Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Taxas de Decaimento para uma Equação de Placas em $\mathbb{R}^n$

Domingos Samanjata
Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis
Julho de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Taxas de Decaimento para uma Equação de Placas em $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Domingos Samanjata
Florianópolis
Julho de 2016

Taxas de Decaimento para uma Equação de Placas em $\mathbb{R}^n$

por

Domingos Samanjata

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Orientador - UFSC) *

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Prof. Dr. Cleuzir da Luz
(Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC)

Florianópolis, Julho de 2016.

I look up to the hills,
but where will my help really come from?
My help will come from the LORD,the Creator of heaven and earth."
Psalms 121,1-2.

Agradecimentos

Agradeço a Deus todo Poderoso, que sempre me acompanhou no meu caminho e que se faz cada vez mais presente na minha jornada acadêmica.

A minha esposa Ana e meus filhos pelos momentos de torcida e oração para que eu obtivesse sucesso acadêmico.

Aos meus irmãos especialmente, o Adriano que sempre estava disposto a me ajudar em toda minha jornada acadêmica.

Aos colegas das salas 106 e 109, especialmente Cris, Jéssika e Ricardo, pela companhia nos estudos e pela amizade.

Ao Prof. Cleverson, por ter aceitado ser meu orientador, por sua amizade, dedicação e paciência.

Ao Prof. Giuliano Boava, por sua amizade e pela alegria que sempre transborda.

Ao Prof. Eliezer Batista, por me acompanhar no primeiro ano de mestrado e pela amizade.

Aos meus colegas de trabalho Chissoca, Delphin, Marino e Kunguvique pelo apoio, pelas conversas e pela amizade.

A Direção do Instituto Superior Politécnico do Huambo, pelo apoio financeiro durante 15 meses.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy associado a uma equação de placas em $\mathbb{R}^n$. O objetivo principal do trabalho é encontrar taxas de decaimento para a energia total e a norma L^2 das soluções. O método utilizado foi baseado no trabalho de Sugitani-Kawashima e consiste em obter estimativas para as soluções fundamentais do problema no espaço de Fourier através do estudo de equivalência dos autovalores.

Abstract

In this work we study the Cauchy problem associated to an equation of plates in n-dimensional space. The main objective of the work is to find decay estimates for the total energy and for the norm L^2 of the solutions. The method used was based on the work of Sugitani-Kawashima and it consists of obtaining estimates for the fundamental solutions of the problem in the space of Fourier through the study of equivalency of the eigenvalues.

Sumário

Introdução

O principal objetivo deste trabalho é apresentar os resultados obtidos por Y. Sugitani e S. Kawashima [16] para uma equação de placas linear com inércia rotacional em $\mathbb{R}^n$. Em [16], os autores estudaram o comportamento assintótico de soluções para o seguinte problema linear, a saber:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + u_t(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

onde os dados iniciais satisfazem

$$u_0 \in H^3(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Na equação (1), $u = u(t,x)$ representa o deslocamento da placa no ponto x e no instante de tempo t. O termo u_t representa uma dissipação friccional no sistema e $-\Delta u_{tt}$ é o termo de inércia rotacional.

O problema acima é um modelo opcional, para certos casos, do modelo para vibrações de placas finas dado pelo sistema completo de von Kármán que tem sido estudado por muitos autores, como pode ser visto no trabalho de J. R. L. Sánchez [15] e suas referências. J. R. L. Sánchez estudou a existência e unicidade de soluções do sistema completo de von Kárman em um domínio exterior e no espaço todo, mas não o comportamento assintótico. De fato, G. P. Menzala e E. Zuazua [14] mostraram que a equação de placas pode ser obtida como um limite singular do sistema de von Kármán. Além disso, J. R. L. Sánchez [15] provou que o modelo de placas termoelásticas é limite singular do sistema de von Kármán sob efeitos térmicos.

Em [11], C. R. da Luz e R. C. Charão encontraram várias estimativas de decaimento de soluções que incluem a energia total. Em [10], Y. Liu e S. Kawashima estudaram a seguinte equação de placas semilinear com termo de memória:

$$u_{tt} + \Delta^2 u + u + g * \Delta u = f(u).$$

Eles provaram a existência global e estimativas de decaimento de soluções usando o método da energia no espaço de Fourier e o teorema da contração. Uma situação mais geral foi considerada por Y. Liu [9], que estudou a equação de placas acima com efeitos de inércia rotacional e um termo semilinear que inclui derivadas da função u.

A estrutura de decaimento da equação de placas com inércia rotacional (1) é do tipo de perda de regularidade. De fato, as raízes características do polinômio associado com a EDO no espaço de Fourier são dados por

$$\lambda(\xi) = -\frac{1}{2(1+|\xi|^2)} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4\,(1+|\xi|^2)\,|\xi|^4} \right].$$

Assim, $Re\,\lambda(\xi) \to 0$ quando $|\xi| \to +\infty$. Para estudar o comportamento da energia na região de alta frequência no espaço de Fourier é necessário assumir mais regularidade nos dados iniciais, como pode ser visto em C. R. da Luz e R. C. Charão [11] e Y. Sugitani e S. Kawashima [16].

Neste trabalho, para encontrar taxas de decaimento para o problema (1)-(2), usamos a solução explícita no espaço de Fourier e certas equivalências para as raízes características. Os resultados aqui apresentados foram obtidos por Y. Sugitani e S. Kawashima [16].

A seguir vamos descrever brevemente resultados mais recentes obtidos para a equação de placas em $\mathbb{R}^n$. Em [3], R. C. Charão, C. R. da Luz e R. Ikehata estudaram o seguinte problema associado a equação de placas em $\mathbb{R}^n$ com dissipação fracionária:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + (-\Delta)^\theta u_t(t,x) = 0,$$

sendo $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \theta \leq 1$. O operador fracionário que aparece no problema acima é definido usando a transformada de Fourier usual $\mathcal{F}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é

$$(-\Delta)^\theta v(x) := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2\theta}\mathcal{F}(v)(\xi)\big)(x), \qquad v \in H^{2\theta}(\mathbb{R}^n), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Os autores obtiveram em [3] resultados quase ótimos para a energia total da forma

$$E_u(t) = o\left(t^{-\frac{n-4\theta+4}{4-2\theta}+\delta}\right) \quad (t \to +\infty),$$

para todo $\delta > 0$, para $n = 1$ e $0 \leq \theta \leq 1/2$, ou $n \geq 2$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Para $n = 1$ e $1/2 < \theta \leq 1$ o resultado quase ótimo obtido foi $t^{-\frac{1}{2\theta}+\delta}$ para

t grande e para todo $\delta > 0$. Por *quase ótimo* entende-se como sendo ótimo o caso $\delta = 0$.

M. D'Abbicco, R. C. Charão e C. R. da Luz [5] estudaram um problema mais geral, a saber

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + b(t)(-\Delta)^\theta u_t(t,x) = 0.$$

Considerando $b(t)$ uma função pseudo-diferencial, monótona crescente e tal que

$$[b(t)]^{-1} \notin L^1([0,\infty))$$

as taxas obtidas para a energia total foram

$$E_u(t) = o\left(\left(1 + \int_0^t \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau\right)^{-\frac{n-4\theta+4}{4-2\theta}+\delta}\right) \quad (t \to +\infty),$$

para $n = 1$ e $0 \leq \theta \leq 1/2$ ou $n \geq 2$ e $0 \leq \theta \leq 1$ para todo $\delta > 0$. Para obter tais resultados, os autores usaram um melhoramento do método desenvolvido em [4] e [3]. Na segunda parte do trabalho, os autores consideraram o caso particular

$$b(t) = \mu(1+t)^\alpha, \tag{3}$$

para $\mu > 0$ e $\alpha \in (0,1]$. Esta escolha permitiu-os melhorar as estimativas de decaimento obtidos na primeira parte do trabalho. Além disso, foi exigido menos regularidade nos dados iniciais. O método utilizado na segunda parte é baseado no processo de diagonalização no espaço de Fourier (ver, por exemplo, [17]).

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. As demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados conhecidos, mas citamos referências onde tais resultados, junto com suas demonstrações, podem ser encontrados.

Em todo este trabalho, o símbolo Ω representará um subconjunto aberto do espaço $\mathbb{R}^n$, que eventualmente poderá ser todo $\mathbb{R}^n$.

1.1 Notações e Primeiros Conceitos

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

2. $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ponto no espaço $\mathbb{R}^n$;

3. $|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;

4. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

5. $L^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mensuráveis tais que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx < +\infty$;

6. Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$;

7. $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ derivada de u em relação a t;

8. $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ segunda derivada de u em relação a t;

9. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;

10. $\bigtriangledown u = grad\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dfrac{\partial u}{\partial x_3}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ representa o gradiente da função u;

11. Se $u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ então $div\, u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ representa o divergente da função u;

12. $\triangle u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ representa o laplaciano da função u;

13. Se $\xi \in \mathbb{R}^n$ então $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$;

14. $\widehat{u}$ representa a transformada de Fourier da função u;

15. $\mathcal{F}^{-1}$ representa a transformada de Fourier inversa;

16. $*$ denota a convolução em termos de x em $\mathbb{R}^n$;

17. $\partial_x^k u$ representa a derivada de ordem k em relação x da função u;

18. $[\ \ ]$ denota o menor inteiro.

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe $\mathcal{C}^1$, c é uma constante real e F e G são campos vetoriais também de classe $\mathcal{C}^1$, então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

4. $\mathrm{div}(F+G) = \mathrm{div}(F) + \mathrm{div}(G)$

5. $\mathrm{div}(fF) = f\mathrm{div}(F) + \nabla f \cdot F$

Em que o ponto $\cdot$ indica o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Distribuições

Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Como referência para as Seções 1.2 e 1.3 citamos Evans [7], Medeiros-Rivera [12], [13] e Brezis [2].

Seja $u : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função mensurável e seja $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então $u = 0$ quase sempre em K.

Como consequência, define-se o *suporte* de u, que será denotado por $supp\,(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega / K.$$

Definição 1.1 *Representamos por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções*

$$u : \Omega \to \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω. Os elementos de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ são chamados de funções testes.

Naturalmente, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

i) *$\exists\ K \subset \Omega$, K compacto, tal que $supp\,(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.*

Definição 1.3 *O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}; \;\; T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.6 *Sejam Ω um conjunto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup\mathrm{ess}_{x\in\Omega} |f(x)| \\ &= \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \;/\; \mathrm{med}\{x \in \Omega \;/\; |f(x)| > C\} = 0\} \\ &= \inf\{C > 0 : \;\; |f(x)| \leq C \;\; \text{quase sempre em } \Omega\}. \end{aligned}$$

Observação 1.7 *As funções $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+$, $1 \leq p \leq \infty$, são normas.*

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.8 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$.*

Teorema 1.9 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam $1 \leq p < q \leq \infty$. Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $r \in [p, q]$. Além disso,*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}$$

com $\alpha \in [0,1]$ tal que $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}$.

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.10 *Sejam Ω um aberto do espaço $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, onde χ_K é a função característica de K.*

Observação 1.11 *$L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado o espaço das funções localmente integráveis.*

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.12 (Du Bois Reymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ quase sempre em Ω.*

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.12). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

Definição 1.13 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.4 Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas

Para esta seção citamos Medeiros-Rivera [12], [13].

Definição 1.14 *Uma função $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita rapidamente decrescente no infinito quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o que é equivalente a dizer

$$\lim_{|x| \to \infty} P(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo polinômio P de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Consideremos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todas as funções rapidamente decrescentes no infinito. Sobre esse espaço, temos o seguinte sistema de seminormas:

$$p_k(\varphi) = \max_{\alpha \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Noção de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $p_k(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero em $\mathbb{K}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.15 *O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 1.16 *Tem-se que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Definição 1.17 *Considere $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com a noção de convergência definida acima. Se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ é linear e contínua, diz-se que T é uma distribuição temperada.*

O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Transformada de Fourier

Os conceitos e resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Dautray-Lions [6] e Evans [7].

Definição 1.18 *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}\varphi$ definida no $\mathbb{R}^n$ por*

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,x\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Observação 1.19 *Também denotaremos a transformada de Fourier de uma função φ por $\widehat{\varphi}$.*

Proposição 1.20 *Para $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $C > 0$ tal que*

$$||\widehat{u}||^2_{L^\infty} \leq C||u||^2_{L^1}.$$

Observação 1.21 *A aplicação $\widetilde{\mathcal{F}}$ dada por $(\widetilde{\mathcal{F}}\varphi)(x) = (\mathcal{F}\varphi)(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, é denominada transformada de Fourier inversa de φ. Além disso, $\overline{\mathcal{F}\varphi} = \widetilde{\mathcal{F}}\overline{\varphi}$, onde $\overline{\varphi}$ denota o complexo conjugado de φ.*

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}\varphi$ e $\widetilde{\mathcal{F}}\varphi$ estão bem definidas para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, ambas são rapidamente decrescentes do infinito.

Proposição 1.22 *As aplicações*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Proposição 1.23 *Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos*

i) $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$;

ii) $D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(-i^{|\alpha|}x^\alpha\varphi), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.24 *Seja T uma distribuição temperada. Definimos sua transformada de Fourier da seguinte forma*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$
$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.25 *Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\mathcal{F}T$ e $\widetilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas.*

Proposição 1.26 *As aplicações*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos $\varphi_k = \varphi\chi_{B_k(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\chi_{B_k(0)}$ é a função característica do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq k\}$. Assim, $\mathcal{F}\varphi_k$ é dada por

$$(\mathcal{F}\varphi_k)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| \leq k} e^{-i\,x\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

É possível provar que $\mathcal{F}\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que $\{\mathcal{F}\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como este espaço é de Hilbert, esta sequência tem um limite, que denotamos por $\mathcal{F}\varphi$. Ainda observa-se que $\mathcal{F}\varphi$ e a transformada de Fourier de φ (vista como distribuição temperada) coincidem. Assim fica definida a transformada de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.27 *Se* $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *então existem constantes positivas* C_1 *e* C_2 *tal que*

i) $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \widehat{u}$ *para cada multi-índice* α *tal que* $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\widehat{(u * v)} = C_1 \widehat{u}\,\widehat{v}$.

iii) $\widehat{u\,v} = C_2\,(\widehat{u} * \widehat{v})$.

iv) $u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$.

Teorema 1.28 (Teorema de Plancherel) *As aplicações*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \widetilde{\mathcal{F}}\varphi, \widetilde{\mathcal{F}}\psi \rangle_{L^2}$$

para todo par $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 1.29 *Se* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *então* $||\varphi|| = ||\mathcal{F}\varphi||$.

Exemplos

1. $\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Da Proposição 1.23, $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$, logo para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ tem-se

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = i^2x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x) = -x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x).$$

Assim, pela linearidade da transformada de Fourier temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) &= \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x)\\ &= \sum_{j=1}^n(-x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Usando o Exemplo 1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) &= \mathcal{F}(\Delta(\Delta\varphi))(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x)\\ &= -|x^2|(-|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x).\end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}(\nabla\varphi)(x) = ix\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Também usando que $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$, temos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x) = ix_j\mathcal{F}(\varphi)(x), \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\nabla\varphi)(x) &= \mathcal{F}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix}\mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(x)\\ \vdots\\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)(x)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}ix_1\mathcal{F}(\varphi)(x)\\ \vdots\\ ix_n\mathcal{F}(\varphi)(x)\end{pmatrix} = ix\mathcal{F}(\varphi)(x).\end{aligned}$$

1.6 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [2], Kesavan [8] e Medeiros-Rivera [12], [13].

Definição 1.30 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leqslant m\}.$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\begin{aligned} \|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

com $p \in [1, \infty)$, e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)},$$

com $p = \infty$, define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

5. A norma usual em $H^2(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma dada por

$$||u||_{H^2} = ||u||^2 + ||\Delta u||^2.$$

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.31 *Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações:

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.

3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.32 *Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.33 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.*

i) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$;*

ii) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$;*

iii) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$*

sendo as imersões acima contínuas.

1.7 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdade de Hausdorff-Young

Sejam $f \in L^p$, $1 \leq p < 2$. Então $\widehat{f} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ e

$$\|\widehat{f}\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Desigualdade da Integral

Lema 1.34 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$, $k > -n$, $\beta > 0$, $\alpha > 0$ e $a > 0$. Então existe $C = C(\alpha, \beta, n, k, a) > 0$ tal que*

$$\int_{|\xi| \leq a} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k d\xi \leq C(1+t)^{-\frac{n+k}{\beta}}, \quad \forall\, t > 0. \tag{1.1}$$

Demonstração:

No que segue vamos considerar $a = 1$. A demonstração para $a > 0$ qualquer é completamente análoga. Notemos que

$$\begin{aligned} I(t) &:= \int_{|\xi| \leq 1} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k d\xi \\ &= \int_0^1 \int_{|\xi| = r} e^{-\alpha|\xi|^\beta t} |\xi|^k dS_\xi dr \\ &= \int_0^1 \int_{|\xi| = r} e^{-\alpha r^\beta t} r^k dS_\xi dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^k \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi \right) dr \\
&= \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^k \left(w_n r^{n-1} \right) dr \\
&= w_n \int_0^1 e^{-\alpha r^\beta t} r^{k+n-1} dr \\
&= w_n \int_0^1 e^{-\alpha (t^{\frac{1}{\beta}} r)^\beta} r^{k+n-1} dr,
\end{aligned}
$$

onde $w_n > 0$ é a medida da superfície da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. Fazendo a substituição $s = t^{\frac{1}{\beta}} r$, temos

$$
\begin{aligned}
I(t) &= w_n \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} \left(\frac{s}{t^{\frac{1}{\beta}}} \right)^{k+n-1} \frac{1}{t^{\frac{1}{\beta}}} ds \\
&= w_n \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} t^{-\frac{1}{\beta}(k+n)} ds \\
&= w_n t^{-\frac{k+n}{\beta}} \int_0^{t^{\frac{1}{\beta}}} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds \\
&\leq w_n t^{-\frac{k+n}{\beta}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds. \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Note que $\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds < +\infty$ se $k + n > 0$. De fato, temos

$$
\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds = \int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds.
$$

Como $\lim_{s\to\infty} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} = 0$, existe $s_0 > 0$ tal que se $s \geq s_0$ então $e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} < 1$. Além disso, é claro que $e^{-\alpha s^\beta} \leq 1$ se $s \geq 0$. Assim podemos escrever

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds \\
&= \int_0^{s_0} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1} ds + \int_{s_0}^\infty e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n+1} s^{-2} ds \\
&\leq \int_0^{s_0} s^{k+n-1} ds + \int_{s_0}^\infty s^{-2} ds.
\end{aligned}
$$

Mas
$$\int_0^{s_0} s^{k+n-1}ds = \frac{s^{k+n}}{k+n}\bigg|_0^{s_0} = \frac{s_0^{k+n}}{k+n}$$
e
$$\int_{s_0}^{\infty} s^{-2}ds = \lim_{z\to+\infty}\int_{s_0}^{z} s^{-2}ds = \lim_{z\to+\infty}\left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{s_0}\right] = \frac{1}{s_0}.$$

Logo
$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha s^\beta} s^{k+n-1}ds \le \int_0^{s_0} s^{k+n-1}ds + \int_{s_0}^{\infty} s^{-2} = \frac{s_0^{k+n}}{k+n} + \frac{1}{s_0} < +\infty.$$

Considerando a conclusão acima em (1.2), tem-se que
$$I(t) \le Kt^{-\frac{k+n}{\beta}}, \qquad t>0,$$
onde K é uma constante que depende de n, k, α e β.

Agora chamemos $\gamma = \frac{k+n}{\beta}$. Vamos mostrar que $I(t) \le C(1+t)^{-\gamma}$, para todo $t>0$.

Primeiramente consideremos $t \in (0,1]$. Como I é uma função contínua em $[0,1]$, existe $C_1>0$ tal que $I(t) \le C_1$, $\forall\, t \in (0,1]$. Seja $C_2>0$ tal que $C_1 2^\gamma \le C_2$, daí
$$C_1(1+t)^\gamma \le C_1 2^\gamma \le C_2,$$
ou seja,
$$I(t) \le C_1 \le C_2(1+t)^{-\gamma}, \quad \forall\, t\in(0,1].$$

Agora consideremos $t \ge 1$. Seja $C_3>0$ uma constante tal que $K \le C_3 2^{-\gamma}$. Assim
$$I(t) \le Kt^{-\gamma} \le C_3 2^{-\gamma} t^{-\gamma} \le C_3(1+t)^{-\gamma}, \quad \forall\, t \ge 1,$$
pois neste caso, $2t \ge 1+t$.

Para $C = \max\{C_2, C_3\}$, segue que
$$I(t) \le C(1+t)^{-\frac{k+n}{\beta}}, \quad \forall\, t>0.$$

■

Lema 1.35 *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^n$, $l \ge 0$ e r_0, c constantes positivas. Então existe $C>0$ tal que*
$$\sup_{|\xi|\ge r_0}\left(|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^{-2}t}\right) \le C(1+t)^{-l} \quad \forall\, t>0. \tag{1.3}$$

1.8 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω com fronteira de classe $\mathcal{C}^2$:

i. Para $F \in (H^1(\Omega))^n$:

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)(x)\, dx = \int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma.$$

ii. Para $v \in H_0^1(\Omega),\ u \in H^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v(x) \Delta u(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\, dx.$$

iii. Para $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H_0^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v(x) \Delta u(x)\, dx = \int_\Omega \Delta v(x) u(x)\, dx.$$

A função $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$ e a função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço.

Capítulo 2

Soluções do Problema

O problema de Cauchy que será estudado neste capítulo é dado por

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + u_t(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

onde os dados iniciais satisfazem

$$u_0 \in H^3(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n).$$

Multiplicando a equação (2.1) por u_t e integrando em $\mathbb{R}^n$ obtemos formalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_{tt}u_t\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u u_t\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2\,dx = 0.$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\,dx,$$

e pela fórmula de Green,

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_{tt}u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_{tt}\nabla u_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_t|^2\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 u u_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \Delta u_t\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta u|^2\,dx.$$

Assim

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left\{|u_t|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2\right\}\,dx\right] + \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\,dx = 0.$$

Portanto, a energia total associado a equação (2.1) é dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left\{|u_t|^2 + |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2\right\} dx \tag{2.3}$$

e $E_u(t)$ é decrescente no tempo. O termo dissipativo é

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2 \, dx.$$

2.1 Representação das Soluções

No espaço de Fourier em $\mathbb{R}^n$, o problema (2.1) é escrito da forma:

$$(1+|\xi|^2)\widehat{u}_{tt}(t,\xi)+|\xi|^4\widehat{u}(t,\xi)+\widehat{u}_t(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

$$\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

A equação característica de (2.4) é dado por

$$(1+|\xi|^2)\lambda^2 + \lambda + |\xi|^4 = 0. \tag{2.6}$$

As raízes da equação característica (2.6) são

$$\lambda_\pm(\xi) = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)},$$

ou ainda

$$\lambda_\pm(\xi) = \frac{1}{2(1+|\xi|^2)}\left[-1 \pm \sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}\right], \tag{2.7}$$

em que $\lambda_\pm(\xi)$ são os autovalores associado a equação (2.4).

Assim, a solução geral do problema de Cauchy (2.4) é

$$\widehat{u}(t,\xi) = C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t} + C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}, \tag{2.8}$$

com $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$ dependendo dos dados iniciais. Vamos determinar os valores de $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$. Usando (2.5) temos

$$\widehat{u}(0,\xi) = C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi).0} + C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi).0} = \widehat{u}_0(\xi),$$

logo,

$$C_1(\xi) = \widehat{u}_0(\xi) - C_2(\xi). \tag{2.9}$$

Derivando (2.8) temos

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = \lambda_+(\xi)C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t},$$

e usando (2.5) obtemos

$$\widehat{u}_t(0,\xi) = \lambda_+(\xi)C_1(\xi)e^{\lambda_+(\xi).0} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi)e^{\lambda_-(\xi).0} = \widehat{u}_1(\xi),$$

logo,

$$\lambda_+(\xi)C_1(\xi) + \lambda_-(\xi)C_2(\xi) = \widehat{u}_1(\xi). \tag{2.10}$$

Resolvendo (2.9) e (2.10) simultaneamente, temos

$$\begin{aligned} &\lambda_+(\xi)\left\{\widehat{u}_0(\xi) - C_2(\xi)\right\} + \lambda_-(\xi)C_2(\xi) = \widehat{u}_1(\xi),\\ \Rightarrow\quad &C_2(\xi)\left\{\lambda_-(\xi) - \lambda_+(\xi)\right\} = \widehat{u}_1(\xi) - \lambda_+(\xi)\,\widehat{u}_0(\xi), \end{aligned}$$

assim,

$$C_2(\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\left\{\lambda_+(\xi)\,\widehat{u}_0(\xi) - \widehat{u}_1(\xi)\right\},$$

e de (2.9) temos

$$C_1(\xi) = \widehat{u}_0(\xi) - \frac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\left\{\lambda_+(\xi)\,\widehat{u}_0(\xi) - \widehat{u}_1(\xi)\right\},$$

ou seja

$$C_1(\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\left\{\widehat{u}_1(\xi) - \lambda_-(\xi)\widehat{u}_0(\xi)\right\}.$$

Portanto, a solução do problema de Cauchy (2.4)-(2.5) é da forma

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\left\{\widehat{u}_0(\xi) + \widehat{u}_1(\xi)\right\} + \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_0(\xi) \tag{2.11}$$

onde $\widehat{G}(t,\xi)$ e $\widehat{H}(t,\xi)$ são dadas explicitamente em termos das raízes características

$$\widehat{G}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\left[e^{\lambda_+(\xi)t} - e^{\lambda_-(\xi)t}\right], \tag{2.12}$$

$$\widehat{H}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)}\left[(1+\lambda_+(\xi))e^{\lambda_-(\xi)t} - (1+\lambda_-(\xi))e^{\lambda_+(\xi)t}\right]. \tag{2.13}$$

Definimos $G(t,x)$ e $H(t,x)$ por $G(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[\widehat{G}(t,\xi)](x)$ e $H(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[\widehat{H}(t,\xi)](x)$, onde $\mathcal{F}^{-1}$ denota a transformada inversa de Fourier. Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ na equação (2.11) obtemos

$$u(t) = G(t) * \{u_0 + u_1\} + H(t) * u_0, \tag{2.14}$$

onde $*$ denota a convolução em termos de x em $\mathbb{R}^n$. Portanto, (2.14) é a solução do problema (2.1)-(2.2) e $G(t,x)$ e $H(t,x)$ são as soluções fundamentais de (2.1).

Capítulo 3

Taxas de Decaimento

3.1 Estimativas para as Soluções Fundamentais

O objetivo deste capítulo é encontrar taxas de decaimento para a solução do problema (2.1)-(2.2) dada por (2.14). Primeiro, vamos encontrar as estimativas pontuais das soluções do problema (2.4)-(2.5). A prova do próximo lema será obtida a partir da construção de um Funcional de Lyapunov.

Lema 3.1 *A solução do problema (2.4)-(2.5) satisfaz a estimativa*

$$\begin{aligned} &|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \\ &\quad \leq Ce^{-c\eta(\xi)t}\left\{|\widehat{u}_1(\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_0(\xi)|^2\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $t \geq 0$, *onde* $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3$.

Demonstração:
Utilizaremos o método dos multiplicadores para encontrar a estimativa. Multiplicando a equação (2.4) por $\overline{\widehat{u}_t}$ e tomando a parte real, obtemos

$$Re\left\{(1+|\xi|^2)\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}_t} + |\xi|^4\widehat{u}\overline{\widehat{u}_t} + |\widehat{u}_t|^2\right\} = 0.$$

Mas para $v = v(t,\xi)$, temos

$$\frac{d}{dt}|\widehat{v}|^2 = \frac{d}{dt}(\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}) = \widehat{v}\,\overline{\widehat{v}_t} + \widehat{v}_t\,\overline{\widehat{v}} = \widehat{v}\,\overline{\widehat{v}_t} + \overline{\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}_t}} = 2Re(\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}_t}).$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^4|\widehat{u}|^2\right\}+|\widehat{u}_t|^2=0. \tag{3.2}$$

Multiplicando a equação (2.4) por $\overline{\widehat{u}}$ e tomando a parte real, obtemos

$$Re\left\{(1+|\xi|^2)\frac{d}{dt}\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}\right\}-(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^4|\widehat{u}|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{u}|^2=0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\widehat{u}|^2+2(1+|\xi|^2)Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})\right\}+|\xi|^4|\widehat{u}|^2-(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2=0. \tag{3.3}$$

Multiplicando (3.2) por $2(1+|\xi|^2)$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2+|\xi|^4(1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2\right\}+2(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2=0. \tag{3.4}$$

Somando (3.3) e (3.4) temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1}{2}+|\xi|^4(1+|\xi|^2)\right)|\widehat{u}|^2+(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2+(1+|\xi|^2)Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})\right\}\\ &\quad+|\xi|^4|\widehat{u}|^2+(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2=0.\end{aligned}$$

Consideremos

$$E=(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2+\left(\frac{1}{2}+|\xi|^4(1+|\xi|^2)\right)|\widehat{u}|^2+(1+|\xi|^2)Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})$$

e

$$F=|\xi|^4|\widehat{u}|^2+(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}E+F=0. \tag{3.5}$$

A seguir, mostraremos que

$$c(1+|\xi|^2)^2E_0\le E\le C(1+|\xi|^2)^2E_0, \tag{3.6}$$

onde

$$E_0=|\widehat{u}_t|^2+(1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2. \tag{3.7}$$

Mostraremos primeiro que $E \leq C(1+|\xi|^2)^2 E_0$. Observe que,

- $$(1+|\xi|^2)Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}) \leq (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|\,|\widehat{u}| \\ \leq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2, \qquad (3.8)$$

onde foi utilizado a desigualdade de Young; e

- $$\left(\frac{1}{2}+(1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 \leq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2. \qquad (3.9)$$

Usando (3.8) e (3.9) temos

$$\begin{aligned}
E &\leq (1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + \left(\frac{1}{2}+(1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2 \\
&\leq (1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 \\
&= \frac{3}{2}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + \frac{3}{2}(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 \\
&= (1+|\xi|^2)^2\left(\frac{3}{2}|\widehat{u}_t|^2 + \frac{3}{2}(1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2\right) \\
&\leq C(1+|\xi|^2)^2\left(|\widehat{u}_t|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2\right) \\
&= C(1+|\xi|^2)^2E_0.
\end{aligned}$$

A seguir, mostraremos que $E \geq c(1+|\xi|^2)^2E_0$. Observe que,

- $$\begin{aligned} -(1+|\xi|^2)Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}}) &\leq (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|\,|\widehat{u}| \\ &\leq \frac{1}{3}|\widehat{u}|^2 + \frac{3}{4}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2, \end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Young com a escolha de um $\varepsilon > 0$ adequado.

Usando a desigualdade acima temos que

$$\begin{aligned}
E &\geq -\frac{1}{3}|\widehat{u}|^2 - \frac{3}{4}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + (1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}+|\xi|^4(1+|\xi|^2)\right)|\widehat{u}|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}|\widehat{u}|^2 + \frac{1}{4}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + (1+|\xi|^2)|\xi|^4|\widehat{u}|^2 \\
&= \frac{1}{4}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + \left(\frac{1}{6} + (1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2.
\end{aligned}
$$

Agora resta mostrar que existe um $C_0 \geq 0$ tal que

$$
\left(\frac{1}{6} + (1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 \geq C_0(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2.
$$

Primeiramente consideremos $|\xi| \leq 1$. Seja $C_1 \geq 0$ tal que

$$
\frac{1}{6} \geq C_1(2)^3,
$$

daí

$$
C_1(1+|\xi|^2)^3 \leq C_1(2)^3 \leq \frac{1}{6}.
$$

A seguir, consideremos $|\xi| \geq 1$. Seja $C_2 \geq 0$ tal que

$$
|\xi|^4 \geq 4C_2|\xi|^4,
$$

daí

$$
C_2(1+|\xi|^2)^2 \leq C_2(2|\xi|^2)^2 = 4C_2|\xi|^4 \leq |\xi|^4,
$$

ou seja

$$
(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq C_2(1+|\xi|^2)^3.
$$

Assim concluímos que

$$
\left(\frac{1}{6} + (1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)|\widehat{u}|^2 \geq C_0(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2.
$$

Logo, existe $c > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
E &\geq \frac{1}{4}(1+|\xi|^2)^2|\widehat{u}_t|^2 + C_0(1+|\xi|^2)^3|\widehat{u}|^2 \\
&\geq c(1+|\xi|^2)^2\left(|\widehat{u}_t|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}|^2\right) \\
&= c(1+|\xi|^2)^2E_0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
c(1+|\xi|^2)^2E_0 \leq E \leq C(1+|\xi|^2)^2E_0.
$$

Observe que,

$$
\frac{|\xi|^4}{1+|\xi|^2}E_0 = \frac{|\xi|^4}{1+|\xi|^2}|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^4|\widehat{u}|^2 \leq (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_t|^2 + |\xi|^4|\widehat{u}|^2 = F.
$$

Assim,

$$F \geq C^{-1}\eta(\xi)E, \tag{3.10}$$

onde $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3$.

Substituindo (3.10) em (3.5) obtemos

$$\frac{d}{dt}E + C^{-1}\eta(\xi)E \leq 0. \tag{3.11}$$

Multiplicando a equação acima por $e^{C^{-1}\eta(\xi)t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(e^{C^{-1}\eta(\xi)t}E\right) \leq 0.$$

Integrando em $(0,t)$ concluímos que

$$E(t,\xi) \leq e^{-C^{-1}\eta(\xi)t}E(0,\xi). \tag{3.12}$$

De (3.6) e de (3.12) temos,

$$\begin{aligned}
&c(1+|\xi|^2)^2E_0(t,\xi) \leq E(t,\xi)\\
&\quad \leq e^{-C^{-1}\eta(\xi)t}C(1+|\xi|^2)^2\left\{|\widehat{u}_1(\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_0(\xi)|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
E_0(t,\xi) &= |\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}(t,\xi)|^2\\
&\leq C_1e^{-C^{-1}\eta(\xi)t}\left\{|\widehat{u}_1(\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{u}_0(\xi)|^2\right\}.
\end{aligned}$$

■

Como consequência do Lema 3.1, temos as seguintes estimativas pontuais para as soluções fundamentais no espaço de Fourier.

Lema 3.2 *Sejam $\widehat{G}(t,\xi)$ e $\widehat{H}(t,\xi)$ soluções fundamentais de (2.4)-(2.5) no espaço de Fourier dadas em (2.12)-(2.13). As seguintes estimativas são verdadeiras:*

$$\begin{aligned}
&|\widehat{G}(t,\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-c\eta(\xi)t},\\
&|\widehat{H}(t,\xi)| + |\widehat{G}_t(t,\xi)| \leq Ce^{-c\eta(\xi)t},\\
&|\widehat{H}_t(t,\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}e^{-c\eta(\xi)t}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

para $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, onde $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3$, com $C, c > 0$ constantes.

Demonstração:

Considere a solução do problema (2.4)-(2.5) dada por

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\left\{\widehat{u}_0(\xi) + \widehat{u}_1(\xi)\right\} + \widehat{H}(t,\xi)\widehat{u}_0(\xi). \tag{3.14}$$

Para $\widehat{u}_0(\xi) = 0$, de (3.14) temos

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_1(\xi). \tag{3.15}$$

Para $\widehat{u}_1(\xi) = 0$, de (3.14) temos

$$\widehat{u}(t,\xi) = \left[\widehat{G}(t,\xi) + \widehat{H}(t,\xi)\right]\widehat{u}_0(\xi). \tag{3.16}$$

Derivando as equações (3.15) e (3.16) obtemos

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = \widehat{G}_t(t,\xi)\widehat{u}_1(\xi), \tag{3.17}$$

e

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = \left[\widehat{G}_t(t,\xi) + \widehat{H}_t(t,\xi)\right]\widehat{u}_0(\xi). \tag{3.18}$$

Substituindo (3.15) e (3.17) em (3.1) com $\widehat{u}_0(\xi) = 0$, obtemos

$$|\widehat{G}_t(t,\xi)\widehat{u}_1(\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{G}(t,\xi)\widehat{u}_1(\xi)|^2 \le Ce^{-c\eta(\xi)t}|\widehat{u}_1(\xi)|^2,$$

ou seja

$$|\widehat{u}_1(\xi)|^2\left\{|\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{G}(t,\xi)|^2\right\} \le Ce^{-c\eta(\xi)t}|\widehat{u}_1(\xi)|^2.$$

Da estimativa acima, podemos concluir que

$$|\widehat{G}(t,\xi)| \le C(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-c\eta(\xi)t}, \tag{3.19}$$

e que

$$|\widehat{G}_t(t,\xi)| \le Ce^{-c\eta(\xi)t}. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.16) e (3.18) em (3.1) com $\widehat{u}_1(\xi) = 0$ temos

$$\begin{aligned}|\widehat{G}_t(t,\xi) + \widehat{H}_t(t,\xi)|^2|\widehat{u}_0(\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{G}(t,\xi) + \widehat{H}(t,\xi)|^2|\widehat{u}_0(\xi)|^2 \\ \le C(1+|\xi|^2)e^{-c\eta(\xi)t}|\widehat{u}_0(\xi)|^2,\end{aligned}$$

ou seja

$$|\widehat{G}_t(t,\xi) + \widehat{H}_t(t,\xi)|^2 + (1+|\xi|^2)|\widehat{G}(t,\xi) + \widehat{H}(t,\xi)|^2 \le C(1+|\xi|^2)e^{-c\eta(\xi)t}. \tag{3.21}$$

Note que, de (3.21), concluímos que

$$|\widehat{G}_t(t,\xi) + \widehat{H}_t(t,\xi)| \le C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t},$$

e usando a desigualdade triangular inversa obtemos

$$|\widehat{H}_t(t,\xi)| - |\widehat{G}_t(t,\xi)| \le |\widehat{G}_t(t,\xi) + \widehat{H}_t(t,\xi)| \le C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t}.$$

Usando a estimativa acima e (3.20) obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{H}_t(t,\xi)| &\le C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} + |\widehat{G}_t(t,\xi)| \\
&\le C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} + Ce^{-c\eta(\xi)t} \\
&\le C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} + C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} \\
&= 2C(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Além disso, de (3.21) obtemos

$$|\widehat{G}(t,\xi) + \widehat{H}(t,\xi)| \le Ce^{-c\eta(\xi)t},$$

e analogamente temos que

$$|\widehat{H}(t,\xi)| - |\widehat{G}(t,\xi)| \le |\widehat{G}(t,\xi) + \widehat{H}(t,\xi)| \le Ce^{-c\eta(\xi)t}.$$

Assim, usando a estimativa acima e (3.19) obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{H}(t,\xi)| &\le Ce^{-c\eta(\xi)t} + |\widehat{G}(t,\xi)| \\
&\le Ce^{-c\eta(\xi)t} + C(1+|\xi|^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} \\
&\le Ce^{-c\eta(\xi)t} + Ce^{-c\eta(\xi)t} \\
&= 2Ce^{-c\eta(\xi)t}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

De (3.20) e (3.23) temos que

$$|\widehat{H}(t,\xi)| + |\widehat{G}_t(t,\xi)| \le Ce^{-c\eta(\xi)t}. \qquad (3.24)$$

As estimativas (3.19), (3.22) e (3.24) provam o Lema 3.2.

■

No próximo lema vamos obter estimativas envolvendo os autovalores $\lambda_\pm(\xi)$ (definidos em (2.7)). Essas estimativas serão usadas para provar o Lema 3.4.

Lema 3.3 *Considere* $\lambda_{\pm}(\xi)$ *dado em (2.7) e seja* $|\xi| \leq r_0$*. Então os seguintes resultados são verdadeiros:*

i) $-2|\xi|^4 \leq \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4$;

ii) $-1 \leq \lambda_-(\xi) \leq -\dfrac{1}{4}$;

iii) $\dfrac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1$;

iv) $1 + \lambda_-(\xi) \leq 2|\xi|^4$;

v) $\lambda_+(\xi) + |\xi|^4 \geq -2|\xi|^6$;

vi) $\left(\dfrac{1}{\lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi)} - 1\right) \leq 8|\xi|^2$;

vii) $\left(1 - e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right) e^{-|\xi|^4 t} \leq 16|\xi|^2 e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4 t}$;

para todo $t \geq 0$*, onde* r_0 *é um número positivo fixo.*

Demonstração:
i) Observe que,

$$1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq 1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 + 4(1+|\xi|^2)^2|\xi|^8.$$

Logo,

$$1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq \left(1 - 2(1+|\xi|^2)|\xi|^4\right)^2.$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 > 0,$$

e assim, segue que,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1 - 2(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \\
\Leftrightarrow\ & -1 + \sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq -2(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \leq -|\xi|^4 \\
\Leftrightarrow\ & \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4.
\end{aligned}$$

Por outro lado, observe que,

$$1 \geq 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&1+1 \geq 1+4(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ 8 \geq 4+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ -4 \geq -8+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ -4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq -8(1+|\xi|^2)|\xi|^4+16(1+|\xi|^2)|\xi|^4(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq 1-8(1+|\xi|^2)|\xi|^4+16(1+|\xi|^2)^2|\xi|^8\\
&\Leftrightarrow\ 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq (1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4)^2.
\end{aligned}$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq -4(1+|\xi|^2)|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ \frac{-1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -2|\xi|^4\\
&\Leftrightarrow\ \lambda_+(\xi) \geq -2|\xi|^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-2|\xi|^4 \leq \lambda_+(\xi) \leq -|\xi|^4. \tag{3.25}$$

ii) Para provar ii) observe que,

$$1+4(1+|\xi|^2) \leq 1+4(1+|\xi|^2)^2+4(1+|\xi|^2)|\xi|^4,$$

ou seja

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq 1-4(1+|\xi|^2)+4(1+|\xi|^2)^2.$$

Assim,

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq \left(2(1+|\xi|^2)-1\right)^2.$$

Para r_0 suficientemente pequeno temos que

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 > 0,$$

e assim, segue que,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 2(1+|\xi|^2)-1\\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-2(1+|\xi|^2)\\
\Leftrightarrow\ & -1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq -2(1+|\xi|^2)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -1\\
\Leftrightarrow\ & \lambda_-(\xi) \geq -1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 0 \geq \frac{1}{2}(1+|\xi|^2)-1\\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1-\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)\\
\Leftrightarrow\ & -1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq -\frac{1}{2}(1+|\xi|^2)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \leq -\frac{1}{4}\\
\Leftrightarrow\ & \lambda_-(\xi) \leq -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$-1 \leq \lambda_-(\xi) \leq -\frac{1}{4}. \tag{3.26}$$

iii) Vamos provar que

$$\frac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi) \leq 1.$$

Observe que,

$$1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq \left(1+|\xi|^2\right)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 1+|\xi|^2\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{(1+|\xi|^2)} \leq 1\\
\Leftrightarrow\ & \lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi) \leq 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, observe que, para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{8}|\xi|^2 + \frac{1}{16}|\xi|^4.$$

Logo,

$$1 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left(1 + 2|\xi|^2 + |\xi|^4\right).$$

Além disso, existe r_0 tal que

$$4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \leq \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&1 \geq 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 + \frac{1}{16}\left(1 + 2|\xi|^2 + |\xi|^4\right) \\
&\Leftrightarrow\; 1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq \frac{1}{16}(1+|\xi|^2)^2 \\
&\Leftrightarrow\; \sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq \frac{1}{4}(1+|\xi|^2) \\
&\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{(1+|\xi|^2)} \geq \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow\; \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \geq \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{4} \leq \lambda_+(\xi) - \lambda_-(\xi) \leq 1. \tag{3.27}$$

iv) Na sequência vamos provar que

$$1 + \lambda_-(\xi) \leq 2|\xi|^4.$$

Observe que, para r_0 suficientemente pequeno, temos

$$1 \geq 1 + 4|\xi|^2 - 20|\xi|^6 + 32|\xi|^{10} + 16|\xi|^{12}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&1 \geq 1 + 4|\xi|^2 + 4|\xi|^4 - 4|\xi|^4 - 24|\xi|^6 + 4|\xi|^6 + 32|\xi|^{10} + 16|\xi|^{12} \\
&\Leftrightarrow\; 1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq 1 + 4|\xi|^2 - 4|\xi|^4 - 24|\xi|^6 + 32|\xi|^{10} + 16|\xi|^{12} \\
&\Leftrightarrow\; 1 - 4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq \left(1 + 2|\xi|^2 - 4|\xi|^4 - 4|\xi|^6\right)^2.
\end{aligned}$$

Para r_0 suficientemente pequeno segue que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1+2|\xi|^2-4|\xi|^4-4|\xi|^6\\
\Leftrightarrow\ & -\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq -1-2|\xi|^2+4|\xi|^4+4|\xi|^6\\
\Leftrightarrow\ & 1+2|\xi|^2-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 4|\xi|^4+4|\xi|^6\\
\Leftrightarrow\ & 2+2|\xi|^2-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \leq 2|\xi|^4(2+2|\xi|^2)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2+2|\xi^2|-1-\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \leq 2|\xi|^4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1+\lambda_-(\xi) \leq 2|\xi|^4. \tag{3.28}$$

v) Nesse item vamos provar que

$$\lambda_+(\xi)+|\xi|^4 \geq -2|\xi|^6.$$

Observe que, para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$1 \geq 1-8|\xi|^6-4|\xi|^8+24|\xi|^{10}+52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&1 \geq 1-4|\xi|^4+4|\xi|^4-12|\xi|^6+4|\xi|^6-4|\xi|^8+24|\xi|^{10}\\
&\qquad +52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}\\
\Leftrightarrow\ & 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq 1-4|\xi|^4-12|\xi|^6-4|\xi|^8+24|\xi|^{10}\\
&\qquad +52|\xi|^{12}+48|\xi|^{14}+16|\xi|^{16}\\
\Leftrightarrow\ & 1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4 \geq \left(1-2|\xi|^4-6|\xi|^6-4|\xi|^8\right)^2.
\end{aligned}$$

Para r_0 suficientemente pequeno, segue que,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 1-2|\xi|^4-6|\xi|^6-4|\xi|^8\\
\Leftrightarrow\ & -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq -2|\xi|^4-6|\xi|^6-4|\xi|^8\\
\Leftrightarrow\ & -1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4} \geq 2(1+|\xi|^2)(-|\xi|^4-2|\xi|^6)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{-1+\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}{2(1+|\xi|^2)} \geq -|\xi|^4-2|\xi|^6.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_+(\xi)+|\xi|^4 \geq -2|\xi|^6. \tag{3.29}$$

vi) Na sequência vamos provar que

$$\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right)\leq 8|\xi|^2.$$

Observe que, para r_0 suficientemente pequeno, temos que

$$1\leq 1+14|\xi|^2+59|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&1\leq 1+16|\xi|^2-2|\xi|^2+60|\xi|^4-|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}\\
&\Leftrightarrow\ 1+2|\xi|^2+|\xi|^4\leq 1+16|\xi|^2+60|\xi|^4-68|\xi|^6-320|\xi|^8-256|\xi|^{10}\\
&\Leftrightarrow\ \left(1+|\xi|^2\right)^2\leq\left(1+8|\xi|^2\right)^2\left(1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 1+|\xi|^2\leq\left(1+8|\xi|^2\right)\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}\\
&\Leftrightarrow\ \frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}\leq 1+8|\xi|^2\\
&\Leftrightarrow\ \frac{1+|\xi|^2}{\sqrt{1-4(1+|\xi|^2)|\xi|^4}}-1\leq 8|\xi|^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right)\leq 8|\xi|^2. \tag{3.30}$$

vii) Por fim, provaremos que

$$\left(1-e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq 16|\xi|^2e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4t}.$$

Note que de (3.29) temos que

$$\lambda_+(\xi)+|\xi|^4\geq -2|\xi|^6.$$

Logo,

$$\left(1-e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq\left(1-e^{-2|\xi|^6t}\right)e^{-|\xi|^4t}.$$

Dessa forma, é suficiente provar que

$$\left(1-e^{-2|\xi|^6t}\right)e^{-|\xi|^4t}\leq 16|\xi|^2e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4t},$$

ou seja

$$1 - e^{-2|\xi|^6 t} \leq 16|\xi|^2 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t}.$$

Definimos para todo $t \geq 0$:

$$f(t) := 16|\xi|^2 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t} + e^{-2|\xi|^6 t} - 1,$$

onde $|\xi|$ está fixo com $|\xi| \leq r_0$. Mostraremos que $f(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$. Observe que

$$f(0) = 16|\xi|^2 + 1 - 1 = 16|\xi|^2 \geq 0.$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} f'(t) &= 8|\xi|^6 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t} - 2|\xi|^6 e^{-2|\xi|^6 t} \\ &= \left(8 - 2e^{(-2|\xi|^6 - \frac{1}{2}|\xi|^4)t}\right) |\xi|^6 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Logo, $f'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, pois

$$8 > 2e^{(-2|\xi|^6 - \frac{1}{2}|\xi|^4)t} \quad \text{e} \quad |\xi|^6 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t} \geq 0.$$

Portanto, $f(t)$ é positivo para todo $t \geq 0$ mostrando que

$$1 - e^{-2|\xi|^6 t} \leq 16|\xi|^2 e^{\frac{1}{2}|\xi|^4 t},$$

ou seja

$$\left(1 - e^{(\lambda_+(\xi) + |\xi|^4)t}\right) e^{-|\xi|^4 t} \leq 16|\xi|^2 e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4 t}. \tag{3.32}$$

Portanto a prova está completa por (3.25), (3.26), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) e (3.32).

■

A seguir, vamos obter estimativas pontuais para as soluções fundamentais no espaço de Fourier na região de baixa frequência. As estimativas do próximo lema são melhores que as estimativas obtidas no Lema 3.3.

Lema 3.4 *Considere $\widehat{G}(t,\xi)$ e $\widehat{H}(t,\xi)$ dada em (2.12)-(2.13). Existe um número positivo r_0 tal que as seguintes estimativas são verdadeiras:*

$$\begin{aligned} &|(\widehat{G} - \widehat{G}_0)(t,\xi)| + |\widehat{H}(t,\xi)| \leq C|\xi|^2 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}, \\ &|\widehat{G}_t(t,\xi)| \leq C|\xi|^4 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}, \\ &|(\widehat{G} - \widehat{G}_0)_t(t,\xi)| + |\widehat{H}_t(t,\xi)| \leq C|\xi|^6 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

para todo $|\xi| \leq r_0$ e $t \geq 0$, com $\widehat{G}_0(t,\xi) = e^{-|\xi|^4 t}$.

Demonstração:

Temos que $\widehat{G}(t,\xi)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\widehat{G}(t,\xi) = e^{-|\xi|^4 t} + \left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - 1\right) e^{\lambda_+(\xi)t} + \left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t} - 1\right) e^{-|\xi|^4 t} - \frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \tag{3.34}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\widehat{G}(t,\xi) - e^{-|\xi|^4 t} &= (\widehat{G}-\widehat{G}_0)(t,\xi) \qquad (3.35)\\ &= \left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - 1\right) e^{\lambda_+(\xi)t}\\ &\quad + \left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t} - 1\right) e^{-|\xi|^4 t} - \frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}.\end{aligned}$$

Aplicando o módulo em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}|(\widehat{G}-\widehat{G}_0)(t,\xi)| &\leq \left|\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - 1\right) e^{\lambda_+(\xi)t}\right| \qquad (3.36)\\ &\quad + \left|\left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t} - 1\right) e^{-|\xi|^4 t}\right| + \left|\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right|.\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3 obtemos

$$\begin{aligned}|(\widehat{G}-\widehat{G}_0)(t,\xi)| &\leq 8|\xi|^2 e^{-|\xi|^4 t} + 16|\xi|^2 e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4 t} + 4e^{-\frac{1}{4}t}\\ &\leq 8|\xi|^2 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 16|\xi|^2 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 24e^{-\frac{1}{4}t}\\ &= 24|\xi|^2 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 24e^{-\frac{1}{4}t}. \qquad (3.37)\end{aligned}$$

Derivando (3.34) obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{G}_t(t,\xi) \quad = \quad & -|\xi|^4 e^{-|\xi|^4 t} + \lambda_+(\xi)\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - 1\right) e^{\lambda_+(\xi)t}\\ & +(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)e^{\lambda_+(\xi)t} - |\xi|^4\left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t} - 1\right) e^{-|\xi|^4 t}\\ & -\frac{\lambda_-(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Considerando o módulo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
|\widehat{G}_t(t,\xi)| \leq |\xi|^4 e^{-|\xi|^4 t} &+ \left|\lambda_+(\xi)\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right)e^{\lambda_+(\xi)t}\right| \\
&+ \left|(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)e^{\lambda_+(\xi)t}\right| + |\xi|^4\left|\left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}-1\right)e^{-|\xi|^4 t}\right| \\
&+ \left|\frac{\lambda_-(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right|. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3 temos que

$$\begin{aligned}
|\widehat{G}_t(t,\xi)| &\leq |\xi|^4 e^{-|\xi|^4 t} + 16|\xi|^6 e^{-|\xi|^4 t} + 2|\xi|^6 e^{-|\xi|^4 t} \\
&\quad + 16|\xi|^6 e^{-\frac{1}{2}|\xi|^4 t} + 4e^{-\frac{1}{4}t} \\
&\leq |\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 16|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 2|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} \\
&\quad + 16|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 4e^{-\frac{1}{4}t} \\
&\leq 35|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 35e^{-\frac{1}{4}t} \\
&= C|\xi|^4 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}, \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

onde $C = 35$ e $c = \frac{1}{4}$.

Além disso, de (3.38) temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_t(t,\xi) + |\xi|^4 e^{-|\xi|^4 t} &= (\widehat{G}-\widehat{G}_0)_t(t,\xi) \\
&= \lambda_+(\xi)\left(\frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}-1\right)e^{\lambda_+(\xi)t} \\
&\quad + (\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)e^{\lambda_+(\xi)t} \\
&\quad - |\xi|^4\left(e^{(\lambda_+(\xi)+|\xi|^4)t}-1\right)e^{-|\xi|^4 t} - \frac{\lambda_-(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma como foi feito para provar (3.40), obtemos

$$|(\widehat{G}-\widehat{G}_0)_t(t,\xi)| \leq C|\xi|^4 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}. \qquad (3.41)$$

De (2.13) temos que

$$\widehat{H}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\left[(1+\lambda_+(\xi))e^{\lambda_-(\xi)t} - (1+\lambda_-(\xi))e^{\lambda_+(\xi)t}\right],$$

ou seja

$$\widehat{H}(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} + \frac{\lambda_+(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} - \frac{(1+\lambda_-(\xi))e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \qquad (3.42)$$

Tomando o módulo de $\widehat{H}(t,\xi)$ dada acima, obtemos

$$|\widehat{H}(t,\xi)| \leq \left|\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right| + \left|\frac{\lambda_+(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right| + \left|\frac{(1+\lambda_-(\xi))e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right|.$$

Pelo Lema 3.3, para r_0 suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned} |\widehat{H}(t,\xi)| &\leq 4e^{-\frac{1}{4}t} + 8|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}t} + 8|\xi|^4 e^{-|\xi|^4 t} \\ &\leq 8|\xi|^2 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 12e^{-\frac{1}{4}t}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Derivando (3.42) obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{H}_t(t,\xi) = \lambda_-(\xi)\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} &+ \lambda_-(\xi)\lambda_+(\xi)\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)} \\ &- \lambda_+(\xi)(1+\lambda_-(\xi))\frac{e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando o módulo em $\widehat{H}_t(t,\xi)$ dada acima obtemos

$$\begin{aligned} |\widehat{H}_t(t,\xi)| \leq \left|\lambda_-(\xi)\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right| &+ \left|\lambda_-(\xi)\lambda_+(\xi)\frac{e^{\lambda_-(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right| \\ &+ \left|\lambda_+(\xi)(1+\lambda_-(\xi))\frac{e^{\lambda_+(\xi)t}}{\lambda_+(\xi)-\lambda_-(\xi)}\right|. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3, temos que

$$\begin{aligned} |\widehat{H}_t(t,\xi)| &\leq 4e^{-\frac{1}{4}t} + 8|\xi|^4 e^{-\frac{1}{4}t} + 16|\xi|^8 e^{-|\xi|^4 t} \\ &\leq 16|\xi|^6 e^{-\frac{1}{4}|\xi|^4 t} + 12e^{-\frac{1}{4}t}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

A prova do lema segue das estimativas (3.37), (3.40), (3.41), (3.43) e (3.44).

■

Proposição 3.5 *Seja* $1 \leq p \leq 2$ *e* $k \geq 0$. *Assim temos as seguintes taxas de decaimento:*

$$\|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l+1}{2}}\|\partial_x^{(k+l)_+}\phi\|_{L^2}, \tag{3.45}$$

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\psi\|_{L^2}, \tag{3.46}$$

onde $l+1 \geq 0$ e $(k+l)_+ = \max\{k+l, 0\}$ em (3.45), e $l \geq 0$ em (3.46) Além disso, temos

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-1}\|\phi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2}, \tag{3.47}$$

$$\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k+6}{4}}\|\psi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l-1}{2}}\|\partial_x^{k+l}\psi\|_{L^2}, \tag{3.48}$$

onde $l \geq 0$ em (3.47), e $l \geq 1$ em (3.48).

Demonstração:

Aplicando o teorema de Plancherel obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k}|\widehat{G}(t,\xi)|^2|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{2k}|\widehat{G}(t,\xi)|^2|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k}|\widehat{G}(t,\xi)|^2|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&=: I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

onde r_0 é um número positivo.

Para $|\xi| \leq r_0$, temos que $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \geq c|\xi|^4$ ou seja $-|\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \leq -c|\xi|^4$ e assim de (3.13) obtemos

$$|\widehat{G}(t,\xi)|^2 \leq C_1(1+|\xi|^2)^{-1}e^{-c_1\eta(\xi)t} \leq Ce^{-c|\xi|^4 t}.$$

Logo,

$$I_1 \leq C\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{2k}e^{-c|\xi|^4 t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi.$$

Seja $1 \leq p \leq 2$ e escolhemos p' e q' dado por $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{2}$. Aplicando a desigualdade de Hölder com $\frac{2}{q'} + \frac{2}{p'} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq C\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\xi|^{2k}e^{-c|\xi|^4 t}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}}\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\widehat{\phi}(\xi)|^2\right)^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\
&\leq C\,\|\widehat{\phi}\|_{L^{p'}}^2\left(\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{kq'}e^{-c_1|\xi|^4 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.34, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{kq'} e^{-c_1|\xi|^4 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} &\leq C\left((1+t)^{-\frac{n+kq'}{4}}\right)^{\frac{2}{q'}} \\
&\leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2q'}-\frac{k}{2}} \\
&= C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}}
\end{aligned}
$$

sendo $q' = \frac{2p}{2-p}$ pelas definições acima.

Usando a desigualdade de Hausdorff - Young temos que $\|\widehat{\phi}\|_{L^{p'}} \leq C\|\phi\|_{L^p}$. Portanto

$$
I_1 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}}\|\phi\|^2_{L^p}. \tag{3.49}
$$

Por outro lado, para $|\xi| \geq r_0$, existe $c > 0$ suficientemente pequeno tal que $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \geq c|\xi|^{-2}$, ou seja $-|\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \leq -c|\xi|^{-2}$, e assim de (3.13) obtemos

$$
|\widehat{G}(t,\xi)|^2 \leq C_1(1+|\xi|^2)^{-1}e^{-c_1\eta(\xi)t} \leq C|\xi|^{-2}e^{-c|\xi|^{-2}t},
$$

onde usamos o fato de que $(1+|\xi|^2)^{-1} \leq |\xi|^{-2}$.

Substituindo a desigualdade acima em I_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k}|\xi|^{-2}e^{-c|\xi|^{-2}t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&= C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k-2}e^{-c|\xi|^{-2}t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&= C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k-2}|\xi|^{2l}|\xi|^{-2l}e^{-c|\xi|^{-2}t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&= C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)}|\xi|^{-2(1+l)}e^{-c|\xi|^{-2}t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq C\sup_{|\xi|\geq r_0}\left(|\xi|^{-2(1+l)}e^{-c|\xi|^{-2}t}\right)\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\leq C_1(1+t)^{-(l+1)}\|\partial_x^{(k+l)_+}\phi\|^2_{L^2}
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

sendo $(k+l)_+ = \max\{k+l, 0\}$, onde usou-se que

$$
\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \leq \|\partial_x^{(k+l)_+}\phi\|^2_{L^2},
$$

e o Lema 1.35

$$\sup_{|\xi|\geq r_0}\left(|\xi|^{-2(1+l)}e^{-c|\xi|^{-2}t}\right)\leq C(1+t)^{-(l+1)},$$

para $l+1\geq 0$.

Portanto, de (3.49) e (3.50) temos que

$$\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{L^2}^2\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}}\|\phi\|_{L^p}^2+C(1+t)^{-(l+1)}\|\partial_x^{(k+l)_+}\phi\|_{L^2}^2,$$

ou seja

$$\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{L^p}+C(1+t)^{-\frac{l+1}{2}}\|\partial_x^{(k+l)_+}\phi\|_{L^2},$$

o que prova (3.45).

Analogamente, vamos provar a estimativa (3.46). Aplicando o Teorema de Plancherel obtemos,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k H(t)*\psi\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2k}|\widehat{H}(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{2k}|\widehat{H}(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &\quad+\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\geq r_0}|\xi|^{2k}|\widehat{H}(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &=: D_1+D_2,\end{aligned}$$

onde r_0 é um número positivo.

Para $|\xi|\leq r_0$, de (3.33) temos que

$$|\widehat{H}(t,\xi)|^2\leq C|\xi|^4e^{-c|\xi|^4t}+Ce^{-ct}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}D_1 &\leq C\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\xi|^{2k}|\xi|^4e^{-c|\xi|^4t}+|\xi|^{2k}e^{-ct}\right)|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi\\ &= C\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{2k+4}e^{-c|\xi|^4t}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi+C\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{2k}e^{-ct}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

Seja $1\leq p\leq 2$ e escolhemos p' e q' dado por $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{2}$.

Aplicando a desigualdade de Hölder com $\frac{2}{q'} + \frac{2}{p'} = 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_1 \quad \leq \quad & C\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\xi|^{2k+4}e^{-c|\xi|^4 t}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}}\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\widehat{\psi}(\xi)|^2\right)^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\
& +C\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\xi|^{2k}e^{-ct}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}}\left(\int_{|\xi|\leq r_0}\left(|\widehat{\psi}(\xi)|^2\right)^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\
\leq \quad & C\|\widehat{\psi}\|^2_{L^{p'}}\left(\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{kq'+2q'}e^{-c_1|\xi|^4 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\
& +C\|\widehat{\psi}\|^2_{L^{p'}}\left(\int_{|\xi|\leq r_0}|\xi|^{kq'}e^{-c_1 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\
= \quad & C\|\widehat{\psi}\|^2_{L^{p'}}\left(D_{11} + D_{12}\right).
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.34, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_{11} \quad & \leq \quad C\left((1+t)^{-\frac{n+kq'+2q'}{4}}\right)^{\frac{2}{q'}} \\
& \leq \quad C\,(1+t)^{-\frac{n}{2q'}-\frac{k}{2}-1} \\
& = \quad C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1}
\end{aligned}
$$

sendo $q' = \frac{2p}{2-p}$ pelas definições acima.

Observe que,

$$
\begin{aligned}
D_{12} \quad & \leq \quad \left(\int_{|\xi|\leq r_0} r_0^{kq'}e^{-ct}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} = C_1 e^{-ct}\left(\int_{|\xi|\leq r_0} 1\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\
& \leq \quad Ce^{-ct}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hausdorff - Young temos que $\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}} \leq C\|\psi\|_{L^p}$. Portanto

$$
\begin{aligned}
D_1 &\leq C_1\left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1} + e^{-ct}\right)\|\psi\|^2_{L^p} \\
&\leq C\left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1} + (1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1}\right)\|\psi\|^2_{L^p} \\
&\leq 2C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1}\|\psi\|^2_{L^p}. \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, para $|\xi| \geq r_0$, temos que $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \geq c|\xi|^{-2}$, ou seja $-|\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \leq -c|\xi|^{-2}$, e assim de (3.13) obtemos

$$
|\widehat{H}(t,\xi)|^2 \leq C_1 e^{-c_1\eta(\xi)t} \leq Ce^{-c|\xi|^{-2}t}.
$$

Substituindo a desigualdade acima em D_2 obtemos

$$\begin{aligned}
D_2 &\leq C \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k} e^{-c|\xi|^2 t} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= C \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k} |\xi|^{2l} |\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^2 t} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= C \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k+2l} |\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^2 t} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq C \sup_{|\xi|\geq r_0} \left(|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^{-2} t} \right) \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-l} \|\partial_x^{k+l} \psi\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{3.52}$$

pois

$$\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+1)} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \|\partial_x^{k+l} \psi\|_{L^2}^2,$$

e pelo Lema 1.35

$$\sup_{|\xi|\geq r_0} \left(|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^{-2} t} \right) \leq C(1+t)^{-l},$$

para $l \geq 0$.

De (3.51) e (3.52) temos que

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2}^2 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-1} \|\psi\|_{L^p}^2 + C(1+t)^{-l} \|\partial_x^{k+l} \psi\|_{L^2}^2,$$

ou seja

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}} \|\psi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l} \psi\|_{L^2},$$

o que prova (3.46).

Na sequência provaremos a estimativa (3.47). Aplicando o Teorema de Plancherel obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2}^2 \quad &= \quad \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \quad \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{2k} |\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\quad\quad + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k} |\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&=: \quad E_1 + E_2,
\end{aligned}$$

onde r_0 é um número positivo.

Para $|\xi| \leq r_0$, de (3.33) temos que

$$|\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 \leq C|\xi|^8 e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C\int_{|\xi|\leq r_0} \left(|\xi|^{2k}|\xi|^8 e^{-c|\xi|^4 t} + |\xi|^{2k}e^{-ct}\right)|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= C\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{2k+8}e^{-c|\xi|^4 t}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi + C\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{2k}e^{-ct}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Seja $1 \leq p \leq 2$ e p' e q' dado por $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ e $\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{2}$. Aplicando a desigualdade de Hölder com $\frac{2}{q'}+\frac{2}{p'}=1$, obtemos

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C\left(\int_{|\xi|\leq r_0} \left(|\xi|^{2k+8}e^{-c|\xi|^4 t}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \left(\int_{|\xi|\leq r_0} \left(|\widehat{\phi}(\xi)|^2\right)^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\ &\quad + C\left(\int_{|\xi|\leq r_0} \left(|\xi|^{2k}e^{-ct}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \left(\int_{|\xi|\leq r_0} \left(|\widehat{\phi}(\xi)|^2\right)^{\frac{p'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\ &\leq C\|\widehat{\phi}\|^2_{L^{p'}} \left(\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{kq'+4q'} e^{-c_1|\xi|^4 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\ &\quad + C\|\widehat{\phi}\|^2_{L^{p'}} \left(\int_{|\xi|\leq r_0} |\xi|^{kq'} e^{-c_1 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\ &= C\|\widehat{\phi}\|^2_{L^{p'}}\left(E_{11}+E_{12}\right). \end{aligned}$$

Usando o Lema 1.34, obtemos

$$\begin{aligned} E_{11} &\leq C\left((1+t)^{-\frac{n+kq'+4q'}{4}}\right)^{\frac{2}{q'}} \\ &\leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2q'}-\frac{k}{2}-2} \\ &= C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\frac{k}{2}-2}, \end{aligned}$$

sendo $q' = \frac{2p}{2-p}$ pelas definições acima. Além disso,

$$E_{12} \leq \left(\int_{|\xi|\leq r_0} r_0^{kq'} e^{-ct}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} = C_1 e^{-ct}\left(\int_{|\xi|\leq r_0} 1\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \leq Ce^{-ct}.$$

Usando a desigualdade de Hausdorff - Young e as estimativas acima concluímos que

$$\begin{aligned}
E_1 &\leq C_1 \left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-2} + e^{-ct} \right) \|\phi\|_{L^p}^2 \\
&\leq C \left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-2} + (1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-2} \right) \|\phi\|_{L^p}^2 \\
&\leq 2C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-2} \|\phi\|_{L^p}^2. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $|\xi| \geq r_0$, temos que $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \geq c|\xi|^{-2}$, ou seja $-|\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \leq -c|\xi|^{-2}$, e assim de (3.13) obtemos

$$|\widehat{G}_t(t,\xi)|^2 \leq Ce^{-c_1\eta(\xi)t} \leq Ce^{-c|\xi|^{-2}t}.$$

Substituindo em E_2 temos

$$\begin{aligned}
E_2 &\leq C \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k} e^{-c|\xi|^2 t} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= C \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k+2l} |\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^2 t} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq C \sup_{|\xi|\geq r_0} \left(|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^{-2}t} \right) \int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq C(1+t)^{-l} \|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2}^2, \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

pois

$$\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2}^2,$$

e pelo Lema 1.35

$$\sup_{|\xi|\geq r_0} \left(|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^{-2}t} \right) \leq C(1+t)^{-l},$$

para $l \geq 0$.

De (3.53) e (3.54) temos que

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2}^2 \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-2} \|\phi\|_{L^p}^2 + C(1+t)^{-l} \|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2}^2,$$

ou seja

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-1} \|\phi\|_{L^p} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2},$$

o que prova a estimativa (3.47).

Por último, vamos provar a estimativa (3.48). Aplicando o Teorema de Plancherel, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k}|\widehat{H}_t(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^{2k}|\widehat{H}_t(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\quad + \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{|\xi|\ge r_0} |\xi|^{2k}|\widehat{H}_t(t,\xi)|^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&=: F_1 + F_2,
\end{aligned}$$

onde r_0 é um número positivo.

Para $|\xi| \le r_0$, de (3.33) temos que

$$|\widehat{H}_t(t,\xi)|^2 \le C|\xi|^{12}e^{-c|\xi|^4 t} + Ce^{-ct}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
F_1 &\le C\int_{|\xi|\le r_0} \left(|\xi|^{2k}|\xi|^{12}e^{-c|\xi|^4 t} + |\xi|^{2k}e^{-ct}\right)|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\
&= C\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^{2k+12}e^{-c|\xi|^4 t}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi + C\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^{2k}e^{-ct}|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Seja $1 \le p \le 2$ e escolhemos p' e q' da forma $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ e $\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{2}$. Aplicando a desigualdade de Hölder com $\frac{2}{q'} + \frac{2}{p'} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
F_1 &\le C\left(\int_{|\xi|\le r_0} \left(|\xi|^{2k+12}e^{-c|\xi|^4 t}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \left(\int_{|\xi|\le r_0} |\widehat{\psi}(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\
&\quad + C\left(\int_{|\xi|\le r_0} \left(|\xi|^{2k}e^{-ct}\right)^{\frac{q'}{2}} d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \left(\int_{|\xi|\le r_0} |\widehat{\psi}(\xi)|^{p'} d\xi\right)^{\frac{2}{p'}} \\
&\le C\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}}^2 \left(\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^{kq'+6q'}e^{-c_1|\xi|^4 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\
&\quad + C\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}}^2 \left(\int_{|\xi|\le r_0} |\xi|^{kq'}e^{-c_1 t}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\
&= C\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}}^2 \left(F_{11} + F_{12}\right).
\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.34, obtemos

$$\begin{aligned} F_{11} &\leq C\left((1+t)^{-\frac{n+kq'+6q'}{4}}\right)^{\frac{2}{q'}} \\ &\leq C\,(1+t)^{-\frac{n}{2q'}-\frac{k}{2}-3} \\ &= C\,(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3}, \end{aligned}$$

sendo $q' = \frac{2p}{2-p}$ pelas definições anteriores. Além disso,

$$\begin{aligned} F_{12} &\leq \left(\int_{|\xi|\leq r_0} r_0^{kq'} e^{-ct}\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} = C_1 e^{-ct}\left(\int_{|\xi|\leq r_0} 1\, d\xi\right)^{\frac{2}{q'}} \\ &\leq Ce^{-ct}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hausdorff - Young temos que $\|\widehat{\psi}\|_{L^{p'}} \leq C\|\psi\|_{L^p}$. Portanto

$$\begin{aligned} F_1 &\leq C_1\left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3} + e^{-ct}\right)\|\psi\|^2_{L^p} \\ &\leq C\left((1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3} + (1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3}\right)\|\psi\|^2_{L^p} \\ &\leq 2C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3}\|\psi\|^2_{L^p}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Por outro lado, para $|\xi| \geq r_0$, temos que $\eta(\xi) = |\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \geq c|\xi|^{-2}$, ou seja $-|\xi|^4/(1+|\xi|^2)^3 \leq -c|\xi|^{-2}$. Assim de (3.13) temos

$$|\widehat{H}_t(t,\xi)| \leq C_1(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}} e^{-c\eta(\xi)t} \leq C|\xi|e^{-c|\xi|^{-2}t}.$$

Substituindo a desigualdade acima em F_2 obtemos

$$\begin{aligned} F_2 &\leq C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k}|\xi|^2 e^{-c|\xi|^2 t}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2k}|\xi|^2|\xi|^{2l}|\xi|^{-2l} e^{-c|\xi|^2 t}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= C\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2-2l}|\xi|^{2k+2l} e^{-c|\xi|^2 t}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\ &\leq C\sup_{|\xi|\geq r_0}\left(|\xi|^{2(1-l)} e^{-c|\xi|^{-2}t}\right)\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+l)}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \\ &\leq C(1+t)^{1-l}\|\partial_x^{k+l}\psi\|^2_{L^2}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

pois

$$\int_{|\xi|\geq r_0} |\xi|^{2(k+1)}|\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \leq \|\partial_x^{k+l}\psi\|^2_{L^2},$$

e pelo Lema 1.35

$$\sup_{|\xi|\geq r_0}\left(|\xi|^{2(1-l)}e^{-c|\xi|^{-2}t}\right)\leq C(1+t)^{1-l},$$

com $l\geq 1$.

De (3.55) e (3.56) temos que

$$\|\partial_x^k H_t(t)*\psi\|_{L^2}^2\leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2}-3}\|\psi\|_{L^p}^2+C(1+t)^{-(l-1)}\|\partial_x^{k+l}\psi\|_{L^2}^2,$$

ou seja

$$\|\partial_x^k H_t(t)*\psi\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^p}+C(1+t)^{-\frac{l-1}{2}}\|\partial_x^{k+l}\psi\|_{L^2},$$

que prova a estimativa (3.48).

■

De maneira totalmente análoga é possível provar o seguinte resultado.

Proposição 3.6 *Seja $1\leq p\leq 2$ e $k\geq 0$. Assim temos as seguintes taxas de decaimento:*

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(G-G_0)(t)*\phi\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{L^p}\\ &+C(1+t)^{-\frac{l+1}{2}}\|\partial_x^{(k+1)_+}\phi\|_{L^2}\\ &+Ct^{\frac{-j}{4}}e^{-ct}\|\partial_x^{k-j}\phi\|_{L^2}\end{aligned}\tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k(G-G_0)_t(t)*\phi\|_{L^2} &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{4}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{k}{4}-\frac{3}{2}}\|\phi\|_{L^p}\\ &+C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2}\\ &+Ct^{\frac{-j}{4}}e^{-ct}\|\partial_x^{k+4-j}\phi\|_{L^2}\end{aligned}\tag{3.58}$$

onde $l+1\geq 0$, $(k+l)_+=\max\{k+l,0\}$ e $0\leq j\leq k$ em (3.57), e $l\geq 0$ e $0\leq j\leq k+4$ em (3.58).

3.2 Resultados Principais

Nesta seção vamos mostrar as taxas de decaimento para a solução do problema (2.1)-(2.2) quando consideramos dados iniciais em L^1. Antes de provarmos o resultado principal deste trabalho, definimos:

$$\sigma_1(k,n)=k+\left[\frac{n+2k-1}{4}\right].\tag{3.59}$$

Proposição 3.7 *Considere* $u_0 \in H^{s+1} \cap L^1$ *e* $u_1 \in H^s \cap L^1$ *com* s *satisfazendo as condições abaixo. Seja*

$$E_1 = ||u_0||_{H^{s+1}\cap L^1} + ||u_1||_{H^s \cap L^1}.$$

Então a solução $u(t,x)$ *do problema (2.1)-(2.2), dada em (2.14), satisfaz a estimativa*

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}} \tag{3.60}$$

para $k \geq 0$ *com* $\sigma_1(k,n) \leq s$, *onde* $s \geq [\frac{n-1}{4}]$. *Além disso, para cada* j *com* $0 \leq j \leq 2$, *temos que*

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \tag{3.61}$$

para $k \geq 0$ *com* $\sigma_1(k,n) + j \leq s-1$, *onde* $s \geq [\frac{n-1}{4}] + 1 + j$.

Observação 3.8 *Além das estimativas acima, é possível mostrar que*

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{H^{s+1-\sigma_0(k)-j}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}, \tag{3.62}$$

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-\sigma_0(k)-j}} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \tag{3.63}$$

sendo $\sigma_0(k) = k + \left[\frac{k+1}{2}\right]$, $0 \leq j \leq [\frac{n}{4}]$, $k \geq 0$ *e* $\sigma_0(k) + j \leq s+1$ *em (3.62), e* $0 \leq j \leq [\frac{n}{4}] + 2$, $k \geq 0$ *e* $\sigma_0(k) + j \leq s$ *em (3.63).*

Demonstração:

Para provar (3.60), vamos considerar as seguintes estimativas que serão provadas posteriormente: Suponha que $\phi \in H^s$ e $\psi \in H^{s+1}$ para s satisfazendo as condições abaixo. Então temos

$$\|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}} \|\phi\|_{H^s \cap L^1}, \tag{3.64}$$

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1} \tag{3.65}$$

onde $k \geq 0$ e $\sigma_1(k,n) \leq s$ em (3.64), e $0 \leq j \leq 1$, $k \geq 0$ e $\sigma_1(k,n)+j \leq s$ em (3.65).

Usando (3.64) e (3.65) em (2.14) com $\phi = u_0 + u_1$, $\psi = u_0$ e $j = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_x^k u(t)\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} &\leq \|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} + \|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} \\ &\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}} \|\phi\|_{H^s\cap L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|u_0+u_1\|_{H^s\cap L^1} \\
&\quad +C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|u_0\|_{H^{s+1}\cap L^1} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\left(\|u_0\|_{H^s\cap L^1}+\|u_1\|_{H^s\cap L^1}\right) \\
&\quad +C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|u_0\|_{H^{s+1}\cap L^1} \\
&\leq 2C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\left(||u_0||_{H^{s+1}\cap L^1}+||u_1||_{H^s\cap L^1}\right) \\
&= 2CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}.
\end{aligned}
$$

Assim, para provar (3.60) basta provarmos (3.64) e (3.65). Na sequência vamos provar a estimativa (3.64). Observe que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} &\leq C\left\{\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{L^2}\right. \\
&\quad \left.+\|\partial_x^k(\partial_x^{s-\sigma_1(k,n)}G(t)*\phi)\|_{L^2}\right\} \\
&= C\left\{\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{L^2}\right. \\
&\quad \left.+\|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)}G(t)*\phi\|_{L^2}\right\}. \qquad (3.66)
\end{aligned}
$$

Logo, é suficiente obter estimativa para

$$\|\partial_x^{k+h}G(t)*\phi\|_{L^2},$$

para $h=0$ e $h=s-\sigma_1(k,n)$.

Seja $k\geq 0$ e $h\geq 0$. De (3.45) com $k+h$ ao invés de k e $p=1$ obtemos

$$\|\partial_x^{k+h}G(t)*\phi\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}}\|\phi\|_{L^1}+C(1+t)^{-\frac{l+1}{2}}\|\partial_x^m\phi\|_{L^2},$$

onde $l+1\geq 0$ e $m:=(k+h+l)_+\leq s$. Tomando l como o menor número inteiro que satisfaz $\frac{l+1}{2}\geq\frac{n}{8}+\frac{k}{4}$, ou seja $l\geq\frac{n+2k}{4}-1$. Isso implica dizer que $l=\left[\frac{n+2k-1}{4}\right]=\sigma_1(k,n)-k$. De fato, considere $n+2k-1=4a+b$, com $a\in\mathbb{N}$ e $b\in\{0,\,1,\,2,\,3\}$. Observe que para qualquer valor de b tem-se que $l=a$.

Para tal l escolhido, temos que $(1+t)^{-\frac{l+1}{2}}\leq(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}$. Logo,

$$\|\partial_x^{k+h}G(t)*\phi\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}}\|\phi\|_{L^1}+C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\partial_x^m\phi\|_{L^2}. \qquad (3.67)$$

Para $h=0$, de (3.67) obtemos

$$\|\partial_x^k G(t)*\phi\|_{L^2}\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{L^1}+C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\partial_x^m\phi\|_{L^2}.$$

Note que $\|\phi\|_{L^1} \leq \|\phi\|_{H^s\cap L^1}$ e $\|\partial_x^m \phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{H^s\cap L^1}$ pois $m \leq s$. Assim,

$$\|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}. \tag{3.68}$$

Para $h = s-\sigma_1(k,n)$, de (3.67) e considerando as observações feitas acima, temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)} G(t) * \phi\|_{L^2} \leq & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-\sigma_1(k,n)}{4}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}.\end{aligned}$$

Além disso, por hipótese, $s-\sigma_1(k,n) \geq 0$. Assim temos que,

$$\begin{aligned}(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-\sigma_1(k,n)}{4}} &= (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}.(1+t)^{-\frac{s-\sigma_1(k,n)}{4}} \\ &\leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}},\end{aligned}$$

pois $(1+t)^{-\frac{s-\sigma_1(k,n)}{4}} \leq 1$. Portanto,

$$\|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)} G(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}. \tag{3.69}$$

Substituindo (3.68) e (3.69) em (3.66) obtemos

$$\|\partial_x^k G(t) * \phi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}}\|\phi\|_{H^s\bigcap L^1}$$

o que prova (3.64).

A seguir, vamos provar a estimativa (3.65). Temos que

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)-j}} \leq & C\left\{\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2}\right. \\ & \left.+ \|\partial_x^k(\partial_x^{s-\sigma_1(k,n)-j} H(t) * \psi)\|_{L^2}\right\} \\ = & C\left\{\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2}\right. \\ & \left.+ \|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)-j} H(t) * \psi\|_{L^2}\right\}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

Vamos estimar $\|\partial_x^{k+h} H(t) * \psi\|_{L^2}$, para $h = 0$ e $h = s-\sigma_1(k,n)-j$. De (3.46) com $k+h$ ao invés de k e $p = 1$ temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+h} H(t) * \psi\|_{L^2} \leq & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-\frac{1}{2}}\|\psi\|_{L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+h+l}\psi\|_{L^2},\end{aligned}$$

onde $l \geq 0$ e $k+h+l \leq s+1$. Seja $0 \leq j \leq 1$. Considerando l como o menor número inteiro que satisfaz $\frac{l}{2} \geq \frac{n}{8}+\frac{k}{4}+\frac{j}{2}$, ou seja $l \geq \frac{n+2k}{4}+j$. Isso implica dizer que $l = \left[\frac{n+2k-1}{4}\right]+j+1 = \sigma_1(k,n)-k+j+1$.

Para tal l escolhido, temos que $(1+t)^{-\frac{l}{2}} \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$. Logo, para $0 \leq j \leq 1$, temos que

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+h} H(t) * \psi\|_{L^2} \leq\ & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\partial_x^m \psi\|_{L^2},\end{aligned} \tag{3.71}$$

onde $m = k + h + l$.

Para $h = 0$, de (3.71) obtemos

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\partial_x^m \psi\|_{L^2}.$$

Note que $\|\psi\|_{L^1} \leq \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$ e $\|\partial_x^m \psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^{s+1}}$. Assim,

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}. \tag{3.72}$$

Para $h = s - \sigma_1(k,n) - j$, de (3.71) e considerando as observações feitas acima, temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)-j} H(t) * \psi\|_{L^2} \leq\ & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-\sigma_1(k,n)-j}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\partial_x^m \psi\|_{L^2},\end{aligned}$$

onde $m = k + l + s - \sigma_1(k,n) - j$.

Observe que $s - \sigma_1(k,n) - j \geq 0$. Assim temos que

$$\begin{aligned}(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-\sigma_1(k)-j}{4}-\frac{j}{2}} & \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}.(1+t)^{-\frac{s-\sigma_1(k,n)-j}{4}} \\ & \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}},\end{aligned}$$

pois $(1+t)^{-\frac{s-\sigma_1(k,n)-j}{4}} \leq 1$. Note também que $\|\partial_x^m \psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$. Portanto,

$$\|\partial_x^{k+s-\sigma_1(k,n)-j} H(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}. \tag{3.73}$$

Substituindo (3.72) e (3.73) em (3.70) obtemos

$$\|\partial_x^k H(t) * \psi\|_{H^{s-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1},$$

o que prova (3.65).

Para provar a estimativa (3.61), vamos usar que

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\phi\|_{H^s\cap L^1}, \tag{3.74}$$

$$\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}, \tag{3.75}$$

para $k \geq 0$ com $\sigma_1(k,n) + j \leq s - 1$, onde $0 \leq j \leq 2$ em (3.74), e $0 \leq j \leq 3$ em (3.75). Usando (3.74) e (3.75) em $u_t(t) = G_t(t) * \{u_0 + u_1\} + H_t(t) * u_0$ (derivada da fórmula (2.14)) com $\phi = u_0 + u_1$, $0 \leq j \leq 2$ e $\psi = u_0$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} &\leq \|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \\
&\quad + \|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\phi\|_{H^s \cap L^1} \\
&\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1} \cap L^1} \\
&= C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|u_0 + u_1\|_{H^s \cap L^1} \\
&\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|u_0\|_{H^{s+1} \cap L^1} \\
&\leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \left(\|u_0\|_{H^s \cap L^1} + \|u_1\|_{H^s \cap L^1}\right) \\
&\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|u_0\|_{H^{s+1} \cap L^1} \\
&\leq 2C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \left(||u_0||_{H^{s+1} \cap L^1} + ||u_1||_{H^s \cap L^1}\right) \\
&= 2CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}
\end{aligned}
$$

o que prova (3.61).

Na sequência vamos provar a estimativa (3.74). Observe que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} &\leq C\big\{\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \\
&\quad + \|\partial_x^k(\partial_x^{s-1-\sigma_1(k,n)-j} G_t(t) * \phi)\|_{L^2}\big\} \\
&= C\big\{\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \\
&\quad + \|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j} G_t(t) * \phi\|_{L^2}\big\}.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Vamos estimar $\|\partial_x^{k+h} G_t(t) * \phi\|_{L^2}$, para $h = 0$ e $h = s - 1 - \sigma_1(k,n) - j$. Seja $k \geq 0$ e $h \geq 0$. De (3.47) com $k + h$ ao invés de k e $p = 1$ obtemos

$$
\|\partial_x^{k+h} G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-1} \|\phi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}} \|\partial_x^{k+h+l} \phi\|_{L^2},
$$

onde $l \geq 0$ e $k + h + l \leq s$. Seja $0 \leq j \leq 2$. Tomemos l como o menor número inteiro que satisfaz $\frac{l}{2} \geq \frac{n}{8} + \frac{k}{4} + \frac{j}{2}$, ou seja, $l \geq \frac{n}{4} + \frac{k}{2} + j$. Para tal l escolhido $(1+t)^{-\frac{l}{2}} \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$. Logo,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+h} G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-1}\|\phi\|_{L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^{k+h+l}\phi\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.77}$$

Para $h=0$, de (3.77) obtemos

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-1}\|\phi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^m \phi\|_{L^2},$$

onde $m = k+l$.

Note que $\|\phi\|_{L^1} \leq \|\phi\|_{H^s \cap L^1}$ e $\|\partial_x^m \phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{H^s\cap L^1}$. Observe também que $(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-1} \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$ pois $0 \leq j \leq 2$. Assim,

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}. \tag{3.78}$$

Para $h = s-1-\sigma_1(k,n)-j$, de (3.77) e considerando as observações feitas acima, temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j} G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq & C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}-\frac{j}{2}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1} \\ & + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^m \phi\|_{L^2},\end{aligned}$$

onde $m = k+l+s-1-\sigma_1(k,n)-j$.

Observe que $s-1-\sigma_1(k,n)-j \geq 0$, assim

$$\begin{aligned}(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}-\frac{j}{2}} & \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}.(1+t)^{-\frac{s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}} \\ & \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}},\end{aligned}$$

pois $(1+t)^{-\frac{s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}} \leq 1$.

Usando que $\|\partial_x^m\phi\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{H^s\cap L^1}$ e a desigualdade acima obtemos

$$\|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j} G_t(t) * \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}. \tag{3.79}$$

Substituindo (3.78) e (3.79) em (3.76) obtemos

$$\|\partial_x^k G_t(t) * \phi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\phi\|_{H^s\cap L^1}$$

o que prova (3.74).

Por fim, vamos provar a estimativa (3.75). Observe que

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} &\le C\big\{\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial_x^k(\partial_x^{s-1-\sigma_1(k,n)-j} H_t(t) * \psi)\|_{L^2}\big\} \\ &= C\big\{\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2} \\ &\quad + \|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j} H_t(t) * \psi\|_{L^2}\big\}.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Vamos estimar $\|\partial_x^{k+h} H_t(t)*\psi\|_{L^2}$, para $h=0$ e $h = s-1-\sigma_1(k,n)-j$. De (3.48) com $k+h$ ao invés de k e $p=1$ obtemos

$$\|\partial_x^{k+h} H_t(t)*\psi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l-1}{2}}\|\partial_x^{k+h+l}\psi\|_{L^2},$$

onde $l \ge 1$ e $k+h+l \le s+1$. Seja $0 \le j \le 3$. considerando l como o menor número inteiro que satisfaz $\frac{l-1}{2} \ge \frac{n}{8} + \frac{k}{4} + \frac{j}{2}$, assim $l \ge \frac{n}{4} + \frac{k}{2} + j + 1$. Para tal l escolhido, temos que $(1+t)^{-\frac{l-1}{2}} \le (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+h} H_t(t) * \psi\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+h}{4}-\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^{k+h+l}\psi\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.81}$$

Para $h = 0$, de (3.81) obtemos

$$\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{3}{2}}\|\psi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^m\psi\|_{L^2},$$

onde $m = k + l$.

Observe que para $0 \le j \le 3$ temos que $(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{3}{2}} \le (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$. Note ainda que $\|\psi\|_{L^1} \le \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$ e $\|\partial_x^m\psi\|_{L^2} \le \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$. Assim, tem-se que para $0 \le j \le 3$,

$$\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}. \tag{3.82}$$

Para $h = s-1-\sigma_1(k,n)-j$, de (3.81) e considerando as observações feitas acima, temos

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j} H_t(t) * \psi\|_{L^2} &\le C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}-\frac{j}{2}}\|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1} \\ &\quad + C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}\|\partial_x^m\psi\|_{L^2},\end{aligned}$$

onde $m = k+l+s-1-\sigma_1(k,n)-j$ e $0 \le j \le 3$.

Como $s-1-\sigma_1(k,n)-j \geq 0$, temos que

$$(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k+s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}-\frac{j}{2}} \leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}.(1+t)^{-\frac{s-1-\sigma_1(k,n)-j}{4}}$$
$$\leq (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}.$$

Assim, usando que $\|\partial_x^m \psi\|_{L^2} \leq \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$ e a desigualdade anterior obtemos

$$\|\partial_x^{k+s-1-\sigma_1(k)-j} H_t(t) * \psi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}. \quad (3.83)$$

Substituindo (3.82) e (3.83) em (3.80) obtemos

$$\|\partial_x^k H_t(t) * \psi\|_{H^{s-1-\sigma_1(k,n)-j}} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}} \|\psi\|_{H^{s+1}\cap L^1}$$

o que prova (3.75). Dessa forma, está completa a prova da proposição.

■

Na sequência vamos denotar a energia por

$$E[u](t) = ||u_t(t)||^2_{H^1} + ||\partial_x^2 u(t)||^2_{L^2}. \quad (3.84)$$

Vamos considerar a energia da derivada $\partial_x^k u$ de ordem k^{th} por:

$$E[\partial_x^k u](t) = ||\partial_x^k u_t(t)||^2_{H^1} + ||\partial_x^{k+2} u(t)||^2_{L^2}. \quad (3.85)$$

Corolário 3.9 *Assuma que* $s \geq \frac{n-1}{4}+3$, $u_0 \in H^{s+1}\cap L^1$ *e* $u_1 \in H^s \cap L^1$. *Seja* $u(t,x)$ *a solução do problema (2.1)-(2.2), dada por (2.14). Então*

$$E[\partial_x^k u](t) \leq C E_1^2 (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}-1}. \quad (3.86)$$

para $k \geq 0$ *com* $\sigma_1(k,n) \leq s-3$, *sendo que* E_1 *é dada na Proposição 3.7.*

Demonstração:

Seja $s \geq \frac{n-1}{4}+3$ e $\sigma_1(k,n) \leq s-3$. De (3.60) com $k+2$ ao invés de k obtemos

$$\|\partial_x^{k+2} u(t)\|_{H^{s-3-\sigma_1(k,n)}} \leq C E_1 (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}},$$

pois $\sigma_1(k+2,n) = \sigma_1(k,n)+3$. Além disso, de (3.61) com $j=1$, obtemos

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-2-\sigma_1(k,n)}} \leq C E_1 (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^1} \leq C E_1 (1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}$$

e

$$\|\partial_x^{k+2}u(t)\|_{L^2} \leq CE_1(1+t)^{-\frac{n}{8}-\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}$$

pois

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^1} \leq \|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-2-\sigma_1(k,n)}}$$

e

$$\|\partial_x^{k+2}u(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_x^{k+2}u(t)\|_{H^{s-3-\sigma_1(k,n)}}.$$

Substituindo as estimativas acima em (3.85) obtemos

$$\begin{aligned} E[\partial_x^k u](t) &\leq CE_1^2(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}-1} + CE_1^2(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}-1} \\ &\leq 2CE_1^2(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{k}{2}-1}, \end{aligned}$$

o que prova o Corolário 3.9.

■

De forma análoga, é possível obter taxas de decaimento para a solução do problema (2.1)-(2.2) sem considerar os dados iniciais em L^1. Abaixo segue o resultado.

Proposição 3.10 *Considere $s \geq 0$, $u_0 \in H^{s+1}$ e $u_1 \in H^s$. Seja*

$$E_0 = ||u_0||_{H^{s+1}} + ||u_1||_{H^s}.$$

Então a solução $u(t,x)$ do problema (2.1)-(2.2), dada em (2.14), satisfaz a estimativa

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{H^{s+1-\sigma_0(k)}} \leq CE_0(1+t)^{-\frac{k}{4}}$$

para $k \geq 0$ com $\sigma_0(k) = k + \left[\frac{k+1}{2}\right] \leq s+1$. Além disso, para cada j com $0 \leq j \leq 2$, temos

$$\|\partial_x^k u_t(t)\|_{H^{s-\sigma_0(k)-j}} \leq CE_0(1+t)^{-\frac{k}{4}-\frac{j}{2}}$$

para $k \geq 0$ com $\sigma_0(k) + j \leq s$, onde assumimos que $s \geq j$.

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[3] R. C. Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping.* J. Hyperbolic Differ. Equ. **10** (2013), no. 3, 563–575.

[4] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space.* J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), no. 1, 247–255.

[5] M. D'Abbicco, R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, *Sharp time decay rates on a hyperbolic plate model under effects of an intermediate damping with a time-dependent coefficient.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A **36** (2016), 2419–2447.

[6] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Volume 2: Functional and Variational Methods, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

[7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2002.

[8] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[9] Y. Liu, *Decay of solutions to an inertial model for a semilinear plate equation with memory.* J. Math. Anal. Appl. **394** (2012), 616-632.

[10] Y. Liu, S. Kawashima, *Decay property for a plate equation with memory-type dissipation.* Kinet. Relat. Models **4** (2011), 531-547.

[11] C. R. da Luz, R. Coimbra Charão, *Asymptotic properties for a semilinear plate equation in unbounded domains.* J. Hyperbolic Diff. Eqns. **6** (2009), 269-294.

[12] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[13] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[14] G. Perla Menzala, E. Zuazua, *Timoshenko's plate equations as a singular limit of the dinamical von Kármán system.* J. Math. Pures et Appli. **79** (2000), 73-94.

[15] J. R. L. Sánchez, *O sistema dinâmico de Von Karmán em domínios não limitados é globalmente bem posto no sentido de Hadamard: Análise do seu limite singular.* Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Rio de Janeiro, 2003.

[16] Y. Sugitani, S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation.* J. Hyperbolic Diff. Eqns. **7** (2010), 471-501.

[17] K. Yagdjian, *The Cauchy Problem for Hyperbolic Operators. Multiple Characteristics. Micro-Local Approach.* Mathematical Topics, 12, Akademie Verlag, Berlin, 1997.