Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Hopf Algebróides

Ricardo David Morais Da Silva
Orientador: Prof.° Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Fevereiro de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Hopf Algebróides

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Ricardo David Morais da Silva
Florianópolis
Fevereiro de 2016

Hopf Algebróides

por

Ricardo David Morais da Silva[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

____

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador

Comissão Examinadora

____

Prof.ª Dr. Eliezer Batista
(Orientador - UFSC)

____

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
(Universidade Federal do Paraná - UFPR)

____

Profa. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari
(Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC)

____

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
(Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2016.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por toda sua bondade. Agradeço à toda minha família por sempre estar ao meu lado, mesmo estando distante. Em especial, agradeço aos meus avós José Vicente e Maria Grinaura, por terem praticamente me criado, à minha mãe Marilene, por sempre me amar, meu irmão Fabiano e minhas irmãs, Rosilene, Rozileide e Roseane, por sempre estarmos unidos em todos os momentos, saibam que eu amo todos vocês. Agradeço à minha namorada e meu amor Jadna, por tornar a minha vida mais feliz e por me mostrar o verdadeiro sentido do amor e da vida.

Agradeço ao meu orientador professor Eliezer, por sempre acreditar no meu potencial e me incentivar a continuar os meus estudos em Matemática. À professora Alda, por tudo que fez por mim, por ter sido minha orientadora no TCC, por ter aceito participar da banca da minha dissertação, fazendo valiosas correções, por também acreditar na minha capacidade e pelos vários conselhos que me deu, me ajudando a crescer como estudante. Aos demais professores da banca, por terem aceito o convite para lerem meu trabalho e pelas correções feitas.

Agradeço ao meu colega de mestrado e amigo Gabriel, pela companhia nos fins de tarde e pela ajuda nesses dois anos, pois sempre esteve disposto a tirar minhas dúvidas. Agradeço também aos demais colegas e amigos que encontrei nessa jornada.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo suporte financeiro que possibilitou o desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é definir e exemplificar Hopf algebróides, que são uma das generalizações de álgebras de Hopf, sobre uma álgebra base não comutativa, isto é, que são construídos a partir de bimódulos sobre um anel R, não necessariamente comutativo. Para tanto, definimos e exemplificamos também bialgebróides, que constituem a melhor generalização do conceito de biálgebra. Exploramos diversas noções equivalentes a de bialgebróide, como as $\times_R$-biálgebras de Takeuchi. No decorrer do trabalho, apresentamos alguns resultados da teoria de biálgebras e de álgebras de Hopf que são estendidos para o âmbito de bialgebróides e de Hopf algebróides. Como um exemplo importante de resultado, podemos citar o fato de a categoria de módulos sobre um bialgebróide B ser monoidal, tal que o funtor esquecimento $\mathcal{M}_B \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R$ é estritamente monoidal e um análogo para o caso de comódulos sobre bialgebróides. No final do trabalho apresentamos a noção de $\times_R$-Hopf álgebra proposta por P. Schauenburg, que é uma noção mais geral do que Hopf algebróides.

Abstract

The main objective of this work is to define and exemplify Hopf algebroids, which are one of the generalizations of Hopf algebras over an noncommutative basis, that is, which are constructed from bimodules over a ring R, not necessarily commutative. To this end, we also define and exemplify bialgebroids that are the best generalization of the concept of bialgebra. We explore a number of notions equivalent to bialgebroid, as Takeuchi's $\times_R$-bialgebras. Along this work, we present some results of the theory of bialgebras and Hopf algebras which are extended to the scope of bialgebroids and Hopf algebroids. As an example of an important result, we can mention the fact that the category of modules over a bialgebroid B is monoidal, such that forgetting functor $\mathcal{M}_B \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R$ is strictly monoidal and analogous to the case of comodules over bialgebroids. At the end of the work we present the notion of a $\times_R$-Hopf algebra, proposed by P. Schauenburg, which is a more general concept than of Hopf algebroids.

Índice

Introdução

O que é um Hopf algebróide? Respondendo a essa pergunta em uma frase, diremos que um Hopf algebróide é uma generalização do que se conhece como álgebra de Hopf, sobre uma álgebra base não comutativa. Ou seja, o melhor exemplo de um Hopf algebróide é uma álgebra de Hopf, no sentido de que uma quantidade convincente de resultados na teoria de álgebras de Hopf são estendidos para Hopf algebróides. Ou melhor ainda, alguns problemas até então não resolvidos com álgebras de Hopf, são resolvidos no âmbito de Hopf algebróides. Dessa forma, Hopf algebróides fornecem-nos resultados de ambos os tipos, aqueles que se estendem de álgebras de Hopf e também aqueles que são conceitualmente novos.

Originalmente, no campo da topologia algébrica, o termo 'Hopf algebróide' foi usado por Douglas C. Ravenel em[24] para descrever objetos cogrupóides na categoria de álgebras comutativas. Estes são exemplos de Hopf algebróides com estrutura de álgebra subjacente comutativa. Também em [20], ainda na área da topologia algébrica, encontra-se uma aplicação-exemplo de Hopf algebróide. Em [21], Hopf algebróides não comutativos têm sido usados, mas ainda sobre álgebras base comutativas, como uma ferramenta de um estudo da geometria dos feixes de fibrados principais com simetrias de grupóides. Além da topologia algébrica, podemos citar outras áreas em que foram aplicados Hopf algebróides, como geometria de Poisson e topologia.

Em 1995 motivada pela noção de grupóides de Poisson, em geometria de Poisson, J. H. Lu definiu em [18] uma noção de Hopf algebróide em que a álgebra subjacente não precisava ser comutativa. A definição envolve a noção de bi-algebróide com antípoda bijetiva, que é sobrecarregada com a necessidade de uma seção para o epimorfismo canônico $A \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_L A$, em que A e L são álgebras sobre um anel comutativo com unidade k.

Em [14] L. Kadison e K. Szlachányi generalizaram a noção de bialgebróide dada por Lu em [18], para bialgebróides à esquerda e à direita. No artigo [3] motivados pelo estudo de extensões de Frobenius de profundidade 2 em [2], G. Böhm e K. Szlachányi introduziram uma nova noção de Hopf algebróide. Tal noção é dada pela antípoda bijetiva, mas que conecta as duas estuturas de bialgebróides à esquerda e à direita, sem a necessidade do epimorfismo canônico citado acima. A proposta de uma antípoda é baseada em uma simples observação. A antípoda de uma álgebra de Hopf H é um morfismo de biálgebras $H \longrightarrow H^{op}_{cop}$. Em 2003 no artigo [4] G. Böhm definiu a noção de Hopf algebróide, estudada nesse trabalho, sem a necessidade da antípoda ser bijetiva.

Apresentemos uma disposição geral de nosso trabalho, que é divido em três partes. No capítulo 1 definimos e exemplificamos a noção de categoria monoidal. Tal noção nos permite generalizar álgebras e coálgebras, assim como módulos e comódulos sobre tais objetos, respectivamente. Apesar de ser um conceito geral, nos restringimos apenas a categoria monoidal ${}_R\mathcal{M}_R$ dos R-bimódulos, em que R é uma álgebra sobre um anel comutativo com unidade k. No final do capítulo estudamos um pouco da dualidade entre R-anéis (objetos álgebras em ${}_R\mathcal{M}_R$) e R-coanéis (objetos coálgebras em ${}_R\mathcal{M}_R$).

No capítulo 2 estudamos a noção de bialgebróides segundo [7]. Bialgebróide, inventado por Takeuchi como $\times_R$-biálgebra em [28], é uma das generalizações de biálgebras sobre uma álgebra base não comutativa. Mas o que significa a álgebra base R de um bialgebróide ser não comutativa? Lembremos que uma biálgebra é um k-módulo, com estruturas compatíveis de álgebra e coálgebra. Por analogia, em um bialgebróide a estrutura de coálgebra é substituída por um coanel sobre uma k-álgebra R, não necessariamente comutativa. Também a estrutura de álgebra é substituída por um anel sobre uma álgebra base não comutativa. No entanto, para formular a compatibilidade entre as estruturas de anel e coanel, a álgebra base do anel não é R, mas $R \otimes R^{op}$. Há um consenso na literatura de que bialgebróide é a melhor generalização de biálgebra para o caso de um anel base não comutativo.

Começamos o capítulo 2 definindo e exemplificando as duas estruturas de bialgebróides, à esquerda e à direita. Depois, mostramos que, ao contrário de biálgebras cujos axiomas são auto-duais, os axiomas de bialgebróides não são auto-duais no mesmo sentido, mas com a hipótese adicional de ser projetivo finitamente gerado, o dual de um bialgebróide é também um bialgebróide. A saber, o dual à esquerda ${}^*B$ de um R-bialgebróide à esquerda B é um R-bialgebróide à direita. Em seguida, apresentamos algumas construções de novos bialgebróides a partir de outros dados, como: twist de Drinfeld, duplo cociclo twist, bialgebróide de Connes-Moscovici e extensão de escalares.

Continuando, ainda no capítulo 2, apresentamos um análogo para bialgebróides do seguinte teorema fundamental: Uma k-álgebra B é uma biálgebra se, e somente se, a categoria $\mathcal{M}_B$ dos B-módulos à direita, é monoidal tal que o funtor esquecimento $\mathcal{M}_B \longrightarrow \mathcal{M}_k$ é estritamente monoidal, ver [23]. Também mostramos que continua sendo válido para bialgebróides o seguinte teorema: A categoria dos comódulos à direita sobre B, possui uma estrutura monoidal, tal que o funtor esquecimento para $\mathcal{M}_k$ é estritamente monoidal. No final do capítulo, apresentamos a equivalência entre bialgebróides à esquerda segundo G. Böhm em [7], bialgebróides com âncora em [31] e $\times_R$-biálgebras em [28]. Tal equivalência foi mostrada por Brzezinski e Militaru em [8].

Finalmente, no capítulo 3 começamos definindo e exemplificando Hopf algebróides segundo [7]. Em seguida, apresentamos algumas propriedades básicas de Hopf algebróides como: Para um Hopf algebróide $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$, a tripla $((\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}, (\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}, S)$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases R^{op} e L^{op}, respectivamente; Se a antípoda S é bijetiva, então $((\mathcal{H}_R)^{op}, (\mathcal{H}_L)^{op}, S^{-1})$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases R e L, respectivamente, e também, $((\mathcal{H}_L)_{cop}, (\mathcal{H}_R)_{cop}, S^{-1})$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases L^{op} e R^{op}, respectivamente. Também, mostramos que a antípoda é um morfismo de biálgebróides à esquerda $S : (\mathcal{H}_R)^{op}_{cop} \longrightarrow \mathcal{H}_L$. No final do capítulo 3 apresentamos duas noções alternativas de generalização de uma álgebra de Hopf. Comparando a noção de Hopf algebróide segundo G. Böhm [7] e a noção introduzida por J. H. Lu [18], constatamos que nem uma das duas é mais geral que a outra. Mas que a noção apresentada neste trabalho segundo G. Böhm pertence a classe de $\times_R$-Hopf álgebras proposta por P. Schauenburg em [25].

Como pré-requisitos para a leitura do presente trabalho, sugerimos ao leitor ter noção da teoria básica de álgebras de Hopf ver [11] e [16]. Também sugerimos um pouco de estudo sobre a teoria de coanéis e comódulos ver [9]. Ao longo do trabalho, citamos alguns resultados úteis e suas referências, à medida que isso for necessário.

Capítulo 1

Categorias Monoidais

Neste capítulo, definimos e exemplificamos categorias monoidais, que são categorias que permitem definirmos generalizações de objetos algébricos como: k-álgebras e k-coálgebras, assim como, respectivamente, módulos e comódulos sobre tais objetos, em que k é um anel comutativo com unidade.

Mais especificamente, se R é uma álgebra sobre um anel comutativo k, vamos estudar R-anéis e R-coanéis, que como vamos ver mais adiante, são objetos álgebras e objetos coálgebras na categoria monoidal de R-bimódulos. No final do capítulo, estudamos um pouco sobre dualidade entre tais objetos. Para este capítulo seguimos [1], [9] e [19] como referência.

1.1 Definição e Exemplos

Definição 1.1 *Uma* ***categoria monoidal*** *é uma sêxtupla* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$*, em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ *é um funtor, chamado* ***produto tensorial*** *e* $\mathbb{1}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$*, chamado* ***objeto unidade****. Além disso,* a *é um isomorfismo natural entre os funtores* $(- \otimes -) \otimes -$ *e* $- \otimes (- \otimes -)$ *de* $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$*,* l *é um isomorfismo natural entre os funtores* $\mathbb{1} \otimes -$ *e* Id *de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$ *e* r *é um isomorfismo natural entre os funtores* $- \otimes \mathbb{1}$ *e* Id *de* $\mathcal{C}$ *para* $\mathcal{C}$*, tais que para quaisquer objetos*

A, B, C e $D \in \mathcal{C}$ os seguintes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
& ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[dl, "a_{ABC} \otimes D"'] \arrow[dr, "a_{A\otimes B,C,D}"] & \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "a_{A,B\otimes C,D}"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "a_{ABC\otimes D}"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "A \otimes a_{BCD}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)),
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[r, "a_{A,\mathbb{1},B}"] \arrow[dr, "r_A \otimes B"'] & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[d, "A \otimes l_B"] \\
& A \otimes B,
\end{tikzcd}
$$

são comutativos.

O fato de a ser um isomorfismo natural nos diz que para cada tripla de objetos A, B, C em $\mathcal{C}$, temos um isomorfismo

$$a_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C),$$

que satisfaz determinado diagrama, ver ([29], pág.24). De maneira análoga, temos os isomorfismos $l_A : \mathbb{1} \otimes A \longrightarrow A$ e $r_A : A \otimes \mathbb{1} \longrightarrow A$.

Na definição acima, o fato de que o primeiro diagrama comuta é chamado ***axioma do pentágono*** e o fato do segundo diagrama comutar é chamado ***axioma do triângulo***. Esses axiomas expressam que o produto tensorial de um número finito de objetos está bem definido, independente da posição dos parênteses e que $\mathbb{1}$ é uma unidade para o produto tensorial. Perceba ainda na definição acima, que denotamos a identidade de um objeto e o próprio objeto pelo mesmo símbolo. Vamos denotar a identidade de um objeto desta forma, sempre que não houver ambiguidade.

Definição 1.2 *Uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ é dita ser* ***estrita*** *se a, l, r são as identidades nos respectivos objetos. Ou seja, para quaisquer A, B e $C \in \mathcal{C}$ temos*

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) \quad e \quad \mathbb{1} \otimes A = A = A \otimes \mathbb{1}.$$

Por simplicidade, vamos nos referir a uma categoria monoidal como $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ ou apenas $\mathcal{C}$, ao invés de $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$.

Exemplo 1.3 *A categoria* $\underline{Set}$ *dos conjuntos é monoidal. O produto tensorial é o produto cartesiano* $\times : \underline{Set} \times \underline{Set} \longrightarrow \underline{Set}$. *O objeto unidade* $\mathbb{1} = \{*\}$ *é um conjunto unitário qualquer. Para quaisquer* $X, Y, Z \in \underline{Set}$ *definimos*

$$\begin{array}{rccc} a_{XYZ}: & (X \times Y) \times Z & \to & X \times (Y \times Z); \\ & ((x,y),z) & \mapsto & (x,(y,z)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} l_X: & \{*\} \times X & \to & X; \\ & (*,x) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} r_X: & X \times \{*\} & \to & X. \\ & (x,*) & \mapsto & x \end{array}$$

Mostremos que $(\underline{Set}, \times, \{*\}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal. De fato, claro que a, l e r são bijeções, ou seja, isomorfismos em $\underline{Set}$. Logo, basta mostrarmos a condição da definição de transformação natural. Para tanto, sejam A, B, C, A', B', C' conjuntos quaisquer em $\underline{Set}$ e $f : A \longrightarrow A'$, $g : B \longrightarrow B'$, $h : C \longrightarrow C'$ funções quaisquer em $\underline{Set}$. Verifiquemos que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} (A \times B) \times C \arrow[r, "a_{A,B,C}"] \arrow[d, "(f\times g)\times h"'] & A \times (B \times C) \arrow[d, "f\times(g\times h)"] \\ (A' \times B') \times C' \arrow[r, "a_{A',B',C'}"'] & A' \times (B' \times C'), \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times A \arrow[r, "l_A"] \arrow[d, "\{*\}\times f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ \{*\} \times A' \arrow[r, "l_{A'}"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times \{*\} \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "f\times\{*\}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A' \times \{*\} \arrow[r, "r_{A'}"'] & A'. \end{tikzcd}$$

De fato, para quaisquer $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned} (f \times (g \times h)) \circ a_{A,B,C}((a,b),c) &= (f \times (g \times h))(a,(b,c)) \\ &= (f(a), (g \times h)(b,c)) \\ &= (f(a), (g(b), h(c))) \\ &= a_{A',B',C'}((f(a), g(b)), h(c)) \\ &= a_{A',B',C'}((f \times g)(a,b), h(c)) \\ &= a_{A',B',C'} \circ ((f \times g) \times h)((a,b),c), \end{aligned}$$

$$l_{A'}((\{*\} \times f)(*, a)) = l_{A'}(*, f(a)) = f(a) = f(l_A(*, a)) = f \circ l_A(*, a)$$

e

$$r_{A'}((f \times \{*\})(a, *)) = r_{A'}(f(a), *) = f(a) = f(r_A(a, *)) = f \circ r_A(a, *).$$

Logo, a, l e r são isomorfismos naturais. Mostremos agora que valem os axiomas do pentágono e do triângulo. Sejam A, B, C, D conjuntos quaisquer em $\underline{Set}$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e $d \in D$ quaisquer. Temos

$$\begin{aligned}
&(A \times a_{B,C,D}) \circ a_{A,B\times C,D} \circ (a_{A,B,C} \times D)(((a, b), c), d) \\
&= (A \times a_{B,C,D}) \circ a_{A,B\times C,D}((a, (b, c)), d) \\
&= (A \times a_{B,C,D})(a, ((b, c), d)) \\
&= (a, (b, (c, d))),
\end{aligned}$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
a_{A,B,C\times D} \circ a_{A\times B,C,D}(((a, b), c), d) &= (a_{A,B,C} \times D)((a, b), (c, d)) \\
&= (a, (b, (c, d))),
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
(A \times l_B) \circ a_{A,\{*\},B}((a, *), b) &= (A \times l_B)(a, (*, b)) \\
&= (a, l_B(*, b)) \\
&= (a, b) \\
&= (r_A(a, *), b) \\
&= (r_A \times B)((a, *), b).
\end{aligned}$$

Portanto, $(\underline{Set}, \times, \{*\}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

Exemplo 1.4 *A categoria $\underline{Vect_k}$ dos espaços vetorias sobre um corpo k é monoidal. Definimos $\otimes : \underline{Vect_k} \times \underline{Vect_k} \longrightarrow \underline{Vect_k}$ como o produto tensorial sobre o corpo base $\otimes_k$ e $\mathbb{1} := k$. Além disso, para quaisquer V, U e $W \in \underline{Vect_k}$ e $\lambda \in V$, definimos*

$$\begin{array}{rlcl}
a_{VUW}: & (V \otimes_k U) \otimes_k W & \to & V \otimes_k (U \otimes_k W) \\
 & (v \otimes u) \otimes w & \mapsto & v \otimes (u \otimes w);
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl}
l_V: & k \otimes V & \to & V \\
 & \lambda \otimes v & \mapsto & \lambda v;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl}
r_V: & V \otimes k & \to & V \\
 & v \otimes \lambda & \mapsto & \lambda v.
\end{array}$$

Exemplo 1.5 *Seja k um corpo. A categoria $\underline{Supervect}_k$ de super-espaços vetoriais é monoidal. Os objetos em $\underline{Supervect}_k$ são k-espaços vetoriais, equipados de uma graduação sobre $\mathbb{Z}_2$, ou seja, $V = V_0 \oplus V_1$. Os morfismos são transformações lineares que preservam a graduação. Se $V, W \in \underline{Supervect}_k$ definimos $V \otimes W := V \otimes_k W$, com graduação*

$$(V \otimes W)_0 = V_0 \otimes_k W_0 \oplus V_1 \otimes_k W_1, \quad (V \otimes W)_1 = V_0 \otimes_k W_1 \oplus V_1 \otimes_k W_0.$$

Definimos também a, l e r como no exemplo anterior, da categoria $\underline{vect}_k$.

Exemplo 1.6 *Sejam k um corpo e R uma k-álgebra. A categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ dos R-bimódulos é monoidal. Definimos*

$$\otimes : {}_R\mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M}_R \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R$$

como o produto tensorial balanceado por R, denotado por $\otimes_R$. O objeto unidade é a k-álgebra R. Para quaisquer M, N e $P \in {}_R\mathcal{M}_R$, $m \in M$, $n \in N$, $p \in P$ e $b \in R$, definimos a, l e r, por

$$\begin{array}{rlcl} a_{MNP}: & (M \otimes_R N) \otimes_R P & \rightarrow & M \otimes_R (N \otimes_R P) \\ & (m \otimes n) \otimes p & \mapsto & m \otimes (n \otimes p); \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} l_M: & R \otimes M & \rightarrow & M \\ & b \otimes m & \mapsto & b \cdot m; \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} r_M: & M \otimes R & \rightarrow & M \\ & m \otimes b & \mapsto & m \cdot b. \end{array}$$

Exemplo 1.7 *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra sobre k um corpo. A categoria ${}_H\mathcal{M}$ dos H-módulos à esquerda é monoidal. Definimos $\otimes : {}_H\mathcal{M} \times {}_H\mathcal{M} \longrightarrow {}_H\mathcal{M}$ como o produto tensorial sobre o corpo de base $\otimes_k$. Se $M, N \in {}_H\mathcal{M}$ a estrutura de H-módulo à esquerda em $M \otimes N$ é dada, para todo $m \in M$ $n \in N$ e $h \in H$, por*

$$h \cdot (m \otimes n) = h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)} \cdot n,$$

em que $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes_k h_{(2)}$. Os morfismos naturais a, l, r são os mesmos do exemplo da categoria $\underline{Vect}_k$. O objeto unidade é o corpo k com ação de H dada pela counidade, ou seja, para quaisquer $h \in H$ e $\lambda \in k$ temos $h \cdot \lambda = \varepsilon(h)\lambda$.

Primeiramente vamos ver que $M \otimes N$ é H-módulo à esquerda, com estrutura dada acima. De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $h, k \in H$ temos

$$h \cdot (k \cdot (m \otimes n)) = h \cdot ((k_{(1)} \cdot m) \otimes (k_{(2)} \cdot n))$$

$$
\begin{aligned}
&= (h_{(1)} \cdot (k_{(1)} \cdot m)) \otimes (h_{(2)} \cdot (k_{(2)} \cdot n)) \\
&= (h_{(1)}k_{(1)} \cdot m) \otimes (h_{(2)}k_{(2)} \cdot n) \\
&= ((hk)_{(1)} \cdot m) \otimes ((hk)_{(2)} \cdot n) \\
&= (hk) \cdot (m \otimes n).
\end{aligned}
$$

Agora vamos ver que k é H-módulo à esquerda, com estrutura dada acima. De fato, para quaisquer $\lambda \in k$ e $h, k \in H$ temos

$$
\begin{aligned}
h \cdot (k \cdot \lambda) &= h \cdot (\varepsilon(k)\lambda) \\
&= \varepsilon(h)\varepsilon(k)\lambda \\
&= \varepsilon(hk)\lambda \\
&= (hk) \cdot \lambda.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que $a_{MNP} : (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P)$ é morfismo de H-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer $M, N, P \in {}_H\mathcal{M}$, $m \in M$, $n \in N$, $p \in P$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
a_{MNP}(h \cdot ((m \otimes n) \otimes p)) &= a_{MNP}(h_{(1)} \cdot (m \otimes n) \otimes h_{(2)} \cdot p) \\
&= a_{MNP}((h_{(1)(1)} \cdot m \otimes h_{(1)(2)} \cdot n) \otimes h_{(2)} \cdot p) \\
&= a_{MNP}((h_{(1)} \cdot m \otimes h_{(2)(1)} \cdot n) \otimes h_{(2)(2)} \cdot p) \\
&= h_{(1)} \cdot m \otimes (h_{(2)(1)} \cdot n \otimes h_{(2)(2)} \cdot p) \\
&= h_{(1)} \cdot m \otimes (h_{(2)} \cdot (n \otimes p)) \\
&= h \cdot (m \otimes (n \otimes p)) \\
&= h \cdot a_{MNP}((m \otimes n) \otimes p).
\end{aligned}
$$

Também temos que $l_M : k \otimes M \longrightarrow M$ é morfismo de H-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer $M \in {}_H\mathcal{M}$, $\lambda \in k$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
l_M(h \cdot (\lambda \otimes m)) &= l_M(h_{(1)} \cdot \lambda \otimes h_{(2)} \cdot m) \\
&= l_M(\varepsilon(h_{(1)})\lambda \otimes h_{(2)} \cdot m) \\
&= \varepsilon(h_{(1)})\lambda(h_{(2)} \cdot m) \\
&= \lambda\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \cdot m \\
&= \lambda h \cdot m \\
&= h \cdot (\lambda m) \\
&= h \cdot l_M(\lambda \otimes m).
\end{aligned}
$$

De maneira análoga mostra-se que $r_M : M \otimes k \longrightarrow M$ é morfismo de H-módulo à esquerda. Não é difícil mostrar que a, l e r são isomorfismos naturais e que os axiomas do pentágono e do triângulo são satisfeitos.

Exemplo 1.8 *Seja H uma biálgebra sobre k um corpo. A categoria $\mathcal{M}^H$ dos H-comódulos à direita é monoidal. Definimos*

$$\otimes : \mathcal{M}^H \times \mathcal{M}^H \longrightarrow \mathcal{M}^H$$

como o produto tensorial sobre o corpo de base $\otimes_k$. Se $M, N \in \mathcal{M}^H$, a estrutura de H-comódulo à direita em $M \otimes N$ é dada, para todo $m \in M$ e $n \in N$, por

$$\begin{array}{rccc} \rho_{MN}: & M \otimes N & \to & (M \otimes N) \otimes H \\ & m \otimes n & \mapsto & m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)} n^{(1)}. \end{array}$$

O objeto unidade é o corpo k com coação de H dada, para todo $\lambda \in k$, por $\rho_k : k \longrightarrow k \otimes H$, $\rho_k(\lambda) = \lambda \otimes 1_H$. Definimos a, l, r como no exemplo da categoria $\underline{vect}_k$.

Vamos ver que $a_{MNP} : (M \otimes N) \otimes P \longrightarrow M \otimes (N \otimes P)$ é morfismo de H-comódulo à direita. De fato, sejam M, N e $P \in \mathcal{M}^H$ quaisquer, então para todo $m \in M$, $n \in N$ e $p \in P$, queremos mostrar que

$$(a_{MNP} \otimes H) \circ \rho_{M \otimes N, P} = \rho_{M, N \otimes P} \circ a_{MNP}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} &(a_{MNP} \otimes H) \circ \rho_{M \otimes N, P}((m \otimes n) \otimes p) = \\ &= (a_{MNP} \otimes H)((m \otimes n)^{(0)} \otimes p^{(0)} \otimes (m \otimes n)^{(1)} p^{(1)}) \\ &= m^{(0)} \otimes (n^{(0)} \otimes p^{(0)}) \otimes m^{(1)} n^{(1)} p^{(1)} \\ &= m^{(0)} \otimes (n \otimes p)^{(0)} \otimes m^{(1)} (n \otimes p)^{(1)} \\ &= \rho_{M, N \otimes P}(m \otimes (n \otimes p)) \\ &= \rho_{M, N \otimes P} \circ a_{MNP}((m \otimes n) \otimes p). \end{aligned}$$

Temos também que $l_M : k \otimes M \longrightarrow M$ e $r_M : k \otimes M \longrightarrow M$ são morfismos de H-comódulo à direita. De fato, para qualquer $M \in \mathcal{M}^H$ e para todo $m \in M$ e $\lambda \in k$ temos

$$\begin{aligned} (l_M \otimes H) \circ \rho_{k,M}(\lambda \otimes m) &= (l_M \otimes H)(\lambda \otimes m^{(0)} \otimes 1_H m^{(1)}) \\ &= \lambda m^{(0)} \otimes m^{(1)} \\ &= \rho_M(\lambda m) \\ &= \rho_M \circ l_M(\lambda \otimes m). \end{aligned}$$

$$(r_M \otimes H) \circ \rho_{M,k}(m \otimes \lambda) = (r_M \otimes H)(m^{(0)} \otimes \lambda \otimes m^{(1)} 1_H)$$

$$
\begin{aligned}
&= m^{(0)}\lambda \otimes m^{(1)} \\
&= \rho_M(m\lambda) \\
&= \rho_M \circ l_M(m \otimes \lambda).
\end{aligned}
$$

Não é difícil mostrar que a, l, r são isomorfismos naturais e que valem os axiomas do pentágono e do triângulo.

Exemplo 1.9 *Considere $\mathcal{C}$ uma categoria, a categoria de endofuntores $End(\mathcal{C})$ é monoidal com produto tensorial dado pela composição de funtores. Nesta categoria a composição de transformações naturais é a vertical. O objeto unidade é o funtor identidade, o produto tensorial de duas transformações naturais é a composição horizontal, ou seja, se $F, F', G, G' \in End(\mathcal{C})$ e $\alpha : F \longrightarrow G$, $\beta : F' \longrightarrow G'$ transformações naturais, então para todo $X \in \mathcal{C}$, temos*

$$(\alpha \otimes \beta) : F(F'(X)) \longrightarrow G(G'(X)),$$

tal que $(\alpha \otimes \beta)_X = G(\beta_X) \circ \alpha_{F'(X)}$. Claramente, pela definição do produto tensorial em $End(\mathcal{C})$, este é um exemplo de categoria monoidal estrita.

Exemplo 1.10 *Considere $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, r, l)$ uma categoria monoidal. A categoria $(\mathcal{C}^{rev}, \otimes^{rev}, \mathbb{1}^{rev}, a^{rev}, r^{rev}, l^{rev})$ é monoidal, em que $\mathcal{C}^{rev} = \mathcal{C}$ como categoria, o produto tensorial $\otimes^{rev} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $X \otimes^{rev} Y = Y \otimes X$, para todo $X, Y \in \mathcal{C}$. E também para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ temos $a^{rev}_{X,Y,Z} = a^{-1}_{Z,Y,X}$; $r^{rev}_X = l_X$; $l^{rev}_X = r_X$ e $\mathbb{1}^{rev} = \mathbb{1}$.*

1.2 Funtores Monoidais

Definição 1.11 *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ e $(\mathcal{D}, \boxtimes, I, \overline{a}, \overline{l}, \overline{r})$ duas categorias monoidais. Um **funtor monoidal** entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, φ_0, ϕ) em que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um funtor (covariante), $\varphi_0 : I \longrightarrow F(\mathbb{1})$ morfismo e $\phi : (- \boxtimes -) \circ (F, F) \Rightarrow F \circ (- \otimes -)$ é uma transformação natural entre $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ tal que para quaisquer objetos A, B e $C \in \mathcal{C}$, temos*

$$
\begin{tikzcd}
I \boxtimes F(A) \arrow[r, "\overline{l}_{F(A)}"] \arrow[d, "\varphi_0 \boxtimes F(A)"'] & F(A) \\
F(\mathbb{1}) \boxtimes F(A) \arrow[r, "\phi_{\mathbb{1}A}"'] & F(\mathbb{1} \otimes A), \arrow[u, "F(l_A)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(A) \boxtimes I \arrow[r, "\overline{r}_{F(A)}"] \arrow[d, "F(A) \boxtimes \phi_0"'] & F(A) \\
F(A) \boxtimes F(\mathbb{1}) \arrow[r, "\phi_{A\mathbb{1}}"'] & F(A \otimes \mathbb{1}) \arrow[u, "F(r_A)"']
\end{tikzcd}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
F(A) \boxtimes (F(B) \boxtimes F(C)) \arrow[r, "F(A)\boxtimes\phi_{B,C}"] & F(A) \boxtimes F(B \otimes C) \arrow[d, "\phi_{A,B\otimes C}"] \\
(F(A) \boxtimes F(B)) \boxtimes F(C) \arrow[u, "\overline{a}_{F(A)F(B)F(C)}"] \arrow[d, "\phi_{AB}\boxtimes F(C)"'] & F(A \otimes (B \otimes C)) \\
F(A \otimes B) \boxtimes F(C) \arrow[r, "\phi_{A\otimes B,C}"'] & F((A \otimes B) \otimes C). \arrow[u, "F(a_{A,B,C})"']
\end{tikzcd}$$

Definição 1.12 *Um funtor monoidal* (F, φ_0, ϕ) *é dito ser* ***forte*** *ou* ***fortemente monoidal*** *se* φ_0 *é um isomorfismo e* ϕ *é um isomorfismo natural.*

Definição 1.13 *Um funtor monoidal* (F, φ_0, ϕ) *é dito ser* ***estrito*** *ou* ***estritamente monoidal*** *se* φ_0 *e* ϕ *forem identidade.*

Exemplo 1.14 *Seja* G *um grupo finito,* k *um corpo e* $Rep^f G$ *a categoria das representações* k*-lineares de dimensão finita do grupo* G*. Os objetos nesta categoria são representações* $(\mathbb{V}, \rho)$*, ou seja,* $\rho : G \to End(\mathbb{V})$ *é morfismo de grupos. Morfismos nesta categoria são morfismos de representações, ou seja, dadas duas representações* $(\mathbb{V}, \rho)$ *e* $(\mathbb{W}, \sigma)$*, um morfismo entre ambas é uma transformação linear* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *tal que, para quaisquer* $g \in G$ *e* $v \in \mathbb{V}$*, temos*

$$f(\rho(g)(v)) = \sigma(g)(f(v)).$$

O funtor esquecimento $U : Rep^f G \to \underline{Vect}_k$ *é estritamente monoidal.*

A categoria $Rep^f G$ é monoidal. O produto tensorial de duas representações $(\mathbb{V}, \rho) \otimes (\mathbb{W}, \sigma) := (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \rho \otimes \sigma)$ em que, para quaisquer $g \in G$, $v \otimes w$ tem-se que $(\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \sigma(g)(w)$, é também uma representação. Temos também que (k, ρ_k) é uma representação, em que $\rho_k(g)(1_k) = 1_k$ para todo $g \in G$. Portanto, k é a unidade monoidal. Os morfismos canônicos $a_{V,W,U}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{U} \to \mathbb{V} \otimes (\mathbb{W} \otimes \mathbb{U})$ $l_V : k \otimes \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $r_V : \mathbb{V} \otimes k \to \mathbb{V}$ são morfismos de representações. De fato, para quaisquer representações $(\mathbb{V}, \rho)$, $(\mathbb{W}, \sigma)$, $(\mathbb{U}, \lambda)$ e para quaisquer $v \in \mathbb{V}$, $w \in \mathbb{W}$, $u \in \mathbb{U}$, $g \in G$ e $r \in k$ temos

$$\begin{aligned}
&a_{V,W,U}(((\rho \otimes \sigma) \otimes \lambda)(g)((v \otimes w) \otimes u)) \\
&= a_{V,W,U}((\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) \otimes \lambda(g)(u)) \\
&= a_{V,W,U}((\rho(g)(v) \otimes \sigma(g)(w)) \otimes \lambda(g)(u))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(g)(v) \otimes (\sigma(g)(w) \otimes \lambda(g)(u)) \\
&= \rho(g)(v) \otimes ((\sigma \otimes \lambda)(g)(w \otimes u)) \\
&= (\rho \otimes (\sigma \otimes \lambda))(g)(v \otimes (w \otimes u)) \\
&= (\rho \otimes (\sigma \otimes \lambda))(g)(a_{V,W,U}((v \otimes w) \otimes u)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_V((\rho_k \otimes \rho)(g)(r \otimes v)) &= l_V(\rho_k(g)(r) \otimes \rho(g)(v)) \\
&= l_V(r \otimes \rho(g)(v)) \\
&= r\rho(g)(v) \\
&= \rho(g)(rv) \\
&= \rho(l_V(r \otimes v))
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
r_V((\rho \otimes \rho_k)(g)(v \otimes r)) &= r_V(\rho(g)(v) \otimes r) \\
&= \rho(g)(v)r \\
&= \rho(vr) \\
&= \rho(r_V(v \otimes r)).
\end{aligned}
$$

Não é difícil ver que os axiomas do pentágono e do triângulo são satisfeitos. Também é trivial a verificação de que o funtor esquecimento $U : Rep^f G \to \underline{Vect}_k$ é estritamente monoidal.

Mas nem sempre o funtor esquecimento é estritamente monoidal. Como vamos ver no próximo exemplo.

Exemplo 1.15 *Seja R uma álgebra sobre o corpo k e $U : {}_R\mathcal{M}_R \to \underline{Vect}_k$ o funtor esquecimento da categoria dos R-bimódulos para a categoria dos espaços vetoriais sobre k. Nesse caso U é monoidal mas não é estrito.*

De fato, para quaisquer $M, N \in {}_R\mathcal{M}_R$, $m \in M$, $n \in N$ e $\lambda \in k$ definimos a transformação natural

$$
\phi : - \otimes_k - \Rightarrow - \otimes_R -,
$$

tal que $\phi_{M,N}(m \otimes_k n) = m \otimes_R n$ e o morfismos φ_0 é a injeção

$$
\begin{array}{rccc}
\varphi_0 : & k & \to & R. \\
& \lambda & \mapsto & \lambda 1_R.
\end{array}
$$

É simples verificarmos que os seguintes diagramas comutam. O que mostra que U é monoidal, porém não é estrito, pois a transformação natural ϕ e o morfismo φ_0 não são identidades.

$$\begin{tikzcd}
k \otimes_k M \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\varphi_0 \otimes M"'] & M \\
R \otimes_k M \arrow[r, "\phi_{R,M}"'] & R \otimes_R M, \arrow[u, "l_M"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes_k k \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "M \otimes \varphi_0"'] & M \\
M \otimes_k R \arrow[r, "\phi_{M,R}"'] & M \otimes_R R \arrow[u, "r_M"']
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_k (N \otimes_k P) \arrow[r, "M \otimes \phi_{N,P}"] & M \otimes_k (N \otimes_R P) \arrow[d, "\phi_{M, N \otimes_R P}"] \\
(M \otimes_k N) \otimes_k P \arrow[u, "\overline{a}_{M,N,P}"] \arrow[d, "\phi_{M,N} \otimes_k P"'] & M \otimes_R (N \otimes_R P) \\
(M \otimes_R N) \otimes_k P \arrow[r, "\phi_{M \otimes_R N, P}"'] & (M \otimes_R N) \otimes_R P. \arrow[u, "a_{M,N,P}"']
\end{tikzcd}$$

Nos dois primeiros diagramas estamos fazendo um abuso de notação quando denotamos os isomorfismos canônicos $k \otimes_k M \cong M$ e $M \otimes_k k \cong M$ com o mesmo símbolo.

1.3 R-anéis (monóides)

Definição 1.16 *Um **objeto álgebra** ou um **Monóide** em uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ é uma tripla (A, μ, η). Onde A é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$, $\eta : \mathbb{1} \longrightarrow A$ são morfismos em $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições de associatividade e unitalidade, ou seja, os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes A"] \arrow[d, "a_{A,A,A}"'] & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] \\
A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "A \otimes \mu"'] & \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes A \arrow[r, "\eta\otimes A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "A\otimes\eta"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A. &
\end{tikzcd}
\tag{1.2}
$$

O morfismo μ é chamado de *Multiplicação* ou *Produto* e η é chamado de *Unidade*. Quando μ satisfaz o diagrama 1.1 dizemos que μ *é associativo* e o diagrama 1.2 é chamado de *axioma da unidade*. De maneira usual vamos omitir o isomorfismo natural

$$a_{A,A,A} : (A \otimes A) \otimes A \longrightarrow A \otimes (A \otimes A).$$

Desta forma, podemos reescrever o primeiro diagrama 1.1 da seguinte maneira:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes A"] \arrow[d, "A\otimes\mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
.
$$

Nosso próximo exemplo é na verdade a motivação para a definição 1.16, inclusive para o nome monóide. Neste exemplo, *monóide* é um conjunto não vazio A munido de uma operação associativa que possui elemento neutro e_A.

Exemplo 1.17 *Vamos considerar a categoria* $\underline{Set}$ *que é monoidal. Os objetos álgebras nessa categoria são monóides.*

De fato, seja A um objeto álgebra em $\underline{Set}$, ou seja, existem $\mu : A \times A \longrightarrow A$ e $\eta : \{*\} \longrightarrow A$, que satisfazem 1.1 e 1.2. Definindo $\mu(a, b) = ab$ e $\eta(*) = e_A$, os axiomas de objeto álgebra se traduzem como

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{e} \quad e_A a = a = a e_A.$$

Portanto, A é um monóide. Por outro lado, dado A um monóide, obtemos um objeto álgebra em $\underline{Set}$.

Exemplo 1.18 *Na categoria* $\underline{Vect}_k$ *os objetos álgebras são exatamente as* k*-álgebras unitais.*

De fato, se A é um objeto álgebra em $\underline{Vect}_k$ existem aplicações

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A, \; \mu(a \otimes b) = a \cdot b$$

e

$$\eta : k \longrightarrow A,\ \eta(1_k) = 1_A$$

k-bilineares, com

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ \text{ e } \ 1_A \cdot a = a = a \cdot 1_A.$$

Portanto, A é uma k-álgebra. Por outro lado, se A é uma k-ágebra, então definimos uma aplicação k-bilinear $\mu : A \times A \longrightarrow A$, $\mu(a, b) = ab$ e portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, temos que existe única aplicação linear $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ tal que

$$\mu(a \otimes b) = ab.$$

O morfismo unidade é dado por

$$\eta : k \longrightarrow A,\ \eta(1_k) = 1_A.$$

É fácil verificar a comutatividade dos diagramas 1.1 e 1.2.

Exemplo 1.19 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então o objeto unidade $\mathbb{1}$ é um objeto álgebra em $\mathcal{C}$.*

De fato, temos que $l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$, ver [16] Lema.XI.2.3, defina $\mu := l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$ e $\eta = Id_{\mathbb{1}}$. Então pelo axioma do triângulo, aplicado para a unidade monoidal $\mathbb{1}$, temos

$$\mu(\mathbb{1} \otimes \mu) = \mu(\mathbb{1} \otimes l_{\mathbb{1}}) = \mu(r_{\mathbb{1}} \otimes \mathbb{1}) = \mu(\mu \otimes \mathbb{1}),$$

a unitalidade é trivialmente satisfeita.

Definição 1.20 *Sejam (A, μ_A, η_A) e (B, μ_B, η_B) objetos álgebra em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um* ***morfismo de objetos álgebra*** *$f : A \longrightarrow B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, tal que os seguintes diagramas comutam.*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \mathbb{1}. \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Seja k um anel comutativo com unidade, então a categoria $({}_k\mathcal{M}_k, \otimes_k, k)$ é uma categoria monoidal. Em que ${}_k\mathcal{M}_k$ é a categoria dos k-bimódulos. Uma k-**álgebra** é um objeto álgebra (R, μ, η) na categoria ${}_k\mathcal{M}_k$.

Podemos então subir um degrau e considerarmos a categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ dos R-bimódulos, que já vimos ser monoidal, com o produto tensorial balanceado sobre R, que por sua vez é a unidade da categoria citada.

A partir daqui, sempre que não aparecer informação sobre R e k, fica subentendido que R é uma álgebra sobre um anel comutativo k.

Definição 1.21 *Um R-**anel** é um objeto álgebra (A, μ, η) na categoria monoidal $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$.*

Para um R-anel (A, μ, η), o **oposto** siginifica o R^{op}-anel (A^{op}, μ^{op}, η). Em que A^{op} é o mesmo k-módulo, A^{op} tem estrutura de R^{op}-módulo à esquerda (resp. à direita) via a R-ação à direita (resp. à esquerda), a multiplicação é dada por $\mu^{op}(a \otimes_{R^{op}} b) = \mu(b \otimes_R a)$ e a unidade é a mesma η.

1.3.1 Módulos sobre Monóides

Definição 1.22 *Seja (A, μ, η) um objeto álgebra em $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Um **módulo à direita** sobre A, ou um A-**módulo à direita**, é um par (M, θ_M) em que M é um objeto em $\mathcal{C}$ e θ_M: $M \otimes A \to M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, tal que os seguintes diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes A \arrow[r, "M\otimes\mu"] \arrow[d, "\theta_M \otimes A"'] & M \otimes A \arrow[d, "\theta_M"] \\ M \otimes A \arrow[r, "\theta_M"'] & M, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "M\otimes\eta"] \arrow[dr, "r_M"'] & M \otimes A \arrow[d, "\theta_M"] \\ & M. \end{tikzcd}$$

*Analogamente, defini-se A-**módulo à esquerda**.*

Definição 1.23 *Sejam (A, μ, η) um objeto álgebra em $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e (M, θ_M), (N, θ_N) módulos à direita sobre A. Um morfismo $f : M \longrightarrow N$ em $\mathcal{C}$ é um **morfismo de** A-**módulos à direita** se o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "f\otimes A"] \arrow[d, "\theta_M"'] & N \otimes A \arrow[d, "\theta_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N. \end{tikzcd}$$

*Analogamente, defini-se **morfismo de** A-**módulos à esquerda**.*

Exemplo 1.24 *Seja (A, μ, η) um objeto álgebra em Set, ou seja, um monóide. Então a estrutura de A-módulo à direita em um conjunto X é o mesmo que uma ação à direita de A em X. Uma ação à direita de A em X, é uma aplicação $\phi : A \longrightarrow End(X)$, que satisfaz $\phi(ab) = \phi(b) \circ \phi(a)$, para quaisquer $a, b \in A$, em que $End(X)$ é o conjunto das funções de X em X.*

De fato, começamos com um A-módulo à direita (X, θ_X) e definimos $\phi : A \longrightarrow End(X)$, por $\phi(a)(x) = \theta_X(x, a)$, para quaisquer $x \in X$ e $a, b \in A$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi(ab)(x) &= \theta_X(x, ab) \\
&= \theta_X(x, \mu(a, b)) \\
&= \theta_X \circ (X, \mu)(x, a, b) \\
&= \theta_X \circ (\theta_X, A)(x, a, b) \\
&= \theta_X(\theta_X(x, a), b) \\
&= \phi(b)(\phi(a)(x)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, dada uma ação à direita de A em X, via $\phi : A \longrightarrow End(X)$, então $\theta_X(x, a) := \phi(a)(x)$ define uma estrutura de A-módulo à direita em X.

1.4 R-coanéis (comonóides)

Nesta seção vamos definir o que seria uma extensão da noção de uma k-coálgebra. Mais explicitamente vamos definir a noção de R-coanel, ou seja, uma noção de coálgebra sobre um anel não necessariamente comutativo.

Definição 1.25 *Um* ***objeto coálgebra*** *ou um comonóide em uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ é uma tripla (C, Δ, ε), em que C é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{1}$ são morfismos em $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições de coassociatividade e counitalidade, ou seja,* *os seguintes diagramas comutam*

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes C"] \\
 & (C \otimes C) \otimes C \arrow[d, "a_{C,C,C}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "C \otimes \Delta"'] & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes C & C \arrow[l, "l_C^{-1}"'] \arrow[r, "r_C^{-1}"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes \mathbb{1} . \\
 & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon \otimes C"] \arrow[ur, "C \otimes \varepsilon"'] &
\end{tikzcd}
$$

O morfismo Δ é chamado de ***Comultiplicação*** *ou* ***Coproduto*** *e ε é chamado de* ***Counidade****.*

Para todo $c \in C$, temos a notação de Sweedler dada por $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Para um R-coanel (C, Δ, ε), o seu *co-oposto* é o R^{op}-coanel $(C_{cop}, \Delta_{cop}, \varepsilon)$. Em que C_{cop} é o mesmo k-módulo C, C_{cop} tem estrutura de R^{op}-módulo à esquerda (resp. à direita) via a R-ação à direita (resp. à esquerda). A comultiplicação é dada por $\Delta_{cop}(c) = c_{(2)} \otimes_{R^{op}} c_{(1)}$ e a counidade é a mesma ε.

Exemplo 1.26 *Considerando a categoria monoidal dos conjuntos $\underline{Set}$, t emos que todo conjunto é um objeto coálgebra nessa categoria.*

De fato, seja X um conjunto qualquer, pela propriedade universal do produto em $\underline{Set}$, temos que existe único $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, tal que, o seguinte diagrama é comutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "Id_X"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "Id_X"] & \\
X & X \times X \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X
\end{tikzcd}
,
$$

ou seja, $\Delta(x) = (x, x)$ é a aplicação diagonal. Também, temos que para todo $X \in \underline{Set}$ existe um único $\varepsilon : X \longrightarrow \{*\}$, pois $\{*\}$ é objeto final em $\underline{Set}$.

Exemplo 1.27 *Considerando a categoria $\underline{Vect}_K$ dos espaços vetoriais sobre o corpo k. Temos que um objeto coálgebra em $\underline{Vect}_K$ é uma k-coálgebra no sentido tradicional.*

Exemplo 1.28 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então a unidade monoidal $\mathbb{1}$ é um objeto coálgebra em $\mathcal{C}$.*

De fato, basta definir $\Delta = l_{\mathbb{1}}^{-1} = r_{\mathbb{1}}^{-1}$ e $\varepsilon = Id_{\mathbb{1}}$. Não é difícil ver, usando Lema.XI.2.3 em [16], que a coassociatividade e a counitalidade são satisfeitas.

Definição 1.29 *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ objetos coálgebras em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um **morfismo de objetos coálgebras** $f : C \longrightarrow D$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \mathbb{1}. & \end{tikzcd}$$

Definição 1.30 *Um R-**coanel** é um objeto coálgebra (C, Δ, ε) na categoria $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$ dos R-bimódulos.*

Exemplo 1.31 *O exemplo trivial de R-coanel é justamente a k-álgebra subjacente R.*

De fato, basta definirmos $\Delta = l_R^{-1} = r_R^{-1} : R \longrightarrow R \otimes_R R$ e $\varepsilon = Id_R : R \longrightarrow R$. É trivial a comutatividade dos diagramas.

Exemplo 1.32 *Seja G um grupo, R uma k-álgebra G-graduada, ou seja, $R \cong \oplus_{g \in G} R_g$ e $\mu(R_g \otimes R_h) \subseteq R_{gh}$. Vamos construir um R-coanel $C := \oplus_{g \in G} R_{\delta_g}$.*

De fato, damos a estrutura de R-bimódulos para C por

$$r \cdot \delta_g \cdot r' = \sum_{h \in G} r r'_h \delta_{gh}, \ \forall\, r, r' \in R,$$

esta soma é finita pois $r \in \oplus_{g \in G} R_g$, logo apenas uma quantidade finita de componentes é não nula. Claro que C já tem estrutura de R-módulo à esquerda, basta verificarmos que tem estrutura à direita. De fato, para quaiquer $r, r' \in R$ e $g, h \in G$ temos

$$\begin{aligned}
(\delta_g \cdot r) \cdot r' &= (\sum_{h \in G} r_h \delta_{gh}) \cdot r' \\
&= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} r_h r'_k \delta_{ghk} \\
&= \sum_{l \in G} \sum_{h \in G} r_h r'_{h^{-1}l} \delta_{gl}, \quad \text{usando } hk = l, \ k = h^{-1} l
\end{aligned}$$

$$= \sum_{l \in G} (rr')_l \delta_{gl}$$
$$= \delta_g \cdot (rr').$$

Definimos então $\Delta : C \longrightarrow C \otimes_R C$, $\Delta(\delta_g) = \delta_g \otimes \delta_g$ e $\varepsilon : C \longrightarrow R$, $\varepsilon(\delta_g) = 1_R$. Vamos ver que Δ é morfismo de R-bimódulos, claro que, só precisamos mostrar à direita. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $g, h \in G$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta_g \cdot r) &= \Delta(\sum_{h \in G} r_h \delta_{gh}) \\
&= \sum_{h \in G} r_h \delta_{gh} \otimes \delta_{gh},
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta_g) \cdot r &= (\delta_g \otimes \delta_g) \cdot r \\
&= \sum_{h \in G} \delta_g \otimes r_h \delta_{gh} \\
&= \sum_{h \in G} \delta_g \cdot r_h \otimes \delta_{gh} \\
&= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} (r_h)_k \delta_{gk} \otimes \delta_{gh} \\
&= \sum_{h,k \in G} \delta_{h,k} r_h \delta_{gk} \otimes \delta_{gh} \\
&= \sum_{h \in G} r_h \delta_{gh} \otimes \delta_{gh},
\end{aligned}$$

na penúltima igualdade usamos que $(r_h)_k = \delta_{h,k} r_h$ pois $R_h \cap R_k = \{0\}$ se $h \neq k$.

Exemplo 1.33 *(R-coanel de coação) Sejam k um corpo, H uma k-biálgebra e R um H-comódulo álgebra à direita. Ou seja, para quaisquer $a, b \in R$, usando notação da coação $\rho : R \longrightarrow R \otimes_k H$, por $\rho(a) = a^{(0)} \otimes a^{(1)}$, temos*

- $a^{(0)} \varepsilon(a^{(1)}) = a$;
- $a^{(0)(0)} \otimes a^{(0)(1)} \otimes a^{(1)} = a^{(0)} \otimes {a^{(1)}}_{(1)} \otimes {a^{(1)}}_{(2)}$;
- $(ab)^{(0)} \otimes (ab)^{(1)} = a^{(0)} b^{(0)} \otimes a^{(1)} b^{(1)}$;

- $1_R^{(0)} \otimes 1_R^{(1)} = 1_R \otimes 1_H$.

Então $C = R \otimes_k H$, tem estrutura de R-coanel.

De fato, primeiro note que $R \otimes_k H$ tem estrutura de R-bimódulo dada por $a \cdot (b \otimes h) \cdot c = abc^{(0)} \otimes hc^{(1)}$, para quaisquer $a, b, c \in R$ e $h \in H$. De fato, mostremos apenas à direita, pois à esquerda é análogo,

$$\begin{aligned}
((a \otimes h) \cdot b) \cdot c &= (ab^{(0)} \otimes hb^{(1)}) \cdot c \\
&= (ab^{(0)}c^{(0)} \otimes hb^{(1)}c^{(1)}) \\
&= a(bc)^{(0)} \otimes h(bc)^{(1)} \\
&= (a \otimes h) \cdot (bc).
\end{aligned}$$

Definimos agora $\underline{\Delta} : C \longrightarrow C \otimes_R C$ por $\underline{\Delta}(a \otimes h) = (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})$ e $\underline{\varepsilon} : C \longrightarrow R$ por $\underline{\varepsilon}(a \otimes h) = a\varepsilon(h)$. Mostremos agora que $\underline{\Delta}$ e $\underline{\varepsilon}$ são morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a, b \in R$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}((a \otimes h) \cdot b) &= \underline{\Delta}(ab^{(0)} \otimes hb^{(1)}) \\
&= (ab^{(0)} \otimes (hb^{(1)})_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes (hb^{(1)})_{(2)}) \\
&= (ab^{(0)} \otimes h_{(1)}b^{(1)}_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}_{(2)}) \\
&= (ab^{(0)(0)} \otimes h_{(1)}b^{(0)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \cdot b^{(0)} \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R b^{(0)} \cdot (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (b^{(0)} \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \cdot b \\
&= \underline{\Delta}(a \otimes h) \cdot b
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((a \otimes h) \cdot b) &= \underline{\varepsilon}(ab^{(0)} \otimes hb^{(1)}) \\
&= ab^{(0)}\varepsilon(hb^{(1)}) \\
&= ab^{(0)}\varepsilon(h)\varepsilon(b^{(1)}) \\
&= ab^{(0)}\varepsilon(b^{(1)})\varepsilon(h) \\
&= ab\varepsilon(h) \\
&= a\varepsilon(h)b \\
&= \underline{\varepsilon}(a \otimes h)b.
\end{aligned}$$

Que $\underline{\Delta}$ e $\underline{\varepsilon}$ são morfismos à esquerda é trivial. Mostremos agora que a coassociatividade e a counitalidade são satisfeitas. De fato, para quaisquer $a \in R$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\underline{\Delta} \otimes_R C)\underline{\Delta}(a \otimes h) &= (\underline{\Delta} \otimes_R C)((a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= \underline{\Delta}(a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(1)(2)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R \underline{\Delta}(1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (C \otimes_R \underline{\Delta})\underline{\Delta}(a \otimes h),
\end{aligned}$$

temos também

$$\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon} \otimes_R C)\underline{\Delta}(a \otimes h) &= \underline{\varepsilon}(a \otimes h_{(1)}) \cdot (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a\varepsilon(h_{(1)})) \cdot (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= a\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= a \otimes \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= a \otimes h,
\end{aligned}$$

que $(C \otimes_R \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(a \otimes h) = a \otimes h$ é análogo.

Antes do próximo exemplo vamos definir um módulo projetivo finitamente gerado, que será importante em vários resultados, principalmente quando tratarmos da dualidade. Seja P um R-módulo à direita, consideremos $P^* = Hom_R(P, R)$.

Note que P^* tem estrutura de R-módulo à esquerda. De fato, para quaisquer $\varphi \in P^*$, $s, r \in R$ e $p \in P$, definimos $(r \cdot \varphi)(p) = r\varphi(p)$, desta forma temos

$$(s \cdot (r \cdot \varphi))(p) = s(r \cdot \varphi)(p) = sr\varphi(p) = ((sr) \cdot \varphi)(p).$$

Note que $r \cdot \varphi$ continua R-linear à direita, ou seja,

$$(r \cdot \varphi)(p \cdot s) = r\varphi(p \cdot s) = r\varphi(p)s = (r \cdot \varphi)(p)s.$$

Definição 1.34 *Seja P um R-módulo à direita. Considerando $P^* = Hom_R(P, R)$, dizemos que P é* ***projetivo finitamente gerado*** *se existem $n \in \mathbb{N}$, $\{x_i \in P\}_{i=1}^n$ e $\{f^i \in P^*\}_{i=1}^n$, tais que, para todo $p \in P$ temos $p = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f^i(p)$. Neste caso dizemos que $\{x_i \in P\}_{i=1}^n$ e $\{f^i \in P^*\}_{i=1}^n$ é a* ***base dual*** *de P.*

Como consequência da definição acima, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot f^i$ para todo $\varphi \in P^*$. De fato, para todo $p \in P$ temos

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot f^i)(p) &= \sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) \cdot f^i)(p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) f^i(p) \\
&= \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f^i(p)) \\
&= \varphi(p).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.35 *(Coanel de um R-módulo projetivo finitamente gerado) Sejam B k-álgebra e $P \in {}_B\mathcal{M}_R$ projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita. Consideremos $P^* = Hom_R(P, R)$. Note que $P^* \in {}_R\mathcal{M}_B$, com estrutura dada por $(r \cdot \varphi \leftharpoondown b)(p) = r\varphi(b \cdot p)$. Então, $C = P^* \otimes_B P$ é um R-coanel.*

De fato, note que $P^* \otimes_B P$ é um R-bimódulo, a estrutura é dada por $r \cdot (\varphi \otimes p) \cdot r' = r \cdot \varphi \otimes p \cdot r'$ para quaisquer $r, r' \in R$, $\varphi \in P^*$ e $p \in P$. Definimos $\Delta : C \longrightarrow C \otimes_R C$ por

$$\Delta(\varphi \otimes p) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes x_i) \otimes_R (f^i \otimes p),$$

em que $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ e $\{f^i\}_{i=1}^{n}$ é a base dual de P, e definimos $\varepsilon : C \longrightarrow R$ por $\varepsilon(\varphi \otimes p) = \varphi(p)$, para quaisquer $p \in P$ e $\varphi \in P^*$. Vamos ver que Δ e ε são morfismos de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $\varphi \in P^*$, $p \in P$ e $r \in R$, mostremos apenas à direita, à esquerda é análogo. Segue então

$$\begin{aligned}
\Delta((\varphi \otimes p) \cdot r) &= \Delta(\varphi \otimes p \cdot r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes x_i) \otimes_R (f^i \otimes p \cdot r) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes x_i) \otimes_R (f^i \otimes p) \cdot r \\
&= (\sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes x_i) \otimes_R (f^i \otimes p)) \cdot r \\
&= \Delta(\varphi \otimes p) \cdot r
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon((\varphi\otimes p)\cdot r) &= \varepsilon(\varphi\otimes p\cdot r)\\ &= \varphi(p\cdot r)\\ &= \varphi(p)r\\ &= \varepsilon(\varphi\otimes p)r.\end{aligned}$$

Mostremos agora a coassociatividade de Δ e a counitalidade de ε. De fato, para quaisquer $\varphi\in P^*$ e $p\in P$, temos

$$\begin{aligned}(C\otimes_R \Delta)\Delta(\varphi\otimes_B p) &= (C\otimes_R \Delta)(\sum_{i=1}^{n}(\varphi\otimes x_i)\otimes_R (f^i\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\varphi\otimes x_i)\otimes_R \Delta(f^i\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varphi\otimes x_i)\otimes_R (f^i\otimes x_j)\otimes_R (f^j\otimes p),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes_R C)\Delta(\varphi\otimes_B p) &= (\Delta\otimes_R C)(\sum_{j=1}^{n}(\varphi\otimes x_j)\otimes_R (f^j\otimes p))\\ &= \sum_{j=1}^{n}\Delta(\varphi\otimes x_j)\otimes_R (f^j\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varphi\otimes x_i)\otimes_R (f^i\otimes x_j)\otimes_R (f^j\otimes p).\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes_R C)\Delta(\varphi\otimes_B p) &= (\varepsilon\otimes_R C)\sum_{j=1}^{n}(\varphi\otimes x_j)\otimes_R (f^j\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(\varphi\otimes x_i)\cdot(f^i\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon(\varphi\otimes x_i)\cdot f^i\otimes p)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)\cdot f^i\otimes p)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) \cdot f^i) \otimes p \\
&= \varphi \otimes p,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(C \otimes \varepsilon)\Delta(\varphi \otimes p) &= (C \otimes \varepsilon)(\sum_{j=1}^{n} (\varphi \otimes x_j) \otimes_R (f^j \otimes p)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\varphi \otimes x_j) \cdot \varepsilon(f^j \otimes p) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi \otimes x_i \cdot f^i(p)) \\
&= \varphi \otimes (\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f^i(p)) \\
&= \varphi \otimes p.
\end{aligned}
$$

1.4.1 Comódulos Sobre Comonóides

Definição 1.36 *Seja $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ um objeto coálgebra em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um C-**comódulo à direita** é um par (M, ρ^M), em que M é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\rho^M : M \longrightarrow M \otimes C$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, tal que os seguintes diagramas comutam*

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho^M"] \arrow[d, "\rho^M"'] & M \otimes C \arrow[d, "M \otimes \Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho^M \otimes C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho^M"] \arrow[dr, "r_M^{-1}"'] & M \otimes C \arrow[d, "M \otimes \varepsilon"] \\
 & M \otimes \mathbb{1}.
\end{tikzcd}
$$

De maneira análoga define-se C-**comódulo à esquerda**. Vamos usar a notação de Sweedler

$$\rho^M(m) = m^{(0)} \otimes m^{(1)} \in M \otimes C, \qquad \text{(estrutura à direita)}$$

e

$$\lambda^M(m) = m^{(-1)} \otimes m^{(0)} \in C \otimes M, \qquad \text{(estrutura à esquerda).}$$

Os axiomas de C-comódulo à direita na notação acima ficam:

- $m^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)} \otimes m^{(1)} = m^{(0)} \otimes m^{(1)}{}_{(1)} \otimes m^{(1)}{}_{(2)}$;
- $m^{(0)} \cdot \varepsilon(m^{(1)}) = m$.

Definição 1.37 *Sejam C um R-coanel, M e N C-comódulos à direita. Um* ***morfismo*** *de C-**comódulos à direita** é um morfismo de R-bimódulos $f : M \longrightarrow N$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho^M"'] & N \arrow[d, "\rho^N"] \\ M \otimes_R C \arrow[r, "f \otimes_R C"'] & N \otimes_R C. \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.38 *Seja C um R-coanel. Então C tem uma estrutura trivial de C-comódulo (à direita ou à esquerda) em que a coação é igual ao coproduto.*

Definição 1.39 *Seja (C, Δ, ε) um R-coanel. Um elemento $g \in C$ é dito ser um* ***group-like*** *se $\Delta(g) = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1_R$.*

Exemplo 1.40 *Seja C um R-coanel. Se existe $g \in C$ group-like, então R é um C-comódulo à direita. Definimos a coação $\rho^R : R \longrightarrow R \otimes C \cong C$, por $\rho^R(r) = r \otimes g \cong r \cdot g$ para todo $r \in R$. Ou simetricamente R é um C-comódulo à esquerda. Definimos a coação $\rho^R : R \longrightarrow C \otimes R \cong C$, por $\rho^R(r) = g \otimes r \cong g \cdot r$ para todo $r \in R$. Reciprocamente, se R é um C-comódulo à direita, então C possui um group-like g, conforme Lema 1.51.*

Exemplo 1.41 *Sejam G um grupo e M um R-módulo à direita G-graduado, ou seja, $M \cong \oplus_{g \in G} M_g$, em que M_g são R-módulos à direita. Consideremos $\underline{RG} = \oplus_{g \in G} R\delta_g$, o coanel de grupo (ver Exemplo 1.32), com estrutura de R-bimódulos dada, para quaisquer $r, r' \in R$ e $g \in G$, por $r \cdot \delta_g \cdot r' = rr'\delta_g$, e estrutura de R-coanel dada por $\Delta : \underline{RG} \longrightarrow \underline{RG} \otimes_R \underline{RG}$, $\Delta(\delta_g) = \delta_g \otimes \delta_g$ e $\varepsilon : \underline{RG} \longrightarrow R$, $\varepsilon(\delta_g) = 1_R$. Então, M é um $\underline{RG}$-comódulo à direita com coação $\rho : M \longrightarrow M \otimes_R \underline{RG}$ definida por $\rho(\sum_{g \in G} m_g) = \sum_{g \in G} m_g \otimes \delta_g$.*

1.5 Dualidade

Sabemos que o dual de uma k-coálgebra, tem uma estrutura canônica de k-álgebra. De maneira inversa, se uma k-álgebra é projetiva finitamente gerada como k-módulo, então essa k-álgebra possui uma estrutura de k-coálgebra ver [11]. Iremos fazer o análogo para R-anéis e R-coanéis.

Proposição 1.42 *Para um R-coanel (C, Δ, ε), o seu dual à esquerda ${}^*C := {}_R Hom(C, R)$ possui uma estrutura canônica de R-anel, em que para quaisquer $\varphi, \psi \in {}^*C$, $c \in C$ a multiplicação (produto de convolução) é dada por $(\varphi * \psi)(c) := \psi(c_{(1)} \cdot \varphi(c_2))$ e unidade $\mathbb{1}_{{}^*C} = \varepsilon$.*

Demonstração: Primeiramente, a estrutura de R-bimódulo em ${}^*C$ é dada por $(r \rightharpoonup \varphi \cdot r')(c) = \varphi(c \cdot r)r'$ para quaisquer $r, r' \in R$, $\varphi \in {}^*C$ e $c \in C$. Agora vamos mostrar que o produto de convolução, definido acima, é R-balanceado. De fato, para quaisquer $\varphi, \psi \in {}^*C$, $c \in C$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned} ((\varphi \cdot r) * \psi)(c) &= \psi(c_{(1)} \cdot (\varphi \cdot r)(c_{(2)})) \\ &= \psi(c_{(1)} \cdot (\varphi(c_{(2)})r)) \\ &= \psi((c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)})) \cdot r) \\ &= (r \rightharpoonup \psi)(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)})) \\ &= (\varphi * (r \rightharpoonup \psi))(c). \end{aligned}$$

Agora, é claro que o produto de convolução é morfismo de R-módulo à direita, basta mostrarmos para a estrutura à esquerda. De fato, antes note que Δ é morfismo de R-bimódulos, assim temos,

$$\Delta(c \cdot r) = \Delta(c) \cdot r = (c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \cdot r = c_{(1)} \otimes (c_{(2)} \cdot r).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} ((r \rightharpoonup \varphi) * \psi)(c) &= \psi(c_{(1)} \cdot (r \rightharpoonup \varphi(c_{(2)}))) \\ &= \psi(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)} \cdot r)), \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} (r \rightharpoonup (\varphi * \psi))(c) &= (\varphi * \psi)(c \cdot r) \\ &= \psi(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)} \cdot r)). \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\mathbb{1}_{{}^*C} = \varepsilon$ e que o produto de convolução é associativo. De fato, para quaisquer $c \in C$, φ, ψ e $\theta \in {}^*C$, temos

$$\begin{aligned} (\varepsilon * \varphi)(c) &= \varphi(c_{(1)} \cdot \varepsilon(c_{(2)})) \\ &= \varphi(c) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\varphi * \varepsilon)(c) &= \varepsilon(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)})) \\ &= \varepsilon(c_{(1)})\varphi(c_{(2)}) \\ &= \varphi(\varepsilon(c_{(1)}) \cdot c_{(2)}) \\ &= \varphi(c).\end{aligned}$$

Agora note que, $\Delta(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)})) = c_{(1)} \otimes (c_{(2)} \cdot \varphi(c_{(3)}))$, desta forma, temos

$$\begin{aligned}(\varphi * (\psi * \theta))(c) &= (\psi * \theta)(c_{(1)} \cdot \varphi(c_{(2)})) \\ &= \theta(c_{(1)} \cdot (\psi(c_{(2)} \cdot \varphi(c_{(3)})))) \\ &= \theta(c_{(1)} \cdot (\psi * \varphi)(c_{(2)})) \\ &= ((\varphi * \psi) * \theta)(c).\end{aligned}$$

■

Agora veremos dois lemas que serão usados na nossa próxima proposição.

Lema 1.43 *Seja B um R-anel projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita. Considerando $B^* = Hom_R(B, R)$ temos que a seguinte aplicação é uma bijeção:*

$$\begin{array}{cccc}\widehat{(\ )}: & B^* \otimes_R B^* & \rightarrow & Hom_R(B \otimes_R B, R) \\ & \varphi \otimes \psi & \mapsto & \widehat{\varphi \otimes \psi}\end{array}$$

em que $\widehat{\varphi \otimes \psi}(a \otimes b) = \varphi(\psi(a) \cdot b)$, para quaisquer $a, b \in B$.

Demonstração: De fato, defina

$$\widetilde{(\ )}: Hom_R(B \otimes_R B, R) \longrightarrow B^* \otimes_R B^*,$$

$F \longmapsto \widetilde{F}$ tal que

$$\widetilde{F} := \sum_{i,j=1}^{n} F(x_i \otimes x_j) \cdot \rho_j \otimes \rho_i,$$

em que $\{x_i \in B\}_{i=1}^n$, $\{\rho_i \in B^*\}_{i=1}^n$ é a base dual. Mostremos que $\widehat{(\ )}$ e $\widetilde{(\ )}$ são inversas uma da outra. De fato, para quaisquer $F \in Hom_R(B \otimes_R B, R)$ e $a, b \in B$, temos

$$\widehat{\widetilde{F}}(a \otimes b) = \left(\widehat{\sum_{i,j=1}^{n} F(x_i \otimes x_j) \cdot \rho_j \otimes \rho_i}\right)(a \otimes b)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} F(x_i \otimes x_j)\rho_j(\rho_i(a)\cdot b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i \otimes \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \rho_j(\rho_i(a)\cdot b)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i \otimes \rho_i(a)\cdot b\right) \\
&= F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \rho_i(a) \otimes b\right) \\
&= F(a \otimes b),
\end{aligned}
$$

por outro lado, para quaisquer $\varphi, \psi \in B^*$, temos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\widehat{\varphi \otimes \psi}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \widehat{\varphi \otimes \psi}(x_i \otimes x_j)\cdot \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(\psi(x_i)\cdot x_j)\cdot \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\varphi \leftharpoonup \psi(x_i))(x_j)\cdot \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi \leftharpoonup \psi(x_i) \otimes \rho_i \\
&= \varphi \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i)\cdot \rho_i\right) \\
&= \varphi \otimes \psi.
\end{aligned}
$$

■

Lema 1.44 *Seja B um R-anel, que é projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita. Considerando $B^* = Hom_R(B,R)$ temos que a seguinte aplicação é uma bijeção*

$$
\begin{array}{rlcl}
\widehat{(\ \ )}: & B^* \otimes_R B^* \otimes_R B^* & \to & Hom_R(B \otimes_R B \otimes_R B, R) \\
& \varphi \otimes \psi \otimes \xi & \mapsto & \varphi \widehat{\otimes \psi \otimes} \xi
\end{array}
$$

em que $\varphi \widehat{\otimes \psi \otimes} \xi(a \otimes b \otimes c) = \varphi(\psi(\xi(a)\cdot b)\cdot c) =$, para quaisquer a, b e $c \in B$.

Demonstração: De fato, defina $\widetilde{(\ \ )} : Hom_R(B \otimes_R B \otimes_R B, R) \longrightarrow B^* \otimes_R B^* \otimes_R B^*$, $F \longmapsto \widetilde{F}$ tal que

$$\widetilde{F} := \sum_{i,j,k=1}^{n} F(x_i \otimes x_j \otimes x_k) \cdot \rho_k \otimes \rho_j \otimes \rho_i,$$

em que x_i, x_j, x_k, ρ_i, ρ_j e ρ_k estão na base dual. Mostremos que $\widehat{(\ \ )}$ e $\widetilde{(\ \ )}$ são inversas uma da outra. De fato, para quaisquer $F \in Hom_R(B \otimes_R B \otimes_R B, R)$ e $a, b, c \in B$, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\widetilde{F}}(a \otimes b \otimes c) &= \left(\widehat{\sum_{i,j,k=1}^{n} F(x_i \otimes x_j \otimes x_k) \cdot \rho_k \otimes \rho_j \otimes \rho_i}\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} F(x_i \otimes x_j \otimes x_k)\rho_k(\rho_j(\rho_i(a) \cdot b) \cdot c) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} F\left(x_i \otimes x_j \otimes \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \rho_k(\rho_j(\rho_i(a) \cdot b) \cdot c)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} F\left(x_i \otimes x_j \otimes \rho_j(\rho_i(a) \cdot b) \cdot c\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} F\left(x_i \otimes x_j \cdot \rho_j(\rho_i(a) \cdot b) \otimes c\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i \otimes \rho_i(a) \cdot b \otimes c\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} F\left(x_i \cdot \rho_i(a) \otimes b \otimes c\right) \\
&= F(a \otimes b \otimes c),
\end{aligned}$$

por outro lado, para quaisquer $\varphi, \psi\ \xi \in B^*$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi \widetilde{\widehat{\otimes \psi \otimes}} \xi &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \varphi \widehat{\otimes \psi \otimes} \xi(x_i \otimes x_j \otimes x_k) \cdot \rho_k \otimes \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \varphi(\psi(\xi(x_i) \cdot x_j) \cdot x_k) \cdot \rho_k \otimes \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} (\varphi \leftharpoondown \psi(\xi(x_i) \cdot x_j))(x_k) \cdot \rho_k \otimes \rho_j \otimes \rho_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi \leftharpoonup \psi(\xi(x_i) \cdot x_j) \otimes \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi \otimes (\psi \leftharpoonup \xi(x_i))(x_j) \cdot \rho_j \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes \psi \leftharpoonup \xi(x_i) \otimes \rho_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes \psi \otimes \xi(x_i) \cdot \rho_i \\
&= \varphi \otimes \psi \otimes \xi.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.45 *Para um R-anel (B, μ, η) projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita, o dual à direita B^* possui uma estrutura canônica de R-coanel. O coproduto em termos da base dual $(\{x_i \in B\}_{i=1}^n, \{\rho_i \in B^*\}_{i=1}^n)$, é dado por*

$$\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i.$$

A counidade é dada por $\varepsilon : B^* \longrightarrow R$, $\varepsilon(\varphi) = \varphi(1_B)$, para todo $\varphi \in B^*$.

Demonstração: Primeiramente, a estrutura de R-bimódulo em B^* é dada, para quaisquer $r, r' \in R$, $\varphi \in B^*$ e $b \in B$, por $(r \cdot \varphi \leftharpoonup r')(b) = r\varphi(r' \cdot b)$. Agora pelo Lema 1.43 vamos ver que o coproduto é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $r \in R$, $\varphi \in B^*$ e $a, b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Delta(\varphi \leftharpoonup r)}(a \otimes b) &= \left(\widehat{\sum_{i=1}^{n} (\varphi \leftharpoonup r)(x_i -) \otimes_R \rho_i} \right)(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi \leftharpoonup r)(x_i(\rho_i(a) \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi \leftharpoonup r)((x_i \cdot \rho_i(a))b) \\
&= (\varphi \leftharpoonup r)(ab) \\
&= \varphi(r \cdot ab),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\widehat{\Delta(\varphi) \leftharpoonup r})(a \otimes b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i \leftharpoonup r}\right)(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i((\rho_i \leftharpoonup r)(a) \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i(r \cdot a) \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(r \cdot a))b) \\
&= \varphi((r \cdot a)b) \\
&= \varphi(r \cdot ab).
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta(r \cdot \varphi)}(a \otimes b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{(r \cdot \varphi)(x_i -) \otimes_R \rho_i}\right)(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (r \cdot \varphi)(x_i(\rho_i(a) \cdot b)) \\
&= r \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(a))b) \\
&= r\varphi(ab),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(r \cdot \widehat{\Delta(\varphi)})(a \otimes b) &= \left(r \cdot \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i}\right)(a \otimes b) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} r \cdot \widehat{\varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i}\right)(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r\varphi(x_i(\rho_i(a) \cdot b)) \\
&= r \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(a))b)
\end{aligned}$$

$$= r\varphi(ab).$$

Segue que Δ é morfismo de R-bimódulos. Agora usando o Lema 1.44, vamos mostrar que vale a coassociatividade. De fato, para quaisquer $a, b, c \in B$ e $\varphi \in B^*$, temos

$$
\begin{aligned}
((B^* \widehat{\otimes_R \Delta})\Delta(\varphi))(a \otimes b \otimes c) = & \\
&= \left((B^* \otimes \Delta)\left(\widehat{\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i}\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i -) \widehat{\otimes_R \rho_i}(x_j -) \otimes_R \rho_j\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i(x_j(\rho_j(a) \cdot b)) \cdot c)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i((x_j \cdot \rho_j(a))b)) \cdot c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i(ab) \cdot c)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(ab))c)) \\
&= \varphi(abc),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
((\Delta \widehat{\otimes_R B^*})\Delta(\varphi))(a \otimes b \otimes c) = & \\
&= \left((\Delta \otimes B^*)\left(\widehat{\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i -) \otimes_R \rho_i}\right)\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i \widehat{x_j -) \otimes_R} \rho_j \otimes_R \rho_i\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i x_j(\rho_j(\rho_i(a) \cdot b) \cdot c)) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(x_i(x_j \cdot \rho_j(\rho_i(a) \cdot b))c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i(a) \cdot b)c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(a))bc) \\
&= \varphi(abc).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que vale a counitalidade. De fato, para quaisquer $\varphi \in B^*$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
((B^* \otimes_R \varepsilon)\Delta(\varphi))(b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i -) \leftharpoonup \varepsilon(\rho_i) \right)(b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i(\rho_i(1_B) \cdot b)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi((x_i \cdot \rho_i(1_B))b) \\
&= \varphi(1_B b) = \varphi(b)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes_R B^*)\Delta(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\varphi(x_i -)) \cdot \rho_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot \rho_i \\
&= \varphi.
\end{aligned}
$$

■

Nosso próximo lema mostra a condição, necessária e suficiente, para R como módulo regular (R é um módulo sobre ele mesmo), ser um A-módulo, em que A é um R-anel. Este lema também será usado quando estivermos tratando da categoria monoidal de módulos sobre um R-bialgebróide à direita no segundo capítulo. Em tal lema, também aparece a definição de caracter à direita, que será usado na definição de R-bialgebróide à direita.

Lema 1.46 *O módulo à direta regular R se estende para um módulo à direita sobre um R-anel (A, μ, η) se, e somente se, existe um morfismo de k-módulo $\chi : A \longrightarrow R$, tal que para quaisquer $a, b \in A$ e $r \in R$ as seguintes condições são satisfeitas.*

(i) $\chi(1_A) = 1_R$;

(ii) $\chi(a\eta(r)) = \chi(a)r$;

(iii) $\chi((\eta \circ \chi)(a)b) = \chi(ab)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Queremos definir $\chi : A \longrightarrow R$ morfismo de k-módulos. Como R é A-módulo à direita, temos $\psi_R : R \otimes_R A \longrightarrow R$ em que $\psi_R(r \otimes a) = r \leftharpoonup a$ é a ação à direita de A em R. Também temos

$$A \xrightarrow{l_A^{-1}} R \otimes_R A \xrightarrow{\psi_R} R \,.$$

Defina $\chi := \psi_R \circ l_A^{-1}$, dessa forma temos

$$\chi(a) = (\psi_R \circ l_A^{-1})(a) = \psi_R(1_R \otimes_R a) = 1_R \leftharpoonup a.$$

Note que χ é morfismo de k-módulos, pois é a composição de morfismos de k-módulos. Vamos verificar as outras condições. De fato, para quaisquer $a, b \in A$ e $r \in R$, temos $\chi(1_A) = 1_R \leftharpoonup 1_A = 1_R$ e também

$$\begin{aligned}
\chi(a\eta(r)) &= 1_R \leftharpoonup (a\eta(r)) \\
&= (1_R \leftharpoonup a) \leftharpoonup \eta(r) \\
&= (1_R \leftharpoonup a)r \\
&= \chi(a)r,
\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\chi((\eta \circ \chi)(a)b) &= \chi(\eta(\chi(a))b) \\
&= 1_A \leftharpoonup \eta(\chi(a))b \\
&= (1_R \leftharpoonup \eta(\chi(a))) \leftharpoonup b \\
&= (1_R \leftharpoonup 1_A \cdot \chi(a)) \leftharpoonup b \\
&= ((1_R \leftharpoonup 1_A)\chi(a)) \leftharpoonup b \\
&= \chi(a) \leftharpoonup b = (1_R \leftharpoonup a) \leftharpoonup b \\
&= 1_R \leftharpoonup ab = \chi(ab).
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Temos $\chi : A \longrightarrow R$ morfismo de k-módulos que satisfaz as condições acima. Defina,

$$\begin{array}{rccc}
\widetilde{\psi_R} : & R \times A & \to & R \\
& (r, a) & \mapsto & \chi(\eta(r)a).
\end{array}$$

Mostremos primeiro que $\widetilde{\psi_R}$ é R-balanceada. De fato, para quaisquer $r, s \in R$ e $a \in A$ temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi_R}(r, s \cdot a) =& \chi(\eta(r)(s \cdot a)) \\ &= \chi(\eta(r)\eta(s)a) \\ &= \chi(\eta(rs)a) \\ &= \widetilde{\psi_R}(rs, a).\end{aligned}$$

Segue que $\widetilde{\psi_R}$ é R-balanceada. Portanto, existe única $\psi_R : R \otimes_R A \longrightarrow R$, tal que $\psi_R(r \otimes a) = \chi(\eta(r)a)$, para quaisquer $r \in R$ e $a \in A$. Vamos mostrar agora a comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "\psi_R \otimes A"] \arrow[d, "R\otimes\mu"'] & R \otimes_R A \arrow[d, "\psi_R"] \\ R \otimes_R A \arrow[r, "\psi_R"'] & R, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \cong R \otimes_R R \arrow[r, "R\otimes\eta"] \arrow[dr, "Id_R"'] & R \otimes_R A \arrow[d, "\psi_R"] \\ & R. \end{tikzcd}$$

De fato, para quaisquer $a, b \in A$ e $r \in R$, temos para o primeiro diagrama

$$\begin{aligned}(\psi_R \circ (\psi_R \otimes A))(r \otimes a \otimes b) &= \psi_R(\chi(\eta(r)a) \otimes b) \\ &= \chi(\eta(\chi(\eta(r)a))b) \\ &= \chi(\eta(r)ab) \\ &= \psi_R(r \otimes ab) \\ &= (\psi_R \circ (R \otimes \mu))(r \otimes a \otimes b).\end{aligned}$$

Para o segundo diagrama temos

$$\begin{aligned}(\psi_R \circ (R \otimes \eta))(r \otimes 1_R) &= \psi_R(r \otimes \eta(1_R)) \\ &= \psi_R(r \otimes 1_A) \\ &= \chi(\eta(r)1_A) \\ &= \chi(1_A\eta(r)) \\ &= \chi(1_A)r \\ &= 1_R r = r.\end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. ■

Definição 1.47 *Seja (A, μ, η) um R-anel. Um morfismo de k-módulos $\chi : A \longrightarrow R$, satisfazendo as condições do lema acima é chamado de* ***caracter à direita****.*

Definição 1.48 *Seja (A, μ, η) um R-anel possuindo um caracter à direita $\chi : A \longrightarrow R$. Os **invariantes** de um A-módulo à direita $(M, \cdot)$ com respeito ao caracter χ são os elementos do k-submódulo*

$$M_\chi := \{m \in M; \quad m \cdot a = m \cdot \eta(\chi(a)), \quad \forall a \in A\}.$$

Proposição 1.49 *Sejam (A, μ, η) um R-anel com um caracter à direita $\chi : A \longrightarrow R$ e M um A-módulo à direita. Então M_χ é isomorfo a $Hom_A(R, M)$ como k-módulos. Em particular, os invariantes de R são os elementos da subálgebra*

$$B = \{r \in R; \;\; \chi(\eta(r)a) = r\chi(a), \;\; \forall\, a \in A\}.$$

Demonstração: Defina $\varphi : M_\chi \longrightarrow Hom_A(R, M)$, $\varphi(m)(r) = m{\cdot}\eta(r)$, para quaisquer $m \in M_\chi$ e $r \in R$. Mostremos que $\varphi(m)$ é morfismo de A-módulos à direita. De fato, denotamos $\psi_R(r \otimes a) = r \triangleleft a = \chi(\eta(r)a)$ e para quaisquer $m \in M_\chi$, $a \in A$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(m)(r \triangleleft a) &= m \cdot \eta(r \triangleleft a) \\
&= m \cdot \eta(\chi(\eta(r)a)) \\
&= m \cdot \eta(r)a \\
&= (m \cdot \eta(r)) \cdot a \\
&= \varphi(m)(r) \cdot a.
\end{aligned}$$

É fácil ver que φ é morfismo de k-módulos. Agora seja $m \in ker(\varphi)$, então $m \cdot \eta(r) = \varphi(m)(r) = 0$ para todo $r \in R$, em particular para $r = 1_R$ segue que $m = 0$, ou seja, φ é injetora. Agora considere $f \in Hom_A(R, M)$ qualquer, defina $m = f(1_R) \in M$ e note que $f(1_R) \in M_\chi$. De fato, para todo $a \in A$, temos

$$\begin{aligned}
f(1_R) \cdot \eta(\chi(a)) &= f(1_R \triangleleft \eta(\chi(a))) \\
&= f(\chi(\eta(1_R)\eta(\chi(a)))) \\
&= f(\chi(\eta(\chi(a)))) \\
&= f(\chi(a)) \\
&= f(\chi(\eta(1_R)a)) \\
&= f(1_R \triangleleft a) \\
&= f(1_R) \cdot a.
\end{aligned}$$

Assim para todo $r \in R$, temos

$$\varphi(f(1_R))(r) = f(1_R) \cdot \eta(r)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(1_R \triangleleft \eta(r)) \\
&= f(\chi(\eta(1_R)\eta(r))) \\
&= f(\chi(1_A)r) \\
&= f(1_R r) = f(r).
\end{aligned}
$$

Segue daí que φ é sobrejetora. Portanto, φ é isomorfismo. Mostremos agora que $B = R_\chi$. Para tanto, mostremos primeiro que $B \subseteq R_\chi$. De fato, para todo $r \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
r \triangleleft \eta(\chi(a)) &= \chi(\eta(r)\eta(\chi(a))) \\
&= \chi(\eta(r))\chi(a) \\
&= \chi(1_A)r\chi(a) \\
&= r\chi(a) \\
&= \chi(\eta(r)a) \\
&= r \triangleleft a,
\end{aligned}
$$

ou seja, $r \in R_\chi$. Mostremos agora que $R_\chi \subseteq B$. De fato, para todo $i \in R_\chi$, temos

$$
\begin{aligned}
\chi(\eta(r)a) &= r \triangleleft a \\
&= r \triangleleft \eta(\chi(a)) \\
&= \chi(\eta(r)\eta(\chi(a))) \\
&= \chi(\eta(r))\chi(a) \\
&= \chi(1_A)r\chi(a) \\
&= r\chi(a),
\end{aligned}
$$

ou seja, $r \in B$. Segue portanto, que $B = R_\chi$. ■

Associado ao caracter χ, existe um morfismo canônico

$$
\begin{array}{rccc}
F: & A & \to & {}_B End(R) \\
 & a & \mapsto & r \longmapsto \chi(\eta(r)a),
\end{array}
$$

em que $B = R_\chi$ definido na proposição 1.49.

Definição 1.50 *O R-anel (A, μ, η) é dito ser de **Galois** com respeito a χ se F é bijetiva.*

Lema 1.51 *O R-módulo à direita regular R se estende para um C-comódulo à direita de um R-coanel (C, Δ, ε) se, e somente se, existe um group-like $g \in C$.*

Demonstração: ($\Longrightarrow$) R é C-comódulo à direita, ou seja, os diagramas seguintes comutam

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & R \otimes C \arrow[d, "R\otimes\Delta"] \\ R \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes C"'] & R \otimes C \otimes C, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "l_R^{-1}"'] & R \otimes C \arrow[d, "R\otimes\varepsilon"] \\ & R \cong R \otimes R. \end{tikzcd} .$$

Agora defina $g = \rho(1_R)$, mais precisamente utilizando o isomorfismo $l_C : R \otimes C \longrightarrow C$ temos $g = l_c \circ \rho(1_R)$. Assim,

$$l_{C\otimes C}(R \otimes \Delta)(1_R \otimes g) = l_{C\otimes C}(1_R \otimes g_{(1)} \otimes g_{(2)}) = g_{(1)} \otimes g_{(2)} = \Delta(g).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta(g) &= l_{C\otimes C}(R \otimes \Delta)(1_R \otimes g) \\
&= l_{C\otimes C}(R \otimes \Delta)\rho(1_R) \\
&= l_{C\otimes C}(\rho \otimes C)\rho(1_R) \\
&= (l_C \otimes C)(\rho \otimes C)(1_R \otimes g) \\
&= l_C \circ \rho(1_R) \otimes g \\
&= g \otimes g.
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
1_R &= l_R \circ l_R^{-1}(1_R) \\
&= l_R(R \otimes \varepsilon)\rho(1_R) \\
&= l_R(R \otimes \varepsilon)(1_R \otimes g) \\
&= l_R(1_R \otimes \varepsilon(g)) = \varepsilon(g).
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Agora, seja $g \in C$, satisfazendo as condições acima, defina

$$\begin{array}{rccc}
\rho : & R & \longrightarrow & R \otimes C \\
& r & \longmapsto & 1_R \otimes g \cdot r,
\end{array}$$

note que ρ é morfismo de R-módulo à direita. De fato,

$$\begin{aligned}
\rho(rs) &= 1_R \otimes g \cdot (rs) \\
&= 1_R \otimes (g \cdot r) \cdot s \\
&= (1_R \otimes g \cdot r)s \\
&= \rho(r)s.
\end{aligned}$$

Portanto, ρ é morfismo de R-módulo à direita. Vamos mostrar que ρ é uma coação à direita. De fato, temos

$$\begin{aligned}(R\otimes\Delta)\rho(r) &= (R\otimes\Delta)(1_R\otimes g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\Delta(g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\Delta(g)r\\ &= 1_R\otimes(g\otimes g)r\\ &= 1_R\otimes g\otimes g\cdot r\\ &= \rho(1_R)\otimes g\cdot r\\ &= (\rho\otimes C)(1_R\otimes g\cdot r)\\ &= (\rho\otimes C)\rho(r).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(R\otimes\varepsilon)\rho(r) &= (R\otimes\varepsilon)(1_R\otimes g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\varepsilon(g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\varepsilon(g)r\\ &= 1_R\otimes r = l_R^{-1}(r).\end{aligned}$$

Segue portanto, que R tem estrutura de C-comódulo à direita. ■

Deste ponto em diante, faremos as identificações sempre que as expressões envolverem os isomorfismos l_M e r_M.

Definição 1.52 *Seja (C,Δ,ε) um R-coanel possuindo um grouplike $g\in C$. Os* ***coinvariantes*** *de um comódulo à direita (M,ρ_M) com respeito a g, são os elementos do k-submódulo*

$$M^g := \{m\in M;\ \ \rho_M(m)=m\otimes g\}.$$

Proposição 1.53 *Sejam (C,Δ,ε) um R-coanel com um grouplike $g\in C$ e M um C-comódulo à direita. Então M^g é isomorfo a $Hom^C(R,M)$ como k-módulos. Em particular, os coinvariantes de R são os elementos da subálgebra*

$$B=\{r\in R;\ \ r\cdot g=g\cdot r\}.$$

Demonstração: Defina $\varphi: M^g\longrightarrow Hom^C(R,M)$, $\varphi(m)(r)=m\cdot r$ para todo $r\in R$. Vamos ver que $\varphi(m)$ é morfismo de C-comódulos à direita. De fato, para quaisquer $m\in M^g$ e $r\in R$, temos

$$\rho_M(\varphi(m)(r)) = \rho_M(m\cdot r)$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_M(m) \cdot r \\
&= m \otimes g \cdot r \\
&= m \cdot 1_R \otimes g \cdot r \\
&= \varphi(m)(1_R) \otimes g \cdot r \\
&= (\varphi(m) \otimes C)(1_R \otimes g \cdot r) \\
&= (\varphi(m) \otimes C)\rho_R(r).
\end{aligned}
$$

Agora defina $\psi : Hom^C(R, M) \longrightarrow M^g$ tal que $\psi(f) = f(1_R)$ para todo $f \in Hom^C(R, M)$. Vamos ver que $f(1_R) \in M^g$. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\rho_M(f(1_R)) &= (f \otimes C)\rho_R(1_R) \\
&= (f \otimes C)(1_R \otimes g \cdot 1_R) \\
&= f(1_R) \otimes g.
\end{aligned}
$$

Mostremos que φ e ψ são inversas. De fato, para quaisquer $r \in R$, $m \in M^g$ e $f \in Hom^C(R, M)$ temos

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(f)(r) &= \varphi(f(1_R))(r) \\
&= f(1_R) \cdot r \\
&= f(1_R \cdot r) \\
&= f(r).
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)(m) &= \psi(\varphi(m)) \\
&= \varphi(m)(1_R) \\
&= m \cdot 1_R \\
&= m.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $B = R^g$. De fato, para todo $r \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\rho_R(r) &= 1_R \otimes g \cdot r \\
&= 1_R \otimes r \cdot g \\
&= r \otimes g.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para todo $r \in R^g$, temos

$$
\begin{aligned}
1_R \otimes g \cdot r &= \rho_R(r) \\
&= r \otimes g
\end{aligned}
$$

$$= 1_R \otimes r \cdot g.$$

Segue portanto, que $r \cdot g = g \cdot r$. Logo $B = R^g$. ∎

Associado ao grouplike g, existe um morfismo canônico,

$$\begin{array}{rccc} Can: & R \otimes R & \longrightarrow & C \\ & a \otimes b & \longmapsto & a \cdot g \cdot b. \end{array}$$

Definição 1.54 *O R-coanel C é dito ser um R-coanel de **Galois** se Can é uma bijeção.*

Proposição 1.55 *Seja C um R-coanel projetivo finitamente gerado como R-módulo à esquerda. Para $g \in C$, temos a aplicação $\chi_g : {}^*C \longrightarrow R$, $\phi \longmapsto \phi(g)$. Então vale as seguintes afirmações:*

(1) O elemento $g \in C$ é grouplike se, e somente se, χ_g é um caracter à direita no R-anel ${}^*C$;

(2) Um elemento $b \in R$ é um coinvariante do C-comódulo R à direita (com coação induzida por um elemento grouplike g) se, e somente se, b é um invariante do ${}^*C$-módulo à direita R (com respeito ao caracter à direita χ_g);

(3) Se o R-coanel C é um coanel de Galois (com respeito ao elemento grouplike g), então o R-anel ${}^*C$ é um anel Galois (com respeito ao caracter à direita χ_g).

Demonstração: Antes de provarmos a proposição vamos relembrar que, o produto de convolução em ${}^*C$ (ver Proposição 1.42) é dado da seguinte forma:

$$(\phi * \psi)(g) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_2))$$

para quaisquer $g \in C$ e $\phi, \psi \in {}^*C$. E ainda $\eta : R \longrightarrow {}^*C$ é definido por $\eta(r)(g) = \varepsilon(g)r$ para quaisquer $g \in C$ e $r \in R$.

(1) ($\Longrightarrow$) Temos que verificar as condições (i), (ii) e (iii) do Lema 1.46. De fato, para quaisquer $\phi, \psi \in {}^*C$, $r \in R$ e $g \in C$ um grouplike, temos,

(i) $\chi_g(1_{^*C}) = 1_R$, em que $1_{^*C} = \varepsilon$. De fato,

$$\chi_g(\varepsilon) = \varepsilon(g) = 1_R;$$

(ii) $\chi_g(\phi * \eta(r)) = \chi_g(\phi)r$. De fato, temos

$$\begin{aligned}\chi_g(\phi * \eta(r)) &= (\phi * \eta(r))(g) \\ &= \eta(r)(g \cdot (\phi(g))) \\ &= \varepsilon(g \cdot (\phi(g)))r \\ &= \varepsilon(g)\phi(r)r \\ &= \phi(g)r \\ &= \chi_g(\phi)r;\end{aligned}$$

(iii) $\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) = \chi_g(\phi * \psi)$. De fato,

$$\begin{aligned}\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) &= (\eta(\chi_g(\phi)) * \psi)(g) \\ &= \psi(g \cdot \eta(\chi_g(\phi))(g)) \\ &= \psi(g \cdot \varepsilon(g)\chi_g(\phi)) \\ &= \psi(g \cdot \chi_g(\phi)) \\ &= \psi(g \cdot \phi(g)) \\ &= (\phi * \psi)(g) \\ &= \chi_g(\phi * \psi).\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Queremos mostrar que g é grouplike, sabendo que χ_g é caracter à direita em ${}^*C$. De fato, temos

$$\varepsilon(g) = \chi_g(\varepsilon) = 1_R.$$

Agora note que,

$$\begin{aligned}\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) &= (\eta(\chi_g(\phi)) * \psi)(g) \\ &= \psi(g_{(1)} \cdot \eta(\chi_g(\phi))(g_{(2)})) \\ &= \psi(g_{(1)} \cdot \varepsilon(g_{(2)})\chi_g(\phi)) \\ &= \psi(g \cdot \chi_g(\phi)) \\ &= \psi(g \cdot \phi(g)),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\chi_g(\phi * \psi) = (\phi * \psi)(g) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_{(2)})).$$

Segue portanto, que para quaisquer $\phi, \psi \in {}^*C$, temos

$$\psi(g \cdot \phi(g)) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_{(2)})). \tag{1.3}$$

Agora como C é projetivo finitamente gerado como R-módulo à esquerda, temos $\{f^i \in {}^*C\}_{i=1}^n$ e $\{x_i \in C\}_{i=1}^n$ a base dual de C, ou seja, para $g \in C$, temos

$$g = \sum_{i=1}^n f^i(g) \cdot x_i$$

e para $g \cdot f^i(g)$, temos

$$g \cdot f^i(g) = \sum_{j=1}^n f^j(g \cdot f^i(g)) \cdot x_j.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
g \otimes g &= g \otimes \sum_{i=1}^n f^i(g) \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^n g \cdot f^i(g) \otimes x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^j(g \cdot f^i(g)) \cdot x_j \otimes x_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d f^j(g_{(1)} \cdot f^i(g_{(2)})) \cdot x_j \otimes x_i \quad \text{por 1.3} \\
&= \sum_{i=1}^n g_{(1)} \cdot f^i(g_{(2)}) \otimes x_i \\
&= g_{(1)} \otimes \sum_{i=1}^n f^i(g_{(2)}) \cdot x_i \\
&= g_{(1)} \otimes g_{(2)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(g) = g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g \otimes g$. Segue que g é grouplike.

(2) ($\Longrightarrow$) b é coinvariante de R, ou seja, $b \cdot g = g \cdot b$. Temos que mostrar que

$$\chi_g(\eta(b) * \phi) = b\, \chi_g(\phi).$$

De fato, para todo $\phi \in {}^*C$, temos

$$\begin{aligned}
\chi_g(\eta(b) * \phi) &= (\eta(b) * \phi)(g) \\
&= \phi(g \cdot \eta(b)(g))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(g \cdot \varepsilon(g)b) \\
&= \phi(g \cdot b) \\
&= \phi(b \cdot g) \\
&= b\phi(g) \\
&= b\,\chi_g(\phi).
\end{aligned}$$

Portanto, b é invariante do ${}^*C$-módulo à direita R (com respeito a χ_g).
($\Longleftarrow$) Temos que b é invariante de R, ou seja,

$$\chi_g(\eta(b) * \phi) = b\,\chi_g(\phi).$$

Assim, para todo $\phi \in {}^*C$ temos $\phi(g \cdot b) = \phi(b \cdot g)$. Temos que mostrar que $b \cdot g = g \cdot b$. De fato, usando novamente a base dual de C, temos

$$b \cdot g = \sum_{i=1}^{n} f^i(b \cdot g) \cdot x_i.$$

Desta forma,

$$b \cdot g = \sum_{i=1}^{n} f^i(b \cdot g) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} f^i(g \cdot b) \cdot x_i = g \cdot b.$$

Portanto, b é coinvariante do C-comódulo R (com respeito a g).

(3) Queremos mostrar que $F :\ {}^*C \longrightarrow {}_B End(R)$ é bijetiva, tal que, para quaisquer $r \in R$ e $\varphi \in {}^*C$, temos

$$\begin{aligned}
F(\varphi)(r) &= \chi_g(\eta(r) * \varphi) \\
&= (\eta(r) * \varphi)(g) \\
&= \varphi(g \cdot \eta(r)(g)) \\
&= \varphi(g \cdot \varepsilon(g)r) \\
&= \varphi(g \cdot r).
\end{aligned}$$

Agora como $Can : R \otimes_B R \longrightarrow C$, $r \otimes r' \longmapsto r \cdot g \cdot r'$, é bijetiva, temos que para todo $c \in C$, existem $\sum a_i \otimes b_i \in R \otimes_B R$ tais que $\sum a_i \cdot g \cdot b_i = c$. Então defina

$$\begin{array}{rcl}
\phi\colon {}_B End(R) & \longrightarrow & {}^*C \\
f & \longmapsto & \phi(f),
\end{array}$$

tal que, $\phi(f)(c) = \sum a_i f(b_i)$. Desta forma, para quaisquer $\sum a_i \cdot g \cdot b_i = c \in C$, $\varphi \in {}^*C$, $f \in {}_B End(R)$ e $r \in R$, temos

$$(F \circ \phi)(f) = F(\phi(f))(r)$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(f)(g \cdot r) \\
&= f(r),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
((\phi \circ F)(\varphi))(c) &= \phi(F(\varphi))(r) \\
&= \sum a_i F(\varphi)(b_i) \\
&= \sum a_i \varphi(g \cdot b_i) \\
&= \varphi(\sum a_i \cdot g \cdot b_i) \\
&= \varphi(c).
\end{aligned}
$$

Segue que F é bijetiva.

■

Capítulo 2

Bialgebróides

Um bialgebróide, diferente da definição de biálgebras, não é definido como uma compatibidade entre monóides (objetos álgebras) e comonóides (objetos coálgebras) na mesma categoria monoidal de bimódulos. As estruturas de anel e coanel são definidas sobre diferentes álgebras de base. Na verdade, são monoides e comonoides em categorias monoidais distintas, a saber, a estrutura de objeto coálgebra é definida sobre R e a estrutura de objeto álgebra é definida sobre $R \otimes_k R^{op}$.

O próximo lema que vamos provar, caracteriza R-anéis. Perceba que, se (A, μ, η) é um R-anel, então A possui uma estrutura de k-álgebra. A multiplicação $m : A \otimes_k A \longrightarrow A$ é definida por $m = \mu \circ \pi$, em que $\pi : A \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_R A$ é a projeção canônica, e a unidade $\eta_A : k \longrightarrow A$ é definida por $\eta_A = \eta \circ \eta_R$ em que η_R é a unidade da k-álgebra R. A ação à direita e a ação à esquerda de k em A são dadas respectivamente, por $a \cdot s = a\eta_R(s)$ e $s \cdot a = \eta_R(s)a$, para quaisquer $a \in A$ e $s \in k$.

Lema 2.1 *Existe uma correspondência 1 a 1 entre R-anéis (A, μ, η) e morfismos de k-álgebras $\eta : R \longrightarrow A$.*

Demonstração: $(\Longrightarrow)$ Seja (A, μ, η) um R-anel. temos que mostrar que η é morfismo de k-álgebras. De fato, claro que η é k-linear. Basta verificarmos que η é multiplicativo

$$\begin{aligned}
\eta(rs) &= \eta(r1_R s) \\
&= r \cdot \eta(1_R) \cdot s \\
&= r \cdot 1_A \cdot s \\
&= (r \cdot 1_A) \cdot s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ((r \cdot 1_A)1_A) \cdot s \\
&= (r \cdot 1_A)(1_A \cdot s) \\
&= (r \cdot \eta(1_R))(\eta(1_R) \cdot s) \\
&= \eta(r)\eta(s).
\end{aligned}
$$

($\Longleftarrow$) Suponha que $\eta : R \longrightarrow A$ seja morfismo de k-álgebras. Em particular, η é morfismo de R-bimódulos. De fato, podemos munir A com a seguinte estrutura de R-bimódulo, $r \cdot a \cdot s = \eta(r)a\eta(s)$, para quaisquer $r, s \in R$ e $a \in A$. Assim,

$$\eta(rs) = \eta(r1_R s) = \eta(r)\eta(1_R)\eta(s) = r \cdot 1_A \cdot s.$$

Também podemos munir $A \otimes_k A$ com a seguinte estrutura de R-bimódulo,

$$r \cdot (a \otimes b) \cdot s = \eta(r)a \otimes b\eta(s),$$

para quaisquer $r, s \in R$ e $a \otimes b \in A \otimes_k A$. Desta forma, não é difícil ver que m é morfismo de R-bimódulos. Portanto, precisamos apenas construir uma multiplicação $\mu : A \otimes_R A \longrightarrow A$ a qual é morfismo de R-bimódulos. De fato, apartir de η podemos construir dois morfismos

$$f, g : A \otimes_k R \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_k A,$$

definidos por

$$f(a \otimes r \otimes b) = a\eta(r) \otimes b \quad \text{e} \quad g(a \otimes r \otimes b) = a \otimes \eta(r)b,$$

para todo $a \otimes r \otimes b \in A \otimes_k R \otimes_k A$. Não é difícil mostrar que f, g são morfismos de R-bimódulos. Desta forma, podemos considerar o produto tensorial balanceado por R, como o coequalizador

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_k R \otimes_k A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "\pi"] & A \otimes_R A.
\end{tikzcd}
$$

Agora pela associatividade da multiplicação m temos

$$
\begin{aligned}
m \circ f(a \otimes r \otimes b) &= m(a\eta(r) \otimes b) \\
&= (a\eta(r))b \\
&= a(\eta(r)b) \\
&= m(a \otimes \eta(r)b) \\
&= m \circ g(a \otimes r \otimes b).
\end{aligned}
$$

Portanto, pela propriedade universal do coequalizador, existe único $\mu : A \otimes_R A \longrightarrow A$ morfismo de R-bimódulos, tal que, o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k R \otimes_k A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "m"'] & A \otimes_R A \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & & A. \end{tikzcd}$$

Não é difícil verificar a associatividade de μ. ■

Desse lema, um $R \otimes_k R^{op}$-anel B é descrito por um morfismo de k-álgebras $\eta : R \otimes_k R^{op} \longrightarrow B$. De maneira equivalente, podemos considerar as restrições

$$s := \eta(- \otimes_k 1_R) : R \longrightarrow B \quad \text{e} \quad t := \eta(1_R \otimes_k -) : R^{op} \longrightarrow B,$$

que são morfismos de k-álgebras com imagens comutando em B. Os morfismos s e t são chamados de **source** e **target** de um $R \otimes_k R^{op}$-anel B, respectivamente. Um $R \otimes_k R^{op}$-anel será denotado pela tripla (B, s, t), em que B é uma k-álgebra, e s, t são morfismos de álgebras com imagens comutando em B. Por simplicidade vamos denotar $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{R}^{\mathbf{op}}$ por $\mathbf{R}^{\mathbf{e}}$ e os elementos de $\mathbf{R}^{\mathbf{op}}$ por $\bar{\mathbf{r}}$.

Agora considere $B \times_R^r B$ o k-submódulo de $B \otimes_R B$ definido por

$$B \times_R^r B := \left\{ \sum_i b_i \otimes b'_i \in B \otimes_R B \mid \sum_i s(r) b_i \otimes b'_i = \sum_i b_i \otimes t(r) b'_i \ \ \forall\, r \in R \right\}.$$

É possível mostrar que $B \times_R^r B$ é uma k-álgebra, com multiplicação, dada para quaisquer $a \otimes b$, $c \otimes d \in B \times_R^r B$, por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$. De maneira simétrica definimos

$$B \times_R^l B := \left\{ \sum_i b_i \otimes b'_i \in B \otimes_R B \mid \sum_i b_i t(r) \otimes b'_i = \sum_i b_i \otimes b'_i s(r) \ \ \forall\, r \in R \right\},$$

que também uma k-álgebra.

2.1 Definição e Exemplos

Definição 2.2 *Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Um R-**bialgebróide à direita** B, consiste de um R^e-anel (B, s, t) e de um R-coanel (B, Δ, ε) no mesmo k-módulo B, que estão sujeitos aos seguintes axiomas de compatibilidade:*

(i) A estrutura de R-bimódulo no R-coanel (B, Δ, ε) *é dada por*

$$r \cdot b \cdot r' = bs(r')t(r) \tag{2.1}$$

para quaisquer $r, r' \in R$ *e* $b \in B$.

(ii) Considerando a estrutura de R-bimódulo em B, como em 2.1, temos $\Delta(B) \subseteq B \times_R^r B$ *e* Δ *é morfismo de k-álgebras, em que*

$$B \times_R^r B := \left\{ \sum_i b_i \otimes b_i' \in B \otimes_R B \mid \sum_i s(r) b_i \otimes b_i' = \sum_i b_i \otimes t(r) b_i' \ \ \forall\, r \in R \right\}.$$

(iii) A counidade ε *é um caracter à direita no R-anel* (B, s). *Em que* (B, s) *é o R-anel descrito por s como unidade.*

Como consequência do item (iii) da Definição 2.2 temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Seja B um R-bialgebróide à direita, com estrutura de* R^e*-anel dada por* (B, s, t) *e estrutura de R-coanel dada por* (B, Δ, ε). *Então valem as seguintes afirmações:*

(1) $\varepsilon(t(r)) = \varepsilon(s(r)) = r$, *para todo* $r \in R$;

(2) $\varepsilon(t(\varepsilon(a))b) = \varepsilon(s(\varepsilon(a))b)$, *para quaisquer* $a, b \in B$.

Demonstração: (1) Para todo $r \in R$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(t(r)) &= \varepsilon(1_B t(r)) \\ &= \varepsilon(r \cdot 1_B) \\ &= r\varepsilon(1_B) \\ &= r, \end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(s(r)) &= \varepsilon(1_B s(r)) \\ &= \varepsilon(1_B \cdot r) \\ &= \varepsilon(1_B) r \\ &= r. \end{aligned}$$

(2) Para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$\varepsilon(t(\varepsilon(a))b) = \varepsilon(s(\varepsilon(t(\varepsilon(a))))b)$$

$$= \varepsilon(s(\varepsilon(a))b).$$

■

Note que o k-submódulo $B \times_R^r B$ de $B \otimes_R B$ é definido de tal maneira que a multiplicação é bem definida. $B \times_R^r B$ é chamado de **produto Takeuchi à direita**. Na verdade $B \times_R^r B$ tem mais estrutura do que uma k-álgebra, como vamos ver na próxima proposição. Antes, enunciaremos um resultado que vamos usar.

Lema 2.4 *(Elemento nulo em um produto tensorial) Seja R um anel com unidade, $N \in {}_R\mathcal{M}$ e $M \in \mathcal{M}_R$. Sejam ainda $\{n_i\}_{i \in I}$ uma família de geradores para N e $\{m_i\}_{i \in I}$ uma família de elementos de M tais que $m_i = 0$ a menos de um número finito de índices. Então para*

$$\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i \in M \otimes_R N$$

temos que $\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = 0$ se, e somente se, existe uma família finita $\{x_j\}_{j \in J}$ em M e uma família $\{r_{ji}\}_{(j,i) \in J \times I}$ em R satisfazendo

(i) $r_{ji} \neq 0$ *apenas para uma quantidade finita de índices* $(j, i) \in J \times I$*;*

(ii) $\sum_{i \in I} r_{ji} \cdot n_i = 0$ *para todo* $j \in J$*;*

(iii) $\sum_{j \in J} x_j \cdot r_{ji} = m_i$.

Este resultado encontra-se provado em [30] página 97.

Proposição 2.5 *Seja (B, s, t) um R^e-anel. Então o produto Takeuchi $B \times_R^r B$ é um R^e-anel com unidade $\eta : R \otimes_k R^{op} \longrightarrow B \times_R^r B$ dada por $\eta(r \otimes r') = t(r') \otimes_R s(r)$ e a multiplicação dada por*

$$(\sum_i a_i \otimes_R b_i)(\sum_j c_j \otimes_R d_j) = \sum_{i,j} a_i c_j \otimes_R b_i d_j,$$

para quaisquer $\sum\limits_i a_i \otimes_R b_i, \sum\limits_j c_j \otimes_R d_j \in B \times_R^r B$ e $r \otimes r' \in R \otimes_k R^{op}$.

Demonstração: Primeiro vamos ver que a multiplicação está bem definida, ou seja, que independe da escolha de representantes de uma classe. Basta mostrarmos que o produto é zero quando um dos fatores é zero. De fato, para $\sum\limits_i a_i \otimes b_i, \sum\limits_j c_j \otimes d_j \in B \times_R^r B$, se $\sum\limits_j c_j \otimes_R d_j = 0$ pelo lema 2.4, existe uma quantidade finita de elementos $r_{kj} \in R$ e $x_k \in B$ tais que

$$\sum_j r_{kj} \cdot d_j = \sum_i d_j t(r_{kj}) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k x_k \cdot r_{kj} = \sum_k x_k s(r_{kj}) = c_j,$$

então temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_j c_j \otimes d_j\right) &= \sum_{i,j} a_i c_j \otimes b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} a_i x_k s(r_{kj}) \otimes b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} a_i x_k \cdot r_{kj} \otimes b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} a_i x_k \otimes r_{kj} \cdot b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} a_i x_k \otimes b_i d_j t(r_{kj}) = 0.
\end{aligned}$$

Perceba que não usamos o fato que $\sum_i a_i \otimes_R b_i \in B \times_R^r B$, isso vai ser necessário apenas no caso quando o primeiro fator é zero. De fato, seja $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = 0$, então existe uma quantidade finita de elementos $r_{ki} \in R$ e $y_k \in B$ tais que

$$\sum_k b_i t(r_{ki}) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k y_k s(r_{ki}) = a_i,$$

então temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_j c_j \otimes d_j\right) &= \sum_{i,j} a_i c_j \otimes b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} y_k s(r_{ki}) c_j \otimes b_i d_j \\
&= \sum_{i,j,k} y_k c_j \otimes b_i t(r_{ki}) d_j = 0.
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato que $\sum_j c_j \otimes d_j \in B \times_R^r B$. Portanto, a multiplicação está bem definida. Não é difícil verificar a associatividade da multiplicação e que $1_B \otimes 1_B$ é a unidade da multiplicação desta álgebra associativa. Agora vamos verificar que η é um morfismo de álgebras. De fato, sejam $r, w, u, v \in R$, então

$$\begin{aligned}
\eta((r \otimes \overline{w})(u \otimes \overline{v})) &= \eta(ru \otimes \overline{vw}) \\
&= t(vw) \otimes_R s(ru)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t(w)t(v) \otimes_R s(r)s(u) \\
&= (t(w) \otimes_R s(r))(t(v) \otimes_R s(u)) \\
&= \eta(r \otimes \overline{w})\eta(u \otimes \overline{v}).
\end{aligned}
$$

Segue então que $B \times_R B$ é um R^e-anel. ∎

Definição 2.6 *Seja L uma álgebra sobre um anel comutativo k. Um L-**bialgebróide à esquerda** B, consiste de um L^e-anel (B, s, t) e de um L-coanel (B, Δ, ε) no mesmo k-módulo B, que estão sujeitos aos seguintes axiomas de compatibilidade:*

(i) A estrutura de L-bimódulo no L-coanel (B, Δ, ε) é dada por

$$l \cdot b \cdot l' = s(l)t(l')b \tag{2.2}$$

para quaisquer $l, l' \in L$ e $b \in B$.

(ii) Considerando a estrutura de L-bimódulo em B, como em 2.2, temos $\Delta(B) \subseteq B \times_L^l B$ e Δ é morfismo de k-álgebras, em que

$$B \times_R^l B := \left\{ \sum_i b_i \otimes b_i' \in B \otimes_L B \,|\, \sum_i b_i t(l) \otimes b_i' = \sum_i b_i \otimes b_i' s(l) \ \forall\, l \in L \right\}.$$

(iii) A counidade ε é um caracter à esquerda no L-anel (B, s). Em que (B, s) é o L-anel descrito por s como unidade.

De maneira análoga a Proposição 2.3, para quaisquer $a, b \in B$ e $l \in L$, temos

$$\varepsilon(t(l)) = \varepsilon(s(l)) = l \tag{2.3}$$

e

$$\varepsilon(at(\varepsilon(a))) = \varepsilon(as(\varepsilon(a))). \tag{2.4}$$

Antes de continuarmos, note que em um R-bialgebróide à direita B, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$\Delta(b \cdot r) = \Delta(b) \cdot r = b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \cdot r = b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} s(r) \tag{2.5}$$

e

$$\Delta(r \cdot b) = r \cdot \Delta(b) = r \cdot b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} = b_{(1)} t(r) \otimes_R b_{(2)}. \tag{2.6}$$

Já em um L-bialgebróide à esquerda B, para quaisquer $b \in B$ e $l \in L$, temos

$$\Delta(b \cdot l) = \Delta(b) \cdot l = b_{(1)} \otimes_L b_{(2)} \cdot l = b_{(1)} \otimes_L t(l) b_{(2)} \tag{2.7}$$

e

$$\Delta(l \cdot b) = l \cdot \Delta(b) = l \cdot b_{(1)} \otimes_L b_{(2)} = s(l) b_{(1)} \otimes_L b_{(2)}. \tag{2.8}$$

Definição 2.7 *Sejam L e $\widetilde{L}$ duas álgebras sobre um anel comutativo k, $\mathcal{B}_L$ e $\mathcal{B}_{\widetilde{L}}$, L-bialgebróide à esquerda e $\widetilde{L}$-bialgebróide à esquerda, respectivamente. Denote as estruturas de L^e-anel e L-coanel em $\mathcal{B}_L$, por $(\mathcal{B}_L, s_L, t_L)$ e $(\mathcal{B}_L, \Delta_L, \varepsilon_L)$, respectivamente. Denote também, as estruturas de $\widetilde{L}^e$-anel e $\widetilde{L}$-coanel em $\mathcal{B}_{\widetilde{L}}$, por $(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}, s_{\widetilde{L}}, t_{\widetilde{L}})$ e $(\mathcal{B}_{\widetilde{L}}, \Delta_{\widetilde{L}}, \varepsilon_{\widetilde{L}})$, respectivamente. Um* ***morfismo de bialgebróides à esquerda****, é um par de morfismos de k-álgebras $(\Phi : \mathcal{B}_L \longrightarrow \mathcal{B}_{\widetilde{L}}, \varphi : L \longrightarrow \widetilde{L})$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $s_{\widetilde{L}} \circ \varphi = \Phi \circ s_L$;

(ii) $t_{\widetilde{L}} \circ \varphi = \Phi \circ t_L$;

(iii) $\Delta_{\widetilde{L}} \circ \Phi = (\Phi \otimes_L \Phi) \circ \Delta_L$;

(iv) $\varepsilon_{\widetilde{L}} \circ \Phi = \varphi \circ \varepsilon_L$.

Analogamente, define-se ***morfismo de bialgebróides à direita****.*

Proposição 2.8 *Seja B um R-bialgebróide à direita. Então valem as seguintes afirmações:*

(1) *B_{cop} é um R^{op}-bialgebróide à direita;*

(2) *B^{op} é um R-bialgebróide à esquerda.*

Demonstração: (1) Note que B_{cop} é um $R^{op} \otimes R$-anel $(B, s' = t, t' = s)$ e possui a seguinte estrutura de R^{op}-coanel $(B_{cop}, \Delta_{cop}, \varepsilon)$. A estrutura de R^{op}-bimódulo em $(B_{cop}, \Delta_{cop}, \varepsilon)$ é dada, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, por

$$\overline{r} \triangleright b \triangleleft \overline{r'} = bt'(r)s'(r') = bs(r)t(r') = r' \cdot b \cdot r.$$

Dessa forma, Δ_{cop} e ε são claramente morfismos de R^{op}-bimódulos. Mostremos agora que $\Delta_{cop} \subseteq B_{cop} \times^r_{R^{op}} B_{cop}$. De fato, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$b_{(2)} \triangleleft \overline{r} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} = b_{(2)} t(r) \otimes_{R^{op}} b_{(1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= r \cdot b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} \cdot r \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} s(r) \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} \overline{r} \triangleright b_{(1)},
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
s'(r) b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} &= t(r) b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} s(r) b_{(1)} \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} t'(r) b_{(1)}.
\end{aligned}
$$

Mostremos que valem a coassociatividade e a counitalidade. De fato, para todo $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{cop} \otimes_{R^{op}} B_{cop}) \Delta_{cop}(b) &= (\Delta_{cop} \otimes_{R^{op}} B_{cop})(b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)}) \\
&= b_{(2)(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(2)(1)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)} \\
&= b_{(3)} \otimes_{R^{op}} b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)},
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(B_{cop} \otimes_{R^{op}} \Delta_{cop}) \Delta_{cop}(b) &= (B_{cop} \otimes_{R^{op}} \Delta_{cop})(b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)}) \\
&= b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)(1)} \\
&= b_{(3)} \otimes_{R^{op}} b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)}.
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
(B_{cop} \otimes_{R^{op}} \varepsilon) \Delta_{cop}(b) &= (B_{cop} \otimes_{R^{op}} \varepsilon)(b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)}) \\
&= b_{(2)} \triangleleft \overline{\varepsilon(b_{(1)})} \\
&= \varepsilon(b_{(1)}) \cdot b_{(2)} \\
&= b,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes_{R^{op}} B_{cop}) \Delta_{cop}(b) &= (\varepsilon \otimes_{R^{op}} B_{cop})(b_{(2)} \otimes_{R^{op}} b_{(1)}) \\
&= \overline{\varepsilon(b_{(2)})} \triangleright b_{(1)} \\
&= b_{(1)} \cdot \varepsilon(b_{(2)}) \\
&= b.
\end{aligned}
$$

Mostremos que ε é caracter à direita no R^{op}-anel $(B_{cop},\ s' = t)$. De fato, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$
\varepsilon(s'(\varepsilon(a))b) = \varepsilon(t(\varepsilon(a))b)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(s(\varepsilon(a))b) \\
&= \varepsilon(ab).
\end{aligned}
$$

Segue portanto, que B_{cop} é um R^{op}-bialgebróide à direita.
(2) Note que B^{op} é um R^e-anel $(B, s' = t, t' = s)$ e possui uma estrutura de R-coanel $(B^{op}, \Delta, \varepsilon)$. A estrutura de R-bimódulo em B^{op} é dada, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, por

$$
\begin{aligned}
r \triangleright b \triangleleft r' &= s'(r) \cdot_{op} t'(r') \cdot_{op} b \\
&= t(r) \cdot_{op} s(r') \cdot_{op} b \\
&= bt(r)s(r'),
\end{aligned}
$$

ou seja, a estrutura de R-bimódulo em $(B^{op}, \Delta, \varepsilon)$ é a mesma em (B, Δ, ε). Mostremos que $\Delta(B^{op}) \subseteq B^{op} \times_R^l B^{op}$. De fato, para todo $b \in B^{op}$, temos

$$
\begin{aligned}
b_{(1)} \cdot_{op} t'(r) \otimes_R b_{(2)} &= s(r)b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes_R t(r)b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \cdot_{op} t(r) \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \cdot_{op} s'(r).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que ε é caracter à esquerda em $(B^{op}, s' = t)$. De fato, para quaisquer $a, b \in B^{op}$, temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b \cdot_{op} t(\varepsilon(a))) &= \varepsilon(t(\varepsilon(a))b) \\
&= \varepsilon(s(\varepsilon(a))) \\
&= \varepsilon(ab) \\
&= \varepsilon(b \cdot_{op} a).
\end{aligned}
$$

Concluímos portanto, que B^{op} é um R-bialgebróide à esquerda. ■

Exemplo 2.9 *Biálgebras A sobre k, são k-bialgebróides na categoria dos k-módulos (à esquerda ou à direita). Os morfismos s e t são iguais ao morfismo unidade $\eta : k \longrightarrow A$.*

De fato, note que $k \simeq k \otimes_k k^{op}$, portanto A é $k \otimes_k k^{op}$-anel, pois é k-álgebra e η é morfismo de k-álgebras. Verificando os itens da definição temos, $A \times_k^r A = A \otimes_k A$, de fato, para quaisquer $\sum_i b_i \otimes_k b' \in A \otimes_k A$ e $r \in k$, temos

$$
\sum_i \eta(r) b_i \otimes b_i' = \sum_i r \cdot b_i \otimes b_i'
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i b_i \cdot r \otimes b_i' \\
&= \sum_i b_i \otimes r \cdot b_i' \\
&= \sum_i b_i \otimes \eta(r) b_i'.
\end{aligned}
$$

Vamos verificar que ε é caracter à direita de (A, η). De fato, $\varepsilon(1_A) = 1_k$ é claro, pois ε é morfismo de k-álgebra. Para quaisquer $a, b \in A$ e $r \in k$, temos

$$\varepsilon(a\eta(r)) = \varepsilon(a \cdot r) = \varepsilon(a)r$$

e

$$\varepsilon(\eta(\varepsilon(a))b) = \varepsilon(\varepsilon(a) \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(ab).$$

Portanto, temos que A é um k-bialgebroide à direita (à esquerda).

Exemplo 2.10 *Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Podemos munir R^e com uma estrutura de R-bialgebróide à direita. Os morfismos source e target são dados pelas inclusões*

$$s : R \longrightarrow R^e \quad e \quad t : R^{op} \longrightarrow R^e,$$

definidos por $r \longmapsto r \otimes 1_R$ e $\overline{r'} \longmapsto 1_R \otimes \overline{r'}$, respectivamente, para quaisquer $r, r' \in R$. O coproduto é definido por

$$
\begin{array}{rccc}
\Delta : & R^e & \longrightarrow & R^e \otimes_R R^e \\
& r \otimes \overline{r'} & \longmapsto & (1_R \otimes \overline{r'}) \otimes_R (r \otimes 1_R),
\end{array}
$$

e a counidade é definida por

$$
\begin{array}{rccc}
\varepsilon : & R^e & \longrightarrow & R \\
& r \otimes \overline{r'} & \longmapsto & r'r,
\end{array}
$$

para todo $r \otimes r' \in R \otimes_k R^{op}$.

Primeiro, é claro que R^e é um R^e-anel, com multiplicação dada entrada à entrada e unidade dada pela identidade. Vamos ver então que $(R^e, \Delta, \varepsilon)$ é um R-coanel. Veremos primeiro que Δ e ε são morfismos de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $a \otimes \overline{b} \in R^e$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(r \cdot (a \otimes \overline{b})) &= \Delta((a \otimes \overline{b})t(r)) \\
&= \Delta((a \otimes \overline{b})(1_R \otimes \overline{r})) \\
&= \Delta(a \otimes \overline{b}\overline{r})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1_R \otimes \overline{b}\overline{r}) \otimes_R (a \otimes 1_R)\\
&= (1_R \otimes \overline{b})(1_R \otimes \overline{r}) \otimes_R (a \otimes 1_R)\\
&= (1_R \otimes \overline{b})t(r) \otimes_R (a \otimes 1_R)\\
&= r \cdot (1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)\\
&= r \cdot \Delta(a \otimes \overline{b})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Delta((a \otimes \overline{b}) \cdot r) &= \Delta((a \otimes \overline{b})(r \otimes 1_R))\\
&= \Delta(ar \otimes \overline{b})\\
&= (1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (ar \otimes 1_R)\\
&= (1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)(r \otimes 1_R)\\
&= (1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)s(r)\\
&= (1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \cdot r\\
&= \Delta(a \otimes \overline{b}) \cdot r.
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(r \cdot (a \otimes \overline{b})) &= \varepsilon((a \otimes \overline{b})(1_R \otimes \overline{r}))\\
&= \varepsilon(a \otimes \overline{b}\overline{r})\\
&= \varepsilon(a \otimes \overline{rb})\\
&= (rb)a = r(ba)\\
&= r\varepsilon(a \otimes \overline{b})
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varepsilon((a \otimes \overline{b}) \cdot r) &= \varepsilon((a \otimes \overline{b})(r \otimes 1_R))\\
&= \varepsilon(ar \otimes \overline{b})\\
&= b(ar) = (ba)r\\
&= \varepsilon(a \otimes \overline{b})r.
\end{aligned}
$$

Vamos ver agora que

$$(R^e \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes R^e) \circ \Delta \quad \text{e} \quad (\varepsilon \otimes R^e) \circ \Delta = I_{R^e} = (R^e \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

De fato, para todo $a \otimes \overline{b} \in R^e$, temos

$$(R^e \otimes \Delta) \circ \Delta(a \otimes \overline{b}) = (R^e \otimes \Delta)[(1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)]$$

$$
\begin{aligned}
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R [(1_R \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\
&= [(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (1_R \otimes 1_R)] \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (\Delta \otimes R^e)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\
&= (\Delta \otimes R^e) \circ \Delta(a \otimes \bar{b})
\end{aligned}
$$

e também,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes R^e) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}) &= (\varepsilon \otimes R^e)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\
&= \varepsilon(1_R \otimes \bar{b}) \cdot (a \otimes 1_R) \\
&= b \cdot (a \otimes 1_R) \\
&= (a \otimes 1_R)t(b) \\
&= (a \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{b}) \\
&= (a \otimes \bar{b}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(R^e \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}) &= (R^e \otimes \varepsilon)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \cdot \varepsilon(a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \cdot a \\
&= (1_R \otimes \bar{b})s(a) \\
&= (1_R \otimes \bar{b})(a \otimes 1_R) \\
&= (a \otimes \bar{b}).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $(R^e, \Delta, \varepsilon)$ é um R-coanel. Vamos verificar que a imagem de Δ está contida no produto Takeuchi à direita. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $a \otimes \bar{b} \in R^e$, temos

$$
\begin{aligned}
s(r)(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) &= (r \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (r \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b})(r \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b})s(r) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \cdot r \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R r \cdot (a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)t(r) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{r}) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes \bar{r}) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (1_R \otimes \bar{r})(a \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R t(r)(a \otimes 1_R).
\end{aligned}
$$

Segue portanto, que a imagem de Δ está contida no produto Takeuchi à direita. Agora vamos ver que Δ é morfismo de k-álgebras. Basta verificarmos que Δ é multlicativo. De fato, para quaisquer $a\otimes\overline{b},\ c\otimes\overline{d} \in R^e$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(a \otimes \bar{b})\Delta(c \otimes \bar{d}) &= [(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)][(1_R \otimes \bar{d}) \otimes (c \otimes 1_R)] \\
&= (1_R \otimes \bar{b})(1_R \otimes \bar{d}) \otimes_R (a \otimes 1_R)(c \otimes 1_R) \\
&= (1_R \otimes \bar{b}\bar{d}) \otimes_R (ac \otimes 1_R) \\
&= \Delta(ac \otimes \bar{b}\bar{d}) \\
&= \Delta((a \otimes \bar{b})(c \otimes \bar{d}).
\end{aligned}$$

Portanto, Δ é morfismo de k-álgebras. Resta verificarmos que ε é um caracter à direita no R-anel (R^e, s). De fato, temos

$$\varepsilon(1_R \otimes 1_R) = 1_R 1_R = 1_R,$$

também temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(s(\varepsilon(a \otimes \bar{b}))(c \otimes \bar{d})) &= \varepsilon((ba \otimes 1_R)(c \otimes \bar{d})) \\
&= \varepsilon(bac \otimes \bar{d}) \\
&= d(bac) \\
&= (db)(ac) \\
&= \varepsilon(ac \otimes \overline{db}) \\
&= \varepsilon(ac \otimes \bar{b}\bar{d}) \\
&= \varepsilon((a \otimes \bar{b})(c \otimes \bar{d})),
\end{aligned}$$

para quaisquer $a\otimes\overline{b},\ c\otimes\overline{d} \in R^e$. Segue daí que ε é um caracter à direita no R-anel (R^e, s). Portanto, concluímos que R^e é um R-bialgebróide à direita.

Exemplo 2.11 ***(Biálgebras fracas)*** *Uma biálgebra fraca sobre um anel comutativo k, consiste de uma álgebra e uma coálgebra sobre o mesmo k-módulo B, que estão sujeitas a axiomas de compatibilidade que generalizam os axiomas de biálgebras. De maneira mais clara, o co-produto continua sendo multiplicativo, mas a unitalidade do co-produto Δ e a multiplicatividade da counidade ε são enfraquecidas, conforme as seguintes condições*

$$\begin{aligned}
(\Delta(1_B) \otimes_k 1_B)(1_B \otimes_k \Delta(1_B)) &= (\Delta \otimes_k B)\Delta(1_B) \\
&= (1_B \otimes_k \Delta(1_B))(\Delta(1_B) \otimes_k 1_B) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c) = \varepsilon(abc) = \varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c), \tag{2.10}$$

para quaisquer $a, b, c \in B$. Note que podemos reescrever a condição 2.9 da seguinte forma

$$1_{(1)} \otimes_k 1_{(1')}1_{(2)} \otimes_k 1_{(2')} = 1_{(1)} \otimes_k 1_{(2)} \otimes_k 1_{(3)} = 1_{(1)} \otimes_k 1_{(2)}1_{(1')} \otimes_k 1_{(2')}$$

Considere, para todo $b \in B$, a seguinte aplicação idempotente

$$\sqcap^R : B \longrightarrow B, \;\; b \longmapsto 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)}).$$

Temos que $R := Im(\sqcap^R)$ é uma subálgebra de B. Temos ainda que B é um R^e-anel, com source $s : R \longrightarrow B$ dado pela inclusão e target $t : R \longrightarrow B$ dado, para todo $b \in R$, pela restrição da aplicação

$$t : B \longrightarrow B, \;\; b \longmapsto \varepsilon(b1_{(1)})1_{(2)}.$$

Podemos munir B com uma estrutura de R-coanel. O co-produto é definido por $\underline{\Delta} := \pi \circ \Delta$, em que $\pi : B \otimes_k B \longrightarrow B \otimes_R B$ e a counidade é definida por $\underline{\varepsilon} := \sqcap^R$.

Primeiramente vamos ver que (B, s, t) é de fato, um R^e-anel. Já sabemos que B é uma k-álgebra, resta verificarmos que s e t são morfismos de k-álgebra. Mas temos que s e t são k-lineares e s morfismo de k-álgebra, ou seja, basta verificarmos que t é antimultiplicativo. Antes vamos mostrar algumas propriedades necessárias. Note que pelo fato de Δ ser multiplicativo temos, para todo $b \in B$,

$$b_{(1)} \otimes b_{(2)} = \Delta(b) = \Delta(b1_B) = \Delta(b)\Delta(1_B) = b_{(1)}1_{(1)} \otimes b_{(2)}1_{(2)}. \tag{2.11}$$

Agora, usando esse fato, temos para todo $b \in B$,

$$\begin{aligned}
\sqcap^R(b_{(1)}) \otimes b_{(2)} &= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)}) \otimes b_{(2)} \\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(1')}1_{(2)}) \otimes b_{(2)}1_{(2')} \quad \text{(por 2.11)} \\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)}) \otimes b_{(2)}1_{(3)} \quad \text{(por 2.9)} \\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)(1)}) \otimes b_{(2)}1_{(2)(2)} \\
&= 1_{(1)}\varepsilon((b1_{(2)})_{(1)}) \otimes (b1_{(2)})_{(2)} \\
&= 1_{(1)} \otimes \varepsilon((b1_{(2)})_{(1)})(b1_{(2)})_{(2)} \\
&= 1_{(1)} \otimes b1_{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dessa forma temos

$$
\begin{aligned}
1_{(1)} \otimes \sqcap^R(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)} &= 1_{(1)} \otimes \sqcap^R(1_{(2)(1)}) \otimes 1_{(2)(2)} \\
&= 1_{(1)} \otimes 1_{(1')} \otimes 1_{(2)}1_{(2')}.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Portanto, para quaisquer $a, b \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
t(b)t(a) &= \varepsilon(b1_{(1)})1_{(2)}\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2')} \\
&= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2)}1_{(2')} \\
&= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a \sqcap^R (1_{(2)}))1_{(3)} \\
&= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a1_{(1')}\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')}))1_{(3)} \quad \text{(por 2.13)} \\
&= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(3)} \\
&= \varepsilon(b1_{(1)}1_{(2')})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2)} \quad \text{(por 2.10)} \\
&= \varepsilon(b1_{(2)})\varepsilon(a1_{(1)})1_{(3)} \quad \text{(por 2.9)} \\
&= \varepsilon(b\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)})1_{(3)} \\
&= \varepsilon(b\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}1_{(1')})1_{(2')} \quad \text{(por 2.9)} \\
&= \varepsilon(bt(a)1_{(1')})1_{(2')} \\
&= t(bt(a)),
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
t(t(a)b) &= t(\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a1_{(1)})t(1_{(2)}b) \\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b1_{(1')})1_{(2')} \\
&= \varepsilon(ab1_{(1')})1_{(2')} \quad \text{(por 2.10)} \\
&= t(ab).
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\sqcap^R(b)t(a) &= 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2')} \\
&= \varepsilon(a1_{(1')})1_{(1)}1_{(2')}\varepsilon(b1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a1_{(1')})1_{(2')}1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)}) \\
&= t(a) \sqcap^R (b).
\end{aligned}
$$

Portanto, para quaisquer $a, b \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
t(ab) &= t(t(a)b) \\
&= t(t(a) \sqcap^R (b))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= t(\sqcap^R(b)t(a)) \\
&= t(bt(a)) \\
&= t(b)t(a). \quad \text{(por 2.14)}
\end{aligned}
$$

Segue daí que B é um R^e-anel. Vamos verificar agora que $(B, \underline{\Delta}, \underline{\varepsilon})$ é um R-coanel. De fato, já temos que a coassociatividade é satisfeita. Vamos verificar o axioma da counidade. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon} \otimes B)\underline{\Delta}(b) &= (\underline{\varepsilon} \otimes_R B)(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}) \\
&= \underline{\varepsilon}(b_{(1)}) \cdot b_{(2)} \\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)}) \cdot b_{(2)} \\
&= b_{(2)}t(1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})) \\
&= b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})t(1_{(1)}) \\
&= b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}1_{(1')})1_{(2')} \\
&= b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(1')})1_{(2')} \quad \text{(por 2.10)} \\
&= \varepsilon(b_{(1)}1_{(1')})b_{(2)}1_{(2')} \\
&= \varepsilon(b_{(1)})b_{(2)} = b \quad \text{(por 2.11)}.
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
(B \otimes \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(b) &= (B \otimes \underline{\varepsilon})(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}) \\
&= b_{(1)} \cdot \underline{\varepsilon}(b_{(2)}) \\
&= b_{(1)}s(\underline{\varepsilon}(b_{(2)})) \\
&= b_{(1)}s(1_{(1')}\varepsilon(b_{(2)}1_{(2')})) \\
&= b_{(1)}1_{(1')}\varepsilon(b_{(2)}1_{(2')}) \\
&= b_{(1)}\varepsilon(b_{(2)}) = b \quad \text{(por 2.11)}.
\end{aligned}
$$

Vamos ver agora que $\underline{\Delta}$ e $\underline{\varepsilon}$ são morfismos de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}(r \cdot b) &= \underline{\Delta}(bt(r)) \\
&= \underline{\Delta}(b\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})\underline{\Delta}(b1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})(b_{(1)}1_{(2)} \otimes_R b_{(2)}1_{(3)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
r \cdot \underline{\Delta}(b) &= r \cdot (b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}) \\
&= r \cdot b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_{(1)}t(r) \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)}\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)} \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)}1_{(1')}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(1)}) \otimes_R b_{(2)}1_{(2')} \quad \text{(por 2.11)} \\
&= b_{(1)}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(1)}) \otimes_R b_{(2)}1_{(3)} \quad \text{(por 2.9)} \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})(b_{(1)}1_{(2)} \otimes_R b_{(2)}1_{(3)}).
\end{aligned}
$$

Também temos,

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}(b \cdot r) &= \underline{\Delta}(b \sqcap^R (r)) \\
&= \underline{\Delta}(b)\underline{\Delta}(\sqcap^R(r)) \\
&= (b_{(1)} \otimes_R b_{(2)})(1_{(1)} \otimes_R 1_{(2)}\varepsilon(r1_{(3)})) \\
&= b_{(1)}1_{(1)} \otimes_R b_{(2)}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(3)}) \\
&= b_{(1)}1_{(1)} \otimes_R b_{(2)}1_{(2)}1_{(1')}\varepsilon(r1_{(2')}) \quad \text{(por 2.9)} \\
&= b_{(1)}1_{(1)} \otimes_R b_{(2)}1_{(2)} \sqcap^R (r) \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \sqcap^R (r) \quad 2.11 \\
&= \underline{\Delta}(b) \cdot r,
\end{aligned}
$$

a última igualdade é devido ao fato que $\sqcap^R$ é idempotente, pois como $r \in R$, temos que existe $a \in B$, tal que $\sqcap^R(a) = r$, dessa forma

$$
\sqcap^R(r) = \sqcap^R(\sqcap^R(a)) = \sqcap^R(a) = r. \tag{2.15}
$$

Portanto, $\underline{\Delta}$ é morfismo de R-bimódulos. Considere agora, para todo $b \in B$, a seguinte aplicação

$$
\sqcap^L : B \longrightarrow B, \qquad b \longmapsto \varepsilon(1_{(1)}b)1_{(2)}.
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
b_{(1)} \otimes \sqcap^L(b_{(2)}) &= b_{(1)} \otimes \varepsilon(1_{(1')}b_{(2)})1_{(2')} \\
&= 1_{(1)}b_{(1)} \otimes \varepsilon(1_{(1')}1_{(2)}b_{(2)})1_{(2')} \quad \text{(por 2.11)} \\
&= 1_{(1)}b_{(1)} \otimes \varepsilon(1_{(2)}b_{(2)})1_{(3)} \quad \text{(por 2.9)} \\
&= 1_{(1)(1)}b_{(1)} \otimes \varepsilon(1_{((1)(2)}b_{(2)})1_{(2)} \\
&= (1_{(1)}b)_{(1)} \otimes \varepsilon((1_{(1)}b)_{(2)})1_{(2)} \\
&= (1_{(1)}b)_{(1)}\varepsilon((1_{(1)}b)_{(2)}) \otimes 1_{(2)} \\
&= 1_{(1)}b \otimes 1_{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Temos então, para quaisquer $a, b \in B$,

$$
\sqcap^R(a)b = 1_{(1)}\varepsilon(a1_{(2)})b
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1_{(1)}b\varepsilon(a1_{(2)}) \\
&= b_{(1)}\varepsilon(a \sqcap^L (b_{(2)})) \quad \text{(por 2.16)} \\
&= b_{(1)}\varepsilon(a\varepsilon(1_{(1)}b_{(2)})1_{(2)}) \\
&= b_{(1)}\varepsilon(a1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}b_{(2)}) \\
&= b_{(1)}\varepsilon(ab_{(2)}) \quad \text{(por 2.10)}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\Delta(\sqcap^R(b)) &= \Delta(1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)}) \\
&= \Delta(1_{(1)})\varepsilon(b1_{(2)}) \\
&= 1_{(1)(1)} \otimes 1_{(1)(2)}\varepsilon(b1_{(2)}) \\
&= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\varepsilon(b1_{(3)}) \\
&= 1_{(1)} \otimes 1_{(1')}1_{(2)}\varepsilon(b1_{(2')}) \quad \text{(por 2.9)} \\
&= 1_{(1)} \otimes 1_{(1')}\varepsilon(b1_{(2')})1_{(2)} \\
&= 1_{(1)} \otimes \sqcap^R(b)1_{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Segue que,

$$
\begin{aligned}
\sqcap^R(a \sqcap^R (b)) &= 1_{(1)}\varepsilon(a \sqcap^R (b)1_{(2)}) \\
&= (\sqcap^R(b))_{(1)}\varepsilon(a(\sqcap^{(R)}(b))_{(2)}) \quad \text{(por 2.18)} \\
&= \sqcap^R(a) \sqcap^R (b). \quad \text{(por 2.17)}
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Portanto, para quaisquer $r \in R$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(b \cdot r) &= \sqcap^R(b \cdot r) \\
&= \sqcap^R(br) \\
&= \sqcap^R(b \sqcap^R (r)) \\
&= \sqcap^R(b) \sqcap_R (r) \\
&= \sqcap^R(b)r = \underline{\varepsilon}(b)r.
\end{aligned}
$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(r \cdot b) &= \sqcap^R(r \cdot b) \\
&= \sqcap^R(bt(r)) \\
&= 1_{(1')}\varepsilon(bt(r)1_{(2')}) \\
&= 1_{(1')}\varepsilon(b\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)}1_{(2')}) \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})1_{(1')}\varepsilon(b1_{(2)}1_{(2')})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(r1_{(1)}) \sqcap^R (1_{(2)})\varepsilon(b1_{(3)}) \quad \text{(por 2.13)}\\
&= \varepsilon(r1_{(1)}) \sqcap^R (1_{(2)}\varepsilon(b1_{(3)}))\\
&= \varepsilon(r1_{(1)}) \sqcap^R (1_{(2)}1_{(1')}\varepsilon(b1_{(2')})) \quad \text{(por 2.9)}\\
&= \varepsilon(r1_{(1)}) \sqcap^R (1_{(2)} \sqcap^R (b))\\
&= \varepsilon(r1_{(1)}) \sqcap^R (1_{(2)}) \sqcap^R (b) \quad \text{(por 2.19)}\\
&= \varepsilon(r1_{(1)})1_{(1')}\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')}) \sqcap^R (b)\\
&= 1_{(1')}\varepsilon(r1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')}) \sqcap^R (b)\\
&= 1_{(1')}\varepsilon(r1_{(2')}) \sqcap^R (b) \quad \text{(por 2.10)}\\
&= \sqcap^R(r) \sqcap^R (b)\\
&= r \sqcap^R (b) = r\underline{\varepsilon}(b).
\end{aligned}
$$

Segue que $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulos. Portanto, concluímos assim que $(B, \underline{\Delta}, \underline{\varepsilon})$ é um R-coanel. Vamos verificar que a imagem de $\underline{\Delta}$ está contida em $B \times_R^r B$. De fato, antes temos, para quaisquer $a, b \in B$,

$$
\begin{aligned}
t(a)b &= \varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}b\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}\varepsilon(b_{(1)})b_{(2)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(b_{(1)})1_{(2)}b_{(2)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(1')}b_{(1)})1_{(2)}1_{(2')}b_{(2)} \quad \text{(por 2.11)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(\sqcap^R(1_{(2)})b_{(1)})1_{(3)}b_{(2)} \quad \text{(por 2.13)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(b_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}b_{(2)}))1_{(3)}b_{(3)} \quad \text{(por 2.17)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b_{(2)})\varepsilon(b_{(1)})1_{(3)}b_{(3)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b_{(1)})1_{(3)}b_{(2)}\\
&= \varepsilon(a1_{(1)}b_{(1)})1_{(2)}b_{(2)}\\
&= \varepsilon(ab_{(1)})b_{(2)} \quad \text{(por 2.11)}.
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
s(r)b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} &= \sqcap^R(r)b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}\\
&= b_{(1)}\varepsilon(rb_{(2)}) \otimes_R b_{(3)} \quad \text{(por 2.17)}\\
&= b_{(1)} \otimes_R \varepsilon(rb_{(2)})b_{(3)}\\
&= b_{(1)} \otimes_R t(r)b_{(2)} \quad \text{(por 2.20)}.
\end{aligned}
$$

Segue que $\underline{\Delta}$ está no Takeuchi à direita. Vamos ver agora que $\underline{\varepsilon}$ é um caracter à direita em (B, s). De fato, note que

$$
\underline{\varepsilon}(1_B) = \sqcap^R(1_B) = 1_{(1)}\varepsilon(1_B 1_{(2)}) = 1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}) = 1_B,
$$

temos também, para quaisquer $a, b \in B$,

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(s(\underline{\varepsilon}(a))b) &= \underline{\varepsilon}(\underline{\varepsilon}(a)b) \\
&= \sqcap^R(\sqcap^R(a)b) \\
&= \sqcap^R(1_{(1)}\varepsilon(a1_{(2)})b) \\
&= \varepsilon(a1_{(2)}) \sqcap^R (1_{(1)}b) \\
&= 1_{(1')}\varepsilon(a1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}b1_{(2')}) \\
&= 1_{(1')}\varepsilon(ab1_{(2')}) \quad \text{(por 2.10)} \\
&= \sqcap^R(ab) = \underline{\varepsilon}(ab).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos assim, que B é um R-bialgebróide à direita.

Exemplo 2.12 *Considere H uma k-biálgebra comutativa e R um H-comódulo álgebra à direita comutativo. Então, temos que o produto tensorial $R \otimes_k H$, com estrutura de álgebra padrão, é um R-bialgebróide à direita. Os morfismos source e target são dados, respectivamente, para todo $a \in R$, por $s(a) = a^{(0)} \otimes a^{(1)} = \rho(a)$, ou seja, o source é dado pela coação de H em R e $t(a) = a \otimes 1_H$. Temos também que o coproduto $\underline{\Delta} : R \otimes_k H \longrightarrow (R \otimes_k H) \otimes_R (R \otimes_k H)$ é definido por $\underline{\Delta}(a \otimes h) = (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})$ e a counidade $\underline{\varepsilon} : R \otimes_k H \longrightarrow R$ é dada por $\underline{\varepsilon}(a \otimes h) = a\varepsilon(h)$, para todo $a \otimes h \in R \otimes_k H$.*

É claro que as imagens de s e t comutam e que são morfismos de k-álgebra (pela comutatividade de R e H), ou seja, t é antimorfismo de k-álgebras. Portanto, $R \otimes_k H$ é um $R \otimes R^{op}$-anel. Note que

$$(R \otimes_k H) \otimes_R (R \otimes_k H) = (R \otimes_k H) \times_R^r (R \otimes_k H).$$

De fato, para quaisquer $(a \otimes h) \otimes_R (b \otimes k) \in (R \otimes_k H) \otimes_R (R \otimes_k H)$ e $r \in R$ temos

$$\begin{aligned}
s(r)(a \otimes h) \otimes_R (b \otimes k) &= (r^{(0)} \otimes r^{(1)})(a \otimes h) \otimes_R (b \otimes k) \\
&= (a \otimes h)(r^{(0)} \otimes r^{(1)}) \otimes_R (b \otimes k) \\
&= (a \otimes h)s(r) \otimes_R (b \otimes k) \\
&= (a \otimes h) \cdot r \otimes_R (b \otimes k) \\
&= (a \otimes h) \otimes_R r \cdot (b \otimes k) \\
&= (a \otimes h) \otimes_R (b \otimes k)t(r) \\
&= (a \otimes h) \otimes_R (b \otimes k)(r \otimes 1_H) \\
&= (a \otimes h) \otimes_R (r \otimes 1_H)(b \otimes k)
\end{aligned}$$

$$= (a \otimes h) \otimes_R t(r)(b \otimes k).$$

Vamos ver agora que $R \otimes_k H$ é um R-coanel. De fato, primeiro vamos verificar que $\underline{\Delta}$ e $\underline{\varepsilon}$ são morfismos de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a \otimes h \in (R \otimes_k H) \otimes_R (R \otimes_k H)$ e $b \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}((a \otimes h) \cdot b) &= \underline{\Delta}(ab^{(0)} \otimes hb^{(1)}) \\
&= (ab^{(0)} \otimes (hb^{(1)})_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes (hb^{(1)})_{(2)}) \\
&= (ab^{(0)} \otimes h_{(1)}b^{(1)}_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}_{(2)}) \\
&= (ab^{(0)(0)} \otimes h_{(1)}b^{(0)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)})s(b^{(0)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \cdot b^{(0)} \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R b^{(0)} \cdot (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)})t(b^{(0)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}b^{(1)})(b^{(0)} \otimes 1_H) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (b^{(0)} \otimes h_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})(b^{(0)} \otimes b^{(1)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})s(b) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \cdot b \\
&= \underline{\Delta}(a \otimes h) \cdot b.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}(b \cdot (a \otimes h)) &= \underline{\Delta}((a \otimes h)t(b)) \\
&= \underline{\Delta}((a \otimes h)(b \otimes 1_H)) \\
&= \underline{\Delta}(ab \otimes h) \\
&= (ab \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)})(b \otimes 1_H) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)})t(b) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= b \cdot (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= b \cdot \underline{\Delta}(a \otimes h).
\end{aligned}$$

Também temos

$$\underline{\varepsilon}((a \otimes h) \cdot b) = \underline{\varepsilon}(ab^{(0)} \otimes hb^{(1)})$$

$$
\begin{aligned}
&= ab^{(0)}\varepsilon(hb^{(1)}) \\
&= a\varepsilon(h)b \\
&= \underline{\varepsilon}(a \otimes h)b
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(b \cdot (a \otimes h)) &= \underline{\varepsilon}(ab \otimes h) \\
&= ab\varepsilon(h) \\
&= b\underline{\varepsilon}(a \otimes h).
\end{aligned}
$$

Agora vamos verificar a coassociatividade e a counitalidade. Para facilitar, denote $B = R \otimes_k H$. Então, para qualquer $a \otimes h \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
(B \otimes \underline{\Delta})\underline{\Delta}(a \otimes h) &= (B \otimes \underline{\Delta})((a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(1)(2)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= \underline{\Delta}(a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (\underline{\Delta} \otimes B)\underline{\Delta}(a \otimes h).
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
(B \otimes \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(a \otimes h) &= (B \otimes \underline{\varepsilon})((a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \cdot \underline{\varepsilon}(1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a \otimes h_{(1)}) \cdot 1_R\varepsilon(h_{(2)}) \\
&= a \otimes h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \\
&= a \otimes h,
\end{aligned}
$$

por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon} \otimes B)\underline{\Delta}(a \otimes h) &= (\underline{\varepsilon} \otimes B)((a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})) \\
&= \underline{\varepsilon}(a \otimes h_{(1)}) \cdot (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (a\varepsilon(h_{(1)})) \cdot (1_R \otimes h_{(2)}) \\
&= (1_R \otimes h_{(2)})(a\varepsilon(h_{(1)}) \otimes 1_H) \\
&= a\varepsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= a \otimes h.
\end{aligned}
$$

Vamos ver que $\underline{\Delta}$ é morfismo de k-álgebras. Para tanto, basta mostrar que $\underline{\Delta}$ é multiplicativo. De fato, para quaisquer $a \otimes h$, $b \otimes k \in R \otimes H$, temos

$$
\underline{\Delta}(a \otimes h)\underline{\Delta}(b \otimes k) = ((a \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}))((b \otimes k_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes k_{(2)}))
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \otimes h_{(1)})(b \otimes h_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)})(1_R \otimes k_{(2)}) \\
&= (ab \otimes h_{(1)}k_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)}k_{(2)}) \\
&= (ab \otimes (hk)_{(1)}) \otimes_R (1_R \otimes (hk)_{(2)}) \\
&= \underline{\Delta}(ab \otimes hk) = \underline{\Delta}((a \otimes h)(b \otimes k)).
\end{aligned}
$$

Resta mostrarmos que $\underline{\varepsilon}$ é um caracter à direita no R-anel $(R \otimes H, s)$. De fato, claro que $\underline{\varepsilon}(1_R \otimes 1_H) = 1_R$ e como $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulos temos $\underline{\varepsilon}((a \otimes h)s(b)) = \underline{\varepsilon}(a \otimes h)b$. Agora, para quaisquer $a \otimes h$, $b \otimes k \in R \otimes H$ temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(s(\underline{\varepsilon}(a \otimes h))(b \otimes k)) &= \underline{\varepsilon}(s(a\varepsilon(h))(b \otimes k)) \\
&= \underline{\varepsilon}(\varepsilon(h)(a^{(0)} \otimes a^{(1)})(b \otimes k)) \\
&= \underline{\varepsilon}(\varepsilon(h)(a^{(0)}b \otimes a^{(1)}k)) \\
&= \underline{\varepsilon}(a^{(0)}b\varepsilon(h) \otimes a^{(1)}k) \\
&= a^{(0)}b\varepsilon(h)\varepsilon(a^{(1)}k) \\
&= a^{(0)}\varepsilon(a^{(1)})b\varepsilon(hk) \\
&= ab\varepsilon(hk) \\
&= \underline{\varepsilon}(ab \otimes hk) \\
&= \underline{\varepsilon}((a \otimes h)(b \otimes k)).
\end{aligned}
$$

Concluímos assim que $R \otimes_k H$ é um R-bialgebróide à direita.

Exemplo 2.13 *Seja H uma álgebra de Hopf cocomutativa e R um H-módulo álgebra à esquerda comutativo. Então o produto smash $R\#H$, o qual é uma k-álgebra, isomorfa a $R \otimes_k H$ como k-módulo, com multiplicação, dada para todo $(r\#h), (s\#k) \in R\#H$, por $(r\#h)(s\#k) = r(h_{(1)} \triangleright s)\#h_{(2)}k$ e unidade $1_R\#1_H$, é um R-bialgebróide à direita. Os morfismos source e target são iguais a $s(r) = t(r) = r\#1_H$.*

É claro que s e t são morfismos de k-álgebra e que comutam na imagem, pois R é comutativo. Segue que t á antimorfismo de álgebras. Portanto, temos uma estrutura de $R \otimes R^{op}$-anel em $R\#H$. Denotamos a ação de H em R, por $h \triangleright r$ e as ações de R em $R\#H$, por $r \cdot (a\#k) \cdot r'$, para quaisquer $r, r' \in R$, $h \in H$ e $a\#k \in R\#H$. Vamos definir uma estrutura de R-coanel em $R\#H$ definindo o coproduto $\underline{\Delta} : R\#H \longrightarrow (R\#H) \otimes_R (R\#H)$ por $\underline{\Delta}(r\#h) = (r\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)})$ e counidade $\underline{\varepsilon} : R\#H \longrightarrow R$ definida por $\underline{\varepsilon}(r\#h) = S(h) \triangleright r$, para todo $r\#h \in R\#H$.

Vamos ver que $\underline{\Delta}$ e $\underline{\varepsilon}$ são morfismos de R-bimódulos. De fato, antes note que só precisamos mostrar por um lado, pois as ações, à direita e à esquerda, de R em $R\#H$ são iguais, devido ao fato que os morfismos sorce e target são iguais, e também R é comuativo. Portanto, para quaisquer $a\#h \in R\#H$ e $r \in R$ temos

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}((a\#h)\cdot r) &= \underline{\Delta}((a\#h)(r\#1_H)) \\
&= \underline{\Delta}(a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)}) \\
&= (a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)(2)}) \\
&= (a(h_{(1)(1)} \triangleright r)\#h_{(1)(2)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)})(r\#1_H) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \cdot r \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R r \cdot (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \cdot r \\
&= \underline{\Delta}(a\#h) \cdot r.
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((a\#h)\cdot r) &= \underline{\varepsilon}(a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)}) \\
&= S(h_{(2)}) \triangleright (a(h_{(1)} \triangleright r)) \\
&= (S(h_{(3)}) \triangleright a)(S(h_{(2)})h_{(1)} \triangleright r) \\
&= (S(h_{(3)}) \triangleright a)(S(h_{(1)})h_{(2)} \triangleright r) \\
&= (S(h_{(2)}) \triangleright a)(\varepsilon(h_{(1)})1_R r) \\
&= (S(h) \triangleright a)r \\
&= \underline{\varepsilon}(a\#h)r.
\end{aligned}$$

Agora note que o coproduto, definido nesse exemplo, é o mesmo do exemplo anterior. Portanto, basta mostrarmos a counitalidade para obtermos uma estrutura de R-coanel em $R\#H$. De fato, para todo $a\#h \in R\#H$, denote $B = R\#H$, assim temos

$$\begin{aligned}
(B \otimes \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(a\#h) &= (B \otimes \underline{\varepsilon})((a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)}) \cdot (S(h_{(2)}) \triangleright 1_R) \\
&= (a\#h_{(1)}) \cdot (\varepsilon(S(h_{(2)}))1_R) \\
&= (a\#h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)}) \\
&= a\#h.
\end{aligned}$$

Também temos

$$(\underline{\varepsilon} \otimes B)\underline{\Delta}(a\#h) = (\underline{\varepsilon} \otimes B)((a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}))$$

$$
\begin{aligned}
&= (S(h_{(1)}) \triangleright a) \cdot (1_R \# h_{(2)}) \\
&= (1_R \# h_{(2)})((S(h_{(1)}) \triangleright a) \# 1_H) \\
&= (h_{(2)} S(h_{(1)}) \triangleright a) \# h_{(3)} \\
&= (h_{(1)} S(h_{(2)}) \triangleright a) \# h_{(3)} \\
&= (\varepsilon(h_{(1)}) 1_R a) \# h_{(2)} \\
&= a \# h.
\end{aligned}
$$

Vamos ver agora que $\underline{\Delta}(B) \subseteq B \times_R^r B$. De fato, para quaisquer $a\#h \in R\#H$, $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
s(r)(a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) &= (r\#1_H)(a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (ra\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}) \\
&= (ra\#h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}) \\
&= (a(\varepsilon(h_{(1)})1_H \triangleright r)\#h_{(2)}) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}) \\
&= (a(h_{(1)}S(h_{(2)}) \triangleright r)\#h_{(3)}) \otimes_R (1_R\#h_{(4)}) \\
&= (a(h_{(1)} \triangleright (S(h_{(3)}) \triangleright r))\#h_{(2)}) \otimes_R (1_R\#h_{(4)}) \\
&= (a\#h_{(1)})(S(h_{(2)}) \triangleright r\#1_H) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \cdot (S(h_{(2)}) \triangleright r) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (S(h_{(2)}) \triangleright r) \cdot (1_R\#h_{(3)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(3)})(S(h_{(2)}) \triangleright r\#1_H) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (h_{(3)}S(h_{(2)}) \triangleright r)\#h_{(4)} \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (h_{(2)}S(h_{(3)}) \triangleright r\#h_{(4)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (\varepsilon(h_{(2)})r\#h_{(3)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (r\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R (r\#1_H)(1_R\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_R t(r)(1_R\#h_{(2)}).
\end{aligned}
$$

Vamos ver que $\underline{\Delta}$ é morfismo de k-álgebras. Para tanto, basta verificarmos que $\underline{\Delta}$ é multiplicativo, pois já mostramos que $\underline{\Delta}$ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $(a\#h)$, $(r\#k) \in R\#H$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}(a\#h)\underline{\Delta}(r\#k) &= ((a\#h_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)}))((r\#k_{(1)}) \otimes_R (1_R\#k_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)})(r\#k_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(2)})(1_R\#k_{(2)}) \\
&= (a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)}k_{(1)}) \otimes_R ((h_{(3)} \triangleright 1_R)\#h_{(4)}k_{(2)}) \\
&= (a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)}k_{(1)}) \otimes_R (\varepsilon(h_{(3)})1_R\#h_{(4)}k_{(2)}) \\
&= (a(h_{(1)} \triangleright r)\#h_{(2)}k_{(1)}) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}k_{(2)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}((a\#h)(r\#k)) &= \underline{\Delta}(a(h_{(1)}\triangleright r)\#h_{(2)}k)\\ &= (a(h_{(1)}\triangleright r)\#h_{(2)}k_{(1)})) \otimes_R (1_R\#h_{(3)}k_{(2)}).\end{aligned}$$

Vamos ver agora que $\underline{\varepsilon}$ é caracter à direita em $(R\#H, s)$. De fato, para quaisquer $a\#h, r\#k \in R\#H$, temos

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}(s(\underline{\varepsilon}(a\#h))(r\#k)) &= \underline{\varepsilon}(s(S(h)\triangleright a)(r\#k))\\ &= \underline{\varepsilon}(((S(h)\triangleright a)\#1_H)(r\#k))\\ &= \underline{\varepsilon}((S(h)\triangleright a)r\#k)\\ &= S(k)\triangleright((S(h)\triangleright a)r)\\ &= (S(k_{(2)})S(h)\triangleright a)(S(k_{(1)})\triangleright r)\\ &= (S(hk_{(2)})\triangleright a)(S(k_{(1)})\triangleright r),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}((a\#h)(r\#k)) &= \underline{\varepsilon}(a(h_{(1)}\triangleright r)\#h_{(2)}k)\\ &= S(h_{(2)}k)\triangleright(a(h_{(1)}\triangleright r))\\ &= (S(h_{(3)}k_{(2)})\triangleright a)(S(h_{(2)}k_{(1)})h_{(1)}\triangleright r))\\ &= (S(h_{(3)}k_{(2)})\triangleright a)(S(h_{(1)}k_{(1)})h_{(2)}\triangleright r))\\ &= (S(h_{(3)}k_{(2)})\triangleright a)(S(k_{(1)})cS(h_{(1)})h_{(2)}\triangleright r))\\ &= (S(h_{(2)}k_{(2)})\triangleright a)(S(k_{(1)})\varepsilon(h_{(1)})1_R\triangleright r)\\ &= (S(hk_{(2)})\triangleright a)(S(k_{(1)})\triangleright r).\end{aligned}$$

Segue portanto, que $\underline{\varepsilon}$ é caracter à direita. Dessa forma, concluímos que $R\#H$ é um R-bialgebróide à direita.

2.2 Dualidade

Apresentamos na Seção 1.5 um estudo sobre a dualidade entre R-anéis e R-coanéis. Nesta seção vamos estudar um pouco da dualidade de R-bialgebróides.

Os axiomas de biálgebras são auto-duais, ou seja, os diagramas que expressam os axiomas de uma biálgebra, não se alteram quando as flechas são invertidas. Como consequência disso, se uma biálgebra B é projetiva e finitamente gerada como k-módulo, então o dual tem uma estrutura de biálgebra também, a qual é a estrutura transposta da estrutura de biálgebra em B. Em contraste com esta característica de biálgebras, os axiomas de biálgebróides não são auto-duais nesse sentido. Pelo que estudamos na Seção 1.5, se B é um R-biálgebróide (à direita ou à esquerda) projetivo e finitamente gerado como R-módulo (à direita ou à esquerda), o seu dual (à direita ou à esquerda) tem estruturas de R-anel e R-coanel. Mas não é claro que estas estruturas constituem um R-bialgebróide. O primeiro a mostrar este fato foi Schauenburg em [26]. Um estudo mais detalhado pode ser encontrado no artigo [15]. Seguimos aqui nossa referência principal [7], que está mais próximo de ([15], Proposição 2.5).

Proposição 2.14 *Seja B um R-bialgebróide à esquerda, o qual é projetivo finitamente gerado como R-módulo à esquerda (via a multiplicação à esquerda do source). Então o dual à esquerda ${}^*B := {}_R Hom(B, R)$ possui uma estrutura de R-bialgebróide à direita.*

Demonstração: Aplicando a Proposição 1.42 para o R-coanel (B, Δ, ε), obtemos uma estrutura de R-anel em ${}^*B$. O morfismo unidade é ${}^*s : R \longrightarrow {}^* B$, $r \longmapsto \varepsilon(-)r$, para todo $r \in R$, e o produto de convolução é dado por

$$(\varphi *_l \psi)(b) = \psi(b_{(1)} \cdot \varphi(b_{(2)})) = \psi(t(\varphi(b_{(2)}))b_{(1)}),$$

para quaisquer $\psi, \varphi \in {}^*B$ e $b \in B$. Agora aplicando a versão simétrica da proposição 1.45 para o R-anel (B, s), cuja estrutura de R-bimódulo é dada por

$$r \blacktriangleright b \blacktriangleleft r' = s(r)bs(r'),$$

para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, obtemos uma estrutura de R-coanel em ${}^*B$. Desta forma, ${}^*B$ tem estrutura de R-bimódulo dada por

$$(r \rightharpoonup \varphi \cdot r')(b) = \varphi(bs(r))r',$$

para quaisquer $\varphi \in {}^*B$ e $r, r' \in R$. Em particular,

$$\varepsilon \cdot r = \varepsilon(-)r = {}^* s(r).$$

Definimos ${}^*t : R \longrightarrow {}^* B$, $r \longmapsto r \rightharpoonup \varepsilon$, dessa forma

$${}^*t(r)(b) = (r \rightharpoonup \varepsilon)(b) = \varepsilon(bs(r)).$$

Definimos também a counidade ${}^*\varepsilon : {}^*B \longrightarrow R$, $\varphi \longmapsto \varphi(1_B)$ e o coproduto ${}^*\Delta : {}^*B \longrightarrow {}^*B \otimes_R {}^*B$, dado em termos da base dual $\{x_i \in B\}_{i=1}^n$, $\{\rho_i \in {}^*B\}$, por

$${}^*\Delta(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \otimes_R \varphi(-x_i),$$

para todo $\varphi \in {}^*B$. Agora, temos que mostrar as condições restantes para ${}^*B$ ser bialgebróide à direita. Primeiro, note que a estrutura de R-bimódulo em ${}^*B$, $r \rightharpoonup \varphi \cdot r'$, coincide com $\varphi *_l {}^*s(r') *_l {}^*t(r)$, para quaisquer $r, r' \in R$ e $\varphi \in {}^*B$. De fato, antes note que

$$\Delta(s(r)) = \Delta(r \cdot 1_B) = r \cdot \Delta(1_B) = r \cdot 1_B \otimes 1_B = s(r) \otimes 1_B,$$

dessa forma

$$\begin{aligned}
(\varphi *_l {}^*t(r))(b) &= {}^* t(r)(t(\varphi(b_{(2)}))b_{(1)}) \\
&= \varepsilon(t(\varphi(b_{(2)}))b_{(1)}s(r)) \\
&= \varepsilon(b_{(1)}s(r) \cdot \varphi(b_{(2)})) \\
&= \varepsilon(b_{(1)}s(r))\varphi(b_{(2)}) \\
&= \varphi(\varepsilon(b_{(1)}s(r)) \cdot b_{(2)}) \\
&= \varphi(\varepsilon((bs(r))_{(1)})(bs(r))_{(2)}) \\
&= \varphi(bs(r)) \\
&= (r \rightharpoonup \varphi)(b).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\varphi *_l {}^*s(r))(b) &= {}^*s(r)(t(\varphi(b_{(2)}))b_{(1)}) \\
&= \varepsilon(t(\varphi(b_{(2)}))b_{(1)})r \\
&= \varepsilon(b_{(1)})\varphi(b_{(2)})r \\
&= \varphi(\varepsilon(b_{(1)}) \cdot b_{(2)})r \\
&= \varphi(b)r \\
&= (\varphi \cdot r)(b),
\end{aligned}$$

para quaisquer $r \in R$, $\varphi \in {}^*B$ e $b \in B$. vamos ver agora que as imagens de ${}^*s$ e ${}^*t$ comutam, que ${}^*s$ é morfismo de álgebras e que ${}^*t$ é antimorfismo de álgebras. De fato, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
({}^*t(r) *_l {}^*s(r'))(b) &= ({}^*t(r) \cdot r')(b) \\
&= {}^*t(r)(b)r' \\
&= \varepsilon(bs(r))r' \\
&= {}^*s(r')(bs(r)) \\
&= (r \rightharpoonup {}^*s(r'))(b) \\
&= ({}^*s(r') *_l {}^*t(r))(b).
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}({}^*t(r) *_l {}^*t(r'))(b) &= (r' \rightharpoonup {}^*t(r))(b)\\ &=^* t(r)(bs(r'))\\ &= \varepsilon(bs(r')s(r))\\ &= \varepsilon(bs(r'r))\\ &= {}^*t(r'r)(b)\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}({}^*s(r) *_l {}^*s(r'))(b) &= ({}^*s(r) \cdot r')(b)\\ &=^* s(r)(b)r'\\ &= \varepsilon(b)rr'\\ &= {}^*s(rr')(b).\end{aligned}$$

Portanto, temos que $({}^*B, {}^*s, {}^*t)$ é um R^e- anel. Agora denote o R-anel (B, s) por $B^{(s)}$ e considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc}\widehat{(\ )}: & {}^*B \otimes_R {}^*B & \to & {}_RHom(B^{(s)} \otimes_R B^{(s)}, R)\\ & \varphi \otimes \psi & \mapsto & \widehat{\varphi \otimes \psi},\end{array}$$

em que $\widehat{\varphi \otimes \psi}(a \otimes b) = \psi(a \blacktriangleleft \varphi(b)) = \psi(as(\varphi(b)))$, para quaisquer $\varphi \otimes \psi \in {}^*B \otimes_R {}^*B$ e $a \otimes b \in B^{(s)} \otimes_R B^{(s)}$. Claro que $\widehat{(\ )}$ está bem definida, pois

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi \otimes \psi}(r \blacktriangleright a \otimes b) &= \psi(s(r)a \blacktriangleleft \varphi(b))\\ &= \psi(s(r)as(\varphi(b)))\\ &= \psi(r \cdot as(\varphi(b)))\\ &= r\psi(as(\varphi(b)))\\ &= r\widehat{\varphi \otimes \psi}(a \otimes b)\end{aligned} \tag{2.22}$$

e também

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi \otimes \psi}(a \blacktriangleleft r \otimes b) &= \psi((a \blacktriangleleft r) \blacktriangleleft \varphi(b))\\ &= \psi((a \blacktriangleleft r\varphi(b))\\ &= \psi((a \blacktriangleleft \varphi(r \cdot b))\\ &= \psi((a \blacktriangleleft \varphi(r \blacktriangleright b))\\ &= \widehat{\varphi \otimes \psi}(a \otimes r \blacktriangleright b).\end{aligned}$$

Mostremos que $\widehat{(\ )}$ é uma bijeção. De fato, defina

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{(\ )}: & {}_R Hom(B^{(s)} \otimes_R B^{(s)}, R) & \to & {}^*B \otimes_R {}^*B \\ & F & \mapsto & \widetilde{F}, \end{array}$$

em que $\widetilde{F} := \sum_{i,j=1}^{n} \rho_i \otimes \rho_j \cdot F(x_j \otimes x_i)$.

Vamos ver que $\widetilde{(\ )}$ é inversa de $\widehat{(\ )}$. De fato, para quaisquer $\varphi \otimes \psi \in {}^*B \otimes_R {}^*B$, $a \otimes b \in B^{(s)} \otimes_R B^{(s)}$ e $F \in {}_R Hom(B^{(s)} \otimes_R B^{(s)}, R)$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{F}} &= (\widehat{\sum_{i,j=1}^{n} \rho_i \otimes \rho_j \cdot F(x_j \otimes x_i)})(a \otimes b) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (\rho_j \cdot F(x_j \otimes x_i))(a \blacktriangleleft \rho_i(b)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \rho_j(a \blacktriangleleft \rho_i(b)) F(x_j \otimes x_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} F(\rho_j(a \blacktriangleleft \rho_i(b)) \cdot x_j \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(a \blacktriangleleft \rho_i(b) \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(a \otimes \rho_i(b) \blacktriangleright x_i) \\ &= F\left(a \otimes \sum_{i=1}^{n} \rho_i(b) \cdot x_i\right) \\ &= F(a \otimes b), \end{aligned}$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{\widehat{\varphi \otimes \psi}} &= \sum_{i,j=1}^{n} \rho_i \otimes \rho_j \cdot \widehat{\varphi \otimes \psi}(x_j \otimes x_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \rho_i \otimes \rho_j \cdot (\psi(x_j \blacktriangleleft \varphi(x_i))) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \rho_i \otimes \rho_j \cdot (\varphi(x_i) \rightharpoonup \psi)(x_j) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \otimes \varphi(x_i) \rightharpoonup \psi \\
&= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot \varphi(x_i) \otimes \psi \\
&= \varphi \otimes \psi.
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\widehat{{}^*\Delta(\varphi)}(a \otimes b) &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{\rho_i \otimes \varphi(-x_i)}(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi((a \blacktriangleleft \rho_i(b))x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi(a(\rho_i(b) \blacktriangleright x_i)) \\
&= \varphi\left(a\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i(b) \cdot x_i\right)\right) \\
&= \varphi(ab),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\widehat{{}^*\Delta(\varphi)}(a \otimes b) &= \varphi_{(2)}(a \blacktriangleleft \varphi_{(1)}(b)) \\
&= \varphi_{(2)}(as(\varphi_{(1)}(b))),
\end{aligned}
$$

ou seja, para quaisquer $a, b \in B$ e $\varphi \in {}^*B$, temos

$$
\varphi(ab) = \varphi_{(2)}(as(\varphi_{(1)}(b))).
$$

Vamos mostrar agora que a imagem de ${}^*\Delta$ está contida em ${}^*B \times_R^r {}^*B$. De fato, antes note que para quaisquer $\varphi \in {}^*B$, $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
({}^*s(r) *_l \varphi)(b) &= \varphi(t({}^*s(r)(b_{(2)}))b_{(1)}) \\
&= \varphi(t(\varepsilon(b_{(2)})r)b_{(1)}) \\
&= \varphi(t(r)t(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(1)}) \\
&= \varphi(t(r)b),
\end{aligned}
$$

também temos,

$$
({}^*t(r) *_l \varphi)(b) = \varphi(t({}^*t(r)(b_{(2)}))b_{(1)})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi(t(\varepsilon(b_{(2)}s(r)))b_{(1)}) \\
&= \varphi(t(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(1)}t(r)) \\
&= \varphi(bt(r)).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
(^*s(r) *_l \widehat{\varphi_{(1)} \otimes_R} \varphi_{(2)})(a \otimes b) &= \varphi_{(2)}(a \blacktriangleleft (^*s(r) *_l \varphi_{(1)})(b)) \\
&= \varphi_{(2)}(a \blacktriangleleft \varphi_{(1)}(t(r)b)) \\
&= \varphi(at(r)b),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\varphi_{(1)} \otimes_R^* \widehat{t(r)} *_l \varphi_{(2)})(a \otimes b) &=^* t(r) *_l \varphi_{(2)}(a \blacktriangleleft \varphi_{(1)}(b)) \\
&= \varphi_{(2)}(as(\varphi_{(1)}(b))t(r)) \\
&= \varphi_{(2)}(at(r) \blacktriangleleft \varphi_{(1)}(b)) \\
&= \varphi(at(r)b).
\end{aligned}
$$

Portanto, a imagem de $^*\Delta$ está contida em $^*B \times_R^r {}^*B$. Vamos mostrar agora que $^*\Delta$ é morfismo de álgebras. De fato, queremos mostrar que

$$
^*\Delta(\varphi *_l \psi) = (\varphi *_l \psi)_{(1)} \otimes_R (\varphi *_l \psi)_{(2)} = \varphi_{(1)} *_l \psi_{(1)} \otimes_R \varphi_{(2)} *_l \psi_{(2)},
$$

ou seja, queremos mostrar que

$$
(\varphi *_l \psi)(ab) = (\varphi_{(2)} *_l \psi_{(2)})(a \blacktriangleleft (\varphi_{(1)} *_l \psi_{(1)})(b)),
$$

para quaisquer $a, b \in B$. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
\varphi *_l \psi(ab) &= \psi(t(\varphi(a_{(2)}b_{(2)}))a_{(1)}b_{(1)}) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi(a_{(2)}b_{(2)}))a_{(1)} \blacktriangleleft \psi_{(1)}(b_{(1)})) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)} \blacktriangleleft \varphi_{(1)}(b_{(2)})))a_{(1)}s(\psi_{(1)}(b_{(1)}))) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}s(\varphi_{(1)}(b_{(2)}))))a_{(1)}s(\psi_{(1)}(b_{(1)}))) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}t(\varphi_{(1)}(b_{(2)}))s(\psi_{(1)}(b_{(1)}))),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_{(2)} *_l \psi_{(2)})(a \blacktriangleleft (\varphi_{(1)} *_l \psi_{(1)})(b)) \\
&= (\varphi_{(2)} *_l \psi_{(2)})(as((\varphi_{(1)} *_l \psi_{(1)})(b))) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}s((\varphi_{(1)} *_l \psi_{(1)})(b))) \\
&= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}s(\psi_{(1)}(t(\varphi_{(1)}(b_{(2)}))b_{(1)})))
\end{aligned}
$$

$$= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}s((^*s(\varphi_{(1)}(b_{(2)})) *_l \psi_{(1)})(b_{(1)})))$$
$$= (^*t(\varphi_{(1)}(b_{(2)})) *_l \psi_{(2)})(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}s(\psi_{(1)}(b_{(1)})))$$
$$= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}s(\psi_{(1)}(b_{(1)}))t(\varphi_{(1)}(b_{(2)})))$$
$$= \psi_{(2)}(t(\varphi_{(2)}(a_{(2)}))a_{(1)}t(\varphi_{(1)}(b_{(2)}))s(\psi_{(1)}(b_{(1)}))).$$

Segue daí a igualdade. Portanto, concluímos que $^*\Delta$ é morfismo de álgebras. Agora vamos ver que $^*\varepsilon$ é caracter à direita em $(^*B, ^*s)$. De fato, para quaisquer $\varphi, \psi \in {}^*B$, temos

$$^*\varepsilon(1_{^*B}) = {}^*\varepsilon(\varepsilon) = \varepsilon(1_B) = 1_R,$$

também temos

$$\begin{aligned}
^*\varepsilon(^*s(^*\varepsilon(\varphi)) *_l \psi) &= {}^*\varepsilon(^*s((\varphi)(1_B)) *_l \psi) \\
&= (^*s((\varphi)(1_B)) *_l \psi)(1_B) \\
&= \psi(t(^*s(\varphi(1_B))(1_B))1_B) \\
&= \psi(t(\varepsilon(1_B)\varphi(1_B))1_B) \\
&= \psi(t(\varphi(1_B))1_B) \\
&= (\varphi *_l \psi)(1_B) \\
&= {}^*\varepsilon(\varphi *_l \psi).
\end{aligned}$$

Concluímos assim a proposição. ■

2.3 Construções de Novos Bialgebróides

Veremos nesta seção alguns exemplos de bialgebróides que são fornecidos por construções a partir de outros conhecidos.

2.3.1 Twist de Drinfeld

Um twist de Drinfel de uma biálgebra B, sobre um anel comutativo k, é uma biálgebra com a mesma estrutura de álgebra de B, e coproduto torcido por um 2-cociclo normalizado em B (chamado de elemento Drinfel'd). Nesta subseção veremos o análogo twist de Drinfel para bialgebróides visto em [27] Seção 6.3. Torções mais gerais, a quais não correspondem a elementos Drinfel'd, são estudados em [31].

Definição 2.15 *Seja B um R-bialgebróide à direita. Um elemento J invertível em $B \times_R^r B$, é chamado um 2-**cociclo normalizado** em B, quando satisfaz as condições:*

(i) $(t(r) \otimes_R s(r'))J = J(t(r) \otimes_R s(r')) \quad \forall\, r, r' \in R$ *(bilinearidade);*

(ii) $(J \otimes_R 1_B)((\Delta \otimes_R B)(J)) = (1_B \otimes_R J)((B \otimes_R \Delta)(J))$ *(condição de cociclo);*

(iii) $(\varepsilon \otimes_R B)(J) = 1_B = (B \otimes_R \varepsilon)(J)$ *(normalização).*

Proposição 2.16 *Seja J um 2-cociclo normalizado em B, um bialgebróide à direita sobre R. Então o R^e-anel (B, s, t), a counidade ε de B e a forma torcida $\Delta_J := J\Delta(-)J^{-1}$ do coproduto Δ em B, constitui um R-bialgebróide à direita B_J.*

Demonstração: Primeiramente vamos ver que Δ_J é morfismo de R-bimódulos. Antes, note que

$$(t(r) \otimes_R s(r'))J^{-1} = J^{-1}(t(r) \otimes_R s(r')). \tag{2.23}$$

Portanto, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, por simplicidade vamos denotar $J = J_i \otimes_R J^i$ e $J^{-1} = K_j \otimes_R K^j$, omitindo o somatório, assim temos

$$\begin{aligned}
\Delta_J(r \cdot b \cdot r') &= J\Delta(r \cdot b \cdot r')J^{-1} \\
&= J(r \cdot b_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot r')J^{-1} \\
&= J(b_{(1)}t(r) \otimes b_{(2)}s(r'))J^{-1} \\
&= J_i b_{(1)}t(r)K_j \otimes J^i b_{(2)}s(r')K^j \\
&= J_i b_{(1)}K_j t(r) \otimes J^i b_{(2)}K^j s(r') \quad \text{(por 2.23)} \\
&= r \cdot J_i b_{(1)}K_j \otimes J^i b_{(2)}K^j \cdot r' \\
&= r \cdot \Delta_J(b) \cdot r'.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora a coassociatividade de Δ_J. De fato, antes note que

$$((\Delta \otimes_R B)(J))^{-1} = (\Delta \otimes_R B)(J^{-1})$$

e como

$$(1_B \otimes_R J)((B \otimes_R \Delta)(J)) = (J \otimes_R 1_B)((\Delta \otimes_R B)(J)),$$

temos, aplicando os inversos em ambos os lados, que

$$((B \otimes_R \Delta)(J^{-1}))(1_B \otimes_R J^{-1}) = ((\Delta \otimes_R B)(J^{-1}))(J^{-1} \otimes 1_B).$$

Portanto, para todo $b \in B$, temos

$(B \otimes_R \Delta_J)\Delta_J(b)$

$$
\begin{aligned}
&= (B \otimes_R \Delta_J)(J\Delta(b)J^{-1})\\
&= (B \otimes_R \Delta_J)(J_i b_{(1)} K_j \otimes J^i b_{(2)} K^j)\\
&= J_i b_{(1)} K_j \otimes J\Delta(J^i b_{(2)} K^j)J^{-1}\\
&= (1_B \otimes_R J)(J_i b_{(1)} K_j \otimes \Delta(J^i b_{(2)} K^j))(1_B \otimes_R J^{-1})\\
&= (1_B \otimes_R J)(B \otimes_R \Delta)(J\Delta J^{-1})(1_B \otimes_R J^{-1})\\
&= (1_B \otimes_R J)(B \otimes_R \Delta)(J)((B \otimes_R \Delta)\Delta(b))(B \otimes_R \Delta)(J^{-1})(1_B \otimes_R J^{-1})\\
&= (J \otimes_R 1_B)(\Delta \otimes_R B)(J)((\Delta \otimes_R B)\Delta(b))(\Delta \otimes_R B)(J^{-1})(J^{-1} \otimes_R 1_B)\\
&= (J \otimes_R 1_B)(\Delta \otimes_R B)(J\Delta(b)J^{-1})(J^{-1} \otimes_R 1_B)\\
&= (\Delta_J \otimes_R B)\Delta_J(b).
\end{aligned}
$$

Agora note que $J^{-1} \in B \times_R^r B$. De fato, para todo $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
(s(r)K_j \otimes K^j)J &= s(r)K_j J_i \otimes K^j J^i\\
&= s(r) \otimes 1_B\\
&= 1_B \cdot r \otimes 1_B\\
&= 1_B \otimes r \cdot 1_B\\
&= 1_B \otimes t(r)\\
&= K_j J_i \otimes t(r) K^j J^i\\
&= (K_j \otimes t(r)K^j)J, \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

multiplicando por J^{-1}, temos $s(r)K_j \otimes K^j = K_j \otimes t(r)K^j$. Agora note que

$$
\begin{aligned}
1_B = (\varepsilon \otimes_R B)(1_B \otimes 1_B) &= (\varepsilon \otimes_R B)(J_i K_j \otimes J^i K^j)\\
&= \varepsilon(J_i K_j) \cdot J^i K^j\\
&= J^i K^j t(\varepsilon(J_i K_j))\\
&= J^i K^j t(\varepsilon(s(\varepsilon(J_i))K_j))\\
&= J^i t(\varepsilon(J_i))K^j t(\varepsilon(K_j))\\
&= K^j t(\varepsilon(K_j)) \quad \text{(por (iii))},
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
1_B = (B \otimes_R \varepsilon)(1_B \otimes 1_B) &= (B \otimes \varepsilon)(K_j J_i \otimes K^j J^i)\\
&= K_j J_i \cdot \varepsilon(K^j J^i)\\
&= K_j J_i \cdot \varepsilon(s(\varepsilon(K^j))J^i)\\
&= K_j J_i \cdot \varepsilon(J^i s(\varepsilon(K^j))) \quad \text{(por (i))}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= K_j J_i \cdot \varepsilon(J^i)\varepsilon(K^j) \\
&= K_j J_i s(\varepsilon(J^i))s(\varepsilon(K^j)) \\
&= K_j s(\varepsilon(K^j)) \\
&= K_j \cdot \varepsilon(K^j).
\end{aligned}
$$

Segue portanto, para todo $b \in B$,

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes_R B)\Delta_J(b) &= (\varepsilon \otimes_R B)(J_i b_{(1)} K_j \otimes J^i b_{(2)} K^j) \\
&= \varepsilon(J_i b_{(1)} K_j) \cdot J^i b_{(2)} K^j \\
&= \varepsilon(s(\varepsilon(J_i)) b_{(1)} K_j) \cdot J^i b_{(2)} K^j \\
&= \varepsilon(b_{(1)} K_j) \cdot J^i t(\varepsilon(J_i)) b_{(2)} K^j \\
&= \varepsilon(b_{(1)} K_j) \cdot b_{(2)} K^j \\
&= \varepsilon(s(\varepsilon(b_{(1)})) K_j) \cdot b_{(2)} K^j \\
&= \varepsilon(K_j) \cdot b_{(2)} t(\varepsilon(b_{(1)})) K^j \\
&= \varepsilon(K_j) \cdot b K^j \\
&= b K^j t(\varepsilon(K_j)) \\
&= b,
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
(B \otimes_R \varepsilon)\Delta_J(b) &= (B \otimes_R \varepsilon)(J_i b_{(1)} K_j \otimes J^i b_{(2)} K^j) \\
&= J_i b_{(1)} K_j \cdot \varepsilon(J^i b_{(2)} K^j) \\
&= J_i b_{(1)} K_j \cdot \varepsilon(s(\varepsilon(J^i b_{(2)})) K^j) \\
&= J_i b_{(1)} K_j \cdot \varepsilon(t(\varepsilon(J^i b_{(2)})) K^j) \\
&= J_i b_{(1)} s(\varepsilon(J^i b_{(2)})) K_j \cdot \varepsilon(K^j) \\
&= J_i b_{(1)} s(\varepsilon(t(\varepsilon(J^i)) b_{(2)})) \\
&= J_i s(\varepsilon(J^i)) b_{(1)} s(\varepsilon(b_{(2)})) \\
&= b_{(1)} s(\varepsilon(b_{(2)})) \\
&= b.
\end{aligned}
$$

É claro que a imagem de Δ_J está contida em $B \times_R^r B$, pois $J \in B \times_R^r B$. Temos também que Δ_J é morfismo de álgebras, pois para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta_J(ab) &= J\Delta(ab)J^{-1} \\
&= J\Delta(a)\Delta(b)J^{-1}
\end{aligned}
$$

$$= J\Delta(a)J^{-1}J\Delta(b)J^{-1}$$
$$= \Delta_J(a)\Delta_J(b).$$

Portanto, concluímos que B_J é um R-bialgebróide à direita. ■

2.3.2 Twist por 2-cociclo

De maneira dual à construção na seção anterior, pode-se deixar o coproduto inalterado e torcer o produto. Seja B um R-bialgebróide à esquerda, podemos munir o R^e-módulo produto tensorial $B \otimes_{R^e} B$ (com respeito as ações à direita (à esquerda) dadas pelas multiplicações (à esquerda) de s e t) com uma estrutura de R-coanel, que tem estrutura de R-bimódulo dada por $r \cdot (a \otimes b) \cdot r' = s(r)t(r')a \otimes b$, para quaisquer $r, r' \in R$ e $a \otimes b \in B \otimes_{R^e} B$. Definimos como coproduto

$$a \otimes b \longmapsto (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes_R (a_{(2)} \otimes b_{(2)})$$

e counidade

$$a \otimes b \longmapsto \varepsilon(ab).$$

Portanto, podemos considerar a álgebra de convolução correspondente ${}_R Hom_R(B \otimes_{R^e} B, R)$, com produto

$$(f \diamond g)(a \otimes b) := f(a_{(1)} \otimes b_{(1)})g(a_{(2)} \otimes b_{(2)}).$$

Definição 2.17 *Seja B um R-bialgebróide à esquerda. Um elemento invertível $\sigma \in {}_R Hom_R(B \otimes_{R^e} B, R)$ é chamado* ***2-cociclo normalizado*** *em B, quando satisfaz, para quaisquer $r, r' \in R$, a, b e $c \in B$, as seguintes condições:*

(i) $\sigma(s(r)t(r')a, b) = r\sigma(a, b)r'$ *(bilinearidade);*

(ii) $\sigma(a, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}) = \sigma(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c)$ *(condição de cociclo);*

(iii) $\sigma(1_B, a) = \varepsilon(a) = \sigma(a, 1_B)$ *(normalização);*

(iv) $\sigma(a, bs(r)) = \sigma(a, bt(r))$,

em que (a, b) denota elementos em $B \otimes_{R^e} B$.

Proposição 2.18 *Sejam B um R-bialgebróide à esquerda e σ um 2-cociclo normalizado em B, com inversa $\widetilde{\sigma}$. Então o source $s : R \longrightarrow B$, o target $t : R \longrightarrow B$, o R-coanel (B, Δ, ε) e o produto torcido, definido para quaisquer $a, b \in B$, por*

$$a \cdot_\sigma b := s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)},$$

constituem um R-bialgebróide à esquerda denotado por B^σ.

Demonstração: Primeiro vamos ver que s e t são morfismo de álgebras e que suas imagens comutam. De fato, antes note que para todo $r \in R$, temos

$$(B \otimes \Delta)\Delta(s(r)) = s(r) \otimes 1_B \otimes 1_B = (\Delta \otimes B)\Delta(s(r))$$

e

$$(B \otimes \Delta)\Delta(t(r)) = 1_B \otimes 1_B \otimes t(r) = (\Delta \otimes B)\Delta(t(r)).$$

Também, para todo $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(b) &= \sigma(b_{(1)}, 1_B)\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, 1_B) \\
&= \widetilde{\sigma}(s(\sigma(b_{(1)}, 1_B))b_{(2)}, 1_B) \\
&= \widetilde{\sigma}(s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}, 1_B) \\
&= \widetilde{\sigma}(\varepsilon(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}, 1_B) \\
&= \widetilde{\sigma}(b, 1_B).
\end{aligned}$$

Analogamente tem-se $\widetilde{\sigma}(1_B, b) = \varepsilon(b)$. Portanto, para quaisquer $r, r' \in R$, temos

$$\begin{aligned}
s(r) \cdot_\sigma s(r') &= s(\sigma(s(r), s(r')))t(\widetilde{\sigma}(1_B, 1_B)) \\
&= s(r\sigma(1_B, s(r')))t(\varepsilon(1_B)) \\
&= s(r\varepsilon(s(r'))) \\
&= s(rr') \quad \text{(por 2.3)},
\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}
t(r) \cdot_\sigma t(r') &= s(\sigma(1_B, 1_B)t(\widetilde{\sigma}(t(r), t(r')) \\
&= t(\widetilde{\sigma}(t(r), t(r')) \\
&= t(\varepsilon(t(r'))r) \\
&= t(r'r) \quad \text{(por 2.3)}.
\end{aligned}$$

Agora temos

$$\begin{aligned}
t(r) \cdot_\sigma s(r') &= s(\sigma(1_B, s(r')))t(\widetilde{\sigma}(t(r), 1_B)) \\
&= s(\varepsilon(s(r')))t(\varepsilon(t(r))) \\
&= s(\sigma(s(r'), 1_B))t(\widetilde{\sigma}(1_B, t(r))) \\
&= s(r') \cdot_\sigma t(r).
\end{aligned}$$

Segue que (B^σ, s, t) é um R^e-anel. Denotemos a estrutura de R-bimódulo em B^σ por $r \triangleright b \triangleleft r' = s(r) \cdot_\sigma t(r') \cdot_\sigma b$. Veremos então que $\Delta(B^\sigma) \subseteq B^\sigma \times_R^l B^\sigma$. De fato, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$b_{(1)} \cdot_\sigma t(r) \otimes b_{(2)} = s(\sigma(b_{(1)}, 1_B))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, t(r)))b_{(2)} \otimes b_{(4)}$$

$$
\begin{aligned}
&= s(\sigma(b_{(1)}, 1_B))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, (1_R \otimes \overline{r}) \cdot 1_B))b_{(2)} \otimes b_{(4)} \\
&= s(\sigma(b_{(1)}, 1_B))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)} \cdot (1_R \otimes \overline{r}), 1_B))b_{(2)} \otimes b_{(4)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}t(r), 1_B))b_{(2)} \otimes b_{(4)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, 1_B))b_{(2)} \otimes b_{(4)}s(r) \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\varepsilon(b_{(3)}))b_{(2)} \otimes b_{(4)}s(r) \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)} \otimes b_{(3)}s(r) \\
&= b_{(1)} \otimes b_{(2)}s(r),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
b_{(1)} \otimes b_{(2)} \cdot_\sigma s(r) &= b_{(1)} \otimes s(\sigma(b_{(2)}, s(r)))t(\widetilde{\sigma}(b_{(4)}, 1_B))b_{(3)} \\
&= b_{(1)} \otimes s(\sigma(b_{(2)}, (r \otimes 1_B) \cdot 1_B))t(\widetilde{\sigma}(b_{(4)}, 1_B))b_{(3)} \\
&= b_{(1)} \otimes s(\sigma(b_{(2)} \cdot (r \otimes 1_B), 1_B))t(\widetilde{\sigma}(b_{(4)}, 1_B))b_{(3)} \\
&= b_{(1)} \otimes s(\sigma(b_{(2)}s(r), 1_B))t(\varepsilon(b_{(4)}))b_{(3)} \\
&= b_{(1)} \otimes s(\varepsilon(b_{(2)}s(r)))t(\varepsilon(b_{(4)}))b_{(3)} \\
&= b_{(1)}t(r) \otimes s(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(3)} \\
&= b_{(1)}t(r) \otimes b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes b_{(2)}s(r).
\end{aligned}
$$

Vamos ver que Δ é morfismo de álgebras. De fato, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(a \cdot_\sigma b) &= \Delta(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)}) \cdot \Delta(a_{(2)}b_{(2)}) \cdot \widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)}) \cdot \Delta(a_{(2)})\Delta(b_{(2)}) \cdot \widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)}) \cdot a_{(2)}b_{(2)} \otimes a_{(3)}b_{(3)} \cdot \widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(4)}) \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(4)}))a_{(3)}b_{(3)},
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta(a) \cdot_\sigma \Delta(b) &= a_{(1)} \cdot_\sigma b_{(1)} \otimes a_{(2)} \cdot_\sigma b_{(2)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)(1)}, b_{(1)(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(1)(3)}, b_{(1)(3)}))a_{(1)(2)}b_{(1)(2)} \otimes \\
&\quad\ s(\sigma(a_{(2)(1)}, b_{(2)(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(2)(3)}, b_{(2)(3)}))a_{(2)(2)}b_{(2)(2)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes \\
&\quad\ s(\sigma(a_{(4)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, b_{(6)}))a_{(5)}b_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes \\
&\quad\ s(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))s(\sigma(a_{(4)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, b_{(6)}))a_{(5)}b_{(5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes \\
&\quad s(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})\sigma(a_{(4)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, b_{(6)}))a_{(5)}b_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes \\
&\quad s(\varepsilon(a_{(3)}b_{(3)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(5)}))a_{(4)}b_{(4)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(5)}))s(\varepsilon(a_{(3)}b_{(3)}))a_{(4)}b_{(4)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)} \otimes t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(4)}))a_{(3)}b_{(3)}.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que Δ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(r \triangleright b) &= \Delta(s(r) \cdot_\sigma b) \\
&= \Delta(s(r)) \cdot_\sigma \Delta(b) \\
&= s(r) \cdot_\sigma b_{(1)} \otimes b_{(2)} \\
&= r \triangleright b_{(1)} \otimes b_{(2)} \\
&= r \triangleright \Delta(b),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(b \triangleleft r) &= \Delta(t(r) \cdot_\sigma b) \\
&= \Delta(t(r)) \cdot_\sigma \Delta(b) \\
&= b_{(1)} \otimes t(r) \cdot_\sigma b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes b_{(2)} \triangleleft r \\
&= \Delta(b) \triangleleft r.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que ε é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaaisquer $r \in R$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(r \triangleright b) &= \varepsilon(s(r) \cdot_\sigma b) \\
&= \varepsilon(s(\sigma(s(r), b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(1_B, b_{(3)})b_{(2)}) \\
&= \sigma(s(r), b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})\widetilde{\sigma}(1_B, b_{(3)}) \\
&= \sigma(s(r), b_{(1)})\widetilde{\sigma}(s(\varepsilon(b_{(2)})), b_{(3)}) \\
&= \sigma(s(r), b_{(1)})\widetilde{\sigma}(1_B, s(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(3)}) \\
&= r\sigma(1_B, b_{(1)})\widetilde{\sigma}(1_B, b_{(2)}) \\
&= r\varepsilon(b),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\varepsilon(b \triangleleft r) = \varepsilon(t(r) \cdot_\sigma b)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(s(\sigma(1_B, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(t(r), b_{(3)}))b_{(2)}) \\
&= \sigma(1_B, b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})\widetilde{\sigma}(t(r), b_{(3)}) \\
&= \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})\widetilde{\sigma}(1_B, t(r)b_{(3)}) \\
&= \varepsilon(s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)})\widetilde{\sigma}(1_B, t(r)b_{(3)}) \\
&= \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(t(r)b_{(2)}) \\
&= \varepsilon(b_{(1)})\varepsilon(b_{(2)})r \\
&= \varepsilon(s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)})r \\
&= \varepsilon(b)r.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora a counitalidade. De fato, para todo $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
b_{(1)} \triangleleft \varepsilon(b_{(2)}) &= t(\varepsilon(b_{(2)})) \cdot_\sigma b_{(1)} \\
&= s(\sigma(1_B, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(t(\varepsilon(b_{(4)})), b_{(3)}))b_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(1_B, t(\varepsilon(b_{(4)}))b_{(3)}))b_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(1_B, b_{(3)}))b_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))t(\varepsilon(b_{(3)}))b_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)} \\
&= b,
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b_{(1)}) \triangleright b_{(2)} &= s(\varepsilon(b_{(1)})) \cdot_\sigma b_{(2)} \\
&= s(\sigma(s(\varepsilon(b_{(1)})), b_{(2)}))t(\widetilde{\sigma}(1_B, b_{(4)}))b_{(3)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)})\sigma(1_B, b_{(2)}))t(\varepsilon(b_{(4)}))b_{(3)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))s(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(3)} \\
&= s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)} \\
&= b.
\end{aligned}
$$

Segue que $(B^\sigma, \Delta, \varepsilon)$ é um R-coanel. Vamos mostrar agora que ε é caracter à esquerda em (B^σ, s). De fato, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(a \cdot_\sigma s(\varepsilon(b))) &= \varepsilon(s(\sigma(a_{(1)}, s(\varepsilon(b))))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, 1_B))a_{(2)}) \\
&= \varepsilon(s(\sigma(a_{(1)}s(\varepsilon(b)), 1_B))t(\varepsilon(a_{(3)}))a_{(2)}) \\
&= \varepsilon(s(\sigma(a_{(1)}s(\varepsilon(b)), 1_B))a_{(2)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}s(\varepsilon(b)), 1_B)\varepsilon(a_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a_{(1)}s(\varepsilon(b)))\varepsilon(a_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(a_{(1)}s(\varepsilon(b)) \cdot \varepsilon(a_{(2)}))\\
&= \varepsilon(t(\varepsilon(a_{(2)}))a_{(1)}s(\varepsilon(b)))\\
&= \varepsilon(as(\varepsilon(b)))\\
&= \varepsilon(ab),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(a \cdot_\sigma b) &= \varepsilon(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}b_{(2)})\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}s(\varepsilon(b_{(2)})))\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})\\
&= \sigma(a_{(1)}t(\varepsilon(b_{(2)})), b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, t(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(1)})\widetilde{\sigma}(s(\varepsilon(a_{(2)}))a_{(3)}, b_{(3)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)})\\
&= \varepsilon(ab).
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar agora a associatividade do produto torcido. Para tanto, iremos usar o item (ii) da Definição 2.17. Antes precisamos de um resultado análogo para $\widetilde{\sigma}$. Vamos mostrar que, para quaisquer a, b e $c \in B$, temos

$$
\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)}))a_{(1)}b_{(1)}, c) = \widetilde{\sigma}(a, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}). \tag{2.25}
$$

Antes note que

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}, s(\sigma(b_{(3)}, c_{(3)}))b_{(4)}c_{(4)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)})), b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}s(\sigma(b_{(3)}, c_{(3)})), b_{(4)}c_{(4)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}s(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))s(\sigma(b_{(3)}, c_{(3)})), b_{(4)}c_{(4)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}s(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)})\sigma(b_{(3)}, c_{(3)})), b_{(4)}c_{(4)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}s(\varepsilon(b_{(2)}c_{(2)})), b_{(3)}c_{(3)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}, s(\varepsilon(b_{(2)}c_{(2)}))b_{(3)}c_{(3)})\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}, b_{(2)}c_{(2)})\\
&= \varepsilon(abc),
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
&\sigma(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(4)}))a_{(3)}b_{(3)}, c_{(2)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\sigma(a_{(2)}b_{(2)}, c_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(3)}b_{(3)}, c_{(2)})\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(4)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}b_{(2)}c)\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})\\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}s(\varepsilon(b_{(2)}c)))\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma(a_{(1)}t(\varepsilon(b_{(2)}c)), b_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, t(\varepsilon(b_{(2)}c))b_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, t(\varepsilon(b_{(2)}s(\varepsilon(c)))b_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, t(\varepsilon(b_{(2)}))b_{(1)}t(\varepsilon(c)))\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)}t(\varepsilon(c))\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)}) \\
&= \sigma(a_{(1)}, b_{(1)}s(\varepsilon(c))\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)}) \quad \text{por } (iv) \\
&= \sigma(a_{(1)}, (bs(\varepsilon(c)))_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, (bs(\varepsilon(c)))_{(2)}) \\
&= \varepsilon(abs(\varepsilon(c))) \\
&= \varepsilon(abc)
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Agora do item (ii) da Definição 2.17, temos

$$\sigma(a, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}) = \sigma(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c)$$

multiplicando pelo que queremos provar, pela esquerda e pela direita, temos

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\sigma(a_{(2)}, s(\sigma(b_{(3)}, c_{(3)}))b_{(4)}c_{(4)}) \\
&\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(6)}))a_{(3)}b_{(5)}, c_{(5)}) \\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\sigma(s(\sigma(a_{(2)}, b_{(3)}))a_{(3)}b_{(4)}, c_{(3)}) \\
&\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(6)}))a_{(4)}b_{(5)}, c_{(4)}),
\end{aligned}
$$

agora usando 2.26 e 2.27, temos

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(a_{(1)}b_{(1)}c_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(2)}) \\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}).
\end{aligned}
$$

Desenvolvendo o membro esquerdo, temos

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(a_{(1)}b_{(1)}c_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a_{(1)}b_{(1)}t(\varepsilon(c_{(1)})))\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a_{(1)}b_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}s(\varepsilon(c_{(1)})), c_{(2)}) \\
&= \varepsilon(a_{(1)}b_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c) \\
&= \varepsilon(a_{(1)}t(\varepsilon(b_{(1)})))\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c) \\
&= \varepsilon(a_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}, c) \\
&= \varepsilon(a_{(1)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(2)}))a_{(2)}b_{(1)}, c) \\
&= \widetilde{\sigma}(s(\varepsilon(a_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(2)}))a_{(2)}b_{(1)}, c) \\
&= \widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(2)}))s(\varepsilon(a_{(1)}))a_{(2)}b_{(1)}, c)
\end{aligned}
$$

$$= \widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(2)}))a_{(1)}b_{(1)}, c),$$

desenvolvendo o membro direito, temos

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}s(\varepsilon(b_{(3)}c_{(3)}))).\\
&= \widetilde{\sigma}(a_{(1)}t(\varepsilon(b_{(3)}c_{(3)})), t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(t(\varepsilon(a_{(2)}))a_{(1)}t(\varepsilon(b_{(3)}c_{(3)})), t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(at(\varepsilon(b_{(3)}c_{(3)})), t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(at(\varepsilon(b_{(3)}s(\varepsilon(c_{(3)})))), t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(at(\varepsilon(b_{(3)})), t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}t(\varepsilon(c_{(3)})), c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a, t(\varepsilon(b_{(3)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, t(\varepsilon(c_{(3)}))c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a, t(\varepsilon(b_{(3)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)})\varepsilon(b_{(3)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a, t(\widetilde{\sigma}(t(\varepsilon(b_{(3)}))b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).\\
&= \widetilde{\sigma}(a, t(\widetilde{\sigma}(b_{(2)}, c_{(2)}))b_{(1)}c_{(1)}).
\end{aligned}$$

Segue portanto, a igualdade. Para finalizar, vamos usar o item (ii) da Definição 2.17 para mostrar a associatividade do produto torcido. De fato, para quaisquer a, b e $c \in B$, temos

$$\begin{aligned}
(a \cdot_\sigma b) \cdot_\sigma c &= s(\sigma((a \cdot_\sigma b)_{(1)}, c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}((a \cdot_\sigma b)_{(3)}, c_{(3)}))(a \cdot_\sigma b)_{(2)}c_{(2)}\\
&= s(\sigma(a_{(1)} \cdot_\sigma b_{(1)}, c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)} \cdot_\sigma b_{(3)}, c_{(3)}))(a_{(2)} \cdot_\sigma b_{(2)})c_{(2)}\\
&= s(\sigma(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(1)}))\\
&\quad\ t(\widetilde{\sigma}(s(\sigma(a_{(7)}, b_{(7)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(9)}, b_{(9)}))a_{(8)}b_{(8)}, c_{(3)}))\\
&\quad\ s(\sigma(a_{(4)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, b_{(6)}))a_{(5)}b_{(5)}c_{(2)}\\
&= s(\sigma(s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c_{(1)})\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)}))\\
&\quad\ t(\sigma(a_{(7)}, b_{(7)})\widetilde{\sigma}(t(\widetilde{\sigma}(a_{(9)}, b_{(9)}))a_{(8)}b_{(8)}, c_{(3)}))\\
&\quad\ s(\sigma(a_{(4)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, b_{(6)}))a_{(5)}b_{(5)}c_{(2)}\\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)})) \quad \text{(por (ii)-2.17)}\\
&\quad\ t(\sigma(a_{(6)}, b_{(7)})\widetilde{\sigma}(a_{(7)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(5)}))b_{(8)}c_{(4)})) \quad \text{(por 2.25)}\\
&\quad\ s(\sigma(a_{(3)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(6)}))a_{(4)}b_{(5)}c_{(3)}\\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))s(\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)}))\\
&\quad\ t(\widetilde{\sigma}(a_{(7)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(5)}))b_{(8)}c_{(4)}))t(\sigma(a_{(6)}, b_{(7)}))\\
&\quad\ s(\sigma(a_{(3)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(6)}))a_{(4)}b_{(5)}c_{(3)}\\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(7)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(5)}))b_{(8)}c_{(4)}))t(\sigma(a_{(6)}, b_{(7)}))\\
&s(\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)}))s(\sigma(a_{(3)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(6)}))a_{(4)}b_{(5)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(7)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(5)}))b_{(8)}c_{(4)}))t(\sigma(a_{(6)}, b_{(7)}))\\
&s(\widetilde{\sigma}(a_{(2)}, b_{(3)})\sigma(a_{(3)}, b_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, b_{(6)}))a_{(4)}b_{(5)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(6)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(8)}, c_{(5)}))b_{(7)}c_{(4)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, b_{(5)})\sigma(a_{(5)}, b_{(6)}))s(\varepsilon(a_{(2)}b_{(3)}))a_{(3)}b_{(4)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(7)}, c_{(5)}))b_{(6)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(4)}b_{(5)}))s(\varepsilon(a_{(2)}b_{(3)}))a_{(3)}b_{(4)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(7)}, c_{(5)}))b_{(6)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(4)}b_{(5)}))s(\varepsilon(a_{(2)}t(\varepsilon(b_{(3)}))))a_{(3)}b_{(4)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(7)}, c_{(5)}))b_{(6)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(4)}b_{(5)}))s(\varepsilon(a_{(2)})a_{(3)}s(\varepsilon(b_{(3)}))b_{(4)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(5)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(5)}))b_{(5)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(4)}b_{(4)}))s(\varepsilon(a_{(2)})a_{(3)}b_{(3)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(5)}))b_{(5)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(3)}b_{(4)}))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(5)}))b_{(5)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(3)}s(\varepsilon(b_{(4)}))))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(5)}))b_{(5)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(3)})a_{(2)}t(\varepsilon(b_{(4)}))b_{(3)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))\\
&t(\widetilde{\sigma}(a_{(4)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(5)}, c_{(5)}))b_{(4)}c_{(4)}))\\
&t(\varepsilon(a_{(3)})a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}\\
=\ &s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}))
\end{aligned}
$$

$$t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(5)}, c_{(5)}))b_{(4)}c_{(4)}))$$
$$a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)},$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
a \cdot_\sigma (b \cdot_\sigma c) &= s(\sigma(a_{(1)}, (b \cdot_\sigma c)_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, (b \cdot_\sigma c)_{(3)}))a_{(2)}(b \cdot_\sigma c)_{(2)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, b_{(1)} \cdot_\sigma c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, b_{(3)} \cdot_\sigma c_{(3)}))a_{(2)}(b_{(2)} \cdot_\sigma c_{(2)}) \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, c_{(3)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\sigma(b_{(7)}, c_{(7)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(9)}))b_{(8)}c_{(8)})) \\
&\quad a_{(2)}s(\sigma(b_{(4)}, c_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)}))b_{(5)}c_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}t(\sigma(b_{(4)}, c_{(4)})), s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, c_{(3)})) \\
&\quad b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}s(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)})), s(\sigma(b_{(7)}, c_{(7)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(9)})) \\
&\quad b_{(8)}c_{(8)}))a_{(2)}b_{(5)}c_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))t(\sigma(b_{(4)}, c_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, c_{(3)})) \\
&\quad b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)})s(\sigma(b_{(7)}, c_{(7)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(9)})) \\
&\quad b_{(8)}c_{(8)}))a_{(2)}b_{(5)}c_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(3)}, c_{(3)})\sigma(b_{(4)}, c_{(4)})) \\
&\quad b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)})\sigma(b_{(7)}, c_{(7)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(9)}, c_{(9)})) \\
&\quad b_{(8)}c_{(8)}))a_{(2)}b_{(5)}c_{(5)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))t(\varepsilon(b_{(3)}c_{(3)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\widetilde{\sigma}(b_{(5)}, c_{(5)})\sigma(b_{(6)}, c_{(6)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(8)}, c_{(8)})) \\
&\quad b_{(7)}c_{(7)}))a_{(2)}b_{(4)}c_{(4)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\widetilde{\sigma}(b_{(4)}, c_{(4)})\sigma(b_{(5)}, c_{(5)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(7)}, c_{(7)})) \\
&\quad b_{(6)}c_{(6)}))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, s(\varepsilon(b_{(4)}c_{(4)}))t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)}))b_{(5)}c_{(5)}))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(6)}, c_{(6)}))s(\varepsilon(b_{(4)}c_{(4)}))b_{(5)}c_{(5)}))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)} \\
&= s(\sigma(a_{(1)}, s(\sigma(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})) \\
&\quad t(\widetilde{\sigma}(a_{(3)}, t(\widetilde{\sigma}(b_{(5)}, c_{(5)}))b_{(4)}c_{(4)}))a_{(2)}b_{(3)}c_{(3)}.
\end{aligned}$$

Segue portanto, a associatividade do produto torcido. Com isso, concluímos a proposição. ■

2.3.3 Dualidade

Seja B um R-bialgebróide à esquerda projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita (via a multiplicação do target à esquerda). Então, podemos munir $B^* := Hom_R(B, R)$ com uma estrutura de R-bialgebróide à direita, dada pelo R^e-anel (B^*, s^*, t^*), em que $s^*(r) = \varepsilon(-t(r))$ e $t^*(r) = r\varepsilon(-)$, para todo $r \in R$, pelo R-coanel $(B^*, \Delta^*, \varepsilon^*)$, tal que

$$\Delta^*(\varphi) := \sum_{i=1}^{n} \varphi(-x_i) \otimes \rho_i, \qquad \forall\, \varphi \in B^*,$$

em que $\{x_i \in B\}_{i=1}^n$ e $\{\rho_i \in B^*\}_{i=1}^n$ é a base dual de $B^{(t)} := (B, t)$ e $\varepsilon^*(\varphi) = \varphi(1_B)$ para todo $\varphi \in B^*$ e pela estrutura de R-bimódulo dada, para quaisquer $r, r' \in R$, $\varphi \in B^*$ e $b \in B$, por

$$(r \cdot \varphi \leftharpoonup r')(b) = r\varphi(bt(r')).$$

O produto de convolução é dado por

$$(\varphi *_r \psi)(b) = \psi(\varphi(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}) = \psi(s(\varphi(b_{(1)}))b_{(2)}),$$

para quaisquer $\varphi, \psi \in B^*$ e $b \in B$. Os detalhes podem ser encontrados em ([15], Proposição 2.5). As construções nas seções 2.3.1 e 2.3.2 são duais, no sentido da seguinte proposição.

Proposição 2.19 *Seja B um R-bialgebróide à esquerda projetivo finitamente gerado como R-módulo à direita, (via a multiplicação do target à esquerda). Considere o dual à direita B^* com estrutura de R-bialgebróide à direita. Então um elemento $J = \varphi_i \otimes_R \varphi^i \in B^* \times_R^r B^*$ é um 2-cociclo normalizado em B^* se, e somente se,*

$$\sigma_J : B \otimes_{R^e} B \longrightarrow R, \quad \sigma_J(b, b') := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(bt(\varphi^i(b')))$$

é um 2-cociclo normalizado em B.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ O fato de J ser 2-cociclo normalizado em B^* nos diz que, para quaisquer $r, r' \in R$, temos

(a) $t^*(r) *_r \varphi_i \otimes_R s^*(r') *_r \varphi^i = \varphi_i *_r t^*(r) \otimes_R \varphi^i *_r s^*(r')$ (bilinearidade);

(b) $(J \otimes_R \varepsilon)((\Delta^* \otimes_R B^*)(J)) = (\varepsilon \otimes_R J)((B^* \otimes_R \Delta^*)(J))$ (condição de cociclo);

(c) $(\varepsilon^* \otimes_R B^*)(J) = (B^* \otimes_R \varepsilon^*)(J)$ (normalização).

Temos que mostrar, para quaisquer $r, r' \in R$ e $a, b \in B$,

(i) $\sigma_J(s(r)t(r')a, b) = r\sigma_J(a,b)r'$ (bilinearidade)

(ii) $\sigma_J(a, s(\sigma_J(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}) = \sigma_J(s(\sigma_J(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c)$ (condição de cociclo);

(iii) $\sigma_J(1_B, a) = \varepsilon(a) = \sigma_J(a, 1_B)$ (normalização);

(iv) $\sigma_J(a, s(r)) = \sigma_J(a, t(r))$.

Mostremos agora duas propriedades que vão nos ajudar. Para quaisquer $r \in R$, $b \in B$ e $\varphi \in B^*$, temos

$$\begin{aligned}
(t^*(r) *_r \varphi)(b) &= \varphi(t^*(r)(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}) \\
&= \varphi(r\varepsilon(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}) \\
&= \varphi(s(r)s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}) \\
&= \varphi(s(r)b),
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
(s^*(r) *_r \varphi)(b) &= \varphi(s^*(r)(b_{(1)}) \triangleright b_{(2)}) \\
&= \varphi(\varepsilon(b_{(1)}t(r)) \triangleright b_{(2)}) \\
&= \varphi(\varepsilon(b_{(1)}) \triangleright b_{(2)}s(r)) \\
&= \varphi(s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}s(r)) \\
&= \varphi(bs(r)).
\end{aligned}$$

Vamos ver agora que σ_J está bem definido, ou seja, que é R^e-balanceado e R-bilinear. De fato, para quaisquer $(a, b) \in B \otimes_{R^e} B$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_J(at(r), b) &= \varphi_i(at(r)t(\varphi^i(b))) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(b)r)) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(t(r)b))) \\
&= \sigma_J(a, t(r)b),
\end{aligned}$$

também temos

$$\sigma_J(as(r), b) = \varphi_i(as(r)t(\varphi^i(b)))$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi_i(at(\varphi^i(b))s(r)) \\
&= (s^*(r) *_r \varphi_i)(at(\varphi^i(b))) \\
&= \varphi_i(at((t^*(r) *_r \varphi^i)(b))) \quad \text{(pois } J \in B^* \times_R^r B^*) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(s(r\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}))) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(s(r)s(\varepsilon(b_{(1)}))b_{(2)}))) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(s(r)b))) \\
&= \sigma_J(a, s(r)b).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora, a condição de bilinearidade para σ_J. De fato, para quaisquer $(a,b) \in B \otimes_{R^e} B$ e $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
\sigma_J(t(r)a, b) &= \varphi_i(t(r)at(\varphi^i(b))) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(b)) \triangleleft r) \\
&= \varphi_i(at(\varphi^i(b)))r \\
&= \sigma_J(a,b)r,
\end{aligned}
$$

também

$$
\begin{aligned}
\sigma_J(s(r)a, b) &= \varphi_i(s(r)at(\varphi^i(b))) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(at(\varphi^i(b))) \\
&= (\varphi_i *_r t^*(r))(at(\varphi^i(b))) \quad \text{(por (a))} \\
&= (r \cdot \varphi_i)(at(\varphi^i(b))) \\
&= r\varphi_i(at(\varphi^i(b))) \\
&= r\sigma_J(a,b).
\end{aligned}
$$

Agora note que a condição de normalização de σ_J decorre da normalização de J. De fato, a normalização de J nos diz que

$$
\varepsilon^*(\varphi_i) \cdot \varphi^i = 1_{B^*} = \varepsilon = \varphi_i \leftharpoonup \varepsilon^*(\varphi^i),
$$

portanto, segue que

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b) &= (\varepsilon^*(\varphi_i) \cdot \varphi^i)(b) \\
&= \varepsilon^*(\varphi_i)\varphi^i(b) \\
&= \varphi_i(1_B)\varphi^i(b) \\
&= \varphi_i(t(\varphi^i(b))) \\
&= \sigma_J(1_B, b),
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon(b) &= (\varphi_i \leftharpoonup \varepsilon^*(\varphi^i))(b)\\ &= \varphi_i(bt(\varepsilon^*(\varphi^i)))\\ &= \varphi_i(bt(\varphi^i(1_B)))\\ &= \sigma_J(b, 1_B).\end{aligned}$$

A condição de cociclo de σ_J decorre também da condição de cociclo de J. Para mostrarmos isto, vamos precisar das seguintes bijeções

$$\begin{aligned}\widehat{(\ )} : B^* \otimes_R B^* &\longrightarrow Hom_R(B^{(t)} \otimes_R B^{(t)}, R)\\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \widehat{\varphi \otimes \psi},\end{aligned}$$

tal que $\widehat{\varphi \otimes \psi}(a \otimes b) = \varphi(bt(\psi(a)))$, para todo $a \otimes b \in B^{(t)} \otimes_R B^{(t)}$, e

$$\begin{aligned}\widetilde{(\ )} : B^* \otimes_R B^* \otimes_R B^* &\longrightarrow Hom_R(B^{(t)} \otimes_R B^{(t)} \otimes_R B^{(t)}, R)\\ \varphi \otimes \psi \otimes \eta &\longmapsto \varphi \widetilde{\otimes \psi \otimes} \eta,\end{aligned}$$

tal que $\varphi \widetilde{\otimes \psi \otimes} \eta(a \otimes b \otimes c) = \varphi(ct(\psi(bt(\eta(a)))))$, para todo $a \otimes b \otimes c \in B^* \otimes_R B^* \otimes_R B^*$. Essas bijeções podem serem mostradas de maneira análoga ao que foi feito na proposição 2.14. Usando a primeira bijeção temos

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta^*(\varphi)}(b \otimes a) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varphi(-x_j) \otimes \rho_j}\right)(b \otimes a)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (\widehat{\varphi(-x_j) \otimes \rho_j})(b \otimes a)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(a\, t(\rho_j(b))x_j)\\ &= \varphi(ab),\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta^*(\varphi)}(b \otimes a) &= \widehat{\varphi_{(1)} \otimes \varphi_{(2)}}(b \otimes a)\\ &= \varphi_{(1)}(a\, t(\varphi_{(2)}(b))),\end{aligned}$$

ou seja, para quaisquer $a, b \in B$ e $\varphi \in B^*$, temos

$$\varphi(ab) = \varphi_{(1)}(b\, t(\varphi_{(2)}(a))). \tag{2.28}$$

Agora a condição de cociclo para J nos diz que

$$\varphi_j *_r \varphi_{i(1)} \otimes \varphi^j *_r \varphi_{i(2)} \otimes \varphi^i = \varphi_i \otimes \varphi_j * \varphi^i_{(1)} \otimes \varphi^j * \varphi^i_{(2)}.$$

Aplicando a igualdade em $a \otimes b \otimes c \in B^* \otimes_R B^* \otimes_R B^*$, temos

$$\begin{aligned}
&(\varphi_j *_r \varphi_{i(1)} \widetilde{\otimes \varphi^j} *_r \varphi_{i(2)} \otimes \varphi^i)(a \otimes b \otimes c)\\
&= (\varphi_j *_r \varphi_{i(1)})(c\,t(\varphi^j *_r \varphi_{i(2)}(bt(\varphi^i(a))))\\
&= (\varphi_j *_r \varphi_{i(1)})(c\,t(\varphi_{i(2)}(\varphi^j(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}t(\varphi^i(a)))))\\
&= (\varphi_j *_r \varphi_{i(1)})(c\,t(\varphi_{i(2)}(s(\varphi^j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i(a)))))\\
&= \varphi_{i(1)}(\varphi_j(c_{(1)}) \cdot c_{(2)}t(\varphi_{i(2)}(s(\varphi^j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i(a)))))\\
&= \varphi_{i(1)}(s(\varphi_j(c_{(1)}))c_{(2)}t(\varphi_{i(2)}(s(\varphi^j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i(a))))),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

e

$$\begin{aligned}
&(\varphi_i \otimes \varphi_j * \widetilde{\varphi^i_{(1)} \otimes} \varphi^j * \varphi^i_{(2)})(a \otimes b \otimes c)\\
&= \varphi_i(c\,t((\varphi_j *_r \varphi^i_{(1)})(b\,t((\varphi^j *_r \varphi^i_{(2)})(b)))))\\
&= \varphi_i(c\,t((\varphi_j *_r \varphi^i_{(1)})(b\,t(\varphi^i_{(2)}(\varphi^j(a_{(1)}) \cdot a_{(2)})))))\\
&= \varphi_i(c\,t(\varphi^i_{(1)}(\varphi_j(b_{(1)}) \cdot b_{(2)}t(\varphi^i_{(2)}(\varphi^j(a_{(1)}) \cdot a_{(2)})))))\\
&= \varphi_i(c\,t(\varphi^i_{(1)}(s(\varphi_j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i_{(2)}(s(\varphi^j(a_{(1)}))a_{(2)}))))).
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Lembre, queremos mostrar que

$$\sigma_J(a, s(\sigma_J(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)}) = \sigma_J(s(\sigma_J(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
&\sigma_J(a, s(\sigma_J(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})\\
&= \varphi_i(a\,t(\varphi^i(s(\sigma_J(b_{(1)}, c_{(1)}))b_{(2)}c_{(2)})))\\
&= \varphi_i(a\,t(\varphi^i(s(\varphi_j(b_{(1)}t(\varphi^j(c_{(1)}))))b_{(2)}c_{(2)})))\\
&= \varphi_i(a\,t(\varphi^i(s(\varphi_j(b_{(1)}))b_{(2)}s(\varphi^j(c_{(1)}))c_{(2)}))),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\sigma_J(s(\sigma_J(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}, c)\\
&= \varphi_i(s(\sigma_J(a_{(1)}, b_{(1)}))a_{(2)}b_{(2)}t(\varphi^i(c)))\\
&= \varphi_i(s(\varphi_j(a_{(1)}t(\varphi^j(b_{(1)}))))a_{(2)}b_{(2)}t(\varphi^i(c)))\\
&= \varphi_i(s(\varphi_j(a_{(1)}))a_{(2)}s(\varphi^j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i(c)))
\end{aligned}$$

$= \varphi_{i(1)}(s(\varphi_j(a_{(1)}))a_{(2)}\, t(\varphi_{i(2)}(s(\varphi^j(b_{(1)}))b_{(2)}t(\varphi^i(c)))))$ (por 2.28)
$= \varphi_i(at(\varphi^i_{(1)}(s(\varphi_j(b_{(1)}))b_{(2)}\, t(\varphi^i_{(2)}(s(\varphi^j(c_{(1)}))c_{(2)})))))$ (por 2.29 e 2.30)
$= \varphi_i(a\, t(\varphi^i(s(\varphi_j(b_{(1)}))b_{(2)}s(\varphi^j(c_{(1)}))c_{(2)})))$.

Segue a igualdade. Falta mostrarmos que $\sigma_J(b, s(r)) = \sigma_J(b, t(r))$. De fato, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_J(b, s(r)) &= \varphi_i(b\, t(\varphi^i(s(r)))) \\
&= \varphi_i(b\, t((\varphi^i *_r s^*(r))(1_B))) \\
&= \varphi_i(b\, t((\varphi^i \leftharpoondown r)(1_B))) \\
&= \varphi_i(b\, t(\varphi^i(1_B t(r)))) \\
&= \varphi_i(b\, t(\varphi^i(t(r)))) \\
&= \sigma_J(b, t(r)).
\end{aligned}$$

Agora denote $J^{-1} = \psi_j \otimes_R \psi^j$ e mostremos que $\sigma_J^{-1} = \sigma_{J^{-1}}$. De fato, note que $\varphi_i *_r \psi_j \otimes_R \varphi^i *_r \psi^j = \varepsilon \otimes_R \varepsilon$. Dessa forma, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
(\varphi_i *_r \psi_j \widehat{\otimes_R} \varphi^i *_r \psi^j)(a \otimes b) &= (\varepsilon \widehat{\otimes_R} \varepsilon)(a \otimes b) \\
&= \varepsilon(b\, t(\varepsilon(a))) \\
&= \varepsilon(b\, s(\varepsilon(a))) \\
&= \varepsilon(ba),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
&(\varphi_i *_r \psi_j \widehat{\otimes_R} \varphi^i *_r \psi^j)(a \otimes b) \\
&= (\varphi_i *_r \psi_j)(b\, t((\varphi_i *_r \psi_j)(a))) \\
&= (\varphi_i *_r \psi_j)(b\, t(\psi^j(s(\varphi^i(a_{(1)}))a_{(2)}))) \\
&= \psi_j(s(\varphi_i(b_{(1)}))b_{(2)}\, t(\psi^j(s(\varphi^i(a_{(1)}))a_{(2)}))) \\
&= \psi_j(s(\varphi_i(b_{(1)}))b_{(2)}\, t((t^*(\varphi^i(a_{(1)}) *_r \psi^j)(a_{(2)})))) \\
&= (s^*(\varphi^i(a_{(1)})) *_r \psi_j)(s(\varphi_i(b_{(1)}))b_{(2)}\, t(\psi^j(a_{(2)}))) \\
&= \psi_j(s(\varphi_i(b_{(1)}))b_{(2)}\, t(\psi^j(a_{(2)}))s(\varphi^i(a_{(1)}))) \\
&= \psi_j(s(\varphi_i(b_{(1)}))b_{(2)}\, s(\varphi^i(a_{(1)}))t(\psi^j(a_{(2)}))) \\
&= \psi_j(s(\varphi_i(b_{(1)}\, t(\varphi^i(a_{(1)}))))b_{(2)}\, t(\psi^j(a_{(2)}))) \\
&= \psi_j(s(\sigma_J(b_{(1)}, a_{(1)}))b_{(2)}\, t(\psi^j(a_{(2)}))) \\
&= \sigma_{J^{-1}}(s(\sigma_J(b_{(1)}, a_{(1)}))b_{(2)}, a_{(2)})
\end{aligned}$$

$$= \sigma_J(b_{(1)}, a_{(1)})\sigma_{J^{-1}}(b_{(2)}, a_{(2)}),$$

analogamente, mostra-se que $\sigma_{J^{-1}}(b_{(1)}, a_{(1)})\sigma_J(b_{(2)}, a_{(2)}) = \varepsilon(ba)$.

($\Leftarrow$) Do que fizemos acima, concluímos que as condições de cociclo e normalização, valem para σ_J se, e somente se, valem para J. Além disso, σ_J é inversível se, e somente se, J é inversível. Portanto, resta mostrarmos a condição de bilinearidade para J e que $J \in B^* \times_R^r B^*$. Mostremos agora a condição de bilinearidade para J. De fato, para quaisquer $a, b \in B$ e $r, r' \in R$, temos

$$\begin{aligned}
&(t^*(r) *_r \varphi_i \widehat{\otimes_R s}^*(r') *_r \varphi^i)(a \otimes b) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t((s^*(r') *_r \varphi^i)(a))) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(s(s^*(r')(a_{(1)}))a_{(2)}))) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(s(\varepsilon(a_{(1)}t(r'))a_{(2)}))) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(s(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)}s(r')))) \\
&= (t^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(a\, s(r')))) \\
&= \varphi_i(s(r)b\, t(\varphi^i(a\, s(r')))) \\
&= \sigma_J(s(r)b, a\, s(r')) \\
&= r\sigma_J(b, a\, t(r')),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
&(\varphi_i *_r t^*(r) \widehat{\otimes_R \varphi}^i *_r s^*(r'))(a \otimes b) \\
&= (\varphi_i *_r t^*(r))(b\, t((\varphi^i *_r s^*(r'))(a))) \\
&= (\varphi_i *_r t^*(r))(b\, t((\varphi^i \leftharpoonup r')(a))) \\
&= (\varphi_i *_r t^*(r))(b\, t(\varphi^i(a\, t(r')))) \\
&= (r \cdot \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(a\, t(r')))) \\
&= r\, \varphi_i(b\, t(\varphi^i(a\, t(r')))) \\
&= r\sigma_J(b, a\, t(r')).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que $J \in B^* \times_R^r B^*$. De fato, para quaisquer $r \in R$ e $a \otimes b \in B \otimes_{R^e} B$, temos

$$\begin{aligned}
(s^*(r) \widehat{*_r \varphi_i} \otimes_R \varphi^i)(a \otimes b) &= (s^*(r) *_r \varphi_i)(b\, t(\varphi^i(a))) \\
&= \varphi_i(b\, t(\varphi^i(a))s(r)) \\
&= \varphi_i(b\, s(r)t(\varphi^i(a)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_J(bs(r), a)\\
&= \sigma_J(b, s(r)a)\\
&= \varphi_i(b\,t(\varphi^i(s(r)a)))\\
&= \varphi_i(b\,t((s^*(r) *_r \varphi^i)(a)))\\
&= (\varphi_i \otimes_R \widehat{t^*(r)} *_r \varphi^i)(a \otimes b).
\end{aligned}
$$

Segue que $s^*(r) *_r \varphi_i \otimes_R \varphi^i = \varphi_i \otimes_R t^*(r) *_r \varphi^i$. Portanto, $J \in B^* \times_R^r B^*$. Concluímos assim, a demonstração. ■

2.3.4 Bialgebróide de Connes-Moscovici

O bialgebróide a seguir foi construído na teoria de folheações no contexto do cálculo do índice transversal de folheações e pode ser encontrado em [10].

Proposição 2.20 *Considere H uma álgebra de Hopf sobre um anel comutativo k, e seja R um H-módulo álgebra à esquerda. Considere o k-módulo produto tensorial $B := R \otimes_k H \otimes_k R$ equipado com a multiplicação associativa*

$$(r \otimes h \otimes s)(r' \otimes k \otimes s') := r(h_{(1)} \triangleright r') \otimes h_{(2)}k \otimes (h_{(3)} \triangleright s')s,$$

para quaisquer $r \otimes h \otimes s$, $r' \otimes k \otimes s' \in B$. Então, Podemos munir B com uma estrutura de R-bialgebróide à esquerda, com source e target dados, para todo $r \in R$, por $s : R \longrightarrow B$, $r \longmapsto r \otimes 1_H \otimes 1_R$ e $t : R \longrightarrow B$, $r \longmapsto 1_R \otimes 1_H \otimes r$. Definimos também uma estrutura de R-coanel $(B, \underline{\Delta}, \underline{\varepsilon})$, por

$$\underline{\Delta}(r \otimes h \otimes s) = (r \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes s)$$

e

$$\underline{\varepsilon}(r \otimes h \otimes s) = r\varepsilon(h)s,$$

para todo $r \otimes h \otimes s \in B$.

Demonstração: Veremos primeiro que source e target comutam nas imagens e que são morfismos de k-álgebras. De fato, para quaisquer $r, r' \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
s(r)s(r') &= (r \otimes 1_H \otimes 1_R)(r' \otimes 1_H \otimes 1_R)\\
&= r(1_H \triangleright r') \otimes 1_H \otimes (1_H \triangleright 1_R)1_R\\
&= rr' \otimes 1_H \otimes 1_R
\end{aligned}
$$

$$= s(rr')$$

e

$$\begin{aligned} t(r)t(r') &= (1_R \otimes 1_H \otimes r)(1_R \otimes 1_H \otimes r') \\ &= 1_R(1_H \triangleright 1_R) \otimes 1_H \otimes (1_H \triangleright r')r \\ &= 1_R \otimes 1_H \otimes r'r \\ &= t(r'r). \end{aligned}$$

Agora temos

$$\begin{aligned} s(r)t(r') &= (r \otimes 1_H \otimes 1_R)(1_R \otimes 1_H \otimes r') \\ &= r(1_H \triangleright 1_R) \otimes 1_H \otimes (1_H \triangleright r')1_R \\ &= r \otimes 1_H \otimes r', \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} t(r')s(r) &= (1_R \otimes 1_H \otimes r')(r \otimes 1_H \otimes 1_R) \\ &= 1_R(1_H \triangleright r) \otimes 1_H \otimes (1_H \triangleright 1_R)r' \\ &= r \otimes 1_H \otimes r'. \end{aligned}$$

Portanto, B é um R^e-anel. Mostremos agora que $\underline{\Delta}$ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a \otimes h \otimes b \in B$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(r \cdot (a \otimes h \otimes b)) &= \underline{\Delta}(s(r)(a \otimes h \otimes b)) \\ &= \underline{\Delta}((r \otimes 1_H \otimes 1_R)(a \otimes h \otimes b)) \\ &= \underline{\Delta}(r(1_H \triangleright a) \otimes h \otimes (1_H \triangleright b)1_R) \\ &= \underline{\Delta}(ra \otimes h \otimes b) \\ &= (ra \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\ &= (r \otimes 1_H \otimes 1_R)(a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\ &= s(r)(a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\ &= r \cdot (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\ &= r \cdot \underline{\Delta}(a \otimes h \otimes b), \end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}((a \otimes h \otimes b) \cdot r) &= \underline{\Delta}((1_R \otimes 1_H \otimes r)(a \otimes h \otimes b)) \\ &= \underline{\Delta}(1_R(1_H \triangleright a) \otimes h \otimes (1_H \triangleright b)r) \\ &= \underline{\Delta}(a \otimes h \otimes br) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes br) \\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes 1_H \otimes r)(1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R t(r)(1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b) \cdot r \\
&= \underline{\Delta}(a \otimes h \otimes b) \cdot r.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a \otimes h \otimes b \in B$ e $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((r \cdot (a \otimes h \otimes b)) &= \underline{\varepsilon}(s(r)(a \otimes h \otimes b)) \\
&= \underline{\varepsilon}((r \otimes 1_H \otimes 1_R)(a \otimes h \otimes b)) \\
&= \underline{\varepsilon}(r(1_H \triangleright a) \otimes h \otimes (1_H \triangleright b)1_R) \\
&= \underline{\varepsilon}(ra \otimes h \otimes b) \\
&= ra\,\varepsilon(h)b \\
&= r\underline{\varepsilon}(a \otimes h \otimes b),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((a \otimes h \otimes b) \cdot r) &= \underline{\varepsilon}((1_R \otimes 1_H \otimes r)(a \otimes h \otimes b)) \\
&= \underline{\varepsilon}(1_R(1_H \triangleright a) \otimes h \otimes (1_H \triangleright b)r) \\
&= \underline{\varepsilon}(a \otimes h \otimes br) \\
&= a\varepsilon(h)b\,r \\
&= \underline{\varepsilon}(a \otimes h \otimes b)r.
\end{aligned}
$$

Mostremos que valem a coassociatividade e counitalidade. De fato, para todo $a \otimes h \otimes b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
&(B \otimes_R \underline{\Delta})\underline{\Delta}(a \otimes h \otimes b) \\
&= (B \otimes_R \underline{\Delta})((a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b)) \\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R [(1_R \otimes h_{(2)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b)] \\
&= [(a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes 1_R)] \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b) \\
&= (\underline{\Delta} \otimes_R B)((a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes 1_R)) \\
&= (\underline{\Delta} \otimes_R B)\underline{\Delta}(a \otimes h \otimes b).
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
(B \otimes_R \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(a \otimes h \otimes b) &= (B \otimes_R \underline{\varepsilon})((a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes b)) \\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \cdot \underline{\varepsilon}(1_R \otimes h_{(2)} \otimes b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\cdot \varepsilon(h_{(2)})b\\
&= t(\varepsilon(h_{(2)})b)(a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\\
&= (1_R\otimes 1_H\otimes \varepsilon(h_{(2)})b)(a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\\
&= a\otimes h_{(1)}\otimes \varepsilon(h_{(2)})b\\
&= a\otimes h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})\otimes b\\
&= a\otimes h\otimes b
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon}\otimes_R B)\underline{\Delta}(a\otimes h\otimes b) &= (\underline{\varepsilon}\otimes_R B)((a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b))\\
&= \underline{\varepsilon}(a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\cdot(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\cdot(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= s(a\varepsilon(h_{(1)}))(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= (a\varepsilon(h_{(1)})\otimes 1_H\otimes 1_R)(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= a\varepsilon(h_{(1)})\otimes h_{(2)}\otimes b\\
&= a\otimes h\otimes b.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\Delta}(B)\subseteq B\times_R^l B$. De fato, para quaisquer $a\otimes h\otimes b\in B$ e $r\in R$, temos

$$
\begin{aligned}
&(a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)t(r)\otimes_R(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)(1_R\otimes 1_H\otimes r)\otimes_R(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)\\
&= (a(h_{(1)}\triangleright 1_R)\otimes h_{(2)}\otimes(h_{(3)}\triangleright r))\otimes_R(1_R\otimes h_{(4)}\otimes b)\\
&= (a\varepsilon(h_{(1)})\otimes h_{(2)}\otimes(h_{(3)}\triangleright r))\otimes_R(1_R\otimes h_{(4)}\otimes b)\\
&= (a\otimes\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\otimes(h_{(3)}\triangleright r))\otimes_R(1_R\otimes h_{(4)}\otimes b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes(h_{(2)}\triangleright r))\otimes_R(1_R\otimes h_{(3)}\otimes b),
\end{aligned}
$$

por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
&(a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)s(r)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(1_R\otimes h_{(2)}\otimes b)(r\otimes 1_H\otimes 1_R)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(h_{(2)}\triangleright r\otimes h_{(3)}\otimes(h_{(4)}\triangleright 1_R)b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(h_{(2)}\triangleright r\otimes h_{(3)}\otimes\varepsilon(h_{(4)})b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(h_{(2)}\triangleright r\otimes h_{(3)}\varepsilon(h_{(4)})\otimes b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(h_{(2)}\triangleright r\otimes h_{(3)}\otimes b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R(h_{(2)}\triangleright r\otimes 1_H\otimes 1_R)(1_R\otimes h_{(3)}\otimes b)\\
&= (a\otimes h_{(1)}\otimes 1_R)\otimes_R s(h_{(2)}\triangleright r)(1_R\otimes h_{(3)}\otimes b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (h_{(2)} \triangleright r) \cdot (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b)\\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \cdot (h_{(2)} \triangleright r) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b)\\
&= t((h_{(2)} \triangleright r))(a \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b)\\
&= (a \otimes h_{(1)} \otimes (h_{(2)} \triangleright r)) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)} \otimes b).
\end{aligned}
$$

Segue que $\underline{\Delta}(B) \subseteq B \times_R^l B$. Veremos agora que $\underline{\Delta}$ é multiplicativo. De fato, para quaisquer $r \otimes h \otimes r'$, $a \otimes k \otimes b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
&\underline{\Delta}((r \otimes h \otimes r')(a \otimes k \otimes b))\\
&\quad = \underline{\Delta}(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k \otimes (h_{(3)} \triangleright b)r')\\
&\quad = (r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)}k_{(2)} \otimes (h_{(4)} \triangleright b)r'),
\end{aligned}
$$

por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
&\underline{\Delta}(r \otimes h \otimes r')\underline{\Delta}(a \otimes k \otimes b)\\
&=[(r \otimes h_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes r')][(a \otimes k_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes k_{(2)} \otimes b)]\\
&=(r \otimes h_{(1)} \otimes 1_R)(a \otimes k_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(2)} \otimes r')(1_R \otimes k_{(2)} \otimes b)\\
&=(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k_{(1)} \otimes (h_{(3)} \triangleright 1_R)) \otimes_R ((h_{(4)} \triangleright 1_R) \otimes h_{(5)}k_{(2)} \otimes (h_{(6)} \triangleright b)r')\\
&=(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k_{(1)} \otimes (\varepsilon(h_{(3)})1_R)) \otimes_R (\varepsilon(h_{(4)})1_R) \otimes h_{(5)}k_{(2)} \otimes (h_{(6)} \triangleright b)r')\\
&=(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (\varepsilon(h_{(3)})1_R) \otimes h_{(4)}k_{(2)} \otimes (h_{(5)} \triangleright b)r')\\
&=(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k_{(1)} \otimes 1_R) \otimes_R (1_R \otimes h_{(3)}k_{(2)} \otimes (h_{(4)} \triangleright b)r').
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\varepsilon}$ é caracter à esquerda em (B, s). De fato, para quaisquer $r \otimes h \otimes r'$ e $a \otimes k \otimes b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((r \otimes h \otimes r')s(\underline{\varepsilon}(a \otimes k \otimes b))) &= \underline{\varepsilon}((r \otimes h \otimes r')s(a\,\varepsilon(k)b))\\
&= \underline{\varepsilon}((r \otimes h \otimes r')s(ab\,\varepsilon(k)))\\
&= \underline{\varepsilon}((r \otimes h \otimes r')(ab\,\varepsilon(k) \otimes 1_H \otimes 1_R))\\
&= \underline{\varepsilon}(r(h_{(1)} \triangleright ab\varepsilon(k)) \otimes h_{(2)} \otimes (h_{(3)} \triangleright 1_R)r')\\
&= \underline{\varepsilon}(r(h_{(1)} \triangleright ab\,\varepsilon(k)) \otimes h_{(2)} \otimes \varepsilon(h_{(3)})r')\\
&= \underline{\varepsilon}(r(h_{(1)} \triangleright ab\,\varepsilon(k)) \otimes h_{(2)} \otimes r')\\
&= r(h_{(1)} \triangleright ab\,\varepsilon(k))\varepsilon(h_{(2)})r'\\
&= r(h_{(1)} \triangleright ab)\varepsilon(k)\varepsilon(h_{(2)})r',\\
&= r(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) \triangleright ab)\varepsilon(k)r',\\
&= r(h \triangleright ab)\varepsilon(k)r',
\end{aligned}
$$

por outro lado, temos

$$
\underline{\varepsilon}((r \otimes h \otimes r')(a \otimes k \otimes b)) = \underline{\varepsilon}(r(h_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(2)}k \otimes (h_{(3)} \triangleright b)r')
$$

$$
\begin{aligned}
&= r(h_{(1)} \triangleright a)\varepsilon(h_{(2)}k)(h_{(3)} \triangleright b)r' \\
&= r(h_{(1)} \triangleright a)\varepsilon(h_{(2)})\varepsilon(k)(h_{(3)} \triangleright b)r' \\
&= r(h_{(1)} \triangleright a)\varepsilon(k)(h_{(2)} \triangleright b)r' \\
&= r(h_{(1)} \triangleright a)(h_{(2)} \triangleright b)\varepsilon(k)r' \\
&= r(h \triangleright ab)\varepsilon(k)r'.
\end{aligned}
$$

Para concluírmos a demonstração, mostremos que, de fato, o produto aqui definido é associativo. Para quaisquer $r \otimes h \otimes s$, $r' \otimes h' \otimes s'$ e $a \otimes k \otimes b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
&[(r \otimes h \otimes s)(r' \otimes h' \otimes s')](a \otimes k \otimes b) \\
&= (r(h_{(1)} \triangleright r') \otimes h_{(2)}h' \otimes (h_{(3)} \triangleright s')s)(a \otimes k \otimes b) \\
&= r(h_{(1)} \triangleright r')(h_{(2)}h'_{(1)} \triangleright a) \otimes h_{(3)}h'_{(2)}k \otimes (h_{(4)}h'_{(3)} \triangleright b)(h_{(5)} \triangleright s')s \\
&= r(h_{(1)} \triangleright (r'(h'_{(1)} \triangleright a))) \otimes h_{(2)}h'_{(2)}k \otimes (h_{(3)}h'_{(3)} \triangleright b)(h_{(4)} \triangleright s')s \\
&= r(h_{(1)} \triangleright (r'(h'_{(1)} \triangleright a))) \otimes h_{(2)}h'_{(2)}k \otimes (h_{(3)} \triangleright ((h'_{(3)} \triangleright b)s')s,
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&(r \otimes h \otimes s)[(r' \otimes h' \otimes s')(a \otimes k \otimes b)] \\
&= (r \otimes h \otimes s)(r'(h'_{(1)} \triangleright a) \otimes h'_{(2)}k \otimes (h'_{(3)} \triangleright b)s') \\
&= r(h_{(1)} \triangleright (r'(h'_{(1)} \triangleright a))) \otimes h_{(2)}h'_{(2)}k \otimes (h_{(3)} \triangleright ((h'_{(3)} \triangleright b)s'))s.
\end{aligned}
$$

■

2.3.5 Extensão Escalar

Seja B uma biálgebra comutativa sobre um anel comutativo k e R uma álgebra na categoria dos módulos Yetter-Drinfel'd à direita-direita de B. Isto significa que R é um B-módulo álgebra à direita e um B-comódulo álgebra à direita, tais que, vale a seguinte condição de compatibilidade

$$(a \triangleleft x_{(2)})^{(0)} \otimes_k x_{(1)}(a \triangleleft x_{(2)})^{(1)} = a^{(0)} \triangleleft x_{(1)} \otimes_k a^{(1)}x_{(2)}, \tag{2.31}$$

para quaisquer $a \in R$ e $x \in B$. Em que $a \triangleleft x$ denota a ação de B em R e $a \longmapsto a^{(0)} \otimes a^{(1)}$ denota a coação de B em R, para quaisquer $a \in R$ e $x \in B$. A categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd é pré-trançada. Assuma que R é comutativa trançada, ou seja, para quaisquer $a, b \in R$, temos

$$b^{(0)}(a \triangleleft b^{(1)}) = ab. \tag{2.32}$$

Sobre essas condições, o produto smash $\mathcal{B} := R\#B$ tem uma estrutura de R-bialgebróide à direita. Lembre que $R\#B := R \otimes_k B$, com multiplicação

$$(a\#x)(b\#y) := b(a \triangleleft y_{(1)}) \otimes_k xy_{(2)}, \tag{2.33}$$

para quaisquer $a\#x$ e $b\#y \in \mathcal{B}$. Os morfismos source e target são definidos para todo $a \in R$, por

$$s : R \longrightarrow \mathcal{B}, \quad a \longmapsto a^{(0)}\#a^{(1)},$$

ou seja, o source é a coação de B em R, e

$$t : R \longrightarrow \mathcal{B}, \quad a \longmapsto a\#1_B,$$

respectivamente. O coproduto $\underline{\Delta}$ e a counidade $\underline{\varepsilon}$, são definidos, para todo $a\#x \in \mathcal{B}$, por

$$\begin{array}{cccc} \underline{\Delta}: & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \otimes_R \mathcal{B} \\ & a\#x & \longmapsto & (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}). \end{array}$$

e

$$\begin{array}{cccc} \underline{\varepsilon}: & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \otimes_R \mathcal{B} \\ & a\#x & \longmapsto & a\varepsilon(x). \end{array}$$

O nome *extensão escalar* vem do fato que a álgebra base k de B é substituída pela álgebra base R de $\mathcal{B}$. Mostremos então que $\mathcal{B}$ é um R-bialgebróide à direita. Note que, o fato de R ser um B-comódulo álgebra à direita, nos diz que a coação de B em R é morfismo de álgebra, ou seja, para quaisquer $a, b \in R$, temos

$$(ab)^{(0)} \otimes_k (ab)^{(1)} = a^{(0)}b^{(0)} \otimes_k a^{(1)}b^{(1)}$$

e

$$1_R^{(0)} \otimes_k 1_R^{(1)} = 1_R \otimes_k 1_R.$$

Mostremos primeiro que s e t são morfismos de álgebra e que comutam nas imagens. De fato, para quaisquer r e $a \in R$, temos

$$\begin{aligned} s(ab) &= (ab)^{(0)}\#(ab)^{(1)} \\ &= a^{(0)}b^{(0)}\#a^{(1)}b^{(1)}, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$s(a)s(b) = (a^{(0)}\#a^{(1)})(b^{(0)}\#b^{(1)})$$

$$
\begin{aligned}
&= b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft b^{(1)}{}_{(1)})\#a^{(1)}b^{(1)}{}_{(2)}\\
&= b^{(0)(0)}(a^{(0)} \triangleleft b^{(0)(1)})\#a^{(1)}b^{(1)}\\
&= a^{(0)}b^{(0)}\#a^{(1)}b^{(1)}, \quad \text{(por 2.32)}
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
t(a)t(b) &= (a\#1_H)(b\#1_H)\\
&= b(a \triangleleft 1_B)\#1_B\\
&= ba\#1_B\\
&= t(ba).
\end{aligned}
$$

Agora temos

$$
\begin{aligned}
s(a)t(b) &= (a^{(0)}\#a^{(1)})(b\#1_B)\\
&= b(a^{(0)} \triangleleft 1_B)\#a^{(1)}\\
&= ba^{(0)}\#a^{(1)},
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
t(b)s(a) &= (b\#1_B)(a^{(0)}\#a^{(1)})\\
&= a^{(0)}(b \triangleleft a^{(1)}{}_{(1)})\#a^{(1)}{}_{(2)}\\
&= a^{(0)(0)}(b \triangleleft a^{(0)(1)})\#a^{(1)}\\
&= ba^{(0)}\#a^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\Delta}$ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a\#x \in \mathcal{B}$ e $b \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}(b \cdot (a\#x)) &= \underline{\Delta}((a\#x)t(b))\\
&= \underline{\Delta}((a\#x)(b\#1_B))\\
&= \underline{\Delta}(b(a \triangleleft 1_B)\#x)\\
&= \underline{\Delta}(ba\#x)\\
&= (ba\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
b \cdot \underline{\Delta}(a\#x) &= b \cdot (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})\\
&= (a\#x_{(1)})t(b) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})\\
&= (a\#x_{(1)})(b\#1_B) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b(a \triangleleft 1_B)\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}) \\
&= (ba\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}).
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
(a\#x)(b^{(0)}\#b^{(1)}) &= b^{(0)}(a \triangleleft b^{(1)}{}_{(1)})\#xb^{(1)}{}_{(2)} \\
&= b^{(0)(0)}(a \triangleleft b^{(0)(1)})\#xb^{(1)} \\
&= ab^{(0)}\#xb^{(1)} \quad \text{(por 2.32).}
\end{aligned}
$$

Dessa forma, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}((a\#x)\cdot b) &= \underline{\Delta}((a\#x)s(b)) \\
&= \underline{\Delta}((a\#x)(b^{(0)}\#b^{(1)})) \\
&= \underline{\Delta}(ab^{(0)}\#xb^{(1)}) \\
&= (ab^{(0)}\#x_{(1)}b^{(1)}{}_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}{}_{(2)}) \\
&= (ab^{(0)(0)}\#x_{(1)}b^{(0)(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)})(b^{(0)(0)}\#b^{(0)(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)})s(b^{(0)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \cdot b^{(0)} \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R b^{(0)} \cdot (1_R\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}b^{(1)})t(b^{(0)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (b^{(0)}(1_R \triangleleft 1_B)\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (b^{(0)}\#x_{(2)}b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})(b^{(0)}\#b^{(1)}) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})s(b) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})s(b) \\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}) \cdot b \\
&= \underline{\Delta}(a\#x) \cdot b.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $a\#x \in \mathcal{B}$ e $b \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(b \cdot (a\#x)) &= \underline{\varepsilon}((a\#x)t(b)) \\
&= \underline{\varepsilon}((a\#x)(b\#1_B)) \\
&= \underline{\varepsilon}(b(a \triangleleft 1_B)\#x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\varepsilon}(ba\#x) \\
&= ba\varepsilon(x) \\
&= b\underline{\varepsilon}(a\#x),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((a\#x)\cdot b) &= \underline{\varepsilon}((a\#x)s(b)) \\
&= \underline{\varepsilon}((a\#x)(b^{(0)}\#b^{(1)})) \\
&= \underline{\varepsilon}(ab^{(0)}\#xb^{(1)}) \\
&= ab^{(0)}\varepsilon(xb^{(1)}) \\
&= ab^{(0)}(\varepsilon(x)\varepsilon(b^{(1)})) \\
&= ab^{(0)}(\varepsilon(b^{(1)})\varepsilon(x)) \\
&= (a\varepsilon(x))b \\
&= \underline{\varepsilon}(a\#x)b.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que valem a coassociatividade e a counitalidade. De fato, para todo $a\#x \in \mathcal{B}$, temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}\otimes_R \underline{\Delta})\underline{\Delta}(a\#x) &= (\mathcal{B}\otimes_R \underline{\Delta})((a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)})) \\
&= (a\#x_{(1)})\otimes_R \underline{\Delta}(1_R\#x_{(2)}) \\
&= (a\#x_{(1)})\otimes_R ((1_R\#x_{(2)})\otimes_R (1_R\#x_{(3)})) \\
&= ((a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)}))\otimes_R (1_R\#x_{(3)}) \\
&= \underline{\Delta}(a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)}) \\
&= (\underline{\Delta}\otimes_R \mathcal{B})((a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)})) \\
&= (\underline{\Delta}\otimes_R \mathcal{B})\underline{\Delta}(a\#x).
\end{aligned}
$$

Agora temos

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{B}\otimes_R \underline{\varepsilon})\underline{\Delta}(a\#x) &= (\mathcal{B}\otimes_R \underline{\varepsilon})((a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)})) \\
&= (a\#x_{(1)})\cdot\underline{\varepsilon}(1_R\#x_{(2)}) \\
&= (a\#x_{(1)})s(1_R\varepsilon(x_{(2)})) \\
&= (a\#x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}))(1_R\#1_B) \\
&= a\#x,
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon}\otimes_R \mathcal{B})\underline{\Delta}(a\#x) &= (\underline{\varepsilon}\otimes_R \mathcal{B})((a\#x_{(1)})\otimes_R (1_R\#x_{(2)})) \\
&= \underline{\varepsilon}(a\#x_{(1)})\cdot(1_R\#x_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1_R\#x_{(2)})t(\underline{\varepsilon}(a\#x_{(1)}))\\
&= (1_R\#x_{(2)})t(a\varepsilon(x_{(1)}))\\
&= (1_R\#x_{(2)})(a\varepsilon(x_{(1)})\#1_B)\\
&= (1_R\#x_{(2)}\varepsilon(x_{(1)}))(a\#1_B)\\
&= (1_R\#x)(a\#1_B)\\
&= a(1_R \triangleleft 1_B)\#x1_B\\
&= a\#x.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\Delta}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B} \times_R^r \mathcal{B}$. De fato, para quaisquer $a\#x \in \mathcal{B}$ e $b \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
&s(b)(a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})\\
&= (b^{(0)}\#b^{(1)})(a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})\\
&= (a(b^{(0)} \triangleleft x_{(1)})\#b^{(1)}x_{(2)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})\\
&= (a(b \triangleleft x_{(2)})^{(0)}\#x_{(1)}(b \triangleleft x_{(2)})^{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)}) \quad \text{por } 2.31\\
&= (a\#x_{(1)})((b \triangleleft x_{(2)})^{(0)}\#(b \triangleleft x_{(2)})^{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)})s(b \triangleleft x_{(2)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \cdot (b \triangleleft x_{(2)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (b \triangleleft x_{(2)}) \cdot (1_R\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})t(b \triangleleft x_{(2)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(3)})(b \triangleleft x_{(2)}\#1_B)\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R ((b \triangleleft x_{(2)})(1_R \triangleleft 1_B)\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R ((b \triangleleft x_{(2)})\#x_{(3)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R (b\#1_B)(1_R\#x_{(2)})\\
&= (a\#x_{(1)}) \otimes_R t(b)(1_R\#x_{(2)}).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\Delta}$ é multiplicativo. De fato, para quaisquer $a\#x$ e $b\#y \in \mathcal{B}$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}((a\#x)(b\#y)) &= \underline{\Delta}(c(a \triangleleft y_{(1)})\#xy_{(2)})\\
&= (b(a \triangleleft y_{(1)})\#x_{(1)}y_{(2)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)}y_{(3)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}(a\#x)\underline{\Delta}(b\#y) &= [(a\#x_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})][(b\#y_{(1)}) \otimes_R (1_R\#y_{(2)})]\\
&= (a\#x_{(1)})(b\#y_{(1)}) \otimes_R (1_R\#x_{(2)})(1_R\#y_{(2)})\\
&= (b(a \triangleleft y_{(1)})\#x_{(1)}y_{(2)}) \otimes_R (1_R \triangleleft y_{(3)}\#x_{(2)}y_{(4)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b(a \triangleleft y_{(1)})\# x_{(1)}y_{(2)}) \otimes_R (1_R\varepsilon(y_{(3)})\# x_{(2)}y_{(4)}) \\
&= (b(a \triangleleft y_{(1)})\# x_{(1)}y_{(2)}) \otimes_R (1_R\# x_{(2)}\varepsilon(y_{(3)})y_{(4)}) \\
&= (b(a \triangleleft y_{(1)})\# x_{(1)}y_{(2)}) \otimes_R (1_R\# x_{(2)}y_{(3)}).
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\underline{\varepsilon}$ é caracter à direita em $(\mathcal{B}, s)$. De fato, para quaisquer $a\#x$ e $b\#y \in \mathcal{B}$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(s(\underline{\varepsilon}(a\#x))b\#y) &= \underline{\varepsilon}(s(a\varepsilon(x))(b\#y)) \\
&= \underline{\varepsilon}(s(a)(b\#y)\varepsilon(x)) \\
&= \underline{\varepsilon}((a^{(0)}\#a^{(1)})(b\#y))\varepsilon(x) \\
&= \underline{\varepsilon}(b(a^{(0)} \triangleleft y_{(1)})\#a^{(1)}y_{(2)})\varepsilon(x) \\
&= b(a^{(0)} \triangleleft y_{(1)})\varepsilon(a^{(1)}y_{(2)})\varepsilon(x) \\
&= b(a^{(0)} \triangleleft y_{(1)})\varepsilon(a^{(1)})\varepsilon(y_{(2)})\varepsilon(x) \\
&= b(a \triangleleft y)\varepsilon(x),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}((a\#x)(b\#y)) &= \underline{\varepsilon}(b(a \triangleleft y_{(1)})\#x\, y_{(2)}) \\
&= b(a \triangleleft y_{(1)})\varepsilon(x\, y_{(2)}) \\
&= b(a \triangleleft y_{(1)})\varepsilon(x)\varepsilon(y_{(2)}) \\
&= b(a \triangleleft y)\varepsilon(x).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que $\mathcal{B}$ é um R-bialgebróide à direita.

2.4 A Categoria Monoidal de Módulos

Sabemos que uma álgebra B sobre um anel comutativo k, possui uma estrutura de biálgebra se, e somente se, a categoria de B-módulos à direita (ou à esquerda) é monoidal, tal que o funtor esquecimento $\mathcal{M}_B \longrightarrow \mathcal{M}_k$ é estritamente monoidal, ver [23]. Nosso próximo teorema é uma generalização deste fato para bialgebróides. Tal generalização, foi feita por Schauenburg em [26].

Teorema 2.21 *Sejam R uma álgebra sobre um anel comutativo k e (B, s, t) um R^e-anel. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *B é um R-bialgebróide à direita;*

(2) *A categoria $\mathcal{M}_B$ dos B-módulos à direita é monoidal, tal que o funtor esquecimento $U : \mathcal{M}_B \longrightarrow_R \mathcal{M}_R$ é estritamente monoidal.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Primeiramente, note que, se M é um B-módulo à direita, então M é um R-bimódulo com estrutura dada por $r \cdot m \cdot r' := (m \triangleleft s(r')) \triangleleft t(r)$, para quaisquer $m \in M$ e $r, r' \in R$. Agora, para quaisquer $M, N \in \mathcal{M}_B$, temos $M \otimes_R N \in \mathcal{M}_B$. De fato, $M \otimes_R N$ possui estrutura de B-módulo à direita, definida por

$$(m \otimes_R n) \triangleleft b := m \triangleleft b_{(1)} \otimes_R n \triangleleft b_{(2)}.$$

Assim, para quaisquer $m \otimes n \in M \otimes_R N$ e $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
((m \otimes n) \triangleleft a) \triangleleft b &= (m \triangleleft a_{(1)} \otimes n \triangleleft a_{(2)}) \triangleleft b \\
&= (m \triangleleft a_{(1)}) \triangleleft b_{(1)} \otimes (n \triangleleft a_{(2)}) \triangleleft b_{(2)} \\
&= m \triangleleft a_{(1)} b_{(1)} \otimes n \triangleleft a_{(2)} b_{(2)} \\
&= m \triangleleft (ab)_{(1)} \otimes n \triangleleft (ab)_{(2)} \\
&= (m \otimes n) \triangleleft ab.
\end{aligned}$$

Também temos pelo Lema 1.46 que R é um B-módulo à direita, pois ε é caracter à direita em (B, s). A ação de B em R é dada por $r \triangleleft b = \varepsilon(s(r)b)$, para quaisquer $r \in R$ e $b \in B$. Agora, definimos os isomorfismos naturais canônicos

$$a_{M,N,P} : (M \otimes_R N) \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R (N \otimes_R P), \quad (m \otimes n) \otimes p \longmapsto m \otimes (n \otimes p),$$

$$l_M : R \otimes_R M \longrightarrow M, \quad (r \otimes m) \longmapsto r \cdot m$$

e

$$r_M : M \otimes_R R \longrightarrow M, \quad (m \otimes r) \longmapsto m \cdot r.$$

Veremos que são morfismos de B-módulos à direita. De fato, para quaisquer $(m \otimes n) \otimes p \in (M \otimes N) \otimes P$ e $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
a_{M,N,P}(((m \otimes n) \otimes p) \triangleleft b) &= a_{M,N,P}((m \otimes n) \triangleleft b_{(1)} \otimes p \triangleleft b_{(2)}) \\
&= a_{M,N,P}((m \triangleleft b_{(1)} \otimes n \triangleleft b_{(2)}) \otimes p \triangleleft b_{(3)}) \\
&= m \triangleleft b_{(1)} \otimes (n \triangleleft b_{(2)} \otimes p \triangleleft b_{(3)}) \\
&= m \triangleleft b_{(1)} \otimes ((n \otimes p) \triangleleft b_{(2)}) \\
&= (m \otimes (n \otimes p)) \triangleleft b \\
&= a_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p) \triangleleft b.
\end{aligned}$$

Agora para quaisquer $r \otimes m \in R \otimes M$ e $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
l_M((r \otimes m) \triangleleft b) &= l_M(r \triangleleft b_{(1)} \otimes m \triangleleft b_{(2)}) \\
&= l_M(\varepsilon(s(r) b_{(1)}) \otimes m \triangleleft b_{(2)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(s(r)b_{(1)}) \cdot (m \triangleleft b_{(2)}) \\
&= \varepsilon(b_{(1)}) \cdot (m \triangleleft t(r)b_{(2)}) \\
&= (m \triangleleft t(r)b_{(2)}) \triangleleft t(\varepsilon(b_{(1)})) \\
&= m \triangleleft t(r)b_{(2)}t(\varepsilon(b_{(1)})) \\
&= m \triangleleft t(r)b \\
&= (m \triangleleft t(r)) \triangleleft b \\
&= (r \cdot m) \triangleleft b \\
&= l_M(r \otimes m) \triangleleft b
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
r_M((m \otimes r) \triangleleft b) &= r_M(m \triangleleft b_{(1)} \otimes r \triangleleft b_{(2)}) \\
&= r_M(m \triangleleft b_{(1)} \otimes \varepsilon(s(r)b_{(2)})) \\
&= (m \triangleleft b_{(1)}) \cdot \varepsilon(s(r)b_{(2)})) \\
&= (m \triangleleft b_{(1)}) \cdot \varepsilon(t(r)b_{(2)})) \\
&= (m \triangleleft s(r)b_{(1)}) \cdot \varepsilon(b_{(2)})) \\
&= (m \triangleleft s(r)b_{(1)}) \triangleleft s(\varepsilon(b_{(2)})) \\
&= m \triangleleft s(r)b_{(1)}s(\varepsilon(b_{(2)})) \\
&= m \triangleleft s(r)b \\
&= (m \triangleleft s(r)) \triangleleft b \\
&= (m \cdot r) \triangleleft b \\
&= r_M(m \otimes r) \triangleleft b.
\end{aligned}
$$

Não é difícil ver que são isomorfismos naturais, pois segue simplesmente da definição de cada isomorfismo e do fato que são aplicados em morfismos de B-módulos. Que o funtor esquecimento $U : \mathcal{M}_B \longrightarrow_R \mathcal{M}_R$ é estritamente monoidal é claro, pois basta definirmos $\varphi_0 : R \longrightarrow R$ e $\phi_{M,N} : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ como identidades que os diagramas necessários, comutam trivialmente.
(1) $\Leftarrow$ (2) Queremos mostrar que o R^e-anel (B, s, t) possui estrutura de R-bialgebróide à direita. De fato, primeiro vamos munir B com estrutura de R-coanel. Note que B é B-módulo à direita com ação dada pelo produto, então temos que $B \otimes_R B$ é B-módulo à direita, pois $\mathcal{M}_B$ é monoidal, tal que o funtor esquecimento $\mathcal{M}_B \longrightarrow_R \mathcal{M}_R$ é estrito, e pelo mesmo motivo R é B-módulo à direita. Agora, defina $\Delta : B \longrightarrow B \otimes_R B$, tal que $\Delta(b) := (1_B \otimes 1_B) \triangleleft b = b_{(1)} \otimes b_{(2)}$.

Afirmação: Sejam M e N B-módulos à direita. Então, para quaisquer

$m \otimes n \in M \otimes_R N$ e $b \in B$, temos

$$(m \otimes n) \triangleleft b = m \triangleleft b_{(1)} \otimes_R n \triangleleft b_{(2)}. \tag{2.34}$$

De fato, primeiro para $m \in M$, defina $\rho_m^M : B \longrightarrow M, \quad b \longmapsto m \triangleleft b$, para todo $b \in B$. Mostremos que ρ_m^M é morfismo de B-módulos à direita. De fato, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$\begin{aligned} \rho_m^M(ab) &= m \triangleleft ab \\ &= (m \triangleleft a) \triangleleft b \\ &= \rho_m^M(a) \triangleleft b. \end{aligned}$$

Portanto, para $m \in M$ e $n \in N$, temos que

$$\rho_m^M \otimes_R \rho_n^N : B \otimes_R B \longrightarrow M \otimes_R N, \quad a \otimes b \longmapsto m \triangleleft a \otimes n \triangleleft b,$$

é morfismo de B-módulos à direita. Segue então

$$\begin{aligned} m \triangleleft b_{(1)} \otimes n \triangleleft b_{(2)} &= (\rho_m^M \otimes_R \rho_n^N)(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\ &= (\rho_m^M \otimes_R \rho_n^N)((1_B \otimes 1_B) \triangleleft b) \\ &= ((\rho_m^M \otimes_R \rho_n^N)(1_B \otimes 1_B)) \triangleleft b \\ &= (m \triangleleft 1_B \otimes n \triangleleft 1_B) \triangleleft b \\ &= (m \otimes n) \triangleleft b. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $a_{B,B,B}((\Delta \otimes B)\Delta(b)) = (B \otimes \Delta)\Delta(b)$. De fato, para todo $b \in B$, temos

$$\begin{aligned} a_{B,B,B}((\Delta \otimes B)\Delta(b)) &= a_{B,B,B}(\Delta(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}) \\ &= a_{B,B,B}((b_{(1)(1)} \otimes b_{(1)(2)}) \otimes b_{(2)}) \\ &= a_{B,B,B}((1_B \otimes 1_B) \triangleleft b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\ &= a_{B,B,B}(((1_B \otimes 1_B) \otimes 1_B) \triangleleft b) \\ &= a_{B,B,B}((1_B \otimes 1_B) \otimes 1_B) \triangleleft b \\ &= (1_B \otimes (1_B \otimes 1_B)) \triangleleft b \\ &= (1_B \triangleleft b_{(1)} \otimes (1_B \otimes 1_B) \triangleleft b_{(2)}) \\ &= (1_B \triangleleft b_{(1)} \otimes (b_{(2)(1)} \otimes b_{(2)(2)})) \\ &= (b_{(1)} \otimes \Delta(b_{(2)})) \\ &= (B \otimes_R \Delta)\Delta(b). \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 1.46, como R é B-módulo à direita, temos que existe $\varepsilon : B \longrightarrow R$, caracter à direita em (B, s), tal que $\varepsilon(b) = 1_R \triangleleft b$. Mostremos então, que vale a counitalidade. De fato, para todo $b \in B$, temos

$$\begin{aligned}
r_B((B \otimes \varepsilon)\Delta(b)) &= r_B((B \otimes \varepsilon)(b_{(1)} \otimes b_{(2)})) \\
&= r_B(b_{(1)} \otimes \varepsilon(b_{(2)})) \\
&= r_B(b_{(1)} \otimes 1_R \triangleleft b_{(2)}) \\
&= r_B((1_B \otimes 1_R) \triangleleft b) \\
&= r_B(1_B \otimes 1_R) \triangleleft b \\
&= 1_B \triangleleft b \\
&= b,
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
l_B((\varepsilon \otimes B)\Delta(b)) &= l_B(\varepsilon(b_{(1)}) \otimes b_{(2)}) \\
&= l_B(1_R \triangleleft b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= l_B((1_B \otimes 1_R) \triangleleft b) \\
&= l_B(1_B \otimes 1_R) \triangleleft b \\
&= 1_B \triangleleft b \\
&= b.
\end{aligned}$$

Vamos ver agora que Δ e ε são morfismos de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(r \cdot b) &= \Delta(bt(r)) \\
&= (1_B \otimes 1_B) \triangleleft bt(r) \\
&= ((1_B \otimes 1_B) \triangleleft b) \triangleleft t(r) \\
&= \Delta(b) \triangleleft t(r) \\
&= r \cdot \Delta(b),
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
\Delta(b \cdot r) &= \Delta(bs(r)) \\
&= (1_B \otimes 1_B) \triangleleft bs(r) \\
&= ((1_B \otimes 1_B) \triangleleft b) \triangleleft s(r) \\
&= \Delta(b) \triangleleft s(r) \\
&= \Delta(b) \cdot r.
\end{aligned}$$

Agora

$$\varepsilon(r \cdot b) = \varepsilon(bt(r))$$

$$
\begin{aligned}
&= 1_R \triangleleft bt(r) \\
&= (1_R \triangleleft b) \triangleleft t(r) \\
&= \varepsilon(b) \triangleleft t(r) \\
&= r\varepsilon(b),
\end{aligned}
$$

também

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(b \cdot r) &= \varepsilon(bs(r)) \\
&= 1_R \triangleleft bs(r) \\
&= (1_R \triangleleft b) \triangleleft s(r) \\
&= \varepsilon(b) \triangleleft s(r) \\
&= \varepsilon(b)r.
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que $\Delta(B) \subseteq B \times_R^r B$. De fato, para quaisquer $b \in B$ e $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
s(r)b_{(1)} \otimes b_{(2)} &= s(r) \triangleleft b_{(1)} \otimes 1_B \triangleleft b_{(2)} \\
&= (s(r) \otimes 1_B) \triangleleft b \\
&= (1_B \cdot r \otimes 1_B) \triangleleft b \\
&= (1_B \otimes r \cdot 1_B) \triangleleft b \\
&= (1_B \otimes t(r)) \triangleleft b \\
&= 1_B \triangleleft b_{(1)} \otimes t(r) \triangleleft b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes t(r)b_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Falta mostrarmos agora que Δ é multiplicativo. De fato, para quaisquer $a, b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(ab) &= (1_B \otimes 1_B) \triangleleft ab \\
&= ((1_B \otimes 1_B) \triangleleft a) \triangleleft b \\
&= (a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \triangleleft b \\
&= a_{(1)} \triangleleft b_{(1)} \otimes a_{(2)} \triangleleft b_{(2)} \\
&= a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} \\
&= (a_{(1)} \otimes a_{(2)})(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= \Delta(a)\Delta(b).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que o R^e-anel (B, s, t) possui estrutura de R-bialgebróide à direita. Concluímos assim, a demonstração do teorema. ■

2.5 A Categoria Monoidal de Comódulos

Seja B uma biálgebra sobre um anel comutativo k. A categoria dos comódulos à direita sobre B, possui uma estrutura monoidal, tal que o funtor esquecimento para $\mathcal{M}_k$ é estritamente monoidal. Para R-bialgebróides à direita B, esse resultado continua sendo válido. Porém, ao contrário do caso para módulos, a existência de um funtor esquecimento não é evidente, mais especificamente, não é claro que morfismos de B-módulos sejam morfismos de R-bimódulos. O próximo lema nos garante isto. Tal lema foi provado em [12] no contexto de coalgebróides. Antes, precisamos de algumas definições e resultados.

Definição 2.22 *Sejam R e S duas álgebras sobre um anel comutativo k. Um $S|R$-**coanel** é um $S \otimes_k R$-bimódulo C, junto com uma estrutura de R-coanel (C, Δ, ε), tais que, para quaisquer $s, s' \in S$ e $c \in C$, valem as seguintes condições:*

(i) $\Delta((s \otimes 1_R) \cdot c \cdot (s' \otimes 1_R)) = c_{(1)} \cdot (s' \otimes 1_R) \otimes_R (s \otimes 1_R) \cdot c_{(2)}$;

(ii) $(s \otimes 1_R) \cdot c_{(1)} \otimes_R c_{(2)} = c_{(1)} \otimes_R c_{(2)} \cdot (s \otimes 1_R)$.

Morfismos de $S|R$-coanéis, são morfismo de R-coanéis e adicionalmente, morfismos de S-bimódulos.

Todo $S|R$-coanel C possui uma estrutura de S-bimódulo e uma estrutura de R-bimódulo, que iremos denotar, para quaisquer $c \in C$, $s \in S$ e $r \in R$, por

$$\tau_S(s)c := (s \otimes 1_R) \cdot c, \quad c\,\sigma_S(s) := c \cdot (s \otimes 1_R) \tag{2.35}$$

e

$$\sigma_R(r)c := (1_S \otimes r) \cdot c, \quad c\,\tau_R(r) := c \cdot (1_S \otimes r). \tag{2.36}$$

Agora temos que C é um R-coanel com estrutura de R-bimódulo em $C \otimes_R C$ dada, para quaisquer $r, r' \in R$ e $c, \in C$, por

$$r(c \otimes_R c')r' := \sigma_R(r)c \otimes_R c'\tau_R(r').$$

Também temos que $C \otimes_R C$ possui estrutura de S-bimódulo, dada para quaisquer $s, s' \in S$ e $c, c' \in C$, por

$$s(c \otimes_R c')s' := c\,\sigma_S(s') \otimes_R \tau_S(s)c'.$$

Reescrevendo a condição (i) de $S|R$-coanel, temos

$$\Delta(\tau_S(s)c\,\sigma_S(s')) = c_{(1)}\sigma_S(s') \otimes_R \tau_S(s)c_{(2)},$$

ou seja, Δ é morfismo de S-bimódulo. Também reescrevendo a condição de counitalidade, temos

$$c = \sigma_R(\varepsilon(c_{(1)}))c_{(2)} = c_{(1)}\tau_R(\varepsilon(c_{(2)})).$$

A condição (ii) nos garante, para quaisquer $s \in S$ e $c \in C$, que

$$\varepsilon(\tau_S(s)c) = \varepsilon(c\,\sigma_S(s)). \tag{2.37}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau_S(s)c) &= \varepsilon(\tau_S(s)c_{(1)}\tau_R(\varepsilon(c_{(2)}))) \\
&= \varepsilon(\tau_S(s)c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)}) \\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)}\sigma_S(s)) \quad \text{por } (ii) \\
&= \varepsilon(\sigma_R(\varepsilon(c_{(1)}))c_{(2)}\sigma_S(s)) \\
&= \varepsilon(c\sigma_S(s)).
\end{aligned}$$

Usando a counitalidade e o fato que Δ é morfismo de R-bimódulos e de S-bimódulos, segue na próxima proposição, algumas propriedades que serão úteis na demonstração do próximo lema.

Proposição 2.23 *Seja C um $S|R$-coanel. Então, temos*

(1) $c\,\sigma_S(s) = \sigma_R(\varepsilon(c_{(1)}\sigma_S(s)))c_{(2)}$ *e* $\tau_S(s)c = c_{(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(s)c_{(2)}))$;

(2) $\varepsilon(\tau_S(s)c\,\sigma_S(s')) = \varepsilon(c_{(1)}\sigma_S(s'))\varepsilon(\tau_S(s)c_{(2)})$, *para quaisquer* $s, s' \in S$ *e* $c \in C$.

Demonstração: (1) Note que para quaisquer $s \in S$ e $c \in C$, temos

$$\Delta(c\,\sigma_S(s)) = c_{(1)}\sigma_S(s) \otimes_R c_{(2)},$$

e

$$\Delta(\tau_S(s)c) = c_{(1)} \otimes_R \tau_S(s)c_{(2)}.$$

Segue portanto, que

$$c\,\sigma_S(s) = \sigma_R(\varepsilon((c\,\sigma_S(s))_{(1)}))(c\sigma_S(s))_{(2)} = \sigma_R(\varepsilon(c_{(1)}\sigma_S(s)))c_{(2)} \tag{2.38}$$

e que

$$\tau_S(s)c = (\tau_S(s)c)_{(1)}\tau_R(\varepsilon((\tau_S(s)c)_{(2)})) = c_{(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(s)c_{(2)})) \quad (2.39)$$

(2) Para quaisquer $s, s' \in S$ e $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\tau_S(s)c\,\sigma_S(s')) &= \varepsilon(\tau_S(s')\tau_S(s)c) \quad \text{(por 2.37)}\\
&= \varepsilon(\tau_S(s's)c)\\
&= \varepsilon(c_{(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(s's)c_{(2)}))) \quad \text{(por 2.39)}\\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(\tau_S(s')\tau_S(s)c_{(2)})\\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(\tau_S(s)c_{(2)}\sigma_S(s'))\\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(\sigma_R(\varepsilon(c_{(2)}\sigma_S(s')))\tau_S(s)c_{(3)}) \quad \text{(por 2.38)}\\
&= \varepsilon(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)}\sigma_S(s'))\varepsilon(\tau_S(s)c_{(3)})\\
&= \varepsilon(\sigma_R(\varepsilon(c_{(1)}))c_{(2)}\sigma_S(s'))\varepsilon(\tau_S(s)c_{(3)})\\
&= \varepsilon(c_{(1)}\sigma_S(s'))\varepsilon(\tau_S(s)c_{(2)}).
\end{aligned} \quad (2.40)$$

■

Proposição 2.24 *Seja B um R-bialgebróide à direita. Então B é um $R|R$-coanel.*

Demonstração: De fato, definimos uma estrutura de R-bimódulo, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, por

$$\sigma_R(r)b\tau_R(r') := bs(r')t(r),$$

ou seja, é a estrutura de R-bimódulo no R-coanel (B, Δ, ε). Definimos também, outra estrutura de R-bimódulo por

$$\tau_S(r)b\sigma_S(r') := s(r)t(r')b.$$

Para mostrarmos que B é um $R|R$-coanel, basta mostrarmos as condições (i) e (ii) da definição. De fato, para todo $r \in R$, note que

$$\Delta(t(r)) = \Delta(r \cdot 1_B) = r \cdot (1_B \otimes 1_B) = r \cdot 1_B \otimes 1_B = t(r) \otimes_R 1_R,$$

analogamente,

$$\Delta(s(r)) = 1_R \otimes_R s(r).$$

Dessa forma, para quaisquer $r, r' \in R$ e $b \in B$, temos

$$\Delta(\tau_S(r)b\,\sigma(r')) = \Delta(s(r)t(r')b)$$

$$
\begin{aligned}
&= t(r')b_{(1)} \otimes_R s(r)b_{(2)} \\
&= b_{(1)}\sigma_S(r') \otimes_R \tau_S(r)b_{(2)}.
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\tau_S(r)b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} &= s(r)b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes_R t(r)b_{(2)} \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}\sigma_S(r).
\end{aligned}
$$

■

Agora estamos prontos para provar o próximo lema.

Lema 2.25 *Sejam R, S álgebras sobre um anel comutativo k e C um $S|R$-coanel. Então, todo comódulo (M, ρ^M) sobre o R-coanel C, pode ser equipado com uma única estrutura de S-módulo à esquerda, tal que $\rho^M(m)$ pertence ao centro do S-bimódulo $M \otimes_R C$, para todo $m \in M$. Também, todo morfismo de C-comódulos é um morfismo de S-R-bimódulos.*

Demonstração: Definimos a estrutura de S-módulo à esquerda em M, para quaisquer $m \in M$ e $a \in S$, por

$$
s \cdot m := m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(s)m^{(1)})). \tag{2.41}
$$

Mostremos que de fato é ação à esquerda. Para quaisquer $a, b \in S$ e $m \in M$, temos

$$
\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot m) &= a \cdot (m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)}))) \\
&= m^{(0)(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(0)(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)})))) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}{}_{(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)}{}_{(2)})))) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}{}_{(1)})\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)}{}_{(2)})) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(m^{(1)}{}_{(1)}\sigma_S(a))\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)}{}_{(2)})) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(b)m^{(1)}\sigma_S(a))) \quad \text{(por 2.40)} \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)\tau_S(b)m^{(1)})) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(ab)m^{(1)})) \\
&= ab \cdot m.
\end{aligned}
$$

Agora considerando a estrutura de S-módulo à esquerda em $M \otimes_R C$, dada por $a(m \otimes_R c) := m \otimes_R \tau_S(a)c$, temos que $\rho^M : M \longrightarrow M \otimes_R C$

é S-linear com respeito a ação 2.41. De fato, para quaisquer $m \in M$ e $a \in S$, temos

$$\begin{aligned}
m^{(0)} \otimes_R \tau_S(a)m^{(1)} &= m^{(0)} \otimes_R m^{(1)}{}_{(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}{}_{(2)})) \quad \text{(por 2.38)} \\
&= m^{(0)(0)} \otimes_R m^{(0)(1)}\tau_R(\varepsilon(\tau(a)m^{(1)})) \\
&= (m^{(0)(0)} \otimes_R m^{(0)(1)})\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)})) \\
&= \rho^M(m^{(0)})\tau_R(\varepsilon(\tau(a)m^{(1)})) \\
&= \rho^M(m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}))) \\
&= \rho^M(a \cdot m).
\end{aligned}$$

Agora considerando a estrutura de S-bimódulo em $M \otimes_R C$, dada por $a(m \otimes_R c)b := a \cdot m \otimes_R c\,\sigma_S(b)$, para quaisquer $a, b \in S$, $m \in M$ e $c \in C$, temos que

$$\begin{aligned}
a(m^{(0)} \otimes_R m^{(1)}) &= a \cdot m^{(0)} \otimes_R m^{(1)} \\
&= m^{(0)(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(0)(1)})) \otimes_R m^{(1)} \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}{}_{(1)})) \otimes_R m^{(1)}{}_{(2)} \\
&= m^{(0)} \otimes_R \sigma_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)}{}_{(1)}))m^{(1)}{}_{(2)} \\
&= m^{(0)} \otimes_R \sigma_R(\varepsilon(m^{(1)}{}_{(1)}))m^{(1)}{}_{(2)}\sigma_S(a) \quad \text{(por } (ii)) \\
&= m^{(0)} \otimes_R m^{(1)}\sigma_S(a) \\
&= (m^{(0)} \otimes_R m^{(1)})a,
\end{aligned}$$

ou seja, $a(m^{(0)} \otimes_R m^{(1)}) = (m^{(0)} \otimes_R m^{(1)})a$, logo $\rho^M(m)$ pertence ao centro do S-bimódulo $M \otimes_R C$. Agora dada outra ação à esquerda $a \triangleright m$, em M, tal que $\rho^M(m)$ pertence ao centro do S-bimódulo $M \otimes_R C$, temos que

$$\begin{aligned}
a \triangleright m &= a \triangleright (m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(m^{(1)})) \\
&= (a \triangleright m^{(0)})\tau_R(\varepsilon(m^{(1)})) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(m^{(1)}\sigma_S(a))) \\
&= m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)})) \\
&= a \cdot m.
\end{aligned}$$

Agora sejam M e N C-comódulos à direita e $f : M \longrightarrow N$ morfismo de C-comódulos à direita. Note que f é R-linear. Mostremos então que f é S-linear. De fato, para quaisquer $a \in S$ e $m \in M$, temos

$$f(a \cdot m) = f(m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)})))$$

$$
\begin{aligned}
&= f(m^{(0)})\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)m^{(1)})) \\
&= f(m)^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(a)f(m)^{(1)})) \\
&= a \cdot f(m).
\end{aligned}
$$

■

Este lema nos garante que existe um funtor esquecimento $\mathcal{M}^C \longrightarrow {}_S\mathcal{M}_R$, pois todo C-comódulo à direita é também um S-R-bimódulo e todo morfismo de C-comódulos à direita é um morfismo de S-R-bimódulos.

Definição 2.26 *Seja B um R-bialgebróide à direita. Um B-**comódulo** é um comódulo sobre o R-coanel (B, Δ, ε).*

Teorema 2.27 *Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k e B um R-bialgebróide à direita. Então a categoria $\mathcal{M}^B$ dos B-comódulos á direita é monoidal, tal que o funtor esquecimento $\mathcal{M}^C \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R$ é estritamente monoidal.*

Demonstração: Primeiro, note que $R \in \mathcal{M}^B$. De fato, definimos a coação de B em R, por

$$\rho^R : R \longrightarrow R \otimes_R B, \;\; r \longmapsto 1_R \otimes s(r).$$

Mostremos que, de fato, é uma coação. Para todo $r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
(R \otimes_R \Delta)\rho^R(r) &= (R \otimes_R \Delta)(1_R \otimes_R s(r)) \\
&= 1_R \otimes_R 1_B \otimes_R s(r),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\rho^R \otimes_R B)\rho^R(r) &= (\rho^R \otimes_R B)(1_R \otimes_R s(r)) \\
&= 1_R \otimes_R 1_R \otimes_R s(r).
\end{aligned}
$$

Agora ρ^R é morfismo de R-módulo à direita. De fato, para quaisquer $a, r \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
\rho^R(ar) &= 1_R \otimes_R s(ar) \\
&= 1_R \otimes_R s(a)s(r) \\
&= (1_R \otimes_R s(a)) \cdot r \\
&= \rho^R(a) \cdot r.
\end{aligned}
$$

Sejam M e $N \in \mathcal{M}^B$, então $M \otimes_R N \in \mathcal{M}^B$. De fato, definimos a coação em $M \otimes_R N$, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, por

$$\rho^{M,N} : M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \otimes_R B, \;\; m \otimes n \longmapsto m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}.$$

Note que, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, temos

$$\begin{aligned}(Id_{M\otimes N} \otimes_R \Delta)\rho^{M,N}(m \otimes n) &= (Id_{M\otimes N} \otimes_R \Delta)(m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}) \\ &= m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes (m^{(1)}n^{(1)})_{(1)} \otimes (m^{(1)}n^{(1)})_{(2)} \\ &= m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}{}_{(1)}n^{(1)}{}_{(1)} \otimes m^{(1)}{}_{(2)}n^{(1)}{}_{(2)} \\ &= m^{(0)(0)} \otimes n^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)}n^{(0)(1)} \otimes m^{(1)}n^{(1)},\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(\rho^{M,N} \otimes_R B)\rho^{M,N}(m \otimes n) &= (\rho^{M,N} \otimes_R B)(m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}) \\ &= m^{(0)(0)} \otimes n^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)}n^{(0)(1)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}.\end{aligned}$$

Mostremos agora que $\rho^{M,N}$ é morfismo de R-módulos à direita. De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}\rho^{M,N}((m \otimes n) \cdot r) &= \rho^{M,N}(m \otimes n \cdot r) \\ &= m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}s(r) \\ &= (m^{(0)} \otimes n^{(0)} \otimes m^{(1)}n^{(1)}) \cdot r \\ &= \rho^{M,N}(m \otimes n) \cdot r.\end{aligned}$$

Os isomorfismos naturais são os canônicos. Já mostramos no exemplo 1.8 que $a_{M,N,P}$ é morfismo de B-comódulo à direita. Mostremos então, que l_M e r_M são morfismos de B-comódulos à direita. De fato, para quaisquer $m \in M$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}(l_M \otimes_R B)\rho^{R,M}(r \otimes m) &= (l_M \otimes_R B)(r^{(0)} \otimes m^{(0)} \otimes r^{(1)}m^{(1)}) \\ &= (l_M \otimes_R B)(1_R \otimes m^{(0)} \otimes s(r)m^{(1)}) \\ &= m^{(0)} \otimes s(r)m^{(1)},\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(\rho^M \circ l_M)(r \otimes m) &= \rho^M(r \cdot m) \\ &= \rho^M(m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(\tau_S(r)m^{(1)}))) \\ &= \rho^M(m^{(0)}\tau_R(\varepsilon(s(r)m^{(1)}))) \\ &= m^{(0)(0)} \otimes m^{(0)(1)}\tau_R(\varepsilon(s(r)m^{(1)})) \\ &= m^{(0)} \otimes m^{(1)}{}_{(1)}s(\varepsilon(s(r)m^{(1)}{}_{(2)})) \\ &= m^{(0)} \otimes (s(r)m^{(1)})_{(1)}s(\varepsilon(s(r)m^{(1)})_{(2)}))\end{aligned}$$

$$= m^{(0)} \otimes s(r)m^{(1)}.$$

Também temos

$$\begin{aligned}
(r_M \otimes B)\rho^{M,R}(m \otimes r) &= (r_M \otimes B)(m^{(0)} \otimes r^{(0)} \otimes m^{(1)}r^{(1)}) \\
&= (r_M \otimes B)(m^{(0)} \otimes 1_R \otimes m^{(1)}s(r)) \\
&= m^{(0)} \otimes m^{(1)}s(r),
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\rho^M \circ r_M)(m \otimes r) &= \rho^M(m\tau_R(r)) \\
&= m^{(0)} \otimes m^{(1)}\tau_R(r) \\
&= m^{(0)} \otimes m^{(1)}s(r).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos assim, que a categoria dos B-comódulos à direita é monoidal. Mostrar que o funtor esquecimento $\mathcal{M}^B \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_R$ é estritamente monoidal é análogo ao caso da categoria dos B-módulos à direita. ■

2.6 Versões Equivalentes da Definição de Bialgebróide

Nesta seção iremos ver duas versões equivalentes a definição de bialgebróide à esquerda, como definida neste trabalho. A saber, existe uma formulação por uma aplicação chamada de âncora em [31] e uma formulação por $\times_R$-biálgebras em [28]. Militaru e Brzezinski mostraram em [8], que tais formulações são, de fato, equivalentes.

Definição 2.28 *Sejam R uma álgebra sobre um anel comutativo com unidade k e (H, s, t) um R^e-anel. Uma quíntupla (H, s, t, Δ, μ) é um R-**bialgebróide com âncora**, se valem as seguintes condições:*

(1) *$\Delta : H \longrightarrow H \otimes_R H$ é coassociativo, $\Delta(H) \subseteq H \times_R^l H$ e Δ é morfismo de álgebras;*

(2) *$\mu : H \longrightarrow End(R)$ é morfismo de R-bimódulos e morfismo de R-álgebras;*

(3) *Para quaisquer $r \in R$ e $h \in H$, temos*

   (i) *$s(\mu(h_{(1)})(r))h_{(2)} = hs(r)$;*

(ii) $t(\mu(h_{(2)})(r))h_{(1)} = ht(r)$.

A aplicação μ é chamada de ***âncora****.*

Proposição 2.29 *Seja (H, s, t) um R^e-anel. Então, $(H, s, t, \Delta, \varepsilon)$ é um R-bialgebróide à esquerda se, e somente se, (H, s, t, Δ, μ) é um R-bialgebróide com âncora.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Defina

$$\mu : H \longrightarrow End(R),$$

tal que para quaisquer $r \in R$ e $h \in H$, temos

$$\mu(h)(r) := \varepsilon(hs(r)) = \varepsilon(ht(r)).$$

Mostremos que μ é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaiquer r, $r', a \in R$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(r \cdot h \cdot r')(a) &= \mu(s(r)t(r')h)(a) \\
&= \varepsilon(s(r)t(r')hs(a)) \\
&= r\varepsilon(hs(a))r' \\
&= r(\mu(h)(a))r' \\
&= (r \cdot \mu(h) \cdot r')(a).
\end{aligned}$$

Mostremos agora que μ é multiplicativo. De fato, para quaisquer $h, k \in H$ e $r \in R$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(h)(\mu(k)(r)) &= \mu(h)(\varepsilon(ks(r))) \\
&= \varepsilon(hs(\varepsilon(ks(r)))) \\
&= \varepsilon(hks(r)) \\
&= \mu(hk)(r).
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
s(\mu(h_{(1)})(r))h_{(2)} &= s(\varepsilon(h_{(1)}s(r)))h_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(h_{(1)}t(r)))h_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(h_{(1)}))h_{(2)}s(r) \\
&= hs(r).
\end{aligned}$$

(ii)

$$t(\mu(h_{(2)})(r))h_{(1)} = t(\varepsilon(h_{(2)}s(r)))h_{(1)}$$

$$\begin{aligned}
&= t(\varepsilon(h_{(2)}))h_{(1)}t(r)\\
&= ht(r).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Defina $\varepsilon : H \longrightarrow R$, $h \longmapsto \mu(h)(1_R)$. Mostremos que ε é morfismo de R-bimódulos. De fato, para quaisquer $r, r' \in R$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(r \cdot h \cdot r') &= \mu(r \cdot h \cdot r')(1_R)\\
&= (r \cdot \mu(h) \cdot r')(1_R)\\
&= r(\mu(h)(1_R))r'\\
&= r\varepsilon(h)r'.
\end{aligned}$$

Mostremos agora o axioma da counidade. De fato, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h_{(1)}) \cdot h_{(2)} &= s(\varepsilon(h_{(1)}))h_{(2)}\\
&= s(\mu(h_{(1)})(1_R))h_{(2)}\\
&= hs(1_R) \quad \text{(por } (i))\\
&= h,
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
h_{(1)} \cdot \varepsilon(h_{(2)}) &= t(\varepsilon(h_{(2)}))h_{(1)}\\
&= t(\mu(h_{(2)})(1_R)h_{(1)}\\
&= ht(1_R) \quad \text{(por } (ii))\\
&= h.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que ε é caracter à esquerda em (B, s). De fato, para quaisquer $h, k \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(hs(\varepsilon(k))) &= \mu(hs(\varepsilon(k)))(1_R)\\
&= \mu(h)(\mu(s(\varepsilon(k)))(1_R))\\
&= \mu(h)(\mu(\varepsilon(k) \cdot 1_H)(1_R))\\
&= \mu(h)(\varepsilon(k)\mu(1_H)(1_R))\\
&= \mu(h)(\varepsilon(k))\\
&= \mu(h)(\mu(k)(1_R))\\
&= \mu(hk)(1_R)\\
&= \varepsilon(hk).
\end{aligned}$$

■

Para definimos $\times_R$-biálgebras, precisamos analisar com mais profundidade o produto de Takeuchi. Para tanto, note que, se M é um R^e-bimódulo, então também é R-bimódulo e R^{op}-bimódulo. De fato, definimos as estruturas, respectivamente, para quaisquer $a, b \in R$ e $m \in M$, por

$$amb := (a \otimes 1_R) \cdot m \cdot (b \otimes 1_R)$$

e

$$\overline{a}m\overline{b} := (1_R \otimes \overline{a}) \cdot m \cdot (1_R \otimes \overline{b}),$$

em que $\overline{a}$ e $\overline{b}$ denotam estarem em R^{op}. Assim, para quaisquer M e N dois R^e-bimódulos, definimos o produto tensorial

$$\int_a {}_{\overline{a}}M \otimes_k {}_aN := (M \otimes_k N)/\mathcal{F} = M \otimes_R N,$$

em que $\mathcal{F} = span\{\overline{a}m \otimes n - m \otimes an \,|\, a \in R\}$. Agora definimos

$$\int^a M_{\overline{a}} \otimes_k N_a := \{\sum m_i \otimes n_i \in M \otimes_k N \,|\, \sum m_i\overline{a} \otimes n_i = \sum m_i \otimes n_i a\}.$$

Assim, definimos o produto de Takeuchi, por

$$M \times_R N := \int^b \int_a {}_{\overline{a}}M_{\overline{b}} \otimes_k {}_aN_b,$$

que possui estrutura de R^e-bimódulo dada por

$$(a \otimes \overline{b})(\sum_i m_i \otimes n_i)(c \otimes \overline{d}) = \sum_i am_ic \otimes \overline{b}n_i\overline{d},$$

para quaisquer $a \otimes \overline{b}, c \otimes \overline{d} \in R^e$ e $\sum_i m_i \otimes n_i \in M \times_R N$. Agora, Para M, N e P três R^e-bimódulos, temos

$$M \times_R N \times_R P = \int^{b,d} \int_{a,c} {}_{\overline{a}}M_{\overline{b}} \otimes_k {}_{a\overline{c}}N_{b\overline{d}} \otimes_k {}_cP_d.$$

Originalmente, a formulação de bialgebróide foi feita usando o produto Takeuchi de maneira mais direta em [28]. O problema é que ele não é associativo. Para contornar esse problema, definimos duas inclusões canônicas

$$\alpha : (M \times_R N) \times_R P \longrightarrow M \times_R N \times_R P$$

e

$$\alpha' : M \times_R (N \times_R P) \longrightarrow M \times_R N \times_R P.$$

Lema 2.30 *Seja M um R^e-bimódulo. Então, existem morfismos de R^e-bimódulos*

$$\begin{array}{rlcc}\theta: & M \times_R End_k(R) & \longrightarrow & M \\ & \sum m_i \otimes f_i & \longmapsto & \sum \overline{f_i(1_R)} m_i\end{array}$$

e

$$\begin{array}{rlcc}\theta': & End_k(R) \times_R M & \longrightarrow & M \\ & \sum f_i \otimes m_i & \longmapsto & \sum f_i(1_R) m_i.\end{array}$$

Demonstração: Primeiro, note que $End_k(R)$ é um R^e-bimódulo. De fato, defina $i : R^e \longrightarrow End_k(R)$, tal que para quaisquer $a, b,\ r \in R$ e $f \in End_k(R)$, $i(a \otimes \overline{b})(r) = arb$. Portanto, definimos para quaisquer $a, b, c, d,\ r \in R$ e $f \in End_k(R)$ a estrutura de R^e-bimódulos em $End_k(R)$, por

$$((a \otimes \overline{b}) \cdot f \cdot (c \otimes \overline{d}))(r) = i(a \otimes \overline{b})(f(i(c \otimes \overline{d})(r))) = a(f(crd))b.$$

Agora defina

$$\begin{array}{rlcc}\widetilde{\theta}: & M \times End_k(R) & \longrightarrow & M \\ & (m, f) & \longmapsto & \overline{f(1_R)} m,\end{array}$$

que é k-linear. Portanto, existe uma única

$$\begin{array}{rlcc}\widehat{\theta}: & M \otimes_k End_k(R) & \longrightarrow & M \\ & m \otimes f & \longmapsto & \overline{f(1_R)} m.\end{array}$$

Note que

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}(\overline{a}m \otimes f - m \otimes a \cdot f) &= \widehat{\theta}(\overline{a}m \otimes f) - \widehat{\theta}(m \otimes a \cdot f) \\ &= \overline{f(1_R)}\overline{a}m - \overline{a \cdot f(1_R)}m \\ &= \overline{a \cdot f(1_R)}m - \overline{a \cdot f(1_R)}m \\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{F} \subseteq ker(\widehat{\theta})$. Portanto, existe uma única

$$\begin{array}{rlcc}\overline{\theta}: & M \otimes_R End_k(R) & \longrightarrow & M \\ & m \otimes f & \longmapsto & \overline{f(1_R)} m.\end{array}$$

Portanto, basta definirmos $\theta := \overline{\theta}|_{M \times_R End(R)}$. Mostremos que θ é morfismo de R^e-bimódulos. De fato, para quaisquer $a \otimes \overline{b}, c \otimes \overline{d} \in R^e$ e $\sum_i m_i \otimes f_i \in M \times_R End_k(R)$, temos

$$\theta((a \otimes \overline{b})(\sum_i m_i \otimes f_i)(c \otimes \overline{d})) = \theta(\sum_i a m_i c \otimes \overline{b} f_i \overline{d})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \overline{\overline{b} f_i \overline{d}(1_R)} a m_i c \\
&= \sum_i \overline{f_i(d) b}\, a m_i c \\
&= \sum_i a\, \overline{b}\, \overline{f_i(d)}\, m_i c \\
&= \sum_i (a \otimes \overline{b}) \overline{f_i \overline{d}(1_R)} m_i c \\
&= \sum_i (a \otimes \overline{b}) \cdot \overline{f_i(1_R)} m_i \overline{d} c \\
&= (a \otimes \overline{b}) \cdot (\sum_i \overline{f_i(1_R)} m_i) \cdot (c \otimes \overline{d}) \\
&= (a \otimes \overline{b}) \cdot \theta(\sum_i m_i \otimes f_i) \cdot (c \otimes \overline{d}).
\end{aligned}
$$

Para θ' é análogo. ■

Definição 2.31 *Seja (H, s, t) um R^e-anel. Uma* $\times_R$-***coálgebra*** *é uma tripla (H, Δ, μ) em que:*

(1) *$\Delta : H \longrightarrow H \times_R H$ e $\mu : H \longrightarrow End_k(R)$ são morfismos de R^e-bimódulos;*

(2) (*i*) *$\alpha \circ (\Delta \times_R H) \circ \Delta = \alpha' \circ (H \times_R \Delta) \circ \Delta$ (coassociatividade);*

(*ii*) *$\theta \circ (H \times_R \mu) \circ \Delta = Id_H = \theta' \circ (\mu \times_R H) \circ \Delta$ (counitalidade).*

Δ é chamado comultiplicação e μ é chamado counidade da $\times_R$-coálgebra.

Proposição 2.32 *Sejam $i : H \times_R H \longrightarrow H \otimes_R H$ a inclusão canônica, $\Delta : H \longrightarrow H \times_R H$ e $\mu : H \longrightarrow End_k(R)$ dois morfismos de R^e-bimódulos. Então (H, Δ, μ) é uma $\times_R$-coálgebra se, e somente se, $(H, \underline{\Delta}, \underline{\varepsilon})$ é um R-coanel, com estrutura de R-bimódulo dada, para quaisquer $h \in H$ e $r, r' \in R$, por $r \triangleright h \triangleleft r' = (r \otimes \overline{r'}) \cdot h$, em que $\underline{\Delta} = i \circ \Delta$ e $\underline{\varepsilon}(h) = \mu(h)(1_R)$.*

Demonstração: Se (H, Δ, μ) é uma $\times_R$-coálgebra, então $\underline{\Delta}$ é automaticamente morfismo de R-bimódulos. Devemos mostrar que $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulos, de fato, para quaisquer $r, r' \in R$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}(r \triangleright h \triangleleft r') &= \mu(r \triangleright h \triangleleft r')(1_R) \\
&= \mu((r \otimes \overline{r'}) \cdot h)(1_R)
\end{aligned}
$$

$$= ((r \otimes \overline{r'}) \cdot \mu(h))(1_R)$$
$$= r\mu(h)(1_R)r'$$
$$= r\underline{\varepsilon}(h)r'.$$

Para a coassociatividade, defina $i^2 : H \times_R H \times_R H \longrightarrow H \otimes_R H \otimes_R H$ a inclusão canônica, dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
(\underline{\Delta} \otimes_R H) \circ \underline{\Delta} &= ((i \circ \Delta) \otimes_R H) \circ i \circ \Delta \\
&= (i \otimes_R H)(\Delta \otimes_R H) \circ i \circ \Delta \\
&= i^2 \circ \alpha \circ (\Delta \times_R H) \circ \Delta \\
&= i^2 \circ \alpha' \circ (H \times_R \Delta) \circ \Delta \\
&= (H \otimes_R i)(H \otimes_R \Delta) \circ i \circ \Delta \\
&= (H \otimes_R (i \circ \Delta)) \circ i \circ \Delta \\
&= (H \otimes_R \underline{\Delta}) \circ \underline{\Delta}.
\end{aligned}$$

Mostremos a counitalidade. De fato, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\underline{\varepsilon} \otimes_R H) \circ \underline{\Delta}(h) &= \underline{\varepsilon}(h_{(1)}) \triangleright h_{(2)} \\
&= \mu(h_{(1)})(1_R) \triangleright h_{(2)} \\
&= \theta'(\mu(h_{(1)}) \otimes_R h_{(2)}) \\
&= \theta' \circ (\mu \times_R H)\Delta(h) = h,
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
(H \otimes_R \underline{\varepsilon}) \circ \underline{\Delta}(h) &= h_{(1)} \triangleleft \underline{\varepsilon}(h_{(2)}) \\
&= \overline{\underline{\varepsilon}(h_{(2)})} \cdot h_{(1)} \\
&= \overline{\underline{\mu(h_{(2)})(1_R)}} \cdot h_{(1)} \\
&= \theta(h_{(1)} \otimes_R \mu(h_{(2)})) \\
&= \theta \circ (H \times_R \mu) \circ \Delta(h) \\
&= h.
\end{aligned}$$

Equivalentemente se $\underline{\Delta}$ é coassociativo e vale a counitalidade para $\underline{\varepsilon}$, então mostra-se que Δ é coassociativo e vale a counitalidade para μ. ■

Definição 2.33 *Seja (H, s, t) um R^e-anel. A tripla (H, Δ, μ) é uma* $\times_R$-***biálgebra****, se é uma $\times_R$-coálgebra, tal que Δ e μ são morfismos de R^e-anéis.*

Teorema 2.34 *Seja H um R^e-anel. Então, existe uma correspondência 1 a 1 entre estruturas de R-bialgebróides à esquerda em H e estruturas de $\times_R$-biálgebras em H.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $(H, \underline{\Delta}, \underline{\varepsilon})$ uma estrutura de R-bialgebróide à esquerda. Defina $\Delta : H \longrightarrow H \times_R H$ como a co-restrição de $\underline{\Delta}$. Já temos que Δ é morfismo de R-álgebras. Falta mostrarmos que $\Delta \circ I_H = I_{H \times_R H}$, em que I_H é a unidade $I_H : R^e \longrightarrow H$, tal que $I_H(a \otimes \overline{b}) = s(a)t(b)$, e $I_{H \times_R H} : R^e \longrightarrow H \times_R H$, tal que para quaisquer $a, b \in R$, $I_{H \times_R H}(a \otimes \overline{b}) = s(a) \otimes t(\overline{b})$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(I_H(a \otimes \overline{b})) &= \Delta(s(a)t(b)) \\
&= \Delta(a \cdot 1_H \cdot b) \\
&= a \cdot \Delta(1_H) \cdot b \\
&= a \cdot 1_H \otimes_R 1_R \cdot b \\
&= s(a) \otimes_R t(b) \\
&= I_{H \times_R H}(a \otimes \overline{b}).
\end{aligned}$$

Agora note que, a unidade do R^e-anel $End_k(R)$ é definida por

$$I_{End_k(R)}(a \otimes \overline{b})(c) = acb,$$

para quaisquer a, b e $c \in R$. Portanto, defina

$$\mu_\varepsilon : H \longrightarrow End_k(R), \ \ h \longmapsto \mu_\varepsilon(h),$$

tal que $\mu_\varepsilon(h)(r) = \varepsilon(hs(r))$, para quaisquer $r \in R$ e $h \in H$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mu_\varepsilon(I_H(a \otimes \overline{b}))(c) &= \mu_\varepsilon(s(a)t(b))(c) \\
&= \varepsilon(s(a)t(b)s(c)) \\
&= \varepsilon(s(a)s(c)t(b)) \\
&= \varepsilon(s(ac)t(b)) \\
&= \varepsilon(s(ac)s(\varepsilon(t(b)))) \\
&= \varepsilon(s(ac)s(b)) \\
&= \varepsilon(s(acb)) \\
&= acb \\
&= I_{End_k(R)}(a \otimes \overline{b})(c),
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
\mu_\varepsilon(hk)(a) &= \varepsilon(hks(a)) \\
&= \varepsilon(hs(\varepsilon(ks(a)))) \\
&= \mu_\varepsilon(h)(\varepsilon(ks(a)))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu_\varepsilon(h)(\mu_\varepsilon(k)(a)) \\
&= \mu_\varepsilon(h) \circ \mu_\varepsilon(k)(a),
\end{aligned}
$$

para quaisquer $a, b, c \in R$ e $h, k \in H$. Agora note que,

$$
\begin{aligned}
i^2 \circ \alpha \circ (\Delta \times_R H) \circ \Delta &= (i \otimes_R H)(\Delta \otimes_R H) \circ i \circ \Delta \\
&= ((i \circ \Delta) \otimes_R H) \circ i \circ \Delta \\
&= (\underline{\Delta} \otimes_R H) \circ \underline{\Delta} \\
&= (H \otimes_R \underline{\Delta}) \circ \Delta \\
&= (H \otimes_R (i \circ \Delta)) \circ i \circ \Delta \\
&= (H \otimes_R i)(H \otimes_R \Delta) \circ i \circ \Delta \\
&= i^2 \circ \alpha' \circ (H \times_R \Delta) \circ \Delta,
\end{aligned}
$$

segue que $\alpha \circ (\Delta \times_R H) \circ \Delta = \alpha' \circ (H \times_R \Delta) \circ \Delta$. Agora, para todo $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
\theta \circ (H \times_R \mu_\varepsilon) \circ \Delta(h) &= \theta(h_{(1)} \times_R \mu_\varepsilon(h_{(2)})) \\
&= \overline{\mu_\varepsilon(h_{(2)})(1_R)} \cdot h_{(1)} \\
&= h_{(1)} \triangleleft \mu_\varepsilon(h_{(2)})(1_R) \\
&= t(\mu_\varepsilon(h_{(2)})(1_R))h_{(1)} \\
&= t(\varepsilon(h_{(2)}s(1_R)))h_{(1)} \\
&= t(\varepsilon(h_{(2)}))h_{(1)} \\
&= h_{(1)} \triangleleft \varepsilon(h_{(2)}) = h,
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\theta' \circ (\mu_\varepsilon \times_R H) \circ \Delta(h) &= \theta'(\mu_\varepsilon(h_{(1)}) \times_R h_{(2)}) \\
&= (\mu_\varepsilon(h_{(1)})(1_R))h_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(h_{(1)}s(1_R)))h_{(2)} \\
&= s(\varepsilon(h_{(1)}))h_{(2)} \\
&= \varepsilon(h_{(1)}) \triangleright h_{(2)} \\
&= h.
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$) Considere (H, Δ, μ) uma $\times_R$-biálgebra. Defina

$$\underline{\Delta} := i \circ \Delta : H \longrightarrow H \otimes_R H,$$

em que $i : H \times_R H \longrightarrow H \otimes_R H$ é a inclusão canônica. Defina também a counidade $\underline{\varepsilon} : H \longrightarrow R$ como $\underline{\varepsilon}(h) = \mu(h)(1_R)$. Novamente, se Δ e

μ são morfismos de R^e-bimódulos e morfismos de álgebras, então $\underline{\Delta}$ é morfismo de álgebras e morfismo de R-bimódulos, e $\underline{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulo. Que $\underline{\varepsilon}$ é caracter à esquerda em (H, s), já foi feito na proposição 2.29. ■

Capítulo 3

Hopf Algebróides

Sabemos que uma álgebra de Hopf é uma biálgebra H equipada com uma aplicação $S : H \longrightarrow H$ denominada antípoda. A noção de **Hopf algebróide** é uma generalização desta estrutura. Existem outras noções que generalizam álgebras de Hopf, como vamos ver no final deste capítulo, mas ao contrário de bialgebróides, tais noções não são equivalentes.

A antípoda S, como mencionada acima, é um morfismo de biálgebras de H para H^{op}_{cop}. Mas, não parece ser possível definir um Hopf álgebróide baseado nesta analogia. Pois se $\mathcal{H}$ é um bialgebróide à esquerda, seu oposto co-oposto $\mathcal{H}^{op}_{cop}$ é um bialgebróide à direita e não existe uma noção sensata de morfismo de bialgebróides $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{op}_{cop}$. Portanto, se quisermos que a antípoda de um Hopf algebróide, seja um morfismo de bialgebróides $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{op}_{cop}$, precisamos que $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^{op}_{cop}$ tenham a mesma estrutura de bialgebróide à esquerda. Isto significa que a álgebra subjacente H precisa ser tanto um bialgebróide à esquerda, quanto um bialgebróide à direita.

3.1 Definição e Exemplos

Definição 3.1 *Sejam R e L duas álgebras sobre um anel comutativo k. Um* ***Hopf algebróide*** *sobre as álgebras de base R e L é uma tripla $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$, em que $\mathcal{H}_L$ é um L-bialgebróide à esquerda e $\mathcal{H}_R$ é um R-bialgebróide à direita, sobre a mesma k-álgebra subjacente H. A* ***antípoda*** *é um morfismo de k-módulo $S : H \longrightarrow H$. Denote as estruturas de R^e-anel e de R-coanel de $\mathcal{H}_R$, respectivamente, por (H, s_R, t_R) e $(H, \Delta_R, \varepsilon_R)$. Similarmente, denote as estruturas de L^e-anel e de L-*

coanel de $\mathcal{H}_L$, respectivamente, por (H, s_L, t_L) e $(H, \Delta_L, \varepsilon_L)$. Denote a multiplicação do R-anel (H, s_R) por μ_R e do L-anel (H, s_L) por μ_L. Estas estruturas estão sujeitas aos seguintes axiomas de compatibilidade:

(*i*) $s_L \circ \varepsilon_L \circ t_R = t_R$, $s_R \circ \varepsilon_R \circ t_L = t_L$, $t_L \circ \varepsilon_L \circ s_R = s_R$ e $t_R \circ \varepsilon_R \circ s_L = s_L$;

(*ii*) $(\Delta_L \otimes_R H) \circ \Delta_R = (H \otimes_L \Delta_R) \circ \Delta_L$ e
$(\Delta_R \otimes_L H) \circ \Delta_L = (H \otimes_R \Delta_L) \circ \Delta_R$;

(*iii*) $S(t_L(l)ht_R(r)) = s_R(r)S(h)s_L(l)$, *para quaisquer* $r \in R$, $l \in L$ *e* $h \in H$;

(*iv*) $\mu_L \circ (S \otimes_L H) \circ \Delta_L = s_R \circ \varepsilon_R$ e
$\mu_R \circ (H \otimes_R S) \circ \Delta_R = s_L \circ \varepsilon_L$.

Observação 3.2 (1) *Pelos axiomas de bialgebróides, todos os morfismos $s_L \circ \varepsilon_L$, $t_L \circ \varepsilon_L$, $s_R \circ \varepsilon_R$ e $t_R \circ \varepsilon_R$ são idempotentes $H \longrightarrow H$. Portanto, o axioma (i) nos diz que as imagens de s_L e t_R, também as imagens de s_R e t_L, são subálgebras coincidentes de H. Isto implica que Δ_L não é apenas morfismo de L-bimódulos, mas também morfismo de R-bimódulos. Simetricamente, Δ_R é morfismo de L-bimódulos. Dessa forma, o axioma (ii) faz sentido.*

(2) *O k-módulo subjacente H de um bialgebróide (à esquerda ou à direita) é um comódulo à esquerda e à direita, via o coproduto. Portanto, o k-módulo subjacente H de um Hopf algebróide, é um $\mathcal{H}_L$-comódulo à esquerda e um $\mathcal{H}_R$-comódulo à direita, via aos coprodutos Δ_L e Δ_R, respectivamente. O axioma (ii) expressa a propriedade de que as coações regulares comutam, ou seja, H é um $\mathcal{H}_L$-$\mathcal{H}_R$-bicomódulo e também um $\mathcal{H}_R$-$\mathcal{H}_L$-bicomódulo.*

Alternativamente, a primeira identidade do axioma (ii), nos diz que Δ_L é um morfismo de $\mathcal{H}_R$-comódulo à direita. Simetricamente, Δ_R é um morfismo de $\mathcal{H}_L$-comódulo à esquerda. A segunda identidade do axioma (ii), pode ser lida como a $\mathcal{H}_L$-colinearidade à direita de Δ_R ou a $\mathcal{H}_R$-colinearidade à esquerda de Δ_L.

(3) *O axioma (iii) formula a propriedade da antípoda ser morfismo de R-L-bimódulos, necessária para que o axioma (iv) faça sentido;*

(4) *Análogo aos axiomas de álgebras de Hopf, o axioma (iv) nos diz que a antípoda é a inversa da identidade pelo produto de convolução, em algum sentido generalizado. A noção de produto de*

convolução no caso de duas álgebras bases distintas L e R, é mais complicado e não está no escopo deste trabalho.

Da Definição 3.1 temos que um Hopf algebróide $\mathcal{H}$ possui duas estruturas de bialgebróides $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_R$ e dessa forma, usamos duas versões da notação de Sweedler para os coprodutos Δ_L e Δ_R. Para todo $h \in H$, usaremos $\Delta_L(h) = h_{(1)} \otimes_L h_{(2)}$ e $\Delta_R(h) = h^{(1)} \otimes_R h^{(2)}$, ficando subentendido o somatório.

Exemplo 3.3 *(Álgebras de Hopf) Seja H uma álgebra de Hopf sobre um anel comutativo k. Obviamente H é um Hopf algebróide sobre álgebras base $R = k = L$. Ambos os bialgebróides $\mathcal{H}_L$ e $\mathcal{H}_R$ são iguais a k-biálgebra H e a antípoda S da álgebra de Hopf H, satisfaz os axiomas de Hopf algebróide.*

Exemplo 3.4 *(Álgebras de Hopf fracas) Uma álgebra de Hopf fraca é uma biálgebra fraca H equipada com um morfismo k-linear $S : H \longrightarrow H$, sujeito aos seguintes axiomas de compatibilidade, Para todo $h \in H$,*

(i) $h_{(1)}S(h_{(2)}) = \sqcap^L(h)$;

(ii) $S(h_{(1)})h_{(2)} = \sqcap^R(h)$;

(iii) $S(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)}) = S(h)$,

e que as aplicações $\sqcap^L$ e $\sqcap^R$ foram definidas no exemplo 2.11. Defina $R := Im(\sqcap^R)$ e $L := Im(\sqcap^L)$, dessa forma, as estruturas de R^e-anel e R-coanel do R-bialgebróide à direita $\mathcal{H}_R$, são dadas por (H, s_R, t_R) e $(H, \Delta_R, \varepsilon_R)$, em que, para todo $r \in R$, temos $s_R(r) = r$, $t_R(r) = \varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)}$, também, $\Delta_R := \pi_R \circ \Delta$ e $\varepsilon_R := \sqcap^R$, em que $\pi_R : H \otimes_k H \longrightarrow H \otimes_R H$, é a projeção canônica. As estruturas de L^e-anel e L-coanel do L-bialgebróide à esquerda $\mathcal{H}_L$, são dadas por (H, s_L, t_L) e $(H, \Delta_L, \varepsilon_L)$, em que, para todo $l \in L$, temos $s_L(l) = l$, $t_L(l) = \varepsilon(1_{(2)}l)1_{(1)}$, também, $\Delta_L := \pi_L \circ \Delta$ e $\varepsilon_L := \sqcap^L$, em que $\pi_L : H \otimes_k H \longrightarrow H \otimes_L H$, é a projeção canônica. Estas estruturas junto com a antípoda S de H, constituem um Hopf algebróide.

De fato, mostremos as condições necessárias. Antes, listamos algumas propriedades que vamos usar, além da que já sabemos:

(1) $\Delta(1_H) \in R \otimes L$;

(2) $\sqcap^L(h) = \varepsilon(S(h)1_{(1)})1_{(2)} = S(1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}h)$;

(3) $\sqcap^R(h) = 1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}S(h)) = \varepsilon(h1_{(1)})S(1_{(2)})$, para todo $h \in H$.

As propriedades (2) e (3) estão provadas em [22]. Mostremos a propriedade (1). De fato,

$$\begin{aligned}
(H\otimes \sqcap^L)\Delta(1_H) &= 1_{(1)}\otimes \sqcap^L(1_{(2)})\\
&= 1_{(1)}\otimes \varepsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')}\\
&= 1_{(1)}\otimes \varepsilon(1_{(2)})1_{(3)}\\
&= 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}\\
&= \Delta(1_H).
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\Delta(1_H)\in H\otimes L$. Analogamente, mostra-se que $\Delta(1_H)\in R\otimes H$. Logo, temos

$$\Delta(1_H)\in (H\otimes L)\cap(R\otimes H)=R\otimes L.$$

A última igualdade segue de [11] lema 1.4.5. Mostremos então, a condição (i) da definição de Hopf algebróide. De fato, para quaisquer $r\in R$ e $l\in L$, temos

$$\begin{aligned}
s_R(\varepsilon_R(t_L(l))) &= s_R(\varepsilon_R(1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}l)))\\
&= s_R(1_{(1')}\varepsilon(1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}l)1_{(2')}))\\
&= 1_{(1')}\varepsilon(1_{(1)}1_{(2')})\varepsilon(1_{(2)}l)\\
&= \sqcap^R(1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}l)\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}l) \quad \text{por } (1)\\
&= t_L(l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_L(\varepsilon_L(t_R(r))) &= \varepsilon_L(\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)})\\
&= \varepsilon(1_{(1')}\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)})1_{(2')}\\
&= \varepsilon(r1_{(1)})\varepsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')}\\
&= \varepsilon(r1_{(1)})\sqcap^L(1_{(2)})\\
&= \varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)} \quad \text{por } (1)\\
&= t_R(r),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_R(\varepsilon_R(s_L(l))) &= t_R(\varepsilon_R(l))\\
&= t_R(1_{(1)}\varepsilon(l1_{(2)}))\\
&= \varepsilon(1_{(1)}\varepsilon(l1_{(2)})1_{(1')})1_{(2')}\\
&= \varepsilon(l1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}1_{(1')})1_{(2')}\\
&= \varepsilon(l1_{(1')})1_{(2')} \quad \text{por 2.10 pág 62}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(\varepsilon(1_{(1)}l)1_{(2)}1_{(1')})1_{(2')} \\
&= \varepsilon(\varepsilon(1_{(1)}l)1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')} \quad \text{por 2.9 pág 61} \\
&= \varepsilon(1_{(1)}l)\varepsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')} \\
&= \varepsilon(1_{(1)}l) \sqcap^L (1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(1_{(1)}l)1_{(2)} \quad \text{por (1)} \\
&= \sqcap^L(l) \\
&= l = s_L(l),
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
t_L(\varepsilon_L(s_R(r))) &= t_L(\varepsilon(1_{(1')}r)1_{(2')}) \\
&= \varepsilon(1_{(2)}\varepsilon(1_{(1')}r)1_{(2')})1_{(1)} \\
&= \varepsilon(1_{(2)}1_{(2')})\varepsilon(1_{(1')}r)1_{(1)} \\
&= \varepsilon(1_{(2)}r)1_{(1)} \quad \text{por 2.10 pág 62} \\
&= \varepsilon(1_{(2)}1_{(1')}\varepsilon(r1_{(2')}))1_{(1)} \\
&= \varepsilon(r1_{(2')})\varepsilon(1_{(2)}1_{(1')})1_{(1)} \\
&= \varepsilon(r1_{(2')})\varepsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(1)} \quad \text{por 2.9 pág 61} \\
&= \varepsilon(r1_{(2)})1_{(1)} \\
&= \sqcap^R(r) = r \\
&= s_R(r).
\end{aligned}
$$

Agora note que

$$
H \xrightarrow{(\Delta\otimes H)\Delta} H\otimes H\otimes H \xrightarrow{\pi_L\otimes H} H\otimes_L H\otimes H \xrightarrow{H\otimes\pi_R} H\otimes_L H\otimes_R H,
$$

é igual a

$$
H \xrightarrow{(H\otimes\Delta)\Delta} H\otimes H\otimes H \xrightarrow{H\otimes\pi_R} H\otimes H\otimes_R H \xrightarrow{\pi_L\otimes_R H} H\otimes_L H\otimes_R H.
$$

Segue daí que

$$
\begin{aligned}
(\Delta_L\otimes_R H)\Delta_R &= (H\otimes_R \pi_R)(\pi_L\otimes_L H)(\Delta\otimes H)\Delta \\
&= (\pi_L\otimes_L H)(H\otimes_R \pi_R)(H\otimes\Delta)\Delta \\
&= (H\otimes_L \Delta_R)\Delta_L.
\end{aligned}
$$

Que $(\Delta_R\otimes_L H)\Delta_L = (H\otimes_R \Delta_L)\Delta_R$ é análogo. Mostremos agora a condição (iii) da definição de Hopf algebróide. De fato, para quaisquer $h\in H$, $r\in R$ e $l\in L$, temos

$$
S(t_L(l)ht_R(r)) = S(1_{(1)}\varepsilon(1_{(2)}l)h\varepsilon(r1_{(1')})1_{(2')})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon(r1_{(1')})S(1_{(1)}h1_{(2')})\varepsilon(1_{(2)}l)\\
&= \varepsilon(r1_{(1')})S(1_{(2')})S(h)S(1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}l)\\
&= \sqcap^R(r)S(h)\sqcap^L(l) \quad \text{por (2) e (3)}\\
&= s_R(r)S(h)s_L(l).
\end{aligned}
$$

Agora note que, para todo $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
\mu_L(S \otimes_L H)\Delta_L(h) &= \mu_L(S(h_{(1)}) \otimes_L h_{(2)})\\
&= S(h_{(1)})h_{(2)}\\
&= \sqcap^R(h)\\
&= s_R \circ \varepsilon_R(h),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\mu_R(H \otimes_R S)\Delta_R(h) &= \mu_R(H \otimes_R S)(h_{(1)} \otimes_R h_{(2)})\\
&= \mu_R(h_{(1)} \otimes_R S(h_{(2)}))\\
&= h_{(1)}S(h_{(2)})\\
&= \sqcap^L(h)\\
&= s_L \circ \varepsilon_L(h).
\end{aligned}
$$

Portanto, concluímos que $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$, como definidos nesse exemplo, é um Hopf algebróide.

Exemplo 3.5 *(O Hopf algebróide R^e) Já vimos que R^e é um R-bialgebróide à direita, com estrutura de R^e-anel (R^e, s_R, t_R), em que t_R e s_R são as inclusões e com estrutura de R-coanel $(R^e, \Delta_R, \varepsilon_R)$, em que $\Delta_R(a\otimes\overline{b}) = (1_R\otimes\overline{b})\otimes_R(a\otimes 1_R)$ e $\varepsilon_R(a\otimes\overline{b}) = ba$, para quaisquer $a, b \in R$. Pela Proposição 2.8 podemos munir $(R^e)^{op}_{cop}$ com uma estrutura de R^{op}-bialgebróide à esquerda. A estrutura de $R^{op}\otimes R$-anel é a tripla $(R^{op} \otimes R, s_{R^{op}}, t_{R^{op}})$, em que $s_{R^{op}} = s_R$ e $t_{R^{op}} = t_R$ e a estrutura de R^{op}-coanel é a tripla $(R^{op} \otimes R, \Delta_{R^{op}}, \varepsilon_{R^{op}})$, em que $\Delta_{R^{op}}(\overline{a} \otimes_{R^{op}} b) = (\overline{a} \otimes 1_R) \otimes_{R^{op}} (1_R \otimes b)$ e $\varepsilon_{R^{op}}(\overline{a} \otimes b) = \overline{ba}$, para quaisquer $a, b \in R$. Agora, utilizando que $R^e \simeq R^{op} \otimes R$, temos que estas estruturas, junto com a antípoda $S : R^e \longrightarrow R^e$, tal que $S(a \otimes \overline{b}) = b \otimes \overline{a}$, constituem um Hopf algebróide.*

De fato, note que as condições do axioma (i) da definição de Hopf algebróide são trivialmente satisfeitas. Para mostrar as demais condições, vamos usar a identificação $R^e \longrightarrow R^{op} \otimes R \quad a \otimes \overline{b} \longmapsto \overline{b} \otimes a$. Portanto, para quaisquer $a, b \in R$, temos

$$
(\Delta_{R^{op}} \otimes_R R^e)\Delta_R(a \otimes \overline{b}) = (\Delta_{R^{op}} \otimes_R R^e)((1_R \otimes \overline{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R))
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_{R^{op}}(\overline{b} \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\
&= (\overline{b} \otimes 1_R) \otimes_{R^{op}} (1_R \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(R^e \otimes_{R^{op}} \Delta_R)\Delta_{R^{op}}(\overline{b} \otimes a) &= (R^e \otimes_{R^{op}} \Delta_R)((\overline{b} \otimes a) \otimes_{R^{op}} (1_R \otimes a) \\
&= (\overline{b} \otimes a) \otimes_{R^{op}} \Delta_R(a \otimes 1_R) \\
&= (\overline{b} \otimes 1_R) \otimes_{R^{op}} (1_R \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R).
\end{aligned}
$$

Analogamente, mostra-se $(\Delta_R \otimes_{R^{op}} R^e)\Delta_{R^{op}} = (R^e \otimes_R \Delta_{R^{op}})\Delta_R$. Agora, para quaisquer a, b, r e $s \in R$, temos

$$
\begin{aligned}
S(t_{R^{op}}(s) \cdot_{op} (a \otimes \overline{b}) \cdot_{op} t_R(r)) &= S((s \otimes 1_R) \cdot_{op} (a \otimes \overline{b}) \cdot_{op} (1_R \otimes \overline{r})) \\
&= S((1_R \otimes \overline{r})(a \otimes \overline{b})(s \otimes 1_R)) \\
&= S(as \otimes \overline{br}) \\
&= br \otimes \overline{as} \\
&= br \otimes \overline{s}\,\overline{a} \\
&= (1_R \otimes \overline{s})(b \otimes \overline{a})(r \otimes 1_R) \\
&= (r \otimes 1_R) \cdot_{op} (b \otimes \overline{a}) \cdot_{op} (1_R \otimes \overline{s}) \\
&= s_R(r) \cdot_{op} S(a \otimes \overline{b}) \cdot_{op} s_{R^{op}}(s).
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
\mu_{R^{op}}(S \otimes_{R^{op}} R^e)\Delta_{R^{op}}(\overline{b} \otimes a) &= \mu_{R^{op}}(S \otimes_{R^{op}} R^e)((\overline{b} \otimes 1_R) \otimes_{R^{op}} (1_R \otimes a)) \\
&= \mu_{R^{op}}(S(1_R \otimes \overline{b}) \otimes_{R^{op}} (a \otimes 1_R)) \\
&= (b \otimes 1_R) \cdot_{op} (a \otimes 1_R) \\
&= (a \otimes 1_R)(b \otimes 1_R) \\
&= ab \otimes 1_R,
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
s_R \circ \varepsilon_R(a \otimes \overline{b}) &= s_R(ba) \\
&= ba \otimes 1_R.
\end{aligned}
$$

Analogamente, mostra-se $\mu_R \circ (R^e \otimes_R S) \circ \Delta_R = s_{R^{op}} \circ \varepsilon_{R^{op}}$.

Exemplo 3.6 *(O toro quântico algébrico) Considere uma álgebra T_q sobre um anel comutativo k, gerada por dois elementos inversíveis U e V, sujeitos a relação $UV = qVU$, em que q é um elemento inversível em*

k. T_q possui uma estrutura de bialgebróide à direita sobre a subálgebra comutativa R, gerada por U. Os morfismos source e target são dados ambos pela inclusão $R \longrightarrow T_q$. O coproduto Δ_R e a counidade ε_R são dados por

$$\Delta_R(V^m U^n) = V^m U^n \otimes_R V^m \quad \varepsilon_R(V^m U^n) = U^n,$$

em que $m, n \in \mathbb{Z}$. Simetricamente, existe uma estrutura de R-bialgebróide à esquerda dada pelo coproduto Δ_L e a counidade ε_L, tais que

$$\Delta_L(U^n V^m) = U^n V^m \otimes_R V^m \quad \varepsilon_L(U^n V^m) = U^n.$$

Estas estruturas junto com a antípoda $S(U^n V^m) = V^{-m} U^n$, constituem um Hopf algebróide.

A condição (i) da definição de Hopf algebróide é trivialmente satisfeita. Mostremos a condição (ii). De fato, para $V^m U^n \in T_q$, temos

$$\begin{aligned}(\Delta_L \otimes_R T_q)\Delta_R(V^m U^n) &= (\Delta_L \otimes_R T_q)(V^m U^n \otimes_R V^m)\\ &= \Delta_L(V^m U^n) \otimes_R V^m\\ &= \Delta_L(q^{-mn} U^n V^m) \otimes_R V^m\\ &= q^{-mn} U^n V^m \otimes_R V^m \otimes_R V^m,\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(T_q \otimes_R \Delta_R)\Delta_L(V^m U^n) &= (T_q \otimes_R \Delta_R)\Delta_L(q^{-mn} U^n V^m)\\ &= (T_q \otimes_R \Delta_R)(q^{-mn} U^n V^m \otimes_R V^m)\\ &= q^{-mn} U^n V^m \otimes_R V^m \otimes_R V^m.\end{aligned}$$

Também, para todo $U^n V^m \in T_q$, temos

$$\begin{aligned}(\Delta_R \otimes_R T_q)\Delta_L(U^n V^m) &= (\Delta_R \otimes_R T_q)(U^n V^m \otimes_R V^m)\\ &= \Delta_R(U^n V^m) \otimes_R V^m\\ &= q^{mn} V^m U^n \otimes_R V^m \otimes_R V^m,\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}(T_q \otimes_R \Delta_L)\Delta_R(U^n V^m) &= (T_q \otimes_R \Delta_L)(q^{mn} V^m U^n \otimes_R V^m)\\ &= q^{mn} V^m U^n \otimes_R V^m \otimes_R V^m.\end{aligned}$$

Agora, para quaisquer $V^l, U^n V^m \in T_q$ e $U^p, U^k \in R$, temos

$$S(U^n V^m U^p V^l) = S(q^{-mp} U^n U^p V^m V^l)$$

$$
\begin{aligned}
&= S(q^{-mp}U^{n+p}V^{m+l}) \\
&= q^{-mp}V^{-(m+l)}U^{n+p},
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
S(U^pV^l)S(U^nV^m) &= V^{-l}U^pV^{-m}U^n \\
&= q^{p(-m)}V^{-l}V^{-m}U^pU^n \\
&= q^{-pm}V^{-(l+m)}U^{p+n}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
S(U^pU^nV^mU^l) &= S(U^l)S(U^nV^m)S(U^p) \\
&= U^lS(U^nV^m)U^p.
\end{aligned}
$$

Mostremos que vale a condição (iv) de Hopf algebróide. De fato, para todo $U^nV^m \in T_q$, temos

$$
\begin{aligned}
S(U^nV^m)V^m &= V^{-m}U^nV^m \\
&= q^{-(-m)n}U^nV^{-m}V^m \\
&= q^{mn}U^n
\end{aligned}
$$

e também

$$
\begin{aligned}
V^mU^nS(V^m) &= V^mU^nV^{-m} \\
&= V^mV^{-m}U^nq^{-mn} \\
&= q^{-mn}U^n.
\end{aligned}
$$

Segue portanto, que T_q é um Hopf algebróide.

Exemplo 3.7 *(Extensão escalar) Considere uma álgebra de Hopf H e uma álgebra A comutativa trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfel'd de H, ou seja, A é um H-módulo álgebra e um H-comódulo álgebra que satisfaz, para quaisquer $a, b \in A$,*

$$
b^{(0)}(a \triangleleft b^{(1)}) = ab.
$$

Sabemos da Seção 2.3.5 que o produto smash $A\#H$ possui uma estrutura de A-bialgebróide à direita, com estrutura de A^e-anel $(A\#H, s_A, t_A)$, em que $s_A(a) = a^{(0)}\#a^{(1)}$ e $t_A(a) = a\#1_H$, e com estrutura de A-coanel $(A\#H, \underline{\Delta}_A, \underline{\varepsilon}_A)$, em que

$$
\underline{\Delta}_A(a\#h) = (a\#h_{(1)}) \otimes_A (1_A\#h_{(2)}) \quad e \quad \underline{\varepsilon}_A(a\#h) = a\varepsilon(h),
$$

para quaisquer $a \in A$ e $h \in H$. Também, podemos munir $A\#H$ com uma estrutura de A^{op}-bialgebróide à esquerda, com estrutura de $A^{op} \otimes A$-anel $(A\#H, s_{A^{op}}, t_{A^{op}})$, em que $s_{A^{op}}(a) = a^{(0)} \triangleleft S(a^{(1)})\#1_H$, $t_{A^{op}}(a) = a^{(0)}\#a^{(1)}$, e com estrutura de A^{op}-coanel $(A\#H, \underline{\Delta}_{A^{op}}, \underline{\varepsilon}_{A^{op}})$, em que

$$\underline{\Delta}_{A^{op}}(a\#h) = (a\#h_{(1)}) \otimes_{A^{op}} (1_A\#h_{(2)})$$

e

$$\underline{\varepsilon}_{A^{op}}(a\#h) = a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(hS^{-1}(a^{(1)})),$$

para quaisquer $a \in A$ e $h \in H$. Também, temos a compatibilidade entre a ação e a coação de H em A, que é dada por

$$(a \triangleleft h)^{(0)} \otimes (a \triangleleft h)^{(1)} = a^{(o)} \triangleleft h_{(2)} \otimes S(h_{(2)})a^{(1)}h_{(3)}.$$

Estas estruturas junto com a antípoda

$$\underline{S} : A\#H \longrightarrow A\#H, \quad a\#h \longmapsto a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)})\#a^{(1)}S(h_{(1)}),$$

constituem um Hopf algebróide.

Mostremos primeiro que vale a condição (i) de Hopf algebróide. De fato, para todo $a \in A$, temos

$$\begin{aligned}
t_{A^{op}}(\varepsilon_{A^{op}}(s_A(a))) &= t_{A^{op}}(\varepsilon_{A^{op}}(a^{(0)}\#a^{(1)})) \\
&= t_{A^{op}}(a^{(0)(0)} \triangleleft S^{-1}(a^{(1)}S^{-1}(a^{(0)(1)}))) \\
&= t_{A^{op}}(a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(a^{(1)}{}_{(2)}S^{-1}(a^{(1)}{}_{(1)}))) \\
&= t_{A^{op}}(a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(\varepsilon(a^{(1)})1_H)) \\
&= t_{A^{op}}(a^{(0)}\varepsilon(a^{(1)}) \triangleleft S^{-1}(1_H)) \\
&= t_{A^{op}}(a) = s_A(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_A(\varepsilon_A(s_{A^{op}}(a))) &= t_A(\varepsilon_A(a^{(0)} \triangleleft S(a^{(1)})\#1_H)) \\
&= t_A(a^{(0)} \triangleleft S(a^{(1)})) \\
&= a^{(0)} \triangleleft S(a^{(1)})\#1_H \\
&= s_{A^{op}}(a),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_A(\varepsilon_A(t_{A^{op}}(a))) &= s_A(\varepsilon_A(a^{(0)}\#a^{(1)})) \\
&= s_A(a^{(0)}\varepsilon(a^{(1)})) \\
&= s_A(a) = t_{A^{op}}(a),
\end{aligned}$$

e também

$$
\begin{aligned}
&s_{A^{op}}(\varepsilon_{A^{op}}(t_A(a)))\\
&= s_{A^{op}}(\varepsilon_{A^{op}}(a\#1_H))\\
&= s_{A^{op}}(a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(1_H S^{-1}(a^{(1)})))\\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(1)}))^{(0)} \triangleleft S((a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(1)}))^{(1)})\#1_H\\
&= (a^{(0)(0)} \triangleleft S^{-2}({a^{(1)}}_{(2)})) \triangleleft S(S(S^{-2}({a^{(1)}}_{(1)}))a^{(0)(1)}S^{-2}({a^{(1)}}_{(3)}))\#1_H\\
&= (a^{(0)(0)} \triangleleft S^{-2}({a^{(1)}}_{(2)})) \triangleleft S(S^{-1}({a^{(1)}}_{(1)})a^{(0)(1)}S^{-2}({a^{(1)}}_{(3)}))\#1_H\\
&= (a^{(0)(0)} \triangleleft S^{-2}({a^{(1)}}_{(2)})) \triangleleft S^{-1}({a^{(1)}}_{(3)})S(a^{(0)(1)}){a^{(1)}}_{(1)}\#1_H\\
&= a^{(0)(0)} \triangleleft (S^{-2}({a^{(1)}}_{(2)})S^{-1}({a^{(1)}}_{(3)})S(a^{(0)(1)}){a^{(1)}}_{(1)})\#1_H\\
&= a^{(0)(0)} \triangleleft (S^{-1}({a^{(1)}}_{(3)}S^{-1}({a^{(1)}}_{(2)}))S(a^{(0)(1)}){a^{(1)}}_{(1)})\#1_H\\
&= a^{(0)} \triangleleft (S^{-1}(a^{(4)}S^{-1}(a^{(3)}))S(a^{(1)})a^{(2)})\#1_H\\
&= a^{(0)} \triangleleft (S^{-1}(\varepsilon(a^{(3)})1_H)S(a^{(1)})a^{(2)})\#1_H\\
&= a^{(0)} \triangleleft (S^{-1}(1_H)S(a^{(1)})a^{(2)}\varepsilon(a^{(3)}))\#1_H\\
&= a^{(0)} \triangleleft (S(a^{(1)})a^{(2)})\#1_H\\
&= a^{(0)} \triangleleft (\varepsilon(a^{(1)})1_H)\#1_H\\
&= a\#1_H\\
&= t_A(a).
\end{aligned}
$$

Denote $\mathcal{H} = A\#H$. Dessa forma, para quaisquer $a \in A$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{A^{op}} \otimes_A \mathcal{H})\Delta_A(a\#h) &= (\Delta_{A^{op}} \otimes_A \mathcal{H})((a\#h_{(1)}) \otimes_A (1_A\#h_{(2)}))\\
&= \Delta_{A^{op}}(a\#h_{(1)}) \otimes_A (1_A\#h_{(2)})\\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_{A^{op}} (1_A\#h_{(2)}) \otimes_A (1_A\#h_{(3)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{H} \otimes_{A^{op}} \Delta_A)\Delta_{A^{op}}(a\#h) &= (\mathcal{H} \otimes_{A^{op}} \Delta_A)((a\#h_{(1)}) \otimes_{A^{op}} (1_A\#h_{(2)}))\\
&= (a\#h_{(1)}) \otimes_{A^{op}} (1_A\#h_{(2)}) \otimes_A (1_A\#h_{(3)}).
\end{aligned}
$$

Analogamente, mostra-se $(\Delta_A \otimes_{A^{op}} \mathcal{H})\Delta_{A^{op}} = (\mathcal{H} \otimes_A \Delta_{A^{op}})\Delta_A$. Para mostrarmos que vale a condição (iii), mostremos antes que $\underline{S}$ é anti-multiplicativo. De fato, quaisquer $a, b \in A$ e $h, k \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
&\underline{S}((a\#h)(b\#k)) = \underline{S}(b(a \triangleleft k_{(1)})\#hk_{(2)})\\
&= (b(a \triangleleft k_{(1)}))^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}k_{(3)})\#(b(a \triangleleft k_{(1)}))^{(1)}S(h_{(1)}k_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (b^{(0)}(a \triangleleft k_{(1)})^{(0)}) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(3)})\#b^{(1)}(a \triangleleft k_{(1)})^{(1)}S(h_{(1)}k_{(2)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(1)(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(3)})\#b^{(1)}S(k_{(1)(1)})a^{(1)}k_{(1)(3)}S(h_{(1)}k_{(2)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(5)})\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}k_{(3)}S(h_{(1)}k_{(4)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(5)})\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}k_{(3)}S(k_{(4)})S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(4)})\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}\varepsilon(k_{(3)})1_H S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}\varepsilon(k_{(3)})k_{(4)})\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}1_H S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)}(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)})) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(3)})\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}k_{(4)}))((a^{(0)} \triangleleft k_{(2)}) \triangleleft S(h_{(2)}k_{(3)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}k_{(4)}))(a^{(0)} \triangleleft k_{(2)}S(k_{(3)})S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}k_{(3)}))(a^{(0)} \triangleleft \varepsilon(k_{(2)})1_H S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}\varepsilon(k_{(2)})k_{(3)}))(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}k_{(2)}))(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)}),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&S(b\#k)S(a\#h)\\
&=(b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})\#b^{(1)}S(k_{(1)}))(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)})\#a^{(1)}S(h_{(1)}))\\
&=(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}))((b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})) \triangleleft a^{(1)}{}_{(1)}S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}{}_{(2)}S(h_{(1)})\\
&=(a^{(0)(0)} \triangleleft S(h_{(3)}))((b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})) \triangleleft a^{(0)(1)}S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&=(a^{(0)(0)} \triangleleft S(h_{(3)}))(((b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})) \triangleleft a^{(0)(1)}) \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (a^{(0)(0)}((b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})) \triangleleft a^{(0)(1)})) \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= ((b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)}))a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(k_{(2)})S(h_{(3)}))(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)})\\
&= (b^{(0)} \triangleleft S(h_{(3)}k_{(2)}))(a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#b^{(1)}S(k_{(1)})a^{(1)}S(h_{(1)}).
\end{aligned}
$$

Segue que $\underline{S}$ é anti-multiplicativo. Agora note que, para todo $a \in A$, temos

$$\underline{S}(t_A(a)) = \underline{S}(a\#1_H) = a^{(0)}\#a^{(1)} = s_A(a),$$

também temos

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(t_{A^{op}}(a)) &= \underline{S}(a^{(0)}\#a^{(1)})\\
&= a^{(0)(0)} \triangleleft S(a^{(1)}{}_{(2)})\#a^{(0)(1)}S(a^{(1)}{}_{(1)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a^{(0)} \triangleleft S({a^{(1)}}_{(3)}) \# {a^{(1)}}_{(1)} S({a^{(1)}}_{(2)}) \\
&= a^{(0)} \triangleleft S({a^{(1)}}_{(2)}) \# \varepsilon({a^{(1)}}_{(1)}) 1_H \\
&= a^{(0)} \triangleleft S(\varepsilon({a^{(1)}}_{(1)}) {a^{(1)}}_{(2)}) \# 1_H \\
&= a^{(0)} \triangleleft S(a^{(1)}) \# 1_H \\
&= s_{A^{op}}(a).
\end{aligned}
$$

Segue portanto, para quaisquer $a, b, c \in A$ e $h \in H$, que

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(t_{A^{op}}(a)(c\#h)t_A(b)) &= \underline{S}(t_A(b))\underline{S}(c\#h)\underline{S}(t_{A^{op}}(a)) \\
&= s_A(b)\underline{S}(c\#h)s_{A^{op}}(a).
\end{aligned}
$$

Para finalizar, mostremos que vale a condição (iv). De fato, para quaisquer $a \in A$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
\mu_A(\mathcal{H} \otimes_A \underline{S})\Delta_A(a\#h) &= \mu_A(\mathcal{H} \otimes_A \underline{S})((a\#h_{(1)}) \otimes_A (1_A\#h_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)})\underline{S}(1_A\#h_{(2)}) \\
&= (a\#h_{(1)})(1_A \triangleleft S(h_{(3)})\#S(h_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)})(\varepsilon(S(h_{(3)}))1_A\#S(h_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)})(\varepsilon(h_{(3)})1_A\#S(h_{(2)})) \\
&= (a\#h_{(1)})(1_A\#S(h_{(2)}\varepsilon(h_{(3)}))) \\
&= (a\#h_{(1)})(1_A\#S(h_{(2)})) \\
&= a \triangleleft S(h_{(3)})\#h_{(1)}S(h_{(2)}) \\
&= a \triangleleft S(h_{(2)})\#\varepsilon(h_{(1)})1_H \\
&= a \triangleleft S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)})\#1_H \\
&= a \triangleleft S(h)\#1_H,
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&s_{A^{op}} \circ \varepsilon_{A^{op}}(a\#h) \\
&= s_{A^{op}}(a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(hS^{-1}(a^{(1)}))) \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(hS^{-1}(a^{(1)})))^{(0)} \triangleleft S((a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(hS^{-1}(a^{(1)})))^{(1)})\#1_H \\
&= (a^{(0)(0)} \triangleleft S^{-1}(h_{(2)}S^{-1}({a^{(1)}}_{(2)}))S(S(S^{-1}(h_{(3)}S^{-1}({a^{(1)}}_{(1)})))a^{(0)(1)} \\
&\quad S^{-1}(h_{(1)}S^{-1}({a^{(1)}}_{(3)}))))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(3)})S^{-1}(h_{(2)})S(h_{(3)}S^{-1}(a^{(2)})a^{(1)}S(h_{(1)}S^{-1}(a^{(4)}))))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(3)})S^{-1}(h_{(2)})h_{(1)}S^{-1}(a^{(4)})S(a^{(1)})a^{(2)}S(h_{(3)}))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(2)})\varepsilon(h_{(1)})1_H S^{-1}(a^{(3)})\varepsilon(a^{(1)})1_H S(h_{(2)}))\#1_H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(\varepsilon(a^{(1)})a^{(2)})S^{-1}(a^{(3)})S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-2}(a^{(1)})S^{-1}(a^{(2)})S(h))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(a^{(2)}S^{-1}(a^{(1)}))S(h))\#1_H \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S^{-1}(\varepsilon(a^{(1)})1_H)S(h))\#1_H \\
&= (a^{(0)}\varepsilon(a^{(1)}) \triangleleft S^{-1}(1_H)S(h))\#1_H \\
&= (a \triangleleft S(h))\#1_H.
\end{aligned}
$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
\mu_{R^{op}}(\underline{S} \otimes_{A^{op}} \mathcal{H})\Delta_{R^{op}}(a\#h) &= \mu_{R^{op}}(\underline{S} \otimes_{A^{op}} \mathcal{H})((a\#h_{(1)}) \otimes_{A^{op}} (1_A\#h_{(2)})) \\
&= \underline{S}(a\#h_{(1)})(1_A\#h_{(2)}) \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)}))\#a^{(1)}S(h_{(1)}))(1_A\#h_{(3)}) \\
&= (a^{(0)} \triangleleft S(h_{(2)})h_{(3)})\#a^{(1)}S(h_{(1)})h_{(4)} \\
&= (a^{(0)} \triangleleft \varepsilon(h_{(2)})1_H)\#a^{(1)}S(h_{(1)})h_{(3)} \\
&= (a^{(0)} \triangleleft 1_H)\#a^{(1)}S(h_{(1)})\varepsilon(h_{(2)})h_{(3)} \\
&= a^{(0)}\#a^{(1)}S(h_{(1)})h_{(2)} \\
&= a^{(0)}\#a^{(1)}\varepsilon(h)1_H \\
&= s_R(a\varepsilon(h)) \\
&= s_R(\varepsilon_R(a\#h)).
\end{aligned}
$$

3.2 Propriedades Básicas de Hopf Algebróides

Nesta seção veremos propriedades que indicam o comportamento esperado da antípoda de um Hopf algebróide, com respeito as estruturas de anel e coanel subjacentes. Considere $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$ um Hopf algebróide sobre álgebras de bases L e R. Segue do axioma (i) de Hopf algebróide que L e R são anti-isomorfas. De fato, existem isomorfismos

$$\varepsilon_L \circ s_R : R^{op} \longrightarrow L \quad \text{e} \quad \varepsilon_R \circ t_L : L \longrightarrow R^{op}. \tag{3.1}$$

Simetricamente, existem isomorfismos inversos

$$\varepsilon_R \circ s_L : L^{op} \longrightarrow R \quad \text{e} \quad \varepsilon_L \circ t_R : R \longrightarrow L^{op}. \tag{3.2}$$

De fato, para quaisquer $r, r' \in R$, temos

$$\varepsilon_L \circ s_R(rr') = \varepsilon_L(s_R(rr'))$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon_L(t_L \circ \varepsilon_L \circ s_R(r) s_R(r')) \\
&= \varepsilon_L(t_L(\varepsilon_L \circ s_R(r)) s_R(r')) \\
&= \varepsilon_L(s_R(r') \cdot (\varepsilon_L \circ s_R(r))) \\
&= \varepsilon_L(s_R(r'))(\varepsilon_L \circ s_R(r)) \\
&= \varepsilon_L \circ s_R(r') \varepsilon_L \circ s_R(r).
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

Agora, segue dos axiomas (ii), (iii) e (iv) da definição de Hopf algebróide, que

$$
S(t_R(r) h t_L(l)) = s_L(l) S(h) s_R(r), \tag{3.4}
$$

para quaisquer $r \in R$, $l \in L$ e $h \in H$. De fato,

$$
\begin{aligned}
S(t_R(r)h) &= S(t_R(r) h^{(2)} t_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))) \\
&= s_R(\varepsilon_R(h^{(1)})) S(t_R(r) h^{(2)}) \\
&= S({h^{(1)}}_{(1)}) {h^{(1)}}_{(2)} S(t_R(r) h^{(2)}) \\
&= S(h_{(1)}) {h_{(2)}}^{(1)} S(t_R(r) {h_{(2)}}^{(2)}) \\
&= S(h_{(1)}) s_R(r) {h_{(2)}}^{(1)} S({h_{(2)}}^{(2)}) \\
&= S(h_{(1)}) s_R(r) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) \\
&= S(h_{(1)}) t_L(\varepsilon_L(s_R(r))) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) \\
&= S(h_{(1)}) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) t_L(\varepsilon_L(s_R(r))) \\
&= S(h_{(1)}) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) s_R(r) \\
&= S(t_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) h_{(1)}) s_R(r) \\
&= S(h) s_R(r),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
S(h t_L(l)) &= S(t_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) h_{(1)} t_L(l)) \\
&= S(h_{(1)} t_L(l)) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) \\
&= S(h_{(1)} t_L(l)) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) \\
&= S(h_{(1)} t_L(l)) {h_{(2)}}^{(1)} S({h_{(2)}}^{(2)}) \\
&= S({h^{(1)}}_{(1)} t_L(l)) {h^{(1)}}_{(2)} S(h^{(2)}) \\
&= S({h^{(1)}}_{(1)}) {h^{(1)}}_{(2)} s_L(l) S(h^{(2)}) \\
&= s_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)}) s_L(l) S(h^{(2)}) \\
&= s_R(\varepsilon_R(h^{(1)})) t_R(\varepsilon_R(s_L(l))) S(h^{(2)}) \\
&= t_R(\varepsilon_R(s_L(l))) s_R(\varepsilon_R(h^{(1)})) S(h^{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= s_L(l)s_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))S(h^{(2)}) \\
&= s_L(l)S(h^{(2)}t_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))) \\
&= s_L(l)S(h).
\end{aligned}
$$

Proposição 3.8 *Seja $\mathcal{H}$ um Hopf algebróide sobre álgebras bases L e R, e H a k-álgebra subjacente. Então, a antípoda S é um morfismo de R^e-anéis*

$$(H, s_R, t_R) \longrightarrow (H^{op}, s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R), t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)).$$

Analogamente, também é um morfismo de L^e-anéis

$$(H, s_L, t_L) \longrightarrow (H^{op}, s_R \circ (\varepsilon_R \circ s_L), t_R \circ (\varepsilon_R \circ s_L)).$$

Em particular, $S : H \longrightarrow H$ é antimorfismo de k-álgebras.

Demonstração: Primeiro, vamos ver que $(H^{op}, s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R), t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R))$ é um R^e-anel. De fato, por 3.3 $\varepsilon_L \circ s_R : R \longrightarrow L$ é antimorfismo de álgebras , segue que

$$
\begin{aligned}
(s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R))(rr') &= s_L((\varepsilon_L \circ s_R)(rr')) \\
&= s_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r')(\varepsilon_L \circ s_R)(r)) \\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r')(s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r)) \\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \cdot_{op} (s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r')),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
(t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R))(rr') &= t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(rr')) \\
&= t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r')(\varepsilon_L \circ s_R)(r)) \\
&= t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r))t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r')) \\
&= t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r')) \cdot_{op} t_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r)).
\end{aligned}
$$

É claro que $s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)$ e $t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)$ comutam nas imagens. Segue portanto, que H^{op} é um R^e-anel. Mostremos agora que S é morfismo de R^e-bimódulos. De fato, para quaisquer $r, r' \in R$ e $h \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
S((r \otimes \overline{r'}) \cdot h) &= S(s_R(r)t_R(r')h) \\
&= S(t_L \circ \varepsilon_L \circ s_R(r)t_R(r')h) \\
&= S(h)s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r)s_R(r') \\
&= S(h)s_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r))s_R(r') \\
&= S(h)s_R(r')s_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S(h)t_L(\varepsilon_L \circ s_R(r'))s_L((\varepsilon_L \circ s_R)(r))\\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \cdot_{op} t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r') \cdot_{op} S(h)\\
&= (r \otimes \overline{r'}) \cdot S(h),
\end{aligned}
$$

também temos

$$
\begin{aligned}
S(h \cdot (r \otimes \overline{r'})) &= S(hs_R(r)t_R(r'))\\
&= S(ht_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r))t_R(r'))\\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r))s_R(r')S(h)\\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r))t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r'))S(h)\\
&= t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r'))s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r))S(h)\\
&= S(h) \cdot_{op} s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r)) \cdot_{op} t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R(r'))\\
&= S(h) \cdot (r \otimes r').
\end{aligned}
$$

Mostremos que S é antimultiplicativo. De fato, para quaisquer $h, k \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
S(hk) &= S(t_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))h_{(1)}k)\\
&= S(h_{(1)}k)s_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))\\
&= S(h_{(1)}t_L(\varepsilon_L(k_{(2)}))k_{(1)})s_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))\\
&= S(h_{(1)}t_L(\varepsilon_L(k_{(2)}))k_{(1)})h_{(2)}{}^{(1)}S(h_{(2)}{}^{(2)})\\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)}t_L(\varepsilon_L(k_{(2)}))k_{(1)})h^{(1)}{}_{(2)}S(h^{(2)})\\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)}k_{(1)})h^{(1)}{}_{(2)}s_L(\varepsilon_L(k_{(2)}))S(h^{(2)})\\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)}k_{(1)})h^{(1)}{}_{(2)}k_{(2)}{}^{(1)}S(k_{(2)}{}^{(2)})S(h^{(2)})\\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)}k^{(1)}{}_{(1)})h^{(1)}{}_{(2)}k^{(1)}{}_{(2)}S(k^{(2)})S(h^{(2)})\\
&= S((h^{(1)}k^{(1)})_{(1)})(h^{(1)}k^{(1)})_{(2)}S(k^{(2)})S(h^{(2)})\\
&= s_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)}k^{(1)})S(k^{(2)})S(h^{(2)})\\
&= S(k^{(2)}t_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)}k^{(1)}))S(h^{(2)})\\
&= S(k^{(2)}t_R(\varepsilon_R(s_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))k^{(1)})))S(h^{(2)})\\
&= S(t_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))k^{(2)}t_R(\varepsilon_R(k^{(1)})))S(h^{(2)})\\
&= S(k)s_R(\varepsilon_R(h^{(1)}))S(h^{(2)})\\
&= S(k)S(h^{(2)}t_R(\varepsilon_R(h^{(1)})))\\
&= S(k)S(h).
\end{aligned}
$$

Agora note que $1_H = s_R \circ \varepsilon_R(1_H) = S(1_H)1_H = S(1_H)$. Defina

$$
\eta : R^e \longrightarrow H, \quad \eta(r \otimes r') = s_R(r)t_R(r')
$$

e

$$\widehat{\eta}: R^e \longrightarrow H^{op}, \quad \eta\widehat{(r \otimes r')} = s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \cdot_{op} t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r').$$

Mostremos assim, que $S \circ \eta = \widehat{\eta}$. De fato, para quaisquer $r, r' \in R$, temos

$$\begin{aligned}
S(\eta(r \otimes r')) &= S(s_R(r)t_R(r')) \\
&= S(t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r)t_R(r')) \\
&= s_R(r')S(1_H)s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \\
&= t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r')s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \\
&= s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r) \cdot_{op} t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R)(r') \\
&= \widehat{\eta}(r \otimes r').
\end{aligned}$$

Segue portanto, que S é morfismo de R^e-anéis. Analogamente, mostra-se que S é morfismo de L^e-anéis. ■

Sabemos que o oposto-co-oposto de uma álgebra de Hopf H é também uma álgebra de Hopf, com a mesma antípoda S. Se S é bijetiva, então o oposto e o co-oposto são álgebras de Hopf, ver ([11], Remark 4.2.10). Segue um análogo destes fatos para Hopf algebróides.

Proposição 3.9 *Seja $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$ um Hopf algebróide sobre álgebras bases L e R, e H a k-álgebra subjacente. Então, valem as seguintes afirmações:*

(1) *A tripla $((\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}, (\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}, S)$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases R^{op} e L^{op}, respectivamente;*

(2) *Se a antípoda S é bijetiva, então $((\mathcal{H}_R)^{op}, (\mathcal{H}_L)^{op}, S^{-1})$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases R e L, respectivamente, e também, $((\mathcal{H}_L)_{cop}, (\mathcal{H}_R)_{cop}, S^{-1})$ é um Hopf algebróide sobre álgebras bases L^{op} e R^{op}, respectivamente.*

Demonstração: (1) Sabemos da proposição 2.8 e de seu análogo para bialgebróides à esquerda, que $(\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}$ é um R^{op}-biagebróide à esquerda e $(\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}$ é um L^{op}-bialgebróide à direita. A estrutura de $R^{op} \otimes R$-anel em $(\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}$, é dada por (H^{op}_{cop}, s_R, t_R) e a estrutura de R^{op}-coanel em $(\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}$ é dada por $(H_{cop}, \Delta_R^{cop}, \varepsilon_R)$. Simetricamente, a estrutura de $L^{op} \otimes L$-anel em $(\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}$, é dada por (H^{op}_{cop}, s_L, t_L) e a estrutura de L^{op}-coanel em $(\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}$ é dada por $(H_{cop}, \Delta_L^{cop}, \varepsilon_L)$. Mostremos então que valem os axiomas de Hopf algebróide. De fato, o axioma (i)

é trivialmente satisfeito. Para mostrar o axioma (ii), vamos usar que $H \otimes_L H \otimes_R H$ é isomorfo a $H \otimes_{R^{op}} H \otimes_{L^{op}} H$ como k-módulos. Os respectivos balanceamentos nos produtos tensoriais acima foram mostrados na proposição 2.8. Assim, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(\Delta_R^{cop} \otimes_{L^{op}} H)\Delta_L^{cop}(h) &= (\Delta_R^{cop} \otimes_{L^{op}} H)(h_{(2)} \otimes_{L^{op}} h_{(1)}) \\
&= \Delta_R^{cop}(h_{(2)}) \otimes_{L^{op}} h_{(1)} \\
&= {h_{(2)}}^{(2)} \otimes_{R^{op}} {h_{(2)}}^{(1)} \otimes_{L^{op}} h_{(1)} \\
&= h^{(2)} \otimes_{R^{op}} {h^{(1)}}_{(2)} \otimes_{L^{op}} {h^{(1)}}_{(1)},
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(H \otimes_{R^{op}} \Delta_L^{cop})\Delta_R^{cop}(h) &= (H \otimes_{R^{op}} \Delta_L^{cop})(h^{(2)} \otimes_{R^{op}} h^{(1)}) \\
&= h^{(2)} \otimes_{R^{op}} \Delta_L^{cop}(h^{(1)}) \\
&= h^{(2)} \otimes_{R^{op}} {h^{(1)}}_{(2)} \otimes_{L^{op}} {h^{(1)}}_{(1)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $(\Delta_L^{cop} \otimes_{R^{op}} H)\Delta_R^{cop} = (H \otimes_{L^{op}} \Delta_R^{cop})\Delta_L^{cop}$. Agora, para quaisquer $r \in R$, $l \in L$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
S(t_R(r) \cdot_{op} h \cdot_{op} t_L(l)) &= S(t_L(l) h t_R(r)) \\
&= s_R(r) S(h) s_L(l) \\
&= s_L(l) \cdot_{op} S(h) \cdot_{op} s_R(r).
\end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
\mu_{R^{op}}(H \otimes_{R^{op}} S)\Delta_R^{cop}(h) &= \mu_{R^{op}}(H \otimes_{R^{op}} S)(h^{(2)} \otimes_{R^{op}} h^{(1)}) \\
&= h^{(2)} \cdot_{op} S(h^{(1)}) \\
&= S(h^{(1)}) h^{(2)} \\
&= s_L \circ \varepsilon_L(h).
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $\mu_{L^{op}}(H \otimes_{L^{op}} S)\Delta_L^{cop} = s_R \circ \varepsilon_R$. Portanto, concluímos que $((\mathcal{H}_R)^{op}_{cop}, (\mathcal{H}_L)^{op}_{cop}, S)$ é um Hopf algebróide.

(2) Sabemos da Proposição 2.8 que $(\mathcal{H}_R)^{op}$ é um R-bialgebróide à esquerda. A estrutura de R^e-anel em $(\mathcal{H}_R)^{op}$ é dada por (H^{op}, t_R, s_R) e a estrutura de R-coanel em $(\mathcal{H}_R)^{op}$ é dada por $(H, \Delta_R, \varepsilon_R)$. Analogamente, $(\mathcal{H}_L)^{op}$ é um L-bialgebróide à direita. A estrutura de L^e-anel em $(\mathcal{H}_L)^{op}$ é dada por (H^{op}, t_L, s_L) e a estrutura de L-coanel em $(\mathcal{H}_L)^{op}$ é dada por $(H, \Delta_L, \varepsilon_L)$. Mostremos que valem os axiomas de Hopf algebróide. Os axiomas (i) e (ii) são trivialmente satisfeitos. Mostremos

que vale o axioma (iii). Antes, note que se S é antimultiplicativo, temos que S^{-1} também é antimultiplicativo. De fato, para quaisquer h e $k \in H$, temos

$$\begin{aligned}
S^{-1}(hk) &= S^{-1}(S(S^{-1}(h))S(S^{-1}(k))) \\
&= S^{-1}(S(S^{-1}(k)S^{-1}(h))) \\
&= S^{-1}(k)S^{-1}(h).
\end{aligned}$$

Agora note que do axioma (iii) de Hopf algebróide e de 3.4, temos

$$S(t_R(r)) = s_R(r) \quad \text{e} \quad S(t_L(l)) = s_L(l),$$

para quaisquer $l \in L$ e $r \in R$. Segue que

$$S^{-1}(s_R(r)) = S^{-1}(S(t_R(r))) = t_R(r)$$

e

$$S^{-1}(s_L(l)) = S^{-1}(S(t_L(l))) = t_L(l).$$

Portanto, para quaisquer $l \in L$, $r \in R$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
S^{-1}(s_R(r) \cdot_{op} h \cdot_{op} s_L(l)) &= S^{-1}(s_L(l)hs_R(r)) \\
&= S^{-1}(s_R(r))S^{-1}(h)S^{-1}(s_L(l)) \\
&= t_R(r)S^{-1}(h)t_L(l) \\
&= t_L(l) \cdot_{op} S^{-1}(h) \cdot_{op} t_R(r),
\end{aligned}$$

ou seja, vale o axioma (iii) para $((\mathcal{H}_R)^{op}, (\mathcal{H}_L)^{op}, S^{-1})$. Mostremos agora que vale o axioma (iv). De fato, de $h^{(1)}S(h^{(2)}) = s_L \circ \varepsilon_L(h)$, temos

$$\begin{aligned}
S^{-1}(h^{(1)}) \cdot_{op} h^{(2)} &= h^{(2)}S^{-1}(h^{(1)}) \\
&= S^{-1}(h^{(1)}S(h^{(2)})) \\
&= S^{-1}(s_L(\varepsilon_L(h))) \\
&= t_L(\varepsilon_L(h)),
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Analogamente, mostra-se

$$h_{(1)} \cdot_{op} S^{-1}(h_{(2)}) = t_R \circ \varepsilon_R.$$

Segue portanto, que $((\mathcal{H}_R)^{op}, (\mathcal{H}_L)^{op}, S^{-1})$ é um Hopf algebróide. ■

Proposição 3.10 *Seja $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$ um Hopf algebróide. Então, o par $(S, \varepsilon_L \circ s_R)$ é um morfismo de bialgebróides à esquerda $(\mathcal{H}_R)^{op}_{cop} \longrightarrow \mathcal{H}_L$.*

Demonstração: Já sabemos que $\varepsilon_L \circ s_R$ e S são morfismos de álgebras. Agora temos que

$$s_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R) = S \circ t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R) = S \circ s_R$$

e

$$t_L \circ (\varepsilon_L \circ s_R) = s_R = S \circ t_R.$$

Também, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L \circ S(h) &= \varepsilon_L(S(t_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))h_{(1)})) \\
&= \varepsilon_L(S(h_{(1)}) s_L \circ \varepsilon_L(h_{(2)})) \\
&= \varepsilon_L(S(h_{(1)})h_{(2)}) \\
&= \varepsilon_L(s_R \circ \varepsilon_R(h)) \\
&= (\varepsilon_L \circ s_R) \circ \varepsilon_R(h).
\end{aligned}$$

Falta mostrarmos apenas que $\Delta_L \circ S = (S \otimes_L S) \circ \Delta_R^{cop}$. De fato, para todo $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
&\Delta_L(S(h)) \\
&= \Delta_L(S(t_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))h_{(1)})) \\
&= \Delta_L(S(h_{(1)}) s_L(\varepsilon_L(h_{(2)}))) \\
&= S(h_{(1)})_{(1)} s_L(\varepsilon_L(h_{(2)})) \otimes_L S(h_{(1)})_{(2)} \\
&= S(h_{(1)})_{(1)} h_{(2)}{}^{(1)} S(h_{(2)}{}^{(2)}) \otimes_L S(h_{(1)})_{(2)} \\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(1)} h^{(1)}{}_{(2)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(2)} \\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(1)} t_L(\varepsilon_L(h^{(1)}{}_{(2)(2)})) h^{(1)}{}_{(2)(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(2)} \\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(1)} h^{(1)}{}_{(2)(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(2)} s_L(\varepsilon_L(h^{(1)}{}_{(2)(2)})) \\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(1)} h^{(1)}{}_{(2)(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(2)} h^{(1)}{}_{(2)(2)}{}^{(1)} S(h^{(1)}{}_{(2)(2)}{}^{(2)}) \\
&= S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(1)} h^{(1)}{}_{(2)}{}^{(1)}{}_{(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)}{}_{(1)})_{(2)} h^{(1)}{}_{(2)}{}^{(1)}{}_{(2)} S(h^{(1)}{}_{(2)}{}^{(2)}) \\
&= S(h^{(1)(1)}{}_{(1)})_{(1)} h^{(1)(1)}{}_{(2)(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)(1)}{}_{(1)})_{(2)} h^{(1)(1)}{}_{(2)(2)} S(h^{(1)(2)}) \\
&= (S(h^{(1)(1)}{}_{(1)}) h^{(1)(1)}{}_{(2)})_{(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L (S(h^{(1)(1)}{}_{(1)}) h^{(1)(1)}{}_{(2)})_{(2)} S(h^{(1)(2)}) \\
&= (s_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)(1)}))_{(1)} S(h^{(2)}) \otimes_L (s_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)(1)}))_{(2)} S(h^{(1)(2)}) \\
&= S(h^{(2)}) \otimes_L s_R \circ \varepsilon_R(h^{(1)(1)}) S(h^{(1)(2)})
\end{aligned}$$

$$= S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)(2)} t_R(\varepsilon_R(h^{(1)(1)})))$$
$$= S(h^{(2)}) \otimes_L S(h^{(1)})$$
$$= (S \otimes_L S)(h^{(2)} \otimes_L h^{(1)})$$
$$= (S \otimes_L S)\Delta_R^{cop}(h).$$

■

3.3 Noções Alternativas

Existe consenso na literatura de que a estrutura que melhor substitui uma biálgebra, para o caso de uma álgebra base não-comutativa, é um bialgebróide. Já para substituir uma álgebra de Hopf, existem algumas discussões acerca de qual estrutura melhor generaliza. Nesta seção definimos duas noções, diferentes da noção de Hopf algebróide, que também generalizam uma álgebra de Hopf.

3.3.1 Hopf Algebróides de Lu

A seguinte definição, citada em ([18], Definição 4.1), usa apenas uma estrutura de bialgebróide, enquanto que na definição de Hopf algebróide, usa-se duas estruturas. Embora o primeiro axioma da antípoda na definição de Hopf algebróide pode ser formulado também neste caso, algumas condições adicionais são necessárias para formular o segundo axioma.

Definição 3.11 *Seja B um bialgebróide à esquerda sobre L, uma k-álgebra. Dizemos que B é um* ***Hopf algebróide de Lu*** *se existem $S : B \longrightarrow B$ e uma seção de k-módulos ξ, para o epimorfismo canônico $\pi : B \otimes_k B \longrightarrow B \otimes_L B$, ou seja, $\pi \circ \xi = Id_{B \otimes_L B}$, tais que, os seguintes axiomas são satisfeitos:*

(i) $S \circ t = s$;

(ii) $\mu_B \circ (S \otimes_L B) \circ \Delta = t \circ \varepsilon \circ S$;

(iii) $\mu_B \circ (B \otimes_L S) \circ \xi \circ \Delta = s \circ \varepsilon$.

Nenhuma das noções, Hopf algebróide e Hopf algebróide de Lu, é mais geral do que a outra. De fato, um exemplo de Hopf algebróide que não é Hopf algebróide de Lu é construído a seguir.

Exemplo 3.12 *Seja k um corpo com característica diferente de dois. Considere a biálgebra de grupo $k\mathbb{Z}_2$, com estrutura de k-coanel dada por $\Delta_L(t) = t \otimes t$ e $\varepsilon_L(t) = 1$, em que $t^2 = 1$ e como um k-bialgebróide à esquerda, com estrutura de k^e-anel $(k\mathbb{Z}_2, \eta, \eta)$, em que $\eta : k \longrightarrow k\mathbb{Z}_2$ $\lambda \longmapsto \lambda 1$. Podemos também, munir $k\mathbb{Z}_2$ com uma estrutura de k-bialgebróide à direita, com a mesma estrutura de k^e-anel e com estrutura de k-coálgebra $(k\mathbb{Z}_2, \Delta_R, \varepsilon_R)$, em que $\Delta_R(t) = -t \otimes t$, $\Delta_R(1) = 1 \otimes 1$ e $\varepsilon_R(t) = -1$ e $\varepsilon_R(1) = 1$. Estas estruturas junto com a antípoda $S(t) := -t$ e $S(1) := 1$, constituem um Hopf algebróide, porém não satisfaz os axiomas de Hopf algebróide de Lu.*

De fato, mostremos que os axiomas de Hopf algebróide são satisfeitos. Claro que a condição (i) é trivialmente satisfeita. Agora note que

$$\begin{aligned}
(\Delta_L \otimes_k k\mathbb{Z}_2)\Delta_R(t) &= (\Delta_L \otimes_k k\mathbb{Z}_2)(-t \otimes t) \\
&= -t \otimes t \otimes t,
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
(k\mathbb{Z}_2 \otimes_k \Delta_R)\Delta_L(t) &= (k\mathbb{Z}_2 \otimes_k \Delta_R)(t \otimes t) \\
&= t \otimes -t \otimes t \\
&= -t \otimes t \otimes t.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $(\Delta_R \otimes_k k\mathbb{Z}_2)\Delta_L = (k\mathbb{Z}_2 \otimes_k \Delta_L)\Delta_R$. Agora temos

$$\begin{aligned}
\mu(k\mathbb{Z}_2 \otimes_k S)\Delta_R(t) &= -tS(t) = t\,t \\
&= t^2 = 1 = \varepsilon_L(t)1 \\
&= \eta \circ \varepsilon_L(t),
\end{aligned}$$

também temos

$$\begin{aligned}
\mu(S \otimes_k k\mathbb{Z}_2)\Delta_L(t) &= S(t)t = -t\,t \\
&= -t^2 = \varepsilon_R(t)1 \\
&= \eta \circ \varepsilon_R(t).
\end{aligned}$$

Pela k-linearidade de S, o axioma (iii) é satisfeito. Agora perceba que, a projeção canônica

$$\pi : k\mathbb{Z}_2 \otimes_k k\mathbb{Z}_2 \longrightarrow k\mathbb{Z}_2 \otimes_L k\mathbb{Z}_2$$

é a identidade, desta forma, a única possibilidade para a seção

$$\xi : k\mathbb{Z}_2 \otimes_L k\mathbb{Z}_2 \longrightarrow k\mathbb{Z}_2 \otimes_k k\mathbb{Z}_2,$$

é a identidade. Portanto,

$$\mu(k\mathbb{Z}_2 \otimes_k S)\Delta_L(t) = -1 \neq 1 = \eta \circ \varepsilon_L(t),$$

isto contradiz o fato que $(\mathcal{H}_L, S)$ é um Hopf algebróide de Lu.

3.3.2 $\times_R$-Hopf Álgebra

Sabemos da teoria de álgebras de Hopf que os coinvariantes do comódulo regular de uma biálgebra H, sobre um anel comutativo k, são precisamente os múltiplos escalares da unidade. H é uma álgebra de Hopf se, e somente se, H é uma H-extensão Galois de k, ou seja, a aplicação $Can : H \otimes_K H \longrightarrow H \otimes_k H, \quad h \otimes k \longmapsto h_{(1)} \otimes h_{(2)}k$, é bijetiva. De fato, existe um isomorfismo em que a primeira álgebra é por composição e a segunda por convolução

$$^{H}Hom_H(H \otimes_k H, H \otimes_k H) \cong Hom_k(H, H).$$

Tal isomorfismo é dado por

$$\begin{array}{rccc} \widehat{(\ )}: & ^{H}Hom_H(H \otimes_k H, H \otimes_k H) & \longrightarrow & Hom_k(H, H) \\ & F & \longmapsto & \widehat{F}, \end{array}$$

tal que $\widehat{F}(h) = (\varepsilon \otimes H)F(h \otimes 1_H)$. Com inversa definida por

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{(\ )}: & Hom_k(H, H) & \longrightarrow & ^{H}Hom_H(H \otimes_k H, H \otimes_k H) \\ & f & \longmapsto & \widetilde{f}, \end{array}$$

tal que $\widetilde{f}(h \otimes k) = h_{(1)} \otimes f(h_{(2)})k$, para quaisquer $h, k \in H$. Este isomorfismo relaciona a inversa da canônica com a antípoda. Motivado por esta caracterização de álgebras de Hopf, Schauenburg em [25] propôs a definição de $\times_R$-Hopf álgebra. Para entendermos essa definição, precisamos de algumas definições e resultados da teoria de categorias.

Definição 3.13 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Uma* ***adjunção*** *de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, G, ϕ), em que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ são funtores e $\phi_{XY} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ é uma família de isomorfismos naturais, para quaisquer $X \in \mathcal{C}$ e $Y \in \mathcal{D}$. Neste caso, dizemos que F é* ***adjunto à esquerda*** *de G e que G é* ***adjunto à direita*** *de F.*

Definição 3.14 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Para $Y \in \mathcal{C}$, se o funtor $- \otimes Y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ é adjunto à esquerda, denotamos seu adjunto à* *direita por $hom_{\mathcal{C}}(Y,-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ e chamamos de **hom-funtor interno à direita**. Se o funtor $-\otimes Y$ é adjunção à esquerda para todo $Y \in \mathcal{C}$, então dizemos que $\mathcal{C}$ é fechada à direita.*

Sejam X, Y objetos em $\mathcal{C}$. Por resultados de funtores adjuntos, um hom-funtor interno à direita $hom_{\mathcal{C}}(Y,-)$ vem com um morfismo adjunção $ev : hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \otimes Y \longrightarrow X$, com a seguinte propriedade universal: Para cada $Z \in \mathcal{C}$ e $e : Z \otimes Y \longrightarrow X$, existe único $f : Z \longrightarrow hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$, tal que $e = ev \circ (f \otimes Y)$. Tal propriedade universal, é válida para qualquer adjunção (F, G, ϕ). A demonstração deste fato, pode ser encontrada em ([29], Teorema 2.28).

Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Considere a categoria dos R^e-módulos à esquerda ${}_{R^e}\mathcal{M}$, esta categoria pode ser vista como a categoria dos R-bimódulos, pois se $M \in {}_{R^e}\mathcal{M}$, para quaisquer $r, r' \in R$ e $m \in M$, definimos $r \cdot m \cdot \overline{r'} = (r \otimes \overline{r'})m$. Então ${}_{R^e}\mathcal{M}$ é monoidal com o produto tensorial $\otimes_R$ e unidade monoidal R. É possível mostrar que a categoria monoidal $({}_{R^e}\mathcal{M}, \otimes_R)$ é fechada, com hom-funtor interno $hom_{{}_{R^e}\mathcal{M}}(N,P) = {}_{R^{op}}Hom(N,P)$, para quaisquer $N, P \in {}_{R^e}\mathcal{M}$, em que a estrutura de R^e-módulo à esquerda é dada por

$$((r' \otimes \overline{r})f)(n) = r'f(rn),$$

para quaisquer $r, r' \in R$, $f \in {}_{R^{op}}Hom(N,P)$ e $n \in N$.

Se H é uma álgebra de Hopf sobre k, então o k-módulo $Hom_k(V,W)$ de morfismos k-lineares, possui uma estrutura canônica de H-módulo à esquerda, definida por $(hf)(v) = h_{(1)}f(S(h_{(2)})v)$, para quaisquer $h \in H$, $f \in Hom_k(V,W)$ e $v \in V$. Com esta estrutura, $Hom_k(V,W)$ define um hom-funtor interno na categoria dos H-módulos à esquerda. Agora, em contrapartida, uma biálgebra não precisa ser uma álgebra de Hopf para que sua categoria de módulos seja fechada. Porém, a próxima proposição mostrará que a categoria de módulos sobre uma biálgebra B ou até mesmo sobre um R-bialgebróide à esquerda é fechada.

Proposição 3.15 *Seja B um R-bialgebróide à esquerda. Então a categoria ${}_B\mathcal{M}$, dos B-módulos à esquerda, é fechada à direita com hom-funtor interno à direita dado, para quaisquer $N, P \in_B \mathcal{M}$, por*

$$hom_{{}_B\mathcal{M}}(N,P) =_B Hom(B \otimes_R N, P),$$

em que $B \otimes_R N$ é um B-bimódulo com estrutura de B-módulo à esquerda dada, para quaisquer $b, b' \in B$ e $n \in N$, por

$$b \triangleright (b' \otimes_R n) = b_{(1)}b' \otimes_R b_{(2)} \triangleright n$$

e estrutura de B-módulo à direita dada por

$$(b' \otimes_R n) \triangleleft b = b'b \otimes_R n.$$

Demonstração: Primeiro, note que para quaisquer $M, N,\ P \in {}_B\mathcal{M}$, $m \in M$ e $n \in N$ temos que

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & M \otimes_R N & \longrightarrow & (B \otimes_R N) \otimes_B M \\ & m \otimes_R n & \longmapsto & (1_B \otimes_R n) \otimes_B m, \end{array}$$

é um isomorfismo de B-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $b \in B$, defina

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & (B \otimes_R N) \otimes_B M & \longrightarrow & M \otimes_R N \\ & (b \otimes_R n) \otimes_B m & \longmapsto & b \triangleright m \otimes_R n. \end{array}$$

Agora, lembre que a estrutura de R-bimódulo em um B-módulo à esquerda qualquer M, é dada, para quaisquer $r, r' \in R$ e $m \in M$, por

$$r \cdot m \cdot r' = s(r)t(r') \triangleright m.$$

Mostremos que φ está bem definida. De fato, φ é R-balanceada,

$$\begin{aligned} \varphi(m \cdot r, n) &= (1_B \otimes_R n) \otimes m \cdot r \\ &= (1_B \otimes_R n) \otimes t(r) \triangleright m \\ &= (1_B \otimes_R n) \triangleleft t(r) \otimes m \\ &= (t(r)1_B \otimes_R n) \otimes m \\ &= (1_B \cdot r \otimes_R n) \otimes m \\ &= (1_B \otimes_R r \cdot n) \otimes m \\ &= \varphi(m, r \cdot n). \end{aligned}$$

Portanto, existe única $\varphi : M \otimes_R N \longrightarrow (B \otimes_R N) \otimes_B M$, que satisfaz $\varphi(m \otimes_R n) = (1_B \otimes_R n) \otimes_B m$, para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$. Mostremos que φ é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $b \in B$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(b \triangleright (m \otimes_R n)) &= \varphi(b_{(1)} \triangleright m \otimes_R b_{(2)} \triangleright n) \\ &= (1_B \otimes_R b_{(2)} \triangleright n) \otimes_B b_{(1)} \triangleright m \\ &= (1_B \otimes_R b_{(2)} \triangleright n) \triangleleft b_{(1)} \otimes_B m \\ &= (b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n) \otimes_B m \\ &= b \triangleright (1_B \otimes_R n) \otimes_B m \end{aligned}$$

$$= b \triangleright \varphi(m \otimes_R n).$$

Mostremos agora que φ^{-1} está bem definida. De fato, para quaisquer $r \in R$, $m \in M$, $n \in N$ e $b, b' \in B$, temos que φ^{-1} é R-balanceada e B-balanceada

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}((b \cdot r,\, n),\, m) &= (b \cdot r) \triangleright m \otimes_R n \\
&= t(r)b \triangleright m \otimes_R n \\
&= t(r) \triangleright (b \triangleright m) \otimes_R n \\
&= (b \triangleright m) \cdot r \otimes_R n \\
&= (b \triangleright m) \otimes_R r \cdot n \\
&= \varphi^{-1}((b, r \cdot n),\, m),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}((b,\, n),\, b' \triangleright m) &= bb' \triangleright m \otimes_R n \\
&= \varphi^{-1}((bb' \otimes_R n),\, m) \\
&= \varphi^{-1}((b \otimes_R n) \triangleleft b',\, m).
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \varphi^{-1})((b \otimes_R n) \otimes_B m) &= \varphi(\varphi^{-1}((b \otimes_R n) \otimes_B m)) \\
&= \varphi(b \triangleright m \otimes_R n) \\
&= (1_B \otimes_R n) \otimes_B b \triangleright m \\
&= (1_B \otimes_R n) \triangleleft b \otimes_B m \\
&= (b \otimes_R n) \otimes_B m,
\end{aligned}$$

por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
(\varphi^{-1} \circ \varphi)(m \otimes_R n) &= \varphi^{-1}((1_B \otimes_R n) \otimes_B m) \\
&= 1_B \triangleright m \otimes_R n \\
&= m \otimes_R n.
\end{aligned}$$

Defina agora, para quaisquer $M, N,\, P \in {}_B\mathcal{M}$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\theta: & {}_BHom(M \otimes_R N,\, P) & \longrightarrow & {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M,\, P) \\
& f & \longmapsto & \theta(f) = f \circ \varphi^{-1}.
\end{array}$$

Claro que $\theta(f)$ é morfismo de B-módulos à esquerda, pois é a composição de outros dois. Agora defina $\theta^{-1}(g) = g \circ \varphi$, para todo $g \in {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M)$. Desta forma, temos

$$\theta(\theta^{-1}(g)) = \theta^{-1}(g) \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = g.$$

Analogamente, $\theta^{-1}(\theta(f)) = f$. Segue portanto, o isomorfismo de B-módulos à esquerda

$$_BHom(M \otimes_R N,\, P) \cong {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M,\, P).$$

Mostremos agora que, para quaisquer $M, N, P \in {}_B\mathcal{M}$ e $m \in M$, $n \in N$, $b \in B$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \widehat{(\ )} : {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M,\, P) & \longrightarrow & {}_BHom(M, {}_BHom(B \otimes_R N,\, P)) \\ F & \longmapsto & \widehat{F}, \end{array}$$

em que

$$\begin{array}{rccc} \widehat{F} : & M & \longrightarrow & {}_BHom(B \otimes_R N,\, P) \\ & m & \longmapsto & \widehat{F}(m), \end{array}$$

tal que $\widehat{F}(m)(b \otimes_R n) = F((b \otimes_R n) \otimes_B m)$, é um isomorfismo de B-módulos à esquerda, com a estrutura de B-módulo à esquerda em $_BHom(B \otimes_R N, P)$ dada por $(b \triangleright f)(b' \otimes_R n) = f(b'b \otimes_R n)$, para quaisquer $b, b' \in B$ e $n \in N$. Segue da maneira como foi definido, que para todo $m \in M$, $\widehat{F}(m)$ é R-balanceado. Mostremos então que é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$ e $b, b' \in B$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{F}(m)(b \triangleright (b' \otimes_R n)) &= F(b \triangleright (b' \otimes_R n) \otimes_B m) \\ &= b \triangleright F((b' \otimes_R n) \otimes_B m) \\ &= b \triangleright \widehat{F}(m)(b' \otimes_R n) \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\widehat{F}$ é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato, temos

$$\begin{aligned} \widehat{F}(b \triangleright m)(b' \otimes_R n) &= F((b' \otimes_R n) \otimes_B b \triangleright m) \\ &= F((b' \otimes_R n) \triangleleft b \otimes_B m) \\ &= F((b'b \otimes_R n) \otimes_B m) \\ &= \widehat{F}(m)(b'b \otimes_R n) \\ &= b \triangleright \widehat{F}(m)(b' \otimes_R n) \\ &= (b \triangleright \widehat{F})(m)(b' \otimes_R n). \end{aligned}$$

Agora defina

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{(\ )} : {}_BHom(M,\, {}_BHom(B \otimes_R N,\, P)) & \longrightarrow & {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M,\, P) \\ G & \longmapsto & \widetilde{G}, \end{array}$$

tal que $\widetilde{G}((b \otimes_R n) \otimes_B m) = G(m)(b \otimes_R n)$, para quaisquer $b \in B$, $m \in M$ e $n \in N$. De maneira análoga a $\widehat{(\ )}$ mostra-se que $\widetilde{(\ )}$ está bem definida. Desta forma, para quaisquer $m \in M$, $n \in N$, $b \in B$, e também para quaisquer $G \in {}_BHom(M, {}_BHom(B \otimes_R N, P))$ e $F \in {}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M, P)$, temos

$$\begin{aligned}\widehat{\widetilde{G}}(m)(b \otimes_R n) &= \widetilde{G}((b \otimes_R n) \otimes_B m)\\ &= G(m)(b \otimes_R n),\end{aligned}$$

segue que $\widehat{\widetilde{G}} = G$, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\widetilde{\widehat{F}}((b \otimes_R n) \otimes_B m) &= \widehat{F}(m)(b \otimes_R n)\\ &= F((b \otimes_R n) \otimes_B m),\end{aligned}$$

segue portanto, $\widetilde{\widehat{F}} = F$. Concluímos assim, que

$${}_BHom((B \otimes_R N) \otimes_B M, P) \cong {}_BHom(M, {}_BHom(B \otimes_R N, P)).$$

Ou seja,

$${}_BHom(M \otimes_R N, P) \cong {}_BHom(M, {}_BHom(B \otimes_R N, P)).$$

■

Para salvar a ideia de que uma álgebra de Hopf está relacionada com o fato de sua categoria de módulos ser fechada, precisamos observar que o hom-funtor interno na categoria de módulos sobre uma álgebra de Hopf, está relacionado com o hom-funtor interno na categoria subjacente de k-módulos. Esta relação se dá via a propriedade de que, o funtor esquecimento ${}_H\mathcal{M} \longrightarrow {}_k\mathcal{M}$ preserva hom-funtores internos, no sentido da próxima definição.

Definição 3.16 *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor monoidal entre categorias monoidais fechadas à direita. Para $X, Y \in \mathcal{C}$, considere*

$$\xi : \mathcal{F}(hom_{\mathcal{C}}(Y, X)) \longrightarrow hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X)),$$

o único morfismo para o qual o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(hom_{\mathcal{C}}(Y, X)) \otimes \mathcal{F}(Y) \arrow[r, "\xi \otimes \mathcal{F}(Y)"] \arrow[d, "\cong"'] & hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X)) \otimes \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "ev'"] \\
\mathcal{F}(hom_{\mathcal{C}}(Y, X) \otimes Y) \arrow[r, "\mathcal{F}(ev)"'] & \mathcal{F}(X).
\end{tikzcd}$$

Dizemos que $\mathcal{F}$ ***preserva hom-funtores internos*** *se para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, ξ é um isomorfismo.*

Apresentamos a seguir o Lema de Yoneda, que será usado na prova do próximo teorema. Para tanto, considere $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto fixo em $\mathcal{C}$. Definimos o funtor $L_X : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{Set}$, para todo $Y \in \mathcal{C}$, por $L_X = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Além disso, para cada morfismo $\alpha : Y \longrightarrow Z$, definimos

$$\begin{array}{rccc} L_X(\alpha): & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & f & \longmapsto & \alpha \circ f. \end{array}$$

Desta forma, temos o seguinte lema.

Lema 3.17 *(Lema de Yoneda) Sejam $F : \mathcal{C} \longrightarrow \underline{Set}$ um funtor e X um objeto em $\mathcal{C}$. Então o conjunto das transformações naturais $Nat(L_X, F)$ está em bijeção com o conjunto $F(X)$ pela função*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Nat(L_X,F) & \longrightarrow & F(X) \\ & \mu & \longmapsto & \mu_X(I_X), \end{array}$$

em que I_X é o morfismo identidade de X.

Proposição 3.18 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X, Y objetos em $\mathcal{C}$. Então L_X é isomorfo a L_Y se, e somente se, X é isomorfo a Y.*

As demonstrações do Lema de Yoneda e da proposição 3.18, podem serem encontradas em [29], Lema 2.23 e Proposição 2.24, respectivamente.

Nestas condições, estamos prontos para ver a definição (teorema) de $\times_R$-Hopf álgebra.

Teorema 3.19 *(e* ***Definição****) Seja B um R-bialgebróide à esquerda. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *O funtor esquecimento ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_{R^e}\mathcal{M}$ preserva hom-funtores internos à direita.*

(2) *A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} Can: & B \otimes_{R^{op}} B & \longrightarrow & B \otimes_R B \\ & b \otimes_{R^{op}} b' & \longmapsto & b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} b', \end{array}$$

*é uma bijeção. Neste caso, dizemos que B é uma $\times_R$-**Hopf álgebra**.*

Demonstração: Primeiramente, vamos ver que Can está bem definida. Para tanto, as estruturas de B-módulo à esquerda em $B \otimes_{R^{op}} B$ e R^{op}-bimódulo em B são dadas, para quaisquer $b, b', c \in B$ e $\overline{r}, \overline{r'} \in R^{op}$, por

$$b \triangleright (b' \otimes_{R^{op}} c) = bb' \otimes_{R^{op}} c$$

e

$$\overline{r} \cdot b \cdot \overline{r'} = t(r) b\, t(r'),$$

respectivamente. Assim, temos que Can é R^{op}-balanceada,

$$\begin{aligned}
Can(b \cdot \overline{r}, b') &= Can(b\, t(r), b') \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} t(r) b' \\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} (\overline{r} \cdot b') \\
&= Can(b, \overline{r} \cdot b'),
\end{aligned}$$

usamos na segunda linha o seguinte fato,

$$\Delta(bt(r)) = \Delta(b)\Delta(t(r)) = (b_{(1)} \otimes_R b_{(2)})(1_B \otimes_R t(r)) = b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} t(r).$$

Temos também que Can é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned}
Can(b \triangleright (b' \otimes_{R^{op}} c)) &= Can(bb' \otimes_{R^{op}} c) \\
&= b_{(1)} b'_{(1)} \otimes_R b_{(2)} b'_{(2)} c \\
&= b \triangleright (b'_{(1)} \otimes_R b'_{(2)} c) \\
&= b \triangleright Can(b' \otimes_{R^{op}} c).
\end{aligned}$$

Agora, note que se Can for uma bijeção, então para $N \in {}_B\mathcal{M}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
Can_N : & B \otimes_{R^{op}} N & \longrightarrow & B \otimes_R N \\
& b \otimes_{R^{op}} n & \longmapsto & b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n,
\end{array}$$

também é uma bijeção. De fato, considere as bijeções

$$\begin{array}{rccc}
\phi : & B \otimes_{R^{op}} N & \longrightarrow & B \otimes_{R^{op}} B \otimes_B N \\
& b \otimes_{R^{op}} n & \longmapsto & b \otimes_{R^{op}} 1_B \otimes_B n,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
\psi : & B \otimes_R B \otimes_B N & \longrightarrow & B \otimes_R N \\
& b \otimes_R b' \otimes_B n & \longmapsto & b \otimes_R b' \triangleright n.
\end{array}$$

e também $Can \otimes_B N$. Dessa forma, para quaisquer $b \in B$ e $n \in N$, temos

$$(\psi \circ (Can \otimes_B N) \circ \phi)(b \otimes_{R^{op}} n) = \psi(Can \otimes_B N)(\phi(b \otimes_{R^{op}} n))$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(Can \otimes_B N)(b \otimes_{R^{op}} 1_B \otimes_B n)\\
&= \psi(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \otimes_B n)\\
&= b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n\\
&= Can_N(b \otimes_{R^{op}} n).
\end{aligned}
$$

Segue que Can_N é bijeção. Concluímos que Can é bijeção se, e somente se, Can_N é bijeção. Pois se Can_N é bijeção, segue que Can também é, basta tomar $N = B$. Agora, sejam $N, P \in {}_B\mathcal{M}$. Verifiquemos que para o hom-funtor interno em ${}_B\mathcal{M}$, a avaliação

$$ev : {}_BHom(B \otimes_R N, P) \otimes_R N \longrightarrow P,$$

é dada, para quaisquer $g \in {}_BHom(B \otimes_R N, P)$ e $n \in N$, por

$$ev(g \otimes_R n) = g(1_B \otimes_R n).$$

Mostremos que ev está bem definida. De fato, para quaisquer $g \in {}_BHom(B \otimes_R N, P)$, $n \in N$ e $b \in B$, defina

$$\widetilde{ev} : {}_BHom(B \otimes_R N, P) \times N \longrightarrow P,$$

tal que $\widetilde{ev}(g, n) = g(1_B \otimes_R n)$ e mostremos que $\widetilde{ev}$ é R-balanceada,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{ev}(g \cdot r, n) &= \widetilde{ev}(t(r) \triangleright g, n)\\
&= (t(r) \triangleright g)(1_B \otimes_R n)\\
&= g(t(r) \otimes_R n)\\
&= g(1_B \cdot r \otimes_R n)\\
&= g(1_B \otimes_R r \cdot n)\\
&= \widetilde{ev}(g, r \cdot n).
\end{aligned}
$$

Portanto, existe uma única

$$ev : {}_BHom(B \otimes_R N, P) \otimes_R N \longrightarrow P,$$

que satisfaz $ev(g \otimes_R n) = g(1_B \otimes_R n)$. Agora note que ev é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato, temos

$$
\begin{aligned}
ev(b \triangleright (g \otimes_R n)) &= ev(b_{(1)} \triangleright g \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\
&= (b_{(1)} \triangleright g)(1_B \otimes_B b_{(2)} \triangleright n)\\
&= g(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\
&= g(b \triangleright (1_B \otimes_R n))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&= b \triangleright g(1_B \otimes_R n)\\&= b \triangleright ev(g \otimes_R n).\end{aligned}$$

Agora, para cada $Z \in {}_B\mathcal{M}$ e $e : Z \otimes_R N \longrightarrow P$, defina

$$f : Z \longrightarrow_B Hom(B \otimes_R N, P),$$

tal que

$$f(z) : B \otimes_R N \longrightarrow P, \ \ b \otimes_R n \longmapsto e(b \triangleright z \otimes_R n),$$

para quaisquer $z \in Z$, $b \in B$ e $n \in N$. Mostremos que f está bem definida. Para tanto, note que $f(z) \in {}_B Hom(B \otimes_R N, P)$ $\forall z \in Z$. De fato, para quaisquer $r \in R$, $b, b' \in B$ e $n \in N$, defina $\widetilde{f(z)} : B \times N \longrightarrow P$ tal que $\widetilde{f(z)}(b, n) = e(b \triangleright z \otimes_R n)$, para $z \in Z$ fixo e mostremos que $\widetilde{f(z)}$ é R-balanceada,

$$\begin{aligned}\widetilde{f(z)}(b \cdot r, n) &= \widetilde{f(z)}(t(r)b, n)\\&= e(t(r)b \triangleright z \otimes_R n)\\&= e(t(r) \triangleright (b \triangleright z) \otimes_R n)\\&= e((b \triangleright z) \cdot r \otimes_R n)\\&= e((b \triangleright z) \otimes_R r \cdot n)\\&= \widetilde{f(z)}(b, r \cdot n).\end{aligned}$$

Portanto, existe uma única $f(z) : B \otimes_R N \longrightarrow P$, que satisfaz $f(z) = e(b \triangleright z \otimes_R n)$, para quaisquer $b \in B$ e $n \in N$. Agora note que $f(z)$ é morfismo de B-módulos à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned}f(z)(b \triangleright (b' \otimes_R n)) &= f(z)(b_{(1)}b' \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\&= e(b_{(1)}b' \triangleright z \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\&= e(b_{(1)} \triangleright (b' \triangleright z) \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\&= e(b \triangleright ((b' \triangleright z) \otimes_R n))\\&= b \triangleright e((b' \triangleright z) \otimes_R n)\\&= b \triangleright f(z)(b' \otimes_R n).\end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}ev(f \otimes_R N)(z \otimes_R n) &= ev(f(z) \otimes_R n)\\&= f(z)(1_B \otimes_R n)\\&= e(1_B \triangleright z \otimes_R n)\end{aligned}$$

$$= e(z \otimes_R n).$$

Agora, podemos identificar o hom-funtor interno ${}_{R^{op}}Hom(N,P)$ em ${}_{R^e}\mathcal{M}$, canonicamente com ${}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P)$. Antes, note que a estrutura de R^{op}-bimódulo em qualquer B-módulo à esquerda N é dada, para quaisquer $\overline{r}, \overline{r'} \in R^{op}$ e $n \in N$, por $\overline{r} \cdot n \cdot \overline{r'} = t(r)s(r') \triangleright n$. Portanto, defina $\varphi : {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P) \longrightarrow {}_{R^{op}}Hom(N,P)$, tal que $\varphi(f)(n) = f(1_B \otimes_R n)$, para quaisquer $f \in {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P)$ e $n \in N$. Mostremos que $\varphi(f)$ é morfismo de R^{op}-módulos à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(\overline{r} \cdot n) &= f(1_B \otimes_{R^{op}} \overline{r} \cdot n) \\
&= f(1_B \cdot \overline{r} \otimes_{R^{op}} n) \\
&= f(t(r) \otimes_{R^{op}} n) \\
&= f(t(r) \triangleright (1_B \otimes_{R^{op}} n)) \\
&= t(r) \triangleright f(1_B \otimes_{R^{op}} n) \\
&= t(r) \triangleright \varphi(f)(n),
\end{aligned}$$

pois a estrutura de B-módulo à esquerda em $B \otimes_{R^{op}} N$ é dada, para quaisquer $b, b' \in B$ e $n \in N$, por $b \triangleright (b' \otimes_{R^{op}} n) = bb' \otimes_{R^{op}} n$. Segue que $\varphi(f)$ está bem definida. Agora, para quaisquer $g \in {}_{R^{op}}Hom(N,P)$, $b \in B$ e $n \in N$, defina

$$\varphi^{-1} : {}_{R^{op}}Hom(N,P) \longrightarrow {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P),$$

tal que $\varphi^{-1}(g)(b \otimes_{R^{op}} n) = b \triangleright g(n)$. Mostremos que φ^{-1} está bem definida. Para tanto, para quaisquer $b \in B$, $n \in N$ e $g \in {}_{R^{op}}Hom(N,P)$ fixo, defina $\widetilde{\varphi^{-1}(g)} : B \times N \longrightarrow P$, tal que $\widetilde{\varphi^{-1}(g)}(b,n) = b \triangleright g(n)$. Mostremos que $\widetilde{\varphi^{-1}(g)}$ é R-balanceada, de fato temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi^{-1}(g)}(b \cdot \overline{r}, n) &= bt(r) \triangleright g(n) \\
&= b \triangleright (t(r) \triangleright g(n)) \\
&= b \triangleright g(t(r) \triangleright n) \\
&= b \triangleright g(\overline{r} \cdot n) \\
&= \widetilde{\varphi^{-1}(g)}(b, \overline{r} \cdot n).
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma única $\varphi^{-1}(g) : B \otimes_R N \longrightarrow P$, que satisfaz $\varphi^{-1}(g)(b \otimes_{R^{op}} n) = b \triangleright g(n)$. Assim, temos

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(g)(n) = \varphi(\varphi^{-1}(g))(n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi^{-1}(g)(1_B \otimes_{R^{op}} n)\\
&= 1_B \triangleright g(n)\\
&= g(n),
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1} \circ \varphi(f)(b \otimes_{R^{op}} n) &= \varphi^{-1}(\varphi(f))(b \otimes_{R^{op}} n)\\
&= b \triangleright \varphi(f)(n)\\
&= b \triangleright f(1_B \otimes_{R^{op}} n)\\
&= f(b \otimes_{R^{op}} n).
\end{aligned}
$$

Usando essa identificação, o morfismo avaliação em ${}_{R^e}\mathcal{M}$,

$$ev' : {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P) \otimes_R N \longrightarrow P,$$

é dado, para quaisquer $f \in {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P)$ e $n \in N$, por

$$ev'(f \otimes_R n) = f(1_B \otimes_{R^{op}} n).$$

Mostremos agora que o funtor esquecimento ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_{R^e}\mathcal{M}$ preserva hom-funtores internos. Para tanto, considere a transformação natural

$$\xi_P : {}_B Hom(B \otimes_R N, P) \longrightarrow {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P),$$

tal que $\xi_P(f)(b \otimes_{R^{op}} n) = f(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)$. Perceba que para quaisquer $f \in {}_B Hom(B \otimes_R N, P)$, $n \in N$ e $b \in B$, temos

$$
\begin{aligned}
\xi_P(f)(b \otimes_{R^{op}} n) &= f(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \triangleright n)\\
&= f(Can_N(b \otimes_{R^{op}} n)),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\xi_P(f) = f \circ Can_N$. Agora note que o seguinte diagrama equivalente ao da Definição 3.16 para o funtor esquecimento ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_{R^e}\mathcal{M}$ e para os hom-funtores internos ${}_B Hom(B \otimes_R N, P)$ e ${}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, p)$, em ${}_B\mathcal{M}$ e ${}_{R^e}\mathcal{M}$, respectivamente, é comutativo

$$
\begin{tikzcd}
{}_B Hom(B \otimes_R N, P) \otimes_R N \arrow[r, "\xi_P \otimes_R N"] \arrow[d, "Id"'] & {}_B Hom(B \otimes_{R^{op}} N, P) \otimes_R N \arrow[d, "ev'"] \\
{}_B Hom(B \otimes_R N, P) \otimes_R N \arrow[r, "ev"'] & P.
\end{tikzcd}
$$

De fato, para quaisquer $f \in {}_B Hom(B \otimes_R N, P)$ e $n \in N$, temos

$$ev'(\xi_P \otimes_R N)(f \otimes_R n) = ev'(\xi_P(f) \otimes_R n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \xi_P(f)(1_B \otimes_{R^{op}} n)\\
&= f(1_B \otimes_R n)\\
&= ev(f \otimes_R n).
\end{aligned}
$$

Se mostrarmos que ξ_P é uma bijeção para todo P se, e somente se, Can_N é uma bijeção, concluímos a demonstração. De fato, se Can_N é bijetiva, defina $\xi_P^{-1} := - \circ Can_N^{-1}$. Dessa forma, para quaisquer $f \in {}_BHom(B \otimes_R N, P)$, temos

$$\xi_P^{-1} \circ \xi_P(f) = \xi_P^{-1}(f \circ Can_N) = f \circ Can_N \circ Can_N^{-1} = f$$

e por outro lado, para todo $g \in {}_BHom(B \otimes_{R^{op}} N, P)$, temos

$$\xi_P \circ \xi_P^{-1}(g) = \xi_P(g \circ Can_N^{-1}) = g \circ Can_N^{-1} \circ Can_N = g.$$

Agora, se ξ_P é bijetiva, pela Proposição 3.18 considerando $X = B \otimes_R N$, $Y = B \otimes_{R^{op}} N$ e $\mu = \xi_X$, temos que

$$\xi_X(I_{B\otimes_R N}) = I_{B\otimes_R N} \circ Can_N = Can_N$$

é uma bijeção. Portanto, se Can é bijetiva, temos que Can_N é bijetiva e por sua vez ξ_X é uma bijeção. Logo, o funtor esquecimento ${}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_{R^e}\mathcal{M}$ preserva hom-funtores internos se, e somente se, Can é bijetiva. ■

A noção de uma $\times_R$-Hopf álgebra é mais geral que um Hopf algebróide, conforme nosso próximo e último teorema.

Teorema 3.20 *Seja $(\mathcal{H}_L, \mathcal{H}_R, S)$ um Hopf algebróide. Então a canônica*

$$Can : H \otimes_{L^{op}} H \longrightarrow H \otimes_L H, \ \ h \otimes_{L^{op}} k \longmapsto h_{(1)} \otimes_L h_{(2)}k$$

é bijetiva, com inversa $h \otimes_L k \longmapsto h^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h^{(2)})k$.

Demonstração: De fato, mostremos antes que Can^{-1} é morfismo de H-módulos à esquerda. De fato, para quaisquer h, h' e $k \in H$, temos

$$
\begin{aligned}
Can^{-1}(h \triangleright (h' \otimes_L k)) &= Can^{-1}(h_{(1)}h' \otimes_L h_{(2)}k)\\
&= h_{(1)}{}^{(1)}h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h_{(1)}{}^{(2)}h'^{(2)})h_{(2)}k\\
&= h_{(1)}{}^{(1)}h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})S(h_{(1)}{}^{(2)})h_{(2)}k\\
&= h^{(1)}h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})S(h^{(2)}{}_{(1)})h^{(2)}{}_{(2)}k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= h^{(1)}h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})s_R(\varepsilon_R(h^{(2)}))k \\
&= h^{(1)}h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(t_R(\varepsilon_R(h^{(2)}))h'^{(2)})k \\
&= h^{(1)}s_R(\varepsilon_R(h^{(2)}))h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})k \\
&= hh'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})k \\
&= h \triangleright (h'^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h'^{(2)})k) \\
&= h \triangleright Can^{-1}(h' \otimes_L k).
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
Can^{-1}(Can(h \otimes_{L^{op}} k)) &= Can^{-1}(h_{(1)} \otimes_L h_{(2)}k) \\
&= Can^{-1}(h \triangleright (1_H \otimes_L k)) \\
&= h \triangleright Can^{-1}(1_H \otimes_L k) \\
&= h \triangleright (1_H \otimes_{L^{op}} k) \\
&= h \otimes_{L^{op}} k,
\end{aligned}
$$

por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
Can(Can^{-1}(h \otimes_L k)) &= Can(h^{(1)} \otimes_{L^{op}} S(h^{(2)})k) \\
&= h^{(1)}{}_{(1)} \otimes_L h^{(1)}{}_{(2)}S(h^{(2)})k \\
&= h_{(1)} \otimes_L h_{(2)}{}^{(1)}S(h_{(2)}{}^{(2)})k \\
&= h_{(1)} \otimes_L s_L \circ \varepsilon_L(h_{(2)})k \\
&= h_{(1)} \otimes_L \varepsilon_L(h_{(2)}) \cdot k \\
&= h_{(1)} \cdot \varepsilon_L(h_{(2)}) \otimes_L k \\
&= h \otimes_L k.
\end{aligned}
$$

■

Sabe-se que nem toda $\times_R$-Hopf álgebra vem de um bialgebróide à esquerda que constitui um Hopf algebróide. De fato, um contra-exemplo pode ser encontrado em [17].

Considerações Finais

Apesar do estudo sobre Hopf algebróides no sentido [7] ter um passado bastante curto, há de considerar que houve um bom progresso desde que foi iniciado. Citamos como progresso os seguintes estudos: comódulos sobre Hopf algebróides em [7], teoria de integrais de álgebras de Hopf, que foi generalizada para Hopf algebróides em [5], temos também estudos sobre teoria de Galois de Hopf algebróides em [6]. Tais estudos não foram incluídos neste trabalho que tem caráter introdutório, mas fica como proposta para estudos posteriores.

Por outro lado, existem diversos aspectos de álgebras de Hopf que ainda não foram investigados como estender para o âmbito de Hopf algebróides. Por exemplo, nada ainda foi feito no sentido de uma teoria de classificação e teoremas estruturais de Hopf algebróides.

Referências Bibliográficas

[1] M.M.S. Alves, E. Batista: **An introduction to Hopf algebras: A categorical approach**. XXIII Brazilian Algebra Meeting. Maringá, July 27th to August 1st, 2014.

[2] G. Böhm and K. Szlachányi, **Hopf algebroid symmetry of abstract Frobenius extensions of depth 2**, Comm. Algebra 32 (11) (2004) 4433-4464.

[3] G. Böhm and K. Szlachányi, **Hopf algebroids with bijective antipodes: axioms, integrals and duals**,J. Algebra 274 (2004), 708-750.

[4] G. Böhm, **An alternative notion of Hopf algebroid**, in: S. Caenepeel, F. Van Oystaeyen (Eds.), Hopf algebras in noncommutative geometry and physics. Lecture notes in Pure Appl. Math. Vol. 239, Dekker, New York, 2005, pp. 31-53.

[5] G. Böhm, **Integral theory of Hopf algebroids**, Algebr. Represent. Theory 8(4) (2005), 563-599.

[6] G. Böhm, **Galois theory of Hopf algebroids**, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (NS) 51 (2005), 233-262.

[7] G. Böhm, **Hopf algebroids**, In:Handbook of algebra. Vol. 6, 173.235, Elsevier/North-Holland (2009).

[8] T. Brzezinski and G. Militaru, **Bialgebroids, $\times_A$-bialgebras and duality**, J. Algebra 251 (2002), 279-294.

[9] T. Brzezinski and R. Wisbauer, **Corings and comudules**, London Math. Soc. Lecture Note Series 309, Cambridge Univ. Press. (2003).

[10] A. Connes and H. Moscovici, **Rankin-Cohen brackets and the Hopf algebra of transverse geometry,** Mosc. Math. J. 4 (2004), 111-130.

[11] S. Dăscălescu; C. Năstăsescu; S. Raian. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 401p. (2001).

[12] P. Ho Hai. **Tannaka-Krein duality for Hopf algebroids**, Isr. J. Math. 167(1), 193-225 (2008)

[13] T. W. Hungerford. **Algebra**, New York: Springer- Verlag, 502p. (2000).

[14] L. Kadison and K. Szlachányi, **Duals bialgebroids for depth two ring extensions**, math.RA/0108067.

[15] L. Kadison and K. Szlachányi, **Bialgebroid actions on depth two extensions and duality**, Adv. Math. 179 (2003), 75-121.

[16] C. Kassel. **Quantum Groups**, New York: Springer-Verlag, 531p. (1995).

[17] U. Krähmer and A. Rovi, **A Lie-Rinehart algebra with no antipode**, preprint (2013), arXiv: 1308.6770.

[18] J.H. Lu, **Hopf algebroids and quantum groupoids**, Internat. J. Math. 7 (1996), 47-70.

[19] J. M. Mombelli. **Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula, 80p. Disponível em http://www.famaf.unc.edu.ar/ mombelli/categorias-tensoriales3.pdf.

[20] J. Morava. **Noetherian localisations of categories of cobordism comodules**, Ann. of Math. (2) 121(1985), 1-39.

[21] J. Mrčun. **The Hopf algebroids of functions on étale groupoids and their principal Morita equivalence**, J. Pure Appl. Algebra 160 (2001), 249-262.

[22] D. R. Pansera. **Álgebras de Hopf Fracas: Teoremas de Dualidade e de Maschke**, Dissertação de Mestrado, UFSC. 2013.

[23] B. Pareigis, **A nocommutative noncocommutative Hopf algebra in "nature"**, J. Algebra 70 (1981), 356-374.

[24] D. Ravenel. **Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres**, Pure and Applied Math. Series, vol. 121, Academic Press, San Diego, 1986.

[25] P. Schauenburg, **Duals and doubles of quantum groupoids ($\times_R$-Hopf algebras)**, AMS Contemp. Math. 267 pp 273-299, AMS, Providence, RI, 2000.

[26] P. Schauenburg, **Bialgebras over noncommutative rings and a structure theorem for Hopf bimodules**, Appl. Categ. Strutures 6 (1998), 193-222.

[27] K. Szlachányi, **Monoidal Morita equivalence**, AMS Contemp. Math. 391 pp 353-369, AMS, Providence, RI, 2005.

[28] M. Takeuchi, **Groups of algebras over $A \otimes \overline{A}$**, J. Math. Soc. Japan 29 (1977) 459-492.

[29] L. A. Uliana. **Equivariantização de categorias K-lineares**, Dissertação de Mestrado, UFSC. 2015.

[30] R. Wisbauer. **Foundations of module and ring theory**, A Handbook for Study and Research, University of Düsseldorf, (1991).

[31] P. Xu, **Quantum groupoids**, Comm. Math. Phys. 216 (2001), 539-581.