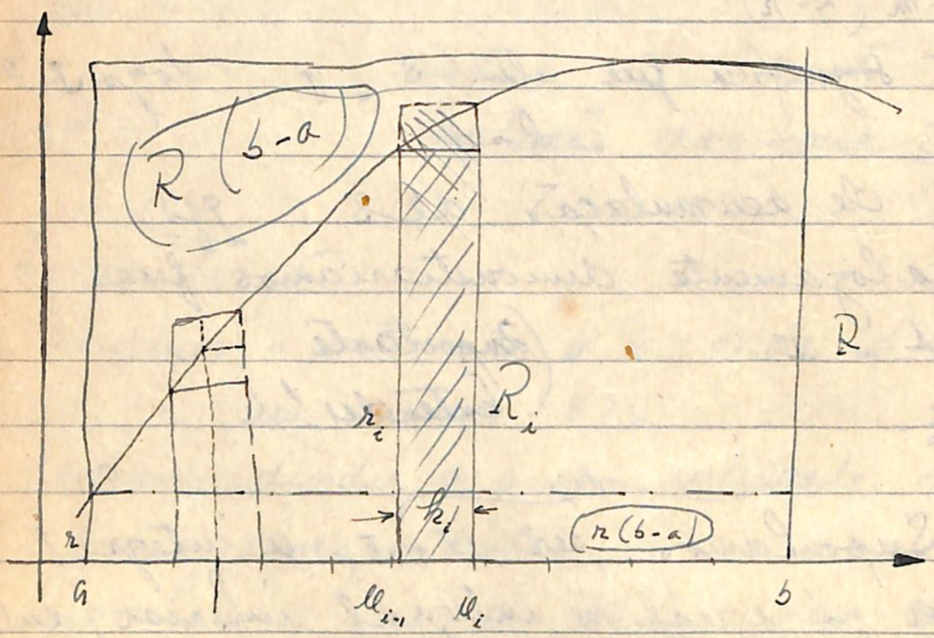
$$I = J = \int_a^b f(x) . dx$$

Em que dx representa ao intervalo

$x_i - x_{i-1}$; $f(x)$ dessa não é produto e sim número.

Esta expressão se diz integral definida da função $f(x)$; em que são ainda -
a — extremo inferior do intervalo,
b — extremo superior do intervalo.

Significado geometrico



$R_i h_i$ — representa a área dos retangulos maiores de base h_i e altura R_i

$r_i h_i$ — representa a área dos retangulos menores.

$\sum_1^n r_i h_i = s$, fornece a área da porção entre a curva e o eixo dos x, por falta.
$\sum_1^n R_i h_i = S$, fornece a área por excesso.

Fazendo a introdução de um ponto entre duas divisões, as áreas internas crescem (s) e as externas (S) diminuem.

$r(b-a)$ representa a área do menor retangulo, com base $b-a$ (intervalo dado) e altura r (restrição inferior); $R(b-a)$ a área do maior retangulo com mesma base e altura R.

Integral definida é o número que mede a área entre a curva acima do eixo dos x, duas ordenadas e o eixo dos x.

Condições de integrabilidade

Vimos que sempre - $J \leq S$, $I \geq s$, $J - I \leq S - s$.

Se fôr possivel, dado ε arbitrário, obter-se um sistema de subdivisão tal

Aqui usa o como nada. ⟨o?

que $S - s < \varepsilon$, a função é integrável.

Com efeito. $J - I \leq \varepsilon$, significa, por serem eles fixos que necessariamente deve ser $I = J$.

A condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ seja integrável em a, b é que o limite da soma dos produtos dos intervalos pelas oscilações da função nesses intervalos seja nula quando sua extensão máxima tende a zero.

É a condição de integrabilidade de Riemann-Cauchy

Com efeito,

$$S = \sum_1^n R_i h_i \quad \text{e} \quad s = \sum_1^n r_i h_i$$

$$S - s = \sum_1^n (R_i - r_i) h_i = \sum_1^n \omega_i h_i < \varepsilon$$ e temos verificado a condição anterior.

Consideremos um intervalo a, b, dividido em $\underline{n}$ partes, seja h_i a extensão de uma delas à qual correspondam r_i e R_i. A função num

ponto x_i tomará um valor tal que

$$r_i \leq f(x_i) \leq R_i$$

Multiplicando pela extensão do intervalo correspondente —

$$r_i h_i \leq f(x_i) h_i \leq R_i h_i$$

Fazendo a somatória —

$$\Sigma r_i h_i \leq \Sigma f(x_i) h_i \leq \Sigma R_i h_i$$

Se a condição de Riemann for satisfeita —

$$\lim_{(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_1^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esta é então, outra definição de integral.

Funções integráveis.

As funções contínuas são integráveis. (Lembremos que para uma função contínua a oscilação da função para um intervalo $\underline{h}$ torna-se tão pequena quanto se queira, com $\underline{h}$

— decorre da continuidade uniforme)
Da continuidade uniforme —
$w_i < \varepsilon$ para $h < h(\varepsilon)$
Portanto $S - s = \sum_1^n (R_i - r_i) h_i$ se a oscilação se torna maior —
$S - s < \sum_1^n \varepsilon h_i < \varepsilon \sum_1^n h_i \rightarrow$

$S - s < \varepsilon (b-a)$
Analogamente demonstraríamos que as funções monotonicas são integráveis.

A soma, o produto, o quociente (exceto do zero em denominador) de funções integraveis, são integráveis

———— .... ————

Propriedades das integrais definidas.

Por convenção $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

————

18/9/45.

Funções integráveis.

As contínuas são funções integráveis, satisfazendo à condição de Riemann Cauchy — $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_1^n w_i h_i = 0$

Ora, as funções contínuas são uniformemente contínuas. $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$
$|x' - x''| < h$
Isto significa que $w_i < \varepsilon$ quando $h_i < h$.
Escolhamos um ε conveniente.
$w_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \rightarrow h_i < h$, portanto.

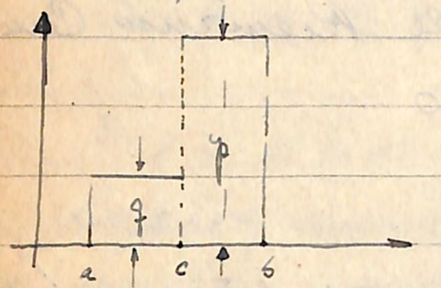
$\sum_1^n w_i h_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum_1^n h_i < \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a)$

$\begin{cases} \sum_1^n w_i h_i < \varepsilon \\ h_i < h(\varepsilon) \end{cases}$ o que nos leva a concluir que as funções contínuas são integráveis.

A continuidade é condição suficiente, mas não necessária.

Uma função pode ser descontinua e integrável

Exemplo:- $\int_a^b f(x).dx =$



$p(c-a) + f(b-c)$

É fácil demonstrar que uma função contínua num intervalo, com um número finito de descontinuidade num certo intervalo é integrável.

Ou - uma função contínua num intervalo com uma infinidade de descontinuidades em pontos formando intervalo de extensão nula é integrável.

Se a função f fôr integrável, a função $c.f(x)$ é integrável. Basta colocar c fora da somatoria.

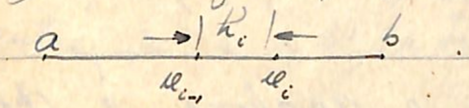
Teoremas - A soma, o produto e o quociente de funções integráveis são funções integráveis, excetuando zero em denominador, caso em que se deve fazer um estudo especial.

Teorêmas gerais sôbre integrais definidas.

1) Por definição $\int_a^a f(x).dx = 0$

2) Uma integral definida muda de sinal quando se invertem seus extremos.

Com efeito, tomemos o intervalo a, b.



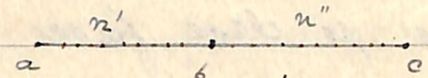
Considerêmos $\sum_1^n f(\bar{x}_i) h_i = -\sum_1^n f(\bar{x}_i)(-h_i)$

ou $\int_a^b f(x) dx = -\int_a^b f(x).dx$ c.q.d.

3) Se tivermos a, b, c pontos de um intervalo onde $f(x)$ seja integrável, demonstremos que

$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x).dx$

Consideremos o intervalo a, c, dividido pelo ponto b. Dividamos ab em n' partes e bc em n''



Será $\sum_{1}^{n'+n''} f(\bar{x}_i)\, h_i = \sum_{1}^{n'} f(\bar{x}_i)\, h_i + \sum_{1}^{n''} f(\bar{x}_i)\, h_i$, passando ao limite —

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Passando tudo para o primeiro membro — $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$

Relação esta que é análoga à dos segmentos de Chasles.

Teorema do valôr medio.

Seja $f(x)$ integrável em a, b $\quad a \leq x \leq b$

Sabemos que —

$$r \leq f(\bar{x}_i) \leq R$$

$$r h_i \leq f(\bar{x}_i)\, h_i \leq R\, h_i .$$

$$\sum_1^n r h_i \leq \sum_1^n f(\bar{x}_i)\, h_i \leq \sum_1^n R\, h_i$$

passando ao limite —

$$r(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq R(b-a)$$

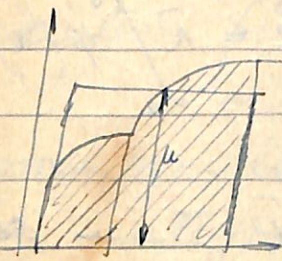
Dividindo por $b-a$ —

$$r \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq R$$

Chamemos $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ será

$$r \leq \mu \leq R \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \quad (A)$$

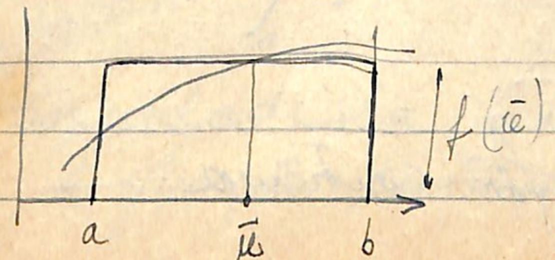
Isto quer dizer que existe um número μ entre r e R satisfazendo à condição (A)



Se a função fôr contínua

$$r \leq f(\bar{x}) \leq R$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\bar{x})\,(b-a)$$



Teorema da média.

1º) Sejam duas funções integráveis em a,b — $f(x)$ e $\varphi(x)$, sendo $\varphi(x) > 0$ e $a \leq x \leq b$

E mais $\sum r h_i \leq \sum f(x_i) h_i \leq \sum R h_i$

$$\sum r \varphi(x_i) h_i \leq \sum f(x_i) \varphi(x_i) h_i \leq$$
$$\leq \sum R \varphi(x_i) h_i$$

Não tendo havido desequilíbrio da desigualdade quando multiplicamos por $\varphi(x_i)$ e por h_i. Façamos agora a somatoria c h maximo tender a zero.

No limite —

$$r \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq R \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

donde

$$r \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leq R \quad \longrightarrow \text{ ou}$$

$$r \leq \mu \leq R$$

Se a função fôr continua —

$$r \leq f(\bar{x}) \leq R$$

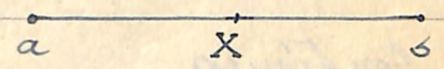
Então $\displaystyle\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx =$

$$= f(\bar{x}) \cdot \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

E este é o 1º teorema da media.
(Pincherle)

A integral considerada como função do seu extremo superior.

$$\int_a^b f(x).\,dx$$



Considerêmos um ponto $a \leq X \leq b$, existe $\int_a^b f(x).\,dx$. Podemos por em correspondência os números X e o valôr da integral.

Essa correspondência indicamos por $F(X) = \int_a^X f(x).\,dx$

Teorema fundamental

1) Propriedade da função integral — $F(X)$
É função continua.

Com efeito, $F(X+h) - F(X) =$

$$= \int_a^{X+h} f(x)\,dx - \int_a^X f(x)\,dx =$$

$$= \cancel{\int_a^X f(x).\,dx} + \int_X^{X+h} f(x).\,dx - \cancel{\int_a^X f(x).\,dx} =$$

(Pelo teorema do valor medio: $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$)

$$= f(X+\theta h)\,h = \mu\,h. \quad \text{cqd.}$$

Sendo μ valor restrito.

$$\lim_{h\to 0}\left[F(X+h) - F(X)\right] = 0$$ logo, função continua.

Não é necessário que $f(x)$ seja continua. Mas $F(X)$ é função continua, e assim será derivável ou não.

Vejamos que ela admite deriva[da].

$$F(X+h) - F(X) = \int_a^{X+h} f(x).\,dx - \int_a^X f(x).\,dx =$$

$$= \mu.h$$

Supondo $f(x)$ continua —

$$f(X+\theta h) = \mu\,,$$

donde,

$$\frac{F(X+h) - F(X)}{h} = \frac{h}{h}\, f(X+\theta h)$$

$$\text{no limite} - \quad \frac{dF}{dX} = f(X)$$

"A derivada de uma integral definida em relação ao seu extremo superior é a função integranda nesse ponto quando ela é continua no ponto."

20/9/45

Sabendo que

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t).\,dt = f(x),$$

Definição — Uma função $F(x)$ diz-se primitiva de outra $f(x)$ quando $\frac{dF}{dx} = f(x)$ (I)

Duas funções com igual derivada diferem de uma constante.

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx} = \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = c$$

Podemos dizer - duas primitivas de uma certa função diferem de uma constante. Portanto, se $F(x) = \int_a^x f(x).dx$ fôr primitiva de $f(x)$, $F(x) + c$ ainda será uma primitiva de $f(x)$.

Outra interpretação -

$$\int_a^x f(x).dx = \int_a^\alpha f(x).dx + \int_\alpha^x f(x).dx,$$

a, α, x no intervalo de integração.

Temos duas integrais diferindo por constante.

Então - Integral indefinida

$$\int^x f(x).dx.$$

ou, quando não houver confusão -

$$\int f(x).dx + C$$

Se $f(x).dx$ é primitiva, $\int f(x).dx + c$ é outra primitiva

Daqui - O calculo integral é o inverso do cálculo diferencial.

$$\boxed{\frac{dF}{dx} = dx} \quad \text{I}$$

O cálculo das integrais definidas é simples com o conhecimento das primitivas. Ora,

$$\int_\alpha^x f(x).dx = F(x)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_\alpha^b f(x).dx &= F(b)\\ \int_\alpha^a f(x).dx &= F(a)\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_\alpha^b - \int_\alpha^a = \int_a^\alpha + \int_\alpha^b = \int_a^b \rightarrow$$

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$$

"Uma integral definida de uma função é igual á oscilação de uma primitiva da função integranda entre os extremos do intervalo da função"

Ex: $\int_2^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+k\right]_2^3 = \frac{9-4}{2} = \frac{5}{2}$

Mudanças de variável nas integrais definidas

Consideremos a integral definida no intervalo $a \le x \le b$ de $f(x)$

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}} \sum_1^n f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Substituindo x por um $t \rightarrow x = \varphi(t)$

$t_0 \qquad t \qquad T$

Admitamos que $a = \varphi(t_0)$ e $b = \varphi(T)$, teremos $\int_a^b f(x).dx =$

$$= \lim_{\substack{t_i \to t_{i-1}\\ n\to\infty}} \sum f[\varphi(t_i)]\,\varphi'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})$$

Sendo $x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) =$
$= \varphi'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})$ ← pelo teorema de Lagrange

Donde —

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt \text{ —}$$

quando a divisão em t seja normal

Só se consegue isto quando fôr constante o sinal de $\varphi'(t)$. Se esta condição fôr satisfeita, podemos fazer a mudança de variável

$$\varphi'(t)\,dt = d\varphi \rightarrow \int f(x)dx = \int f(\varphi).d\varphi$$

Podemos considerar $f(x).dx$ como uma diferencial da função integranda.

$$\int f(x).dx = \int \frac{dF}{dx}.dx = \int dF.$$

Agora podemos entrar com a consideração de $f(x).dx$ como produto.

$$\int f(x)dx = \int dF + C = F + C \rightarrow$$

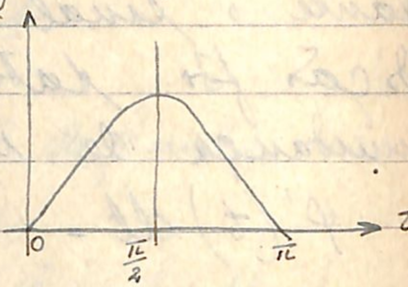
$$d\,[f(x).dx + k] = f(x).dx.$$

Portanto, não são permutáveis os sinais de diferencial de integral e integral de diferencial ($d\int$ e $\int d$)

A mudança de variável pode ser feita quando a nova função fôr integravel, ou melhor, contínua, derivável, com derivada crescente ou decrescente.

Ex: $sen\, t = u$

Neste caso a integral pode ser decomposta em duas, uma entre 0 e $\pi/2$ e outra entre $\pi/2$ e π.



O aspecto de uma mesma integral pode variar —

$$\int \frac{du}{1+u^2} + C = arc.\, tg\, u + C$$

Podemos decompor $C \rightarrow C = arc.\, tg\, k + C'$

Chamemos $arc.\, tg\, u = \alpha$, $arc\, tg\, k = \beta$ e

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}$$

$$\alpha + \beta = arc.\, tg \frac{u+k}{1-ku}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} + C = arc\, tg \frac{u+k}{1-ku} + C'$$

Pesquiza das primitivas.

Geralmente as integrais definidas dão origem a novas funções.

Temos as integrais imediatas, elementares e não elementares.

21/9/45

Metodos de integração.

a) Integrais elementares. Faz-se com o conhecimento das primitivas.

b) Metodo de substituição das variáveis

$\int f(u).du + C \rightarrow u = \varphi(t)$, havendo $\varphi'(t)$ com sinal constante,

$$\int f(u).du = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\, dt + C$$

Ex: $\int \frac{du}{u+a} = \int \frac{dz}{z} = l.z = l(u+a) + C$

$u + a = z \rightarrow du = dz$

Este metodo exige o conhecimento do metodo a.

c) Integração por partes.

Tomemos duas funções $u(x)$ e $v(x)$, separadamente integráveis em a, b.

$$\int_a^b d(u.v) = \int_a^b u.dv + \int_a^b v.du.$$

Com efeito,

$$\Big[u.v\Big]_a^b = \int_a^b u.dv + \int_a^b v.du$$

$$\int_a^b u.dv = \Big[u.v\Big]_a^b - \int_a^b v.du \qquad (b \leq x)$$

$$\int u.dv = u.v - \int v.du + C$$

Ex: $\int x.e^x dx = \frac{x^2 e^x}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$

fazendo $\begin{cases} u = e^x & du = e.dx \\ x.dx = dv & v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

façamos porem $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x.dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x =$$

$$= (x-1)e^x + C$$

d) Metodo da decomposição

e) Reunião deles todos

Funções racionais.

Seja ela $R(x) = \frac{p(x)}{P(x)}$ onde o grau de $p(x)$ é menor que o de $P(x)$. Caso não fosse, efetuar-se-ia uma divisão.

Evitamos zero de denominador.

Mostremos ser possivel a decomposição em frações simples onde

$P(x)$ é de grau n

$P_1(x)$ " " " n_1

$P_2(x)$ " " " n_2

etc.

$p_1(x)$ é de gráu $n_1 - 1$
$p_2(x)$ " " " $n_2 - 1$ etc.

$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{p_1(x)}{P_1(x)} + \frac{p_2(x)}{P_2(x)}$$

Sejam P_1 e P_2 primos entre si e $P = P_1 \times P_2$ —

Teorema — "Uma função racional $\frac{p(x)}{P(x)}$ decompõe-se na soma de outras duas, sendo P_1 e P_2 fatores primos entre si, cujo produto seja $P(x)$."

$$\frac{p(x) \cdot P_1 \cdot P_2}{P} = \frac{p_1 \{ P_1 \cdot P_2}{P_1} + \frac{p_2 \, P_1 P_2}{P_2}$$

Simplificando-se $\underset{(n-1)}{p} = \underset{\binom{n_1 - 1 + n_2}{n-1}}{P_1 p_2} + \underset{\binom{n_2 - 1 + n_1}{n-1}}{p_2 P_1}$

Devemos determinar estes coeficientes $a_0, a_1, a_2 \ldots A_0, A_1, A_2 \ldots$

Igualando n coeficientes do primeiro membro com n coeficientes do segundo, temos $n = n_1 + n_2$

Sendo P_1 e P_2 primos, é possivel a determinação desses coeficientes, portanto,

possivel a decomposição.

Decomposição em frações simples.

Consideremos

$$P(x) = a_0 (x-a)^{\alpha} (x-b)^{\beta} \ldots (x-l)^{\lambda} = 0$$

onde $a, b, \ldots l$ são raizes de multiplicidade $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. Será $\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n$. A aplicação sucessiva do teorema anterior permite escrever —

$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{p_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{p_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta}} + \ldots + \frac{p_{\lambda-1}}{(x-l)^{\lambda}}$$

O polinomio $p_{\alpha-1}$ será do tipo $A_1 (x-a)^{\alpha-1} + A_2 (x-a)^{\alpha-2} + \ldots + A_{\alpha}$ e analogamente temos todos os outros polinomios, donde

$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{L_1}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_{\lambda}}{(x-l)^{\lambda}}$$

Decompuzemos em n frações simples. $A, B, C, \ldots L$, são em geral complexos.

Se $a = r + \rho i$, existirá $b = r - \rho i$, e as duas frações $\frac{A_1}{x - r - \rho i} + \frac{B_1}{(x - r) + \rho i} =$

$$= \frac{Mx + N}{(x - r)^2 + \rho^2}$$

e desaparecem as raizes complexas. Vejamos se é possivel.

Se tivermos uma raiz complexa de multiplicidade m, aparecerá outra de igual multiplicidade complexa conjugada e então — $\left[(x - r)^2 - \rho^2\right]^m$.

25/9/45

Consideremos $\frac{p(x)}{P(x)}$ e

$P(x) = (x - a)^m (x - b)^n \dots (x - l)^\lambda$

Havendo imaginarios —

$\left[(x - r)^2 + \rho^2\right]^m$;

$P(x) = \left[(x - r)^2 + \rho^2\right]^m (x - c)^\gamma \dots$

Decomponhamos a racional em soma de frações.

Consideremos um polinomio $\pi(x)$ de gráu $2m - 1$ $\frac{\pi(x)}{\left[(x - r)^2 + \rho^2\right]^m}$

$$\frac{p(x)}{P(x)} = \frac{\pi(x)}{\left[(x - r)^2 + \rho^2\right]} + \frac{C_1}{x - c} + \frac{C_2}{(x - c)^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{C_\gamma}{(x - c)^\gamma} + \dots$$

Isto, aplicando-se o teorema da decomposição, para raizes de multiplicidade m.

Efetuemos a decomposição dos termos que provém das raizes conjugadas.

$\frac{\pi(x)}{\left[(x - r)^2 + \rho^2\right]^m} = \pi_1(x) + \frac{M_1(x) + N_1}{(x - r)^2 + s^2}$; dividamos por $(x - r)^2 + s^2$

$$\frac{\pi(x)}{\left[(x - r)^2 + \rho^2\right]^2} = \frac{\pi_1(x)}{(x - r)^2 + s^2} + \frac{M_1 x + N_1}{(x - r)^2 + s^2} =$$

$$= \pi_2(x) + \frac{M(x) + N}{\left[(x - r)^2 + s^2\right]^2} + \frac{M_2(x) + N_2}{(x - r)^2 + s^2}$$

e —

$$\frac{\pi(x)}{[(x-r)^2+s^2]^m} =$$

$$= \frac{M_1(x)+N_1}{[(x-r)^2+s^2]^m} + \frac{M_2(x)+N_2}{[(x-r)^2+s^2]^{m-1}} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{M(x)+N}{(x-r)^2+s^2}$$

Só há uma decomposição. Está resolvido o problema da decomposição e há frações dos tipos $\frac{A}{(x-a)^m}$ e $\frac{Mx+N}{[(x-r)^2+s^2]^m}$

A integração das racionais é possível.

Com efeito, pois $\int R(x)dx = \int \frac{p(x)}{P(x)} dx$ se pode decompor em integrais do tipo

$$A\int \frac{dx}{(x-a)^m} \text{ e } \int \frac{Mx+N}{[(x-r)^2+s^2]^m} dx$$

, as quais podem ser integradas.

Senão, vejamos —

$$A\int \frac{dx}{(x-a)^m} \longrightarrow$$

Façamos $x-a=z \longrightarrow dz=dx$

$$\int \frac{dz}{z^m} = \int z^{-m}\cdot dz = \frac{1}{-m+1} z^{-m+1} =$$

$$= \frac{-1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$$

A integração é possível para $m \neq 1$.

Se $m=1$, resulta que

$$\int \frac{dx}{x-a} = l\,|x-a| + C$$

Vejamos o 2º tipo —

$$\int \frac{Mx+N}{[(x-r)^2+s^2]^m} dx$$

Façamos $x-r=st$

$dx = s\,dt$. Virá

$$s\int \frac{Mr+Mst+N}{(s^2t^2+s^2)^m} dt =$$

$$= \frac{Mr+N}{s^{2m-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^m} + \frac{N}{s^{2m-2}}\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}$$

Ficamos dependendo de duas integrais

$$I'_m = \int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m} \qquad I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$$

Ora,

$$I'_m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}} + C$$

$$I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$ Integremos por partes –

$$\frac{1}{(1+t^2)^m} = u \qquad dt = dv$$
$$t = v$$

$$du = \frac{-2m\,t\,dt}{(1+t^2)^{m+1}}$$

$$I_m = \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\int\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{m}}\,dt - 2m\int\frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}}$$

$$I_m = \frac{t}{(1+t^2)^m} + 2m\,I_m - 2m\,I_{m+1}$$

$$2m\,I_{m+1} = \frac{t}{(1+t^2)^m} + (2m-1)\,I_m$$

$$I_{m+1} = \frac{t}{2m(1+t^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\,I_m$$

Supondo que $m+1 \to m$, temos por analogia –

$$I_m = \frac{t}{2(m-1)(1+t^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\,I_{m-1}$$

Temos uma formula de redução, pela qual cairemos em

$$I_1 = \int\frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tg}\,t$$

Então, finalmente –

Teorema –

"As funções racionais integram-se dando novas racionais, arc. tg ou logaritmos neperianos". São integraveis.

27/9/45

Metodo de Hermite.

Seja $\frac{p(x)}{P(x)}$ e

$$P(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}$$

$$\int \frac{p(x)}{P(x)}\,dx = A\int \frac{dx}{x-a} + \int \frac{Mx+N}{(x-r)^2+s^2}\,dx + \cdots$$

$$+ \cdots + A_1 \int \frac{dx}{(x-a)^n} + \int \frac{M_1 x + N_1}{[(x-r)^2+s^2]}\,dx$$

Frações simples produzem frações simples por integraçãi $\int \frac{dx}{(x-a)}$ $\begin{cases} l \\ \text{aretg.} \end{cases}$

A parte racional provem das frações imaginarias.

Consideremos

$P(x)$ e $\pi_1(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \cdots (x-l)^{\lambda-1}$ (I)

$$\frac{P(x)}{\pi_1(x)} = \pi(x) = (x-a)(x-b)\cdots(x-l) \quad \text{(II)}$$

$$\int \frac{p(x)}{P(x)}\,dx = \cdots + \int \frac{p_1(x)}{\pi(x)}\,dx$$

Integrando os termos $\frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\frac{dx}{(x-b)^\beta}$ etc

obtemos frações racionais. Somadas todas, obtemos $\pi_1(x)$ em denominador.

A integral de racional pode ser posta sob a forma —

$$\int \frac{p}{P}\,dx = \frac{p_2(x)}{\pi_1(x)} + \int \frac{p_1(x)}{\pi(x)}\,dx \quad \text{(III)}$$

Onde π_1 é (I) e π é (II) e p_2 é um polinomio de gráu inferior a π_1, p_2 é de gráu inferior a π.

$\pi_1(x)$ é o maximo divisor entre $P(x)$ e sua derivada.

Temos entaõ o processo para sua determinaçaõ.

Derivando III —

$$\frac{p}{P} = \left[\frac{p_2}{\pi_1}\right]' + \frac{p_1}{\pi}$$

e agora determinamos p_1 e p_2 por meio de p_2/π_1 e p_1/π.

Passamos entaõ, a integrar uma fraçaõ de gráu mais simples.

Integração das diferenciais irracionais algebricas.

Racionalização e redução. Nem todas podem ser integráveis por funções elementares.

Vejamos um tipo integrável –

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+f}\right)^{\beta} \dots\right] dx$$

$\alpha, \beta \dots$ são números racionais.

Integramos por transformação de variáveis.

Seja m um mínimo multiplo comum dos denominadores de $\alpha, \beta \dots$

$$\alpha = \frac{p}{f}, \quad \beta = \frac{p_2}{f_2} \quad \dots$$

Façamos a transformação –

$\dfrac{ax+b}{cx+f} = t^m$, de maneira que

$$\left[\frac{ax+b}{ax+f}\right]^{\alpha} = t^{m\alpha} \dots$$

e esta substituição nos dá

$x = f(t)$. –

Ficamos então com a integral

$$\int R\left[f(t), t^{m\alpha}, t^{m\beta} \dots\right] \frac{df}{dt} dt.$$

Integrais abelianas.

$$\int R(x, y)\, dx \qquad \text{sendo } f(x, y) = 0$$

x e y ligados por uma curva racional ou unicursal, onde

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) \\ y &= \varphi_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \varphi_1 \text{ e } \varphi_2 \text{ racionais.}$$

Elas são integráveis –

$$\int R(x, y)\, dx = \int R\left[\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right] \frac{d\varphi_1}{dt} dt$$

que é integrável.

Caso particular –

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{ax^3 + bx}}{x^3 + 2x + 1}\, dx = \int R(x, y)\, dx$$

$y = \sqrt{ax^2 + bx}$

$y^2 - ax^2 + bx = 0$

Integração das racionais com radical do segundo gráu.

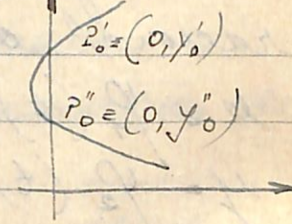
$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$$

2º caso — Admitamos que a conica seja cortada pelo eixo dos y

$y^2 - ax^2 - bx - c = 0$ (conica)

Fazemos então — $x_0 = y_0$

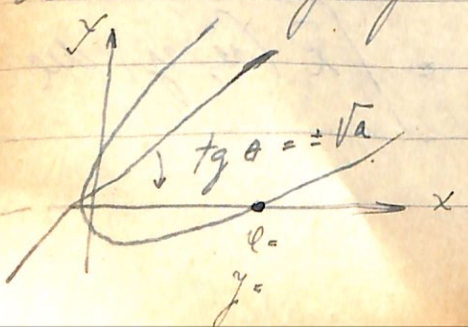
$y_0^2 - c = 0 \qquad y_0 = \pm\sqrt{c}$



$y - y_0 = t(x - x_0)$

$y = \pm\sqrt{c} + tx$ transformação esta que integra, sendo c positivo.

3º caso — Interseção da conica com a reta impropria.



Há pontos da conica no infinito —

$y^2 - ax^2 - bxz - cz^2 = 0$ é a equação da conica em coordenadas homogeneas.

Façamos $z_0 = 0$

$y_0^2 - ax_0^2 = 0 \rightarrow \frac{y_0}{x_0} = \pm\sqrt{a}$, relação que fornece a direção das assintotas.

$\frac{y_0}{\pm\sqrt{a}} = \frac{1}{x_0} \qquad P_\infty = (1; \pm\sqrt{a}; 0)$

$y = \pm\sqrt{a}\,x + t$. Estas retas passam pelo ponto improprio e sua interseção é racional para a positivo.

Exercício — $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2x - 4}}$

Vejamos se é soluvel pelo primeiro caso —

$x^2 + 2x - 4 = 0 \qquad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2}$

É, porem cairemos num caso de integração complicado.

O segundo caso não resolve.

Vejamos se o terceiro resolve —

$y = \pm\, p$

$y = x + t \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + 2x - 1} = x + t$

$x^2 + 2x - 1 = x^2 + 2xt + t^2$

$2x - 1 = 2xt + t^2$

$$x = \frac{1 + t^2}{2(1-t)}$$

Temos então —

$$\int \frac{dt}{\frac{t^2+1}{1-t} + t} \cdot \frac{dx}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-t^2 + 2t - 1}{\frac{\cancel{t^2} + 1 + t - \cancel{t^2}}{1-t}\,(1-t)^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{(1-t)(t+1)}\, dt.$$

Sendo $dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t(1-t) - t^2 + 1}{(1-t)^2}\, dt =$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{2t - t^2 + 1}{1 - t^2}\, dt.$$

Devemos efetuar a ~~integração~~ divisão, e integrar. Obteremos $A + B\, lg(1-t) + C\, lg(t+1)$ que derivado fornece A, B, C; este é o método de Ruffini.

Integrais binomias.

São integrais da forma —

$$\int x^m (a + bx^n)^s\, dx = I$$

Façamos $-\frac{bx^n}{a} = t \rightarrow$

$$x = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} (t)^{\frac{1}{n}}$$

$$I = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \frac{a^s}{n} \int t^{m/n} (1-t)^s\, t^{\frac{1}{n} - 1}\, dt =$$

$$= k \int t^p (1-t)^q\, dt$$

Sendo $p = \frac{m - n + 1}{n}$ $\quad q = s$.

Então, a binomia na forma mais geral é $I_{p,q} = \int t^p (1-t)^q\, dt$.

Casos de integração -

Só são possiveis três -

1) q inteiro - (desenvolve-se pela formula do binomio)

2) p inteiro - Fazemos $1-t = \tau$

$$1-\tau = t$$

$$dt = -d\tau$$

vem $I_{pq} = \int \tau^q (1-\tau)^p d\tau$ e recaimos no caso anterior.

3) $p+q$ inteiro - Fazemos $t = \frac{1}{z} \rightarrow dt = \frac{-dz}{z^2}$

$$I_{pq} = -\int \frac{1}{z^{p+2}} \left(1-\frac{1}{z}\right)^q dz = -\int \frac{1}{z^{p+2}} \left(\frac{z-1}{z}\right)^q dz =$$

$$= -\int z^{-(p+q+2)} (z-1)^q \, dz$$

e recaimos no caso (1).

Formas de reducção -

$$I_{p,q+1} = \int t^p (1-t)^{q+1} dt = \int t^p (1-t)^q dt - \int t^{p+1} (1-t)^q dt$$

$$\int t^p(1-t)^q - t^{p+1}(1-t)^q dt$$

$$= \int t^p (1-t)^q (1-t) dt$$

$$I_{p,q+1} = I_{p,q} - I_{p+1,q}$$

Consideremos

$$\int [D \, t^{p+1} (1-t)^{q+1}] \, dt = t^{p+1} (1-t)^{q+1}$$

$$= (p+1) \int t^p (1-t)^{q+1} dt - (q+1) \int t^{p+1} (1-t)^q dt$$

e vem

$$(p+1) I_{p,q+1} - (q+1) I_{p+1,q} - t^{p+1} (1-t)^{q+1} = 0 \quad (2)$$

$$I_{p,q+1} + I_{p+1,q} - I_{p,q} = 0 \quad (1')$$

que é um sistema do primeiro gráu a duas incognitas, $I_{p,q+1}$ e $I_{p+1,q}$.

Resolvamos estas equações -

O sistema vai depender da matriz -

$$\left\| \begin{matrix} p+1 & -(q+1) & -t^{p+1}(1-t)^{q+1} \\ 1 & 1 & -I \\ N_1 & -N_2 & D \end{matrix} \right\|$$

será -

$$I = \Big| \, {}^{p+1}_{1} \quad -{}^{(f+1)}_{1} \Big| = p + f + 2$$

$$N_1 = \Big| \, -{}^{(f+1)}_{1} \quad -t^{p+1} \quad \frac{(1-t)^{f+1}}{I_{p,f}} \Big|$$ resolvendo —

$$(p+f+2)\, I_{p,f+1} = (f+1)\, I_{p,f} + t^{p+1}(1-t)^{f+1}$$

$$(p+f+2)\, I_{p+1,f} = (p+1)\, I_{p,f} - t^{p+1}(1-t)^{f+1}$$

Temos as formulas de reducão.

A primeira permite a redução a formulas em que se baixa o gráu de p — $\int t^p (1-t)^f\, dt$.

É possivel fazer-se redução mais rapida (la Vallée Poussin)

Pode-se fazer redução de p e f até valores entre zero e um.

As integrais binomias definem então novas funções dependentes de p e f.

Integração das racionais contendo transcendentes.

$$\int R(e^{ax})\, e^{ax} \cdot du = I$$

Façamos $z = e^{ax}$ $\quad \frac{dz}{a} = e^{ax} \cdot du$

$$I = \frac{1}{a} \int R(z) \cdot dz.$$

Outro tipo — $\int R(l.u) \frac{du}{u} \rightarrow z = l.u$

Integração das racionais trigonometricas — (com seno e cos)

$$\int R(\operatorname{sen} u, \cos u)\, du.$$

A transformação $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t$ integra sempre.

$u = 2 \operatorname{arc.tg} t. \qquad du = 2 \frac{dt}{1+t^2}$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} = 1$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)^2+1=\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

$$2\operatorname{sen}\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}=\operatorname{sen}u$$

$$\cos^2\frac{u}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{u}{2}=\cos u$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{u}{2}=\frac{t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}u=\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

$$\cos u=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Temos sen u, cos u e du racionais e integram-se estas racionais.

Expressão importante são as das racionais —

$\int \operatorname{sen}^m u \cdot \cos^n u \, du$ que se transformam em binomias —

Façamos $\operatorname{sen}u=t^{1/2}$

$$\cos u=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}=(1-t)^{\frac{1}{2}}$$

$$I=\frac{1}{2}\int t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\,dt$$

Sendo ainda $\cos u\,du=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$

$$du=\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$$

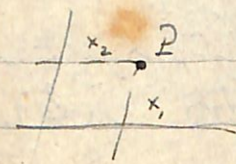
9/10/45

Funções de duas ou mais variáveis

Conjuntos planos — caso particular de conjuntos em geral.

Um conjunto de pontos $P(x_i)$ definem a um elemento ao qual correspondem i (1, 2, ... n) numeros.

Conjunto plano — a um ponto P corresponde um par de números x_1 e x_2



Introduzamos no conjunto uma metrica-

Seja $\rho = \overline{P_1 P_2} \longrightarrow [\rho(P_1, P_2)]$

Será $\rho(P_1, P_2) = 0 \rightarrow P_1 = P_2$

$$\rho(P_1, P_2) + \rho(P_2, P_3) \geq \rho(P_1, P_3)$$

Se estas três condições fôrem satisfeitas, dizemos que se introduziu uma metrica.

Conjunto plano - aquele no qual a um elemento P correspondem dois números u_1 e u_2.

Diametro do conjunto (diametro máximo) - ao maior dos valôres de ρ (extremo superior de ρ) sendo M_1 e M_2, pontos do conjunto $\rho(M_1, M_2)$

Se ρ_{max} não existe, o conjunto é irrestrito.

O conjunto dos pontos $\rho(c, x) \leq r$ será o conjunto dos pontos internos a um circulo de raio r. Será o circulo. De uma maneira geral $\rho(c, x)$ é dita esfera. Um ponto do conjunto é isolado se for possivel determinar o raio de uma esfera na qual não haja pontos do conjunto distintos de seu centro.

Vizinhança de um ponto. A ~~ponto~~ $V(A, \rho)$ (vizinhança de A de extremidade ρ) é o conjunto dos pontos pertencentes a uma esfera de centro A e raio ρ.

Ponto de acumulação - Um ponto A pertencente ou não ao conjunto é ponto de acumulação se existir pelo menos um ponto distinto de A em qualquer esfera de raio arbitrário ρ.

Um ponto do conjunto é interno se fôr ponto de acumulação de pontos do conjunto (I)

Um ponto E não pertencente ao conjunto é ponto externo se nas suas vizinhanças arbitrárias não caiem pontos ag gum do conjunto.

Existe um ponto fronteira F em cujas vizinhanças arbitrárias cáem pontos do conjunto e pontos não pertencentes ao conjunto. (É ponto de acumulação do conjunto e dos pontos externos).

Região - é o conjunto de pontos internos - é um conj. aberto, i. é, nele não está compreendida a fronteira. Desprezam-se os pontos fronteiras.

Conexão - um conjunto é conexo quando podemos ligar dois de seus pontos quaisquer por um número finito de esferas que se cortam, constituidas de pontos do conjunto.

Domínio - Conjunto aberto conexo. Caracteriza-se sempre pela conexão.

Concatenação - Um conjunto é bem concatenado se dois de seus pontos puderem ser ligados por uma poligonal tal que o lado arbitrário $P_i P_{i+1} < \varepsilon$ e os vertices sejam pontos do conjunto.

A poligonal se diz poligonal ε.

Ao conjunto bem encadeado de ε arbitrário chama-se um contínuo.

Um conjunto derivado - formado pelos pontos de acumulação.

Conjunto denso em si - conjunto contido pelo seu derivado.

O conjunto que coincide com seu derivado é perfeito.

Noção de função de duas ou mais variáveis.

Seja um conjunto C e um ponto P(x; y), se a um ponto f corresponder este P - f (P), diremos haver uma função mul ti ou univalente; que se representa por $f(x, y)$; sendo f um numero real - varia num conjunto linear, pode ser então restrito acima, abaixo, admitir restrição inferior, superior, etc.

O conjunto linear dos números f se diz campo de variação da função.

O conjunto dos pontos $P(x, y)$ para os quais f é definida se diz campo de definição da função - pode ser região, domínio, só fronteira, etc.

Funções de duas variáveis

Limite -

Diz-se que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$

quando fôr possivel, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário, encontrar-se um ráio ρ que dependa de ε, tal que $|f(x, y) - l| < \varepsilon$

$\rightarrow |x - x_0| < \rho(\varepsilon) \qquad |y - y_0| < \rho(\varepsilon)$

Antes de mais nada, P_0 deve ser ponto de acumulação - O modo de P tender a P_0 é arbitrário.

Continuidade - Uma função é continua num ponto x_0, y_0 se

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Uma função pode ser continua em x e em y e não o ser em relação a x e a y.

Seja por exemplo $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

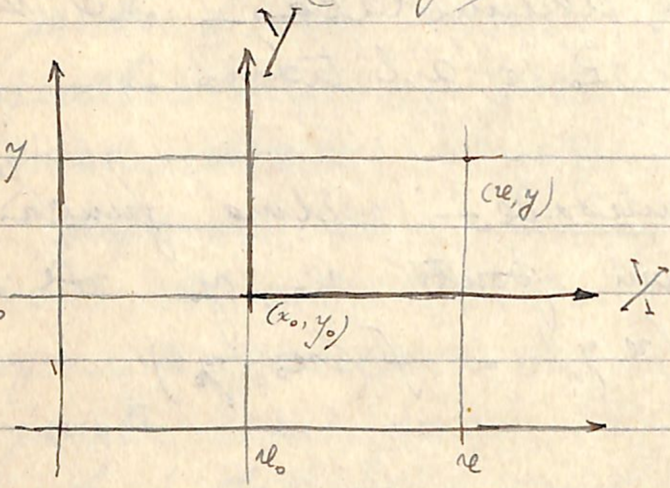
$f(0, 0) = 0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Ela é continua em $x, y_0 \rightarrow \dfrac{2xy_0}{x^2 + y_0^2}$

Considerada só função de y -

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) = 0$$

$$\lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = 0$$



Façamos $\rho \cos\theta = x$

$\rho \sin\theta = y$

$$f(x,y) = \frac{2\rho^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^2} = \sin 2\theta$$ (independe de ρ)

Façamos $P_{\rho,\theta}$, $P(x,y)$ tender a zero.

θ	$f(x,y) = \sin 2\theta$
0	0
$\pi/4$	1

Para $\theta = 0$ $\lim\limits_{\substack{\rho \to 0 \\ (\theta \to 0)}} f(x,y) = 0$

A função é contínua sobre o eixo X.

Para $\theta = \pi/4$ $\lim\limits_{P \to 0} f(P) = 1 \neq f(P_0) = 0$

Neste caso, $P \to 0$ sobre a linha $\frac{\pi}{4}$, a função é descontínua.

Seu limite não é o valor da função no ponto zero. Só é contínua nos pontos dos eixos X e Y.

P deve então tender a P_0 de uma maneira qualquer —

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = l \longrightarrow$$

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon \qquad |x - x_0| + |y - y_0| < \eta(\varepsilon)$$

Derivadas parciais —

Pode acontecer que exista o limite —

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} =$$

$$= f'(x_0\, y_0)$$

Esta derivada tem o símbolo ∂, para indicar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não é quociente.

Analogamente —

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Diferencial —

Acréscimo — $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$\Delta f = f(P') - f(P)$

Diferencial — se fôr possivel colocar-se o acrescimo Δf sob a forma

$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon\rho$, linear em Δx e em Δy, com A e B coeficientes independentes de Δx e Δy (só dependentes da função e do ponto x_0 e y_0), sendo $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon = 0$,

$\rho = |\Delta x| + |\Delta y|$,

dizemos por definição, que a função é diferenciavel no ponto.

Chama-se diferencial, e se indica $df = A\Delta x + B\Delta y$ (a parte linear do acrescimo),

Daqui — $\Delta f = df + \varepsilon\rho$.

Teorema — $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$ (derivada parcial em x_0, y_0)

Com efeito, Δf para $\Delta y = 0$ será

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\varepsilon \rho}{\Delta x} \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = A$$

Analogamente

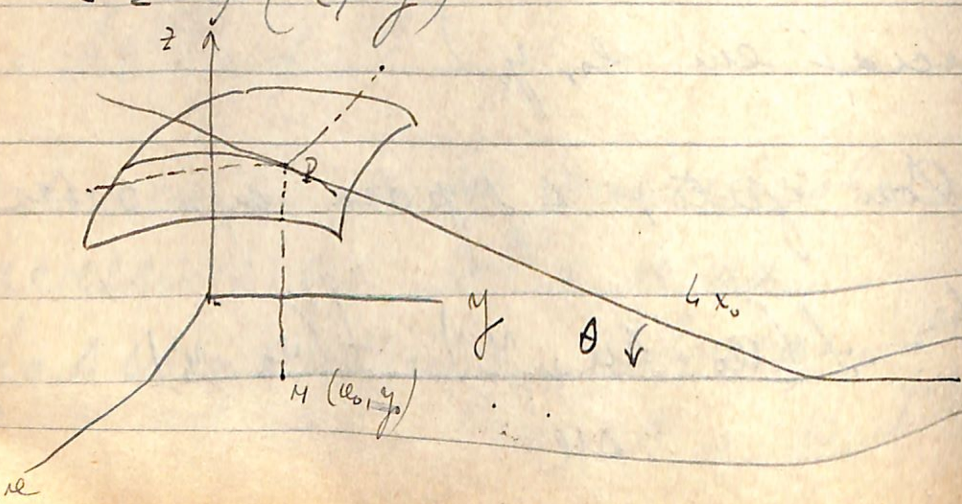
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = B$$ e por fim –

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

18/10/45

Representação gráfica das derivadas parciais.

$z = f(x, y)$



Façamos $x = x_0$, obteremos a linha $L x_0$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ nos fornece a inclinação da tangente em P, relativamente a um paralelo ao eixo dos y (θ)

De maneira identica, $y = y_0$ fornece outra tg. em relação a $L y$

Diferenciais.

Seja $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ se fôr possivel colocar Δf sob a forma $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon \rho$, dizemos que a função é diferenciavel em x_0 e y_0, desde que A e B não dependam de Δx e Δy.

Chamemos então –

$A\Delta x + B\Delta y = df$, será

$\Delta f = df + \varepsilon\rho$.

Demonstremos que A e B são as derivadas parciais.

Teorema — Se $y = y_0 \to \Delta y = 0$,

$$\Delta f = A\,\Delta x + \varepsilon\rho \quad \text{e} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{\varepsilon\rho}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}$$

Analogamente,

$$B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}.$$

Portanto, $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

Se a função reduzir-se apenas a x $\to$ $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$, $dx = \Delta x$ e igualmente $dy = \Delta y$, logo,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

quando x e y são as variáveis independentes.

Em caso contrário —

$$x = \varphi_1(t) \qquad y = \varphi_2(t)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

(função de função)

Se uma função fôr diferenciável, ela é contínua, pois

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right\}$$

— c.q.d.

A diferencial de uma função de três variáveis será —

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial z} dz$$

Convem conhecer-se para aplicações em Física as três funções seguintes -

$f(x, y, z) = f(P) \rightarrow P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Por definição, gradiente de f —

$$\text{grad. } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \text{ num} \quad (1)$$

sistema cartesiano ortogonal.

Demonstra-se que esta expressão é invariante a uma mudança de origem e a uma rotação dois eixos.

Se considerarmos que

$dP = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$,

$$\boxed{\text{grad. } f \times dP = df} \quad (1')$$

Consideremos $\vec{v} = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}$

$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \text{div. } f$ (divergente do vetor $\vec{v}$)

Função rotacional de $\vec{v}$ é o outro vetor

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Representa uma velocidade.

Div. $\vec{v}$ representa uma massa flúida.

Grad. representa uma variação de temperatura, por exemplo dividido pelo espaço medio.

Teorema da invariância da diferencial.

Tomemos $f(x, y) \rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\rho$.

Se x e y são variáveis independentes — $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ (1)

Se x fôr $\varphi_1(u, v)$ e $y = \varphi_2(u, v)$, será

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$ onde dx e dy

são as diferenciais de x e y.

$$\rho = |\Delta x| + |\Delta y|$$

$$\Delta x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \Delta v + \varepsilon \rho_1$$

$$\rho_1 = |\Delta u| + |\Delta v|$$

$$\Delta y = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi_2}{\Delta v} \Delta v + \varepsilon \rho_2$$

sendo $\lim\limits_{\rho_1 \to 0} \varepsilon_1 = 0$ $\quad \lim\limits_{\rho_1 \to 0} \varepsilon_2 = 0$

Consideremos

$$|\Delta x| \in \left|\frac{\partial f_1}{\partial u}\right| |\Delta u| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right| |\Delta v| + \varepsilon_1 \rho_1$$

e mais M o maior dos números

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\right| \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\right| \quad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right| \quad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right|$$ e

ω o maior dos ε_1 e ε_2.

$|\Delta x| \leq M\{|\Delta u| + |\Delta v|\} + \omega \rho_1$ e igualmente $|\Delta y| = M\{|\Delta u| + |\Delta v|\} + \omega \rho_2$,

somando — $\rho \leq 2(M + \omega)\rho_1$

c.q.d.

19/10/45

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$ é forma

invariante, quer x e y sejam variáveis independentes, quer sejam funções de t

Com efeito, da aula anterior sabemos

$$\rho \leq |\Delta x| + |\Delta y| \leq 2(M + \omega)\rho_1$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} \leq 2(M + \omega)$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \varepsilon_2 + \varepsilon \frac{\rho}{\rho_1}}_{\overline{\varepsilon}}$$

$$\lim_{\rho_1 \to 0} \overline{\varepsilon} = 0$$

Ora, ρ e ρ_1 são de ordens diferentes, portanto $\lim\limits_{\rho_1 \to 0} \bar{\varepsilon} = 0$, donde

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df$$

cqd.

Derivadas das funções compostas de uma variável.

$$x = \varphi_1(t) \qquad y = \varphi_2(t)$$

$$f[x(t), y(t)] = F(t)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\rho}{\Delta t}$$, no limite –

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Derivadas parciais de ordem superior à primeira –

Supondo que os números $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ existam para todos os números do conjunto C — $\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi_1(x, y)$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$ é a diferencial parcial de segunda ordem em relação a x.

Pode acontecer que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

Da mesma forma teriamos $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$; $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x}$, derivada em relação duas vezes a x, a y depois e por fim a x.

Consideremos a função $f(x, y)$, e vejamos se é possivel considerar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$, como, quando e porque.

Vejamos as condições de Schwartz e Young.

Seja $\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$

$\varphi(x+h) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y)$

$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) -$

$- [f(x+h, y) - f(x, y)]$

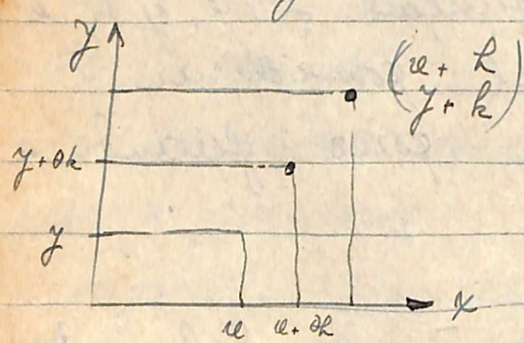
Admitamos que o segundo membro tenha $\varphi(x+h)$ derivável e contínua,

teremos

$= h[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)]$

aplicando novamente o teorema da média —

$= hk[f''_{x,y}(x+\theta h, y+\theta k)]$



Sendo $f''_{x,y}$ existente e contínua no ponto x, y,

$= hk[f''_{x,y}(x, y) + \varepsilon]$

Dividindo por k —

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - [f(x, y+k) - f(x, y)]}{k} =$$

$= h[f''_{x,y}(x, y) + \varepsilon]$ passando ao limite, $k = 0$ —

$f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y) = h[f''(x, y) + \varepsilon]$

Dividindo por h e passando ao limite —

$f''_{y,x}(x, y) = f''_{x,y}(x, y)$, i. é,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$ cqd

Teorema — Si existir uma derivada parcial mixta de 2ª ordem nas vizinhanças do ponto, e nele contínua, então existe a outra derivada mixta, que lhe é igual

(Schwarz).

Diferenciais de ordem superior á primeira.

Vimos que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$df = \left[\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right] f(x,y)$$

Diferencial de ordem superior á primeira

$$d(df) = \left[\frac{\partial}{\partial x} df\right] dx + \left[\frac{\partial}{\partial y} df\right] dy =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right] dx +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right] dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= d^2 f$$

Pela aplicação das definições.

Generalizando-se —

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy +$$

$$+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$$

$$d^2 f = \left[\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right]^2 f(x,y)$$

Neste caso o expoente 2 tem o significado de operação repetida.

Isto porque

$$d(df) = \left[\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right]\left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

é um operador á esquerda.

Prova-se que sendo verdadeiro para n é verdadeiro para $n+1$.

Esta demonstração encontra-se no Jordan.

Teorema de Euler

Funções homogeneas

Por definição

$$(1) \quad f(x, y, z \ldots) = t^{-m} f(tx, ty, tz \ldots)$$

Pois é:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = f(x, y)$$

$$a(tx)^2 + 2b(tx)(ty) + c(ty)^2 = f(tx, ty) =$$

$$= t^2(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$$

$$(1') \quad f(tx, ty, tz \ldots) = t^m f(x, y, z \ldots)$$

Diz-se que uma $f(x, y, z \ldots)$ é homogenea de grau m, quando fôr possivel dar-se-lhe uma das formas 1 ou 1'

o

Teorema de Euler —

Diz-se que

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z + \ldots = m f(x, y, z \ldots)$$

Façamos em 1' — $tx = X$

$ty = Y$

$tz = Z \ldots$

Derivando em relação a t —

$$f'_X \frac{dX}{dt} + f'_Y \frac{dY}{dt} + f'_Z \frac{dZ}{dt} + \ldots =$$

$$= m t^{m-1} f(x, y, z \ldots)$$

Se fizermos $t = 1$

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z + \ldots = m f(x, y, z \ldots)$$

C.Q.D.

Teorema sob outra forma —

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right] f(x, y, z \ldots) =$$

$= m f(x, y, z, \ldots)$. A reciproca é verdadeira.

Teorema de Euler — Generalização.

$$\left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right]^n f =$$

$$= m(m-1) \ldots (m-n+1) f.$$

26/10/45

Teorema de existencia das funções implicitas

Suponhamos $f(u, x, y) =$
$= (x+1)u^2 + xyu + (y-x) = 0$

$$u = \frac{-xy \pm \sqrt{(xy)^2 - 4(x+1)(y-x)}}{2(x+1)}$$

u tornou-se explicita, e temos uma correspondencia entre os pontos x, y e u.

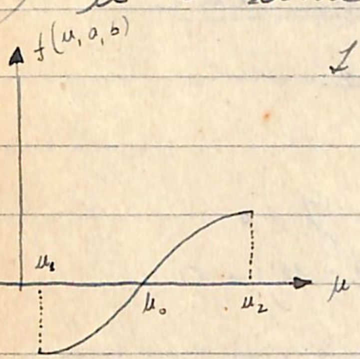
Com Dirichlet devemos mostrar como x, y, estão em correspondencia com u.

Este é o teorema - Consideremos $f(x, u, y)$ tal que -

1) em $P_0 \equiv (u_0, a, b)$ ela se anule;
2) seja diferenciavel em P_0.
3) que $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 \neq 0$;

podemos garanter que existe a correspondência $u = \varphi(x, y)$ tal que $u_0 = \varphi(a, b)$; existe du e

4) u é única.



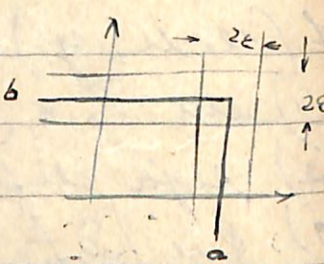
1ª parte) Dados a, b pode-se calcular $f(u, a, b)$. No ponto u_0 é $f(0) = 0$

Mas em u_0 a diferencial existe, logo não é estacionária. Em pontos das vizinhanças à esquerda e à direita, a função toma sinais contrários.

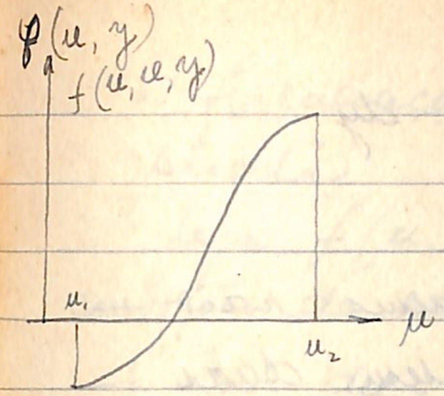
$f(u_1, a, b) < 0 \qquad f(u_2, a, b) > 0$

A função f pela segunda hipotese é diferenciável, logo continua e assim sendo, pelo teorema da permanência do sinal, pode-se encontrar um numero ε tal que $|x - a| < \varepsilon$

$|y - b| < \varepsilon$



no qual intervalo mantêm-se os sinais de f à esquerda e à direita de u_0.



Toma sinais contrarios, logo anula-se pelo menos num ponto, que será a raiz da equação.

Tomemos uma raiz, a maior por exemplo — será $u = \varphi(x, y)$. Se este ponto fosse o ponto a, b, voltariamos ao valor conhecido. Porem não fixamos o ponto P, então — $u = \varphi(x, y)$ c.q.d.

2ª parte) u é diferenciável sob as hipoteses.

Ora, $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y +$

$+ \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta u$

$\lim \varepsilon_i = 0$

$\rho \to 0 \qquad |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta u| = \rho$

Ora, $\Delta f = 0$

$$\Delta u = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y}{\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta u}{\frac{\partial f}{\partial u}} \quad \varepsilon/\rho$$

no limite —

$$du = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial u}} dy$$

Vejamos que só há uma raiz —
Suponhamos que houvessem duas —

$u = \varphi(x, y)$

$\xi = \varphi_1(x, y) \rightarrow f(u, x, y) - f(\xi, x, y) = 0$

pois ambas satisfazem o teorema.

Mas

$f(u, x, y) - f(\xi, x, y) =$

$= (u - \xi) f'_u(\bar{u}, x, y)$

porem $f'_u(\bar{u}, x, y) \neq 0$ logo só pode ser

$u = \xi$

— // —

Poderiamos enunciar análogos teoremas para os sistemas, o que faremos nas aplicações.

Diferenciação das funções implicitas.

Seja $f(u, x) = 0$ satisfazendo as condições de existencia.

1) $\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0 \qquad du = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}} dx$

2)

$f(u, x, y, \ldots) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots = 0$$

$$du = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \ldots}{-\frac{\partial f}{\partial u}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$$

— .. —

Sistemas.

Consideremos um sistema de n equações, com n variáveis independentes e uma variável dependente —

$$\begin{cases} f_1(u, x, y \dots) = 0 \\ f_2(u, x, y \dots) = 0 \\ \dots \\ f_n(u, x, y \dots) = 0 \end{cases}$$

Este sistema define n variáveis em função de uma independente -

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u} du = 0$$

26/10/45.

Consideremos

$$\begin{cases} f_1(u, v, w, \dots x) = 0 \\ f_2(u, v, w, \dots x) = 0 \\ \dots \\ f_n(u, v, w, \dots x) = 0 \end{cases}$$

n equações a n variáveis e mais uma x.

Suponhamos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial v} dv + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial v} dv + \frac{\partial f_2}{\partial w} dw + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x} dx = 0$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial u} du + \frac{\partial f_n}{\partial v} dv + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x} dx = 0$$

Considerando as n incognitas $du, dv, dw \dots$, esse sistema ficará dependendo de

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial u}, \frac{\partial f_1}{\partial v} \dots, \frac{\partial f_2}{\partial u}, \frac{\partial f_2}{\partial w} \dots \frac{\partial f_n}{\partial u}, \frac{\partial f_n}{\partial v} \dots \right|$$

Chamemos ao determinante desse sistema de Jacobiana (J). Se ele for diferente de zero o sistema admite soluções as quais serão:

$du = A_1 dx$, $dv = A_2 dx$, $dw = A_3 dx \dots$

soluções essas que representam as diferenciais de um sistema de $n+1$ variáveis. A solução ficou dependendo do teorema da existência.

O sistema $f_i(u, v, w \dots x)$ de $n+1$ variaveis, que se anula num ponto, é diferenciavel nesse ponto, sendo seu Jacobiano diferente de zero no ponto; esse sistema define n funções $u, v, w \dots$ da variável independente x, funções continuas, uni cas do ponto dado.

Consideremos um 4º caso:

Sejam $f_i(u, v, w, \ldots x, y, z) = 0$

$u, v, w \ldots$ n variáveis

$x, y, z \ldots$ m variáveis, ao todo $n+m$ variáveis.

Admitamos satisfeito o teorema da existencia, podemos diferenciar —

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} du + \frac{\partial f_i}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x} dx + \frac{\partial f_i}{\partial y} dy + \frac{\partial f_i}{\partial z} dz = 0$$

Podemos tomar como incognitas du, dv, $dw \ldots$ se $J \neq 0$ temos solução unica.

$$\begin{cases} du = A_1 dx + B_1 dy + C_1 dz \ldots \\ dv = A_2 dx + B_2 dy + C_2 dz \ldots \\ \ldots \\ dw = A_n dx + B_n dy + C_n dz \ldots \end{cases}$$

sendo

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots \quad C_n = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Vejamos as derivadas de ordem superior á primeira —

1º caso — $f(x, y) = 0$, sendo (pelo teorema da existência) $y(x)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$ derivando segunda vez

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dx}} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{dx^2} = 0$$

?

Verificar quais as variáveis dependentes e independentes!

Caso geral —

Tomemos $f_i(u, v, w \ldots x, y, z) = 0$

$(i = 1, 2 \ldots n)$

$u, v, w \ldots x, y, z$ sendo as $n + m$ variáveis.

Diferenciemos a primeira vez:

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv + \ldots + \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz\right] f_i = 0$$

Se $J \overset{?}{=} 0$, podemos tirar

$$du = A_1\, dx + A_2\, dy + \dots$$
$$dv = B_1\, dx + B_2\, dy + \dots$$
$$\dots$$
$$dw = M_1\, dx + M_2\, dy + \dots,$$ o que há pouco vimos.

Diferenciemos novamente —

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} d^2u + \frac{\partial}{\partial v} dv + \dots + \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \dots\right]^2 f_i +$$
$$+ \frac{\partial f_i}{\partial u} d^2u + \frac{\partial f_i}{\partial v} d^2v + \frac{\partial f_i}{\partial w} d^2w + \dots = 0$$

Não aparecem d^2x, d^2y, d^2z ... na segunda diferencial pois estas n variáveis têm seus acrescimos considerados constantes.

Temos n equações e n incognitas — $\partial^2 u$, $\partial^2 v$, $\partial^2 w$ ... sendo que seus coeficientes formam o $J \neq 0$, portanto há solução para este sistema.

A de 3ª ordem resolve-se igualmente, e assim à de ordem n.

Mudança de variáveis importante!

152 Pg. Lasalle

6/11/45

Eq. Diferenciais
(Dr. Breves)

Diz-se que a expressão $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata se existir uma função $f(x,y)$ tal que sua diferencial ~~exata se existir~~ to- tal seja igual à expressão dada, isto é, $df = P\,dx + Q\,dy$

Teorema - Sendo $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funções contínuas e com derivadas primeiras também contínuas, a condição necessária e suficiente para que a expressão $P\,dx + Q\,dy$ seja diferencial exata é que

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

1º) A condição é necessária -
Suponhamos que exista uma função $f(x,y)$ tal que $df = P\,dx + Q\,dy$. A diferencial total da função f é

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, subtraindo-se estas duas expressões membro a membro -

$$\left(P - \frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(Q - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = 0$$

Em virtude da arbitrariedade de dx e dy conclue-se que $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$

Portanto - $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ~~e~~

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. De acordo com o teorema de Schwartz e Young - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

logo - $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ cqd.

2º) A condição é suficiente -
Suponhamos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ e demonstremos a existência de uma função f tal que $df = P\,dx + Q\,dy$ ("Não existe" a função f, vamos constru

la).

Se existir f, deverá satisfazer à condição $\frac{\partial f}{\partial x} = P$

A função f que satisfaz a esta condição é $f(x, y) = \int_a^x P(x, y)\, dx + \varphi(y) = 0$ (1)

Resta-nos determinar $\varphi(y)$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$

Derivando-se (1) em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\, dx + \varphi'(y)$$

De acordo com a hipotese inicial tem-se: $\frac{\partial f}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \varphi'(y)$

A integral de uma derivada é a propria função

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left[Q(x, y)\right]_a^x + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) - Q(a, y) + \varphi'(y)$$

Devendo ser $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$, conclue-se que $\varphi'(y) = Q(a, y)$ e portanto,

$$\varphi(y) = \int Q(a, y)\, dy + C$$

Substituindo em (1), resulta

$$\boxed{f(x, y) = \int_a^x P(x, y)\, dx + \int Q(a, y)\, dy + C}$$

que é a função procurada. cqd

Equações Diferenciais.

Chama-se equação diferencial a uma relação entre funções, suas variáveis e suas derivadas ordinárias ou parciais.

A equação diferencial chama-se ordinaria quando se referir apenas a funções de uma variável. As outras são as de derivadas parciais.

Estudaremos apenas as equações diferenciais ordinárias com uma função incognita, isto é, equações do tipo $F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$ sendo $y = y(x)$

Sendo de ordem n a derivada de ordem máxima que comparece na equação, esta se diz de ordem n.

Começaremos a estudar as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. — $F(x, y, y') = 0$.

19/11/45.

Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

$F(x, y, y') = 0$

Tipos: —

1) Diferencial exata. $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ sendo $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (condição que as caracteriza)

De acordo com o que foi visto sobre expressões diferenciais exatas, a condição $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ é condição necessaria e suficiente para a existencia de uma função $f(x, y)$ tal que $df = P\,dx + Q\,dy = 0$. A solução é portanto $f(x, y) = c^{te}$, isto é,

$$\boxed{\int_a^x P(x,y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = c^{te}}$$

2) Equação de variáveis separadas.

$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$, é caso particular do caso anterior pois $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

A solução é $\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = c^{te}$

3) Equações de variáveis separáveis.

$P_1(x)\,P_2(y)\,dx + Q_1(x)\,Q_2(y)\,dy = 0$

dividindo por $P_2(y)\,Q_1(x)$. —

$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} = 0$ é o caso anterior. Integra-se

4) Equações homogeneas —

$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$

P e Q são homogeneas do mesmo grau m.

Devemos efetuar a mudança $y = tx$.

$dy = t\,dx + x\,dt$, substituindo —

$P(x, tx)\,dx + Q(x, tx)(t\,dx + x\,dt) = 0$

Podemos dividir tudo por x^m colocando-o em evidência — obteremos

$P(1, t)\,dx + Q(1, t)(t\,dx + x\,dt) = 0$ e finalmente

$[P(1,t) + t\,Q(1,t)]\,dx + x\,Q(1,t)\,dt = 0$ que é equação de variáveis separáveis.

5) Equações lineares.

$y' + P(x)\,y = Q(x)$.

Uma equação diferencial é linear quando os termos na função e nas derivadas são do 1.º grau.

[Poder-se-á fazer $dy + [Py + Q]\,dx = 0$ e se fosse $P = Q$ cairíamos numa equação de variáveis separáveis].

Porém vejamos o método geral —

Façamos $y = uv \rightarrow y' = uv' + vu'$

substituindo — $uv' + vu' + Puv = Q$

Pondo u em evidência —

$u(v' + Pv) + vu' = Q$

Determinemos v de modo que $v' + Pv = 0$

$\dfrac{dv}{dx} + Pv = 0 \qquad \dfrac{dv}{v} + P\,dx = 0$

$\dfrac{dv}{v} = -P\,dx \rightarrow \ln v = -\int P\,dx$

$v = e^{-\int P\,dx}$

Nota — Como neste caso basta um valor para v, em tal integral não se coloca a constante.

Para este valor de v temos

$vu' = Q$, isto é, $v\dfrac{du}{dx} = Q \rightarrow$

$du = v^{-1}Q\,dx$. A solução é —

$u = \int v^{-1}Q\,dx + C$

Finalmente

$y = uv = \left[\int e^{+\int P\,dx}\,Q\,dx + C\right]e^{-\int P\,dx}$

20/11/45

Equações diferenciais lineares.

$f(x, y, y') = 0$

Há dois tipos –

1) as que admitem uma solução $y' = f_1(x, y)$

2) as que só comportam solução geral

$f(x, y, y') = 0$

Sua forma geral é $y' + Xy = X_1$ sendo

$X = X(x)$ e $X_1 = X_1(x)$

Propriedades –

Sua origem – Tomemos um conjunto de elipses co-focais e derivemos sua equação –

$$\frac{x^2}{a+c} + \frac{y^2}{b+c} = 1 \quad \frac{x}{a+c} + \frac{y\frac{dy}{dx}}{b+c} = 0$$

$$\frac{x}{a+c} = -\frac{yy'}{b+c} \quad \frac{x+yy'}{a-b} = \frac{x}{a+c} = \frac{-yy'}{b+c}$$

substituindo na equação –

$$\frac{(x+yy')x}{a-b} - \frac{\frac{x}{y'}+y}{a-b} = 1$$

, obtivemos uma $f(x, y, y')$ por eliminação da constante entre a função e sua derivada.

As equações diferencias estudam o problema inverso.

Então – resolver uma equação diferencial é achar uma função que substituida na equação, transforme a esta numa identidade.

Tipos de solução: –

1) Geral – com constantes arbitrárias.

2) Particular – provem das gerais por meio de valôres determinados das constantes.

3) Singular – é uma solução que não provem de valores particulares das constantes mas satisfaz a equação

$f(x, y, y') = 0$ sendo $y' = \frac{dy}{dx}$

Estudemos os dois tipos.

Faz parte do primeiro tipo, a equação diferencial linear. A equação será homogenea se não tiver o segundo membro, em $y' + Xy = X_1$

1ª propriedade) — Conhecida uma solução particular y_1, a integração reduz-se a uma quadratura.

Com efeito, $y' + Xy = X_1$

$$y_1' + Xy_1 = X_1 \quad \text{Subtraindo}$$

$$(y - y_1)' + X(y - y_1) = 0$$

$$Y = y - y_1 \rightarrow \frac{dY}{dX} = -XY \rightarrow$$

$$Y = Ce^{-\int X dx} \rightarrow y - y_1 = Ce^{-\int X dx}$$

2ª propriedade) — Conhecidas duas soluções particulares, a solução geral independe de quadraturas.

Com efeito, conhecida outra solução resulta

$y_2 - y_1 = C_2 e^{-\int X dx}$ divididas membro a membro —

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = k$$

Equação de Bernoulli

Não é linear porem pode ser reduzida a uma linear.

$y' + Xy = X_1 y^n$ (observe-se que $n \neq 1$)

$$\frac{y'}{y^n} + Xy^{-(n-1)} = X_1$$

Façamos $y^{-(n-1)} = z(x)$

$$-(n-1)y^{-n}y' = z'$$

Na equação —

$$-(n-1)y^{-n}y' - (n-1)Xy^{-(n-1)} = -(n-1)X_1$$

$z' - (n-1)Xz = -(n-1)X_1$, que é linear.

A transformação $y = \frac{1}{z^{-\frac{1}{n+1}}}$ a integrará.

Equação de Riccati

$y' + Xy = X_1 y^2 + X_2 y + X_3$ —

$$y' + (X - X_2)y = X_1 y^2 + X_3$$

Sua forma geral reduz-se então a

$$y' + Xy = X_1 y^2 + X_2$$

Propriedades –

1) Conhecida uma solução particular, ela se reduz a uma solução geral. Seja uma solução particular $\bar{y}$.

$$\bar{y}' + X\bar{y} = X_1 \bar{y}^2 + X_2$$

Façamos – $y = \bar{y} + z$, obteremos uma linear em z

$$\cancel{\bar{y}'} + z' + \cancel{X\bar{y}} + Xz = \cancel{X_1\bar{y}^2} + 2X_1\bar{y}z + X_1 z^2 + \cancel{X_2}$$

$z' + [X - 2X_1\bar{y}]z = X_1 z^2$ que é uma equação de Bernoulli.

Fazendo $z = \frac{1}{u}$ teremos uma linear

ou $y = \bar{y} + \frac{1}{u}$ — $u = \frac{1}{y - \bar{y}}$

então sejam $u_1 = \frac{1}{y_1 - \bar{y}}$ $u_2 = \frac{1}{y_2 - \bar{y}}$

Ora as lineares nos dão $\frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = k$

então – $\dfrac{\frac{1}{y - \bar{y}} - \frac{1}{y_1 - \bar{y}}}{\frac{1}{y_2 - \bar{y}} - \frac{1}{y_1 - \bar{y}}} = k$

Transformando – $(y, \bar{y}, y_1, y_2) = k$, que é relação anharmonica.

Teorema – Conhecidas três soluções particulares, a relação anharmonica da solução geral e das particulares é constante.

Segundo tipo – Equações que não admitem uma solução em relação a y'.

$f(x, y, y') = 0$ $y' = \frac{dy}{dx} = p$

Então –

a) $f(x, p) = 0$ ⟶ $x = \varphi(p)$

$dy = p\,dx = p\,\varphi'(p)\,dp$

$$\begin{cases} y = \int \varphi'(p) \cdot p \cdot dp + c \\ x = \varphi(p) \end{cases}$$

A eliminação de p daria $F(x, y, c) = 0$.

A solução é parametrica.

5) $y = \varphi(p)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = p$

$$\frac{\varphi'(p)\, dp}{dx} = p$$

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p} + c \\ y = \varphi(p) \end{cases}$$

Dão soluções parametricas.

21/11/45.

Equações homogêneas.

Sua forma geral é $f(x, y, p) = 0$

Façamos $\frac{y}{x} = u$; virá —

$f_1(u, p) = 0$ e resolve-se

1) $p = \psi(u)$

2) $u = \varphi(p)$

1) é equação homogênea já resolvida.

Sejamos 2) — $y = ux$ →

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

$p = \frac{dy}{dx}$, isto é $p\,dx = u\,dx + x\,du$.

logo $(p - u)\,dx = x\,du$ donde —

$$[p - \varphi(p)]\,dx = x\,\varphi'(p)\,dp$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p - \varphi(p)}$$

A qual é equação de variáveis separadas e cuja integração é feita por quadraturas.

$x = \psi(p, c)$ e $y = ux = \varphi(p)\,\psi(p, c)$

sendo esta uma solução parametrica.

Equação de Lagrange

Resolvem-se esta e a de Clairault por derivação.

Sua forma é $y = P(p)\,x + P_1(p)$

sendo $p = \frac{dy}{dx}$

Derivando em relação a x —

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dp}\frac{dp}{dx} + P + \frac{dP_1}{dp}\frac{dp}{dx} \;—$$

$$p - P = \left[P' x + P_1'\right]\frac{dp}{dx}$$

Casos de solução —

1º) $p - P = 0$ É possível a solução desta equação caso em que obteremos suas raízes. Sejam estas

$$\left\{\begin{array}{l} p = C_0 \\ p = C_1 \end{array}\right.$$ Ora, $p = C_0 \rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$

e então, as raízes desta equação fornecem a solução da equação diferencial

$p = \frac{dy}{dx}$; $dy = C_0\,dx$

$y = C_0 x + k_0$ e temos uma serie de retas

2) $p - P \neq 0$

Façamos $(p-P)\frac{dx}{dp} - P'x = P'_1$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{P'}{p-P}\,x = \frac{P'}{p \cdot P}$$ que é uma equação linear.

Solução: $x = \psi(p, c)$ $\quad y = P \cdot \psi(p, c) + P_1$ que é parametrica.

Equação de Clairaut

$y = px + P$ sendo $P \equiv P(p)$ e $p = \frac{dy}{dx}$

Tem muita importancia por estabelecer uma relação entre uma curva e suas tangentes.

Derivemo-la —

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}\,x + \cancel{p} + \frac{dP}{dp}\frac{dp}{dx}$$

$\frac{dP}{dx}(x + P') = 0$ relação esta que é satisfeita para $\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 0 & (1) \\ x = -P' & (2) \end{cases}$

De (1) — $p = c \rightarrow y = cx + P(c)$, relação linear entre y, x e c, e que constitue uma família de retas. É a solução geral da equação de Clairaut.

De (2) — $y = -pP' + P \rightarrow x = -P'$ é solução paramétrica em relação a P. Representa uma curva; vejamos que esta é solução particular — envoltoria da família de retas da solução geral. Isto é, a curva da solução particular tem como tangente em cada um de seus pontos a uma das retas da solução geral.

Devemos procurar então a tangente à curva no ponto (x, y) —

$$Y - y = \left(\frac{dy}{dx}\right)(X - x) \quad \text{é a tangente,}$$

ora $\dfrac{dy}{dx} = p \rightarrow (Y + pP' - P) = p(X + P')$

por fim, $Y = pX + P$, e esta é a equação da tangente antes achada.

Equações diferenciais lineares.

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = X.$$

Os coeficientes são funções continuas de x e $y^{(i)} = \dfrac{d^i y}{dx^i}$. Outra forma das equações é — $\sum_0^n X_{n-i}\, y^{(i)} = L(y)$

$$\sum_0^n X_{n-i}\, y^{(i)} = X \rightarrow L(y) = X, \text{ etc.}$$

Todas as derivadas são do 1º grau, por isso a equação é linear.

A equação é homogenea ou completa quando $X = 0$.

Dada $L(y) = X$, a $L(y) = 0$ se chama sua associada correspondente.

Teorema — se $\check{y}$ é solução particular da equação completa $L(\check{y}) = X$ (1) e se u é solução da equação homogenea associada, $L(u) = 0$ (2), então $Y = \check{y} + u$

é solução da equação completa, e
$L(\bar{y}+u) = X$.

Com efeito –

$$\frac{d^i}{dx^i}(\bar{y}+u) = \frac{d^i\bar{y}}{dx^i} + \frac{d^i u}{dx^i}$$

$(\bar{y}+u)^{(i)} = Y^{(i)} = \bar{y}^{(i)} + u^{(i)}$ Ora,

$$\sum_0^n X_{n-i}\, y^{(i)} = \sum_0^n X_{n-i}\left[\bar{y}^{(i)} + u^{(i)}\right] =$$

$$= \sum_0^n X_{n-i}\,\bar{y}^{(i)} + \sum_0^n X_{n-i}\, u^{(i)} = X, \text{ logo}$$

$y = \bar{y} + u$ é a solução da equação completa. Cqd.

Analogamente se demonstra que se y é solução, Cy tambem é solução; se $y_1, y_2 \ldots$ são soluções $C_1 y_1, C_2 y_2 \ldots$ tambem o são. [Na equação $L(y)=0$ demonstrar!]

Wronskyano.

Consideremos a equação diferencial $L(y)=0$

$\sum_0^n X_{n-i}\, y^{(i)} = 0$ e admitamos que se conheçam n soluções da equação – y_i $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$

Indiquemos como

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

é o que se chame o Wronskyano da equação.

Sistema fundamental de soluções.

Se y_i forem soluções da equação diferencial $L(y)=0$ e seu sistema for tal que $W(x) \neq 0$ o sistema se diz fundamental.

Teoremas – 1) Se o wronskyano num ponto do intervalo de integração for diferente de zero, ele o será em todo o intervalo.

2) Se fôr nulo num ponto será nulo em todos os pontos.

Tomemos o wronskyano $W(x)$ de n soluções.

Derivemo-lo

$$\frac{dW}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Se derivarmos as $n-2$ linhas, teremos 2 linhas iguais.

$$X_0 y_i^{(n)} = X_1 y_i^{(n-1)} + X_2 y_i^{(n-2)} + \dots + X_n y_i$$

é o sistema de soluções.

Façamos $X_0 = 1$ e substituamos no wronskyano —

$$\frac{dW}{dx} = -X_0 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-2)} +$

Então, derivando o wronskyano —

$$\frac{dW}{dx} = -X_0 W$$

$$\frac{dW}{W} = -X_0\, dx \rightarrow lW = -\int X_0\, dx$$

$$W = C e^{-\int X_0 dx}$$

Para $W(x_0)$ sendo $W(x_0) = C$

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} X_0 dx}$$

Se num ponto do intervalo de integração

$W(x_0) \neq 0 \rightarrow W(x) \neq 0$ e

$W(x_0) = 0 \rightarrow W(x) = 0$

22/11/45.

Se para $L(y) = 0$ tivermos um sistema de soluções y_i, será $W(x) \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}$, para um ponto e para todos os pontos do intervalo.

<u>Definição</u> - Um sistema de soluções $y_i(x)$ da equação $L(y) = 0$ é fundamental se $W(x) \neq 0$.

Teorema — Uma solução qualquer $v(x)$ de uma equação linear homogênea é uma combinação linear das soluções do sistema fundamental, i. é, $v(x) = \bar{C}_1 y_1 + \bar{C}_2 y_2 + \dots + \bar{C}_n y_n$

Derivemos esta expressão —

$$v'(x) = \bar{C}_1 y_1' + \bar{C}_2 y_2' + \dots + \bar{C}_n y_n'$$

$$\vdots$$

$$v^{(n-1)}(x) = \bar{C}_1 y_1^{(n-1)} + \bar{C}_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \bar{C}_n y_n^{(n-1)}$$

Em qualquer ponto do intervalo de existencia da equação diferencial, $v(x)$ é um número, bem como as derivadas das funções y_i num mesmo intervalo.

Temos portanto um sistema linear em que as incognitas são $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots \bar{C}_n$ com solução única, pois o determinante do sistema é ~~um~~ o W, que por hipotese é diferente de zero. c.q.d.

Teorema 2) Não existe combinação linear entre as soluções do sistema fundamental.

Uma solução qualquer do sistema fundamental não é expressão linear das outras.

Com efeito, se uma relação linear existisse entre as soluções do sistema fundamental $\sum c_i y_i = 0$ ①, Daqui tiramos —

$$\begin{cases} c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n' = 0 \\ c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n'' = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-2)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Ora, este sistema linear nas incognitas c_i, só admite solução nula pois $W \neq 0$; e se as constantes são nulas ① é uma identidade e não existe a relação linear.

c.q.d.

Resolução das equações diferenciais com segundo membro, de coeficientes quaisquer.

$L(y) = X$ ①. A equação $L(y) = 0$ ② admitirá um sistema fundamental de soluções. A solução geral de ② é

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$. ③

Método de Lagrange.

(Variação das constantes arbitrárias).
Consiste em substituir as constantes C_i por uma função $C_i(x)$ em ③ e obrigar $y = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \dots + C_n(x)\,y_n$ a ser solução da equação $L(y) = X$, que é a geral.

Teorema de Lagrange –

[illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

1º ano de Engenheiros Mecânicos e Eletricistas.

Cálculo 1°.

Carneiro, Jr

2303