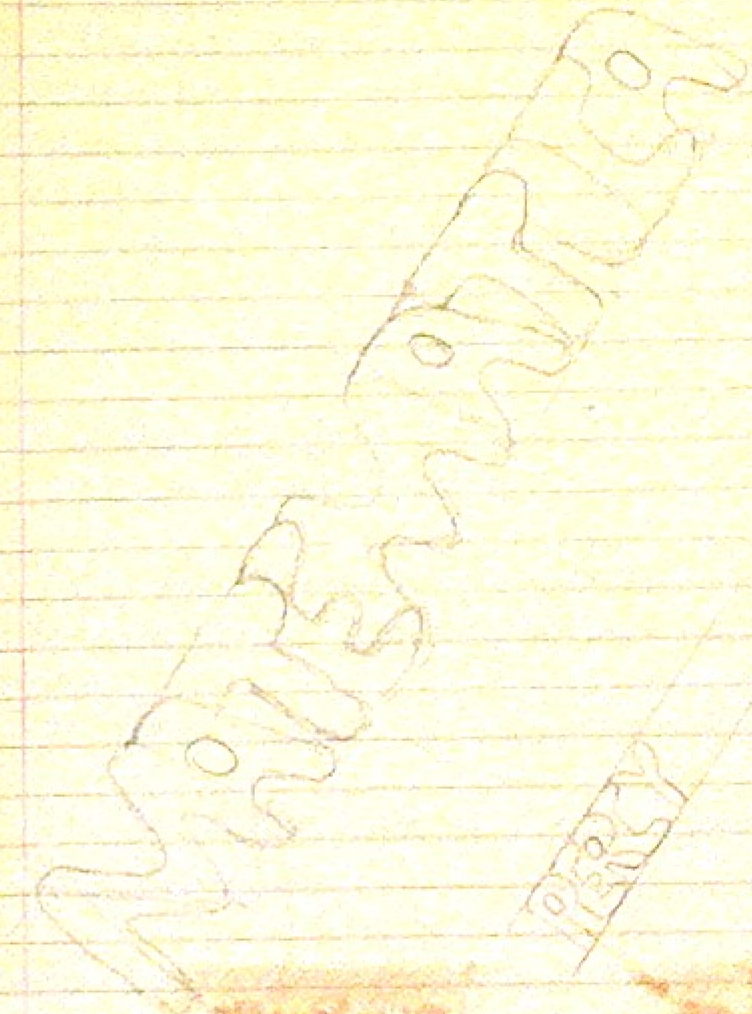
227 a 278



Análise combinatória 3-8-76

① Definições

1º O que é

Análise combinatória estuda os agrupamentos que podemos fazer com n elementos de um conjunto finito (segundo as leis)

- Seja o conjunto (a, b, c)

Agrupando os elementos 2 a 2 temos,
ab, bc, ac, ca, ba, cb

Outro exemplo: {a, b, c, d}
abc, abd, bcd, acd

OBS: No primeiro agrupamento a lei estabelecida para a formação dos grupos é:

1º Os elementos são tomados 2 a 2

2º Os grupos podem diferir pela ordem dos elementos.

No segundo agrupamento a lei estabelecida é:

1º Os elementos são tomados 3 a 3

2º Não diferem pela ordem dos elementos (só pela natureza)

1º exemplo. agrupamentos do tipo "arranjo"

2º exemplo. agrupamento tipo "combinação"

2º Agrupamento simples

Em agrupamento simples um elemento figura no máximo uma vez em cada grupo

Exemplos os dois exemplos anteriores

Contra exemplo: seja {a b}
aa, ab, bb, ba

3º Taxa p

É o número de elementos que figura em cada grupo.

Se o número de elementos do conjunto for n, $p \leq n$.

4º Fatorial de n.

É o produto dos numeros naturais de 1 a n.
Notação: $n! = n.(n-1).(n-2). \ldots 1$ ou
$\lfloor n = n.(n-1).(n-1). \ldots 1$

Cálculos

1º $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

2º $\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.(5-1)\cancel{(5-2)}\cancel{(5-3)}\cancel{(5-4)}}{\cancel{(5-2)}\cancel{(5-3)}\cancel{(5-4)}}$

$\frac{5!}{(5-2)!} = 5.(5-1) = 20$

1 Agrupamento simples
a- Arranjo
b- Permutação
c- Combinação

a- Arranjo simples

São agrupamentos que podemos fazer com n elementos de um conjunto tomados p a p (taxa p) sendo $p < n$. Diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos. $\{a,b,c\}$ ab, ab, bc, ba, ca, cb são agrupamentos do tipo "arranjo".

Notação

A_n^2 ou $A_{n,2}$, b ; D_n^b

No exemplo teríamos A_3^2

b- Permutação:

Se em A_n^b tivermos $n = p$, teremos as permutações dos n elementos.

Permutações

Agrupamentos formados com os n elementos de um conjunto diferindo dois agrupamentos apenas pela ordem dos elementos.

Exemplo: Permutações de (a, b, c)

abc, acb, cab, cba, bca, bac.

Notação P_n; no exemplo P_3

OBS: $A_n^n = P_n$

Combinações simples

4-8-76

São agrupamentos em que o numero de elementos de cada grupo é sempre menor que o numero de elementos do conjunto e diferem somente pela natureza de pelo menos um elemento

As combinações de $\{1,2,3\}$ 2 a 2 (taxa $p = 2$) serão 12, 13, 23.

Notação. C_n^p; $C_{n,p}$; ou $\binom{n}{p}$

OBS. Se permutarmos os elementos nas combinações, obteremos os agrupamentos do tipo "arranjos"

No exemplo anterior

Combinaçois de $\{1,2,3\}$ 2 a 2
12, 13, 23

Arranjos $\{1,2,3\}$ 2 a 2
Combinação 12, 13, 23

$$\text{Arranjo} \begin{cases} 12 \ , \ 21 \\ 13 \ , \ 31 \\ 23 \ , \ 32 \end{cases}$$

$$\boxed{C_n^p \cdot P_p = A_n^p}$$

Pois cada combinação fornece tantos arranjos quanto são as permutaçois da taxa

Formação de arranjos simples

Os arranjos dos n elementos de um conjunto tomando 1 a 1 é evidentemente igual à n.

$$A_n^1 = n$$

Assim $\{a, b, c \dots n\}$ dará os arranjos de taxa 1

$a \ b \ c \ d \dots n$

Os arranjos dos n elementos tomados 2 a 2 serão obtidos colocando-se à direita de cada um dos n grupos dos arranjos 1 a 1 um dos $(n-1)$ elementos restantes

$$n-1 \begin{cases} \overbrace{ab \quad bc \quad \cdots \quad na}^{n} \\ ac \quad bd \quad \cdots \quad nb \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ an \quad bn \quad \cdots \quad nm \end{cases}$$

$$A_n^2 = A_n^1 \, (n-1)$$

Da mesma forma os arranjos A_n^3 serão obtidos colocando-se direito de cada um dos arranjos A_n^2 os $n-2$ elementos restantes

$$\begin{cases} abc \qquad ac \cdots bc \qquad bd \qquad nm \\ abd \\ \\ \\ abn \end{cases}$$

$$A_n^3 = A_n^2 \, (n-2)$$

De um modo geral

$$A_n^p = A_n^{p-1}(n-p+1)$$

Formula que fornece o numero de arranjos simples

$$\boxed{\cancel{A_n^1}} = n$$

$$\boxed{\cancel{A_n^2}} = \boxed{\cancel{A_n^1}}\,(n-1)$$

$$\cancel{A_n^3} = \boxed{\cancel{A_n^2}}\,(n-2)$$

$$A^{p-1} = \triangle$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A_n^p = \cancel{A_n^{p-1}}\,(n-p+1) \\ \hline A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \end{array}}$$

Que se obteve multiplicando-se as equações membro a membro

$$\cancel{A_n^1}\cdot\cancel{A_n^2}\cdot\cancel{A_n^3}\cdot X\cdot A_n^p = \cancel{A_n^1}\cdot A_n^2\ldots\cancel{A_n^{p-1}}.$$

$n(n-1)\ldots(n-p+1)$

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$$

$$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1).(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)}}$$

Exemplo:

$$A_5^2 = \frac{5(5-1).(5-2)!}{(5-2)!}$$

Significado A_n^0

Na formula $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ fazendo $p = 0$

Temos $A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1 \Rightarrow A_n^0 = 1$ (por convenção)

Permutações de n elementos

Se em A_n^p, fizermos $n = p$ teremos as permutações dos n elementos

OBS.: - As permutações são um caso particular de arranjos
- A taxa é igual ao numero de elemento

— Os agrupamentos diferem somente pela ordem dos elementos

Então na formula $A_n^p = n \cdot (n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)$

Fazendo $n = p$

$A_n^n = P_n = n(n-1) \ldots (n-p+1)$

$P_n = n!$

Convenção

$0! = 1$

pois $P_n = n P_{n-1}$, $n! = (n-1)!$

Fazendo $n = 1$; $1! = 1 \cdot (0)! \Rightarrow 0! = 1$

Permutação principal

— Chama-se permutação principal de n elementos a disposição dos n elementos na sua ordem natural

Exemplo: seja $\{a, b, c, d, e\}$
Permutação principal; abcde.

Inversão

Quando dois elementos não estão na ordem natural dizemos que formaram uma inversão.

Exemplo:

Em bacde temos uma inversão (ba)
Em cabde temos duas inversões, (ca e cb)

Classes

Uma permutação é de classe par quando o numero de suas inversões for par, e, é impar quando o numero de inversões for impar.

Teorema de Bezout

Se permutamos dois elementos numa permutação, esta muda

1º) Os elementos sao consecutivos

$abc \ldots ij \ldots kl$
$abc \ldots ji \ldots kl$

A permutação ganha ou perde uma inversão e muda de classe

2º) Os elementos não são consecutivos

$abc \ldots \underbrace{i \ldots\ldots j}_{h \text{ elementos}} \ldots\ldots kl$ (1)

Suponhamos que exista h elementos entre i e j

Fazendo j tomar a posição
$abc \ldots ij \ldots\ldots \bigcirc \ldots kl$ (2)

Fizemos h permutações → h permutações permutando i j em (2)

$abc \ldots ji \ldots | \, | \ldots kl$ (3)

Mais uma permutação → 1 inversão

Fazendo i tomar a posição inicial de j

$abc \ldots j \ldots i \ldots kl$
Teremos mais h inversões → h inversões.

Total de inversões

$h + 1 + h = 2h + 1$ (ímpar)

A permutação muda de classe

Permutações simples

Seja $\{a_1 a_2 \ldots a_\alpha b c d\}$

onde $a_1 = a_2 = \ldots = a_\alpha$

Formemos um quadro em que as permutações diferem em cada coluna somente pelas posições dos a_i

$$\begin{array}{c|l}
 & a_1 \; a_2 \; \ldots\ldots\ldots \; a_\alpha b c d \\
 & a_2 \; a_1 \; \ldots\ldots\ldots \; a_\alpha b c d \\
\alpha! & a_3 \; a_1 \; a_2 \; \ldots\ldots \; a_\alpha b c d \\
\text{linhas} & \\
 & \vdots \\
 & a_\alpha \; a_2 \; \ldots\ldots\ldots \; a_1 b c d
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|l}
 & b\ a_1\ c\ a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ a_\alpha\ d\ \ldots \\
\alpha! & b\ a_2\ c\ a_3\ a_1\ \ldots\ldots\ a_\alpha\ d\ \ldots \\
\text{linhas} & \\
 & \\
 & b\ a_\alpha\ c\ a_2\ \ldots\ldots\ a_1\ d\ \ldots
\end{array}
$$

Não considerando que os a_i são iguais teríamos, se tivermos n elementos no conjunto

$$P_n = n!$$

Mas os α elementos a_i são iguais e anotamos. $P_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}$ e isto é de cada coluna só será considerada uma permutação, e as permutações do quadro ficarão reduzidas a uma linha

Exemplo

seja $\{a_1\ a_2\ b\}$

As permutações possíveis são:

$3!$

$a_1\ a_2\ b$	$a_1\ b\ a_2$	$b\ a_1\ a_2$
$a_2\ a_1\ b$	$a_2\ b\ a_1$	$b\ a_2\ a_1$

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ permutações}$$

Uma vez que $a_1 = a_2$

α = número de elementos iguais

Da mesma forma se um conjunto de n elementos.
Tem α elementos iguais a a e β elementos iguais a b teríamos a seguinte notação linhas e formula

$$P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!}$$

Exemplo Problema

Quantas permutações com as letras da palavra MÍNIMA, poderemos formar.

$$P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!\,2!} = \frac{6\times5\times\cancel{4}^{\,2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times2} = 60$$

Cálculo do número de combinações simples

$$C_n^p \cdot P_p = A_n^p$$

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p}} \qquad (1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) \\ A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} \end{array}} \qquad \begin{array}{c} (2) \\ (3) \end{array}$$

$$\boxed{P_p = p!} \qquad (4)$$

(2) e (4) em (1) fornece

$$\boxed{C_n^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}}$$

(3) e (4) em (1) fornece

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Observações

para $p = 1$ temos: $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$

para $p = 0$ temos: $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$!

Propriedades das combinações simples

1º Duas combinações de taxas complementares são iguais

Definição

Duas combinações de taxas complementares quando suas taxas adicionada resulta n.

Exemplos

a- C_{10}^2 e C_{10}^8 são complementares.

b- C_{16}^{14} e C_{16}^2 são complementares

Justificativa

$C_n^p = C_n^{n-p}$ $\qquad p+(n-p)=n$

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$ (formula)

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p)} = \boxed{\frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Exemplo

$$C_{100}^{98} = C_{100}^{2} = \frac{100+99}{2!} = 4.950$$

2ª Propriedade

Dado um conjunto de n elementos o número de combinações em que figuram K elementos determinados ($K \leq p$) é C_{n-K}^{p-K}.

Justificativa

- Destacando-se os K elementos do conjunto, este ficará com n - K elementos.
- Combinando estes n - K elementos com a taxa (p - K) a (p - K), e, posteriormente juntando-se os K elementos a cada combinação, o número de combinações não é acrescido, simplesmente teremos a taxa p e as combinações C_n^p em que figuram os K elementos antes destacados.

Exemplo

Dado {a,b,c,d,e} o número de combinações destes cincos elementos em que figuram a, b em grupos de quatro é:

$$C_{5-2}^{4-2} = C_3^2 = \frac{3\cancel{!}}{\cancel{2!\,(1)}} = 3$$

{a,b,c,d,e}

{ c,d,e} → C_3^2 = cd, ce, de.

C_5^4 em que aparece ab são:

abcd, abce, abde.

3º O numero de combinações de n elementos p a p em que não figuram K elementos é C_{n-k}^{p}

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Relação de Stifel.}\\ C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p\end{gathered}}$$

Unidade III

Determinantes. Sistemas lineares.

$(x = 1;\ y = -1)$ ① $2x - 3y = 5$
② $x + y = 0$

$x = \dfrac{5+3y}{2}$

$5 + 3y + y = 0$

$x - 1 = 0$

$\boxed{x = 1}$

$5 + 3y + 2y = 0$
$5 + 5y = 0$
$5y = -5$
$\boxed{y = -1}$

$a_1 x + b_1 y = c_1$
$a_2 x + b_2 y = c_2$
$a_2 \left(\dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1}\right) + b_2 y = c_2$

$(a_1 x + b_1 y = c_1) \cdot a_2 \Rightarrow a_2 a_1 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1$

$(a_2 x + b_2 y = c_2) \cdot a_1 \Rightarrow \dfrac{a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2}{y(a_2 b_1 - a_1 b_2) = a_2 c_1 - a_1 c_2}$

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$y = \dfrac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \dfrac{(-1)}{(-1)}$

$y = a_1 c_2 - a_2 c_1$

Matrizes

É uma malha retangular de $m \times n$ nº da forma a_{ij} onde i repres. linha, j representa coluna

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Em dizer que esta matriz genérico é de ordem $N \times m$.

Representaçõs

$(\ )$ ou $[\ ]$ ou $\|\ \|$

ex: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ → lê-se 2×3

Uma matriz diz-se que uma matriz é linha quando
Ex = $(1, 2, 3 \ldots n) \to 1 \times m$

Diz-se que uma matriz é coluna.

Ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$

$m \times 1$

O intervalo de variação do nº de linhas é: $1 \leq i \leq m$

O intervalo de variação do nº de colunas $1 \leq j \leq n$

Exercícios

formar a matriz $A = a_{ij}$ no seguinte caso.

A é de ordem 3×2 com $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & p/ i = j \\ i \cdot j & p/ i \neq j \end{cases}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = A$

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 16 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Igualdade de Matrizes

2 Matrizes são iguais se a matriz $A = a_{ij}$ for = igual a matriz $B = b_{ij}$

Condição para que haja igualdade entre as Matrizes

É que tanto a Matriz A quanto a matriz B tenham a mesma ordem caso isso não se verifique não haverá igualdade.

Ex.

Quais os valores de x e y para que a matriz A seja a uma outra

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz nula

É quando todos os elementos componentes desta matriz forem nulos.

Ex $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercícios

Qual o valor de x na matriz A para que esta venha a ser nula.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{não é nula}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

É nula sendo $\boxed{x = 2}$

Diagonais

Numa matriz quadrada os elementos em que $i = j$ constituem a diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 1 \\ 0 & a_{22} & 2 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundário

Numa matriz quadrada os elementos em que

$i + j = n + 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} \\ 1 & a_{22} & 2 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz quadrada

É toda matriz em que o nº de linha (i) for igual ao nº de coluna (j)

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

É toda a matriz (em que) exceto os elementos da diagonal principal não nulos, e os demais todos nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ = A matriz identidade, matriz unidade

Operações com matrizes.

Condição

Só é possível se as matrizes são de mesma ordem.

$A + B = C$
$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

Ex

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $A + B = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

2- Subtração:

Condição

Só é possível se as matrizes são de mesma ordem.

$A - B = C$
$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3- Produto de uma matriz por um escalar

Escalar é um nº pertencente aos reais chama se produto de uma matriz por um escalar toda matriz da forma.

$a \in R$ $\qquad a(a_{ij}) = b_{ij}$
$A = a_{ij}$
$B = b_{ij}$

Ex: $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

4- Divisão

É uma consequência do item anterior

Ex: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

5- Produto entre matrizes

1) Condição

Que o nº de coluna da 1ª matriz seja igual ao nº de linhas da 2ª matriz. Não é necessário que as matrizes tenham a mesma ordem.

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \times 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2 \times 1 + 1 \times 2) & (2 \times 1 + 1 \times 2) \\ (1 \times 1 + 3 \times 2) & (1 \times 1 + 3 \times 2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 5 + 2 \times 7) & (1 \times 6 + 2 \times 8) \\ (3 \times 5 + 4 \times 7) & (3 \times 6 + 4 \times 8) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Exercícios.

① - $A+B=?$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}$

② $A-B=?$

③ $A \times B=?$

$1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\7&4\end{pmatrix}$

$2=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1\\-1&4\end{pmatrix}$

$3=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+8&1+0\\9+16&3+0\end{pmatrix}$

$A \times B=\begin{pmatrix}11&1\\25&3\end{pmatrix}$

$A^2=A\times A$

$B-A=A+B$

$\begin{pmatrix}3&1\\4&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\7&4\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2&-1\\1&-4\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}4&3\\7&4\end{pmatrix}$

$A^2=A\times A$

$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}$

6- Matriz transposta

Se obtem trocando as colunas de uma matriz pelas linhas desta matriz. Representa-se A^t

Ex: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ $\quad A^t=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$

Ex: $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\3&0&0\end{pmatrix}$ $\quad A^t=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Matriz inversa

É toda matriz quadrada a qual se obtem ao dizer que existe a inversa (A^{-1}) na qual obedece a ordem.

$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = \boxed{I_n}$

matriz identidad de orden n.

Ex

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = ?$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = ?$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ 4x+5z & 4y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x+3z = 1 \\ 4x+5z = 0 \end{cases}$

$x = -3z+1$

$-12z + 4 + 5z = 0$

$-7z + 4 = 0$

$4 = 7z$

$\boxed{z = \frac{4}{7}}$

$x = 1-3y$

$x = 1 - \frac{12}{7}$

$\boxed{x = \frac{-5}{7}}$

$y + 3t = 0$

$4y + 5t = 1$

$y = -3t$

$-12t + 5t = 1$

$7t = 1$

$\boxed{t = \frac{1}{7}}$

$y + \left(-\frac{3}{7}\right) = 0$

$\boxed{y = \frac{3}{7}}$

$\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} + \frac{12}{7} & \frac{3}{7} + \left(-\frac{3}{7}\right) \\ -\frac{20}{7} + \frac{20}{7} & \frac{12}{7} - \frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{7}{7} & 0 \\ 0 & \frac{7}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \begin{pmatrix} -5/7 & 3/7 \\ 4/7 & -1/7 \end{pmatrix}$

8) Matriz simétrica

Dada matriz se obter ao A^t venha a ser igual.

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ex $= A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercício

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ pede se 1) $A^t + B^t$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

2) $A^{-1} + B^{-1} = ?$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x+3z = 1$ $\quad x = 1 \quad$ $t = 1$

$z = 0$ $\quad$ $y+3 = 0$

$y = -3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ 4z & 4t \end{pmatrix}$

$2x+3z = 1$ $\quad x = 1/2$

$4z = 0$

$z = 0$

$2y + \frac{3}{4} = 0$

$2y+3t = 0$

$4t = 1$

$t = \frac{1}{4}$

$2y = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{8}$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & -7/8 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Determinantes

Objetivo

É para estudar sistema de equação de 1º grau. Discutir este sistema.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 4x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$$

Definição

Define-se como determinante de ordem m a soma dos produtos que se obtém considerando o produto dos elementos que compõem a diagonal principal fixando-se os índices inferiores e permutando os índices superiores, dando a cada parcela sinal + ou − conforme ~~seja~~ a classe de permutação seja par ou ímpar.

Representação

$$\left| \quad \right| =$$

Determinante genérico

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{vmatrix}$$

1, 2 e n → índices superiores, representam as colunas.

$$\left.\begin{matrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ 2, & 2, & \ldots & 2 \\ m, & m, & \ldots & m \end{matrix}\right\} \text{índices inferiores representam as linhas}$$

Para o caso de determinante falar em linhas ou colunas é o mesmo portanto se expressa como sendo filas.

Determinante de 2º ordem

Para obtermos um determinante de 2º ordem, a solução deste será ao fazer o produto entre os elementos que compõem ~~os elementos que~~ a diagonal principal pela diferença do produto dos elementos que compõem a diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 \times a_2^2 - a_2^1 \times a_1^2 = N$$

$$Ex_1: \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 8 = \boxed{10}$$

$$Ex_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7$$

Propriedades.

1) Um determinante com matriz quadrada de ordem n tem fatorial termos

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \qquad n = 2^{\text{ordem}}$$

$$\underbrace{a_1^1 \times a_2^2 - a_2^1 \times a_1^2}_{2! = 2}$$

2) Multiplicando ou dividindo-se um determinante por um escalar qualquer pertencente aos reais este determinante ficará multiplicado ou dividido pelo escalar.

$$a \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Basta multiplicar pelo escalar uma das linhas ou uma das colunas

$a = 2$

$$2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} = 12$$

Determinante nulo.

3- Para termos um Det. nulo basta ter uma linha ou uma coluna igual a zero.

$$\begin{vmatrix}\boxed{0 \quad 0}\\ 1 \quad 2\end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix} = 0$$

3- Também um determinante será nulo quando as linhas ou colunas são paralelas e proporcionais ex:

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix} \quad 2\times 6 - 4\times 3 = 0 \qquad \begin{vmatrix}4 & 8\\ 3 & 6\end{vmatrix} \quad 6\times 4 - 6\times 4 = 0$$

4- Não se altera um determinante, se os elementos deste determinante, pegarmos uma das filas ou uma das colunas somarmos os elementos correspondentes desta fila paralela multiplicando-se por uma constante.

Ex.

$$\begin{vmatrix}10 & 15 & 21\\ 3 & 4 & 5\\ 20 & 26 & 33\end{vmatrix}$$

Isso se aplica somente quando os elementos que compõem este determinante são bem elevados e também simplifica este determinante procurando sempre obter elementos nulos.

Determinante.

$$\begin{array}{c} \\ x(-3) \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}10 & 15 & 21\\ \boxed{3 \quad 4 \quad 5}\\ 20 & 26 & 33\end{vmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ x(-6) \end{array} = \begin{vmatrix}2 & 3 & 6\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

Este método se deve ao teorema de Jacobi

Ex: $(-7)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1$

$\parallel$

$44 - 45 = -1$

5ª propriedade

Não se altera o determinante que é trocado linhas por colunas correspondentes.

Ex: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Determinante de 3ª ordem.
Regra prática (SARRUS)

1º) Repetem-se as duas 1ªs linhas após a 3ª linha

2º) O produto dos elementos que compõem a diagonal principal e suas parcelas é positivo.

3º) O produto dos elementos que compõem a diagonal secundária e suas parcelas é negativo.

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ } determinante dado

$1\times4\times3 + 3\times2\times6 + 2\times3\times5$
$-2\times4\times6 - 1\times2\times5 - 3\times3\times3$

$12 + 36 + 30$
$-48 - 10 - 27$

$12 + 36 + 30 - 48 - 10 - 27 = 78 - 85 = \boxed{-7}$

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad 1\times2\times0 + 0\times5\times0 + 4\times0\times3$
$-4\times2\times0 - 1\times5\times3 - 0\times0\times0$

$= -15$

OBS: Quando der zero os pontos ou nº dentro estão alinhados

Exercícios

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & b \\ 1/a^2 & 1/b & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1/a & 1 & b \end{vmatrix} =$$

$1 \times 1 \times 1 + 1/a \times 1/b \times a^2 + \frac{1}{a^2} \times a\, b$

$- 1/a \times a \times 1 - 1 \times 1/b \times b - 1/a^2 \times 1 \times a^2$

$1 + \frac{a^2}{ab} + \frac{ab}{2}$

$- 1 - 1 - 1$

$2 + ab(b) + 2a^2 + ab(ab) - 3$

$2 + ab^2 + 2a^2 + 2ab - 3$

$1 + ab + 2a^2$

$\frac{a^1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

Res.

Índices inferiores = linha

Para o caso de determinantes, falar linhas ou coluna é o mesmo porque portanto se expressa como sendo filas

Determinante de 2° ordem

p/ obtermos um det. de 2° ordem a solução deste será ao fazer o produto entre os elementos que compõe a diagonal principal pela diferença do produto dos elementos que compõe a diagonal secundária.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = a_1^1 \times a_2^2 - a_2^1 \times a_1^2 = N$$

ex: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 8 = 10$

$ex_2 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 12 = 7$

Propriedades

1-) um det. com matriz quadrada de ordem n tem fatorial termos

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \quad n = 2$$

$$a_1^1 \times a_2^2 - a_2^1 \times a_1^2$$

$$|\ | = 2$$

2-) Multiplicando-se ou dividindo-se um det por um escalar qualquer pertencente aos reais este determ. ficará multiplicado ou dividido pelo escalar

$$a \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

Basta multiplicar por este escalar uma das linhas ou uma das colunas

$$a = 2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2 \times 6 = 12$$

$$2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$2 \times 6 = 12$$

3a-) Determinante nulo:

Para termos um determinante nulo, basta ter uma linha ou 1 coluna igual a zero

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

3b-) Também um determinante será nulo quando as linhas ou colunas são paralelas e proporcionais.

ex:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

4-) não se altera um det., se aos elementos desse det. pegarmos uma das filas ou uma das colunas e somarmos os elementos correspondentes desta fila paralela multiplicando por uma constante

$$(-3) \times \begin{vmatrix} 10 & 15 & 21 \\ 3 & 4 & 5 \\ 20 & 26 & 33 \end{vmatrix} (-6) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Isto se aplica somente quando os elementos que compõe este det. são de números elevados e também procurando sempre obter elementos nulos.

Este método se deve ao teorema de Jacobi

$$(-7) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 15 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{verif. } 2 - 3 = -1$$

$$\text{verif.} = 44 - 45 = -1$$

5) não se altera o det. que é troca das linhas p/ colunas correspondentes

$$\text{Ex} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

DET. DE 3ª ORDEM

<u>Regra prática</u> (SARRUS)

1º) repetem-se as 2 primeiras linhas após a 3ª linha.

2º) O produto dos elementos que compõe a diagonal principal e suas parcelas é negativo

ex:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

determ dado

$$1 + 4 + 3 + 3 . 2 . 6 + 2 . 3 . 5 = 78$$

$$2 + 4 + 6 - 1 . 2 . 3 - 3 . 3 . 3 = -85$$

$$\boxed{-7}$$

—//—

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$2 + 0 + 12 = 14$

$8 + 15 + 0 = -23$

$0 + 0 + 0 = 0$

$0 + 15 - 0 = \boxed{-15}$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1/a & 1 & b \\ 1/a^2 & 1/b & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1/a & 1 & b \end{vmatrix}$$

$1 \times 1 \times 1 \times 1/a \times 1/b \times a^2 + 1/a^2 \times a \times b =$

$-1/a \times a \times 1 - 1 \times 1/b \times b - 1/a^2 \times 1 \times a^2$

$1 + a/b + b/a = 1 + a/b + b/a - 1 - 1 - 1 =$

$-1 - 1 - 1 =$ $\quad -2 + \dfrac{a^2 + b^2}{ba}$

$$\frac{-2ba + a^2 + b^2}{ba}$$

$$\frac{(a-b)^2}{ba}$$

DET. DE 4ª ORDEM
CHIÓ (reg. prat.)

1º) Coloca-se a unidade num dos cantos cantos preferentemente.
2º) Baixa a ordem, tamanho para sinal deste nova det. $(-1)^{l+c}$ onde l = nº de linhas e c = nº de colunas correspondentes a posição da unidade.
A 1ª coluna do novo det. será a 1ª coluna do cercado subtraindo-se cada elemento o produto dos elementos que estejam no cercado.
Procede-se igualmente com os demais colunas do cercado.
Ex:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-2.5 & -2-2.2 & 3-2(-3) \\ 2-3.5 & 7-3.2 & 9-3(-3) \\ 5-4.5 & 8-4.2 & 2-4(-3) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 & -6 & 9 \\ -13 & 1 & 18 \\ -15 & 0 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & +6 & 13 \\ -14 & 1 & 19 \\ -15 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

$\times(-1)$

Ex. $$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 \\ -6 & -2 & -3 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & -3 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}$$

$(-1)^5 = -1$

$\times(-1)+$

$$\begin{vmatrix} -6-8\times4 & -2-8\times4 & -3-8\times2 \\ 8-(-5)\times4 & 5-(-5)\times4 & 4-(-5)\times2 \\ 4-0\times4 & 3-0\times4 & 2-0\times2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -38 & -34 & -19 \\ 28 & 25 & 14 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Exercício

Calcular o det.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-0\times 1 & 1-0\times(-1) & 0-0\times 1 \\ 0-1\times 1 & 1-1\times(-1) & 0-1\times 1 \\ 0-1\times 1 & 1-1\times(-1) & 1-1\times 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad +1+2 = -3 //$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2-3\times 1 & 0-3\times 3 & 1-3\times 1 \\ 0-1\times 1 & 0-1\times 3 & 2-1\times 1 \\ 1-0\times 1 & 0-0\times 3 & 1-0\times 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -9 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -9 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3+0+(-9) \\ -9-0-6 = -21 \end{matrix}$$

[illegible]

Há outro método para obtenção de um determinante de 4ª ordem, trata-se da regra prática de LAPLACE

- Teorema de

Um deter. é igual a soma dos produtos dos elementos de 1 fila pelo seus respectivos complementos algébricos ou adjuntos.

Isso se faz quando na obtenção de determinantes a ordem 4

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & H \\ i & j & k & l \\ m & n & O & P \end{vmatrix} = a \times A(a) + e \times A(e) + i A(i) \ldots$$

$m < A(m)$ são ditos compl. alg. ou adj.

$$A_{(a)} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$A_{(e)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$A_{(i)} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b & c & d \\ j & G & H \\ n & o & p \end{vmatrix}$$

$$A_{(m)} = (1)^{1+4} \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & G & H \\ j & K & l \end{vmatrix}$$

Contanto a obtenção de um det. de 4ª ord. pela regra de LAPLACE consiste em resolver 4 det. de 3ª ordem.
OBS. Sempre que possível a obter uma das filas deixa com o máximo de zero, pois, facilitará a sua resolução

Ex

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 8 & -8 & 10 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & -10 & 11 \\ 0 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$1 \times A_{(11)} =$
$1 \times (-1)^3$

$$\begin{vmatrix} 8 & \boxed{-8} & 10 \\ 13 & -10 & 11 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

aplic a regra de Jacobi

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -8 & 2 \\ 3 & -10 & 1 \\ 5 & -2 & 7 \\ 0 & -8 & 2 \\ 3 & -10 & 1 \end{vmatrix}$$

$-12 - 40 + 100 + 168$
-216

21/4/13

$$Ex_2: \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = (-1) \times A(-1) = (-1) \times (-1)^5$$

$$\begin{vmatrix} 18 & 11 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 18 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 18 & 11 & 2 \\ 18 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix} (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 18 & 11 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & -7 \end{vmatrix} = (-3) \times A(-3) = (-3 \times (-2)^4$$

$$\begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \times \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -3 \left[18 \times (-7) - 4 \times 2 \right]$$

$$\boxed{402}$$

Determinante de 5ª ordem

Para obtenção da solução deste deter. de 5ª ordem e de ordem superior a 5 é através da regra de Chió

$$Ex \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0-1\times 0 & 1-1\times 2 & 0-1\times 1 & 1-1\times 0 \\ 2-3\times 0 & 0-3\times 2 & 2-3\times 1 & 0-3\times 0 \\ 1-0\times 0 & 2-0\times 2 & 3-0\times 1 & 2-0\times 0 \\ 1-3\times 0 & 0-3\times 2 & 0-3\times 1 & 1-3\times 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-0\times(-6) & -1-0\times(-3) & 1-0\times 1 \\ -6-2\times(-6) & -1-2\times(-3)0 & 0-2\times 1 \\ 2-1\times(-6) & 3-1\ (-3)2 & 2-1\times 1 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$-5+36+16-40-12+6$

$58-57$

$+1\times(-1)$

$\boxed{-1}$

Det. not.

1) Det. de Vandermonde ou det. da potência. É todo det. do tipo em que a 1ª linha é igual a unidade (cada elemento). A 2ª linha é multipla. (prop. à 3ª linha)

$165 \,|\, \frac{12}{8}$

Ex
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 9 & 36 \end{vmatrix} = \underbrace{(6-3)}_{3}\underbrace{(6-2)}_{4}\underbrace{(3-2)}_{1} = 12$$

2) Sempre que se tem uma diag. principal. Cada elemento superior ou inferior

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 2\times 1 = 4$$

Exercício

Calcular os determ

1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0-2\times 0 & 3-2\times 1 & 0-2\times 5 \\ 5-3\times 0 & 2-3\times 1 & 1-3\times 5 \\ 4-0\times 0 & 2-0\times 1 & 3-0\times 5 \end{vmatrix}$$

Exercícios

1) Resolver.

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \\ x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$+(x-3)(x-5)(x-3)+(-1)+(-1)$$
$$-(x-5)-(x-3)-(x-3)$$
$$(x^2-5x-3x+15)(x-3)-2$$
$$-x+5-x+3-x+3=$$
$$x^3-11x^2+36x-36=0$$

$$x(x^2-11x+36)=36$$

$$x^2-11x+36=0$$

2) Resolver o polinômio $P_{(x)}=?$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & x \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = P(x)$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)=P_{(x)}$$

$$(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)=P_{(x)}$$
$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3=P(x)$$

3) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)+(c-a)\times(b-a)$$

Res. a equação.

4) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 & x \\ x & 1 & -x & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1-2\times 0 & 1-2\cdot 3 & 0-2\cdot(-1) \\ x-0\times 0 & 2-0\cdot 3 & x-0\cdot(-1) \\ 1-x\times 0 & -x-x\cdot 3 & 0-x\cdot(-1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ x & 2 & x \\ 1 & 4x & x \end{vmatrix}$$

2- Calcular x e y de modo que

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ x & y & 5 \end{vmatrix} = 6$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & y & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 47$

Resolução de sistemas de equações do 1° grau através dos métodos clássicos e pela regra de Cramer

Métodos clássicos

1° Método da substituição
2° Método da adição
3° Método da comparação

4° REGRA DE CRAMER

resolução da equação

Para obter os valores das variáveis x e y pela regra de Cramer é através de:

$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$

onde Δ (D) é o determinante formado dos pelos coeficientes das incognitas x e y. também (Δ) é dito como determinante principal.

Condicção necessária para a resolução desta regra:

É que o det. principal deve ser diferente de 0. Δx é o determinante formado pelos coeficientes, trocando os coeficientes da coluna dos x pela coluna dos coeficientes dos termos independentes.

Δy é analogo ao Δx, mas só que é obtido trocando a coluna dos termos dos coeficientes de y, pelos coeficientes ~~ind~~ dos termos independentes.

Aplicação

$$\begin{cases} 3x - 1y = \boxed{7} \\ 1x + 2y = \boxed{4} \end{cases}$$

$$D \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$
$$5 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \therefore 14 - 4 = 10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \therefore 12 - 7 = 5$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{10}{5} \therefore \boxed{x = 2}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} \Rightarrow \frac{5}{5} \therefore \boxed{y = 1}$$

2°
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\Delta \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 2 = -10$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -22$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 19$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad \frac{-22}{-10}$$

$$x = 2,2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \boxed{\frac{19}{-10}} = -1,9$$

3º $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = -6 \qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-6}{3}$$

$$\boxed{x = -2}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = -7$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \boxed{\frac{-7}{3}}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-7} \qquad \boxed{x = 3}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = 0$$

$$\Delta y = \frac{0}{-7}$$

$$\boxed{y = 0}$$

5º $\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

$$\Delta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-5}$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \frac{20}{-5}$$

$$y = -4$$

Percy Bertoni Pinto 2°

Regra de Cramer

para equações do 1° grau, a 3 equações a 3 incógnitas

- Para obter as variáveis x, y, z de uma equação, no caso de 3 incógnitas serão obtidas segundo as relações

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

onde Δ é o determinante principal no qual é formado pelos coeficientes das incógnitas das 3 equações.

Condição:

A condição necessária para que um sistema de 3 equações a 3 incógnitas se verifique é que o determinante principal seja diferente de zero.

O Δx será obtido trocando-se a coluna em x pela coluna dos termos independentes (coeficientes). As outras 2 colunas serão apenas conservadas.

O Δy será obtido, trocando-se a coluna dos y pela coluna dos termos independentes. As outras 2 colunas serão simplesmente repetidas

O Δz será obtido, trocando-se a coluna dos z pela coluna dos termos independentes. As outras 2 colunas serão repetidas, simplesmente.

aplicação

1. $x + y - z = 5$
   $1x - 2y + 3z = 2$
   $2x - 3y + 4z = 3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} -8 + 3 + 6 - 4 + 9 + 4$$

$$\Delta = \boxed{2}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40 + 6 + 9 - 8 + 45 - 6$$

$$6$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \therefore \boxed{x = 3}$$

$$\Delta y \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 + (-3) + 30 - 20 - 9 + 4$$

$$10 - 1 ..$$

$$\Delta y = 10$$

$$y = \frac{10}{2} \quad \boxed{y = 5}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\Delta z = \cancel{-6} + (-15) + 4 - 3 + \cancel{6} + 20$

$\Delta z = 6$

$z = \frac{6}{2}$ $\therefore$ $\boxed{z = 3}$

—X—X—X—X—X—X—

$3x + 2y + z = 1$
$4x - 2y - 3z = 0$
$- y + 3z = 0$

$- \div - = +$

24
18
13
-55

24
18
42
9
33

29

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & +3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 18 + (-4) - 24 - 9$$

$-18 + (-4) - 24 - 9$ $\boxed{\Delta = -55}$

$$\Delta x \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & +3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + -3$$

$\boxed{-9}$

$\boxed{x = \frac{-9}{-55}}$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & +3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -12$$

$\boxed{y = \frac{-12}{-55}}$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$\boxed{z = \frac{-4}{-55}}$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 2y - 0z &= 0 \\ x - y + 0z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} -3+2 \qquad \boxed{\Delta = -1}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \quad \Delta x = 0 \qquad \boxed{x = 0}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta y = 0 \qquad \boxed{y = 0}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \Delta z = -3+2 = -1 \qquad \boxed{z = 1}$$

Resoluções de um sistema de equações do 1º grau de 4 equações à quatro incógnitas.

<u>Regra de Cramer.</u>

Aplicação

①
$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ y - z - 3t &= 0 \\ 3x - 2y + 3z - t &= 0 \\ x + 2y \quad &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-1.2 & 1-1.0 & 1-1.0 \\ 1-0.2 & -1-0.0 & -3-0.0 \\ -2-3.2 & 3-3.0 & -1-3.0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -8 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1+(-6)+48-2+18-8$$

Tem que dar $\boxed{-10}$

30
14
16

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0-(-3).1 & 1-(-3).1 & -1-(-3).1 \\ 0-(-1).1 & -2-(-1).1 & 3-(-1).1 \\ 5-0.1 & 2-0.1 & 1-0.1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\Delta x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-1.5 & 1-1.0 & 1-1.0 \\ 0-0.5 & -1-0.0 & -3-0.0 \\ 0-3.5 & 3-3.0 & -1-5.0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -0 & -1 & -3 \\ -15 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} -4+\cancel{45}+1-\cancel{36}-\cancel{15}$$

$$\Delta y = \boxed{-9}$$

$$y = \boxed{-0,9}$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-1.2 & 1-1.5 & 1-1.0 \\ 1-0.2 & 0-0.5 & -3-0.0 \\ -2-3.2 & 0-3.5 & -1-3.0 \end{vmatrix}$$

12
6
96

$$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -8 & -15 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad +15 + \cancel{1} + 96) + 4 - 45$$

$$\boxed{-70}$$

$$\Delta t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-0.1 & -1-0.1 & 0-0.1 \\ -2-3.1 & -3-3.1 & 0-3.1 \\ 2-1.1 & 0-1.1 & 5-1.1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix} \quad \cancel{4} + \cancel{3} - 20 - \cancel{3}$$

$$\boxed{\Delta t = -20}$$

$$3x - 2y + z + 4t = 1$$
$$3x - y + 4z - 1t = 0$$
$$z - 2t = 0$$
$$x - y - z - t = 1$$

3	-2	-2	-1	1
1	-1	1	1	-2
-1	2	-3	-3	-1
2	-3	-2	-2	-1
1	-2	+1	-1	-1

$$1-(-2).3 \quad -1-(-2)(-2) \quad 1-(-2)(-2) \quad 1-(-2)(-2)$$
$$-1-(-1).3 \quad 2-(-1)(-2) \quad -3-(-1)(-2) \quad -3-(-1)(-2)$$
$$2-(-1).3 \quad -3-(-1)(-2) \quad -2-(-1)(-2) \quad -2-(-1)(-2)$$
$$1-(-1).3 \quad -2-(-1)(-2) \quad 1-(-1)(-2) \quad -1-(-1)(-2)$$

Só vem portela
Com pexinguim em seu altar
E a gente faz
E na ruazinha cantar
~~Cortela Ita~~
Por ter carinhoso

Era falar com quem ficou
Morro de emoção
E
Em nosso coração

Pixinguim era assim que a gente
que a chamavam

Menina bem que se lembra [illegible]
A roseira dá rosa e botão
Pixinguim dá samba e canção

E o samba é como a flor
que tem perfume