UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Fernando Leandro

MATRIZES QUE QUASE COMUTAM E UM TEOREMA DE HUAXIN LIN

Florianópolis

2016

Fernando Leandro

MATRIZES QUE QUASE COMUTAM E UM TEOREMA DE HUAXIN LIN

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari - UFSC.

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Leandro, Fernando
Matrizes que quase comutam e um teorema de Huaxin Lin / Fernando Leandro ; orientador, Fernando de Lacerda Mortari - Florianópolis, SC, 2016.
67 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Matemática Pura. 3. Análise. 4. Álgebra de Operadores. I. Mortari, Fernando de Lacerda. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Fernando Leandro

Matrizes que quase comutam e um Teorema de Huaxin Lin

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 06 de maio de 2016.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Danilo Royer
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Felipe Vieira
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo amor incondicional e por sempre terem priorizado minha educação. Obrigado à minha família e, em especial, à minha sobrinha Allicia, não pude estar tão presente quanto gostaria mas tenha certeza que você é uma luz para mim. Que a chama e o desejo do conhecimento brilhe forte em você.

Ao meu amor, Giovana Jeremias Andrade, que sempre esteve presente e acompanhou de perto os percalços que tive para realizar este trabalho. Com você tudo fica mais fácil. Obrigado por ser essa pessoa maravilhosa e sempre me apoiar. Meus dias são mais belos ao seu lado.

Ao professor Fernando de Lacerda Mortari, por sua paciência infinita e por ter me ensinado como a matemática é bela mas exigente (dedicação e rigor são fundamentais). Com certeza um exemplo pessoal e profissional, foi uma honra ter sido orientado pelo professor Fernando.

Agradeço aos professores Danilo Royer, Felipe Vieira e Gilles Gonçalves de Castro por terem aceitado participar da banca deste trabalho e pelas contribuições que deram ao mesmo.

A todos(as) os(as) amigos(as) um muito obrigado por estarem ao meu lado, por me aturarem e pela parceria nos estudos. As inúmeras conversas que tivemos, que envolviam não só a matemática, me fizeram crescer pessoalmente e profissionalmente.

Agradeço ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pelo apoio financeiro durante o curso de mestrado para realização deste trabalho.

RESUMO

A partir da década de 70 tivemos um grande avanço na teoria de C*-álgebras e álgebra de operadores. No artigo (HALMOS, 1976), Paul Halmos perguntou se matrizes auto-adjuntas que quase comutam estavam próximas de matrizes auto-adjuntas que comutam. Durante 20 anos esta pergunta ficou sem resposta. Contudo, variações do problema original surgiram, e muitos trabalhos foram publicados.
Huaxin Lin respondeu afirmativamente à pergunta de Paul Halmos em seu artigo (LIN, 1995) e o objetivo deste trabalho é demonstrar esse teorema e, também, apresentar uma variação do problema original.

Palavras-chave: Teorema de Huaxin Lin. Matrizes que quase comutam.

ABSTRACT

From the decade of 1970 forward we had great advances in the theories of C*-algebras and operator algebras. In the article (HALMOS, 1976), Paul Halmos asked if almost commuting self-adjoint matrices were close to self-adjoint matrices that commute. For 20 years this question went unanswered. However, variations of the original problem arose and many papers have been published.
Huaxin Lin answered affirmatively the question of Paul Halmos in his article (LIN, 1995) and the objective of this work is to demonstrate this theorem and also to present a variation of the original problem.

Keywords: Huaxin Lin theorem. Almost commuting matrices.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ano de 1976, o famoso matemático Paul Halmos publicou um trabalho, (HALMOS, 1976), no qual fazia uma pergunta que demoraria aproximadamente 20 anos para ser respondida. A pergunta, resumidamente, era a seguinte: será que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ e um par de matrizes auto-adjuntas A, B que quase comutam, a menos de δ, que estão ε-próximas de matrizes auto-adjuntas que comutam?

No decorrer desses 20 anos muita matemática foi publicada acerca da pergunta feita, inclusive contra-exemplos para variações do problema, mas a pergunta em si não havia sido respondida. Foi então que, no ano de 1995, o matemático Huaxin Lin respondeu a pergunta afirmativamente e, a partir daí, muitas publicações envolvendo aplicações e outros resultados surgiram. O Teorema que Huaxin Lin provou foi o seguinte:

Teorema 1. (Teorema de Huaxin Lin) Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer par de matrizes auto-adjuntas $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ com $\|A\|, \|B\| \leq 1$ e $\|AB - BA\| < \delta$, existe um par de matrizes auto-adjuntas, $A', B' \in M_n(\mathbb{C})$, tal que A', B' comutam e

$$\|A - A'\| + \|B - B'\| < \varepsilon.$$

Ainda nos anos 70 os matemáticos Lawrence Gerald Brown, Ronald George Douglas e Peter Fillmore publicaram o trabalho (BROWN; DOUGLAS; FILLMORE, 1973) no qual foram inseridas várias técnicas para tratar de C*-álgebras e toda sua teoria. Além desse trabalho, Brown, Douglas e Fillmore publicaram outros artigos nos anos 70 os quais mostraram novas maneiras para tratar C*-álgebras, entre elas a álgebra homológica. Com as técnicas aprendidas para demonstrar o teorema de Huaxin Lin, podemos desenvolver as ferramentas necessárias para provar o Corolário 11.2 que está no trabalho citado acima.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O segundo deles irá nos mostrar que ao trocarmos a palavra auto-adjunta por unitária na pergunta feita por Paul Halmos em (HALMOS, 1976), conseguiremos uma resposta negativa, isto é, dada uma tolerância matrizes unitárias que quase comutam, a menos dessa tolerância, estão longe de matrizes que comutam e, por consequência, de matrizes auto-adjuntas que comutam. Essa parte do nosso trabalho está baseado no artigo publicado por (EXEL; LORING, 1989).

No terceiro capítulo finalmente iremos responder a pergunta feita por Paul Halmos em (HALMOS, 1976) afirmativamente. Essa resposta foi dada por Huaxin Lin em (LIN, 1995) e este capítulo está baseado em uma parte do artigo publicado por Mikael Rørdam e Peter Friis em (FRIIS; RØRDAM, 1996). Neste capítulo iremos desenvolver as ferramentas necessárias para provar o Teorema de Huaxin Lin citado anteriormente. Uma dessas ferramentas é o seguinte teorema:

Teorema 2. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in M_n(\mathbb{C})$ com $\|x\| \leq 1$ e $\|xx^* - x^*x\| < \delta$, existe um elemento $y \in M_n(\mathbb{C})$ normal tal que $\|x - y\| < \varepsilon$.

Esse teorema, grosso modo, nos diz que: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda matriz que é quase normal, a menos de δ, está ε-próxima de matrizes normais.

Para demonstrar o teorema acima iremos precisar de uma sequência de lemas que serão provados ao longo do capítulo. Então, quando o leitor estiver neste capítulo, tenha em mente que iremos provar primeiro uma sequência de lemas, depois o Teorema 2 e, por último, o Teorema de Huaxin Lin.

Os matemáticos Lawrence Gerald Brown, Ronald George Douglas e Peter Fillmore nos anos 70 publicaram um trabalho o qual classificaram elementos normais da álgebra de Calkin por equivalência unitária, aplicando técnicas de álgebra homológica. Brow-Douglas-Fillmore usaram os resultados obtidos para decidir, entre outras coisas, quando um elemento normal da álgebra de Calkin pode ser levantado por um elemento normal. Recentemente, viu-se que é possível resolver o mesmo problema sobre levantamento obtido por Brow-Douglas-Fillmore, usando o problema descrito por Paul Halmos. O quarto capítulo irá justamente mostrar essa relação.

Para facilitar a leitura deste trabalho, recomendamos que o leitor possua conhecimentos básicos de álgebra de operadores, álgebra linear, análise funcional e topologia geral. Logo abaixo está uma lista de notações e definições que iremos utilizar ao longo do trabalho:

- Dado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $M_n(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes complexos;

- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e B base de V. Dado um operador $T : V \to V$ denotaremos a matriz $[T]_B^B$ simplesmente por $[T]_B$, que é a matriz que com relação à base B representa o operador T;

- Dado X espaço topológico e $U \subseteq X$, iremos denotar o fecho do conjunto U por $\overline{U}$;

- Dado X espaço topológico, denotaremos como $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$;
- Dado H um espaço de Hilbert, denotaremos por $B(H)$ o conjunto dos operadores lineares limitados no espaço de Hilbert H;
- $K(H)$ é o conjunto dos operadores compactos de $B(H)$, o qual sabemos ser um ideal de $B(H)$;
- $Q(H) = B(H)/K(H)$ é a álgebra de Calkin;
- A função quociente $\pi : B(H) \to Q(H)$, a qual sabe-se que é sobrejetiva;
- Seja $\mathcal{T} \in Q(H)$. Dizemos que $S \in B(H)$ é um levantamento do operador $\mathcal{T} \in Q(H)$ se $\pi(S) = \mathcal{T}$;
- Dada uma C*-álgebra A e um elemento $a \in A$, denotaremos o espectro de a por $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, x - \lambda 1_A \text{ não é inversível}\}$ e, denotaremos o resolvente do elemento a por $\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, x - \lambda 1_A \text{ é inversível}\}$;
- Dado $\varepsilon > 0$, diremos que duas matrizes A e B quase comutam, a menos de ε, se $\|AB - BA\| < \varepsilon$;
- Seja a um elemento normal de uma C*-álgebra unital A e suponha que $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ é a inclusão, $f(z) = z, \forall z \in \sigma(a)$. Então existe um único *-homomorfismo unital, $\varphi : C(\sigma(a)) \to A$, tal que $\varphi(f) = a$. Ademais, φ é isométrico e $Im(\varphi)$ é a C*-subálgebra de A gerada por 1_A e a, em outras palavaras, $\varphi(C(\sigma(a))) = C^*(\{1_A, a\})$;

  O *-homomorfismo φ acima é chamado de cálculo funcional contínuo para a. Denotamos o elemento $\varphi(f)$ por $f(a)$ e, pelo cálculo funcional contínuo, sabe-se que o elemento $f(a)$ é normal;
- Seja X espaço topológico localmente compacto Hausdorff. Denotaremos por $B_\infty(X)$ a C*-álgebra das funções de X em $\mathbb{C}$ que são limitadas e Borel mensuráveis.

2 MATRIZES UNITÁRIAS QUE QUASE COMUTAM

O objetivo deste capítulo é, através do exemplo dado por (VOICULESCU, 1983), e reescrito por (EXEL; LORING, 1989), mostrar que se trocarmos a palavra auto-adjunto por unitária no Teorema de Huaxin Lin, citado anteriormente, tal teorema não será mais válido.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e considere $w_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, uma raiz n-ésima da unidade. Defina as seguintes matrizes em $M_n(\mathbb{C})$, em que espaços vazios são zeros:

$$S_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega_n = \begin{pmatrix} w_n & & & & \\ & w_n^2 & & & \\ & & w_n^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w_n^n \end{pmatrix}.$$

De agora em diante neste capítulo, considere $\mathbb{C}^n$ como espaço normado sobre $\mathbb{C}$ com norma induzida do produto interno usual, e seja $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Vejamos quais são os operadores sobre $\mathbb{C}^n$ que com respeito à base canônica E são representados pelas matrizes S_n e Ω_n.

Primeiro, vamos encontrar o operador $T \in B(\mathbb{C}^n)$ que com relação à base canônica E é representado pela matriz S_n:

$$[T(e_1)]_E = S_n[e_1]_E = S_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [e_2]_E \therefore T(e_1) = e_2,$$

$$[T(e_2)]_E = S_n[e_2]_E = S_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [e_3]_E \therefore T(e_2) = e_3.$$

Prosseguindo assim, concluímos que $T(e_k) = e_{k+1}$, $\forall k < n$. Agora, se $k = n$, temos o seguinte:

$$[T(e_n)]_E = S_n[e_n]_E = S_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [e_2]_E \therefore T(e_n) = e_1.$$

Portanto, o operador $T \in B(\mathbb{C}^n)$ que com relação à base canônica E é representado pela matriz S_n, tem a seguinte característica:

$$T(e_k) = \begin{cases} e_{k+1}, & \text{se } k < n \\ e_1, & \text{se } k = n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Isto significa que o operador T faz apenas uma permutação cíclica dos vetores da base canônica E.

Por outro lado, vejamos quem é o operador $R \in B(\mathbb{C}^n)$ que com relação à base canônica E é representado pela matriz Ω_n:

$$[R(e_1)]_E = \Omega_n[e_1]_E = \Omega_n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [w_n]_E,$$

$$[R(e_2)]_E = \Omega_n[e_2]_E = \Omega_n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [w_n^2]_E.$$

Prosseguindo desta maneira, podemos concluir que, para todo $k = 1, \ldots, n$, o operador $R \in B(\mathbb{C}^n)$, que com relação à base canônica E é representado pela matriz Ω_n, tem a seguinte característica:

$$R(e_k) = w_n^k e_k. \tag{2.2}$$

Observação 3. O operador T que com relação à base canônica E é representado pela matriz S_n, leva base ortonormal em base ortonormal (apenas permuta os vetores da base canônica E). Portanto, T é um operador unitário e, por conseguinte, sua matriz com relação a qualquer base ortonormal é unitária. Em particular, a matriz S_n é unitária.

A matriz Ω_n é diagonal e, com relação à base canônica E, representa o operador R. Sendo assim, o operador R é unitariamente diagonalizável e, portanto, R é normal. Além disso, temos que o espectro do operador R são justamente os elementos da diagonal da matriz

Ω_n, todos com módulo igual a 1. Isto significa que $\sigma(R) \subseteq \mathbb{S}^1$, em que $\mathbb{S}^1$ é o círculo unitário. Assim, R é normal e seu espectro está totalmente contido no círculo unitário, portanto R é unitário. Segue que a matriz Ω_n que com relação à base canônica representa o operador R é unitária.

Nosso próximo passo será mostrar uma proposição que, entre outras coisas, nos dirá de fato que as matrizes S_n e Ω_n são matrizes que quase comutam, a menos de uma tolerância.

Proposição 4. As seguintes afirmações são válidas:

(i) $\|\Omega_n S_n - S_n \Omega_n\| = |1 - w_n|$.

(ii) $\det(\Omega_n) = \det(S_n) = (-1)^{n+1}$.

(iii) $S_n \Omega_n S_n^* = \overline{w_n} \Omega_n$.

Demonstração. (i) Começamos observando que:

$$\Omega_n S_n = \begin{pmatrix} w_n & & & \\ & w_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & w_n \\ w_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n^n & 0 \end{pmatrix}.$$

$$S_n \Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n & & & \\ & w_n^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & w_n^n \\ w_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n^{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que:

$$\Omega_n S_n - S_n \Omega_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & w_n - w_n^n \\ w_n^2 - w_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & w_n^n - w_n^{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos a norma da matriz $\Omega_n S_n - S_n \Omega_n$, considere $T' \in \mathrm{B}(\mathbb{C}^n)$, tal que $[T']_E = \Omega_n S_n - S_n \Omega_n$. Note que:

$$\begin{aligned} [T'(e_1)]_E &= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n)[e_1]_E \\ &= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ w_n^2 - w_n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [(w_n^2 - w_n)e_2]_E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [T'(e_2)]_E &= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n)[e_2]_E \\ &= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_n^3 - w_n^2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [(w_n^3 - w_n^2)e_3]_E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T'(e_n)]_E &= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n)[e_n]_E \\
&= (\Omega_n S_n - S_n \Omega_n) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_n - w_n^n \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [(w_n - w_n^n)e_1]_E.
\end{aligned}$$

Seja $v \in \mathbb{C}^n$ tal que $\|v\| = 1$ e escreva $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \alpha_i \in \mathbb{C}$. Como E é base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ é fato simples de álgebra linear que

$$\|v\|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2. \tag{2.3}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
T'(v) &= T'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T'(e_i) \\
&= \alpha_1 T'(e_1) + \ldots + \alpha_n T'(e_n) \\
&= \alpha_1 (w_n^2 - w_n) e_2 + \ldots + \alpha_{n-1}(w_n^n - w_n^{n-1}) e_n + \alpha_n (w_n - w_n^n) e_1.
\end{aligned}$$

Daí, pelo que fizemos no parágrafo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
\|T'(v)\|^2 &= |\alpha_1 (w_n^2 - w_n)|^2 + \ldots + |\alpha_{n-1}(w_n^n - w_n^{n-1})|^2 + |\alpha_n (w_n - w_n^n)|^2 \\
&= |\alpha_1|^2 |(w_n^2 - w_n)|^2 + \ldots + |\alpha_{n-1}|^2 |(w_n^n - w_n^{n-1})|^2 + \\
&\quad + |\alpha_n|^2 |(w_n - w_n^n)|^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Perceba que

$$|w_n^2 - w_n| = |w_n^n - w_n^{n-1}| = |w_n - w_n^n| = |1 - w_n|. \tag{2.5}$$

De fato: sabemos que w_n é uma raiz n-ésima da unidade. Portanto, calcular $|w_n^2 - w_n|, \ldots, |w_n^n - w_n^{n-1}|, |w_n - w_n^n|$ é o mesmo que saber qual a distância entre dois vértices do polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária no plano complexo.

Como o polígono é regular, basta calcularmos a distância entre quaisquer dois vértices. Assim,

$$
\begin{aligned}
|w_n - w_n^n| &= |w_n - e^{\frac{2\pi i n}{n}}| \\
&= |w_n - e^{2\pi i}| \\
&= |1 - w_n|.
\end{aligned}
$$

Portanto, a igualdade (2.5) é válida.

Agora, usando (2.3), (2.4) e (2.5), temos:

$$
\begin{aligned}
\|T'(v)\|^2 &\leq |\alpha_1|^2|1 - w_n|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2|1 - w_n|^2 \\
&= (|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2)|1 - w_n|^2 \\
&= \|v\|^2|1 - w_n|^2 = |1 - w_n|^2.
\end{aligned}
$$

Ou seja, temos $\|T'(v)\| \leq |1 - w_n|$. Finalmente, como $\|e_n\| = 1$ e $T'(e_n) = (w_n - w_n^n)e_1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|T'(e_n)\| &= \|(w_n - w_n^n)e_1\| \\
&= |(w_n - w_n^n)|\|e_1\| \\
&= |(w_n - w_n^n)| \\
&= |1 - w_n|.
\end{aligned}
$$

Segue daí que $\|T'\| = \sup\limits_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ \|v\|=1}} \|T'(v)\| = |1 - w_n|$.

Portanto, $\|\Omega_n S_n - S_n \Omega_n\| = |1 - w_n|$.

(ii) Para verificarmos a igualdade afirmada, basta calcular o determinante de cada uma das matrizes S_n e Ω_n. Comecemos calculando o determinante da matriz S_n. Vamos fazer isso utilizando o teorema de Laplace para primeira linha e a n-ésima coluna:

$$\begin{aligned}
\det(S_n) &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{(n\times n)} \\
&= (-1)^{n+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1\times n-1)} \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Agora como a matriz Ω_n é diagonal, basta calcularmos o produtos dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{aligned}
\det(\Omega_n) &= \begin{vmatrix} w_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & w_n^n \end{vmatrix} \\
&= w_n w_n^2 \dots w_n^n \\
&= (w_n^n)^{1+2+\dots+n} \\
&= (w_n)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\frac{n(n+1)}{2}} \\
&= (e^{\pi i})^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Logo, $\det(S_n) = \det(\Omega_n) = (-1)^{n+1}$, concluindo o que queríamos.

(iii) Já sabemos pela Observação 3 que as matrizes S_n e Ω_n são unitárias.

Considere $T \in B(\mathbb{C}^n)$ e $R \in B(\mathbb{C}^n)$ os operadores descritos em (2.1) e (2.2), respectivamente, que descrevemos através da base canônica E pelas matrizes S_n e Ω_n, respectivamente. Sabemos que T e R são operadores unitários, portanto $T^* = T^{-1}$ e $R^* = R^{-1}$. Assim, $T^*(e_k) = T^{-1}(e_k) = e_{k-1}$, se $k > 1$ e $T^*(e_1) = T^{-1}(e_1) = e_n$, se $k = 1$.

Sendo assim, para provar que $S_n\Omega_n S_n^* = \overline{w_n}\Omega_n$ basta provarmos que $TRT^* = \overline{w_n}R$. Para isso, é suficiente verificar que a identidade vale para os vetores da base E, isto é, $TRT^*(e_k) = \overline{w_n}R(e_k)$ para todo $k = 1, \dots, n$. Observe que se $k > 1$, então

$$\begin{aligned} TRT^*(e_k) &= TR(T^*(e_k)) \\ &= T(R(e_{k-1})) \\ &= T(w_n^{k-1}e_{k-1}) \\ &= w_n^{k-1}T(e_{k-1}) \\ &= w_n^{k-1}e_k. \end{aligned}$$

E se $k = 1$, então

$$\begin{aligned} TRT^*(e_1) &= TR(T^*(e_1)) \\ &= T(R(e_n)) \\ &= T(w_n^n e_n) \\ &= w_n^n T(e_n) \\ &= w_n^n e_1. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que:

$$\begin{aligned} \overline{w_n}R(e_k) &= \overline{w_n}w_n^k e_k \\ &= e^{\frac{-2\pi i}{n}} e^{\frac{(2\pi i)k}{n}} e_k \\ &= e^{\frac{(2\pi i)(k-1)}{n}} e_k \\ &= w_n^{k-1}e_k \ , \forall k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Mas, note que quando $k = 1$ temos:
$w_n^{k-1}e_k = w_n^0 e_1 = e^{\frac{(2\pi i)0}{n}} e_1 = e^0 e_1 = 1e_1 = e^{2\pi i}e_1 = w_n^n e_1$.

Assim, temos que $TRT^*(e_k) = \overline{w_n}R(e_k)$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Segue que $TRT^* = \overline{w_n}R$ e, portanto, $S_n\Omega_n S_n^* = \overline{w_n}\Omega_n$. ∎

Observação 5. Pela Observação 3 temos que as matrizes S_n e Ω_n são unitárias. Pelo item (i) temos que $\|\Omega_n S_n - S_n\Omega_n\| = |1 - w_n|$. Sabe-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, w_n é uma raiz $n-$ésima da unidade, logo $|w_n - w_n^n| = |1 - w_n|$ significa o tamanho do lado do polígono regular, com vértices w_n, inscrito na circunferência unitária do plano complexo.

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande, temos que $|1 - w_n| < \varepsilon$, isto é, que o lado do polígono regular com vértices w_n fica menor do que ε. Isto significa que $\|\Omega_n S_n - S_n\Omega_n\| < \varepsilon$.

Logo, para o $\varepsilon > 0$ dado, existe $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que as matrizes S_n e Ω_n quase comutam, a menos de ε.

Em seguida, iremos mostrar um lema que nos será de grande utilidade mais para frente.

Definição 6. Seja X um espaço topológico. Dados $x, y \in X$, um *caminho* em X que liga x a y é uma função contínua $f : [0,1] \to X$, tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Lema 7. Seja V espaço normado e $u, v \in V$ quaisquer.

Então, $\mu : [0,1] \to V$ dada por $\mu(t) = u + t(v-u), \forall t \in [0,1]$, é um caminho que liga u a v.

Demonstração. Para mostrarmos que μ é um caminho, precisamos mostrar que a função $\mu : [0,1] \to V$ é contínua. Note que dado $t \in [0,1]$ a função $\mu(t)$ é soma e multiplicação por escalar no espaço normado V e ambas as operações são contínuas em V.

Agora, considere $(t_n)_n$ uma sequência convergente no intervalo $[0,1]$, isto é, $t_n \to s \in [0,1]$. Assim, temos que $\mu(t_n) = u + t_n(v-u)$, e como mencionamos acima, a soma e multiplicação por escalar em V são operações contínuas e, como assumimos $t_n \to s$, temos que $\mu(t_n) = u + t_n(v-u) \to u + s(v-u) = \mu(s)$. Portanto, μ é uma função contínua, provando que μ é um caminho.

Por fim, claro que μ é um caminho que liga u a v, pois $\mu(0) = u$ e $\mu(1) = v$. ∎

Agora, vamos comentar um pouco sobre o índice de caminhos fechados no plano complexo e sua invariância por homotopia. Para os comentários abaixo, estamos assumindo que caminhos são de classe C^1 ((LANG, 1999) capítulo IV, p. 133).

Definição 8. Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e γ um caminho fechado em $\mathbb{C}$ que não passa por α, definimos o *índice de γ com respeito ao ponto α*, denotado por $W(\gamma; \alpha)$, como sendo o número complexo

$$W(\gamma; \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz. \tag{2.6}$$

Observação 9. Denotamos apenas por *índice* de um caminho fechado γ, o índice de γ com respeito ao ponto 0.

Também, se γ é um caminho fechado definido em um intervalo fechado $[a,b]$ então a integral (2.6) pode ser escrita como:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha} dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\alpha} dt. \tag{2.7}$$

Sabe-se também que se γ é um caminho fechado a integral definida em (2.6) é um número inteiro (ver (LANG, 1999) capítulo IV, Lema 1.1). O número inteiro $W(\gamma;\alpha)$ nos diz quantas vezes o caminho γ gira em torno do ponto α, e o sinal positivo (negativo) do número nos diz que ele faz esse percurso no sentido anti-horário (horário).

Definição 10. Sejam γ e η caminhos fechados cujas imagens estão contidas em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$. Dizemos que γ e η são *homólogos* se $W(\gamma;\alpha) = W(\eta;\alpha)$, para todo ponto $\alpha \in U^{\mathcal{C}}$.

Definição 11. Sejam γ, $\eta : [a,b] \to U$ dois caminhos em U e U um conjunto aberto. Dizemos que γ e η são *homotópicos* em U se existe uma função contínua $\psi : [a,b] \times [c,d] \to U$ tal que $\psi(t,c) = \gamma(t)$ e $\psi(t,d) = \eta(t)$, para todo $t \in [a,b]$.

Por fim, o teorema abaixo, que pode ser visto com detalhes em ((LANG, 1999) capítulo IV, Teorema 2.1, (i)), nos diz sobre a invariância do índice de caminhos fechados no plano complexo por homotopia.

Teorema 12. Se γ e η são caminhos fechados em um aberto $U \subseteq \mathbb{C}$ e homotópicos em U, então γ e η são homólogos em U.

Nosso próximo passo é mostrar que existe uma tolerância $d > 0$ tal que não existe nenhum par de matrizes que comutam que estão próximas de S_n e Ω_n, a menos de d. Ou seja, se $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ comutam então $\|X - \Omega_n\| \geq d$ ou $\|Y - S_n\| \geq d$. Faremos isso usando o Teorema 12.

Teorema 13. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$ e se $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ são matrizes que comutam, então $\max\{\|X - \Omega_n\|, \|Y - S_n\|\} \geq \sqrt{2 - |1 - w_n|} - 1$.

Demonstração. Note que a hipótese de que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 7$ é necessária para que o número $|1 - w_n|$ seja menor do que 2, ou seja, para que o lado do polígono regular inscrito na circunferência unitária no plano complexo da raiz $n-$ésima da unidade seja menor do que 2.

Sejam $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ matrizes que comutam.

Defina $d = \max\{\|X - \Omega_n\|, \|Y - S_n\|\}$.

Vamos supor, por absurdo, que $d < \sqrt{2 - |1 - w_n|} - 1$.

Vamos mostrar que existe um caminho que liga as matrizes Ω_n a X e S_n a Y.

Seja $\mu : [0,1] \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $\mu(t) = \Omega_n + t(X - \Omega_n)$ e $\beta : [0,1] \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $\beta(t) = S_n + t(Y - S_n)$. Sabemos que $M_n(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial normado. Pelo Lema 7, temos que μ e β são caminhos. Também temos que μ liga Ω_n a X, pois $\mu(0) = \Omega_n$ e $\mu(1) = X$ e, analogamente, que β liga S_n a Y.

Defina, para todo $t \in [0,1]$, $A_t = \mu(t)$ e $B_t = \beta(t)$.

Agora, para cada $t \in [0,1]$, defina $C_t : [0,1] \to M_n(\mathbb{C})$ dada por $C_t(r) = A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t)$. Novamente pelo Lema 7, temos que C_t é um caminho que liga A_tB_t a B_tA_t.

Agora, para cada $t \in [0,1]$, seja $\gamma_t : [0,1] \to \mathbb{C}$, $r \in [0,1]$, dada por $\gamma_t(r) = \det(A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t))$.

Perceba que $\gamma_t(r)$ é contínua, pois é composição das funções determinante e $C_t(r)$, ambas contínuas. Portanto, γ_t é um caminho.

Vamos mostrar que, para $t \in [0,1]$ qualquer, a imagem de γ_t é um caminho fechado no plano complexo. Para isso, precisamos mostrar que $\gamma_t(0) = \gamma_t(1)$:

$$\begin{aligned}
\gamma_t(0) &= \det(A_tB_t + 0(B_tA_t - A_tB_t)) \\
&= \det(A_tB_t) \\
&= \det(A_t)\det(B_t) \\
&= \det(B_t)\det(A_t) \\
&= \det(B_tA_t) \\
&= \det(A_tB_t + 1(B_tA_t - A_tB_t)) \\
&= \gamma_t(1).
\end{aligned}$$

Concluindo assim que γ_t é um caminho fechado no plano complexo.

Vamos provar que $\gamma_t(r) \neq 0$, para todo r. Para isso, é suficiente provar que a matriz $A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t)$ é invertível, para todo t e r, pois assim teremos que $\gamma_t(r) = \det(A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t)) \neq 0$.

Vamos mostrar que a distância entre $A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t) = (1-r)A_tB_t + rB_tA_t$ e a matriz unitária Ω_nS_n é menor do que 1.

Iremos provar isso, pois como o conjunto dos elementos inversíveis de uma álgebra de Banach unital é aberto e a matriz Ω_nS_n é unitária (e portanto inversível), todo elemento que tem distância menor do que 1 dessa matriz também será um inversível (ver (MURPHY, 1990) Teorema 1.2.3).

Lembre que $M_n(\mathbb{C})$ é uma álgebra de Banach unital. Como $\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_nS_n\| < 1$, iremos concluir que a matriz $(1-r)A_tB_t + rB_tA_t = A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t)$ é inversível e, por conseguinte, que $\gamma_t(r) \neq 0$, para todo r.

Provemos então que $\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_nS_n\| < 1$:

$$
\begin{gathered}
\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_nS_n\| = \\
= \|(1-r)A_tB_t + rB_tA_t + r\Omega_nS_n - r\Omega_nS_n - \Omega_nS_n\| = \\
= \|(1-r)(A_tB_t - \Omega_nS_n) + r(B_tA_t - \Omega_nS_n)\| \leq \\
\leq \|(1-r)(A_tB_t - \Omega_nS_n)\| + r\|B_tA_t - \Omega_nS_n\| = \\
= (1-r)\|(A_tB_t - A_tS_n + A_tS_n - \Omega_nS_n)\| + \\
+ r\|B_tA_t - S_nA_t + S_nA_t - S_n\Omega_n + S_n\Omega_n - \Omega_nS_n\| \leq \\
\leq (1-r)[\|A_tB_t - A_tS_n\| + \|A_tS_n - \Omega_nS_n\|] + \\
+ r[\|B_tA_t - S_nA_t\| + \|S_nA_t - S_n\Omega_n\| + \|S_n\Omega_n - \Omega_nS_n\|] \underset{(i)}{\overset{\text{Prop.2}}{=}} \\
= (1-r)[\|A_t(B_t - S_n)\| + \|(A_t - \Omega_n)S_n\|] + \\
+ r[\|(B_t - S_n)A_t\| + \|S_n(A_t - \Omega_n)\| + |1 - w_n|] \leq \\
\leq (1-r)[\|A_t\|\|B_t - S_n\| + \|A_t - \Omega_n\|\|S_n\|] + \\
+ r[\|B_t - S_n\|\|A_t\| + \|S_n\|\|A_t - \Omega_n\| + |1 - w_n|].
\end{gathered}
$$

Assim, temos que:

$$
\begin{gathered}
\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_nS_n\| \leq \\
\leq (1-r)[\|A_t\|\|B_t - S_n\| + \|A_t - \Omega_n\|\|S_n\|] + \\
+ r[\|B_t - S_n\|\|A_t\| + \|S_n\|\|A_t - \Omega_n\| + |1 - w_n|]. \qquad (2.8)
\end{gathered}
$$

Agora, $\|A_t\| \leq 1 + d$, $\|A_t - \Omega_n\| \leq d$ e $\|B_t - S_n\| \leq d$, pois:

$$
\begin{aligned}
\|A_t\| &= \|\Omega_n + t(X - \Omega_n)\| \\
&\leq \|\Omega_n\| + \|t(X - \Omega_n)\| \\
&\leq 1 + d.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|A_t - \Omega_n\| &= \|\Omega_n + t(X - \Omega_n) - S_n\| \\
&= \|t(X - \Omega_n)\| \\
&\leq d.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|B_t - S_n\| &= \|S_n + t(Y - S_n) - S_n\| \\
&= \|t(Y - S_n)\| \\
&\leq d.
\end{aligned}
$$

Logo, a desigualdade (2.8) fica:

$$\begin{gathered}\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_n S_n\| \leq \\ \leq (1-r)[(1+d)d+d] + r[d(1+d)+d+|1-w_n|] = \\ = (1+d)d + d - r[(1+d)d+d] + r[(1+d)d+d] + r|1-w_n| \leq \\ \leq d^2 + 2d + |1-w_n|.\end{gathered}$$

Ou seja,

$$\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_n S_n\| \leq d^2 + 2d + |1-w_n|. \tag{2.9}$$

Por hipótese, sabemos que $d < \sqrt{2-|1-w_n|} - 1$.

Assim, $d+1 < \sqrt{2-|1-w_n|}$. Elevando ambos os membros da desigualdade ao quadrado e fazendo algumas contas básicas, obtemos

$$d^2 + 2d + |1-w_n| < 1. \tag{2.10}$$

Por (2.9) e (2.10), temos que:

$$\|[(1-r)A_tB_t + rB_tA_t] - \Omega_n S_n\| < 1.$$

Portanto, $\gamma_t(r) = \det(A_tB_t + r(B_tA_t - A_tB_t)) \neq 0$.

Note que, quando $t = 1$ temos:

$$\begin{aligned} \gamma_1(r) &= \det(A_1B_1 + r(B_1A_1 - A_1B_1))) \\ &= \det(XY + r(YX - XY)) \\ (X \text{ e } Y \text{ comutam}) &= \det(XY - rXY + rYX) \\ &= \det(XY - rXY + rXY) \\ &= \det(XY). \end{aligned}$$

Isto significa que, para $t = 1$, o caminho fechado $\gamma_1(r)$ não depende de r e sempre atribui o valor constante não nulo $\det(XY)$. Logo, temos que $\gamma_1'(r) = 0$.

Assim, $\gamma_1(r)$ é um caminho fechado constante no plano complexo e tem índice igual a 0, pois usando (2.7), temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-0} &= \int_0^1 \frac{\gamma_1^{'}(t)}{\gamma_1(t)} dt \\
&= \int_0^1 \frac{0}{\gamma_1(t)} dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para $t = 0$ temos que $A_0 = \Omega_n$ e $B_0 = S_n$, logo:

$$\begin{aligned}
\gamma_0(r) &= \det((1-r)\Omega_n S_n + rS_n\Omega_n) \\
(S_n \text{ é unitária}) &= \det((1-r)\Omega_n S_n + rS_n\Omega_n S_n^* S_n) \\
&= \det(((1-r)\Omega_n + rS_n\Omega_n S_n^*)S_n) \\
&= \det((1-r)\Omega_n + rS_n\Omega_n S_n^*) \cdot \det(S_n) \\
&= \det((1-r)\Omega_n + r\overline{w_n}\Omega_n)(-1)^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} \det([(1-r) + r\overline{w_n}]\Omega_n) \\
&= (-1)^{n+1}(1-r+r\overline{w_n})^n \det(\Omega_n) \\
&= (-1)^{n+1}(1-r+r\overline{w_n})^n(-1)^{n+1} \\
&= (-1)^{2(n+1)}(1-r+r\overline{w_n})^n \\
&= (1-r+r\overline{w_n})^n.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que o caminho fechado $\gamma_0(r)$ gira em torno do 0 uma única vez no sentido horário.

Para isso, vamos mostrar que seu índice em relação ao ponto 0 é igual à -1:

$$
\begin{aligned}
W(\gamma_o(r),0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0(r)} \frac{1}{z-0}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'(r)}{\gamma_0(r)}dr \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{n(\overline{w_n}-1)(1-r+r\overline{w_n})^{n-1}}{(1-r+r\overline{w_n})(1-r+r\overline{w_n})^{n-1}}dr \\
&= \frac{n(\overline{w_n}-1)}{2\pi i}\int_0^1 \frac{1}{1-r+r\overline{w_n}}dr \\
&= \frac{n(\overline{w_n}-1)}{2\pi i}\left(\frac{\ln(r(\overline{w_n}-1)+1)}{\overline{w_n}-1}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{n(\overline{w_n}-1)}{(2\pi i)(\overline{w_n}-1)}(\ln(\overline{w_n})-ln(1)) \\
&= \frac{n}{2\pi i}(\ln(e^{\frac{-2\pi i}{n}})-0) \\
&= \frac{n}{2\pi i}\frac{-2\pi i}{n} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Segue que $\gamma_0(r)$ é um caminho fechado que gira em torno do zero uma única vez no sentido horário.

Seja $\gamma : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dada por $\gamma(r,t) = \gamma_t(r)$. Note agora que os caminhos $\gamma_0(r)$ e $\gamma_1(r)$ são homotópicos em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, pois a função γ definida acima é uma função contínua tal que $\gamma(r,0) = \gamma_0(r)$ e $\gamma(r,1) = \gamma_1(r), \forall r \in [0,1]$.

Perceba que tudo que fizemos anteriormente foi mostrar que os índices dos caminhos fechados $\gamma_0(r)$ e $\gamma_1(r)$, em relação ao 0, são iguais a -1 e 0, respectivamente.

Como o índice de caminhos fechados no plano complexo sem a origem é invariante por homotopia, isso contradiz o Teorema 12. Absurdo.

Segue que $d \geq \sqrt{2-|1-w_n|}-1$. ■

3 MATRIZES AUTO-ADJUNTAS QUE QUASE COMUTAM - UMA BREVE DEMONTRAÇÃO DE UM TEOREMA DE HUAXIN LIN

Neste capítulo iremos trabalhar com somas diretas de C*-álgebras de matrizes. Vamos começar provando que dadas duas C*-álgebras A e B sua soma direta será uma C*-álgebra definindo uma norma adequada. Sabemos que definindo as operações de soma, multiplicação e involução entrada-a-entrada, o conjunto

$$A \oplus B = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\}$$

é uma *-álgebra. Ademais, definindo a norma de um elemento $(a,b) \in A \oplus B$ como

$$\|(a,b)\| = \max\{\|a\|, \|b\|\},$$

queremos provar que $A \oplus B$ é uma *-álgebra normada. Para isso, precisamos mostrar que dados $(a,b) \in A$ e $(c,d) \in B$ teremos

$$\|(a,c)(b,d)\| \leq \|(a,b)\|\|(c,d)\|.$$

Sejam $(a,b) \in A$ e $(c,d) \in B$. Note que

$$\|(a,b)(c,d)\| = \|(ac,bd)\| = \max\{\|ac\|, \|bd\|\}.$$

Como A e B são *-álgebras normadas, temos que $\|ac\| \leq \|a\|\|c\|$ e $\|bd\| \leq \|b\|\|d\|$. Daí,

$$\max\{\|ac\|, \|bd\|\} \leq \max\{\|a\|\|c\|, \|b\|\|d\|\}.$$

Agora, observe que:
$\|a\| \leq \max\{\|a\|, \|b\|\} = \|(a,b)\|$ e $\|c\| \leq \max\{\|c\|, \|d\|\} = \|(c,d)\|$. Logo, temos que

$$\|a\|\|c\| \leq \|(a,b)\|\|(c,d)\|.$$

Analogamente, $\|b\|\|d\| \leq \|(a,b)\|\|(c,d)\|$.
Assim, temos que $\max\{\|a\|\|c\|, \|b\|\|d\|\} \leq \|(a,b)\|\|(c,d)\|$.

Logo,

$$\begin{aligned}\|(a,b)(c,d)\| &= \|(ac,bd)\|\\ &= \max\{\|ac\|,\|bd\|\}\\ &\leq \max\{\|a\|\|c\|,\|b\|\|d\|\}\\ &\leq \|(a,b)\|\|(c,d)\|\end{aligned}$$

provando que $A \oplus B$ é uma *-álgebra normada.

Também, $A \oplus B$ é uma *-álgebra de Banach, pois A e B o são. Finalmente, sabendo que A e B são C*-álgebras, a norma definida acima satisfaz a identidade C*, pois:

$$\begin{aligned}\|(a,b)^*(a,b)\| &= \|(a^*a,b^*b)\|\\ &= \max\{\|a^*a\|,\|b^*b\|\}\\ &= \max\{\|a\|^2,\|b\|^2\}\\ &= \max\{\|a\|,\|b\|\}^2\\ &= \|(a,b)\|^2.\end{aligned}$$

Concluindo assim que $A \oplus B$ é uma C*-álgebra. Ademais, $A \oplus B$ é unital se, e somente se, A e B são unitais e, neste caso, a unidade de $A \oplus B$ será dada por $1_{A\oplus B} = (1_A, 1_B)$.

Note também que dado um conjunto finito de C*-álgebras, digamos $\{A_1, \ldots, A_n\}$, podemos generalizar o que fizemos acima e provar que, definindo as operações entrada-a-entrada e a norma da mesma maneira que fizemos acima, o conjunto $\oplus_{i=1}^n A_i$ é uma C*-álgebra.

Vamos agora generalizar esta ideia para uma família qualquer de C*-álgebras, adotando uma norma adequada. Seja $\{S_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$, em que Λ é um conjunto de índices, uma família de C*-álgebras.

Sabemos que o produto cartesiano, $\displaystyle\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma *-álgebra definindo as operações entrada-a-entrada. Considere o seguinte conjunto:

$$\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha = \left\{(s_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha \mid \sup_{\alpha\in\Lambda} \|s_\alpha\| < \infty\right\}.$$

Vamos provar que $\displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma sub-*-álgebra de $\displaystyle\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$. Para isso, precisamos mostrar que $\displaystyle\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma sub-álgebra auto-adjunta de $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$.

Claro que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma sub-álgebra de $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ pois, $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma *-álgebra com operações definidas entrada-a-entrada e pela definição dos elementos de S. Também temos que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é auto adjunta, pois dado $(s_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, temos que $\|s_\alpha^*\| = \|s_\alpha\|$ e, portanto,

$$\sup_{\alpha\in\Lambda} \|s_\alpha^*\| = \sup_{\alpha\in\Lambda} \|s_\alpha\| < \infty.$$

Segue que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma sub-*-álgebra de $\prod_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$. Agora, na sub-*-álgebra $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, defina a norma de um elemento $(s_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ por:

$$\|(s_\alpha)_\alpha\| = \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha\|\}.$$

Note também que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma *-álgebra normada, pois dados $(s_\alpha)_\alpha, (r_\alpha)_\alpha \in \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, temos que:

$$\begin{aligned}
\|(s_\alpha)_\alpha (r_\alpha)_\alpha\| &= \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha r_\alpha\|\} \\
&\leq \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha\|\|r_\alpha\|\} \\
&\leq \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha\|\} \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|r_\alpha\|\} \\
&= \|(s_\alpha)_\alpha\|\|(r_\alpha)_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Logo, $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma *-álgebra normada. Vamos mostrar agora que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma álgebra de Banach.

Para isso, precisamos mostrar que toda sequência de Cauchy em $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é convergente. Note que dada uma sequência de Cauchy $(u_n)_n$ em $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $u_n = (s_\alpha^n)_\alpha$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $((s^n_\alpha)_\alpha)_n$ uma sequência de Cauchy em $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$.

Como $((s^n_\alpha)_\alpha)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, l \geq n_0$, temos $\|(s^k_\alpha)_\alpha - (s^l_\alpha)_\alpha\| < \varepsilon$. Daí, para aquele $n_0 \in \mathbb{N}$, $k, l \geq n_0$ e $\alpha \in \Lambda$, temos:

$$\begin{aligned} \|s^k_\alpha - s^l_\alpha\| &\leq \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s^k_\alpha - s^l_\alpha\|\} \\ &= \|(s^k_\alpha)_\alpha - (s^l_\alpha)_\alpha\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto significa que, para cada $\alpha \in \Lambda$, a sequência $(s^n_\alpha)_n$ é uma sequência de Cauchy em S_α.

Mas, para cada $\alpha \in \Lambda$, S_α é uma álgebra de Banach. Logo, $(s^n_\alpha)_\alpha$ converge para algum $b_\alpha \in S_\alpha$.

Seja $b = (b_\alpha)_\alpha$. Novamente, como $((s^n_\alpha)_\alpha)_n$ é uma sequência de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k, l \geq N$ temos que $\|(s^k_\alpha)_\alpha - (s^l_\alpha)_\alpha\| < \varepsilon$, isto é, $\|s^k_\alpha - s^l_\alpha\| < \varepsilon$ para todo α.

Agora, quando $l \to \infty$ temos que $\|s^k_\alpha - s^l_\alpha\| < \|s^k_\alpha - b_\alpha\| < \varepsilon$ e, então, $\|(s^k_\alpha)_\alpha - (b_\alpha)_\alpha\| < \varepsilon, \forall k \geq N$. Isso significa que $(b_\alpha)_\alpha \in S$ e que $((s^n_\alpha)_\alpha)_n \to (b_\alpha)_\alpha$ em $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$. Logo, $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma álgebra de Banach.

Pelo que fizemos acima, temos que $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma *-álgebra de Banach. Falta agora mostrarmos apenas a identidade C* para que $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ seja uma C*-álgebra. Dado $(s_\alpha)_\alpha \in \bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$, temos:

$$\begin{aligned} \|(s_\alpha)^*_\alpha(s_\alpha)_\alpha\| &= \|(s^*_\alpha)_\alpha(s_\alpha)_\alpha\| \\ &= \|(s^*_\alpha s_\alpha)_\alpha\| \\ &= \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s^*_\alpha s_\alpha\|\} \\ \text{(para cada } \alpha\text{, } S_\alpha \text{ é uma C*-álgebra)} &= \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha\|^2\} \\ &= (\sup_{\alpha\in\Lambda}\{\|s_\alpha\|\})^2 \\ &= \|(s_\alpha)_\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Segue que vale a identidade C* e, portanto, $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ é uma C*-álgebra.

Definimos $\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ como sendo a *C*-soma direta* da família de

C*-álgebras $\{S_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$.

Agora, seja $\{S_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ uma família de C*-álgebras indexadas pelo conjunto dos números naturais. Como fizemos acima, considere a C*-soma direta desta família de C*-álgebras, denotada por S, e o seguinte subconjunto de S:

$$I = \{(a_i)_i \in S \,|\, \lim_{i\to\infty} \|a_i\| = 0\}.$$

Note que, dado $(a_i)_i \in I$, dizer que $\lim\limits_{i\to\infty} \|a_i\| = 0$, é o mesmo que dizer que para todo $\varepsilon > 0$, existe apenas uma quantidade finita de índices $i \in \mathbb{N}$ para os quais $\|a_i\| \geq \varepsilon$.

Vamos mostrar que I é um ideal de S. Para isso, como S é uma C*-álgebra, precisamos mostrar que I é um ideal fechado de S.

Vamos começar mostrando que I é um ideal de S.

Para isso, dados $(a_i)_i, (b_i)_i \in I$ e $(s_i)_i \in S$ precisamos mostrar que $(a_i)_i - (b_i)_i \in I$ e que $(a_i)_i(s_i)_i, (s_i)_i(a_i)_i \in I$.

Para mostrarmos que $(a_i)_i - (b_i)_i \in I$, precisamos mostrar que $\lim\limits_{i\to\infty} \|a_i - b_i\| = 0$. Note que para cada $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|a_i - b_i\| \leq \|a_i\| + \|b_i\|$. Como $\lim\limits_{i\to\infty} \|a_i\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|b_i\| = 0$ e, a adição em S é conjuntamente contínua, temos que $\lim\limits_{i\to\infty} \|a_i - b_i\|$ existe e é igual a zero. Logo, $(a_i)_i - (b_i)_i \in I$.

Também temos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|a_i s_i\| \leq \|a_i\|\|s_i\|$, pois S é uma C*-álgebra. Como $\lim\limits_{i\to\infty} \|a_i\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|s_i\| = 0$ e, a multiplicação em S é conjuntamente contínua, temos que $\lim_{i\to\infty} \|a_i s_i\|$ existe e é igual a zero. Logo, $(a_i)_i(s_i)_i \in I$.

Analogamente, prova-se que $(s_i)_i(a_i)_i \in I$.

Portanto, I é um ideal de S.

Para mostrarmos que I é fechado, considere a sequência $((a_i^n)_i)_n$ em I tal que $((a_i^n)_i)_n \to a \in S$. Precisamos mostrar que $a \in I$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $((a_i^n)_i)_n \to a$ temos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m \geq N_1$, $\|a_m^i - a\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Além disso, como $(a_i^{N_1})_i$ é uma sequência em I temos que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall l \geq N_2$, $\|a_i^l\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$. Daí, temos que $\forall k \geq N$

$$\begin{aligned} \|a\| &= \|a - a_i^k + a_i^k\| \\ &\leq \|a - a_i^k\| + \|a_i^k\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $a \in I$. Segue que I é fechado.

Segue que I é um ideal fechado de S.

Note que tudo que fizemos até aqui foi mostrar que dada uma família de C*-álgebras, indexadas por um conjunto de índices qualquer, podemos definir uma nova C*-álgebra, que denotamos por $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$, tomando certos cuidados. Em seguida, definimos a C*-soma direta S de uma família de C*-álgebras indexada pelos naturais e mostramos que o subconjunto I, que é o conjunto de todas as sequências que convergem para zero, é um ideal de S.

Agora, considere uma sequência de C*-álgebras de matrizes indexadas por $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(M_{x_n}(\mathbb{C}))_n$. Seja M a sua C*-soma direta como fizemos acima:

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_{x_n}(\mathbb{C}) = \{(a_n)_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} M_{x_n}(\mathbb{C}) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty\}.$$

Seja A o ideal de M como visto anteriormente, isto é,

$$A = \{(a_n)_n \mid (a_n)_n \in M, \|a_n\| \to 0\}.$$

Como A é um ideal de M, podemos considerar o quociente M/A e a função quociente $\pi : M \to M/A$.

O lema abaixo nos diz que todo elemento em M/A possui uma decomposição polar unitária.

Lema 14. Seja $x \in M/A$. Então $x = u|x|$, em que u é um elemento unitário de M/A.

Demonstração. Primeiramente lembre que toda matriz com coeficientes complexos possui uma decomposição polar unitária, em outras palavras, se $A \in M_n(\mathbb{C})$ então $A = U_1|A|$ em que U_1 é uma matriz unitária e $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$. Sendo assim, se $(a_n)_n \in M$ então $a_n \in M_{x_n}(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}$, e assim podemos descrever essa sequência como uma sequência de decomposições polares unitárias, digamos $a_n = u_n|a_n|$ em $M_{x_n}(\mathbb{C})$. Queremos provar que $(a_n)_n = (u_n)_n(|a_n|)_n$.

Para isso, vamos provar que $(u_n)_n, (|a_n|)_n \in M$, $(u_n)_n$ é unitário de M e que $|(a_n)_n| = (|a_n|)_n$.

Note que $(u_n)_n \in M$, pois cada entrada dessa sequência de matrizes é uma matriz unitária e, portanto, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| < \infty$. Também, como $(a_n)_n \in M$ e M é uma C*-álgebra, sabemos que a_k e $|a_k|$ possuem mesma norma, $\forall k$.

Tomando o supremo para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos que

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \||a_n|\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Isto significa que $(|a_n|)_n \in M$.

Note agora que $(u_n)_n(u_n)^*_n = (u_n)_n(u^*_n)_n = (u_n u^*_n)_n = (id_n)_n$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n é uma matriz unitária.

Analogamente, prova-se que $(u_n)^*_n(u_n)_n = (id_n)_n$.

Falta provarmos que $|(a_n)_n| = (|a_n|)_n$. Para isso, lembre que $|(a_n)_n| = ((a_n)^*_n(a_n))^{\frac{1}{2}}$.

Denote $((a_n)^*_n(a_n)_n)_n$ por $(b_n)_n$. Perceba que para todo $n \in \mathbb{N}$, b_n é um elemento positivo de $M_{x_n}(\mathbb{C})$, pois $a^*_n a_n$ o é. Note também que dado um polinômio com coeficientes complexos na variável z, digamos $p(z)$, temos que

$$p((b_n)_n) = (p(b_n))_n.$$

Sabe-se também que para toda $f \in C(\sigma((b_n)_n))$, f é limite uniforme de polinômios, e portanto temos que $f((b_n)_n) = (f(b_n))_n$, pois para todo k o espectro do elemento b_k está contido no espectro de $(b_n)_n$. Usando que o elemento b_n é positivo para todo n (e assim, $(b_n)_n$ é positivo em M) e que a raiz quadrada é uma função contínua, concluímos que

$$\begin{aligned}|(a_n)_n| &= ((a_n)^*_n(a_n)_n)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((a^*_n a_n)_n)^{\frac{1}{2}} \\ &= ((a^*_n a_n)^{\frac{1}{2}})_n \\ &= (|a_n|)_n.\end{aligned}$$

Portanto, $(a_n)_n = (u_n)_n(|a_n|)_n$, com $(u_n)_n$ unitário, ou seja, todo elemento em M possui uma decomposição polar unitária.

Seja $\pi : M \to M/A$ a função quociente. Sabemos que π é contínua e sobrejetora, portanto dado $x \in M/A$ existe $y' \in M$ tal que $\pi(y') = x$. Como $y' \in M$ então, pelo que discutimos no parágrafo anterior, $y' = v|y'|$, para algum elemento unitário $v \in M$.

Além disso, sabemos que π é um *-homomorfismo contínuo e a função módulo é contínua, portanto $\pi(|y'|) = |\pi(y')| = |x|$. Logo, temos que:

$$\begin{aligned} x &= \pi(y') \\ &= \pi(v|y'|) \\ &= \pi(v)\pi(|y'|) \\ &= \pi(v)|x|. \end{aligned}$$

Sabendo que π é um *-homomorfismo e v é um unitário em M, temos que $\pi(v)$ é um unitário de M/A.

Portanto, basta tomar $u = \pi(v)$ que podemos escrever $x = u|x|$ em que u é um unitário de M/A. ■

Antes de começarmos o próximo lema vamos relembrar o teorema do mapeamento espectral, pois iremos utilizá-lo daqui em diante inúmeras vezes. Para uma demonstração deste teorema, consulte por exemplo (MURPHY, 1990) Teorema 2.1.14.

Teorema 15. Sejam A uma C*-álgebra unital e $a \in A$ normal. Se $f \in C(\sigma(a))$ então $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

O próximo lema vai nos dizer que todo elemento normal de M/A pode ser aproximado por um elemento normal e invertível de M/A.

Lema 16. Seja $N(M/A) = \{x \in M/A \,|\, x \text{ é normal}\}$. Então, o conjunto dos elementos normais e invertíveis de M/A é denso em $N(M/A)$.

Demonstração. Seja $x \in N(M/A)$ e $\varepsilon > 0$. Precisamos mostrar que existe $y \in M/A$ normal e invertível tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Pelo Lema 14 podemos escrever $x = u|x|$ com u unitário de M/A. Como x é normal, temos que $x^*x = xx^*$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} (u|x|)^*u|x| &= u|x|(u|x|)^* \\ |x|u^*u|x| &= u|x||x|u^* \\ |x|^2 &= u|x|^2u^*. \end{aligned}$$

Logo, $|x|^2 = u|x|^2u^* = u|x||x|u^* = u|x|u^*u|x|u^* = (u|x|u^*)^2$.

Como a função raiz quadrada é contínua, podemos concluir que $|x| = (|u|x|u^*|)$. Mas, como $|x|$ é positivo existe um elemento positivo s tal que $|x| = ss^*$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} |x| &= ss^* \\ u|x|u^* &= uss^*u^* \\ u|x|u^* &= (us)(us)^*. \end{aligned}$$

Portanto, $u|x|u^*$ é positivo. Logo, $|x| = (|u|x|u^*|) = u|x|u^*$.
Dessa igualdade, temos que:

$$\begin{aligned}
|x| &= u|x|u^* \\
|x|u &= u|x|u^*u \\
|x|u &= u|x|.
\end{aligned}$$

Isto significa que u comuta com $|x|$. Segue também da igualdade acima que $u^*|x| = |x|u^*$.

Defina $y = u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})$. Note que y é normal, pois:

$$\begin{aligned}
yy^* &= [u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})][u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})]^* \\
&= [u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})][(|x| + \varepsilon 1_{M/A})^* u^*] \\
&= [u|x| + u\varepsilon][|x|u^* + \varepsilon u^*] \\
&= u|x||x|u^* + u|x|\varepsilon u^* + u\varepsilon|x|u^* + u\varepsilon\varepsilon u^* \\
&= |x|uu^*|x| + uu^*\varepsilon|x| + \varepsilon|x| + \varepsilon^2 uu^* \\
&= |x|^2 + 2\varepsilon|x| + \varepsilon 1_{M/A}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^*y &= [u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})]^*[u(|x| + \varepsilon 1_{M/A})] \\
&= [|x|u^* + \varepsilon u^*][u|x| + u\varepsilon] \\
&= |x|u^*u|x| + |x|u^*u\varepsilon + \varepsilon u^*u|x| + \varepsilon u^*u\varepsilon \\
&= |x|^2 + \varepsilon|x| + \varepsilon|x| + \varepsilon^2 1_{M/A} \\
&= |x|^2 + 2\varepsilon|x| + \varepsilon 1_{M/A}.
\end{aligned}$$

Note que $|x| + \varepsilon 1_{M/A}$ é auto-adjunto, pois é a soma de dois elementos auto-adjuntos. Agora, como $|x|$ é positivo, sabe-se que $\sigma(|x|) \subseteq [0, +\infty)$. Assim, pelo teorema do mapeamento espectral, temos que $\sigma(|x| + \varepsilon 1_{M/A}) \subseteq [\varepsilon, +\infty)$. Isto significa que 0 não pertence ao espectro de $|x| + \varepsilon 1_{M/A}$.

Portanto, $|x| + \varepsilon 1_{M/A} \in Inv(M/A)$.

Também ,temos que u é invertível, pois é unitário. Como y é igual ao produto de dois invertíveis, segue que y é invertível.

Finalmente, lembrando que $x = u|x|$, temos:

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|u|x| - u|x| - u\varepsilon 1_{M/A}\| \\
&= \| - \varepsilon u 1_{M/A}\| \\
&\leq |\varepsilon|\|u\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ou seja, provamos que y é normal e invertível e $\|x - y\| \leq \varepsilon$, como queríamos. ■

Observação 17. No Lema acima provamos que todo elemento normal pode ser aproximado por um elemento normal e invertível. Sabemos que $Inv(M/A)$ é um conjunto aberto de M/A (veja (MURPHY, 1990), Teorema 1.2.3). Assim, $N(M/A) \cap Inv(M/A)$ é um conjunto relativamente aberto de $N(M/A)$, pois é a intersecção do subespaço topológico $N(M/A)$ e de um conjunto aberto de M/A, respectivamente.

Seja $F \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto finito ou enumerável. Para o próximo lema, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, defina os seguintes conjuntos:

$$B = \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } \sigma(y) \cap F = \emptyset\}.$$
$$B_\lambda = \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } \lambda \notin \sigma(y)\}.$$

Lema 18. Seja $F \subseteq \mathbb{C}$ um subconjunto finito ou enumerável. O conjunto B definido acima é denso em $N(M/A)$.

Demonstração. Note que:

$$\begin{aligned} B &= \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } \sigma(y) \cap F = \emptyset\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in F} \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } \lambda \notin \sigma(y)\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in F} \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } y - \lambda 1_{M/A} \text{ é invertível}\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in F} B_\lambda. \end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} B_0 &= \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e } y - 0.1_{M/A} \text{ é invertível}\} \\ &= \{y \in M/A \,|\, y \text{ é normal e invertível}\} \\ &= N(M/A) \cap Inv(M/A). \end{aligned}$$

Note que no Lema 16 provamos que B_0 é denso e, pela Observação 17, relativamente aberto em $N(M/A)$. Portanto, B_0 é denso e relativamente aberto em $N(M/A)$.

Nosso próximo passo será mostrar que para cada $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, B_λ é denso e relativamente aberto em $N(M/A)$. Em seguida, mostraremos que nosso conjunto B é uma intersecção enumerável de conjuntos densos e relativamente abertos em $N(M/A)$. Feito isso precisaremos apenas mostrar que $N(M/A)$ é um espaço de Baire, pois sabemos que num espaço de Baire a intersecção enumerável de conjuntos densos e relativamente abertos é densa[1], concluiremos que B é denso em $N(M/A)$.

Considere a função $\varphi : N(M/A) \to N(M/A)$ dada por $\varphi(x) = x + \lambda 1_{M/A}$. Vamos mostrar que φ é um homeomorfismo, ou seja, que φ é uma função bijetora,contínua e sua inversa também é contínua.

Temos:

(i) Injetividade: sejam $x_1, x_2 \in N(M/A)$ tais que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Daí,
$x_1 - \lambda 1_{M/A} = x_2 - \lambda 1_{M/A} \Rightarrow x_1 = x_2$.

(ii) Sobrejetividade: seja $y_1 \in N(M/A)$. Considere $x_1 = y_1 - \lambda 1_{M/A}$. Note que x_1 é normal, pois y_1 é normal. Daí, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1) &= \varphi(y_1 - \lambda 1_{M/A}) \\ &= y_1 - \lambda 1_{M/A} 1 + \lambda 1_{M/A} \\ &= y_1.\end{aligned}$$

(iii) Continuidade da φ: Seja $(x_n)_n$ uma sequência em $N(M/A)$ tal que $x_n \to x$. Precisamos mostrar que $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$. Note que $\varphi((x_n)_n) = (x_n + \lambda 1_{M/A})_n$ e que $\varphi(x) = x + \lambda 1_{M/A}$. Sabendo que a soma de sequências é feita entrada-a-entrada e como $x_n \to x$, temos que $x_n + (\lambda 1_{M/A})_n \to x + \lambda 1_{M/A}$. Segue que φ é contínua.

(iv) Continuidade da φ^{-1}: Como $\varphi : N(M/A) \to N(M/A)$ é dada por $\varphi(x) = x + \lambda 1_{M/A}$, temos que $\varphi^{-1} : N(M/A) \to N(M/A)$ é dada por $\varphi^{-1}(y) = y - \lambda 1_{M/A}$.

Seja $(y_n)_n$ uma sequência em $N(M/A)$ tal que $y_n \to y$. Precisamos mostrar que $\varphi^{-1}(y_n) \to \varphi^{-1}(y)$. Novamente, note que $\varphi^{-1}(y_n) = (y_n - \lambda 1_{M/A})_n$ e que $\varphi^{-1}(y) = y - \lambda 1_{M/A}$. Novamente, sabendo que a soma de sequências é feita entrada-a-entrada e como $y_n \to y$, temos que $y_n - \lambda 1_{M/A} \to y - \lambda 1_{M/A}$. Segue que φ^{-1} é contínua.

Por (i), (ii), (iii) e (iv), segue que φ é um homeomorfismo.

Agora, mostremos que $\varphi(B_0) = B_\lambda$.

Note que dado $y \in B_0$ qualquer, $\varphi(y) = y + \lambda 1_{M/A}$. Pelo teorema do mapeamento espectral, temos que $\sigma(\varphi(y)) = \varphi(\sigma(y))$ e $\varphi(\sigma(y)) = \{\mu + \lambda \,|\, \mu \in \sigma(y)\}$.

[1] Veja (NARICI; BECKENSTEIN, 2011) Teorema 11.6.6.

Sendo assim, para mostrarmos que $\varphi(B_0) = B_\lambda$, pelo modo que definimos os conjuntos B_0 e B_λ, precisamos mostrar que $0 \notin \sigma(y) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(\varphi(y))$.

Agora,

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \sigma(\varphi(y)) &\Leftrightarrow \lambda \neq \mu + \lambda, (\text{ para todo } \mu \in \sigma(y)) \\
&\Leftrightarrow \mu \neq 0, (\text{ para todo } \mu \in \sigma(y)) \\
&\Leftrightarrow 0 \notin \sigma(y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(B_0) = B_\lambda$.

Como B_0 é relativamente aberto e denso em $N(M/A)$ e φ é um homeomorfismo em $N(M/A)$, temos que para cada $\lambda \in F$, $\varphi(B_0) = B_\lambda$ é relativamente aberto e denso em $N(M/A)$. Mas, sabemos que $B = \bigcap\limits_{\lambda \in F} B_\lambda$ e que intersecção enumerável de abertos é um aberto. Logo, B é relativamente aberto e denso em $N(M/A)$.

Além disso, sabemos que $N(M/A)$ é fechado em M/A e, portanto, é um espaço métrico completo. Por conseguinte, temos que $N(M/A)$ é um espaço de Baire.

Segue que B é denso em $N(M/A)$.

■

Note que os Lemas 16 e 18 nos dizem que dado $\varepsilon > 0$, um elemento normal de M/A e um subconjunto finito/enumerável de $\mathbb{C}$, podemos encontrar um outro elemento normal de M/A de tal modo que o espectro desse novo elemento não terá os pontos do conjunto finito/enumerável e estará próximo do elemento original, a menos de ε. Sendo assim, temos o seguinte lema:

Lema 19. Para cada elemento normal $x \in M/A$, $F \subseteq \mathbb{C}$ subconjunto finito ou infinito enumerável e $\varepsilon > 0$, existe um elemento normal $y \in M/A$ tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$ e $\sigma(y) \cap F = \emptyset$.

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 16 e 18. ■

Em seguida definiremos o que é uma retração, pois iremos utilizar tais funções no nosso próximo lema.

Definição 20. Sejam X, Y espaços topológicos e $Y \subseteq X$. Uma *retração* de X em Y é uma função contínua $f : X \to Y$ tal que $f(y) = y, \forall y \in Y$.

Nesse caso, dizemos que Y é um *retrato* de X.

Exemplo 21. $X = \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \{\vec{0}\}$, dada por $f(\vec{x}) = \vec{0}$ é uma retração.

Exemplo 22. Sejam X a bola fechada unitária sem a origem na norma ∞ em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $X = [-1,1]^2 \backslash \{\vec{0}\}$ e $Y = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, \|v\|_\infty = 1\}$.

Vamos mostrar que existe uma retração $g : X \to Y$.

Lembrando que dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$, defina $g : X \to Y$ por $g(v) = \frac{v}{\|v\|_\infty}$. Claro que g é contínua, pois é composição de funções contínuas. Logo, g é uma retração.

Observe que a retração definida acima, resumidamente, leva pontos de X para sua borda da seguinte maneira: dado $v \in X$, o ponto $g(v)$ é dado pela intersecção de Y com a reta que passa pela origem e por v.

Vamos agora definir dois conjuntos que serão usados no próximo lema. Para cada $\varepsilon > 0$ considere a ε-malha Γ_ε em $\mathbb{C}$ e o reticulado correspondente Σ_ε que são os centros dos quadrados determinados por Γ_ε, definidos por:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in \varepsilon\mathbb{Z} \text{ ou } y \in \varepsilon\mathbb{Z}\},$$

$$\Sigma_\varepsilon = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in \varepsilon\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right) \text{ e } y \in \varepsilon\left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)\}.$$

O próximo lema irá nos dizer que, dado $\varepsilon > 0$, todo elemento normal de M/A pode ser aproximado por outro elemento normal com a propriedade de que o espectro desse novo elemento estará inteiramente contido no conjunto Γ_ε definido acima.

Lema 23. Para cada elemento normal $x \in M/A$ e $\varepsilon > 0$ existe um elemento normal $y \in M/A$ com $\sigma(y) \subseteq \Gamma_\varepsilon$ e $\|x - y\| < \varepsilon$.

Demonstração. Pela definição do conjunto Σ_ε, temos que Σ_ε é enumerável. Pela hipótese, $\varepsilon > 0$ e $x \in M/A$ é normal.

Logo, pelo Lema 19, existe um elemento normal $x_1 \in M/A$ tal que $\|x - x_1\| < (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})\varepsilon$ e $\sigma(x_1) \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$.

Agora queremos uma função $f : \mathbb{C}\backslash\Sigma_\varepsilon \to \Gamma_\varepsilon$ tal que essa função distribua todo elemento de $\mathbb{C}\backslash\Sigma_\varepsilon$ para a ε-malha Γ_ε. Para isso, iremos utilizar a ideia do exemplo 22: f é a função que faz, em cada quadrado da malha, o mesmo que a função g do exemplo 22. Para ver que a função f é contínua, basta provarmos que para toda bola aberta[2] B de

[2]Lembre que define-se a bola aberta em $\mathbb{C}$ da seguinte forma: dado $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{C}$, definimos a *bola aberta* de centro x e raio ε como sendo o conjunto $B = B(x, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |x - z| < \varepsilon\}$

$\mathbb{C}$, $f|_{B\backslash\Sigma_\varepsilon}$ o é.

Dado $z \in B\backslash\Sigma_\varepsilon$, escolha um quadrado da ε-malha ao qual z pertença. Translade o quadrado para até ele ficar com centro na origem, use uma transformação de escala para transformá-lo no intervalo $[-1,1]^2$ e aplique a função g do exemplo 22 no elemento deste quadrado que corresponde ao elemento original z. Em seguida, desfaça a transformação de escala e translade o quadrado de volta. Nesse instante teremos um novo elemento $f(z)$ que estará na fronteira do quadrado da ε-malha.

Note que a função $f|_{B\backslash\Sigma_\varepsilon}$ é contínua, pois é uma composição de processos contínuos.

Agora, a função f restrita a cada quadrado de $B\backslash\Sigma_\varepsilon$ é contínua e o valor de f em $z \in \Gamma_\varepsilon$ independe da escolha do quadrado. Por isso, $f|_{B\backslash\Sigma_\varepsilon}$ é contínua. Como B é arbitrário, segue que f é contínua.

Assim, $f : \mathbb{C}\backslash\Sigma_\varepsilon \to \Gamma_\varepsilon$ como acima é tal que $|f(z) - z| < \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_\varepsilon$, pois $\frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$ é a metade da diagonal de cada quadrado da ε-malha.

Assim, como x_1 é normal e $\sigma(x_1)$ está contido no domínio da f, podemos falar do cálculo funcional contínuo para o elemento normal x_1. Seja $y = f(x_1) \in M/A$. Considere também a função inclusão $f_1 : \sigma(x_1) \to \mathbb{C}$ tal que $f_1(z) = z, \forall z \in \sigma(x_1)$. Novamente, usando o cálculo funcional contínuo para o elemento normal x_1, temos $f_1(x_1) \in M/A$.

Note que pelo modo que definimos a função f, podemos concluir que $\|f_1 - f\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon$. Logo, sabendo que o cálculo funcional contínuo é um *-homomorfismo unital isométrico, temos:

$$\|x_1 - f(x_1)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon.$$

Note também que, pelo teorema do mapeamento espectral, $\sigma(y) = \sigma(f(x_1)) = f(\sigma(x_1)) \subseteq \Gamma_\varepsilon$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - f(x_1)\| \\ &= \|x - x_1 + x_1 - f(x_1)\| \\ &\leq \|x - x_1\| + \|x_1 - f(x_1)\| \\ &< \varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon + \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $\|x - y\| < \varepsilon$.

Segue que $\sigma(y) \subseteq \Gamma_\varepsilon$ e $\|x - y\| < \varepsilon$, como queríamos. ■

Seja A uma C*-álgebra com unidade. Sejam $p, q \neq 0$ projeções em A tais que $p + q = 1_A$. Sabemos que os subconjuntos $pAp = \{pap \,|\, a \in A\}$ e $qAq = \{qaq \,|\, a \in A\}$ são sub-C*-álgebras de A. Note que na sub-C*-álgebra pAp, p é uma unidade de pAp. Agora, se $x \in A$ e x comuta com p, então $pxp = p^2x = px = xp$. De forma análoga, podemos fazer $qxq = xq = qx$.

Além disso, se $x \in A$ é normal então $x = 1x = (p+q)x = px + qx = pxp + qxp$. Também, xp é normal pois:

$$\begin{aligned}
(xp)(xp)^* &= xppx^* \\
&= xpx^* \\
&= pxx^* \\
&= px^*x \\
&= x^*px \\
&= x^*ppx \\
&= px^*(xp) \\
&= (xp)^*(xp).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\sigma(x) = \sigma(pxp + qxq) \subseteq \sigma_{pAp}(pxp) \cup \sigma_{qAq}(qxq)$.

De fato, basta mostrar que $\rho_{pAp}(pxp) \cap \rho_{qAq}(qxq) \subseteq \rho(x)$. Dado $\lambda \in \rho_{pAp}(pxp) \cap \rho_{qAq}(qxq)$, sabemos que existem $pbp \in pAp$ e $qcq \in qAq$ tais que:

$$(pxp - \lambda p)pbp = pbp(pxp - \lambda p) = p,$$

$$(qxq - \lambda q)qcq = qcq(qxq - \lambda q) = q.$$

Precisamos mostrar que existe um elemento em A que é o inverso do elemento $x - \lambda 1_A$. Considere $d = pbp + qcq$.

Note que:

$$\begin{aligned}
(x - \lambda 1_A)d &= (x - \lambda 1_A)(pbp + qcq) \\
&= (x - \lambda 1_A)pbp + (x - \lambda 1_A)qcq \\
(\text{ } p \text{ e } q \text{ são projecões}) &= (x - \lambda 1_A)p^2pbp + (x - \lambda 1_A)q^2qcq \\
&= (xp^2 - \lambda p^2)pbp + (xq^2 - \lambda q^2)qcq \\
(p \text{ e } q \text{ comutam com } x) &= (pxp - \lambda p)pbp + (qxq - \lambda q)qcq \\
&= p + q = 1_A.
\end{aligned}$$

Logo, $(x - \lambda 1_A)d = 1_A$.

Analogamente, prova-se que $d(x - \lambda 1_A) = 1_A$.

Segue que $x - \lambda 1_A$ é inversível e, portanto, $\lambda \in \rho(x)$.

Dado X espaço topológico compacto Hausdorff, seja $B_\infty(X)$ a C*-álgebra das funções de X em $\mathbb{C}$ que são limitadas e Borel mensuráveis. Para o próximo lema precisaremos do cálculo funcional de Borel de um operador normal. O leitor que quiser saber mais a respeito deste cálculo funcional pode consultar, por exemplo, (MURPHY, 1990) p.66 Seção 2.5.

Todos os fatos citados anteriormente serão utilizados no nosso próximo lema.

Lema 24. Seja $x \in M/A$ normal. Suponha que V é relativamente aberto de $\sigma(x)$ e que V é homeomorfo ao intervalo aberto $(0,1)$. Então, para cada $\lambda_0 \in V$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in M/A$ normal tal que $\sigma(y) \subseteq \sigma(x) \backslash \{\lambda_0\}$ e $\|x - y\| < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $x \in M/A$ normal.

Como V é homeomorfo ao intervalo $(0,1)$, podemos tomar um aberto U de V tal que $\lambda_0 \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$, em que $\overline{U}$ é o fecho do conjunto U relativo a V, e $\operatorname{diam}(U) \leq \varepsilon$. Como V é homeomorfo ao intervalo $(0,1)$, V é homeomorfo ao círculo unitário menos um ponto. Sendo assim, escolha um homeomorfismo $f_0 : V \to \mathbb{T} \backslash \{-1\}$, em que $\mathbb{T}$ é o círculo unitário em $\mathbb{C}$.

Estenda f_0 para uma função contínua $f : \sigma(x) \to \mathbb{T}$ tomando $f(z) = -1, \forall z \in \sigma(x) \backslash V$. Como x é normal, podemos falar do cálculo funcional contínuo para x, digamos, $u = f(x) \in M/A$. Observe que u é unitário, pois $\sigma(u) = \sigma(f(x)) = f(\sigma(x)) \subseteq \mathbb{T}$ e u é normal.

Lembrando da função quociente π definida antes do Lema 19, tome $a \in M$ tal que $\pi(a) = u$, e seja $a = v|a|$ sua decomposição polar unitária com $v \in M$ unitário. Como $\pi(|a|) = |u| = 1_{M/A}$, temos que $u = \pi(v)$, pois:

$$\begin{aligned} u &= \pi(a) \\ &= \pi(v|a|) \\ &= \pi(v)\pi(|a|) \\ &= \pi(v) 1_{M/A} \\ &= \pi(v). \end{aligned}$$

Agora, como v é normal, pois v é unitário, podemos falar do cálculo funcional de Borel para v, digamos, $g(v) \in M/A, \forall g \in B_\infty(\sigma(v))$. Como U é relativamente aberto de V e f_0 é um homeomorfismo, $f_0(U) = W$ é relativamente aberto de $\mathbb{T} \backslash \{-1\}$ (e esse é relativamente aberto de

$\mathbb{T}$). Portanto, W é relativamente aberto de $\mathbb{T}$. Note que:

$$\begin{aligned} W &= f_0(U) \\ &= f(U) \\ &\subseteq f(\sigma(x)) \\ &= \sigma(f(x)) \\ &= \sigma(\pi(v)) \\ (\pi \text{ contrai espectro}) &\subseteq \sigma(v). \end{aligned}$$

Ou seja, temos que $W \subseteq \sigma(v)$. Mas, sabemos que v é unitário, portanto v é normal e $\sigma(v) \subseteq \mathbb{T}$ e, como W é relativamente aberto de $\mathbb{T}$, temos que W é relativamente aberto de $\sigma(v)$.

Logo, W é boreliano em $\sigma(v)$. Assim, a função característica $\mathbb{1}_W$, dada por

$$\mathbb{1}_W(z) = \begin{cases} 1, & \text{se } z \in W \\ 0, & \text{se } z \in \sigma(v) \backslash W. \end{cases} \tag{3.1}$$

é mensurável e limitada.

Logo, faz sentido fazermos $\widehat{\varphi}(\mathbb{1}_W) = \mathbb{1}_W(v)$, em que $\widehat{\varphi}$ é o *-homomorfismo isométrico $\widehat{\varphi} : B_\infty(\sigma(v)) \to M$. Como $\mathbb{1}_W$ é uma projeção em $B_\infty(\sigma(v))$ e $\widehat{\varphi}$ é um *-homomorfismo isométrico, temos que $\mathbb{1}_W(v)$ é uma projeção em M.

Defina $e := \pi(\mathbb{1}_W(v)) \in M/A$.

Suponha agora que $\varphi : \sigma(x) \to \mathbb{C}$ é uma função contínua tal que $\varphi|_{\sigma(x)\backslash V} \equiv 0$. Assim, a função $\varphi' : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi'(z) = \begin{cases} \varphi \circ f_0^{-1}(z), & \text{se } z \in \mathbb{T}\backslash\{-1\} \\ 0, & \text{se } z = -1. \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfaz $\varphi = \varphi' \circ f$: de fato, como φ é uma função que restrita a $\sigma(x)\backslash V$ é zero, precisamos considerar dois casos:

(1) Se $z \in \sigma(x)\backslash V$.

Nesse caso, temos que $\varphi(z) = 0$ e, por outro lado,

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ f)(z) &= \varphi'(f(z)) \\ &= \varphi'(-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) Se $z \in V$.

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}(\varphi' \circ f)(z) &= \varphi'(f(z)) \\ &= \varphi'(f_0(z)) \\ &= \varphi \circ f_0^{-1}(f_0(z)) \\ &= \varphi(f_0^{-1} f_0(z)) \\ &= \varphi(z).\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(z) = (\varphi' \circ f)(z), \forall z \in \sigma(x)$, portanto $\varphi = \varphi' \circ f$. Assim, com as notações adotadas acima, temos que

$$\varphi(x) = (\varphi' \circ f)(x) = \varphi'(f(x)) = \varphi'(u).$$

Agora, considere $f_1 : \sigma(v) \to \mathbb{C}$ a inclusão, isto é, para $z \in \sigma(v)$ temos $f_1(z) = z$. Note que $\mathbb{1}_W(v)$ e v comutam, pois:

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_W(v)v &= \widehat{\varphi}(\mathbb{1}_W)\widehat{\varphi}(f_1) \\ &= \widehat{\varphi}(\mathbb{1}_W f_1) \\ &= \widehat{\varphi}(f_1 \mathbb{1}_W) \\ &= \widehat{\varphi}(f_1)\widehat{\varphi}(\mathbb{1}_W) \\ &= v\mathbb{1}_W(v).\end{aligned}$$

Logo, $e = \pi(\mathbb{1}_W(v))$ comuta com $u = \pi(v)$.

Note que $\varphi' \in C(\mathbb{T})$, portanto podemos aproximar φ' uniformemente por uma sequência de polinômios nas variáveis z e $\overline{z}$. Isto sigifica que existem polinômios p_i, $i \in \mathbb{N}$, em z e $\overline{z}$ tal que

$$\varphi'(z) = \lim_{i \in \mathbb{N}} p_i(z, \overline{z}).$$

Usando o cálculo funcional contínuo, temos $\varphi'(u) = \lim_i p_i(u, u^*)$. Sabemos que e comuta com u e, portanto, com u^* também. Sendo assim, temos que e comuta com $p_i(u, u^*)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}e\varphi'(u) &= e \lim_{i \in \mathbb{N}} p_i(u, u^*) \\ &= \lim_{i \in \mathbb{N}} e p_i(u, u^*) \\ &= \lim_{i \in \mathbb{N}} p_i(u, u^*) e \\ &= \varphi'(u)e.\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi'(u) = \varphi(x)$ comuta com e.

Perceba que se φ é constante igual a 1 em U e $\varphi|_{\sigma(x)\backslash V} \equiv 0$, lembrando que $\varphi = \varphi' \circ f$, então $\varphi' \circ f$ é constante igual a 1 em U. Isto nos diz que φ' é constante igual a 1 em $W(= f_0(U))$, logo, $\varphi(x)e = e\varphi(x) = e$.

Perceba também que se φ se anula em $X\backslash U$, lembrando que $\varphi = \varphi' \circ f$, então $\varphi' \circ f$ se anula em $X\backslash U$. Isto significa que φ' se anula em $\mathbb{T}\backslash W$, logo, $\varphi(x)e = e\varphi(x) = \varphi(x)$.

Sabemos que $\sigma(x)$ é um espaço compacto Hausdorff, logo é normal. Portanto, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $h : \sigma(x) \to [0,1]$ tal que $h|_{\overline{U}} \equiv 1$ e $h|_{\sigma(x)\backslash V} \equiv 0$. Novamente, como x é normal podemos falar do cálculo funcional contínuo para x. Seja $h(x) \in M/A$. Pelo que discutimos no parágrafo anterior e, sabendo que $h|_{\overline{U}} \equiv 1$, temos que $h(x)e = eh(x) = e$.

Agora, como a função $h' : \sigma(x) \to \mathbb{C}$, definida por $h'(z) = zh(z)$, se anula em $\sigma(x)\backslash V$, temos:

$$\begin{aligned} xe &= xh(x)e \\ &= exh(x) \\ &= eh(x)x \\ &= ex. \end{aligned}$$

Ou seja, e comuta com x.

Vamos mostrar agora que

$$\sigma(xe)_{e(M/A)e} \subseteq \overline{U} \text{ e } \sigma(x(1-e))_{(1-e)(M/A)(1-e)} \subseteq \sigma(x)\backslash U.$$

Para isso, é suficiente mostrar que para todo par de funções contínuas $\phi, \psi : \sigma(x) \to \mathbb{C}$, tais que ϕ se anula em $\overline{U}$ e é igual a 1 em $\sigma(x)\backslash U$ e ψ se anula em $\sigma(x)\backslash U$, temos que $\phi(xe) = 0$ e $\psi(x(1-e)) = 0$.

É suficiente, pois: suponha que $\sigma_{e(M/A)e}(xe) \subsetneq \overline{U}$.

Isto significa que, existe $\lambda \in \sigma_{e(M/A)e}(xe)$ tal que $\lambda \notin \overline{U}$. Precisamos provar que se $\lambda \in \sigma_{e(M/A)e}(xe)$ então $\lambda \in \sigma(x)$.

Dado $\beta \in \rho(x)$ temos que $x - \beta 1_{M/A}$ é inversível em M/A. Seja b o inverso de $x - \beta 1_{M/A}$.

Afirmamos que ebe é o inverso do elemento $xe - \beta e$ em $e(M/A)e$:

de fato, usando que e comuta com x, temos

$$\begin{aligned}(xe-\beta e)(ebe) &= xe^2be-\beta e^2be\\ &= xebe-\beta ebe\\ &= exbe-e\beta be\\ &= e[(x-\beta 1_{M/A})b]e\\ &= e.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ebe)(xe-\beta e) &= ebexe-ebe\beta e\\ &= ebex-ebe\beta\\ &= ebxe-eb\beta e\\ &= e[b(x-\beta 1_{M/A})]e.\end{aligned}$$

Ou seja, $(xe-\beta e)(ebe)=(ebe)(xe-\beta e)=e$, provando o afirmado.

Segue que $\rho(x)\subseteq\rho(xe)$ e, portanto, $\sigma_{e(M/A)e}(xe)\subseteq\sigma(x)$.

Sabemos que $\sigma(x)$ é um espaço compacto Hausdorff, logo é normal. Portanto, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $\varphi:\sigma(x)\to[0,1]$ tal que $\varphi|_{\overline{U}}\equiv 0$ e $\varphi|_{\sigma(x)}\equiv 1$.

Pelo que vimos acima, temos que $\varphi(xe)=0$. Agora, pelo teorema do mapeamento espectral, temos que

$$\sigma_{e(M/A)e}(\varphi(xe))=\varphi(\sigma_{e(M/A)e}(xe)).$$

Logo, $1=\varphi(\lambda)\in\sigma_{e(M/A)e}(\varphi(xe))$. Mas isso é um absurdo, pois $\varphi(xe)=0$.

Sendo assim, vamos mostrar agora que $\phi(xe)=0$ e $\psi(x(1-e))=0$.

Para a C*-álgebra $e(M/A)e$ temos:

$$\begin{aligned}\phi(exe) &= \phi(xe)\\ \text{(aproximando } \phi \text{ por polinômios)} &= \phi(x)e\\ &= e-(1-\phi(x))e\\ &= e-e\\ &= 0.\end{aligned}$$

Já para a C*-álgebra $(1-e)(M/A)(1-e)$, temos:

$$\begin{aligned}
\psi((1-e)x(1-e)) &= \psi(x(1-e)) \\
\text{(aproximando } \psi \text{ por polinômios)} &= \psi(x)(1-e) \\
&= \psi(x) - \psi(x)e \\
&= \psi(x) - \psi(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue que $\phi(xe) = 0$ e $\psi(x(1-e)) = 0$. Logo, $\sigma(xe)_{e(M/A)e} \subseteq \overline{U}$ e $\sigma(x(1-e))_{(1-e)(M/A)(1-e)} \subseteq \sigma(x)\backslash U$.

Escolha $\lambda_1 \in U\backslash\{\lambda_0\}$ e seja $y = \lambda_1 e + (1-e)x$.

Como e comuta com x e x^*, temos que $(1-e)$ comuta com x e x^*. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned}
yy^* &= (\lambda_1 e + (1-e)x)(\lambda_1 e + (1-e)x)^* \\
&= (\lambda_1 e + (1-e)x)(\overline{\lambda_1} e + (1-e)x^*) \\
&= \lambda_1 e\overline{\lambda_1} e + \lambda_1 e(1-e)x^* + (1-e)x\overline{\lambda_1} e + (1-e)x(1-e)x^* \\
&= \lambda_1\overline{\lambda_1} e + \overline{\lambda_1} ex(1-e) + x(1-e)x^* \\
&= \lambda_1\overline{\lambda_1} e + x(1-e)x^*.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^*y &= (\lambda_1 e + (1-e)x)^*(\lambda_1 e + (1-e)x) \\
&= \overline{\lambda_1} e\lambda_1 e + \lambda_1 e(1-e)x + (1-e)x^*\lambda_1 e + (1-e)x^*(1-e)x \\
&= \lambda_1\overline{\lambda_1} e + \overline{\lambda_1} ex(1-e) + x(1-e)x^* \\
&= \lambda_1\overline{\lambda_1} e + x(1-e)x^*.
\end{aligned}$$

Isto prova que y é normal.

Note que y é escrito como a soma de elementos das C*-álgebras $e(M/A)e$ e $(1-e)(M/A)(1-e)$. Pelo que discutimos antes de iniciarmos este lema, temos:

$$\begin{aligned}
\sigma(y) = \sigma(\lambda_1 e + (1-e)x) &\subseteq \\
&\subseteq \sigma_{e(M/A)e}(\lambda e) \cup \sigma_{(1-e)(M/A)(1-e)}((1-e)x) \\
&\subseteq \{\lambda_1\} \cup \sigma(x)\backslash U \\
&\subseteq \sigma(x)\backslash\{\lambda_0\}.
\end{aligned}$$

Novamente usando a função inclusão $f_1 : \sigma_{e(M/A)e}(xe) \to \mathbb{C}$ e o cálculo funcional contínuo, temos que $xe - \lambda_1 e = (f_1 - \lambda_1 1_{e(M/A)e})(xe)$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|x-y\| &= \|x-\lambda_1 e - x + ex\| \\
&= \|xe - \lambda_1 e\| \\
&= \|f_1 - \lambda_1 1_{e(M/A)e}\|_{C(\sigma_{e(M/A)e}(xe))} \\
&= \sup_{z\in\sigma_{e(M/A)e}(xe)} |f_1(z) - \lambda_1 1_{e(M/A)e}(z)| \\
&= \sup_{z\in\sigma_{e(M/A)e}(xe)} |z-\lambda_1| \\
&\leq \sup_{z\in\overline{U}} |z-\lambda_1| \\
&\leq \sup_{z,w\in\overline{U}} |z-w| \\
&= \operatorname{diam}(\overline{U}) \\
&= \operatorname{diam}(U) \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Segue que y é normal, $\sigma(y) \subseteq \sigma(x)\backslash\{\lambda_0\}$ e $\|x-y\| \leq \varepsilon$. ■

Nosso último lema, antes de provarmos um dos teoremas de Huaxin Lin, nos diz que todo elemento normal de M/A que, para algum $\delta > 0$, possui seu espectro contido em Γ_δ pode ser aproximado por um elemento normal de M/A com espectro finito.

Lema 25. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in M/A$ normal tal que $\sigma(x) \subseteq \Gamma_\delta$, para algum $\delta > 0$. Então existe $y \in M/A$ normal tal que $\sigma(y)$ é finito e $\|x-y\| < \varepsilon$.

Demonstração. Suponha que $x \in M/A$ é normal, e que $\delta > 0$ é tal que $\sigma(x) \subseteq \Gamma_\delta$. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer.

Como $\sigma(x)$ é compacto, temos que $\sigma(x)$ é limitado e, por hipótese, $\sigma(x) \subseteq \Gamma_\delta$. Com isso, temos que $\sigma(x)$ está contido na união de uma quantidade finita de segmentos de reta em $\mathbb{C}$, digamos C.

Observe que é possível retirar de C uma quantidade finita de pontos, todos no interior de abertos relativos de C homeomorfos ao intervalo $(0,1)$, de modo que as componentes conexas do conjunto restante tenham todas diâmetros menores que $\frac{\varepsilon}{2}$. (Intuitivamente, estamos tirando pontos do interior dos segmentos que formam C, de tal modo que os pedaços restantes sejam pequenos).

Como $\sigma(x) \subseteq C$, podemos fazer o mesmo com espectro de x: é possível retirar de $\sigma(x)$ uma quantidade finita de pontos, todos no interior de abertos relativos de $\sigma(x)$ homeomorfos ao intervalo $(0,1)$, de modo que as componentes conexas do conjunto restante tenham todas diâmetros menores que $\frac{\varepsilon}{2}$. Chamaremos estes pontos de $\mu_1, \ldots, \mu_n$. (Note que não estamos dizendo que há apenas uma quantidade finita de componentes conexas em $\sigma(x)$, pois $\sigma(x)$ pode ter uma infinidade de componentes conexas; porém, apenas uma quantidade finita delas tem diâmetros maiores ou iguais a $\frac{\varepsilon}{2}$. Isto é forçado pelo fato de que $\sigma(x) \subseteq \Gamma_\delta$ e pela característica de Γ_δ.)

Usando o Lema 24 para $x \in M/A$ e $\mu_1 \in \sigma(x)$ como no parágrafo anterior, temos que existe um elemento normal $x_1 \in M/A$ tal que $\|x - x_1\| < \frac{\varepsilon}{2n}$ e $\sigma(x_1) \subseteq \sigma(x) \backslash \{\mu_1\}$.

Seja $i_2 \in \{2, \ldots, n\}$ o menor tal que $\mu_{i_2} \in \sigma(x_1)$. Temos então dois casos para analisar:

(1) Se μ_{i_2} está no interior de um aberto relativo de $\sigma(x_1)$ homeomorfo ao intervalo $(0,1)$, use novamente o Lema 24, agora para os elementos $x_1 \in M/A$ e $\mu_{i_2} \in \sigma(x_1)$, para obter um elemento normal $x_2 \in M/A$ tal que $\|x_1 - x_2\| < \frac{\varepsilon}{2n}$ e $\sigma(x_2) \subseteq \sigma(x_1) \backslash \{\mu_{i_2}\}$.

(2) Se for o caso em que μ_{i_2} não esteja no interior de um aberto relativo de $\sigma(x_1)$ homeomorfo ao intervalo $(0,1)$, então não podemos usar o Lema 24 para obter um novo elemento próximo de $x_1 \in M/A$, removendo μ_{i_2} de seu espectro; porém, lembrando que queremos obter um elemento normal próximo de x com componentes conexas de diâmetros menores que $\frac{\varepsilon}{2}$, vemos que este caso não é problema, pois: não conseguiremos retirar μ_{i_2} do espectro desse novo elemento, mas no passo anterior acabamos removendo todo um pedaço do espectro de x que tem μ_{i_2} na sua fronteira, ao criar $\sigma(x_1)$ (de modo que μ_{i_2} não esteja mais no interior de um aberto relativo de $\sigma(x_1)$ homeomorfo ao intervalo $(0,1)$).

A partir de agora, basta repetirmos o processo: seja $i_3 \in \{i_2 + 1, \ldots, n\}$ o menor tal que $\mu_{i_3} \in \sigma(x_2)$ (ou $\sigma(x_1)$, caso não tenhamos construído $x_2 \in M/A$). Novamente, temos dois casos para analisar. Prosseguimos assim até o final (i_j está limitado por n, logo o processo deve parar eventualmente), obtendo elementos normais $x_0, x_1, \ldots, x_k \in M/A$, com $k \leq n$, tais que, denotando $x = x_0$, $\|x_j - x_{j-1}\| < \frac{\varepsilon}{2n}$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, satisfazendo $\sigma(x_k) \subseteq \sigma(x_{k-1}) \subseteq \ldots \subseteq \sigma(x_1) \subseteq \sigma(x)$. Além disso, por construção, note que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos que ou $\mu_i \notin \sigma(x_k)$, ou $\mu_i \in \sigma(x_k)$ mas em $\sigma(x_k)$ falta um pedaço de segmento(s) com x_k em sua fronteira relativa (ou seja, x_k não está no interior de um aberto relativo de $\sigma(x_k)$ homeomorfo ao intervalo $(0,1)$).

Como $\sigma(x_k) \subseteq \sigma(x)$, temos que isso é suficiente para garantir que as componentes conexas de $\sigma(x_k)$ têm todas diâmetros menores que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $w = x_k$. Então w é normal e, por construção,

$\|x-w\| \leq \|x-x_1\|+\|x_1-x_2\|+\ldots+\|x_{k-1}-x_k\| < \frac{\varepsilon}{2n}+\ldots+\frac{\varepsilon}{2n} = k\frac{\varepsilon}{2n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Nosso próximo passo é mostrar que $\sigma(w)$ pode ser particionado em uma quantidade finita de conjuntos simultaneamente abertos e fechados com diâmetros menores do que $\frac{\varepsilon}{2}$. Para cada componente conexa de $\sigma(w)$ (lembrando que pelo que fizemos acima, cada uma dela tem diâmetro menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$), considere um aberto relativo V de $\sigma(w)$ com diâmetro menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$ de modo que nenhuma componente componente conexa de $\sigma(w)$ intersecte a fronteira relativa de V; em outras palavras, queremos que cada componente conexa de $\sigma(w)$ esteja inteiramente contida em V, ou no interior de $\sigma(w)\backslash V$. Não é difícil ver que é possível obter tais abertos, pois $\sigma(w) \subseteq \sigma(x) \subseteq \Gamma_\delta$.

Os abertos obtidos acima formam uma cobertura para $\sigma(w)$, que é compacto, e portanto podemos extrair dessa cobertura uma subcobertura finita. Além disso, como as componentes conexas não intersectam as fronteiras relativas destes abertos, podemos usar intersecções e interiores para criar uma coleção finita de abertos disjuntos que cobre $\sigma(w)$ (por exemplo, se tivéssemos apenas dois abertos originais, U_1 e U_2, com intersecção não vazia, criaríamos novos abertos dados por $V_1 = \operatorname{int}(U_1\backslash U_2), V_2 = U_1 \cap U_2$ e $V_3 = \operatorname{int}(U_2\backslash U_1)$. A ideia pode ser generalizada para uma quantidade finita de abertos).

Assim, temos uma cobertura finita de $\sigma(w)$ por abertos $V_1, \ldots, V_l$ que são disjuntos dois a dois, e cada aberto tem diâmetro menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$. Ademais, cada um destes abertos também é fechado, já que é o complementar em $\sigma(w)$ da reunião dos demais abertos. Isto significa que $V_1, \ldots, V_l$ são abertos e fechados simultaneamente.

Agora, para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$ escolha um $\lambda_i \in V_i$, e defina a função $f : \sigma(w) \to \mathbb{C}$ por $f(z) = \lambda_i$ se $z \in V_i$. Por construção, f é constante em cada componente conexa de $\sigma(w)$, sendo portanto uma função contínua. Além disso, para cada $z \in \sigma(w)$, digamos $z \in V_i$, temos que $|z - f(z)| = |z - \lambda_i| \leq \operatorname{diam}(V_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, e portanto, tomando o supremo sobre todos $z \in \sigma(w)$, $\|f_1 - f\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, em que f_1 é a função inclusão.

Como w é normal, podemos usar o cálculo funcional contínuo. Seja $y = f(w)$. Pelo cálculo funcional contínuo sabemos que $y \in M/A$

é normal e, além disso,

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \sigma(f(w)) \\ \text{(teorema do mapeamento espectral)} &= f(\sigma(w)) \\ &= \{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x-y\| &\leq \|x-w\| + \|w-y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|f_1(w) - f(w)\| \\ \text{(cálculo funcional contínuo é isométrico)} &= \frac{\varepsilon}{2} + \|f_1 - f\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ou seja, provamos que $y \in M/A$ é normal, possui espectro finito e $\|x-y\| < \varepsilon$, como queríamos. ■

Em seguida, um teorema que é uma consequência direta dos Lemas 23 e 25.

Teorema 26. Seja $N_F(M/A)$ o conjunto dos elementos normais com espectro finito em M/A. Então $N_F(M/A)$ é denso em $N(M/A)$.

Demonstração. Precisamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ e $x \in N(M/A)$, existe $y \in N_F(M/A)$ tal que $\|x-y\| \leq \varepsilon$.

Seja $\varepsilon > 0$ e $x \in N(M/A)$. Pelo Lema 23 existe $y_1 \in N(M/A)$ tal que $\sigma(y_1) \subseteq \Gamma_\varepsilon$ e $\|x-y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Agora, usando o Lema 25 no elemento y_1, conseguimos um elemento normal $y \in N_F(M/A)$ e tal que $\|y-y_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim, temos que $y \in N_F(M/A)$ e

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|x-y_1+y_1-y\| \\ &\leq \|x-y_1\| + \|y_1-y\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $y \in N_F(M/A)$ com $\|x-y\| < \varepsilon$. Concluindo assim que $N_F(M/A)$ é denso em $N(M/A)$. ■

Nosso próximo objetivo é demonstrar um teorema que nos auxiliará a provar o principal teorema deste capítulo.

Teorema 27. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in M_n(\mathbb{C})$ com $\|x\| \leq 1$ e $\|xx^* - x^*x\| < \delta$, existe um elemento $y \in M_n(\mathbb{C})$ normal tal que $\|x - y\| < \varepsilon$.

Demonstração. Suponha que o teorema é falso. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que existe $x \in M_n(\mathbb{C})$, com $\|x\| \leq 1$ e $\|xx^* - x^*x\| < \delta$, porém $\|x - y\| \geq \varepsilon$, para todo $y \in M_n(\mathbb{C})$ normal.

Tome uma sequência $(\delta_n)_n$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n > 0$ e $\delta_n \to 0$. Pelo parágrafo anteior, isto significa que existe uma sequência $(n_j)_j$ de números naturais e uma sequência $(x_j)_j$ de matrizes, $(x_j)_j \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ com $\|x_j\| \leq 1$ e $\|x_j x_j^* - x_j^* x_j\| < \delta_j$, porém $\|x_j - y\| \geq \varepsilon$, para todo $y \in M_{n_j}(\mathbb{C})$ normal.

Sejam M e A as C*-álgebras definidas no começo deste capítulo.

Seja $x = (x_j)_j$. Como $\|x_j\| \leq 1$, $\forall j$, temos que $(x_j)_j = x \in M$. Seja ainda $y = \pi(x) \in M/A$.

Note que $x^*x - xx^* \in A$, pois, pela hipótese, $\|x_j^* x_j - x_j x_j^*\| \to 0$. Daí, temos que:

$$\begin{aligned} yy^* - y^*y &= \pi(x)\pi(x^*) - \pi(x^*)\pi(x) \\ &= \pi(xx^*) - \pi(x^*x) \\ &= \pi(xx^* - x^*x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $yy^* - y^*y = 0$, concluindo que $yy^* = y^*y$. Isto significa que y é normal.

Pelo Teorema 26, existe um elemento normal $y' \in M/A$ com espectro finito tal que $\|y - y'\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Seja y' como definido acima. Afirmamos que existe um elemento normal $x' = (x_j^{'})_j \in M$ tal que $\pi(x') = y'$.

De fato, sabemos que o espectro do elemento y' é finito então, por interpolação polinomial, podemos escolher polinômios complexos em uma variável, digamos p e q, tais que $p(\sigma(y')) \subseteq \mathbb{R}$ e $(q \circ p)(\lambda) = \lambda$, para todo $\lambda \in \sigma(y')$.

Note que $p(y')$ é auto-adjunto, pois $p(y')$ é normal e, pelo teorema do mapeamento espectral, $\sigma(p(y')) = p(\sigma(y')) \subseteq \mathbb{R}$. Também, usando o cálculo funcional contínuo, para o elemento normal y', temos que $y' = q(p(y'))$.

Seja z um elemento em M tal que $\pi(z) = p(y')$. Perceba que $\frac{z+z^*}{2}$ é auto-adjunto, pois $\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^* = \frac{z^*+z}{2}$. E também, temos que

$\pi(\frac{z+z^*}{2}) = p(y')$, pois

$$\begin{aligned}
\pi\left(\frac{z+z^*}{2}\right) &= \pi\left(\frac{z}{2}\right) + \pi\left(\frac{z^*}{2}\right)\\
&= \frac{p(y')}{2} + \frac{p(y')^*}{2}\\
&= p(y').
\end{aligned}$$

Deste modo, $x' = q\left(\frac{z+z^*}{2}\right)$ satisfaz o que queremos:

$$\begin{aligned}
\pi(x') &= \pi\left(q\left(\frac{z+z^*}{2}\right)\right)\\
&= q\left(\pi\left(\frac{z+z^*}{2}\right)\right)\\
&= q(p(y'))\\
&= y'.
\end{aligned}$$

Sabemos que se $m \in M/A$ então $\|m\| = \inf\{\overline{m} - a \,|\, a \in A\}$, em que $\overline{m}$ é tal que $\pi(\overline{m}) = m$. Sendo assim, pela definição de norma na álgebra quociente M/A, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $(a_j)_j = a \in A$ tal que $\|(x - x') - a\| - \|y - y'\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|(x - x') - a\| &\leq \|y - y'\| + \frac{\varepsilon}{4}\\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Isto nos diz que $\|(x - x') - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$. (I)

Como $(a_j)_j \in A$, escolha l tal que $\|a_l\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí, temos que para esse l:

$$\begin{aligned}
\|(x - x') - a\| &\geq \|(x_l - x_l^{'}) - a_l\|\\
&\geq \|(x_l - x_l^{'})\| - \|a_l\|\\
&\geq \|(x_l - x_l^{'})\| - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Utilizando (I) e a desigualdade acima, temos:

$$\frac{\varepsilon}{2} > \|(x_l - x_l^{'})\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isto significa que $\|x_l - x_l^{'}\| < \varepsilon$. Mas isso contradiz a hipótese, pois para todo j, $(x_j)_j$ tem distância pelo menos ε dos elementos normais de $M_{n_j}(\mathbb{C})$.

Segue que o teorema é verdadeiro. ■

Por fim enunciaremos um teorema de Huaxin Lin que juntamente com o teorema anterior nos dirá que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e pares de matrizes complexas auto-adjuntas que quase comutam, a menos de δ, sempre estão próximas de pares de matrizes auto-adjuntas complexas que comutam, a menos de ε.

Teorema 28. (Huaxin Lin) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in M_n(\mathbb{C})$ matrizes auto-adjuntas, com $\|a\|, \|b\| \leq 1$ e $\|ab - ba\| < \delta$, existe um par de matrizes auto-adjuntas $a', b' \in M_n(\mathbb{C})$ que comutam tal que $\|a - a'\| + \|b - b'\| < \varepsilon$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Pelo Teorema 27, usando $\frac{\varepsilon}{4}$, temos que existe um $\delta > 0$ tal que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in M_n(\mathbb{C})$ com $\|x\| \leq 1$ e $\|xx^* - x^*x\| < \delta$, existe um elemento $y \in M_n(\mathbb{C})$ normal tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, tome duas matrizes auto-adjuntas $a, b \in M_n(\mathbb{C})$ tais que $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$ e $\|ab - ba\| < \delta$, ou seja, as matrizes a e b quase comutam a menos de δ. Defina a seguinte matriz

$$x = \frac{1}{2}(a + ib).$$

Note que $\|x\| = \frac{1}{2}\|a + ib\| \leq \frac{1}{2}(\|a\| + \|b\|) \leq 1$ e

$$\begin{aligned}
\|x^*x - xx^*\| &= \|\frac{1}{4}[(a - ib)(a + ib) - (a + ib)(a - ib)]\| \\
&= \|\frac{1}{4}[a^2 + iab - iba + b^2 - (a^2 - iab + iba + b^2)]\| \\
&= \|\frac{1}{4}[iab - iba + iab - iba]\| \\
&= \|2i\frac{1}{4}(ab - ba)\| \\
&< \frac{1}{2}\delta \\
&< \delta.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\|x\| \leq 1$ e $\|x^*x - xx^*\| < \delta$. Portanto, pelo Teorema 27 existe uma matriz normal $y \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Defina $a' = \mathrm{Re}(2y)$ e $b' = \mathrm{Im}(2y)$. Note que a' e b' são matrizes auto-adjuntas que comutam (pois são a parte real e imaginária de uma mesma matriz normal y). Ademais,

$$\begin{aligned}\|a - a'\| &= \|\mathrm{Re}(2x) - \mathrm{Re}(2y)\| \\ &= 2\|\mathrm{Re}(x - y)\| \\ &\leq 2\|x - y\| \\ &< 2\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|b - b'\| &= \|\mathrm{Im}(2x) - \mathrm{Im}(2y)\| \\ &= 2\|\mathrm{Im}(x - y)\| \\ &\leq 2\|x - y\| \\ &< 2\frac{\varepsilon}{4} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Ou seja, temos que $\|a - a'\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|b - b'\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Segue que $\|a - a'\| + \|b - b'\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, como queríamos. ■

4 UM TEOREMA DE BROW-DOUGLAS-FILLMORE

A teoria dos matemáticos Lawrence Gerald Brown, Ronald George Douglas e Peter Fillmore é clássica em Álgebra de Operadores e aborda a classificação de operadores essencialmente normais a menos de equivalência unitária módulo operadores compactos, veja (BROWN; DOUGLAS; FILLMORE, 1973).

Brow-Douglas-Fillmore usaram a teoria desenvolvida para, entre outras coisas, resolver o seguinte problema de levantamento[1]: dado $\mathcal{S} \in Q(H)$ normal, existe $T \in B(H)$ normal tal que $\pi(T) = \mathcal{S}$?

Considere o espaço $B(H)$, em que $H = l_2(\mathbb{N})$ (que é o conjunto das sequências quadrado somáveis). Seja $S : l_2(\mathbb{N}) \to l_2(\mathbb{N})$ o shift unilateral. Sabe-se que S é um operador de Fredholm, $\mathrm{ind}(S) = -1$ e que $\mathcal{S} = \pi(S)$ é normal em $Q(H)$[2]. Contudo, não existe levantamento normal para $\mathcal{S}$ em $B(H)$, pois caso existisse $T \in B(H)$ normal tal que $T = \pi(S)$, os índices dos operadores S e T seriam iguais (pois estes operadores são da mesma classe, já que diferem apenas por um operador compacto, e a função índice é invariante por perturbações compactas[3]). Mas, isto é um absurdo, pois sabemos que o índice de Fredholm de um operador normal é igual 0[4].

Ou seja, nem todo operador normal na álgebra de Calkin $Q(H)$ pode ser levantado por um elemento normal de $B(H)$.

Contudo, Brow-Douglas-Fillmore encontraram uma solução para este problema envolvendo teoria de índice de Fredholm. Vamos relembrar um pouco algumas definições:

Definição 29. Seja $T : H \to H$. Dizemos que o operador T é *essencialmente normal* se $T^*T - TT^* \in K(H)$.

Note que dizer que o operador $T \in B(H)$ é essencialmente normal, é o mesmo que dizer que o elemento $\pi(T)$ é normal em $Q(H)$.

Vamos falar agora um pouco sobre operadores de Fredholm.

Definição 30. Seja $T \in B(H)$. Dizemos que o operador T é Fredholm se $\ker(T)$ tem dimensão finita e $T(H)$ tem codimensão finita.

Muitas vezes decidir se um operador é ou não Fredholm torna-se uma tarefa árdua apenas tendo a definição como guia. Por isso, temos

[1]Lembre, dado $\mathcal{S} \in Q(H)$ dizemos que um elemento $T \in B(H)$ é um levantamento de $\mathcal{S}$ se $\pi(T) = \mathcal{S}$.

[2]veja (MURPHY, 1990) p.30 Exemplo 1.4.4.

[3]veja (MURPHY, 1990) Teorema 1.4.18.

[4](SUNDER, 1998) Observação 4.4.8.

um importante teorema que nos auxilia com uma caracterização para os operadores de Fredholm através da álgebra de Calkin: o Teorema de Atkinson. Para uma demonstração deste fato, o leitor pode consultar, por exemplo, (SUNDER, 1998) Teorema 4.4.4.

O resultado abaixo é uma consequência direta do Teorema de Atkinson citado no parágrafo acima:

Teorema 31. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $T \in B(H)$. Então T é Fredholm se, e somente se, $\pi(T)$ é inversível na álgebra quociente $Q(H)$.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto dos operadores de Fredholm. Denotaremos o índice de um operador de Fredholm $T \in B(H)$ por $\text{ind}(T)$. Lembrando da função índice $ind : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$, sabemos que essa função é contínua (para uma demonstração deste fato, veja (MURPHY, 1990) Teorema 1.4.17). Portanto, o índice de Fredholm de um operador é uma função contínua que associa a cada operador de Fredholm um número inteiro.

Definição 32. Seja $T \in B(H)$. Definimos o espectro essencial de T como o conjunto $\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, T - \lambda I \notin \mathcal{F}\}$, em que I é o operador identidade.

Novamente pelo Teorema de Atkinson podemos caracterizar o espectro essencial de um operador T como sendo o espectro do elemento $\pi(T)$ na álgebra de Calkin $Q(H)$. Defina agora a seguinte função índice para T, que denotaremos por ind_T:

$$\begin{array}{rccc} \text{ind}_\text{T} : & \mathbb{C} \backslash \sigma_e(T) & \to & \mathbb{Z} \\ & \lambda & \mapsto & \text{ind}(T - \lambda I) \end{array}$$

Diremos que o operador T possui função índice trivial quando $\text{ind}_T = 0$ em todo o domínio de T.

O Teorema que nos responde àquela pergunta afirmativamente é o seguinte:

Teorema 33. (Brow-Douglas-Fillmore[5]) Um operador essencialmente normal num espaço de Hilbert é uma perturbação compacta de um operador normal se, e somente se, possui função índice trivial.

Observe que a primeira vista o teorema acima não parece ser um problema de levantamento. Contudo, se olharmos com bastante cuidado, conseguimos perceber que na verdade é justamente uma condição necessária e suficiente para que um operador normal em $Q(H)$ possa ser

[5](BROWN; DOUGLAS; FILLMORE, 1973) Corolário **11.2**.

levantado por um elemento normal em $B(H)$, pois: sabemos que se um operador $T \in B(H)$ é essencialmente normal então $\pi(T)$ é normal em $Q(H)$. Sendo assim, o teorema acima nos diz que dado $\mathcal{T} \in Q(H)$ normal, podemos escrever $\mathcal{T} = T + K$, com $T \in B(H)$ normal e $K \in K(H)$ se, e somente se, $\text{ind}_{\mathcal{T}} = 0$.

Esse teorema na verdade é um corolário no artigo (BROWN; DOUGLAS; FILLMORE, 1973) mas, como tem bastante importância nesse problema de levantamento, resolvemos colocá-lo como Teorema. A demonstração original envolve a teoria que Brow-Douglas-Fillmore desenvolveram.

Porém, Peter Friis e Mikael Rørdam no artigo (FRIIS; RØRDAM, 2001) provaram o resultado acima com um teorema semelhante ao Lema 25. O Teorema é o seguinte:

Teorema 34. Seja $\mathcal{T} \in Q(H)$ normal. Então $\mathcal{T}$ é o limite na norma de uma sequência de elementos normais em $Q(H)$ com espectro finito se, e somente se, $\mathcal{T}$ possui função índice trivial.

Por fim, perceba dois pequenos detalhes: o primeiro é de que no lema 25 provamos que todo elemento normal no quociente M/A pode ser aproximado por um outro elemento de M/A com espectro finito. Pode-se provar que o conjunto M definido no capítulo anterior é a álgebra de multiplicadores do conjunto A, também definido no capítulo anterior. Ou seja, provamos que todo elemento normal pode ser aproximado por outro com espectro finito no quociente, $\mathcal{M}(A)/A$, em que $\mathcal{M}(A)$ é a álgebra de multiplicadores do conjunto A.

Já o segundo é: sabemos que a álgebra de Calkin $Q(H)$ é o quociente $B(H)/K(H)$. Sabe-se também que a álgebra de multiplicadores de $K(H)$ é justamente $B(H)$. Percebendo esta sutileza, e denotando a álgebra de multiplicadores de $K(H)$ por $\mathcal{M}(K(H))$, o teorema demonstrado por Brow-Douglas-Fillmore nos fornece uma condição necessária e suficiente sobre levantamento de elementos normais no quociente $\mathcal{M}(K(H))/K(H)$.

REFERÊNCIAS

BROWN, L. G.; DOUGLAS, R. G.; FILLMORE, P. *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C*-algebras*. Halifax, Nova Scotia: Proceedings of a conference on operator theory, (Berling-Heidelberg-New York), Lectures notes in math., vol. 345, Springer-Verlag, pp. 58-128, 1973.

EXEL, R.; LORING, T. Almost commuting unitary matrices. *American Mathematical Society*, v. 106, n. 4, p. 913–915, 1989.

FRIIS, P.; RØRDAM, M. Almost commuting self-adjoint matrices - A short proof of Huaxin Lin's Theorem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, v. 479, p. 121–132, 1996.

FRIIS, P.; RØRDAM, M. Approximation with normal operators with finite spectrum, and an elementary proof of a Brown-Douglas-Fillmore theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 199, n. 2, p. 347–366, 2001.

HALMOS, P. R. Some unsolved problems of unknow depth about operators on Hilbert space. *Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, v. 76, p. 67–76, 1976.

LANG, S. *Complex analysis*. 4th. ed. New York: Springer, 1999. 485 p. ISBN 0387985921.

LIN, H. Almost commuting self-adjoint matrices and applications. Operator Algebras and their Applications, Fields Institute Communications, v. 13, p. 193–233, 1995.

MURPHY, G. J. *C*-Algebras and Operator Theory*. San Diego: Academic Press, 1990. 296 p. ISBN 0125113609.

NARICI, L.; BECKENSTEIN, E. *Topological Vector Spaces*. 2nd. ed. Boca Raton: CRC Press, 2011. 610 p. ISBN 978158488866.

SUNDER, V. *Functional Analysis: Spectral Theory*. Basel: Birkhäuser, 1998. 241 p. (Birkhäuser Advanced Texts).

VOICULESCU, D. Asymptotically commuting finite reank unitary operators without commuting approximants. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*, v. 45, p. 429–431, 1983.