APONTAMENTOS

DE

ALGEBRA DIRECTA

[illegible]

DE

DAVID ANTONIO DA SILVA CARNEIRO

Nascido a 5 de Archimedes de 116

Curityba

الجبر

دلتيد لطونيد اگيلش شعيو

Preambulo inicial.

Aula: Theoria cerebral - Natureza triplice da alma humana - Descobertas de Gall, systematisação de Augusto Comte - Classificação positiva nas dezoito funcções interiores do cerebro. -

(Amar, pensar, agir).

Agir por afeição, e pensar para agir

Impulso (coração) — decrescimo de energia e acrescimo de dignidade

- **10 motores affectivos** — Inclinações no estado activo; sentimentos " " passivo.
  - **7 pessoaes** (Egoismo)
    - Interesse
      - Instincto da conservação
        - do individuo, o Instincto nutritivo (1)
        - da especie
          - Instincto sexual (2)
          - Instincto materno (3)
      - Instinctos de aperfeiçoam.to
        - Por destruição, instincto militar (4)
        - Por construcção, instincto industrial (5)
    - Ambição
      - Temporal, necessidade de dominio — Orgulho (6)
      - Espiritual, necessidade de approvação — Vaidade (7)
  - **3 sociaes** (Altruismo)
    - Natureza especial
      - Apego (8)
      - Veneração (9)
    - Nat geral — Bondade, ou amor universal (sympatia) Humanid.e (10)

Conselho (espirito) — saber para prever afim de prover.

- **5 funcções intellectuaes**
  - Concepção
    - Passiva, ou Contemplação donde materiaes objectivos
      - Concreta, relativa aos seres (syntetica) (11)
      - Abstracta, relativa aos acontecimentos (analytica) (12)
    - Activa ou Meditação donde construcções subjectivas
      - Inductiva, por comparação donde generalisação (13)
      - Dedutiva, por coordenação donde systematisação (14)
  - Expressão ... Mimica, oral, escripta, donde Communicação (15)

Execução, (o caracter)

- **3 qualidades praticas**
  - Atividade
    - Coragem (16)
    - Prudencia (17)
  - Firmeza — donde perseverança (18)

Resumo da teoria cerebral.

O conjuncto destas dezoito funções cerebraes constitue o aparelho nervoso central, que, por um lado estimula a vida de nutrição, e, por outro lado, coordena a vida de relação ligando suas duas espécies de funções esteriores. Sua região especulativa communica directamente com os nervos sensitivos, e sua região ativa com os nervos motores. Porem sua região afectiva não tem conexidades nervosas sinão com as visceras vegetativas, sem nenhuma correspondencia imediata com o mundo esterior, que só se liga a ella por meio das outras duas regiões. Este centro essencial de toda a existencia humana funciona continuamente; em virtude do reponso alternativo das duas metades simetricas de cada um de seus orgãos. Quanto ao resto do cerebro a intermitencia periodica é tão completa como a dos sentidos e os musculos. Assim a harmonia vital depende da principal região cerebral, sob cujo impulso as outras duas dirigem as relações, passivas e activas, do animal com o meio.

Anatómia cerebral

pgs. 695 a ... 1º vol. da Politica Positiva.

Procurou-se, desde Gall, (determinação anatomica dos instinctos), mas duma maneira confusa e impirica. Os principios precedentes me parecem não deixar nenhuma duvida sobre sua situação, para todo aquelle que conseguio apanhar o espirito da theoria subjectiva.

(1) O <u>instincto nutritivo</u> deve assim, ocupar o espaço cerebral o mais inferior, tão proximo quanto possivel do aparelho motor e das visceras vegetativas.

Coloco-o pois, na parte mediana do cerebelo, de que o resto fica consagrado ao instincto reproductor, ao qual Gall dava a totalidade dessa vasta região cerebral.

(2 e 3) Quanto á conservação da especie, ella exige necessariamente dois instinctos diferentes, <u>um sexual outro materno</u>, o primeiro mais energico e menos nobre que o segundo.

Essa graduação dynamica se tradus fielmente na comparação estatica, entre o meio do cerebelo, seus lados, e a parte medio-posterior do cerebro inferior.

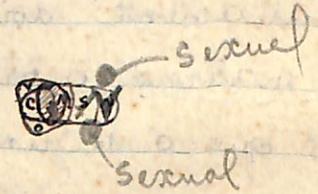
Quanto á intermitencia suposta, aos dois outros (instinctos) será julgada aparente, ... Quando privados de satisfação natural, sua solicitude muda de direção sem deixar de se manifestar...

A essa progressão "de conservação", succede uma combinação, mais elevada e menos universal entre os dois instinctos do aperfeiçoamento, que meu quadro final qualifica de militar e industrial...

(Essa melhora se obtém de duas maneiras muito diversas, embora coexistentes algumas vezes, pela destruição dos obstaculos e construção dos meios.)

Essa confusão dynamica, gravemente afectou o espaço que convêm ao instincto industrial que Gall colocava proximo dos orgãos intellectuaes.

(4 e 5) Elle acertou para o instincto militar. Todas as condições essenciaes me parecem concorrer a fazel-os localisar, um aos lados outro acima do orgão materno.



(6 e 7) O mais pessoal (dos instinctos da ambição) deve ficar em baixo, aos lados do orgão industrial e o mais social acima delle.

(8, 9 e 10) Os pendores superiores são pouco numerosos: não seria possivel, entretanto, reduzil-os a um unico

sem recahir em seguida na confusão metaphysica de onde Gall nos tirou. Elle distinguiu tres instinctos relativamente aos quaes é suficiente aqui, systematizar melhor sua apreciação dynamica: apego primeiro, depois veneração e emfim o instincto supremo, a bondade ou o amor universal, de que a caridade dos christãos dava um esboço theologico.

A verdadeira natureza dum tal pendor foi pouco sentida por Gall cujo destino militante, dispunha mal ao respeito. Ella foi melhor apreciada por Spurzheim, e sobretudo por Broussais, que terminou tão dignamente sua nobre carreira estudando e proclamando, com consciencioza energia, uma doutrina desconhecida para elle até então.

A bondade comporta gradações diversas, mas nenhuma divisão.

Quanto ao lugar que devem ocupar estes 3 instinctos, a solução de Gall não precisa ser modificada, sinão relativamente ao primeiro, e deve ser admirada a sua profunda sagacidade, tanto estatica quanto dynamica, relativamente ao ultimo.

A bondade sendo assim, colocada na mais alta porção media do cerebro frontal, é preciso conceber inicialmente o orgão da veneração immediatamente por traz daquelle, segundo a opinião de Gall completada por Spurzheim. Mas, entre estes dois logares e o do mais nobre instincto pessoal, deixo um vazio destinado a um dos tres instinctos activos.

O apego fica aos lados da veneração; seu orgão inclinado de diante para traz, liga-se em baixo ao da vaidade, de maneira a manter a continuidade total da região afectiva, mau grado essa lacuna média.

Relativamente ás funcções intellectuaes, eu divirjo tanto de Gall quanto este dos seus predecessores metaphysicos.

Mas essa discordancia mais profunda tende a me dispensar as discussões especiaes, de maneira a simplificar minha exposição.

Aqui Gall se achou privado das indicações animaes; e a sabedoria popular não lhe fornece mais que luzes confusas, susceptiveis sómente de ser utilisadas por uma theoria que elle desconhecia. Entretanto elle ahi quebrou vigorosamente o jugo nebuloso da metaphysica.

A sabedoria universal qualificou se ha muito de cégos os pendores quaesquer. Sentir e desejar taes são suas funcções proprias e exclusivas,

tanto activas quanto passivas. Assim sua natureza consiste em emoções donde impulsos;...

Ora, o espirito não poderia ser puramente passivo senão em sua primeira percepção. Na segunda elle já está preparado pela precedente, combinada com o conjuncto das noções anteriores.

...Os doutores desprezavam por completo a reação do coração, fonte principal da actividade intellectual.

Não ha de verdadeiramente especial seja para a memoria, seja para a imaginação, que a faculdade da linguagem, apreciava abaixo.

Assim, minha determinação das 5 funcções elementares do espirito e, por conseguinte, dos 5 orgãos especulativos, será comprehendida por todo o leitor já convencido que nossas verdadeiras noções consistem só em factos e em leis, quer dizer sempre em fenomenos, particulares ou geraes.

É preciso distinguir duas sortes de funcções mentaes, umas relativas á concepção, outras á expressão.

Tudo concorre a provar sua existencia distincta que exige um orgão proprio.

A expressão precéde algumas vezes á concepção, permittindo verdadeiras previsões.

Nos animaes inferiores ha só um orgão de expressão, um de concepção afóra os ganglios para os sentidos externos.

Existem duas sortes de concepção, uma passiva outra activa, cuja harmonia necessaria não impéde a distinção fundamental. No homem a primeira é a contemplação e a segunda meditação. Por uma o espirito recebe os materiaes de fóra, pelas funcções perceptivas que são preenchidas pelos ganglioes sensitivos.

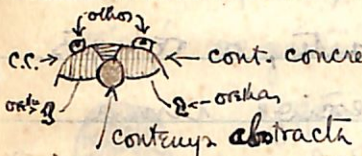
As idéas propriamente ditas, quer dizer, as imagens, não podem pertencer sinão á contemplação, emquanto a meditação produz somente pensamentos.

Para fazer aqui marchar ao par, a apreciação statica e a analyse dynamica, basta notar que a contemplação deve estar na parte inferior do cerebro frontal, a região superior convindo á meditação.

A progressão normal é pois contemplação meditação, communicação.

Assim as idéas propriamente ditas emanam somente da contemplação concreta. O orgão da observação abstracta deve portanto, estar sobretudo em relação com o outro orgão contemplativo e menos aproximado que elle dos sentidos exteriores.

Elle está, por conseguinte, na linha media como o exige a solidariedade mais intima das suas duas metades. A contemplação concreta exige ao contrario, um orgão parte, de que cada parte colocada acima do olho correspondente, tenda para a orelha visinha.



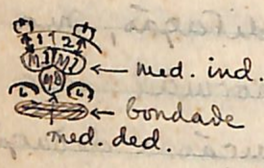
Quanto á meditação, sua decomposição normal está já preparada: inducção e deducção. A primeira compara a segunda coordena. O primeiro modo trata de generalisar o segundo de systematisar. A' meditação indutiva se deve atribuir mais o estudo das relações estaticas ou de semelhança, á meditação dedutiva as relações dynamicas ou de successão.

A região que descobre leis se divide tão nitidamente como a que descobre os factos.

Assim, a logica dedutiva, mais elevada e mais interior, porem menos indispensavel e menos directa deve ter um orgão impar, no meio da parte superior do cerebro.

A previsão necessitando sobretudo della, seu logar tem necessidade dum maior contacto com aquelle dos nobres instinctos cuja satisfação habitual constitue seu destino principal.

A logica inductiva exige ao contrario um orgão ~~im~~par de que cada metade, mais exterior, esteja em contacto mais directo com o orgão observador de que depende mais seus dados habituaes.



Mas, por toda a parte, a relações entre os individuos exige uma transmissão mais clara e mais directa dos sentimentos e pensamentos.

E' preciso antes de agir, que cada um faça distinctamente conhecer suas emoções ou seus projectos, afim de obter a sympathia ou a assistencia dos outros.

A linguagem se torna assim, o deposito continuo da sabedoria collectiva.

Nossas determinações anteriores, dão, por exclusão, o lugar desse 5º orgão intellectual a cada extremidade lateral da região especulativa, ~~de~~ que o resto pertence já aos aparelhos contemplativos e meditativos, salvo os logares dos ganglios sensitivos.

Todo o ser activo deve ser dotado de coragem para emprehender, de prudencia

para executar, e de firmeza para realizar.

Gall deu, muito judiciosamente á firmeza um orgão médio, atras do da veneração e antes do lugar que dou ao mais nobre dos instinctos pessoaes (vaidade). A seus lados está, está a circumspecção (prudencia), inclinada para diante até á região intellectual, e cruzando sobre o orgão do apego que se inclina inversamente.

Seu estudo, sobretudo dynamico, foi melhor levado a efeito por Spurzheim que por Gall. Para a coragem, sua opinião commum (de Gall e Spurzheim) não exige senão fraca retificação, que consiste em elevar um pouco seu lugar, colocando-o aos lados do orgão impar da vaidade.

— x —

~ Philosophia Primeira ~

Preambulo - Theoria da abstração.
Educação. Homem e Mundo. Descobertas dos sentidos. Phenomenos concretos e abstractos.
Impossibilidade do conhecimento total dos seres concretos. Fetichismo. Caaba. Arca dos judeos. "Mãe dos Deuses" da antiga Roma.
As relações. Abstração. Polytheismo. Vida e morte. Arrancamos e personificamos as propriedades. Linguagem. O cavallo, o homem etc... como typos abstractos.
Todo o saber humano se funda na abstração. Generalisação e systematisação.
Introdução á philosophia primeira:
Immutabilidade - modificabilidade. Acção sobre os seres concretos atraves dos atributos. Razão concreta e abstracta. Previsão. Lei. Regra. Verdade. Idealisação. Sciencia. Arte. Industria. Fatalidade - suprema e subalterna. Ordem concreta. Grupos subjectivos e objectivos.
Primeira lei: "Formar a hypothese a mais simples a mais sympathica e a mais esthetica de accordo com o conjuncto de dados a representar."

Regra e lei. Hypothese como guia ás pesquizas.
Parte subjectiva e objectiva da lei. Tudo é relativo. Os Deuses e Jeovah, Deus. Ficções realisaveis. Hypotheses uteis e inuteis. Deus necessario. Hypotheses astronomicas. Encontro de homem (hypotheses ao caso). Parte passiva e activa das concepções. Alimento e digestão espiritual. Neptuno e a navegação - impossibilidade de se demonstrar sua não existencia. A hypothese é que cahio em desuso.
Segunda lei: "Conceber como imutaveis as leis que regem os seres segundo os acontecimentos, posto que só a ordem abstracta permita aprecial-as".
Lei - Leis de semelhança e de successão - Harmonia e melodia. Precisão relativa das leis. Indicações numericas. Equação - expressão precisa de lei de semelhança. Impossibilidade de leis concretas. Queda dos graves. Complemento de vontades. Dominio arbitrario terminado com a lei de Thales e seguintes. Ordem creada pelas leis. Milagres. Não se faz o que se quer, nem se quer arbitrariamente.

Terceira lei: "As modificações quaesquer na ordem universal limitam-se á intensidade dos fenomenos cujo arranjo permanece inalteravel."

Oposição aparente á 2ª lei. Conciliação entre a imutabilidade e a modificabilidade que vamos apreciar. Destino superior aos deuses. Arranjo imodificavel. Caso da queda do grave $h = \frac{1}{2}gt^2$. Molestia, vida mais curta. Inalterabilidade das relações sociaes (Os negros trazidos ao Brasil e o catolicismo) (Perturbações e molestias, erros, crimes e pecados)

Quarta lei: "Subordinar as construções subjectivas aos materiaes objectivos".

Quinta lei: "As imagens interiores são sempre menos vivas e menos nitidas que as impressões exteriores."

Sexta lei: "A imagem normal prepondera sobre as que a agitação cerebral faz simultaneamente surgir."

Os dois grupos de leis, precedentes, o primeiro essencialmente subjectivo, como o segundo, (menos) dizem respeito á ingestão e digestão interior dos materiaes objectivos, tratando da

Theoria estatica do entendimento. Segue-se o estudo das leis dynamicas do entendimento e em seguida as leis mais objectivas que regem todos os phenomenos de quaesquer categorias. As 3 leis dynamicas dizem respeito á evolução mental por que passou a Humanidade e por que passa cada individuo especialmente considerado, e regulam tambem as tres partes da nossa natureza cerebral, 1º intellectual (espirito) 2º activa (caracter) 3º sentimental (coração).

Setima lei: "Nosso entendimento passa pela successão de tres estados, ficticio, abstracto e positivo, relativamente a quaesquer concepções, mas com uma velocidade proporcional á generalidade dos phenomenos correspondentes."

Verificação pela hyerarchia scientifica.

Oitava lei: "Nossa actividade é primeiro militar conquistadora, depois defensiva, e emfim industrial"

Verificação pela historia universal.

Nona lei: "Nossa sociabilidade é primeiro domestica, depois civica, e emfim universal, segundo a natureza propria a cada um dos tres instinctos sympathicos."

Verificação individual, sobretudo nas épocas de egoismo. Familia, Patria, Humanidade.

Grupo mais objectivo:

Decima lei: "Todo o estado estatico ou dynamico tende a persistir espontaneamente sem nenhuma alteração resistindo as perturbações exteriores."

Descoberta na mecanica. Lei de Kepler.

Caso biologico.

Undecima lei: "Um systema qualquer tende a manter a sua constituição activa ou passiva quando os seus elementos sofrem mutações simultaneas, contanto que ellas sejam exactamente comuns."

Caso mecanico. Lei de Galileu.—

Duodecima lei: "Ha por toda a parte uma equivalencia necessaria entre a reação e a ação, si sua intensidade se medir conforme a natureza de cada conflito"

Caso mecanico. Lei de Newton.

Verificações sociaes.

Ultimo grupo. Objectivo.

Decima terceira lei: "Subordinar por toda a parte a theoria do movimento á da existencia, concebendo

todo o progresso como desenvolvimento da ordem correspondente, cujas condições quaesquer regem as mutações que constituem a evolução."

Parte de regra, parte de lei, a primeira guiando a conducta, a segunda o raciocinio.

Decima quarta lei: "Todo o classamento positivo se faz de acordo com a generalidade crescente ou decrescente, tanto subjectiva quanto objectiva".

Caso da classificação das sciencias.

Decima quinta lei: "Todo o intermediario participa da natureza dos dois extremos cuja ligação opera."

Exemplos que a propria algebra fornece como a equação, e a chimica, ligando a physica e a biologia.

Quadro das quinze leis de philosophia 1ª

Primeiro grupo. (tanto objectivo como subjectivo)

Tres primeiras leis, devidas a Augusto Comte

Segundo grupo. (essencialmte. subjectivo)

1ª série (leis estaticas do entendimento) 1ª de Aristoteles, Leibnitz e Kant. 2ª e 3ª de Augusto Comte

2ª série (leis dynamicas do entendimento) 3 leis de A. Comte.

Terceiro grupo, sobretudo objectivo.

1ª série: a mais objectiva da filozofia primeira.

1ª de Kepler e A. Comte 2ª de Galileu e Augusto Comte 3ª de Newton

2ª série: mais subjectiva que a precedente

3 leis devidas a A. Comte

——— × ———

1º Logica. (sciencia do Espaço)... Matematica

2º Fizica. (sciencia da Terra) { Astronomia
Physica-propriamte.
Chimica

3º Moral (sciencia da Humanidade { Biologia
Sociologia
Moral-propriamte.

O quadro acima é do que Augusto Comte denominou philosophia segunda.

Logica - Methodo - Espaço - Grão Meio - Dedução
Fisica - Doutrina - Terra - Grão Fetiche - Indução
Moral - Destino - Humanidade - Grão Ser - Construção

Lições de Algebra.

~ Apreciação geral ~

1ª lição

Resumo do assumpto: Destino geral do calculo, sua posição encyclopedica como parte constituinte da Logica; suas relações geraes com os dois outros elementos, geometrico e mecanico, da existencia universal; sua divisão necessaria em calculo dos valores ou arithmetico e calculo das relações ou algebrico, differenças essenciaes entre estes dois modos geraes, pela separação, sempre logicamente possivel, entre os pontos de vista arithmetico e algebrico de todas as questões numericas.

Origens abstracta e concreta do calculo algebrico, donde surgiram respectivamente as duas formas, equação e proporção, proprias a toda a relação precisa. Preponderancia definitiva da equação, como a forma mais compativel com o destino do calculo na instituição do methodo.

——— × ———

A arithmetica tem por fim determinar o logar que occuparia um numero na escala numerica quando se conhecesse a forma pela qual elle se derivava de outros numeros dados.

Esse é o destino da arithmetica, ou calculo dos valores, parte do que poderiamos chamar o preambulo mathematico, visto que o calculo é o instrumento de que se servem para a instituição de suas theorias, a geometria e a mecanica.

A logica, sendo a ordem que domina a Humanidade no seu grão de maxima simplicidade, e a arithmetica constituindo o primeiro degrão da logica, vê-se desde logo que objectivamente tudo está sujeito ás avaliações ás relações precisas, possa ou não a Humanidade, attingil-as.

A arithmetica, pois, se destina ás avaliações.

Vejamos agora, o problema que a Humanidade se propoz com a fundação e pela instituição dessa segunda parte do instrumento logico, e até que ponto o desideratum humano foi atingido.

1º Objecto da algebra
2º Alcance efectivo da algebra no conjuncto do saber humano.

Cada numero é representado pela soma de productos binarios em que um factor é uma certa potencia da base e o outro

é um numero inferior á base. Isso é tambem, o que, em linguagem algebrica denominamos um polynomio.

Como exemplo vejamos o anno do nascimento de Clotilde de Vaux, 1815 –

$$1815 = 10^3 + 8\times10^2 + 10^1 + 5\times10^0$$ ou ainda em linguagem algebrica, desconhecendo-se a base:

$$1815 = x^3 + 8x^2 + x + 5$$

Avaliar é pois, passar de uma relação qualquer entre numeros conhecidos, para outra previamente determinada, donde o calculo das avaliações é um calculo de relações particularisadas.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Relações particulares - arithmetica} \\ \quad\text{"}\qquad\text{geraes - algebra}\end{array}\right.$$

Na algebra o que se faz é generalisar os pensamentos arithmeticos, de maneira a não se fazer acumulo de dados que guardar de memoria.

Assim, a abstração dos valores a se combinarem, tendo-se a forma da combinação, é o que se dá como elementos á algebra para se obter o resultado, porem, desde que se tenha os valores e a forma da combinação, entramos no dominio arithmetico.

Na geometria se faz abstração da especie.

A algebra é susceptivel, como instrumento que é, de servir a procurar conhecimentos bons ou máos, reaes ou phantasticos. Ha transformações phantasticas que são uteis, desde que permitam generalisar e systematisar.

A algebra surgio da arithmetica e da geometria, das duas fontes que lhe estão contiguas; da primeira por generalisação, e da segunda por falta de elementos geometricos quando outros eram conhecidos. Na primeira foi necessario uma maior abstração. Na segunda foi impulso dado por problemas concretos.

Calculo dos valores; Medida indirecta da extensão. } Calculo das relações

Poderiamos tomar como exemplo a lei de Galileu, cuja expressão algebrica $h = \frac{1}{2} g t^2$ nos permite desde logo a solução de problemas correlativos, dentro do dominio da algebra, e permite avaliações para cada caso.

Eschematisando as noções dadas, poderiamos dizer que na arithmetica da-se valor e se da a lei, pede-se o valor do resultado, enquanto que na algebra, não se da valor, dá-se lei, e pede-se lei de formação do resultado.

Daqui surge uma noção que é necessario esclarecer, deixando bem patente os dominios arithmetico e algebrico do calculo.

E' o que chamamos estados implicito e esplicito dos problemas, noções que sempre são relativas ás situações, e que constituem a solução dos problemas quando se consegue passar dum estado para o outro.

Implicito significa obscuro, confuso,
esplicito significa claro, preciso.

Na algebra, consegue-se o estado explicito quando se atinge justamente a lei de formação do resultado, que constitue como se viu, a solução do desideratum algebrico.

A Humanidade procurou sempre a combinação numerica que exprimia a dependencia entre as grandezas.

A algebra, como já se disse tem duas origens, uma arithmetica outra geometrica, como exigia mesmo a 15ª lei de philosophia primeira.

Na sua origem arithmetica, para representar um numero qualquer, bastava o ter-se uma base desconhecida, conseguia-se logo o exemplo duma equação, na sua origem geometrica e relação de grandezas entre as linhas davam logo o exemplo duma proporção.

Equação é abreviatura de equalação, ora equalar duas cousas é sempre mais facil de que comparar quatro. Equalação de dois membros é algebricamente, equação; comparação de quatro termos, é uma proporção.

Está claro que, por serem todas a comparações imediatas, binarias, ~~que~~ a equação devia logicamente prevalecer sobre a proporção, que é a quatro termos, e cuja comparação não póde, naturalmente, ser binaria.

Desde que a algebra se isola da geometria e da arithmetica, ella tem por fim a resolução das equações.

Algebra é o calculo das relações. Essas relações surgiram:
a) Especialmente { 1º comparação dos numeros; 2º " das extensões
b) Accessoriamente { 3º da mecanica; 4º " fisica (thermologia)

~ 2a. lição ~

Resumo do assumpto: Apreciação do materialismo abstracto, resultante das pretenções da algebra ao dominio encyclopedico, logo após a substituição das equações ás proporções. Subordinação fundamental da instituição do methodo á doutrina, donde decorre a limitação normal do papel algebrico á coordenação da logica.

Apreciação da linguagem algebrica; limitação normal de seu papel a facilitar as deducções e as inducções em virtude dos seus dois atributos de simplicidade e generalidade, sem nenhuma participação nas concepções algebricas.

— x —

A algebra instituio a equação, forçada pela sua fonte arithmetica. A equação foi, portanto destinada á representação exata, em linguagem algebrica, de leis. Assim, por exemplo, a lei de Thales, primeira lei de inducção que a Humanidade instituio:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2r$$

A sua representação algebrica é por uma equação, e essa equação póde dar, a solução, algebrica e arithmetica, desde logo de todos os dados desconhecidos da lei, tornava problema, por meio dos que forem conhecidos.

Foi dahi que surgiram tambem as primeiras deducções algebricas, e se atribuio á mathematica as leis deductivas por excellencia, sem inducção nenhuma, o que foi motivado pela simplicidade das inducções correspondentes.

Porque efectivamente a inducção estabelece os principios, de accordo com o mundo exterior, emquanto que a deducção estabelece as consequencias.

A linguagem algebrica, facilita as deducções, como se póde verificar da propria lei de Thales; si essas consequencias que são tão simples tivessem que ser tiradas inductivamente, ou mesmo deductivamente, porem sem o auxilio da linguagem algebrica, o problema talvez ficasse insoluvel.

Foi essa simples facilitação, que deu como consequencia as pretenções da algebra ao dominio encyclopedico.

A sciencia surgindo do mais geral para o mais especial, do mais simples para o mais composto, da mathematica para a moral, e como a algebra logo servio de instrumento ás de-

ducções tanto geometricas quanto mecanicas, e poude ainda representar e servir á astronomia, surgio a idéa metafysica de que todas as leis eram susceptiveis de exactidão e de representação algebricas.

É nisso justamente, que consiste o materialismo abstracto, na ambição algebrista de dominar os outros campos da sabedoria humana, como si todos os fenomenos pudessem ser apanhados pelo homem, como são os do numero, da extensão e do movimento.

Demais, como vimos, os orgãos intellectuaes estando divididos em de concepção (ingestão e digestão dos alimentos que os ganglios transmitem do mundo exterior) e expressão, que consiste na elaboração das communicações com o exterior, sempre, é claro, a expressão tem que estar subordinada á concepção.

A linguagem algebrica, é a maneira de se exprimir as leis da logica, e tem que estar subordinadas a essas mesmas leis, como a expressão deve estar subordinada á concepção, e o methodo á doutrina, a deducção á inducção, etc.

O materialismo algebrico consiste em atribuir ao uso dos signaes as concepções que elles motivaram.

— 2 —

Passemos agora ao estudo das notações que deram origem á linguagem algebrica.

Os gregos representando os pontos caracteristicos das figuras geometricas pelas lettras do alfabeto, foram, a pouco e pouco levados a generalisar a grandeza das linhas pelas letras ainda, e usando as do começo e as do fim para representar grandezas conhecidas e aquellas que se procurava.

Mas os gregos, guiados pelo genio inconfundivel de Diophante, não deram, a seu pezar, o desenvolvimento ao calculo das relações que elle comportava.

A theoria dynamica do entendimento, que já estudamos, esplica bem a situação social que impedía os surtos dynamicos no campo do dogma ao povo helenico. Os seus genios conseguiram estabelecer a base estatica da mecanica, a geometria especial, a astronomia geometrica, e até o grande Aristoteles conseguiu prevêr a sociologia estatica. Mas a algebra, não tendo a systematisação das equações sinão muito tarde, tiveram que luctar só com o calculo das proporções, que era sufficiente para o estabelecimento estatico da mecanica e da astronomia.

A algebra, instrumento logico destinado a auxiliar, a facilitar as meditações especiaes, depois do surto inicial de Diophante, e depois dos arabes, completada por Viète e por Descartes, auxiliou o surto scientifico peculiar aos modernos, com a construção da geometria algebrica.

Para ver a capacidade do calculo das proporções, como instrumento e como linguagem, basta citar os extraordinarios trabalhos de Archimedes.

Diophante, porem, que viveu muito depois do Pae da sciencia (13º seculo da dictadura romana) entregou aos arabes o calculo das relações já com a forma de equação.

Ora, como se vê os signaes do calculo, são, alguns geraes, outros especiaes, os arithmeticos, algarismos, são de fundação arabe para designação de grandezas consideradas, e portanto houve ahi uma linguagem especial. A linguagem algebrica devida aos gregos foi tomada do alphabeto grego, por causa da fonte geometrica do calculo das relações, mas poder-se-ia ter fundado ahi uma série de signaes especiaes a esta parte da logica.

A linguagem de que nós lançamos mão em Moral e Sociologia, não tem necessidade de nenhum signal novo.

Foi pois aqui, na algebra, que houve necessidade de instituir uma linguagem com signaes particulares, sobretudo graficos.

Para bem caracterisar o valor da linguagem algebrica, e o quanto ella facilita os nossos raciocinios, basta tomar um exemplo de Clairaut, o grande geometra francez, e ver o accumulo de raciocinios para a solução dum problema com a linguagem vulgar, e a simplificação trazida pela algebra.

Ex.: 523 francos - a repartir por duas pessôas ficando a 2ª com 132 francos mais que a primeira. Com quanto ficaram as duas pessôas?

Regeição da palavra analyse. Etymologia de algebra. Metade do XVIIIº seculo
estudo da palavra analyse { historicamente
dogmaticamente.

~ 3ª lição ~

— Divisão total do calculo —

Resumo do assumpto: Apreciação geral da equação como objecto fundamental do calculo algebrico. Estudo logico da grandeza indeterminada. Diferentes grãos de indeterminação da grandeza abstracta. Distinção geral, abstracta e concreta, entre as variaveis e as constantes pela identidade das duas idéas de equação e de lei.

Divisão geral do calculo, decorrente das reacções concretas, em elementar e transcendente. Motivos determinantes desta divisão.

— × —

Deixamos dito atraz que a equação prevaleceu porque, todas as comparações imediatas teem que ser forçosamente binarias.

Acontece porem que a comparação binaria dos dois elementos duma equação podem adquirir formas mais ou menos compostas, e portanto de solução mais ou menos dificil.

Para facilitar essa comparação, os geometras foram levados a isolar as incognitas num membro, com os elementos constantes de que ellas dependiam.

Foram assim, os geometras levados a classificar os problemas propostos, segundo a maior ou menor dificuldade de desembaraço da incognita relativamente ás constantes de que ella dependia.

No inicio dos estudos algebricos, qualquer systematisação e coordenação era dificil porque não se conhecia a extensão do campo.

Foi aos poucos porem, que nas equações se foram distinguindo as variaveis, ou o que se procurava, e as constantes, que eram os dados do problema.

As proprias variaveis se foram classificando, ficando umas na dependencia de outras. X

Logo que se aclarou o campo algebrico, dos 5 pares que constituiam as formações, trez foram usados e produziam os verdadeiros elementos do progresso; esses tres primeiros pares foram herdados dos problemas arithmeticos, e foram todos esgotados pela algebra.

$$\begin{cases} y = a + x \\ y = a - x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = ax \\ y = \frac{a}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^a \\ y = \sqrt[a]{x} \end{cases}$$

Exame de potencia

Da constituição polynomica de um numero qualquer, que já vimos, surge a forma $y = ax^m$, composta, provinda da forma geral:

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + l$$

Suposto conhecido o numero dado:

$$n = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + l$$

o problema passaria a ser:

Dado um numero qualquer, dizer a base em que está representado, pela soma dos multiplos indicados da referida base.

Esse problema geral abrange uma série de casos particulares, representados da maneira seguinte:

$$n = ax + b$$

$$n = ax^2 + bx + c$$

$$n = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$n = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$n = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\vdots$$

Cada grás tendo um numero de raizes que corresponde ao expoente do termo em que a incognita o tem mais elevado. A denominação raiz, provêm do typo $x^m = a$ porque uma simples extração de raiz parecia dever dar o valor da incognita.

Essas especulações conduziram a Humanidade á procura da solução inversa tambem, isto é, dadas as raizes, achar a formação.

As previsões algebricas, duma maneira geral se limitaram a estas duas, ficando pois a algebra propria, no seu campo com um destino muito restricto.

Todo o fim da sciencia sendo a previsão por meio das leis, vê-se logo a importancia da linguagem algebrica, que permite a expressão das leis pelas equações, em todos os dominios em que as relações exactas são exigidas.

Leis { combinam numeros { geometria / mecanica } numericos
combinam grandezas { não numericos

Quaesquer relações no seu estado mais perfeito, no seu estado ideal, devem se tornar numericas, em virtude da medida das grandezas respectivas, e porque leis sempre exprimem relações.

Dahi provem uma identidade entre as duas expressões (equação e lei) si bem que as combinações entre grandezas não podem na maioria dos casos ser atingidas precisamente (numericamente).

Nos dominios da algebra, a lei inicialmente devida a Aristoteles, e incorporada por Augusto Comte á Philosophia Primeira, tem que se verificar, como em toda a escala encyclopedica, de maneira que as proposições consideradas abstractamente devem provir de problemas postos pelo mundo, servindo o mundo sempre de verificação final dos resultados.

Como já dissemos, as leis algebricas elementares

foram inicialmente inspiradas pela arithmetica, para depois novas formações, artificiaes irem surgindo pelas exigencias do surto theorico, assim como, foram surgindo leis algebricas compostas das formações primitivas.

Por inducção atraves do que a historia nos apresenta, podemos dizer que ha impossibilidade, hoje, de augmento do numero dos verdadeiros elementos algebricos.

Todos os sofismas que possam surgir desfazem-se d'um lado com as necessidades impostas pela industria, e do outro pelo ponto de vista moral, visto que o altruismo exige uma submissão voluntaria, desde que o ápice theorico - A Moral - está atingido.

Todos nós, actuaes, temos por dever elementar submetermo-nos ao Passado, e não nos arvorarmos em arbitros da sua obra, com orgulho e vaidade.

Vejamos agora logicamente, o que seja grandeza indeterminada, e os diferentes grãos de indeterminação da grandeza abstracta.

O mais philosophico de todos os geometras, segundo o julgamento de Augusto Comte, Lagrange, dizia que todo o segredo das concepções algebricas estava em se apanhar bem os diferentes grãos de indeterminação que a grandeza póde admittir.

"Um numero abstracto é menos determinado que um numero concreto, porque este especifica não somente o quanto do numero, mas ainda a qualidade do objecto submettido ao calculo; as quantidades algebricas são mais indeterminadas que os numeros abstractos, por não especificarem nem mesmo o quanto: entre estas, as variaveis são mais indeterminadas que as constantes, porque estas são consideradas fixas durante um mais longo periodo de calculo; as quantidades infinitesimaes são mais indeterminadas que as simples variaveis, porque ficam ainda susceptiveis de mutação, mesmo que se considere as outras como fixas. Emfim as variações são mais indeterminadas que as simples differenciaes, porque estas são sujeitas a variar segundo uma lei dada, ao passo que a lei segundo a qual faz-se mudar as outras é arbitraria."

"Todas as quantidades se acham consideradas em algebra, num estado continuo de indeterminação, pois que se faz abstração do seu valor."

A. Comte – Synthese Subjetiva
pg. 186

"Ella faz immediatamente surgir o contraste necessario e permanente dans incognitas em face dos dados"

pg. 187 id.

"Mas sobretudo, é nas questões a varias incognitas que nasce a distinção final entre as constantes e as variaveis."

"Ella alli surge mesmo quando o problema se torna determinado, como fornecendo tantas equações quantas são as incognitas."

"As denominações de dados e incognitas devem ser substituidas por constantes e variaveis, que fixam directamente a attenção sobre o verdadeiro contraste algebrico, normalmente proprio a cada equação suposta isolada."

"A lei considera sempre varias grandezas que variam simultaneamente conservando a relação que a constitue (á lei), emquanto outros elementos do fenomeno ficam fixos relativamente a cada um dos casos de mesma especie. Reduzida aos casos mais simples, a equação ou lei encerra duas variaveis, uma independente, outra dependente, combinadas com uma unica constante."

Id. pg 189.

Antes de passarmos á enumeração dos elementos algebricos, cumpre reputar como nociva e deslocada a denominação de funcção, dada pelo mais fecundo de todos os geometras, segundo o julgamento de Augusto Comte, Euler, para as formações, ou para as diferentes maneiras de ligação das quantidades e elementos algebricos entre si, nas equações.

Formação, é o termo que deve ser substituido, visto que deriva de formula, e formula é mathematica, porque aqui ellas se instituiram, para representar o valor abstracto das incognitas independentes relativamente ás dependentes e ás constantes.

Emquanto funcção, termo proprio á biologia, significa funccionamento de orgão, formação, termo proprio á mathematica indica a maneira por que a variavel independente se forma das variaveis independentes e das constantes.

Os dez elementos algebricos, constituindo 5 pares de formações abstractas são os seguintes:

$y = a + x$ (soma) $y = a - x$ (subtração)

$y = ax$ (producto) $y = \frac{a}{x}$ (divisão)

$y = x^a$ (potencia) $y = \sqrt[a]{x}$ (raiz)

$y = a^x$ (exponencial) $y = \log x$ (logarithmica)

$y = \operatorname{sen} x$ (circ. directa) $y = \operatorname{arc.sen} x$ (circ. inv.)

Os 3 primeiros pares, depois da construcção de Descartes, verificou-se que concretamente, combinados, exprimiam formas geometricas, e por isso são algebricas.(x)

Equações { algebricas (com grão)
transcendentes (sem grão)

Foi em virtude dos passos dados por Leibnitz, que João Bernouilli fundou o calculo exponencial, dentro das relações directas.

Formações { Naturaes { 1º 2º 3º } pares
Artificiaes { 4º 5º } pares

Passemos agora ao exame succinto das formações.

A) Soma $y = a + x$ { 1º y varia como x - y augmentando x terá tambem augmentado
2º a formação é sempre maior do que a constante.

B) Differença $y = a - x$ { 1º y diminue com o augmento de x
2º x adquirindo valores maiores que a y passa a ter valores negativos.

(x) as formações artificiaes não podem ter representação concreta

(40-59)

~ Instituição Fundamental ~

1ª lição - 4ª lição de algebra.

Resumo do assumpto: Considerações geraes sobre o conjuncto das leis algebricas elementares que permitem subordinar o abstracto ao concreto. Apreciação geral e directa dos elementos algebricos; impossibilidade, scientifica e logica do seu augmento, como resultado do estudo da formação dos existentes.

×

Iniciando o estudo das formações algebricas sob um ponto de vista geral e succinto, convem sempre deixar clara a divisão que alem de historica é logica e dogmatica, das formações, em dois grupos distinctos, o primeiro formado pelos tres primeiros pares de formações, é o de formações algebricas naturaes.

Todos os elementos desse grupo nasceram na arithmetica. Os elementos do segundo grupo denominados artificiaes, surgiram posteriormente e de outras fontes, não tendo na geometria cartesiana nenhum correspondente concreto.

Já vimos que a impossibilidade de se augmentar os elementos algebricos simples era notoria, tanto pela verificação das formações existentes como pelo ponto de vista historico, e pelo lado moral, de subordinação de quaesquer conhecimentos actuaes, e restrictos ao ponto de vista geral e ao destino normal do melhoramento da natureza humana.

Então, repetindo, as formações são $\begin{cases}\text{naturaes} \begin{Bmatrix}1^o\\2^o\\3^o\end{Bmatrix} \text{pares}\\ \text{artificiaes} \begin{Bmatrix}4^o\\5^o\end{Bmatrix} \text{pares}\end{cases}$

Comecemos o estudo das formações pelos dois pares iniciaes, soma e subtração.

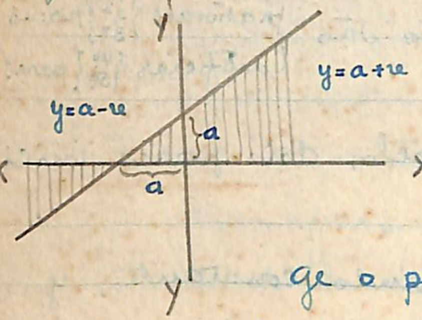
$\begin{cases} y = a + x \\ y = a - x \end{cases}$ A quantidade a sendo constante, y varia na primeira, como varia a variavel independente, enquanto que na segunda, si se augmentar y diminue até certo ponto, para depois crescer negativamente. Na primeira, a formação é sempre maior do que a constante; na segunda isso não se dá.

Fazendo $x = x_1 + x_2$ na formação differença, tem-se $y = a - x_1 - x_2$ suppondo $x_1 = a$, vem $y = -x_2$

Foi o positivismo que poude demonstrar que essas quantidades negativas, chamadas primitivamente, falsas, eram perfeitamente naturaes, e que tinham significação concreta, conforme as demonstrações cartesianas.

Na formação differença, os valores positivos não excedem em valor, da constante.

De facto a quantidade negativa surgio da decomposição de uma subtracção em duas, como já mostramos, em que uma se effectuou e a outra ficou apenas indicada.



$-a$ (quant. neg.) $\left\{\begin{array}{l}a - \text{quantidade} \\ - \text{(signal) especie} \\ \quad \text{(modo de existencia)}\end{array}\right.$

A formação soma, como se vê, abrange o par que ella representa, quer quando se considera abstracta, quer quando se considera concretamente a formação.

A mudança de signal, ou de sentido sempre se dá pela annulação da grandeza produzida.

Vejamos agora o segundo par, considerado sob um ponto de vista superior, pela primeira vez, por Clairaut.

formação producto $\{ y = ax$ Exame dos resultados $\left\{\begin{array}{l}+.+=+ \\ \text{e} \\ +.-=-\end{array}\right.$

Consideremos $x = x_1 - x_2$, vem: $y = a(x_1 - x_2) = ax_1 - ax_2$

consideremos a constante $a = a_1 - a_2$

$$y = (a_1 - a_2)x_1 - (a_1 - a_2)x_2 = a_1x_1 - a_2x_1 - a_1x_2 + a_2x_2$$

Estes resultados que têm uma influencia extrema sobre as outras formações, foram conseguidos, ao que se sabe das tradições arabes, por Beha-Eddin.

Vejamos a influencia desses resultados sobre a for-

mação $y = \frac{a}{x}$, $a = yx$ a constante póde ser $\left\{\begin{array}{l}+a \\ -a\end{array}\right.$

donde se vê os signaes que podem ter as variaveis separada e conjunctamente.

Vejamos agora a influencia sobre a formação potencia, estudando, na formação $y = x^a$ os casos $\left\{\begin{array}{l}a = 2m+1 \\ \text{e} \\ a = 2m\end{array}\right.$ em que a sendo impar a formação é negativa, e sendo par é positiva.

Os expoentes negativos foram introduzidos no calculo algebrico por Wallis, e poderiamos continuar esse estudo, si não devessemos reserval-o para a proxima aula, em que se verificará como todos os elementos dependentes se formam dos independentes e das constantes.

Para terminar o nosso estudo de hoje, vamos fazer uma apreciação geral do conjuncto da instituição fundamental, e pelo estudo que hoje iniciamos vamos ver o que ainda temos que ver no que nos falta de nosso curso.

A apreciação geral, que nos deixou em condições de virmos iniciar o estudo da instituição fundamental, serviu para uma completa refutação do materialismo algebrico que nunca é demais combater para que os seus perigos sejam evitados ou contornados.

Vimos ainda na apreciação geral, a formação da linguagem algebrica que nos vae permittir estudar na instituição fundamental a completa generalisação que a algebra comporta. Vimos como a linguagem sob um ponto de vista geral instituia signaes para todos, isto é, utilisados por todos habitualmente, por se referirem aos pensamentos, sentimentos e actos communs a todos os homens e signaes mais ou menos particulares, porque diziam respeito a funcções sociaes restrictas.

A educação domestica nos inicia nos primeiros, e a funcção exercida nos ensina os segundos.

Uns são elaborados pela massa de individuos, os outros são por orgãos especiaes, exercitados na respectiva funcção. Uns tem cunho de sociabilidade, outros da personalidade.

Mas a segunda categoria de expressões admitte duas novas classes distinctas, pois que alguns termos são concernentes ás funcções industriaes e cada vez se vão tornando mais restrictos emquanto os outros, pertencendo ao dominio especulativo tendem a pertencer ao primeiro grupo geral, sobretudo depois da victoria do positivismo.

Mas vimos ainda, na apreciação geral, a divisão total do calculo das relações, isto é, dos elementos de que o calculo algebrico se compõe,

em elementares, isto é, algebricos e transcendentes, ou melhor, como vimos depois, em naturaes e artificiaes. Foi assim que, terminando a apreciação geral, dadas em nossas tres primeiras lições, iniciamos o estudo da instituição fundamental, que trataremos em quatro aulas, de que podemos e devemos de ante mão ver o conjuncto.

Estudaremos aqui todas as formações algebricas, passando em seguida ao estudo da generalisação que a linguagem e as formações instituem neste dominio, passando em seguida á theoria estabelecida por Augusto Comte, de accordo com a lei da homogeneidade.

2ª lição na instituição fundamental
5ª lição de algebra.

Resumo do assumpto: Natureza ao mesmo tempo abstracta e concreta das formações algebricas. Divisão motivada dos elementos algebricos, em dois grupos, um natural outro artificial. Estudo especial de cada um dos dez elementos algebricos, examinando-se como a variavel independente forma a variavel dependente, a partir da base constante.

Instituição philosophica da generalidade algebrica. Apreciação geral das quantidades negativas originadas do 2º elemento do primeiro par algebrico; extensão desta apreciação a combinações quaesquer das grandezas consideradas; concepção carteziana sobre a correspondencia entre o signal abstracto e o sentido concreto.

x

Só com o advento da Religião da Humanidade pode toda a sciencia ver-se regenerada, e expurgada dos males que ainda o regime metaphysico academico conserva.

Antes de Augusto Comte ninguem havia visto que a mathematica tinha suas fontes na inducção, nos materiaes que o mundo nos apresenta, porque antes todos consideravam-na como sciencia de pura deducção. Mas effectivamente, como deduzir sem induzir primeiro? Como elaborar consequencias si não ha primordios, si já não se deu como base principios?

Assim é que, vista sob ponto de vista positivo, toda a algebra, como toda a sciencia está subordinada ao mundo, de accordo com a quarta lei de Philosophia Primeira.

As inducções da geometria são os lemas, sem demonstração, sinão por verificação do que o mundo lhe dava, que deram nascimento á mesma geometria. Em arithmetica, como se sabe, os numeros abstractos já tiveram fundação polytheica. No inicio fetichista desse primeiro passo para a sabedoria humana, os numeros tinham representação concreta, por cousas, e por isso mesmo a contagem nunca excedia de determinados limites.

A algebra nascendo, dum lado da arithmetica, de outro da geometria, teve fatalmente o seu nascimento no mundo, e portanto o abstracto de inicio se subordinou ao concreto.

As primeiras formações, como já nós vimos, tiveram origem arithmetica, por complicação crescente, e por generalisação dos valores, emquanto que o ultimo par teve origem geometrica, e portanto concreta. Assim os primeiros pares surgiram naturalmente desde a numeração arithmetica, como aliás já nós vimos, e foram crescendo de complicação até o par exponencial e logarithmico, o primeiro surgido da inversão de base e potencia (expoente), do par anterior e a segunda formação tendo tido sua origem puramente arithmetica, só muito tarde a sua correspondencia como inversa da formação exponencial foi descoberta e proclamada.

O ultimo par, de origem geometrica é tambem, sob o ponto de vista algebrico, tambem artificial.

A generalisação algebrica sob o ponto de vista deste ultimo par foi mais dificil de ser comprehendido pelos geometras, que um falso escrupulo não deixava aceitar as formações circulares, directa e inversa como

accessiveis de adquirir quaesquer valores.

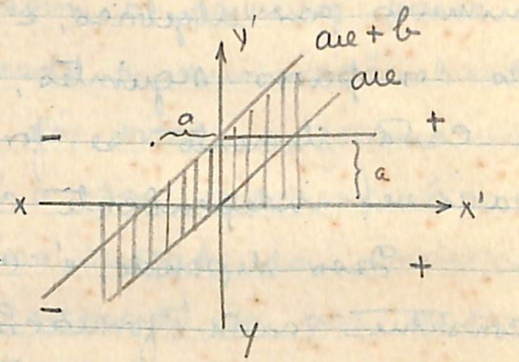
A generalisação algebrica por parte das primeiras formações foi desde logo notada, visto que ella deu por si só inicio á algebra propriamente dita.

Já tivemos occasião de verificar, pelo estudo do primeiro par algebrico, e isso se acentuará pelo estudo dos pares seguintes, da maneira especial como cada elemento se forma, variavel dependente, da variavel independente combinada com a constante. Isso depende, é claro, sempre do arranjo que constitue cada formação.

O primeiro par algebrico dá desde logo nascimento ao que chamamos quantidades negativas, originadas da decomposição de uma subtração em duas, em que uma se considera efectuada e a outra fica indicada.

Uma quantidade negativa, como o nome indica, consta de duas partes, uma que é a quantidade propriamente dita ou valor, e a outra que é o modo de existencia, especie, qualidade. Não ha razão para se supor que haja nas quantidades negativas algo de anormal e mysterioso, e que os antigos chamavam de quantidades falsas.

Para terminar esta segunda aula da Instituição fundamental, façamos a consideração das coordenadas de Descartes; verificando que a concepção cartesiana contribue para submeter o abstracto ao concreto, dada a correspondencia entre o signal abstracto e o sentido concreto; cousa que já mostramos anteriormente.



Considerando a formação soma, que resume o par, pela generalisação que a algebra institue, vemos que no caso da subtração, y diminue desde $\uparrow_+ \downarrow_-$ $\rightleftarrows^{+}_{-}$ -a até zero e depois cresce até $-\infty$, e ao contrario quando a se considera negativo, e x varia até o infinito positivo.

A formação $y = a + x$ condensa duas leis distinctas, quer seja positiva quer seja negativa a constante, desde o inicio do calculo pois que a numeração permite reduzir a distinção entre juntar e subtrahir á distinção do sentido segundo o qual se percorre a escala numerica.

3ª lição da instituição fundamental
6ª lição de algebra.

Resumo do assumpto: Reação sobre os outros dois pares de formações naturaes, da consideração das quantidades negativas, ou subtrativas, introduzidas pelo primeiro. Extensão aos expoentes negativos, como modificação de signal instituida quanto aos coeficientes. Generalisação completa da noção de potencia pela consideração dos expoentes de qualquer natureza.

Apreciação philosophica da instituição dos logarithmos como a fonte arithmetica da inteira generalisação, algebricamente realisada para com as potencias. Considerações philosophicas especiaes sobre o ultimo par de elementos algebricos, ou par excepcional.

x

Visto a origem das quantidades negativas, vamos fazer agora a apreciação da reação que ellas produziram sobre os outros pares de formações.

Como se viu atraz o primeiro problema que se teve a resolver foi o dos resultados de multiplicação de quantidades negativas, ou negativa e positiva.

Esses resultados, é de supor que já fossem conhecidos dos gregos, si bem que as tradições arabes attribuam a Beha-Eddin, o quadro em que elles se resumiam.

Vimos já, tambem que a formação potencia seria positiva ou negativa segundo o expoente fosse impar ou par, desde que, naturalmente, a base fosse negativa.

$y = x^a$ sendo x negativo $\begin{cases} a = 2m+1 \therefore y \text{ negativo} \\ a = 2m \therefore y \text{ positivo.} \end{cases}$

O valor da variavel dependende, é consequencia dos valores que se atribuirem á constante e á variavel.

A generalisação algebrica aqui, para a formação potencia, foi introduzida por Wallis, com os expoentes negativos, e finalmente fraccionarios.

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m = x \times x \times x \times x \times x \times \ldots}{x^n = x \times x \times x \times \ldots} = x^{m-n}$$

fazendo $m = n$ $\quad m - n = 0$

mas, pela consideração da fração $m = n$ $\frac{x^m}{x^n} = 1$ ou $x^0 = 1$

Agora, si $n = n_1 + n_2$ $\quad x^{m-n} = x^{m-n_1-n_2}$

fazendo $n_1 = m$ $\quad m - n_1 = 0$

então x^{-n_2} Voltando, porem, á origem

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^m}{x^{n_1+n_2}} = \frac{x^m}{x^{n_1} \times x^{n_2}} = \frac{1}{x^{n_2}}.$$

Desses resultados se conclue que $x^{-n_2} = \frac{1}{x^{n_2}}$

Dahi se conclue tambem que a expressão usual da formação quociente $y = \frac{a}{x}$ póde tomar a forma de producto $y = a.x^{-1}$ (Discutir os casos $x \begin{cases} = 0 \\ = \infty \end{cases}$)

Como a formação soma abrangia o par soma e differença, a formação producto abrange o par producto e divisão, (quociente).

Vejamos agora a influencia das quantidades negativas na formação raiz:

$y = \sqrt[a]{x}$ $\quad \begin{cases} a = 2m+1 \\ a = 2m \end{cases}$ (estudar o caso em que $x = -n$)

(Percorrer a escala de $a = 0$ $a = \infty$)

($y = \sqrt[a]{x}$ demonstrar que $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$ Basta elevar a^a $(\sqrt[a]{x})^a = (x^{\frac{1}{a}})^a$ sendo os dois membros equivalentes a x, segue-se que $\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$

Vejamos agora a formação exponencial, aquella em que a base é fixa e o expoente variavel. $y = a^x$ Supondo para y os valores $1, b, b^2, b^3, b^4, \ldots$ os valores de x serão $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots$ porque $a^0 = 1$

$b = a^\alpha$, $b^2 = a^\alpha . a^\alpha = a^{2\alpha}$, $b^3 = a^{3\alpha}$, $b^4 = a^{4\alpha}$

Euler, o mais fecundo dos geometras, segundo o julgamento de Augusto Comte, foi levado a designar a formação inversa da exponencial pela caracteristica a que se tinha que elevar a base para se obter todos os numeros quaesquer, ou $y = \log_a x$

que em linguagem vulgar significa logarithmo de u na base a, o que perfeitamente concordava com a formação descoberta por Nepper em arithmetica, e aperfeiçoada por Briggs, quando se supunham duas progressões que se correspondiam, uma arithmetica e outra geometrica:

$$\div 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \ldots\ldots$$

$$\div 0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, 5\alpha \ldots\ldots$$

* A formação logarithmica nasceu das tentativas feitas pela Humanidade para simplificar os calculos dos valores (arithmeticos).

A primeira observação dessa simplificação é incontestavelmente devida a Archimedes, e publicada num opusculo especial denominado "Arenario".

Com o avanço arithmetico, crescendo o numero de algarismos, era forçoso que se obtivesse uma maneira qualquer de simplificar os calculos, pois as multiplicações, divisões, elevações a potencia e extrações de raizes tornam-se demasiado penosas pelo tempo que exigem.

A demora dos calculos expõe mais facilmente a erros e torna mais incomoda a verificação e a correção do calculo.

A' vista disso a Humanidade procurou, desde que as

condições sociaes assim o exigiram, fazer recahir todas as operações em outras mais simples e afinal, na adição e subtração ficando mesmo esta, se se quizesse, reduzida ao caso mais comodo. Assim, com os logarithmos, a multiplicação recahio na addição, a divisão na subtração, a elevação a potencia na multiplicação, a extração de raizes na divisão, donde se vê que todas as operações se podem reduzir afinal a adições e subtracções.

No "Arenario" o pae da sciencia se propunha a demonstrar que era possivel esprimir o numero que representasse a totalidade dos grãos de areia contidos em uma esphera de raio igual á distancia do centro da Terra ao Sól.

Isto é, Archimedes se propunha a demonstrar que era possivel esprimir qualquer numero, por maior que elle fosse.

Foi essa tentativa que o levou a aperfeiçoar a notação arithmetica dos gregos, dando ao calculo dos valores um impulso que o conduziria á que é hoje usada. Conseguido isto, para demonstrar a sua proposição Archimedes parte do segundo theorema.

Si os numeros são continuamente proporcionaes a partir da unidade, e se os dois termos dessa progressão são multiplicados um pelo outro, o producto será um termo dessa progressão, afastado tantos termos do maior factor, quantos o menor o é da unidade. Esse mesmo producto será afastado da unidade tantos termos menos um quantos os dois factores juntos o estão da unidade.

Seja a progressão geometrica $\div a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$ em que um termo qualquer tem por expressão a^n, n representando o nº de termos precedentes.

Chamemos a^p e a^q dois termos quaesquer.

O producto delles será expresso por $a^p \times a^q = a^{p+q}$ que será o termo da progressão geometrica considerada quando $n > p+q$, isto é, o termo que tem antes de si $p+q$, e que é o pegesimo depois do maior factor a^q e incluindo esse termo a^q elle estará no logar de $p+1$ a contar de a^q, o que Archimedes indica dizendo que está afastado $p+1$ de a^q. Tal afastamento é aquelle em que o menor factor a^p tem da unidade, pois que contando 1 a^p occupa o logar $p+1$. Demais, á vista disto, os afastamentos de a^p e de a^q em relação á unidade sendo respectivamente $p+1$ e $q+1$, o afastamento dos dois juntamente é $p+q+2$, emquanto o de a^{p+q} em relação a 1 é $p+q+1$ ou $(p+q+2)-1$.

Esta observação foi suggerida a Archimedes pela consideração dos grandes numeros que elle imaginou quer para resolver o problema mencionado, quer para conceber calculada com desejada aproximação a relação da circumferencia para o diametro, base das memoraveis avaliações geometricas que elle foi o pri-

meiro a instituir.

Efectivamente, conforme indica o Mestre, (Synthese pg 210) "a inspecção de um nº consideravel, sobretudo quando este é escripto systematicamente, apanha-se a correspondencia natural entre a progressão arithmetica da ordem dos diversos algarismos e a progressão geometrica do valor das unidades respectivas."

E a base do systema de numeração podendo ser qualquer, é claro que tal correspondencia subsiste para todas as progressões geometricas. Isto posto, basta o confronto das duas progressões:

$$\div 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$$
$$\div 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

para surgir espontaneamente a observação de Archimédes. Sendo o correspondente de a^8; o nº 9, e o de a^{13}, o nº 14, o producto $a^8 \times a^{13}$ da a^{21} que corresponde a 22 na progressão arithmetica.

As condições sociaes não estimulando, porem, nessa direção o genio de Archimédes, o grande geometra não levou mais longe a sua observação, tirando-lhe as consequencias donde resultou a concepção dos logarithmos, de sorte que esta circumstancia em nada diminue a gloria de Neper, embora assinale sob novo aspecto o genio incomparavel do patriota siracusano. Em todo caso o seu principal alcance consiste em mostrar a filiação directa da concepção dos logarithmos para com a numeração, e que as descobertas scientificas só são feitas quando a Humanidade dellas precisa.

Relativamente ás Taboas trigonometricas, as pesquizas para simplificação de trabalho levaram o Sr. Nicolau Rayner Ursus a inventar um metodo engenhoso que servia para um dos senos, a saber quando o raio formava o primeiro termo da proporção e os senos dos dois arcos eram, o 2º e o 3º termos, porque elle mostra que o 4º termo ou o seno se acharia tomando metade da soma ou da diferença dos senos de dois outros arcos que fossem a soma e a diferença do menor dos dois primeiros arcos dados e o complemento do maior.

$r : \operatorname{sen}\alpha :: \operatorname{sen}\beta : x \qquad x = \frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{r}$

$\alpha\beta r = 1$

$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}A \pm \operatorname{sen}B) \qquad \operatorname{sen}A = \operatorname{sen}[\beta + (90° - \alpha)] =$

$= \operatorname{sen}(90° - \alpha\beta) = \operatorname{sen}[90° - (\alpha - \beta)] =$

$= \cos(\alpha - \beta)$

$\operatorname{sen}B = \operatorname{sen}[\beta - (90° - \alpha)] = \operatorname{sen}(90° + \alpha\beta) = -\operatorname{sen}(90° - \alpha - \beta) = -\operatorname{sen}[90° - (\alpha + \beta)]$.

Isso nada é senão o theorema de Trigonometria: "metade do raio está para o seno de um arco como o seno de outro arco está para o coseno da diferença menos o coseno da soma dos ditos arcos.

O autor publicou esta engenhosa descoberta em 1588 no seu

Testamento Astronomico.

A consideração das progressões, a que se passou a prestar maior atenção depois da descoberta dos logarithmos, foi que levaram Wallis a considerar por indução, as potencias negativas, retrogradando com a série, da base ao infinito negativo a que seriam elevadas as bases das progressões.

$a^{-\infty} \ldots a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3}, a^{4}, a^{5} \ldots \quad a^{\infty}$

$\frac{1}{a^{\infty}} \ldots\ldots, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a} \quad 1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots\ldots \quad a^{\infty}$

Pelo estudo que terminamos, das formações algebricas, vemos que as primeiras nasceram directamente da arithmetica, enquanto a ultima nasce da geometria, que é o par de formações circulares, directa e inversa.

Como se vê, pela simples consideração desses elementos a algebra como ligação entre a geometria e a arithmetica participa forçozamente, da natureza dos dois extremos cuja ligação opera, conforme a 15ª lei de Philosophia Primeira.

A Euler, o mais fecundo dos grandes geometras, se devem quasi todos os trabalhos de generalisação da algebra, e foi elle que conseguiu estabelecer relações entre o par artificial $\begin{cases} y = a^x \\ y = \log x \end{cases}$ e o par excepcional $\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \operatorname{arcsen} x \end{cases}$ por intermedio das séries

~ Instituição fundamental ~

4ª e ultima lição - 7ª lição de algebra.

Resumo do assumpto: Complemento geral das relações elementares entre o abstracto e o concreto pela instituição da theoria da homogeneidade.

— x —

Os valores numericos voltam a ser usados na algebra depois das suas instituições abstractas devidas á generalisação, somente quando queremos aplicar nossas leis algebricas á interpretação dos casos reaes. Mas os casos reaes, sendo, quando exigidos pela vida social, muito simples, a imaginação é logo levada ou a considerar inuteis os esforços scientificos, ou a dar-lhes corpo excessivo, algebricamente sobretudo, sem verificação do mundo exterior a que essa imaginação mesmo deve sempre estar subordinada.

A elaboração das relações perderia o seu destino si não facilitasse a meditação matematica, simplificando o mais possivel o estudo das leis abstraindo dos fenomenos.

Para proceder de outra forma seria necessario introduzir distincções e restricções tanto mais multiplicadas quanto mais complicados fossem os casos. Houve necessidade de estender esses habitos ás constantes porque ellas podiam ser tomadas por variaveis, sendo a sua generalisade

tomada em grás mais restricto. Toda a constante póde ser
considerada como a potencia nula de cada variavel indepen-
dente. Houve necessidade, por causa da generalisação,
de se considerar os resultados mais extranhos. Todas as
distincções e restricções numericas tornar-se-iam incompati-
veis com a avaliação das formas algebricas nas quaes os
resultados mais normaes podem provir muitas vezes dos
elementos mais excepcionaes, dentre os quaes se destaca a $\sqrt{-1}$.

Deve-se estender imediatamente a todos os casos possi-
veis, das constantes e das variaveis, as transformações e
principios instituidas para uma só apezar dos embaraços
quaesquer de sua interpretação directa para as outras
que não podem jamais oferecer sinão enigmas provisorios.

Uma das consequencias da generalisação algebrica, é que ella
nos expõe, como dissemos, a resolver equações desprovidas de sen-
tido. As transformações algebricas não soffrem, nesse caso, nenhuma
alteração, e a apreciação da diversidade dos casos concentra-se
nos resultados. Elaboradas gradualmente as relações excepcio-
naes, acabam por patentear o seu caracter, e nisto consiste
a sua resolução, que não pode exigir novas regras quando
a composição algebrica persiste a mesma.

Aqui cabe o estudo da insignificancia ou indetermina-
ção: $0=0$ $x = \frac{0}{0}$ $x = \frac{\infty}{\infty}$ e as anomalias opostas: contra-
dição e impossibilidade — 1º caso vago - imaginarios e desegual-

dades. 2º impossibilidade precisa - anulação isolada de um dos membros da equação igual a valor qualquer.
Valores infinitos, inadmissiveis.

"A impossibilidade póde manifestar-se pelas soluções imaginarias, como por exemplo na procura da asymptota de curvas fechadas, e póde manifestar-se por solução inferior, como quando se procura a asymptota de curva indefinida que não goze de tal propriedade como na parabola. A impossibilidade se revela dando valores incompativeis para os parametros da asymptota, isto é, determinando o angulo e transportando a recta para o infinito." A. Comte pg 155 - Geom. Anal.

"Creio dever estabelecer sumariamente uma importante noção de filosofia matematica, até aqui confusas sobre a natureza dos diversos sintomas por que o calculo indica a impossibilidade que uma céga rotina algebrica conduz com demasiada frequencia a crear, indistinctamente annunciada pela imaginariedade das incognitas, embora o modo deva necessariamente variar segundo os casos.

Em virtude da harmonia fundamental que deve sempre reinar entre os dominios da mathematica, e nella entre as apreciações concretas e as indicações abstractas, póde-se constantemente prever de que maneira a impossibilidade

deverá ser manifestada segundo uma judiciosa discução especial, destinada a discernir se as condições que a caracterisem são vagas ou precisas; isto é, em outros termos se ellas correspondem a uma simples desigualdade ou a uma verdadeira relação de equaldade.

O calculo conduzirá necessariamente no 1º caso a valores ~~imaginarios~~,* ~~não~~ menos que os valores negativos não fossem igualmente inadmissiveis, o que raramente acontece em geometria. Quanto ao 2º caso, o systema algebrico deverá mudar de natureza e consistirá em certos valores reaes especialmente excluidos do assumpto. O mais das vezes essa exclusão determinada limitar-se-ha aos valores nulos ou inferiores. Tal é o principio philosophico que deve dominar a discussão efectiva das soluções algebricas relativas a uma ordem qualquer de pesquisas concretas.

Passemos agora á apreciação geral das relações entre o abstracto e o concreto, donde a theoria da homogeneidade.

Toda a equação que tem sentido geometrico, e especialmente linear é constantemente homogenea.

Augusto Comte foi levado a construir a theoria da homogeneidade, pelo seu ensino diario, e depois de tel-a construido verificou que Fourier em sua obra publicada em 1822 sobre o calor tinha chegado a uma

* imaginarios - a

theoria semelhante.

A sua demonstração aqui tem por principal objectivo abraçar o conjuncto da questão, sem atender a nenhuma aplicação especial.

Extracto da Theoria do calor de Fourier: pg 152 e seg.

"A pesquiza das leis do movimento do calor nos solidos consiste agora em integrar as equações que apresentamos.

Para medir as quantidades que entram no nosso calculo e exprimil-as em numeros, comparamol-as a diversas sortes de unidades, em numero de 5, asaber: comprimento, tempo, temperatura, pezo, e a unidade que mede as quantidades de calor. Podia-se ter escolhido para esta ultima unidade a quantidade de calor que eleva um volume dado de uma certa substancia, desde a temperatura zero até a temperatura 1. A escolha dessa unidade seria perfeitamente a muitos respeitos a da quantidade de calor necessario para converter uma massa de gelo de um pezo dado a uma massa dagua egual, sem elevar a temperatura de zero. Não adoptamos esta ultima unidade sinão porque ela estava fixada de ante mão em obras de Fisica; de resto essa suposição não traria nenhuma mudança no calculo.

Os elementos especificos que determinam em cada corpo os efeitos comensuraveis do calor, são em numero

de 3 a saber: conductibilidade propria, a conductibilidade relativa ao ar atmosferico, e a capacidade de calor.

Os numeros que exprimem essas quantidades, são, como o peso especifico, outros tantos caracteres naturaes peculiares ás diversas substancias."

"É preciso agora observar que cada grandeza independente ou constante tem uma dimensão que lhe é peculiar e que os termos de uma mesma equação não poderiam ser comparados sinão tivessem o mesmo expoente de dimensão. Introduzimos esta consideração na theoria do calor para tornar as nossas definições mais fixas e servir para verificar o calculo; ela deriva das noções primordiaes sobre as quantidades; é por essa razão que na geometria e na mecanica ela equivale aos lemas fundamentaes que os gregos nos deixaram sem demonstração."

"Na theoria matematica do calor toda a equação exprime uma relação necessaria entre grandezas subsistentes, relação que não depende da escolha da unidade de comprimento, que por sua natureza é contingente, isto é, que si tomasse uma unidade diferente para medir as dimensões lineares a equação seria ainda a mesma."

Passando agora á theoria da homogeneidade, tal como nosso Mestre instituio, estabeleçamos o seguinte principio basico:

"As curvas que teem representação geometrica são homogeneas, e inversamente, só as figuras continuas teem equivalente algebrico."

Existe portanto, uma estreita correlação entre a homogeneidade e a continuidade.

Instituir algebricamente uma curva, é formulal-a segundo a sua definição precisa, é obter sua equação correspondente.

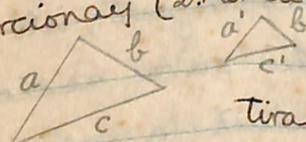
$$\begin{cases} f(x,y)=0 & \text{curva plana} \\ f(x,y,z)=0 & \text{superficie qualquer} \end{cases}$$

Essas equações por significarem posição referindo-se a dois eixos, são geometricamente determinadas, porem sob o ponto de vista puramente algebrico são indeterminadas.

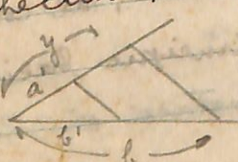
$f(x)=0$, que é algebricamente determinada, é geometricamente indeterminada, provindo da eliminação do systema $\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ \varphi_1(x,y)=0 \end{cases}$

Para estabelecer a Theoria da homogeneidade precisamos dos dois seguintes theoremas de geometria:

1º Dois triangulos equiangulos teem lados homologos proporcionaes (2ª lei de Thales)



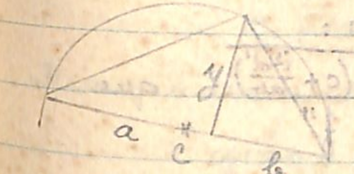
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ donde se póde tirar um qualquer elemento desconhecido por intermedio dos outros tres,



$y = \frac{a'b}{b'}$

e ainda, o Theorema que nos dá a

quarta proporcional. $\frac{y}{a} = \frac{b}{y}$ ou $y^2 = ab$ e $y = \sqrt{ab}$



Formulas homogeneas são as que possuem identico grão em ambos os membros: a, $\frac{ab}{c}$, $\frac{abc}{de}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2}$, $\frac{abcde}{f^4}$, são todas formulas homogeneas do 1º grão.

Vejamos como se restabelece a homogeneidade das formulas: Podemos multiplicar ou dividir quaesquer expressões pela unidade, sem alteração.

Sob o ponto de vista concreto, essa unidade tem que ser convenientemente escolhida, para que não haja alteração, restabelecendo ao mesmo tempo a homogeneidade.

Efectuam-se as operações supondo $i = 1$

$y = \frac{ab}{c} + \sqrt{d} - \frac{\sqrt[3]{ab} + def}{gh}$. Restabelecendo a homogeneidade: $y = \frac{ab}{c} + \sqrt{di} - \frac{i^2\sqrt[3]{abi} + def}{gh}$

Supponhamos então: $y = \frac{abcde}{fghk}$ substituindo pelos valores proporcionaes: $\frac{abcde}{fghk} = \frac{a'cde}{ghk} = \frac{a''de}{hk} = \frac{a'''e}{k} = a^{IV}$

E no caso polynomio: $y = \frac{abcd + efgh - kl}{mnp + qv} = \frac{abcd + efgh - kli^2}{mpn + qvi} = \frac{abc\left(d + \frac{efgh}{abc} - \frac{kli^2}{abc}\right)}{mn\left(p + \frac{qvi}{mn}\right)}$

os casos monomios ahi comprehendidos resolvemos, e fica $= \frac{abc(d + a' - b')}{mn(p + c')}$

As somas se resolvem por justaposição de linhas.

$$= \frac{abcd'}{mnp'} = a'''$$

No caso irracional, temos:

$$y = \sqrt{\frac{abc+\sqrt{d}}{e+\sqrt{f}}} = \sqrt{\frac{abc+i^2\sqrt{di}}{e+\sqrt{fi}}} = \sqrt{\frac{abc+i^2d'}{e+f'}} = \sqrt{\frac{ab\left(c+\frac{i^2d'}{ab}\right)}{f''}}$$ que

tambem se sabe resolver.

~ Coordenação especial ~

1ª licção - 8ª lição de algebra.

Resumo do assumpto: Theoria das equações do 1º grão. Caso fundamental de uma só equação a uma só incognita; principios geraes em que se basêa sua resolução, apreciação da succesão normal das tres operações que constituem este primeiro grão do calculo algebrico. Apreciação do caso da unidade como fornecendo um typo decisivo da logica abstracta.

Caso da pluralidade; systemas de equações; considerações geraes sobre a reducção normal da pluralidade á unidade pela intervenção da theoria da eliminação. Exame do caso fundamental do systema de duas equações. Methodo expontaneo que reduz a eliminação ao caso da resolução. Outros methodos de eliminação, por Comparação, reducção ao mesmo coeficiente e de Bezout, ou dos coeficientes indeterminados.

Exame do caso geral de um systema geral de equações a egual nº de incognitas, Reducção deste caso ao do systema de duas equações pela successiva reducção dos grupos de equações ao grupo immediatamente mais simples, por uma conveniente repetição do acto fundamental, seguindo a lei dos numeros triangulares.

x

Tendo terminado em nossa ultima aula a instituição fundamental, e tendo passado em revista, 1º o conjuncto da instituição fundamental, depois o estudo succinto das principaes formações, em seguida o estudo da generalisação algebrica, e finalmente a theoria da homogeneidade, vamos hoje entrar na coordenação especial.

Como nos mostrou Clairaut os primeiros problemas que uma linguagem especial foi conseguindo resolver mais facilmente, foram os das equações de 1º grão a uma incognita, e esse é, com effeito, como veremos, o unico problema plenamente soluvel, e directamente, da algebra. Todos os outros tratam de se reduzir a este, o que a Humanidade foi conseguindo por escalões, e com maior ou menor dificuldade, até ao 4º grão; unicamente a uma só variavel, porque a mais de uma, os casos eram, e são, geralmente, insoluveis.

No primeiro grão, conforme a classificação de Viète, ha dois casos.

1º Uma só equação { determinado; problema-indeterminado { condicional; indet. propriamte.

2º Caso de muitas equações { problema determinado; " indeterminado; " condicional.

O espirito humano segue sempre a marcha objectiva nas questões theoricas, isto é, elle vae marchando do mais simples para o mais composto, de forma que resolvida a equação do 1º grão a uma incognita, os outros casos foram sendo reduzidos ao primeiro, e nisso consiste, logicamente a resolução.

Chamando A_0 - a soma algebrica dos coeficientes de x

" A_1 - " " " termos independentes,

o typo geral da equação do 1º grão a uma incognita é

$A_0 x = \pm A_1$ ou dividindo ambos os membros, da equaldade, $x = \pm \frac{A_1}{A_0}$

Na passagem do 1º aspecto da questão para este ultimo está a resolução da equação. Ella passou, em outros termos, do estado implicito para o explicito correspondente, ou ainda melhor, da forma de equação, para o estado de formula.

Os dois principios em que se basêa a resolução das equações do 1º grão a uma incognita, ou principios de transposição, são os seguintes:

1º Uma equaldade não se altera quando se soma ou se subtrae a ambos os membros, a mesma quantidade.

2º Uma equaldade não se altera quando se multiplica ou se divide ambos os membros por uma mesma quantidade.

Pelo que se disse, relativamente a essas duas leis algebricas, se vê, que ellas não são mais de que casos especiaes da 8ª lei de Philosophia Primeira:

"Um systema qualquer tende a manter sua constituição activa ou passiva quando os seus elementos soffrem mutações simultaneas, desde que ellas sejam exactamente communs".

Um systema = equação

manter constituição (activa ou passiva) = equaldade

quando elementos soffrem mutações = soma, subtrae, mult. ou divide

simultaneas, exactamte. communs = a ambos os membros, mesma quant.

Seja a equação: $ax - \frac{a}{b} = \frac{c}{d}x - c$

Multiplicando por bd, ambos os membros, vem

$abdx - ad = bcx - bcd$

Subtrahindo de ambos os membros bcx, vem:

$abdx - bcx - ad = -bcd$, ou somando ad a ambos os membros, $abdx - bcx = ad - bcd$ ou $(abd - bc)x = ad - bcd$

Ora, dahi surge, desde logo, a reducção ao mesmo denominador, isto é, tornamos as fracções isomeras (mesma medida) para em seguida eliminar os denominadores communs.

Os principios que acima enunciamos podem adquirir uma feição mais pratica e expedita:

A transposição dum termo algebrico dum membro para outro, se faz com a simples troca de signal.

Elementos de fração, quando transpostos (depois da previa reducção ao mesmo denominador) tomam logar oposto ao que occupavam, isto é, denominador si era numerador, numerador si era denominador.

A formula da equação dada precedentemente, será

$$x = \frac{ad - bcd}{abd - bc}$$

Qualquer verificação se faz pela substituição directa do valor obtido, na equação primitiva.

Tomemos agora o exemplo numerico:

$$\frac{2}{3}x - 4 + \frac{3}{4}x = \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}$$

(Quando a incognita se acha combinada com as constantes por operações indicadas, ellas devem ser effectuadas)

Exemplo: $a(x - b) = d(a - x) - (a + b)x$

Vamos passar agora á discussão da equação typica

$x = \pm \frac{A_1}{A_0}$ segundo o padrão: $\begin{cases} A_1 = 0, -n, +n, \infty \\ A_0 = 0, -n, +n, \infty \end{cases}$ casos indet. $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

Demos um exemplo concreto para a discussão dos casos

$\overset{\xrightarrow{m}}{A \ldots\ldots B} \ldots\ldots\ldots C$ $\begin{cases} A\ (e = vt) \\ B\ (e - m = v't) \end{cases}$ $t = \frac{m}{v - v'}$

$m = 0$ (trens saem dum mesmo ponto); $v - v' = 0$ $v = v'$ $t = \infty$ (trens vão juntos)

$v > v'$ (encontro depois de zero); $v < v'$ (encontro se deu antes de zero)

Vejamos agora algumas restricções ao caso geral, que impedem a verificação immediata da lei, ella só vindo a apparecer depois de uma prévia preparação.

Seja a equação geral: $A_0 x - A_1 = 0$

multipliquemos ambos os membros por $x - a$. Vem:

$$(A_0 x - A_1)(x - a) = 0$$

Foram aqui introduzidos valores que não satisfazem a equação primitiva, são valores que devem continuar a ser considerados como extranhos á equação.

A restrição ao caso geral então, será: "Não se póde multiplicar ambos os membros duma equação por formações da variavel, porque assim fica alterado o seu valor primitivo".

Neste caso estão, por exemplo, os valores indeterminados que aparecem nas equações do 1º grão.

A indeterminação ahi provêm do factor commum que, desaparecido, levanta-a.

Exemplos: $x = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 - 4a + 3}$ $\quad a = +1 \quad$ $(a-1)$ é o factor

$x = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ $\quad a = b \quad$ $(a-b)$ é o "

As formas de indeterminação são as seguintes: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$

A forma $0 \times \infty$, vem das expressões $x = M \times \frac{N}{P}$ em que M e P se annulam. Quando porem, se olha sob a forma $x = \frac{M \times N}{P}$, o caso é de $\frac{0}{0}$. A expressão $\frac{\frac{P}{f(x)}}{\frac{P'}{f'(x)}}$ dá a forma

$\frac{\infty}{\infty}$ quando as formações de x se anulam. Este caso porem, é reductivel ao de $\frac{0}{0}$ porque $\frac{\frac{P}{f(x)}}{\frac{P'}{f'(x)}} = \frac{P[f'(x)]}{P' f(x)}$

pág 196/7 [illegible]

Finalmente o typo $\infty - \infty$ provem de expressões da forma $\frac{P}{f(x)} - \frac{P'}{f(x)}$ em que $x = 0$, como no exemplo:

$$x = (a+2) - \sqrt{a^2 - 5a + 1} \quad \text{para} \quad a = \infty.$$

O verdadeiro valor se obtem multiplicando ambos os membros por $(a+2) + \sqrt{a^2 - 5a + 1}$. (Identidades)

Visto então o caso mais simples que a algebra directa apresenta como unico directamente soluvel, vamos passar aos casos mais complicados, de varias equações a egual numero de incognitas. A complicação cresce assim em numero de incognitas, porem não quanto ao grão, que, como se verá é de resolução limitada, ao passo que o das incognitas todas no 1º grão é universalmente soluvel.

Vejamos os systemas de duas equações á duas incognitas (eliminar é transformar. Seja o systema:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ F_1(x, y) = 0 \end{cases}$$

Para passar do estado implicito em que está para o explicito correspondente, será conseguir-se as formulas de y e x, que ao mesmo tempo satisfaçam ás duas equações do systema.

Temos então, que transformar o systema dado, em outro equivalente, em que uma das equações, a uma só incognita, nos dá desde logo o valor dessa incognita, compativel com a outra equação, isto é, que substituido na outra dá o valor da segunda incognita.

Ha varios processos para se passar da equação primitiva para a transformada final.

Duma maneira geral, o nosso problema é passar do systema $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F_1(x,y)=0 \end{cases}$ para $\begin{cases} x=f(y) \\ f'(y)=0 \end{cases}$ e daqui, terminada a fase eliminativa, começa a fase resolutiva, que nos vae dando successivamente os valores das incognitas.

Mas, provemos que os dois systemas dados acima, são equivalentes. Supponhamos que a e b sejam soluções do primeiro systema. Sendo verdadeira essa hypothese, a equação $x=f(y)$ fica tambem resolvida, porque esta proveio de $F(x,y)=0$. Então, substituindo a incognita pelo seu valor em a outra equação, chega-se a ter $f'(y)=0$.

Processo de substituição: Dadas as equações geraes $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ tiramos o valor de $x=\frac{c-by}{a}$ que substituimos na segunda $a'\frac{c-by}{a}+b'y=c'$; $a'c-a'by+ab'y=ac'$

$y(ab'-ba')=ac'-ca'$ donde $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$

A equação transformada equivalente é $\begin{cases} ax+by=c \\ y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \end{cases}$ daqui passamos para a fase resolutiva em que se tiram as formulas de y e depois, de x.

Methodo de comparação: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ Tiramos os valores de x da primeira e da segunda equações e equalamos. Tem-se o systema equivalente $\begin{cases} \frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'} \\ ax+by=c \end{cases}$ que nos dá, na 1ª equação, o valor de y, que substituido na 2ª dá o de x.

Processo de addição e subtração: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$: Multiplicando a 1ª equação por a' e a segunda por a, vem:

$\begin{cases} aa'x+ba'y=ca' \\ aa'x+ab'y=ac' \end{cases}$ Subtrahindo, agora, a 2ª da primeira, vem

$\left.\begin{matrix} ba'y-ab'y=ca'-ac' \\ ax+by=c \end{matrix}\right\}$ systema equivalente.

Methodo de Bezout ou dos coeficientes indeterminados

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ multiplicamos uma das equações por coeficiente indeterminado m, e somamos as duas $\begin{cases} max+mby=mc \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ $(ma+a')x+(mb+b')y=mc+c'$

Para eliminar x, equalamos o coeficiente a zero $(ma+a')=0$ ou $m=-\frac{a'}{a}$. Substituindo este valor

$-\frac{a'}{a}by+b'y=-\frac{a'}{a}c+c'$

$\left.\begin{matrix} (-ba'+ab')y=ac'-ca' \\ ax+by=c \end{matrix}\right\}$ systema equivalente.

Exemplo: $\begin{cases} 15x-4y=21 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

Discutir as formulas $\begin{cases} x = \dfrac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \\ y = \dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \end{cases}$ $\quad 0, \infty, \frac{0}{0}$

— x —

Caso de redundancia, em que o systema tem equações inuteis para determinação dos seus valores. No caso de duas equações ellas se reduzem a uma unica.

$\begin{cases} 6x+3y=9 \\ 8x+4y=12 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ Casos de systemas indeterminados $\begin{cases} x = \frac{0}{0} \\ y = \frac{ac-ca'}{0} = \infty \end{cases}$

— x —

Consideremos agora o caso de 3 equações a 3 incognitas:

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ f_1(x,y)=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ f_1(x,y)=0 \\ f_3(x)=0 \end{cases}$

Termina aqui a phase eliminativa e começa a phase resolutiva.

$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$ $\quad z=\dfrac{d-by-ax}{c} \quad a'x+b'y+c'\dfrac{d-by-ax}{c}=d'$

$$ca'x+cb'y+c'd-by-ax=cd'$$

$$(ca'-a)x+(cb'-b)y=cd'-dc'$$

$$x=\frac{(cd'-dc')-(cb'-b)y}{ca'-a}$$

$$a''\frac{(cd'-dc')(cb'-b)y}{ca'-a}+b'y+c''z=d''$$

A succesão das transformações se dá, então da seguinte maneira:

```
x y z u v w . .
x . . . . w .
x . . . . w .
x . . . . w .
x . . . . w
x y z u v w . . .
```

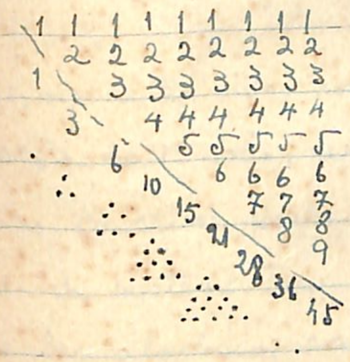
Systema implicito


```
x y z u v w .      x y z u v w . . .     x y z u v w .
y . . . w          y z . . w . . .       y z u . w . .
y . . . w . .      y z . . w . . .         z u . w . . .
y . . . w . .        z . . w . . .           u . w . . .
y . . . w . .        z . . w . . .           u . w . . .
y z u v w . . .      z . . w . . .           u v w . . .
y z u v w . . .      z u v w . . . .           . . . . .
```

```
x . . . . .
. y . . . .
. . z . . .
. . . u . .
. . . . v .
. . . . . w .
```

systema explicito

Como se vê a phase eliminativa se dá reproduzindo a lei dos numeros triangulares.



O numero de equações sendo superior ao numero de incognitas é necessario que haja compatibilidade, sem o que, por causa da redundancia ha indeterminação ou incompatibilidade.

Para terminar, e a titulo de illustração, vejamos os systemas que podem ser resolvidos por artificio de calculo:

1º systema:

$x+y+z=a$
$y+z+u=b$
$z+u+x=c$
$u+x+y=d$
$3x+3y+3z+3u=a+b+c+d$
$x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{3}$
$x=\frac{a+b+c+d}{3}-(y+z+u)$

2º syst.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a$
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=b$
$\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{x}=c$
$\frac{1}{u}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=d$

Reduz-se ao anterior, fazendo $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ ....

3º syst.

$\begin{cases} ax=by \\ by=cz \\ cz=du \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{m} \end{cases}$

$ax=by=cz=du$

$\frac{a}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{b}{\left(\frac{1}{y}\right)}=\frac{c}{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{d}{\frac{1}{u}}$

$\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{m}}=\frac{a}{\frac{1}{x}}=\frac{b}{\frac{1}{y}}=\dots$

$m(a+b+c+d)=ax=ay=\dots$

4º syst

$\begin{cases} ax+y+z+u=k \\ by+z+u+x=l \\ cz+u+x+y=m \\ du+x+y+z=n \end{cases}$

$(x+y+z+u=S)$

— 2a lição da coordenação especial —

(9ª lição de algebra)

Resumo do assumpto: Theoria fundamental das transformações algebricas. Principios relativos á addição, subtração, multiplicação e divisão das formulas compostas dos tres pares naturaes.

Exame especial da divisão de um polynomio inteiro em x por um binomio da forma $(x-a)$. Consequencias.

Theoria algebrica do max. comum divisor. Desenvolvimento desta theoria como analoga á theoria arithmetica correspᵗᵉ.

— x —

Depois de ter sido instituida pela Humanidade a theoria das equações do 1º grão, necessaria para a solução de varios problemas concretos postos pelas necessidades praticas, houve necessidade de systematisar as leis referentes ás transformações das formulas algebricas compostas dos tres primeiros pares naturaes.

<u>Addição</u>: Somar duas ou mais expressões algebricas é substitui-las por uma unica, de valor numerico egual á soma dos valores das primitivas.

Dahi surge a regra de soma algebrica.

<u>Subtração</u>: Subtrahir uma expressão de outra é achar uma terceira cujo valor numerico seja a diferença entre os valores numericos das expressões primitivas.

Dahi vem a regra de subtração.

<u>Multiplicação</u>: Caso monomio, monomio e polynomio, caso polynomio. Expoentes, positivos, negativos etc.

<u>Regra</u>: Cada termo de um por todos os do outro somando o resultado algebricamente.

Dois polynomios inteiros e ordenados teem no producto pelo menos dois termos.

Ex. $x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$ $(x-a)$

Leis necessarias: $(a+b)^2$ $(a-b)^2$ $(a+b)(a-b)$

<u>Divisão</u>:- Monomios - monomios e polynomios - polynomios

Achar um dos factores dum producto, sendo dados o producto e o outro factor.

Casos monomios a considerar (recordar)

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}$; $\frac{a^{-n}b}{c} = \frac{b}{a^n c}$; $\frac{a^m}{b^{-n}c} = \frac{a^m b^n}{c}$; $\frac{a^m b^n x}{a^n b x^n} = a^{m-n} \cdot b^{n-1} \cdot x^{1-n}$

$\frac{A+B-C+D-E}{P} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P} - \frac{C}{P} + \frac{D}{P} - \frac{E}{P}$ (Exemplo numerico)

(factor em evidencia) Caso polynomio por polynomio:

$A+B+C+D+E+F = D_2$ a dividir por $D_1 = P+Q+R+S$

ambos os polynomios ordenados relativam^te a uma potencia qualquer decrescente.

Seja $T+X+Y+Z = Q$, o quociente procurado

sabemos que D_2 (dividendo) $= D_1$ (divisor) $\times Q_1$ (quociente)

E que, então, A é formado por $P \times T$. Para se ter, portanto T, basta dividir A por P, o que já sabemos fazer.

Multiplicando então o primeiro termo T, do quociente,

pelo divisor, e subtrahindo, o resto será o novo dividendo $D_3 = D_1' \times Q_1'$, em que o 1º termo $A' = Q \times X$ então $X = \frac{A'}{Q}$ e assim por diante.

<u>Exemplo</u>: $5x^3 + 4x^2 + x - 3 \;|\; x^2 - 2x + 1$

$6x^5 - 13ax^4 - 15a^2x^3 + 27a^3x^2 - 5a^4x \;|\; 3x^3 + 4ax^2 - a^2x$

(Considerações sobre <u>esta</u> primeira idéa de série)

Vejamos agora a divisão dum polynomio inteiro em x por um binomio da forma $x \pm a$.

Effectuemos a divisão de:

$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \dots$ por $(x-a)$

O resto da divisão se obtem substituindo no dividendo, o 2º termo do binomio divisor, tomado com signal contrario.

Ha a seguinte demonstração para esse principio:

$F(x) = (x-a) \cdot f(x) + R$ (R = independente de x)

Fazendo $x = a$, vem $F(a) = (a-a) \times f(a) + R$

$F(a) = 0 \times f(a) + R = R$

Dahi se conclue que, quando um polynomio se anula pela substituição de x por uma quantidade qualquer, esse polynomio é divisivel pelo binomio x addicionado algebricamente a essa quantidade tomada com signal contrario.

(Exame do quociente, e lei da sua formação)

Si se substitue a, b, c, d, por x num polynomio inteiro e ordenado em relação a x, e elle se anula, esse polynomio é divisivel por $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ ...

$f(x) = (x-a) \times f_1(x)$ si se substitue x por b, obtem-se:

$0 = (b-a) \times f'(b)$ porem como $b \neq a$, $f'(b) = 0$ então $f_1(x)$ é divisivel por $(x-b)$ e teremos $f_1(x) = (x-b) \times f_2(x)$

substituindo x por c, vem: $0 = (c-b) \times f''(c)$

$f''(c) = 0$ então $f_2(x) = (x-c) \times f_3(x) \ldots$

Donde $f(x) = (x-a) \times f_1(x)$

$f(x) = (x-a) \times (x-b) \times f_2(x)$

$f(x) = (x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times f_3(x) \ldots\ldots$

(discutir) $\dfrac{x^m+a^m}{x+a}$; $\dfrac{x^m-a^m}{x+a}$; $\dfrac{x^m+a^m}{x-a}$; $\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$

Finalmente se tem:

$F(x) = (nx \pm a) \times f(x) + R$ $\quad$ (x por $\mp \frac{a}{n}$)

$F(\mp \frac{a}{n}) = (\mp a \pm a) \times f(\mp a) + R$

$F(\mp \frac{a}{n}) = 0 \times f(\mp a) + R = R$

— x —

Da divisão, surgio a simplificação das fracções e dahi provêm a theoria do maximo commum divisor, de que vamos hoje tratar: (Theoria de accordo com Clairaut)

Dois numeros $\frac{637}{143} = 4 + \frac{65}{143}$ simplificou-se assim, o problema, visto que se tem que lidar com numeros mais simples, como sejam $\frac{65}{143}$. Mas, si escrevermos $\frac{143}{65}$ recahimos no caso precedente, mais simples $\frac{143}{65} = 2 + \frac{13}{65}$ e agora $\frac{65}{13} = 5$. Então, o maior divisor é 13, porque divide 65, então $\frac{637}{143} = \frac{49 \times 13}{11 \times 13} = \frac{49}{11}$ fracção irreductivel.

Este mesmo processo, generalisado, é que vamos adoptar para o ponto de vista algebrico do maximo divisor commum.

$\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$ $\quad$ $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$ $\quad$ $\frac{C}{D} = c$ $\quad$ então D será o maximo divisor comum. No caso precedente só consideramos as expressões inteiras. Sejam A e B de que queremos obter o divisor. Seja esse, D

$A = BQ + R$ $\quad$ $\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D}$ $\quad$ $\frac{A}{D} - \frac{BQ}{D} = \frac{R}{D}$

Todo o divisor que o é do dividendo e do divisor é tambem do resto, e todo o do divisor ou quociente e do resto é do dividendo.

Então, o divisor de dois polynomios é do de menor grão e do resto da divisão dos dois. —

3ª lição da coordenação especial
(10ª lição de algebra)

Resumo do assumpto: Estudo directo da lei binomial de Newton; sua extensão á extração de raizes quaesquer, arithmeticas e algebricas.

Calculo indeterminado do primeiro grão; diferentes grãos de indeterminação, medidos pelo excesso do numero de incognitas sobre o de equações. Exame do caso fundamental de uma equação a duas incognitas. Reducção normal dos outros aspectos da indeterminação ao caso fundamental.

— x —

Antes de iniciar a theoria do binomio de Newton, vamos recordar as theorias arithmeticas das permutações, dos arranjos e das combinações. Estas theorias já deviam ter sido estudadas em arithmetica.

Sejam a e b dois objectos a permutar

Temos ab e ba ou $P_2 = 2\times 1$

Sejam a, b e c, tres objectos a permutar; vem:

abc	bac	cab
acb	bca	cba

$P_3 = 3\times P_2 = 3\times 2\times 1$

Sejam a, b, c e d, quatro objectos a permutar, vem:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

$P_4 = 4\times P_3$

$P_4 = 4\times 3\times 2\times 1$

Donde, generalisando

$P_n = n\times(n-1)(n-2)(n-3)\dots 3.2.1$

Sejam agora abc os 3 objectos a arranjar 2 a 2

ab	bc	cb
ac	ba	ca

$^2A_3 = 3\times 2$

Sejam abcd os 4 objectos para arranjar 2 a 2

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

$^2A_4 = 4\times 3$ generalisando: $^2A_m = m(m-1)$

Sejam os mesmos objectos a arranjar 3 a 3

abc	bac	cad	dab
abd	bad	cda	dba
acd	bcd	cab	dbc
adc	bdc	cba	dcb
adb	bca	cbd	dac
acb	bda	cdb	dca

$^3A_4 = 4\times 3\times 2$

Generalisando $^2A_m = m(m-1)$

$^3A_m = m(m-1)(m-2)$

$^nA_m = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$

Vejamos agora as combinações. De 3 objectos a, b, c

ab, ac, bc $\quad {}^2C_3 = (3-1)+(3-2)$

Para 4 objectos abcd

ab	bc	cd
ac	bd	
ad		

$^2C_4 = (4-1)+(4-2)+(4-3)$

Para 5 objectos abcde

ab	bc	cd	de
ac	bd	ce	
ad	be		
ae			

$^2C_5 = (5-1)+(5-2)+(5-3)+(5-4)$ generalisando

$^2C_m = (m-1)+(m-2)+(m-3)+\dots+3+2+1$

Sendo 4 objectos 3 a 3 (abcd)

abc	bcd
acd	
abd	

$^3C_4 = {}^2C_3 + {}^2C_2$

5 objectos abcde 3 a 3

abc	bcd	cde
abd	bce	
abe	bde	
acd		
ace		

$^3C_5 = {}^2C_4 + {}^2C_3 + {}^2C_2$ ou generalisando $^3C_m = {}^2C_{m-1} + {}^2C_{m-2} + {}^2C_{m-3} + \dots$

$^nC_m = {}^{n-1}C_{m-1} + {}^{n-1}C_{m-2} + {}^{n-1}C_{m-3} + \dots$

Por indução se tira tambem:

$^nA_m = {}^nC_m \times P_n \qquad {}^nC_m = \frac{^nA_m}{P_n} \qquad {}^nC_m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1}{1.2.3\dots(n-2)(n-1).n}$

Binomio de Newton:- Antes de estudarmos o binomio, digamos algo da vida desse grande filho da Humanidade, a que ella deve tantos e tão assignalados serviços.

Newton era mathematico e astronomo, nascido em Woolsthorpe, Inglaterra, em 25 de Dezembro de 1642.

Foi professor em Oxford, descobridor do calculo das fluxões, fluentes e dos limites, o seu principal titulo de gloria é a lei da gravitação universal que elle descobriu. A lei do desenvolvimento do binomio, foi descoberta por Newton quando este tinha somente 21 annos de edade, quando tratava de comentar a obra de Wallis.

Foi a segunda idéa de desenvolvimento em série, para qualquer expressão e tambem quaesquer expoentes. Instituido por Newton, o desenvolvimento adquiriu uma completa generalidade em aplicação.

A vantagem principal do desenvolvimento, é de se poder ter o desenvolvimento sem necessidade de efectuar as multiplicações successivas.

Sejam os binomios $(x+a), (x+b), (x+c)$ etc. que tenhamos a multiplicar.

$$\begin{array}{l} x+a \\ x+b \\ \hline x^2 + a \\ \quad + b \end{array} \Big| \; x + ab \qquad \begin{array}{l} (x+a)(x+b) \\ (x+c) \\ \hline x^3 + a \\ \quad + b \\ \quad + c \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^2 + ab \\ \quad + ac \\ \quad + bc \end{array} \Big| \; x + abc \qquad \begin{array}{l} (x+c)(x+d) \\ (x+a)(x+b) \\ \hline x^4 + a \\ \quad + b \\ \quad + c \\ \quad + d \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^3 + ab \\ \quad + ac \\ \quad + ad \\ \quad + bc \\ \quad + bd \\ \quad + cd \end{array} \Big| \begin{array}{l} x^2 + abc \\ \quad + acd \\ \quad + bcd \\ \quad + abd \end{array} \Big| \; x + abcd$$

Verificando estes resultados, vemos que elles seguem uma lei fixa, que póde ser expressa da seguinte maneira: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots = x^m + {}^1\Sigma_m x^{m-1} + {}^2\Sigma_m x^{m-2} + {}^3\Sigma_m x^{m-3} + \ldots + {}^m\Sigma_m$

Ora, si $a, b, c, d \ldots$ forem eguaes a $\underline{a}$, vem:

$$(x+a)(x+a)(x+a)\ldots = x^m + max^{m-1} + {}^2C_m a^2 x^{m-2} + {}^3C_m a^3 x^{m-3} + \ldots + {}^mC_m a^m$$

Sendo ${}^2C_m = \frac{m.(m-1)}{1.2}$ $\quad {}^3C_m = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ $\quad {}^4C_m = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \ldots$

Basta substituir estes valores na formula geral. (trinomios, quatrinomios, potencias negativas e fraccionarias)

Exemplos: $(1+1)^8 = 1^8 + 8 \times 1 \times 1^7 + \frac{8.7}{1.2}.1^2.1^6 + \frac{8.7.6}{1.2.3}.1^3.1^5 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}1^4.1^4 + \ldots$

$(1-1)^8 = ?$ $\quad (2+2)^{\frac{1}{2}} = ?$ $\quad (1+2)^{-\frac{1}{3}} = ?$

Considerando os exemplos numericos, vemos a symetria do desenvolvimento. As potencias de x decrescem, as de a, crescem, e os coeficientes são symetricos.

Baseado nisso, o mathematico italiano Tartaglia instituiu, baseado na concepção dos numeros triangulares, o triangulo arithmetico, posteriormente atribuido a Pascal.

0 1
1 .... 1 1
2 .... 1 2 1
3 .... 1 3 3 1
4 .... 1 4 6 4 1
5 .... 1 5 10 10 5 1
6 .... 1 6 15 20 15 6 1
7 .... 1 7 21 35 35 21 7 1
8 .... 1 8 28 56 70 56 28 8 1

Passemos agora a considerar a radiciação, que, como já se viu na instituição fundamental, é a formação inversa da potenciação.

Pelo estudo do desenvolvimento das potencias duma expressão qualquer, verificamos desde logo que a operação inversa á elevação ás potencias, fica systematisada depois do conhecimento do binomio de Newton.

Por essa razão o nome do grande geometra inglez deve ser lembrado tambem nesta parte do estudo da algebra. Sejam binomias a elevar a difs potencias

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Para se ter a raiz dum polynomio qualquer, desde que se o considere como o desenvolvimento d'outro polynomio, nas se tem mais que achar a raiz qualquer do 1º termo, que é o 1º termo da raiz procurada. Eleva-se á potencia desejada e subtrae-se do polynomio dado. Divide-se o 1º termo do resto pelo dobro, pelo triplo do quadrado, pelo quadruplo do cubo etc, e o resultado é o segundo termo da raiz. Forma-se a potencia e se subtrae. Divide-se novamente o 1º termo do resto pelo dobro, triplo do quadrado, quadruplo do cubo etc. e o resultado é o 3º termo, e assim por diante.

Ex: $9x^6 + 12ax^5 - 2a^2x^4 - 4a^3x^3 + a^4x^2$ Achar raiz quadr.

Sob o ponto de vista arithmetico, como todos são

compostos de unidades, dezenas, centenas, etc, em soma, consideramol-os como compostos de dezenas e unidades, a- dezenas, + b- unidades, e a regra serve para numeros quaesquer, e para extração de quaesquer raizes.

Si chegarmos a um termo em que uma letra tem expoente menor que $\frac{1}{m}$ do expoente que ella tem no ultimo termo, o polynomio não é potencia exacta do gráo que se considera. (Demons.

Vejamos agora o calculo indeterminado do 1º gráo. Seja o typo mais simples: $ax + by = c$

Vamos procurar desde logo para x e y, as soluções inteiras e positivas, e supor a, b, c nas mesmas condições, porem primos entre si, porque os factores communs se eliminam.

Si entre dois, ha factor commum, não se acham soluções inteiras. Sendo k o divisor: $a'x + b'y = \frac{c}{k}$

a e b sendo primos entre si ha uma infinidade de soluções (visto que ha uma).

Sendo o max. div. comum entre a e b a unidade, existem numeros α e β reaes que

$a\alpha + b\beta = 1$ ou multiplicando por c,

$a(\alpha c) + b(\beta c) = c$ A equação se resolve pelos valores αc e βc de x e de y.

Sendo a, b e c inteiros e positivos, e a e b primos entre si $ax+by=c$ $a(\alpha c)+b(\beta c)=c$

O m.d.c entre a e b é 1

$$ax+by=a(\alpha c)+b(\beta c)$$

$$\frac{x-\alpha c}{b}=\frac{y-\beta c}{a}=\lambda \qquad \begin{cases} x=\alpha c+b\lambda \\ y=\beta c-a\lambda \end{cases}$$

Vejamos o caso particular das desegualdades que transformamos em equações determinadas dentro de certos limites:

$ax>b$ $\qquad ax=b+\alpha$ $\qquad x=\frac{b}{a}+\frac{\alpha}{a}$ $\qquad x>\frac{b}{a}$

$ax<b$ $\qquad ax=b-\alpha$ $\qquad x=\frac{b}{a}-\frac{\alpha}{a}$ $\qquad x<\frac{b}{a}$

— x —

~ 4ª lição da coordenação especial ~

– 11ª lição de algebra –

Resumo do assumpto: Theoria das equações do 2º gráo.

Necessidade da limitação desta theoria ao caso fundamental de uma só equação a uma só incognita. Caso fundamental da equação incompleta; sua resolução por uma simples operação arithmetica de extracção de raiz quadrada, logo após a phase preparatoria caracterisada pela triplice transformação estudada no 1º gráo. Caso geral da equação completa do 2º gráo. Primeira elaboração, preparatoria, analoga ás transformações proprias ao 1º gráo. Resolução do caso completo pela reducção do typo trinomio á forma binomia, pelos dois modos, um historico devido aos arabes e outro dogmatico devido a Viète.

Exame do methodo das indeterminadas de Descartes como originado da concepção geral de Viète. Aplicação do methodo cartesiano ás questões de divisibilidade dos polynomios e condições de potencia perfeita. Assimilação de toda a transformação do segundo gráo ao producto de dois binomios do 1º gráo, donde resulta a explicação da duplicidade de valor da incognita nas equações do 2º gráo.

Das raizes e suas relações com os coefficientes. Caso das raizes imaginarias. Apreciação do caso de egualdade das raizes como origem da noção universal que separa o caso de imaginariedade do caso de realidade, donde surge a ligação normal entre a resolução das equações e a determinação do estado maximo ou minimo.

— x —

A Diophante se devem todos os grandes surtos iniciaes da algebra directa, que elle entregou aos arabes já em plena elaboração, com os maximos problemas indicados ou resolvidos.

A equação do segundo grão foi problema posto pela geometria. A cubatura do tronco de cone, dá um problema do segundo grão a duas variaveis, numa só equação, problema, portanto indeterminado, insoluvel. Quando porem é de raio conhecido uma das duas bases desse tronco, o problema a ser resolvido é o de uma equação do 2º grão. Tal foi o problema que o grande Diophante pae da algebra, se propoz resolver, inspirado pela geometria.

As suas tentativas deviam ter começado pelos casos incompletos do 2º grão, cuja facilidade de resolução lhe deram falsas esperanças quanto ao caso completo, pois que este só foi por elle, passivel de solucão por artificios e tentativas sem nenhum valor theorico, mas simplesmente historico.

Os dois casos incompletos: $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$ foram resolvidos, o primeiro, pondo-se em evidencia x, $(ax + b)x = 0$ em que logo se nos apresentam $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$ No outro caso, pela extração da raiz se obtinha $\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

As tentativas levadas a efeito por Diophante, deram-lhe a impressão de que o caso completo era de dificuldade intransponivel, o que efectivamente foi, sob o ponto de vista dogmatico. Diophante procurou seguir nas suas tentativas, o modelo que lhe era apresentado pela equação binomia, cuja solução se obtinha por uma raiz quadrada.

Então Diophante procurou as condições para que a equação completa do 2º grão, $ax^2 + bx + c$ fosse um quadrado perfeito:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$
$$(\alpha x + \beta)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2$$
$$ax^2 + \beta x + c$$

$$a = 1 \qquad b = 2\beta \qquad c = \beta^2 = \frac{b^2}{4} \longleftarrow \begin{array}{l} a = \alpha^2 \\ b = 2\alpha\beta \\ c = \beta^2 \\ \hline b^2 = 4ac \end{array}$$

Não conseguindo chegar a resultado por este meio, Diophante buscou ainda a diferença entre dois quadrados, um da forma $(\alpha x + \beta)^2$ e outro qualquer, monomio.

$$(mx - n)^2 - r \qquad \begin{cases} m^2x^2 - 2mnx + n^2 - r = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{cases}$$

Comparando estes resultados: $\begin{array}{l} a = m^2 \\ b = -2mn \\ c = n^2 - r \end{array}$ $\qquad \begin{array}{l} m = \sqrt{a} \\ n = -\frac{b}{2m} = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \\ r = n^2 - c = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{array}$

Estes valores, substituidos na equação de condição primitiva, são: $\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$

$$\sqrt{a}.x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}} \quad ; \quad \sqrt{a}\,x = -\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta formula obtida, teve como verificação os problemas praticos de geometria, cujos valores satisfaziam aos ditos problemas.

Relativamente a este assumpto, diz N. Mestre á pg 281 da Synthese Subjectiva:

"Afastando aspirações incompativeis com a nossa fraqueza theorica, a disciplina positiva deduz a 2ª phase algebrica, ao caso duma só incognita, já tratado no ultimo seculo da evolução grega, e logo completado pela elaboração arabe. Esse passo deve normalmente ficar tão memoravel dogmaticamente quanto historicamente, pois que elle introduz duas noções geraes, uma de methodo outra de doutrina, que não podiam surgir antes".

Por não ter conseguido encontrar uma instituição satisfactoria ás equações do 2º grão, deixa Diophante aos arabes, glorias que lhe podiam caber. Entretanto, não a falha do seu genio, mas á situação historica inadequada se deve atribuir o não ter conseguido o grande geometra grego, o seu desideratum.

Convem notar entretanto, que os dois caminhos pelos quaes primeiro os arabes e depois Viète encontraram as soluções historica os primeiros, dogmatica o segundo, do mesmo problema, foram os caminhos pelos quaes Diophante procurou seguir adiante.

O processo dos arabes consiste em resolver o problema pelo quadrado, reduzindo-o á um dos typos incompletos da equação do 2º grão. O processo de Viète é pela reducção ao outro typo incompleto.

Parece assim, que Diophante previo as soluções que os seus successores, mais felizes, conseguiram descobrir.

Vejamos então o processo dos arabes:—

$$ax^2 + bx + c = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \qquad \text{ou} \qquad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Os dois primeiros termos do 1º membro constituem os elementos dum quadrado perfeito que necessita ser completado. $\left[2\cancel{x}y = \frac{b}{a}\cancel{x} \qquad y = \frac{b}{2a}\right]$ Então $\frac{b}{2a}$ é o 2º termo do quadrado. $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este processo é sob o ponto de vista logico, do methodo portanto, de valor inexcedivel, pela sua simplicidade e justeza.

O que vamos ver agora, devido a Viète o remodelados da algebra directa, é superior ao arabe sob o ponto de vista da doutrina porque vae legislar ainda no 3º e no 4º gráos para eliminar um dos termos da incognita.

$ax^2+bx+c=0$ Tomamos a equação de condição:

$$x=y+z$$

$a(y+z)^2+b(y+z)+c=0$ $ay^2+2ayz+az^2+by+bz+c=0$

ou, ordenando, $ay^2+(2az+b)y+az^2+bz+c=0$

Eliminando o termo em y, recahimos no caso da equação incompleta. $2az+b=0$ $z=-\frac{b}{2a}$

$$ay^2+a.\frac{b^2}{4a^2}+b.\frac{-b}{2a}+c=0$$

$$ay^2+\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=0$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

mas, sendo $y=x-z=x+\frac{b}{2a}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Estes tres casos que vimos de estudar, são sob o ponto de vista historico, um lindo espectaculo, pois que successivamente a Humanidade, exigindo dos seus membros soluções para determinados problemas seus, ellas vão surgindo como é possivel, primeiro artificialmente, como Diophante tratou no ultimo seculo da evolução grega, depois expontaneamente, e finalmente dogmaticamente, como só poderia surgir entre os modernos. É este um dos unicos assumptos theoricos que o polytheismo decadente, o monotheismo oriental e a derrocada catholica e o resurgimento scientifico tratam, successivamente, cada um apresentando as soluções compativeis com o seu tempo.

(Formulas derivadas desta para os casos especiaes. Primeira consequencia do methodo das indeterminadas de Descartes para o estabelecimento das condições de divisibilidade e radicialibidade dos polynomios.) (Discussão da formula da equação do segundo gráo, considerando os imaginarios, sempre reductiveis á forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.)

Relações entre coeficientes e raizes.—

Dada a equação $ax^2+bx+c=0$ sob a forma $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ substituimos a incognita por suas raizes:

$$\left.\begin{array}{l} x'^2+\frac{b}{a}x'+\frac{c}{a}=0 \\ x''^2+\frac{b}{a}x''+\frac{c}{a}=0 \end{array}\right\}$$ subtrahindo a 2ª da 1ª vem:

$$x'^2-x''^2+\frac{b}{a}x'-\frac{b}{a}x''+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0$$

$(x'^2-x''^2)+\frac{b}{a}(x'-x'')=0$ $\frac{b}{a}=-\frac{x'^2-x''^2}{x'-x''}$ $\frac{b}{a}=-\frac{(x'+x'')(x'-x'')}{(x'-x'')}$

donde $x'+x''=-\frac{b}{a}$

Substituindo este resultado na equação $x'^2+\frac{b}{a}x'+\frac{c}{a}=0$, vem: $x'^2-(x'+x'')x'+\frac{c}{a}=0$ ou $\cancel{x'^2}-\cancel{x'^2}-x'x''=-\frac{c}{a}$

ou $x'x''=\frac{c}{a}$ Identicos resultados se obtem si se effectuar a soma e o producto das raizes

$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Dos resultados acima obtidos, tiremos os valores de b e de c vem: $b = -a(x' + x'')$ e $c = ax'x''$

Substituindo-os na equação geral:

$$ax^2 - a(x' + x'')x + ax'x'' = ax^2 - axx' - axx'' + ax'x'' =$$
$$= ax(x - x') - ax''(x - x') =$$
$$= a(x - x')(x - x'')$$

Então $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$ este resultado se obtem para equações dum grão qualquer

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')(x - x''')(\ldots$$

(Discutir a equação atravez das relações entre os coeficientes e as raizes.)

Vejamos agora as operações sobre imaginarios, primeiro não conjugados, da forma $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ e $\varphi + \psi\sqrt{-1}$ soma, subtração, multiplicação e divisão. Todas as expressões são imaginarios semelhantes aos primitivos.

Operando agora sobre imaginarios conjugados, da forma $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, obtemos para soma e multiplicação, resultados reais. (Modulo de $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ é $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

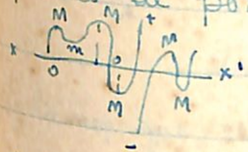
Consequencias $(\sqrt{-1})^{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\ldots}$ periodicidade dos resultados.

Estudemos agora os maxima e minima, que são resultantes dos imaginarios, surgidos da formula do 2º grão.

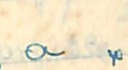
Equala-se a formação a uma variavel dependente e vae-se atribuindo valores á variavel independente, aquem ou alem dos quaes ella, a

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1},$

variavel dependente se torna imaginaria, deixando de ser real. Os limites de realidade são os maxima ou os minima da formação. Destas verificações surgem os pontos singulares ou de descontinuidade em que a formação passa de positiva a negativa sem passar por zero.



O processo natural para obtenção dos valores maxima ou minima é por verificação directa dos valores attribuidos á variavel independente e dos resultados na formação. Esse processo exige formação simples, como o caso $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ em que só ha um maximum, a



Sendo agora a formação $ax^2 + bx + c$, escripta sob a forma $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$ os maxima e minima são os da formação entre parentheses multiplicados depois por a. Fazendo $x = 0$ crescendo positiva e negativamente apreciar os valores (minimo $\frac{4ac - b^2}{4a}$) Este processo é restricto.

Pode-se usar melhor, o seguinte, chamado indirecto:

$ax^2 + bx + c = m$ $\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - m)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4am + (b^2 - 4ac)}}{2a}$

aqui se veem os valores que m póde adquirir para que x seja real. x será real para $m = 0$ ou m positivo $\mp \frac{b}{2a}$ é um minimo positivo, o que se vê da discussão de $4am + (b^2 - 4ac)$ e $4am - (4ac - b^2)$ (Verificar o caso $m = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$)

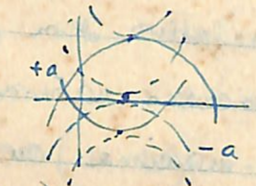
Aqui x só será real para os valores de m que tornarem nulo ou positivo o trinomio $Am^2 + Bm + C$ Ora, esta formação apresenta um maximo ou um minimo algebrico representado pela expressão $-\frac{b^2-4ab}{4a}$ conforme seja a positivo ou negativo.

Podemos resumir a discussão dos maximos e minimos no quadro:

1º $x'x''$ reaes deseguaes

2º $x'x''$ " eguaes

3º $x'x''$ imaginarios



(Sendo a negativo)

Vejamos agora as equações cujas soluções podem ser encontradas na formula do 2º grão, e que se assemelham aos typos completo e incompleto do 2º grão.

Equações binomias: $x^m \pm A = 0$ $x^m = \mp A$ $x = \pm\sqrt[m]{\mp A}$

$\sqrt[m]{\mp A} = a$ $x^m = a^m$ $x^m \mp a^m = 0$ $x^m = a^m y^m$ $a^m y^m \mp a^m = 0$

$a(y^m \mp 1) = 0$ As equações binomias são todas reductiveis a este typo, em que o 2º termo é 1.—

Exercicios $x^3-1=0$ $x^3+1=0$ $x^4-1=0$

x^4+1 (adiciona-se $2x^2$, fica $x^4+2x^2+1=2x^2$ $(x^2+1)^2-2x^2=0$

$(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})=0$) $x^6-1=0$ $x^6+1=0$ substitue-se x por $x\sqrt{-1}$

$x^8-1=0$ $x^8+1=0$ (adiciona-se $2x^4$

Equações trinomias: $ax^{2m}+bx^m+c=0$

fazendo $x^m=z$ $x^{2m}=z^2$ e a equação se reduz a $az^2+bz+c=0$. Tendo-se a resolver em seguida a equação binomia $x^m-z=0$, em que z já se conhece.

Um caso particular deste typo é o das equações biquadradas

$ax^4+bx^2+c=0$ fazendo $x^2=y$, vem: $ay^2+by+c=0$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

(Discussão da equação. Incomensurabilidade)

A expressão a que se chegou póde ser representada por $x=\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

$A=\frac{b}{2a}$ $B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ Transformemos essa expressão

$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ $A\pm\sqrt{B}=x+y\pm2\sqrt{xy}$ $A=x+y$

Vimos que $x'x''=\frac{c}{a}$ e que $x'+x''=-\frac{b}{a}$, de $\sqrt{B}=2\sqrt{xy}$

maneira que podemos ter $z^2-Az+\frac{B}{4}=0$ $B=4xy$ $xy=\frac{B}{4}$

em que z' ou $x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ e z'' ou $y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

É preciso então que A^2-B seja um quadrado perfeito quando se trata de avaliar as raizes reaes da equação biquadrada. Mas, como temos os valores de A e de B, resulta, $A^2-B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$ Então, a transformação que se acabou de ver deve ser levada a efeito quando $\frac{c}{a}$ for quadrado perfeito.

Vejamos finalmente as equações da forma

3º grão $\begin{cases} ax^3+bx^2+bx+a=0 & -1 \\ ax^3+bx^2-bx-a=0 & +1 \end{cases}$ 4º grão $\begin{cases} ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \\ ax^4+bx^3\pm cx^2-bx-a=0 \end{cases}$

São equações reciprocas. Divide-se por x^2 $(x+\frac{1}{x})=z$

$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$ 2ª subst. ±1 divisivel por $(x+1)(x-1)$

Exercicios: Systemas de equações soluveis pela formula do 2º grão

$\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ xy=b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$

3ª lição da coordenação especial

12ª lição de algebra

—x—

Resumo do assumpto: Theoria das equações do 3º grão.

Reducção deste caso ao das equações do 2º grão. Applicação do artificio de Viète como meio preparatorio, convenientemente modificado. Generalisação da concepção de Viète pela decomposição da incognita em duas partes; exame directo da composição da formula obtida.

Discussão especial da formula do 3º grão quanto ás raizes imaginarias. Caso excepcional de egualdade das raizes separando a imaginariedade da realidade. Exame do caso irreductivel; sua resolução baseada na origem geometrica das equações do terceiro grão, consideradas como a trisecção trigonometrica de um angulo cujo seno é dado.

— x —

Como já deixamos visto atráz, quando a algebra se separa das duas fontes donde proveio, dum lado arithmetica, por generalisação, doutro a geometria cujos problemas ficavam postos á algebra, esta começa a ter por destino a resolução das equações.

Este problema, perfeitamente soluvel quanto ao primeiro grão, permite ali a divisão dogmatica: dum lado uma equação a uma incognita, doutro a pluralidade de incognitas a egual numero de equações, caso sempre reductivel ao primeiro.

Dahi porem surge uma nova complicação, é a que diz respeito ao grão, que pela dificuldade de execução inicial, desde o 2º grão, mostra a impossibilidade de solução geral, de um grão qualquer a uma só incognita, como seria de desejar no caso idéal de perfeição algebrica.

Foi pela dificuldade apresentada pela solução directa das equações que a Humanidade desviou-a tratando de obter somente os resultados numericos que as raizes representavam, pela limitação das pesquizas.

O primeiro a publicar a resolução das equações de 3º e 4º grãos, foi Cardan, geometra e physico francez.

Em vista dos processos por que se tem que passar, para a preparação da equação se verifica que só ha verdadeiramente soluvel a equação do 1º grão a que as outras devem ser reduzidas, quando é possivel obter o seu estado explicito.

A resolução da equação do 3º grão é devida a Scipio Ferreo e Nicola Tartaglia, geometras italianos.

O principio é reduzir a equação completa a uma incompleta que possa ser reduzida a typo soluvel pelas formulas de equações de grão inferior.

O methodo mais natural para reduzir ao caso mais simples a equação do 3º grão, é o de Hudde.

Tomemos a equação geral $ay^3+by^2+cy+d=0$ dividindo por a e chamando ás fracções e, f, g etc. vem $y^3+ey^2+fy+g=0$

Empreguemos o artificio de Viète para a instituição da formula da equação do 2º grão, convenientemente modificado.

$y = u - \frac{e}{3}$ vem

$(u-\frac{e}{3})^3 + e(u-\frac{e}{3})^2 + f(u-\frac{e}{3}) + g = 0$ Efectuando:

$u^3 - 3u^2\frac{e}{3} + 3u\frac{e^2}{9} - \frac{e^3}{27} + eu^2 - \frac{2}{3}e^2u + \frac{e^2}{9} + fu - f\frac{e}{3} + g = 0$

$u^3 + (\frac{e^2}{3} - \frac{2}{3}e^2 + f)u + (\frac{e^3}{27} + \frac{e^2}{9} - f\frac{e}{3} + g) = 0$ ou $u^3 + pu + q = 0$

Como se vê, o artificio de Viète no 2º grão deu immediatamente a solução ao passo que aqui elle só preparou a equação por uma pequena simplificação.

Si tentassemos, como foi tentado pelos geometras, a eliminação do termo pu, por identico artificio, cahiriamos de novo no caso completo. Mas a concepção de Viète pode ser generalisada. Façamos $u = y + z$ e substituamos na equação: $(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0$ $y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+py+pz+q=0$

Supondo para z um valor tal que se tenha $3zy + p = 0$

vem $yz = -\frac{p}{3}$ e fica

$y^3 - py - pz + z^3 + py + pz + q = 0$ ou $y^3 + z^3 = -q$

Fazendo ainda $y^3 = y'$ e $z^3 = z'$

$yz = -\frac{p}{3}$ $y^3z^3 = -\frac{p^3}{27}$ $\begin{cases} y'z' = -\frac{p^3}{27} \\ y'+z' = -q \end{cases}$ Chamando u á nova variavel, vem:

$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$ (equação reduzida)

$y^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2}$

$z^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2}$

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$

$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ (formulas de Cardan)

$u = y + z$ Com estes elementos ficamos conhecendo uma unica das tres raizes que a equação comporta. Ora, essa raiz, substituida na equação annulla-a, de maneira que para obtermos as duas outras temos que dividir a equação

$au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ por $u-(y+z)$ que nos dará ainda uma equação do 2º grão, cujas raizes são as duas que faltavam á equação primitiva.

Vejamos como pôde a Humanidade desviar o obstaculo dessa divisão que podia não ser exacta. Chamemos y de m e z de n vem $mn = -\frac{p}{3}$ e $m^3 + n^3 = -q$

$p = -3mn$ e $q = -m^3 - n^3$

Que transforma a equação reduzida em u na seguinte

$u^3 - 3mn.u - m^3 - n^3 = 0$ Esta equação, dividida por $u - m - n$ da para o quociente. $u^2 + (m+n)u + m^2 - mn + n^2 = 0$

Cuja equação resolvida nos dá

$u = -\frac{m+n}{2} \pm \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$ Então, bastará para a completa solução da equação primitiva, substituir m e n pelas suas expressões.

(Discutir as tres raizes quando a raiz quadrada a considerar for positiva, nulla e negativa.)

A aparencia de imaginariedade no ultimo caso se elimina porque $y' = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ soma de duas séries onde os termos em $\sqrt{-1}$ sendo dois a dois eguaes e de signaes contrarios, espontaneamente se eliminam. Da mesma maneira as outras duas raizes.

Este caso, em que a imaginariedade só desaparece pelo desenvolvimento duma série indefinida levou os geometras a considerarem o caso trigonometricamente, como a trisecção dum angulo cujo seno ou coseno é dado.

{6ª lição da coordenação especial}

13ª lição de algebra

Resumo do assumpto: Theoria das equações do quarto grão

Simplificação preliminar do typo completo ao typo incompleto, com o desapparecimento da mais alta das potencias secundarias da incognita, pelo emprego do artificio de Viète. Reducção deste caso aos dos grãos precedentes pelos dois modos equivalentes de decomposição binaria. Exame geral da solução; suas dificuldades essenciaes e a complexidade das formulas que as tornam quasi impraticaveis.

Comparação geral das tres phases essenciais da algebra isolada e directa e que instituem respectivamente a resolução das equações do 2º 3º e 4º grão.

Julgamento das soluções correspondentes que fazem prevêr a inutilidade da extensão dos meios resolutivos actuaes aos grãos superiores.

— x —

Vamos hoje ver a instituição da formula das equações de 4º grão: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ou

$$x^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i = 0$$

$$\left(u - \frac{f}{4}\right)^4 + f\left(u - \frac{f}{4}\right)^3 + g\left(u - \frac{f}{4}\right)^2 + f\left(u - \frac{f}{4}\right) + i = 0 \qquad \text{fazendo } x = u - \frac{f}{4}$$

$$\left(u^4 - 4u^3\frac{f}{4} + 6u^2\frac{f^2}{16} - 4u\frac{f^3}{64} + \frac{f^4}{256}\right) + f\left(u^3 - 3u^2\frac{f}{4} + 3u\frac{f^2}{16} - \frac{f^3}{64}\right) +$$

$$+ g\left(u^2 - 2u\frac{f}{4} + \frac{f^2}{16}\right) + f\left(u - \frac{f}{4}\right) + i = 0$$

$$u^4 + \left(g - \frac{3}{8}f^2\right)u^2 + \left(\frac{f^3}{8} - \frac{gf}{2} + h\right)u - \frac{3f^4}{256} + \frac{gf^2}{16} - \frac{fh}{4} + i = 0$$

Fazendo os coeficientes respectivamente eguaes a n, p e q, a equação se reduz finalmente ao typo incompleto $u^4 + nu^2 + pu + q = 0$

Esta equação a que se chega pelo artificio de Viète, convenientemente modificado, do typo completo, foi resolvido pela primeira vez por Luiz Ferrari, discipulo de Cardan, e consiste em generalisar o artificio dos arabes para a instituição da equação do 2º grão, isto é, pelas condições de quadrado perfeito.

A equação incompleta póde ser escripta da seguinte forma: $x^4 = -nx^2 - px - q$ Somando ao primeiro membro o que lhe falta para que se transforme num quadrado perfeito, fica:

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2yx^2 + y^2 - nx^2 - px - q$$

$$(x^2 + y)^2 = (2y - n)x^2 - px + y^2 - q$$

Estabeleçamos agora, as condições para que o 2º membro seja quadrado perfeito:

$$\frac{p^2}{4} = (2y - n)(y^2 - q)$$

— x —

O resultado acima se obtem pela comparação de

$(u+\beta)^2 = u^2 + 2\beta u + \beta^2$ com $(2y-n)u^2 - pu + y^2 - q$

ou $u^2 - \frac{p}{2y-n}u + \frac{y^2-q}{2y-n}$ $\qquad 2\beta = -\frac{p}{2y-n}$

mas como

$\beta^2 = \frac{y^2-q}{2y-n}$ $\qquad \beta = -\frac{p}{2(2y-n)}$

egualamos os dois $\qquad \beta^2 = \frac{p^2}{4(2y-n)^2}$

valores de β^2, e vem:

$$\frac{p^2}{4(2y-n)^2} = \frac{y^2-q}{2y-n} \quad \text{ou}$$

$$\frac{p^2}{4} = (y^2-q)(2y-n)$$ desenvol-

-vendo: $\frac{p^2}{4} = 2y^3 - 2qy - ny^2 + qn$

ou $2y^3 - ny^2 - 2qy + qn - \frac{p^2}{4} = 0$

$$y^3 - \frac{n}{2}y^2 - qy + \frac{4qn-p^2}{8} = 0$$

Esta equação do 3º grão, nós sabemos resolver.

Obtidos os valores de y substituiamol-os na equação primitiva que nos daria os valores procurados.

Supostos, porem, conhecidos os valores de y substituamol-o na equação primitiva:

$$y^2 - q = \frac{p^2}{4(2y-n)}$$

$$(u^2+y)^2 - \frac{p^2}{4(2y-n)} + pu - (2y-n)u^2 = 0$$

$$(u^2+y)^2 - (2y-n)\left[\frac{p^2}{4(2y-n)^2} - \frac{pu}{(2y-n)} + u^2\right] = 0$$

$$(u^2+y)^2 - \left[(2y-n)^{\frac{1}{2}}\right]^2\left[u - \frac{p}{2(2y-n)}\right]^2 = 0$$

Temos a diferença de dois quadrados, que desdobrada nos dá

$$\left[(u^2+y) - (2y-n)^{\frac{1}{2}}\left(u - \frac{p}{2(2y-n)}\right)\right]\left[(u^2+y) + (2y-n)^{\frac{1}{2}}\left(u - \frac{p}{2(2y-n)}\right)\right] = 0$$

Estas duas equações nos dariam com as suas soluções especiaes, as quatro raizes da equação proposta. Ora, como se vê, y depende da solução de uma equação do 3º grão cujas dificuldades para resolução já nos são conhecidas.

Onde irá, pois, a formula, quando theoricamente se substituir y pelos seus valores, estes dependendo por sua vez de n, p, q cujos valores ainda não são os dos coeficientes da equação completa?

Vejamos agora, o methodo de Descartes, que Nosso Mestre considera dogmaticamente superior ao precedente, tendo surgido depois daquelle.

Dada a equação $u^4 + nu^2 + pu + q = 0$, procuremos as condições a que devem satisfazer os coeficientes da formação $u^2 + fu + g = 0$ para que aquella seja divisivel por esta.

Sendo o dividendo do 4º grão e o divisor do 2º o quociente tambem será do 2º grão.

Representando por $x^2 + hx + k$ este quociente, e sendo h e k indeterminados, vem:

$$x^4 + nx^2 + px + q = (x^2 + fx + g)(x^2 + hx + k) =$$
$$= x^4 + (f+h)x^3 + (fh + k + g)x^2 + (fk + gh)x + gk$$

Comparando as equações para a identificação, vem:

$f + h = 0 \qquad fh + k + g = n \qquad fk + gh = p \qquad gk = q$

Da 1ª tiramos $h = -f$, o que indica signaes contrarios nos coefficientes de x.

2º $\quad k + g - f^2 = n \qquad$ 3º $\quad fk - gf = p \quad$ ou $\quad (k-g)f = p$

4º $\quad gk = q \quad$ donde tiramos:

a) $k + g = n + f^2$ (tirado da condição 2º)

b) $k - g = \frac{p}{f}$ (" " " 3ª)

c) $k = \frac{p}{f} + g$ (tirado de b)

d) $g = n + f^2 - k$ (tirado de a)

Substituindo o valor de g da equação d, em a equaç. c, fica $\quad k = \frac{p}{f} + n + f^2 - k \quad$ ou $\quad 2k = \frac{p}{f} + n + f^2$

$$k = \frac{p}{2f} + \frac{n+f^2}{2}$$

Tirando o valor de g da equação b,

$$g = k - \frac{p}{f} = \frac{p}{2f} + \frac{n+f^2}{2} - \frac{p}{f} = \frac{n+f^2}{2} - \frac{p}{2f}$$

Basta se ter f para determinar k e g. Mas, como $gk = q$ (equação de condição 4ª)

Substituindo g e k pelos seus valores, obtemos finalmente: $\quad f^6 + 2nf^4 + (n^2 - 4q)f^2 - p^2 = 0$

Esta equação final do 6º grão é reductivel á do 3º correspondente pondo-se a seguinte condição:

$$f^2 = z$$

Supondo agora f conhecido, substituimos g e k pelos seus valores nas duas equações do 2º grão que, finalmente resolvidas nos dão as raizes procuradas da equação de 4º grão.

(Comparação dos resultados obtidos com as soluções das equações do 2º, 3º e 4º grãos, donde se vê que, mesmo sendo possivel, a equação de 5º grão que tem resistido ás tentativas dos geometras, resultaria inutil pela inextricabilidade das formulas.)

Julgando pelos resultados parciais, e comparando-os vemos a nossa fraqueza theorica para resolução dos problemas ideaes mais simples. Isso nos deve levar a uma profunda humildade, em vista da nossa impotencia, em logar de contribuir para o augmento da nossa vaidade e do nosso orgulho.

∞ 7ª lição da coordenação especial ∞
14ª lição de algebra
Resumo do assumpto: Theoria das progressões geometricas. Classificação das progressões, primeiramente segundo o grão, depois segundo o modo de subordinação mutua de seus termos consecutivos. Subdivisão das ordens em classes, caracterisadas pelo modo algebrico da combinação correspondente. Exame preliminar dos casos da soma de potencias inteiras e positivas das series arithmeticas e da dos numeros figurados, como resultantes da lei binomial e como complemento aos estudos elaborados em arithmetica.
Estudo do caso mais simples das progressões geometricas onde cada termo é formado do precedente multiplicado pela base. Solução dos problemas fundamentaes relativos á determinação do termo geral, á interpelação e á somação dos termos. Exame da instituição da lei de sommação unicamente possivel pelo emprego do artificio devido a Archimédes, para este caso mais simples. Applicação da lei de sommação ao caso da progressão decrescente donde surge o primeiro exemplo de limite; determinação directa da formula da fracção geratris correspondente pela applicação da regra ao caso das dizimas periodicas.
Apreciação do calculo exponencial, que surge das progressões geometricas. Resolução destas equações, nos unicos casos referidos aos tres primeiros pares de elementos algebricos, por intermedio dos logarithmos.

— x —

Terminamos, então, o calculo das relações directas no que dizia respeito á resolução de equações. Vamos agora iniciar o estudo das theorias complementares, que são, a das progressões, dos logarithmos e exponenciaes e a das séries.

Comecemos, embora pertençam ao dominio arithmetico, a ver as progressões por diferença, que servem, naturalmente de base ás estudo das progressões por quociente.

Progressões arithmeticas - são séries de numeros em que cada um se forma do precedente algebricamente somado á razão.

Progressões geometricas - são séries de numeros em que cada um se forma do precedente multiplicado ou dividido pela razão.

Razão é pois o elemento constante, em cada progressão, de que ella depende.

$\div a.b.c.d.e\ldots\ldots i.j.k.l$

$\div\!\!\div A:B:C:D:E:\ldots:I:J:K:L$

Nas progressões arithmeticas $b-a=c-b$ ou $b=\frac{a+c}{2}$

Nas geometricas: $\frac{B}{A} = \frac{C}{B}$ ou $B = \sqrt{AC}$

Nisto reside a distincção essencial entre as duas progressões

Dada a progressão por diferença, os termos..

$b = a + r$ $\quad c = b + r = a + r + r = a + 2r$ $\quad d = c + r = a + r + r + r = a + 3r$ $\quad e = d + r = a + r + r + r + r = a + 4r$

Um termo l, qualquer $l = a + (n-1)r$

$(n-1)$ é o nº. de termos que precedem l. (Valores consequentes de a, n, r)

Vejamos o caso da inserção de meios diferenciaes

Seja .. $\div \overset{m}{a.b}.c....$ Insiramos m meios – Os termos serão $m + 2$, porque se contam a e b então $n = m+2$ r, então, fica com o valor $r = \frac{b-a}{m+1}$

A soma dos termos equidistantes dos extremos é constante e é a mesma e egual á soma dos extremos.

$\div a.\overbrace{b.c......v}^{n}....\overbrace{y......j}^{n}.k.l$

$v = a + nr$
$y = l - nr$
$v + y = a + l$

$S = a + b + c + ... + j + k + l$
$S = l + k + j + ... + c + b + a$
$2S = (a+l) + (b+k) + ... + (l+a)$

$2S = (a+l)n$ $\quad S = \frac{a+l}{2}.n$

Quando se tem as progressões geometricas:

$\div A : B : C : D : ..... : J : K : L$ $\quad R$ (razão)

$B = AR$ $\quad C = BR$ $\quad D = CR$

$C = ARR$ $\quad D = ARRR$

$C = AR^2$ $\quad D = AR^3$ $\quad L = AR^{n-1}$ (comparar)

Inserção de meios geometricos: $R = \sqrt[n-1]{\frac{L}{A}}$

Sendo m meios $n = m + 2$ e $R = \sqrt[m+1]{\frac{B}{A}}$

O producto de dois termos equidistantes dos extremos é sempre egual ao producto dos extremos:

$\div A : \overbrace{B : C : ..... : v}^{n} : ..... : \overbrace{y : ..... J}^{n} : K : L$

$v = AR^n$
$y = \frac{L}{R^n}$ $\quad vy = AL$

$P = A \times B \times C \times ..... \times J \times K \times L$
$P = L \times K \times J \times ..... \times C \times B \times A$
$P^2 = AL \times BK \times ..... \times KB \times LA$

$P^2 = (AL)^n$ $\quad P = \sqrt{(AL)^n}$

A soma dos termos se obtem:

$\div A : AR : AR^2 : AR^3 : .... AR^{n-1}$ $\quad S = A(1 + R + R^2 + ... + R^{n-1})$

A expressão que fica dentro do parenthesis é o resultado da divisão de $\frac{R^n - 1}{R - 1}$ então $S = A\frac{R^n-1}{R-1}$

(discutir)

Da discussão da formula resulta que si $R = 1$ $S = \frac{0}{0}$ mas a indeterminação é apenas apparente, porque $R^n - 1 = (R-1)(1 + R + R^2 + ... + R^{n-1})$ e $S = A(1 + R + R^2 + R^3 + ... + R^{n-1})$

Fazendo agora $R = 1$, $S = A(1 + 1 + 1 + ... + 1) = An$

Por meio da formula da soma de termos, podemos ter a do limite da soma dos termos duma progressão por quociente $S = \frac{A(1-R^n)}{1-R}$ (decrescente)

$S = \frac{A - AR^n}{1-R}$ ou $S = \frac{A}{1-R} - \frac{AR^n}{1-R}$

R sendo menor de que a unidade, elevada a uma quantidade n, torna-se infinitamente pequeno o seu valor, e menor ainda quando multiplicado por a. Dividida por quantidade finita e bem definida $1-R$, a expressão se aproxima de zéro. que é o limite necessario. Quando o 2º termo se anula, o limite da soma de termos será $S = \frac{A}{1-R}$

Como aplicação da lei, podemos procurar o limite duma dizima periodica, limite que deve ser a geratriz. Seja: $0,25\,25\,25\,25\,25 \ldots$

$\div\ 0,25 + 0,00\,25 + 0,0000\,25 + \ldots$ A razão é $0,01$

Então $\lim S = \frac{0,25}{1-\frac{1}{100}} = \frac{0,25}{\frac{99}{100}} = \frac{25}{99}$

(Caso dos numeros figurados)

(series $1.2.3.4 \ldots$ $1.4.7.10 \ldots$) (Comparação das formulas obtidas nas progressões geometrica e arithmeticas)

Passemos agora ao estudo do calculo exponencial. cujas formações já passaram sob nossas vistas na Instituição fundamental. Uma formação exponencial é sempre artificial como mostrou A. Comte, e surgio pa inversão de base e expoente, da formação potencia.

Em logar da base variavel, o expoente é que se torna variavel, e fixa a base.

$a^x = b$ $\quad a^{b^x} = c$ $\quad a^{b^{c^x}} = d$ $\quad$ (1ª, 2ª, 3ª, 4ª ordem etc)

Equações exponenciaes são as que conteem formações exponenciaes $a^x + b^{4+3x} + c^x = 0$

As exponenciaes soluveis pela algebra directa são as que teem um, dois e até 3 termos, mas estas só excepcionalmente.

Provemos primeiro a continuidade da formação $a^x = b$ Seja $x = x_0$ e demos um acrescimo h, á variavel $a^{x_0+h} = a^{x_0} \times a^h$. subtrahindo a formação primitiva, $a^{x_0} \times a^h - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1)$ Si h tende para zero, no limite $a^0 = 1$ e a formação se anula.

Discutir $x \begin{cases} -\infty \\ 0 \\ +\infty \end{cases}$ $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \infty \end{matrix}$

Para a solução da exponencial mais simples, a um só termo $a^x = b$, tem-se $\begin{cases} a > 1 \\ a > 1 \\ a < 1 \\ a < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} b > 1 \\ b < 1 \\ b > 1 \\ b < 1 \end{cases}$

Resolvamos este primeiro caso pelo processo devido a Lagrange, ou dos desenvolvimentos em frações continua, ou de aproximações successivas.

x estando entre n e $n+1$ $\quad a^n < a^x < a^{n+1}$

ou $x = n + \frac{1}{y}$ então $a^{n+\frac{1}{y}} = b$ ou $a^n \times a^{\frac{1}{y}} = b$

$a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^n}$ $\quad a = \left(\frac{b}{a^n}\right)^y$ ou $c^y = a$ outra exponencial derivada da primeira, em que $\frac{b}{a^n} = c > 1$

Consideremos agora $p < y < p+1$

$y = p + \frac{1}{z}$ $\quad c^{p+\frac{1}{z}} = a$ $\quad c^p \times c^{\frac{1}{z}} = a$ $\quad c^{\frac{1}{z}} = \frac{a}{c^p}$

$c = \left(\frac{a}{c^p}\right)^z$ donde $d^z = c$

Fazendo de novo $q < z < q+1$, $d^z = d^{q+\frac{1}{t}}$

$d^{q+\frac{1}{t}} = c$ $\quad d^q \times d^{\frac{1}{t}} = c$ $\quad d^{\frac{1}{t}} = \frac{c}{d^q}$ $\quad d = \left(\frac{c}{d^q}\right)^t$

$e^t = d$

Fazendo ainda $r < t < r+1$ $\quad e^{r+\frac{1}{u}} = d$

$e^r \times e^{\frac{1}{u}} = d$ $e^{\frac{1}{u}} = \left(\frac{d}{e^r}\right)$ $e = \left(\frac{d}{e^r}\right)^u$ $f^u = e$

Assim,

$a^x = b$ $x = n + \frac{1}{y}$ $x = n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{s}}}}}$

$c^y = a$ $y = p + \frac{1}{z}$

$d^z = c$ $z = q + \frac{1}{t}$

$e^t = d$ $t = r + \frac{1}{u}$

$f^u = e$ $u = m + \frac{1}{s}$

⋮

Seja $9^x = 6$ $9^0 = 1$ $9^1 = 9$

$9^{\frac{1}{y}} = 6$ $6^y = 9$ $6^1 = 6$ $6^2 = 36$

$6^{1+\frac{1}{z}} = 9$ $6^1 \times 6^{\frac{1}{z}} = 9$ $6^{\frac{1}{z}} = \frac{3}{2}$ $6 = \left(\frac{3}{2}\right)^z$

Resultado $9^x = 6$ $x = 0 + \frac{1}{y}$

$6^y = 9$ $y = 1 + \frac{1}{z}$ $x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{t \dots}}}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^z = 6$ $z = 4 + \frac{1}{t}$

$\left(\frac{6}{5}\right)^\alpha = \frac{3}{2}$ $t = 4 + \frac{1}{\alpha}$

Ha outros typos soluveis alem do $a^x = b$, como por exemplo $3^{2x - 3x + 5} = 19683 = 3^9$

$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ $(a^x = y)$

⋮

$\left(\frac{3}{2}\right)^z = 6$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{4 + \frac{1}{\alpha}} = 6$

$5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 6$

81   $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{6}{5}$

$\frac{3}{2} = \left(\frac{6}{5}\right)^\alpha$

81 16

80 5

~ 3ª lição da coordenação especial ~

15ª lição de algebra

Resumo do assumpto: Instituição numerica e algebrica dos logarithmos. Origem arithmetica dos logarithmos e sua natural incorporação ao calculo das relações. Apreciação numerica dos logarithmos como o mais poderoso meio de simplificar o conjuncto das operações arithmeticas. Apreciação do officio algebrico dos logarithmos na resolução, nos casos aplicaveis das equações exponenciaes. Exame especial das propriedades dos logarithmos e sua aplicação conveniente ao caso da resolução das equações exponenciaes.

— × —

A theoria dos logarithmos foi descoberta por Nepper, no XIII° século, e completada e aperfeiçoada por Briggs, ambos geometras inglezes. Esta theoria entretanto, como vimos, foi presentida por Archimedes, que não a instituio então, porque as necessidades sociaes não o impeliam para essas pesquizas.

Nepper instituio os logarithmos com o fim de facilitar os calculos numericos, reduzindo as 6 formações algebricas existentes nas 4 primeiras.

Foi muito depois que se descobrio ser a formação logarithmica a inversa da exponencial

Os problemas imediatos que surgem, são:

1º Dado um numero achar o seu logarithmo, em base dada. 2º Dado o logarithmo achar o numero

A definição arithmetica dos logarithmos é:

"Numeros em progressão por diferença começando em zero, correspondendo a numeros em progressão por quociente começando em um."

Chamando A o primeiro termo da progressão por quociente, R a razão, a e r respectivamente 1º termo e razão da progressão por diferença.

L, L' dois termos cujo producto LL' corresponde á soma $l+l'$ da progressão por diferença.

$$\div \xleftarrow{\quad k \quad} \quad \xleftarrow{m} L \xrightarrow{m'} L' \ldots\ldots LL' \qquad LL' = AR^k$$

$$\div \xleftarrow{m} l \ldots l' \ldots \xrightarrow{k} l+l' \qquad l+l' = a + rk$$

$$L = AR^m \qquad L' = AR^{m'}$$

$$AR^k = A^2R^{m+m'} \qquad LL' = A^2R^{m+m'}$$

$$l = a + mr \qquad l' = a + m'r$$

$$a + rk = 2a + (m+m')r \qquad l+l' = 2a + (m+m')r$$

$$\begin{cases} AR^k = A^2R^{m+m'} \\ a + rk = 2a + (m+m')r \end{cases} \qquad \begin{cases} R^k = AR^{m+m'} \\ rk = a + (m+m')r \end{cases}$$

$$A = \frac{R^k}{R^{m+m'}} = R^{k-(m+m')}$$

$$a = rk - (m+m')r = r[k - (m+m')]$$

fazendo $k - (m+m') = 0$ vem

$$A = R^0 = 1$$

$$a = r \times 0 = 0$$

Donde se conclue que logarithmo de 1 é sempre zero.

Então:

$$\div 1 : R : R^2 : R^3 : \ldots\ldots R^n$$

$$\div 0 . r . 2r . 3r . \ldots . nr$$

Base dum systema é o nº. que corresponde, na progressão por quociente, a 1 na progressão por diferença.

A definição de logarithmo, sob o ponto de vista algebrico, é: Expoente a que se deve elevar a base para se ter todos os numeros possiveis.

Assim $2^u = 8$, 3 é o logarithmo de 8 num systema de base 2. Então logarithmo de um numero é o expoente a que se deve elevar a base para se ter esse nº.

O systema de Nepper se define pela exponencial e^u que define a curva hyperbolica $e = 2,718281828\ldots$

Sejam dois systemas, litteral e numerico

$$\begin{cases} \div 1 : B : B^2 : B^3 : \ldots B^n \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . \ldots n \end{cases} \qquad \begin{cases} \div 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots 10^n \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . \ldots n \end{cases}$$

Sabemos que o expoente a que se deve elevar a base é o logarithmo desse numero.

Basta resolver a exponencial $B^u = N$

Vejamos as propriedades dos logarithmos

1ª Propriedade:- Logarithmo do producto é igual á soma dos logarithmos dos factores.

$$\log. a.b.c.d = lga + lgb + lgc + lgd$$

Tomemos os dois termos da ∺ L e L' cujo producto é P tomemos l e l' da ÷ e chamemos p sua soma.

Sabemos que $\begin{cases} l = lg\,L \\ l' = lg\,L' \end{cases}$ $p = lg\,P$

mas $\begin{cases} LL' = P \\ l + l' = p \end{cases}$ $lg\,LL' = lg\,P = p = l + l' = lg\,L + lg\,L'$

Algebricamente: $lg\,a.b.c.... = lg\,a + lg\,b + lg\,c + ...$

Sejam $x, x', x''....$ logarithmos de $a, b, c.$ no systema de base B. Por definição $B^{x} = a$ $B^{x'} = b$ $B^{x''} = c$

ou $B^{x}.B^{x'}.B^{x''} = abc....$ ou $B^{x+x'+x''} = abc...$

$x + x' + x'' = lg_B\,abc.... = lg_B\,a + lg_B\,b + lg_B\,c$

2ª Propriedade:- Logarithmo do quociente é egual ao logarithmo do dividendo menos o do divisor. $lg\frac{a}{b} = lg\,a - lg\,b$

Ora $\frac{a}{b} = q$ $a = bq$ $lg\,a = lg\,b + lg\,q$

$lg\,q = lg\,a - lg\,b$ ou $lg\frac{a}{b} = lg\,a - lg\,b$

algebricamente: x' e x'' logarithmos de a e b

vem $x' = lg_B\,a$ $x'' = lg_B\,b$ $B^{x'} = a$ $B^{x''} = b$ ou

dividindo $B^{x'-x''} = \frac{a}{b}$ mas $x' - x'' = lg_B\frac{a}{b} = lg\,a - lg\,b$

3ª Propriedade: Log duma potencia é egual ao expoente multiplicado pelo logarithmo da base.

$lg\,a^m = m\,lg\,a$ Ora $lg\,a^m = lg(a \times a \times a \times a...) = lg\,a + lg\,a + ... = m\,lg\,a$

algebricamente: $lg\,a^m = m\,lg\,a$ $x' = lg\,a$ $B^{x'} = a$

elevando a m $B^{mx'} = a^m$ $mx' = lg_B\,a^m$

$\therefore m\,lg_B\,a = lg_B\,a^m$

4ª propriedade: O logarithmo duma raiz é o logarithmo da expressão sob radical, dividida pelo indice.

$lg\sqrt[m]{a} = \frac{lg\,a}{m}$ $r = \sqrt[m]{a}$ $r^m = a$ $lg\,a = m\,lg\,r$

$lg\,r = \frac{lg\,a}{m}$ $lg\sqrt[m]{a} = \frac{lg\,a}{m}$

algebricamente:- $lg\sqrt[m]{a} = \frac{lg\,a}{m}$ $x' = lg_B\,a$

$B^{x'} = a$ $\sqrt[m]{B^{x'}} = \sqrt[m]{a}$ $B^{\frac{x'}{m}} = \sqrt[m]{a}$ $\frac{x'}{m} = lg_B\sqrt[m]{a}$

$\frac{lg\,a}{m} = lg_B\sqrt[m]{a}$

— x —

Seja agora, a estudar as aplicações dos logarithmos e a discussão da sua constituição.

Systema $\begin{cases} \frac{1}{R^n} .... : \frac{1}{R^2} : \frac{1}{R} : 1 : R : R^2 : R^3 : .... B .. R^n \\ -nr .... -2r . -r . 0 . r . 2r . 3r ..... 1 ... nr \end{cases}$

Discutir $n = \infty$ mesmo para base 10 (Caracteristica e mantissa)

Transformação de subtracções de logarithmos em somas, pelos cologarithmos $lg\frac{m}{n} = lg\,m - lg\,n = lg\,m + colg\,n$

$lg\frac{1}{n} = lg\,1 - lg\,n = 0 - lg\,n = 0 + lg\frac{1}{n} = 0 + colg\,n$

Cologarithmo é o logarithmo do inverso.

Regra: Cologarithmo de um numero — soma-se um á caracteristica, troca-se o signal da soma e toma-se complemento para um da mantissa.

(Calculo exponencial pelos logarithmos $a^x = b$, $lg\,a^x = lg\,b$

$x\,lg\,a = lg\,b$ $x = \frac{lg\,b}{lg\,a}$ Ex: $\sqrt[7]{\left[\frac{5 \times 12 \times 9}{\sqrt{2} \times 3^5}\right]^3}$

— x —

Determinemos agora o valor da base de logarithmos neperianos ou hyperbolicos, $e = 2,71828182 8$

$$\div 1 : (1+q) : (1+q)^2 : (1+q)^3 : (1+q)^4 : \ldots\ldots : (1+q)^n$$
$$\div 0 . \; Mq : 2Mq : 3Mq : \ldots\ldots\ldots \; nMq$$

$Mq = r$ $\quad M = \frac{r}{q}$ $\quad$ Base neperiana $Mq = 1$

$(1+q)^n$ $\quad M = \frac{1}{q}$

$\frac{1}{q} = n$

$$(1+q)^{\frac{1}{q}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}\ldots$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n-1}{2n} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.n^2} + \ldots$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{2.3} + \ldots$$
$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots = 2,718281828\ldots$$

~ 9ª lição da coordenação especial ~

16ª e ultima de algebra

Resumo do assumpto: Theoria geral das séries. Exame
historico da origem dos desenvolvimentos indefi-
nidos, primeiro na divisão, depois na extração
das raizes, e finalmente na lei binomial
de Newton, successivamente extendida aos
expoentes subtractivos e fraccionarios. Derivação
indirecta, pela aplicação da lei binomial, do
desenvolvimento exponencial e da série loga-
rithmica. Inconvenientes deste processo. Insti-
tuição normal das séries exponencial e logari-
thmica pelo emprego do methodo cartesiano dos
Coeficientes indeterminados, uso algebrico da série
exponencial na dedução do termo geral do
desenvolvimento da potencia de um polyno-
mio qualquer, instituido por Lagrange. Uso nu-
merico das séries exponencial e logarithmica
para avaliação das formações consideradas, no
Caso da convergencia.

~ Resumo do curso e conclusão ~

Vamos hoje estudar a ultima theoria complementar da
algebra directa. Essa theoria é a das séries.
Dogmaticamente o seu estudo se divide em duas

partes, conforme os dominios de sua acção; uma é essencialmente algebrica, a outra numerica ou de avaliação.

Série é toda a expressão de numero ilimitado de termos que se succedem de accordo com uma lei qualquer.

O estudo da lei segundo a qual os termos se vão successivamente creando, quer dizer, o desenvolvimento da série, é o dominio algebrico dessa theoria.

O estudo da avaliação numerica da expressão é em que consiste o estudo arithmetico da theoria.

As primeiras idéas de serie que surgiram, foram na divisão, quando ella não se dando exactamente, o numero de termos do quociente crescia indefinidamente.

Em seguida da radiciação, nas mesmas condições, quando a expressão não era potencia perfeita. Finalmente a lei binomial de Newton veio sanar essas dificuldades, (da radiciação) pela elevação a qualquer potencia de qualquer expressão, com avaliação numerica sempre possivel e satisfactoria.

A primeira idéa de série no seu terreno proprio é devida a Mercator, geometra e astronomo italiano. Ella provinha da divisão de 1 por $a + bx$, resultando para quociente, a série:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \frac{b^3}{a^4}x^3 + \ldots\ldots$$

Por essa série de Mercator, póde-se conseguir o desenvolvimento da formação transcendente: $\frac{1}{a+\operatorname{sen} x}$ e ainda $\frac{x+1}{x-1}$ e de $\frac{a}{b+cx}$, etc...

A segunda maneira de se obter desenvolvimentos em série, é a de Newton, pela raiz $\sqrt{a^2+x^2}$ ou melhor pela potencia $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \ldots\ldots$

Este meio subentendeu o precedente, porque a divisão $\frac{1}{a+bx} = (a+bx)^{-1}$ e $\frac{b}{a^2+bx} = b(a^2+bx)^{-1}$ etc..

Como se vê, mesmo no dominio proprio ás séries, ellas surgem primeiro como resultados de divisão, e depois como resultado da radiciação ou pelo desenvolvimento de Newton.

O methodo, porem, mais fecundo é o de Descartes, ou dos coeficientes a determinar.

$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$ que consiste na verificação das modificações da formação para as da variavel.

Vejamos as duas aplicações mais importantes, a primeira na obtenção do desenvolvimento á formação exponencial, a segunda, no desenvolvimento á logarithmica.

1) $a^x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$

para $x=0$ $a^0 = A$ absurdo. Para haver compatibilidade, o desenvolvimento tem de ter a forma:

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \quad \text{(para } x=0\text{)} \quad a^0 = 1$$

duplicando a variavel:

$$a^{2x} = 1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 + \dots$$

$$(a^x)^2 = 1 + 2Bx + B^2x^2 + 2Cx^2 + C^2x^4 + 2BCx^3 + 2Dx^3 + 2BDx^4 + 2Ex^4$$

$$= 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + (C^2 + 2BD + 2E)x^4 \dots$$

$$1 + 2Bx + 4Cx^2 + 8Dx^3 + 16Ex^4 + \dots = 1 + 2Bx + (B^2 + 2C)x^2 + (2BC + 2D)x^3 + \dots$$

$2B = 2B$ $\qquad B = B$ $\qquad D = \frac{B^3}{2.3}$

$4C = B^2 + 2C$ $\qquad C = \frac{B^2}{2}$ $\qquad E = \frac{B^4}{2.3.4}$ etc.

$8D = 2BC + 2D$

$16E = C^2 + 2BD + 2E$ $\qquad$ então:

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2}x^2 + \frac{B^3}{2.3}x^3 + \frac{B^4}{2.3.4}x^4 + \dots$$

Se se quizer determinar B, faz-se $x = \frac{1}{B}$

$$a^{\frac{1}{B}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots$$

É exactamente o desenvolvimento que nos dá o valor de e – Base Neperiana, que haviamos anteriormente determinado.

Um dos resultados do desenvolvimento em série da formação exponencial, é devido a Lagrange e consiste em deduzir da série exponencial a lei geral do desenvolvimento da potencia dum polynomio qualquer.

Para essa determinação, faz-se $x = i\,(p+q+\dots)$

No caso ainda da base neperiana, $a^{\frac{1}{B}} = e$ $\quad lg\,a^{\frac{1}{B}} = lg\,e$

$\frac{1}{B}\,lg\,a = lg\,e$ $\qquad \frac{1}{B} = \frac{lg\,e}{lg\,a}$ $\quad$ ou $\quad B = \frac{lg\,a}{lg\,e}$ $\quad$ obtido o valor de B, basta substitui-lo.

Fazendo em seguida $a = e$, obtem-se o desenvolvimento de e^x em formação do seu log. neperiano.

Vejamos agora, a formação logarithmica.

$$lg\,x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

fazendo $x = 0$ $\quad lg\,0 = A$ $\quad$ absurdo

fazendo $lg\,x = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$ $\quad$ para $x=0$ $\quad lg\,0 = 0$

novo absurdo. Consideremos então $1+x$ em logar de x, vem $\quad lg(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$

1ª modificação $\quad lg(1+x)^2 = 2\,lg(1+x) = lg(1 + 2x + x^2)$

$$2\,lg(1+x) = 2Ax + 2Bx^2 + 2Dx^3 + 2Cx^4 + \dots$$

$$lg(1 + 2x + x^2) = A(2x + x^2) + B(2x + x^3)^2 + C(2x + x^2)^3 + \dots$$

$$= 2Ax + Ax^2 + 4Bx^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + \dots$$

$$= 2Ax + (A + 4B)x^2 + (4B + 8C)x^3 + \dots$$

$$= 2Ax + (A + 4B)x^2 + (4B + 8C)x^3 + \dots$$

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Dx^3 + 2Cx^4 + \dots = 2Ax + (A + 4B)x^2 + (4B + 8C)x^3 + \dots$$

$A = A$ $\qquad B = -\frac{A}{2}$ $\qquad C = \frac{A}{3}$ $\quad$ etc...

$$lg(1+x) = A\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

que depende da base

Falta somente determinar A que depende da base de logarithmos adoptada, e o logarithmo da base é sempre 1. Pela lei de Newton se póde obter tambem a série exponencial e mesmo a logarithmica. Para obtenção da primeira faz-se $a = 1+b$ e desenvolve-se $(1+b)^x$

Neste systema ha o inconveniente de se ter por coeficientes, formulas indefinidas, e por isso não se póde obter o modo de dependencia que ha entre elles.

Esgotado o estudo das séries sob o ponto de vista das relações, da algebra directa, passamos á verificação da avaliação numerica. A avaliação deve poder ser levada ao grão de exactidão que se deseje. Mas isso só é possivel quando a série é convergente, isto é, quando a soma dos elementos do desenvolvimento se aproxima indefinidamente dum limite fixo.

A série é pois, divergente, quando para numeros cada vez maiores de termos, a soma não converge para nenhum limite.

Na progressão geometrica $1 . x . x^2 . x^3 : .. x^n$, n crescendo, série divergente para $\begin{cases} x > 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

A série é, porem, convergente quando $x < 1$

Em $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ a série decresce para n cada vez maior, porem a sua soma cresce sempre.

Vejamos agora, finalmente, as duas condições para que uma série seja convergente, e portanto numericamente avaliavel.

a) Uma série de termos positivos é convergente quando a relação $\frac{u_n+1}{u_n}$ entre dois termos consecutivos, tende para limite menor que a unidade

$$\frac{u_n+1}{u_n} < l \quad ; \frac{u_n+2}{u_n+1} < l \; ; \; \frac{u_n+3}{u_n+2} < l$$

donde, e por mais forte razão:

$$u_n + 1 < l u_n \quad ; \quad u_n + 2 < l^2 u_n \; ; \; u_n + 3 < l^3 u_n$$

Donde ainda $l u_n : l^2 u_n : l^3 u_n : l^4 u_n : \ldots$

b) Numa série de termos positivos e negativos, a convergencia se dá quando seus termos decrescem.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - + \ldots$$

$$u > u_2 > u_3 > u_4 > u_5 > \ldots$$

Assim a logarithmica

$$lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

tendo por condição ser x menor que 1.

Terminamos o nosso curso de algebra directa,

o instrumento logico de que a mathematica nas suas partes geometrica e mecanica necessitavam para a sua constituição.

Rezumo, julgamto. e concluzões

"Uma elite de sonhadores quis fazer a golpes de tinta e no elance fugidío do relampago, que um povo saído dos horrores da escravidão, e analfabeto, compreendesse a liberdade dentro da ordem e constituisse o país do ~~pr~~ progresso e das grandes luzes.

"O sonho acabou num acordar macabro: os autores dos ideáis generozos, ou prezos nas algemas inquebrantaveis da indiferença publica, ou lançados nos altares do civismo para não estorvarem as hienas no trabalho de refocilo nas carnes da Patria que não sabem amar!

"Benjamin Constant e Floriano seríam hoje, si vivos, ou peregrinos a fazer nova propaganda republicana em terra de autocracía canibalesca, ou revolucionarios a defender o restabelecimento das velhas tradições de honra e civismo, que a audacia de aventureiros de poucas letras e a indiferença geral de um povo sem instrução e ainda sem fome, lançou para a fossa das inutilidades.

"De todos os cantos é a mesma angustia!

"Quo vadis - Patria?

Cel. David Carneiro

Quando, depois do levante federalista de 1892 e da revolta da esquadra em 1893, terminaram as lutas politicas ~~com as arm~~ com as armas nas mãos, no terreno das cartadas decizivas, de vida ou morte; quando a ordem saiu vitorioza pelas armas dando ao país alguns decenios de páz e estabilidade; quando, com o sacrificio de alguns heróis admiraveis o Marechal Floriano sentiu-se senhor da situação e viu a necessidade de selar a vitoria, sufocando em sangue ~~e~~ ~~com~~ exemplos memoraveis o crime de rebelião contra a ordem e a legalidade da Republica que havia pouco nacera; quando enfim, os valentes soldados republicanos da velha guarda, ardorozos e sinceros ensarilharam armas, ~~aproximaram-se~~ do Marechal de Ferro que vencera só se aproximaram as hienas, dezejozas de mostrar na páz uma valentia sanguinaria que não tiveram na guerra.

Floriano teria tido necessidade social de dar exemplos. Teria tido necessidade de eliminar os responsaveis, mentores do movimento de rebelião federalista. E o Marechal, com a sua coragem admiravel, assumiu a responsabilidade de levar a termo esses exemplos, e isso de qualquer maneira: com tribunais ou sem eles.

Mas junto ao Marechal já não estavam mais os heróis que se bateram valentemente, armas nas mãos, arriscando tudo pela salvação da Republica; estavam, sim, as hienas, asquerozas, e ~~a~~ começar o refocilo nas carnes ~~da~~ da Patria.

Dos revolucionarios federalistas, dos verdadeiros responsaveis, em Maio de 1894 nenhum mais estava no Brazil. Todos haviam fugido, temerosos da reação e das reivindicações violentas e das vinganças sangrentas. ~~Mas~~ Como hienas não podiam ficar sem cadaveres... A ordem de que fossem punidos os responsaveis, afim de que ficassem exemplos, dada pelo Marechal, seria aproveitada para satisfazer ~~as~~ vinganças pessoáis.

E assim, o proprio Marechal é vitima das intriguiulhas soêzes e covardes dos que, como Constantino Pereira da Cunha se mostravam incapazes de lutar durante os 26 dias memoraveis do Cerco da Lapa, e depois eram comissionados para julgar os responsaveis do partido oposto.

O Marechal não podia ter confiança nos tribunais, cuja tendencia era a ministrar uma justiça lenta e ineficás para o caso dos exemplos, necessarios mais que nunca nesse momento. O meio era dar carta branca ás pessoas mais ardorozas e de mais puro republicanismo dentre os que o cercavam.

Daí surgiram sem duvida a tragedia do quilometro 65, os fuzilamentos do cemiterio de Curitiba, do Alto da Lapa, da fortaleza de Santa Cruz...

Mas ~~essas~~ mortes diminuiem a figura do Marechal Floriano?

Talvês o fizessem si ele fugisse á responsabilidade de tais átos; mas ao contrario, nem de leve ~~a~~ mancham a sua memoria e ainda a engrandece~~m~~, ~~mostrando~~ desde que ele mostra a pureza do seu patriotismo e de seu amor á Republica, visto que, ~~errando~~ como errou, nos exemplos que dezejou dar, sacrificando vitimas inocentes e deixando os culpados impunes, assumiu perante o país e a mais completa responsabilidade por todos os átos, bons ou máos realizados durante o seu governo.

Assim, os lamenta~~bilissimas~~veis sacrificios de cidadãos inocentes ~~mortes violentas~~, levados a efeito pelo governo legal em Maio e Junho de 1894, devem ser tidos como uma dessas fatalidades inevitaveis nas epocas de grandes ebulições revolucionarias, em que açõis e reaçõis se seguem, violentissimas e tão descontroladas, que aquelles mesmos que pretendem pôr dique á marcha invazora de tais males, acabam vitimas dos proprios acontecimentos, dos quais não raro foram autores e mentores.

.MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO
FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL
Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. Inst. fundamental 3:

sentido concreto das equações - lei da mudança de unidade, donde - — Teoria da Homogeneidade —

Estabelecendo paralelo entre a noção de lei e a de equação, vimos que esta é a tradução matematica daquela, mas que essa expressão, em virtude da insuficiencia da algebra, só excepcionalmente pode tornar-se efetiva. Toda equação, porem, para chegar ao seu destino, precisa ter as suas variaveis expressas em formulas, e as formulas exprimem grandezas numericamente definidas, isto é, referidas a unidades que lhe servem de medida.

A equação que traduz lei, as quantidades constantes e variaveis estão sujeitas à unidade concreta correspondente. Daí provém que as mudanças de unidades empregadas na avaliação numerica, teem que ser simultaneas, afim de não se alterar a significação concreta.

Exemplo: Lei do quadrado da hipotenusa. Ela se verifica qualquer que seja a unidade empregada, mas é claro que se mudarmos a unidade da hipotenusa temos que mudar a dos catetos. $x^2 = h^2 + y^2$ Si mudarmos a unidade do metro para o decametro, isso importaria em dividir por 100 todos os termos da equação. Reciprocamente, se fosse o decametro e voltassemos ao metro, multiplicariamos por 100, sem que a equação deixasse de representar o mesmo fato concreto.

Si a unidade fica m vezes maior a grandeza dos elementos fica m vezes menor e vice versa.

Assim toda a equação que traduz fato concreto fica inalteravel quando multiplicamos por fator arbitrario as quantidades elementares que ela encerra.

Si a equação for algebrica (sucetivel de gráo) todos os termos tem que ser do mesmo gráo para que ela seja homogenea. Toda a equação algebrica que exprime fato concreto é necessariamente homogenea.

$V = Bh$

V (3º gráo)

B (2º gráo) $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ 3º

h (1º gráo)

$$R^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

Esta teoria geral é devida a A. Comte

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO

FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL

Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. Instituição fundamental

2ª lição

Instituição filozofica da generalização algebrica

Grandezas {conhecidas e desconhecidas} em algebra são {constantes e variaveis} ou {dados e incognitas}

Em algebra todas as quantidads são indeterminadas.

Comecemos considerando a equação do 1º grão $ax+b=0$

a e b (dados fixos) x (incognita ou variavel) O valor de x determinad

$ax+by=c$ $\qquad ax=c-by$ o valor de x depende do de y

$ax+by+cz=d$ $\qquad ax+by=d-cz$ chamando $d-cz$ de d'

$ax+by=d'$ $\qquad ax=d'-by$

A dependencia de x é maior porque o seu valor depende de y e de z e assim por diante

Quando em lugar de estudarmos equações izoladas, fizermos em conjunto ou sistema, a determinação depende da igualdade do nº de incognitas com o de equações compativeis.

$$\begin{cases} ax+by+cz+du=e \\ a'x+b'y+c'z+d'u=e' \end{cases}$$ indeterminação de 2º grão porque o nº de incognitas é duplo do de equações —

mas se ao sistema acrecentarmos uma equação compativel

$a''x+b''y+c''z+d''u=e''$, a indeterminação passa a ser do 1º grão.

e se acrecentarmos outra equação compativel, o sistema fica determinado

daí se tira que a determinação é cazo particular das relações algebricas.

Lei e equação:— A razão abstrata comporta a idéia de propriedade abstrata e relação abstrata ou lei. Propriedades, são p.ex. em geometria linha, superficie, volume — em fisica peso, côr etc. A relação liga a maneira de modificação de duas propriedades ligadas entre si, isto é, a verificação da variação de uma quanto a outra varie.

Na noção de lei [illegible]
Considerando uma como variavel, ou variando mediante taes condições ver como a outra varia.

Em geometria p. ex. a area do circulo $S = \pi \frac{d^2}{4}$. S é a variavel dependente que varia com o diametro do circulo. Nas equações qualquer das variaveis póde ser transformada em independente. Tiremos por ex. d em função de S $d^2 = \frac{4S}{\pi}$ $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

Mas na maioria dos casos não nos é dado modificar as variaveis independentes, nem as dependentes, das leis naturaes.
Assim, matematicamente sempre se póde mudar os fócos duma elipse em relação á curva, mediante a lei correspondente. Mas astronomicamente, não podemos modificar a posição do Sól em relação á Terra, nem o eixo desta em relação ao Sol, etc...
Quanto mais se sóbe na escala enciclopedica, mais os fenomenos superiores vão dependendo de varios outros, isto é a variavel dependente o é de varias independentes.
Todavia, ás vezes se póde decompor casos complexos em outros simples, de maneira que a lei seja passivel de ser apanhada.
Mas daí se tira que a lei só atinge o seu estado de plena perfeição em matematica, onde as relações são precizas.
As leis são [illegible] numericas, e a equação serve apenas para representação da lei.

Temos ainda a considerar que a aritmetica é que dá o primeiro exemplo de generalização numerica combinando nos. inteiros, fracionarios, incomensuraveis etc da mesma maneira.
A algebra então leva isso a maior grau porque trata da mesma forma a valores subtrativos, nulos, infinitos e mesmo imaginarios.

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO
FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL
Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. ....

Apreciação geral

3ª lição

Divisão total do calculo algebrico

- Formações abstratas
  - Simples
    - algebricas ou naturais
      - racionais
        - inteiras
          - completas (dos diversos graus)
          - incompletas
        - fracionarias
      - irracionais
        - irredutiveis
        - redutiveis as formações racionais
    - trancendentes ou subsidiarias
      - artificiais
      - ecepcionais
  - Compostas
    - 1º, 2º, 3º, 4º, ..., mº grau de indeterminação
    - para cada grau
      - esplicitas
        - algebricas
          - racionais
            - inteiras
              - 1º grau, 2º, 3º ...
              - 9 cada grau
                - completas
                - incompletas
            - fracionarias
          - irracionais
        - trancendentes
      - implicitas
        - 1º, 2º, 3º, ..., mº grau de implicidade
        - para cada grau
          - algebricas
            - racionais
              - int.
                - 1º, 2º, 3º ...
                  - compl.
                  - incompl.
              - fracion.
            - irracionais
          - transcend.te

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO

FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL
Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. Instituição fundamental (1ª)

4ª lição de algebra

Apreciação geral do conjunto das leis algebricas elementares que permitem subordinar o abstrato ao concreto:- (Formações simples)

A algebra tendo nascido da aritmetica e da geometria, é dessa dupla fonte que devemos tirar os germens das relações elementares que nos vão permitir a subordinação do abstrato ao concreto.

Os 3 primeiros pares de formações foram fornecidos pela aritmetica e pela geometria. Ora; soma, produto e potencia, são ideias que nacem na aritmetica, da propria numeração. Embora o nº tivesse origem concreta, logo ele passou a ser abstrato, e portanto tanto as formações direta como as inversa tiveram origem abstrata. Vamos estudar o 1º par $\begin{cases} y=a+x \\ y=a-x \end{cases}$

Fazendo x sucessivamente $=$ a $a, 2a, 3a, 4a \ldots$, temos $y=2a, 3a, 4a$ etc

No 2º par igualmente, teremos $y=0$, $y=-a$, $y=-2a$, $y=-3a$ etc.

Ora, daí surge a idéia das quantidades negativas, cuja distinção das positivas é somente qto. ás suas condições de existencia segundo um ponto tomado como origem. A Éra, o debito e o credito, a temperatura etc... que nos mostram que as quantidades negativas tem realidade concreta.

Passando ao 2º par $\begin{cases} y=ax \\ y=\frac{a}{x} \end{cases}$ vemos que só o 2º $y=\frac{a}{x}$ pode apresentar dificuldade, mas vemos que ele pode se transformar num produto $y=\frac{a}{x}=a\times\frac{1}{x}$ Ora $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\times\frac{x}{x}=\frac{x}{x^2}=x^{1-2}=x^{-1}$ Portº. $y=\frac{a}{x}=ax$

A origem do produto é geometrica e aritmetica. Na geometria o retangulo; na aritmetica o circulo de grãos, concreto.

Vejamos agora o 3º par $\begin{cases} y=x^a \\ y=\sqrt[a]{x} \end{cases}$ Ora; vemos que, $y=x^{-a}=\frac{1}{x^a}$ uzando espoente negativo

$y = \sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$ Assim este par se confunde: $x^a = x^{1 \times a}$;
$\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$

$\sqrt[a]{x} = x^{\frac{1}{a}}$ porque se elevarmos ambos os membros da igualdade a $\underline{a}$ temos: $(\sqrt[a]{x})^a = x$ $(x^{\frac{1}{a}})^a = x$

Relativamente ao par artificial
$\begin{cases} y = a^x \\ y = \lg_a x \end{cases}$ vemos que $y = a^x$ deriva da potencia $y = x^a$ quando a base se torna conhecida e o espoente variavel. Foi constituida pois, por um simples artificio, mas a logaritmica, que é inversa foi constituida atraves das progressões, tendo tido origem aritimetica. Nepper (1550-1667) Briggs.

Ot° ao ultimo par $\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \end{cases}$, tambem esse é sucetivel de avaliação algebrica, conforme nos demonstrou Euler.

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \sqrt{1 - x^2} \times \left(x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} x^5 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} x^7 + \ldots\right)$$

Estas nos dão exemplo das formações compostas.

Equação e proporção:—

Proporção — propriedade fundam^tal $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (1) $a \times d = b \times c$ $c = \frac{ad}{b}$

(2) $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ $a^2 = bc$ $a = \sqrt{bc}$

(3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ (4) ou $\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$

(5) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

Equidiferença $\begin{cases} a - b = c - d \\ a + d = c + b \end{cases}$

Equação: Igualdade entre duas formações abstratas de grandezas consideradas. — Ha o caso da desigualdade — solução.

$a > b$

$a = b + \delta$ $\delta = a - b$

Tipos completos $\begin{cases} ax + b = 0 \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \\ ax^4 + \ldots \end{cases}$

Filosoficam^te a preponderancia da equação [illegible] proporção decorre da lei de composição [illegible]: Toda a comparação i[illegible] [illegible]naria.

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO
FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL
Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. 1ª lição

(Concepção geral da geometria)

Apreciação geral

Vamos ver da geometria { 1º seu fim / 2º extensão do seu dominio. Ora geo - Terra - : - metria - medir. Essa definição segundo a etimologia, não mostra o seu destino senão primitivo e imediato, porque ela naceu da topografia ou da agrimensura.

Da vista e do tato surgem as idéias de extensão, diferente da idéia abstrata de numero que nos vem do calculo aritmetico. A principio, na extensão, só se consideravam as áreas, depois se consideraram os volumes e afinal se passou à consideração das linhas (De acordo c/ a lei de fil. 1ª: "Subordinar por toda a parte as construções subjetivas aos materiais objetivos").

Ha casos em que só temos a considerar a área "atapetar salas, ladrilhar pátios, demarcar terrenos"; mas ha em que só consideramos uma linha como nas cercas divizórias. Finalmente o ponto é o encontro de 2 linhas, ou a extensão de dimensões imperceptiveis. O seu papel é assinalar posição.

Passemos à idéia de medida, que é abstrata e donde vem a de nº de unidade ou de módulo, mas a medida assim, é direta, e a geometria não seria necessaria para isso. Si descobrimos porem, a relação entre o comprimento duma linha reta e o de uma curva dada, então se tem a retificação. Assim conseguir a relação entre volumes de corpos redondos e o cubo, é a cubatura, a entre superficies limitadas por linhas curvas e o quadrado é a quadratura.

Assim, pois, o fim da geometria é a medida indireta da extensão, porque redús a medida das curvas á de retas, de corpos redondos em cubos etc.

Um exemplo notavel de medida direta é o das laminas da cicloide e do circulo gerador, aquela triplo deste, imaginado por Galileu, por meio do pezo.

Comparando a geometria com o calculo, sente-se quanto créce ela em realidade e em complicação.

Propondo-se a geometria ao descobrir as leis que permitem medir os volumes, as superficies e as linhas por meio dos parametros retilineos, só esse descobrimento é possivel nas maioria das vezes, depois de uma preparação conveniente, modo de geração pelo movim.to de pto ou de linha, a melhor definição segundo suas propriedades carateristicas etc.

Destinos da geometria
- Primordiais
  - Retificação
  - Quadratura
  - Cubatura
- Secundarios (Estudo das propriedades das figuras)
  - 1º Passagem e aplicação do abstrato ao concreto
  - 2º Indefinido de tais estudos
  - A e sua necessidade para os primordiais destinos da geom.tria que devem limitar esse estudo.

(Todos os problemas mais uteis são também os mais dificeis.)

B. Multiplicando as propriedades carateristicas das formas abstratas, podemos reconhecel-as no estado concreto e utilizal-as em nossos trabalhos racionais.

Os motivos A e B combinados é que dão o verdadeiro limite ao estudo das propriedades das figuras.

A teoria de cada figura, pois deve ir dezenvolvendo o estudo das formas:
- 1º quanto baste á medida da estensão.
- 2º " " " harmonia entre abstrat e concreto
- 3º " " " coordenação das pesquizas de forma a reprezentar os attributos deduzidos de sua definição mais caraterística.

Assim, em vês de indefinidamente estudar-se as propriedades do circulo, devemos instituir os meios de decidir se tal propriedade corresponde ao circulo e a que circulo.

- Forma concreta e formas abstratas que estudamos. - Todas as formas são sugeridas pelo mundo. A geometria é sciencia de observação portanto.

Matematica
- Calculo — dos valores / das relações
- Estensão — estudo — forma / estensão / posição
- Movimento -

Sciencia abstrata: Mat. / Astr. / Fiz. / Quim. / Biol. / Sociol. / Moral.

Consideração das familias - taxonomia

Mas as formas fundamentais são: reta / circulo

- Geometria elementar
  - Especial
  - Geral
- transcendente
  - dif.al
  - integr.al

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO

FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL

Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. 2ª lição

(Instrução sistematica da geometria; teoria do espaço e dos tipos)

Apreciação geral

Abstração — { a idéia separada do ser; o homem
{ a propriedade transformada em personificação; a morte

Qualidades abstratas { cor, peso, som; densidade, elasticidade; dureza

A forma, isolada dos outros fenomenos, nos leva aos tipos ideáis de existencia subjetiva: forma esférica, cilindrica, prismatica etc. Mas ha propriedade abstrata e relação abstrata. Estas permitem previzão porque constituem as leis e são mais dificeis de apanhar. As construções abstratas emfim supõe as propriedades e as relações. "Assim a teoria positiva da alma".

- Teoria do espaço -

Foi A. Comte quem assinalou a capital importancia desta concepção em 1819. Extensão dum corpo: Porção de espaço por ele ocupado. Assim se vê a noção subjetiva de espaço, creação do espirito humano. Ha aí a distinguir realidade objetiva com subjetiva. Monge dizia: É preciso vêr no espaço. Assim, as figuras se deviam distinguir do fundo onde são dezenhadas. N. Mestre supôs o fundo branco e os corpos verdes. Diderot fazia as arestas de negro. Irracionalidade da divizão da geometria em plana e no espaço. "Quem inventou o espaço, deve ser olhado como fundador da geometria". É impossivel se ter o vacuo real e absoluto; assim pois, num espaço em que não ha solidos nem liquidos, supomos a existencia de gás.

As inundações periodicas do Nilo obrigavam a renovação das medidas divizórias das propriedades marginais e o exercicio da medida das áreas

Mas Tales foi o verdadeiro fundador da geometria. Ele descobriu 3 propriedades fundamentais: O angulo inscrito em semicirculo é reto. e os dois referentes aos △. A 2ª propriedade deu nacimento á proporção.

— Teoria dos tipos —

Os tipos geometricos artificiais surgiram com as primeiras investigações abstratas sobre a medida da extensão.

Como a multiplicidade de tipos apresentados pelo mundo não se poderia tirar propriedades que permitissem previsão, o espirito humano separou a reta, o circulo o plano, combinando estas formas de todos os modos possiveis.

Os tipos antigos, surgidos das combinação das formas elementares davam imortalidade aos seus inventores. Nicomedes – a conchoide Diocles – a cissoide etc. Mas a geometria geral simplificou o surgimento de novas formas. Ninguem mais conquista imortalidade por descobrir figuras novas.

Os cegos tem noção dos tipos como solidos – os que vêm tem noção de fluido em outro fluido, mas como só os solidos teem formas definidas, tambem os que vem fazem idéia dos tipos solidos, daí surgiu a defeituosa denominação de solidos para os tipos geometricos.

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO

FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL

Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. Preâmbulo geral (1º)

3ª Lição de Geometria

(Teoria da linha reta e de suas mutuas inclinações.)

Estudo da medida direta e nacimento da idéia de razão. Mas a superposição é na maioria dos cazos, impossivel, de forma que só a medida indireta verdadeiramente interessa.

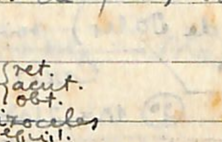
O problema se torna, então: ligar linhas e medir as desconhecidas por outras que conhecemos. Assimilando depois a figura rezultante a outra conhecida, de tipo geometrico, teremos que determinar os seus elementos uns pelos outros, 2º a relação que os liga. A mais simples figura plana nessas condições é o △

(x) Demonstração da 1ª lei de Thales  Em redor de uma reta ~~a~~ e de um mesmo lado a soma dos angulos são 180° ou 2 retos. Segundo os angulos os △ se classificam. Segundo os lados tambem. As figuras compostas se classificam segundo o nº de lados ou de ∧. Assim os poligonos: Concavos - convexos.

Divizão das figuras { simples { reta; triangulo { seg. angulos { ret., agut., obt.; seg. lados { izosceles, equil., escaleno }; compostas poligonos { concavos { seg. lados ou angulos; convexos { s/classif. }

Todo o poligono é decomponivel em triangulos, e (x) tantos quantos são os lados menos dois.

Todo o poligono = 2r(l - 2).



Casos de igualdade. Obliquas que igualmente se afastam do pé da perpendiculos são iguais, e a que mais se afasta é maior - pelo △

A = [redacted] + $\widehat{CBF}$ - C' [redacted]

A = [redacted] $\widehat{CBF}$ - C [redacted]

A + B + C = 180°

($\widehat{CBF}$ - 180 - B)

Perpendiculares baixadas do vertice s/ a base.
Casos de Topografia {planimetria {caminhamento {intersecções
{altimetria

Angulos c/ o mesmo vertice

1 A soma dos angulos ao redor de um ponto e do mesmo lado duma reta
2 Dois angulos adjacentes suplementares teem as bissetrizes em ^ réto. $2^\wedge + 2^\wedge = 2r$
3 Angulos opostos pelo vertice são iguáis   Cor.

Teoria das paralelas

para - ao lado ou ao longo ; alelo - um e outro.

1 Nomenclatura da secante ás paralelas
2 Se duas retas fazem com uma secante angulos alternos internos iguais são paralelas
3 Teorema de Varignon -

Complements

1° Num triangulo ao maior lado se opõe o maior angulo
2° " " qualquer lado é menor que a soma e maior que a difª dos outros dois

Proporcionalidade

1° Dado um segmento, só ha dois pontos, um s/ ele, outro no s/ prolongamento, que o dividem em dois segmentos numa razão dada.

A D C B

$\frac{AC}{CB} = \frac{p}{q}$ $\frac{AD}{DC} = \frac{p}{q}$

$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DC}$ $\frac{AC+CB}{AC} = \frac{AD+DC}{AD}$ $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ mas si $AC = AD$, D e C coincidem

2° Feixe de paralelas cortado por 2 secantes. "A segmentos iguais de uma corresponde segmentos iguáis da outra." Os desiguais são proporcionáis

3° Num Δ a paralela a um dos lados divide os 2 outros em segmentos proporcionáis $\frac{A'B}{AA'} = \frac{C'B}{C'C}$ mas $\frac{A'B+AA'}{A'B} = \frac{C'B+C'C}{C'B}$ ou $\frac{AB}{A'B} = \frac{CB}{C'B}$

4° A bissetriz do angulo intº ou estº de Δ divide o lado oposto em segmtº aditivos ou subtrativos proporcionais

5° (2ª lei de Tales) Dois Δ de angulos iguáis, são proporcionais.

Casos de semelhança

(1°) 2 ^ =   (2°) 1 ^ =, 2 lados propor.   (3) 3 lados proporcionais

Igualdade caso particular da semelhança.
Estudo das escalas

Depois do Δ o poligono mais simples como agregado de retas é o quadrilatero que se divide em

quadrl {regular {completamente {quadrado
{simetrico {retangulo {losango {trapezio izoceles
{irregular {trapezio

1° Num paralelogramo as diagonáis cortam-se ao meio

Poligonos - nº de angulos internos e s/ valor - os esternos - Igualdade de poligonos - Semelhança de poligonos.
1° Perimetros de poligonos semelhantes estão entre si como como 2 segmentos homologos quaisquer.

MUZEU CEL. DAVID CARNEIRO
FUNDADO EM 140 - (1928)
EM CURITIBA - BRAZIL
Reconhecido de utilidade publica
pelo Estado do Paraná

Curitiba, ... de .... de 193

Illmo. Snr. ...... (3ª lição)

B

Propriedades metricas do triangulo

A Δ retangulo

1º) num Δ retº a altura tirada do vertice do angulo reto á a hipotenuza é meia proporcional entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenuza.

2º) Um cateto é meia proporcional entre a hipotenuza e á projeção sobre ela.

3º) O quadrado da hipotenuza é = à soma dos quadr. dos catetos

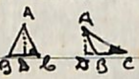
1  ADB sem. CDB logo $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$ $\overline{AD}^2 = DC.BD$

2 $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ $\overline{AB}^2 = BC.BD$ tambem $\overline{AC}^2 = BC.DC$

3 somando membro a membro $\overline{AB}^2$ e $\overline{AC}^2$, tem-se $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

B Δ qualquer

1 O quadrado de um lado oposto a ∧ agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos 2× um deles pela projeção do outro s/o 1º

 $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ mas $BD = BC - DC$ substituindo:

$$\cancel{\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + (BC - DC)^2} = \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DC}^2 - 2BC.DC$$

$$\cancel{AB^2 = BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.DC}$$

Em ADC vem $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$ ou $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{DC}^2$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \cancel{\overline{DC}^2} + \overline{BC}^2 + \cancel{\overline{DC}^2} - 2BC.DC$$

2 Num Δ obtuzangulo idem, mais 2× um deles pela projeção etc..

Calculo das medianas, alturas e bissetrizes

(Bonifacio pg 131)

Síntese 232. Geometria que prepara a fundação cartesiana
234.) 236
327.} Precursor de Descartes
406.}
408.)

Geometria 584. 527

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Afastando as aspirações incompatíveis c/ a nossa fraqueza teórica, a disciplina positiva reduz a segunda fase algébrica ao caso de uma só incógnita, já tratado no último século da evolução grega e logo completado pela elaboração árabe. Este passo deve ficar tão memorável dogmaticamente qto historicamente por introduzir duas noções gerais, uma de método, outra de doutrina que não podiam surgir antes. Síntese 281

A resolução comporta 2 modos historicamente separados por 13 séc. e dos quais o último deve ser dogmaticamente preferido, sem esquecer o primeiro. A ambos o 2º grau fornece o único caso suscetível de pleno sucesso. ... O último artifício comporta generalização superior que pode aperfeiçoar os meios de transformação. Síntese 282

Caraterizando a reação histórica e dogmática da trigonometria s/ a álgebra a 10ª lição termina o curso de geometria preliminar, apreciando 1º a resolução instituída por Viète p/ as equações do 3º grau cujas raízes são reais. A esse caso principal, justamente qualificado de irredutível, ele aplicou a procedência trigonométrica que resulta do fato de poder a equação representar então a trissecção de um ângulo cujo seno é dado. Nada entrava essa interpretação onde, dispondo do raio e do seno, a concepção concreta comporta a mesma generalidade que a relação abstrata que contém somente dois termos. Id. 327

Efetuando a multiplicação dos fatores elementares, vê-se conseguir surgirem as relações gerais entre os coeficientes e as raízes que, diretamente descobertas pelo precursor de Descartes, [illegible]

estenderia aos superiores senão por indução difícil.
406 - Síntese

$\frac{1}{a+bx}$ $\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a+px}$ $\frac{x+1}{x-1}$ $\frac{a}{b+cx}$

$\frac{a+bx}{}$

$\sqrt{a^2+x^2}$

$1-\frac{b}{a}x$

$+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}x^2$

$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}x+\frac{b^2}{a^3}x^2$

$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{4a^3}+\cdots$

$\frac{1}{a+bx}=(a+bx)^{-1}$ $\frac{b}{a^2+bx}=b(a^2+bx)^{-1}$

$f(x)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots$

$x=0$

$a^x=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots$

$a^x=1+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\cdots$

$a^{2x}=1+2Bx+4Cx^2+8Dx^3+16Ex^4+\cdots$

$(a^x)^2=1+2Bx+B^2x^2+2Cx^2+C^2x^4+2BCx^3+2Dx^3+2BDx^4+D^2x^6$

$=1+2Bx+(B^2+2C)x^2+(2BC+2D)x^3+\cdots$

$2B=2B$

$4C=B^2+2C$

$a^x=1+Bx+\frac{B^2}{2}x^2+\frac{B^3}{2.3}x^3+\frac{B^4}{2.3.4}x^4+\cdots$

$2C=B^2$

$C=\frac{B^2}{2}$

$x=\frac{1}{B}$

$a^{\frac{1}{B}}=1+1+\frac{1}{2}+$

$8D=2BC+2D$

$3D=BC$

$D=\frac{BC}{3}=\frac{B.B^2}{3.2}$

$a^{\frac{1}{B}}=e$

$\lg a^{\frac{1}{B}}=\lg e$

$\frac{1}{B}=\frac{\lg e}{\lg a}$ $B=\frac{\lg a}{\lg e}$

$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<l$

$a=1$

$\frac{1}{u_n}$

$(mx - n)^2 - r = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$

$m^2x^2 - 2mnx + n^2 - r = 0$

$m^2 = a \qquad m = \sqrt{a}$

$-2mn = b \qquad n = -\frac{b}{2\sqrt{a}}$

$n^2 - r = c \qquad r = n^2 - c$

$r = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{a}\,x = -\frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2xy = \frac{b}{a}x$$

$$2y = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{b}{2a} \qquad y^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$1 - 0 \quad \frac{\infty}{1} = \frac{\infty^0}{1} = \infty^{-0}$