UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Alessandra Piske

C^*-ÁLGEBRAS DE SEMIGRUPOS INVERSOS E-UNITÁRIOS

Florianópolis

2016

Alessandra Piske

C^*-ÁLGEBRAS DE SEMIGRUPOS INVERSOS E-UNITÁRIOS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada para a obtenção do Grau de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss - UFSC.

Florianópolis

2016

Alessandra Piske

C^*-ÁLGEBRAS DE SEMIGRUPOS INVERSOS E-UNITÁRIOS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 09 de setembro 2016.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão - UFSC.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alcides Buss - UFSC.
Orientador

Prof. Dr. Dirceu Bagio - UFSM.

Prof. Dr. Daniel Gonçalves - UFSC.

Prof. Dr. Ruy Exel - UFSC.

Prof. Dr. Mykola Khrypchenko - UFSC.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me auxiliado e abençoado ao longo de minha vida acadêmica e por ter me dado condições de concluir o mestrado.

Agradeço a minha família. Em especial, a minha mãe, Anelore Wodtke, por ser tão guerreira: exemplo de mãe (e pai), professora, mulher e amiga. Obrigada pelos colos, conselhos (e broncas) que me deu nos dias que achei que tudo estava perdido. Agradeço a Anninha pelo amor e cuidado desde sempre. Agradeço ao meu sobrinho pelo amor e felicidade que me completam.

A Carla, minha companheira de almoços, de body pump, de caminhadas, de "bagrear" na farmácia, obrigada de todo o coração por ser tão amiga! A Viviane, obrigada pelos cafés, pelas caronas até Joinville, por me receber em sua casa e por me ajudar sempre que pode, obrigada pela amizade. Agradeço aos colegas da pós pela companhia e por compartilharem o que sabem comigo.

Agradeço ao meu orientador, Alcides Buss, por ter aceito me orientar, por ter sido muito mais que paciente comigo e pelo que me ensinou, aprendi muito com você!

Agradeço aos professores que me ensinaram muito durante o mestrado: Fernando, Gustavo, Giuliano, Daniel, Ruy Charão, Gilles e Raphael. Vocês não são apenas aqueles que me ensinaram Matemática, vocês são exemplos de professores. Também agradeço a Elisa, por sempre nos ajudar.

Agradeço ao Daniel Gonçalves, Ruy Exel, Mykola Khrypchenko e Dirceu Bagio por terem aceito fazer parte da banca deste trabalho.

Agradeço as meninas do "mundo afora", à Émile, Grasi, Téo e Evandro por tornarem os meus sábados abençoados e divertidos. À Júlia e a Grazi, obrigada pela companhia desde o ensino médio, amo vocês!

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Confia ao Senhor as tuas obras, e teus
pensamentos serão estabelecidos. Pv. 16.3

RESUMO

Neste trabalho, estudaremos semigrupos inversos e algumas álgebras associadas à estes objetos. Mais precisamente, serão estudados os semigrupos inversos E-unitários. Veremos que todo semigrupo inverso E-unitário S pode ser descrito como um produto semidireto de E, o semirreticulado dos idempotentes de S, por G, o grupo imagem homomorfa máxima de S, via uma ação parcial proveniente de uma ação deste semigrupo sobre E. Em seguida, será definida a C^*-álgebra de semigrupos inversos e estudados produtos cruzados parciais. O princial resultado mostra que se S é um semigrupo inverso E-unitário, então $C^*(S)$ é canonicamente isomorfa a $C_0(\widehat{E}) \rtimes G$. Daremos algumas aplicações para este resultado e, em particular, descreveremos a C^*-álgebra do semigrupo universal de Exel como um produto cruzado parcial.
Palavras-chave: Semigrupo Inverso E-unitário. C^*-álgebra. Ação Parcial. Produto Cruzado Parcial.

ABSTRACT

In this work we study inverse semigroups and some algebras associated to them. More precisely, we shall study E-unitary inverse semigroups. We shall see that every E-unitary inverse semigroup S can be described as a semidirect product of E, the semilattice of idempotents of S by the maximal group homomorphic image of S via a partial action of this group that is induced from the canonical action of S on E. We shall define and study C^*-algebras of inverse semigroups and partial crossed products. The main result shows that the $C^*(S)$ is canonically isomorphic to $C_0(\widehat{E}) \rtimes G$ if S is E-unitary and G is the maximal group homomorphic image of S. We give some applications of this result and, in particular, describe Exel's universal inverse semigroup C^*-algebra as a partial crossed product.
Keywords: E-unitary inverse semigroup. C^*–algebra. Partial Action. Partial Crossed Product.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17
2 SEMIGRUPOS INVERSOS *E*-UNITÁRIOS 21
2.1 AÇÕES DE SEMIGRUPOS 38
2.1.1 Ações topológicas de Semigrupos 42
2.1.2 Ações de semigrupos sobre semi-reticulados 45
2.2 CARACTERIZAÇÃO DE SEMIGRUPOS INVERSOS *E*-UNITÁRIOS 47
3 A C^*-ÁLGEBRA DE UM SEMIGRUPO INVERSO 55
4 A C^*-ÁLGEBRA DE UM SEMIGRUPO INVERSO *E*-UNITÁRIO 67
5 CONCLUSÃO 89
APÊNDICE A – Ações parciais e produtos cruzados 93
REFERÊNCIAS 107

1 INTRODUÇÃO

Um semigrupo inverso é um semigrupo S, isto é, um conjunto munido de uma operação associativa $(s,t) \mapsto s \cdot t$ que, além disso, admite "inversos" no sentido que à todo $s \in S$ está associado um único $s^* \in S$ satisfazendo $ss^*s = s$ e $s^*ss^* = s^*$.

Semigrupos inversos descrevem simetrias parcialmente definidas e são ferramentas importantes em várias áreas da ciência e são úteis em geral no estudo de objetos combinatórios, tais como grafos e ladrilhamentos. Os semigrupos inversos aparecem naturamente em Álgebras de Operadores e são dispositivos muito poderosos que ajudam a descrever e entender várias C^*-álgebras geradas por isometrias parciais, tais como a álgebra de Toeplitz, álgebras de Cuntz ou, mais geralmente, álgebras associadas à grafos e suas generalizações.

Semigrupos também aparecem na teoria de sistemas dinâmicos, especialmente quando a dinâmica se dá por uma ação parcial de um grupo. Neste sentido enfatiza-se o trabalho (EXEL, 1998) de Exel que para cada grupo G constrói um semigrupo inverso $S(G)$ cujas ações (ou representações) correspondem-se biunivocamente com as ações (ou representações) parciais de G.

Grupos e semi-reticulados são exemplos primitivos de semigrupos inversos. Mais geralmente, toda ação parcial θ de um grupo G sobre um semi-reticulado E dá origem à um semigrupo inverso $E \rtimes_\theta G$, chamado o produto semidireto de E por G via a ação parcial θ. Nem todo semigrupo inverso é desta forma, mas esta construção fornece uma classe grande de exemplos de semigrupos inversos, e é portanto natural se perguntar se podemos descrevê-los através de propriedades de semigrupos inversos.

Um dos objetivos deste trabalho é responder esta pergunta mostrando que os semigrupos inversos da forma $E \rtimes_\theta G$ são, à menos de isomorfismo, exatamente os semigrupos inversos *E-unitários*. Este resultado é o *P-Teorema* (MCALISTER, 1974) que foi reformulado na linguagem de premorfismos (PETRICH; REILLY, 1979) e na linguagem de ações parciais de grupos (KELLENDONK; LAWSON, 2004). A todo semigrupo inverso S podemos associar naturalmente um grupo $G = G(S)$ através do quociente que identifica dois elementos $s, t \in S$ sempre que existe um elemento idempotente $e = e^2$ em S com $se = te$. Este grupo é a imagem homomorfica máxima de S e os semigrupos inversos E-unitários são exatamente aqueles para os quais o núcleo do homomorfismo quociente $\sigma\colon S \to G$ consiste apenas de idempotentes. Mais ainda, vamos mostrar que a ação canônica de S sobre o seu semi-reticulado dos idempotentes $E = E(S)$ se fatora à uma ação parcial de G de tal forma que o produto semidireto associado $E \rtimes G$ é canonicamente isomorfo a S.

O semigrupo inverso universal $S(G)$ definido por Exel é um exemplo de um semigrupo inverso E-unitário com grupo maximal G, o grupo que o deu origem, e o conjunto dos idempotentes de $S(G)$ pode ser identificado com o semi-reticulado dos subconjuntos finitos de G contendo a identidade sob a operação de união de conjuntos. O isomorfismo de $S(G)$ com $E \rtimes G$ associa à cada $s \in S(G)$ um par (A, g) consistindo de um subconjunto finito $A \subseteq G$ contendo $1, g \in G$. Este isomorfismo está intimamente ligado à decomposição de elementos de $S(G)$ na sua *forma normal* $s = \epsilon_A[g]$ descrita por Exel em (EXEL, 1998).

A todo semigrupo inverso S associa-se uma C^*-álgebra $C^*(S)$ de tal forma que suas representações (em espaços de Hilbert) correspondem biunivocamente a representações de S. Esta classe de C^*-álgebras contém todas as C^*-álgebras de grupos $C^*(G)$, que por si só já é uma classe vasta de exemplos importantes em Álgebras de Operadores. Além destas, obtem-se também todas as C^*-álgebras de semi-reticulados $C^*(E)$. Estas são sempre comutativas e, portanto, pelo Teorema de Gelfand, são da forma $C_0(X)$ para um espaço localmente compacto Haudorff X, o *espectro* de $C^*(E)$. Iremos mostrar que X se identifica naturalmente com o *espaço dos caracteres* $\widehat{E}$ do semi-reticulado E dos idempotentes de S munido com a topologia produto em $\{0, 1\}^E$. Em particular, X é sempre um espaço totalmente desconexo.

O segundo objetivo principal deste trabalho é descrever as C^*-álgebras de semigrupos inversos E-unitários S em termos de seus blocos formadores, a saber, o seu grupo máximo $G = G(S)$ e seu semi-reticulado de idempotentes $E = E(S)$. Como já mencionado acima, $S \cong E \rtimes G$ para uma ação parcial canônica de G sobre E e assim espera-se que tenhamos uma decomposição similar de $C^*(S)$. Com efeito, iremos mostrar que $C^*(S)$ é naturalmente isomorfa ao produto cruzado parcial $C^*(E) \rtimes G$ via a ação parcial de G sobre $C^*(E)$ induzida da ação parcial sobre E. Mais ainda, usando o isomorfismo de Gelfand $C^*(E) \cong C_0(\widehat{E})$ mencionado anteriormente, podemos transportar a ação parcial de G à uma ação partial sobre $C_0(\widehat{E})$; esta necessariamente provém de uma ação parcial de G sobre o espaço topológico $\widehat{E}$ através de homeomofismos parciais, os quais descrevemos também em detalhes. Este resultado foi originalmente demonstrado em (MILAN; STEINBERG, 2014) usando a teoria de grupóides e suas C^*-álgebras. A demonstração que propomos no presente trabalho é totalmente independente e não usa grupóides, sendo assim mais elementar. Além disso, também obtemos uma versão algébrica do mesmo resultando, demonstrando que a $*$-álgebra de S é isomorfa a um produto cruzado parcial algébrico da forma $\mathbb{C}[E] \rtimes G$.

Como aplicação dos resultados obtidos, descreveremos a C^*-álgebra $C^*(S(G))$ do semigrupo universal de Exel como um produto cruzado parcial da forma $C_0(X) \rtimes G$, sendo X o subespaço (fechado) do espaço produto $\{0,1\}^G$ consistindo de todos os subconjuntos de G contendo $1 \in G$. A ação parcial neste caso é a restrição da ação (global) canônica de G sobre $\{0,1\}^G$ por translação (tal ação é algumas vezes chamada de *ação de Bernoulli*). Outro exemplo que descrevemos em detalhes é o semigrupo inverso S gerado pelo shift unilateral sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. A C^*-álgebra deste semigrupo inverso é (isomorfa) a álgebra de Toeplitz, e a nosso resultado dá uma descrição dela como produto cruzado parcial do grupo dos inteiros $G = \mathbb{Z}$ sobre o espaço $X = \mathbb{N}_\infty$ obtido pela compatificação de Alexandroff de $\mathbb{N}$ (como espaço discreto).

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, será feito um estudo sobre semigrupos inversos e também semigrupos inversos E-unitários. Também serão estudadas as ações de semigrupos. Por fim, será provado que todo semigrupo inverso E-unitário é da forma $E \rtimes G$ em que E e G são, respectivamente, um semi-reticulado e um grupo.

No capítulo 3, será feita a construção da C^*-álgebra de um semigrupo inverso qualquer.

No capítulo 4, será provado o principal teorema deste trabalho: Se S é um semigrupo inverso E-unitário, então $C^*(S) \cong C_0(\widehat{E}) \rtimes G$.

2 SEMIGRUPOS INVERSOS *E*-UNITÁRIOS

O conjunto dos números reais munido com a operação de multiplicação verifica a associatividade, no entanto, este conjunto não é um grupo, pois o número 0 não possui inverso. Porém para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único elemento x^* tal que $xx^*x = x$ e $x^* = x^*xx^*$. De fato, para todo elemento x não nulo, basta tomar $x^* = x^{-1}$ e para $x = 0$, tome $x^* = 0$. Com isto, o conjunto dos números reais é um semigrupo inverso. Neste capítulo, vamos de definir semigrupos inversos e estudar alguns resultados básicos sobre eles. Para mais informações sobre o assunto, indicamos os livros de (PATERSON, 2012) e (LAWSON, 1998).

Definição 1. *Um* semigrupo *é um conjunto S munido de uma operação $\cdot : S \times S \to S$ $(s, r) \mapsto s \cdot r = sr$ que é associativa, ou seja, $(rs)t = r(st)$ para quaisquer $r, s, t \in S$.*

Definição 2. *Sejam S, T semigrupos. Uma aplicação $\varphi : S \to T$ é chamada de* homomorfismo de semigrupos *se φ preserva a multiplicação, isto é, para $r, s \in S$ dados, tem-se*

$$\varphi(rs) = \varphi(r)\varphi(s).$$

Definição 3. *Um* semigrupo inverso *é um semigrupo S no qual para cada $s \in S$ existe único elemento s^* tal que*

$$ss^*s = s \quad e \quad s^*ss^* = s^*. \tag{2.1}$$

Um elemento $e \in S$ é chamado de *idempotente* se $e^2 = ee = e$. Seja $E(S)$ o conjunto dos idempotentes de S. Observe que $ss^* \in E(S)$ para todo $s \in S$. De fato, dado $s \in S$

$$(ss^*)^2 = (ss^*)(ss^*) = (ss^*s)s^* = ss^*.$$

Mais ainda, se S é um semigrupo inverso e $e \in E(S)$, então

$$e = e^2 = e^3 = eee,$$

Pela unicidade de e^* em um semigrupo inverso, segue que $e^* = e$. Por este motivo,

$$E(S) = \{ss^*; s \in S\}.$$

Definição 4. *Seja S um semigrupo inverso. Um* subsemigrupo inverso *de S é um subconjunto $T \subseteq S$ que é, por si só, um semigrupo inverso* *com as operações induzidas de S.*

Como a associatividade e a existência e unicidade de s^* são propriedades hereditárias, um subconjunto $T \subseteq S$ é subsemigrupo inverso se, e somente se, $st \in T$ e $s^* \in T$ sempre que $s, t \in T$.

Proposição 5. *Seja S um semigrupo inverso. Então o conjunto $E(S)$ dos elementos idempotentes de S é um subsemigrupo inverso comutativo de S.*

Demonstração. Sejam $e, f \in E(S)$. Defina $g := f\,(ef)^*\,e$, assim

$$g^2 = f\,(ef)^*\,ef\,(ef)^*\,e = f\left((ef)^*\,ef\,(ef)^*\right)e = f\,(ef)^*\,e = g.$$

Isto mostra que $g \in E(S)$. Inda,

$$\begin{aligned} g\,(ef)\,g &= f\,(ef)^*\,e\,(ef)\,f\,(ef)^*\,e \\ &= f\,(ef)^*\,e^2f^2\,(ef)^*\,e \\ &= f\,(ef)^*\,ef\,(ef)^*\,e = g^2 = g. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (ef)\,g\,(ef) &= (ef)\left(f\,(ef)^*\,e\right)(ef) \\ &= ef^2\,(ef)^*\,e^2f \\ &= ef\,(ef)^*\,ef = ef. \end{aligned}$$

Mas isto mostra que $g^* = ef$. Vimos que $g \in E(S)$ e, por este motivo, é necessário que $g = g^*$ e $ef \in E(S)$. Logo,

$$f\,(ef)^*\,e = g = g^* = ef.$$

Analogamente, trocando-se e por f no argumento acima, concluimos que $h := e(fe)^*f$ é idempotente e $h = h^* = fe$, logo $fe \in E(S)$. Provado que ef e fe pertencem a $E(S)$, tem-se o seguinte

$$(ef)\,(fe)\,(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef \text{ e}$$

$$(fe)\,(ef)\,(fe) = fe^2f^2e = fefe = (fe)^2 = fe.$$

ou seja, $(ef)^* = fe$. Novamente, como ef e fe pertencem a $E(S)$, temos que

$$ef = (ef)^* = fe.$$

Portanto, $E(S)$ é comutativo. Além disso, foi provado que para $e, f \in$

$E(S)$ dados, tem-se $ef \in E(S)$, mais ainda, $e^* = e$. Logo, $E(S)$ é subsemigrupo inverso comutativo de S. ■

O seguinte resultado nos fornece uma recíproca parcial da proposição anterior.

Proposição 6. *Seja S um semigrupo tal que para todo $s \in S$ existe um elemento t tal que*

$$sts = s \quad e \quad tst = t. \tag{2.2}$$

Se $E(S)$ é comutativo, então S é semigrupo inverso.

Demonstração. Seja S um semigrupo tal que seus idempotentes comutam e que para todo $s \in S$ existe um elemento t que satisfaz a Equação 2.2. Para que S seja semigrupo inverso, resta provar a unicidade do elemento t.
Suponha que para um dado $s \in S$ existam $t, r \in S$ tais que

$$sts = s \text{ e } tst = t.$$

$$srs = s \text{ e } rsr = r.$$

Visto que $sts = s$, tem-se $(st)^2 = stst = st$. Logo $st \in E(S)$ e, da mesma forma, $sr, rs, ts \in E(S)$. Conclui-se que

$$\begin{aligned} r &= rsr = r\,(sts)\,r = r\,(st)\,(sr) = r\,(sr)\,(st) \\ &= (rsr)\,(st) = rst = rs\,(tst) = (rs)\,(ts)\,t \\ &= (ts)\,(rs)\,t = t\,(srs)\,t = tst = t. \end{aligned}$$

Isto mostra a unicidade de t e, portanto, S é um semigrupo inverso. ■

Observação 1. Seja S um semigrupo inverso. Para quaisquer $s, t \in S$ tem-se $(s^*)^* = s$ e $(st)^* = t^*s^*$. De fato, seja $s \in S$, temos

$$s^{**} = s^{**}s^*s^{**} \text{ e } s^* = s^*s^{**}s^*.$$

Mas também temos

$$s = ss^*s \text{ e } s^* = s^*ss^*.$$

Por unicidade, segue que $s^{**} = s$.
Agora sejam $s, t \in S$. Como $ss^*, tt^* \in E(S)$, estes elementos comutam.

Logo,

$$\begin{aligned} t^*s^*(st)\,t^*s^* &= t^*(s^*s)(tt^*)\,s^* \\ &= t^*(tt^*)(s^*s)\,s^* \\ &= (t^*tt^*)(s^*ss^*) = t^*s^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} st\,(t^*s^*)\,st &= s\,(tt^*)(s^*s)\,t \\ &= s\,(s^*s)(tt^*)\,t \\ &= (ss^*s)(tt^*t) = st \end{aligned}$$

Portanto, $(st)^* = t^*s^*$. Por este motivo, a aplicação $* : S \to S$, $s \mapsto s^*$ é chamada de *involução*.

Exemplo 1. Todo grupo é um semigrupo inverso com exatamente um elemento idempotente, a saber, o elemento neutro do grupo. Reciprocamente, se S é um semigrupo inverso com um único elemento idempotente e, então S é um grupo, sendo e o elemento neutro. De fato, vimos acima que para todo elemento $s \in S$, s^*s e ss^* são idempotentes. Então

$$s^*s = ss^* = e \text{ para todo } s \in S.$$

Disto, segue que

$$es = ss^*s = s \text{ e } se = ss^*s = s.$$

O que mostra que tal idempotente é o elemento neutro e que para cada $s \in S$, s^* é o seu inverso.

Exemplo 2. Seja G um grupo com elemento neutro 1. Seja $S(G)$ o semigrupo universal gerado por símbolos $[g]$, com $g \in G$, satisfazendo as seguintes relações:

i. $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$

ii. $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$

iii. $[g][1] = [g]$

iv. $[1][g] = [g]$.

No artigo (EXEL, 1998), foi provado que o conjunto definido por estes geradores é um semigrupo inverso com unidade $[1]$ e que, para cada $g \in G$, tem-se $[g^{-1}] = [g]^*$. Também foi provado que todo elemento $\alpha \in S(G)$ se escreve de forma única (a menos de permutação) como

$\alpha = \varepsilon_{g_1}...\varepsilon_{g_n}[g]$, em que $g, g_1, ..., g_n \in G$ são distintos, diferentes de 1 e $\varepsilon_{g_i} = [g_i][g_i^{-1}]$. Esta forma de escrever α é chamada de *forma normal.* Se α é como acima, então

$$\begin{aligned} \alpha &= [1]\varepsilon_{g_1}...\varepsilon_{g_n}[g][g^{-1}][g] &\quad (2.3)\\ &= \varepsilon_1\varepsilon_{g_1}...\varepsilon_{g_n}\varepsilon_g[g] &\quad (2.4)\end{aligned}$$

Se $A := \{1, g_1, ...g_n, g\}$, defina

$$\varepsilon_A := \prod_{a\in A} \varepsilon_a.$$

Desta forma, segue que $\alpha = \varepsilon_A[g]$. Assim, todo elemento de $S(G)$ pode ser escrito de forma única como o produto de ε_A por um $[g]$, em que A é um subconjunto finito de G que contém 1 e g.

Os idempotentes do semigrupo inverso $S(G)$ são da forma ε_A em que A é um subconjunto finito de G que contém 1. Em particular, ε_g é idempotente para todo $g \in G$. Na Proposição 5, vimos que idempotentes de um semigrupo inverso comutam. Usando isto, vejamos que para qualquer $B \subset G$ finito, contendo 1 e $g \in G$, tem-se $\varepsilon_{gB}[g] = [g]\varepsilon_B$.

Inicialmente, suponha que $B = \{1, h_1, h\}$. Usando as relações com que $S(G)$ é definido, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{gB}[g] &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}][gh][h^{-1}g^{-1}][g]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}][gh][h^{-1}g^{-1}g]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}][g][g^{-1}][gh][h^{-1}]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}][g][g^{-1}gh][h^{-1}]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}][g][h][h^{-1}]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}g^{-1}g][h][h^{-1}]\\ &= [g][g^{-1}][gh_1][h_1^{-1}][h][h^{-1}]\\ &= [g][g^{-1}gh_1][h_1^{-1}][h][h^{-1}]\\ &= [g][h_1][h_1^{-1}][h][h^{-1}] = [g]\varepsilon_1\varepsilon_{h_1}\varepsilon_h = [g]\varepsilon_B.\end{aligned}$$

Por indução, suponha que se $B = \{1, h_1, ..., h_k, h\}$, então $\varepsilon_{gB}[g] = [g]\varepsilon_B$. Seja $C = \{1, h_1, ..., h_k, h_{k+1}, h\}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{gC}[g] &= \varepsilon_g\varepsilon_{gh_1}...\varepsilon_{gh_k}\varepsilon_{gh_{k+1}}\varepsilon_{gh}[g]\\ &= \varepsilon_{gh_{k+1}}\varepsilon_g\varepsilon_{gh_1}...\varepsilon_{gh_k}\varepsilon_{gh}[g]\\ &= \varepsilon_{gh_{k+1}}\varepsilon_{gB}[g] = \varepsilon_{gh_{k+1}}[g]\varepsilon_B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [gh_{k+1}][h_{k+1}^{-1}g^{-1}][g]\varepsilon_B = [gh_{k+1}][h_{k+1}^{-1}g^{-1}g]\varepsilon_B \\
&= [gh_{k+1}][h_{k+1}^{-1}]\varepsilon_B = [g][h_{k+1}][h_{k+1}^{-1}]\varepsilon_B = [g]\varepsilon_C.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $g \in G$, vale $\varepsilon_{gB}[g] = [g]\varepsilon_B$ para todo B finito contendo 1.

Exemplo 3. Seja $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, g\}$. Neste grupo, $g = g^{-1}$ e, então, o conjunto dos geradores de $S(G)$ é $[G] := \{[1], [g]\}$.
Visto que $[g][g^{-1}][g][g^{-1}] = [g][g^{-1}]$, tem-se que $1 := [1]$ e $e := [g][g^{-1}]$ são os únicos idempotentes de $S(G)$. Assim, $E(S) = \{1, e\}$.
Ademais, sendo $s := [g]$, $es = [g][g^{-1}][g] = [g] = s$ e $se = [g][g^{-1}][g] = [g] = s$. Então temos que o semigrupo universal associado a $\mathbb{Z}_2$ é comutativo e é da forma

$$S(G) = \{1, s, e\}.$$

Exemplo 4. Uma bijeção parcial de X é uma bijeção $f : D \to R$, em que D, R são subconjuntos de X. O conjunto de todas as bijeções parciais de X é denotado por $I(X)$. Sejam $f : D_1 \to R_1$, $g : D_2 \to R_2$ bijeções parciais, $D := \{x \in D_2; g(x) \in D_1\} = g^{-1}(D_1) \cap D_2$ e $R := f(g(D))$. Definidos D e R desta forma, o produto fg é a função dada pela composição usual de funções: $(fg)(x) := f(g(x))$ para todo $x \in D$. Isto define uma bijeção $fg : D \to R$, assim é um elemento de $I(X)$. A operação $(f, g) \mapsto fg$ assim definida é claramente associativa. Mais ainda, a função $f^{-1}f : D \to D$ é a identidade em D e, assim,

$$ff^{-1}f = f \text{ e } f^{-1}ff^{-1} = f^{-1}.$$

Desta forma, f^{-1} é um elemento que satisfaz a Equação 2.1. Se $g \in I(X)$, como acima, é tal que $fgf = f$ e $gfg = g$, então

$$f^{-1}fgf = f^{-1}f = \mathrm{id}_{D_1} \text{ e } g^{-1}gfg = g^{-1}g = \mathrm{id}_{D_2}$$

$$\Rightarrow gf = \mathrm{id}_{D_1} \text{ e } fg = \mathrm{id}_{D_2}.$$

Em que id_{D_1} e id_{D_2} são as aplicações identidade em D_1 e D_2, respectivamente. O que mostra que $g = f^{-1}$ e $f^* = f^{-1}$. Portanto, $I(X)$ é semigrupo inverso.

Como $I(X)$ é um semigrupo inverso, sabemos que

$$E(S) = \{f^*f; f \in I(X)\}.$$

Sendo assim, se $f : D \to R$ é um elemento de $I(X)$, então $ff^* : R \to R$ é a identidade em R. Dessa forma, um idempotente de $I(X)$ é a aplicação identidade em algum subconjunto de X.

Definição 7. *Sejam S um semigrupo inverso e $s, t \in S$. Dizemos que $s \leqslant t$ se existe $e \in E$ tal que $s = te$.*

Observação 2. Esta é uma relação de ordem parcial: Sejam $s, t, r \in S$.

i. Sabendo que $s = s\,(s^*s)$ e $s^*s \in E(S)$, $s \leqslant s$.

ii. Se $s \leqslant t$ e $t \leqslant s$, então existem $e, f \in E(S)$ tais que $s = te$ e $t = sf$. Sendo assim,

$$s = te \Rightarrow se = te^2 = te \Rightarrow sef = tef.$$

Donde,

$$s = te = sfe = sef = (te)f = sf = t.$$

iii. Suponha que $s \leqslant t$ e $t \leqslant r$. Então existem $e, f \in E(S)$ tais que $s = te$ e $t = rf$. Assim $s = te = (rf)e = rfe$ e como $fe \in E(S)$, segue que $s \leqslant r$.

Portanto, $\leqslant$ é uma relação de ordem parcial em S.

Observação 3. Seja S é um semigrupo inverso.

Se S possui *unidade*, isto é, um elemento $1 \in S$ tal que $s \cdot 1 = s$ para todo $s \in S$, em particular, $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ e $1 \in E(S)$. Assim, $e \leqslant 1$ para todo $e \in E(S)$. Desta forma, 1 é o maior idempotente de S.

Se S possui *zero*, ou seja, um elemento 0 tal que $0 = 0 \cdot s$ para todo S, em particular, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ e 0 é idempotente. Desta forma, $0 \leqslant s$ para todo $s \in S$.

Proposição 8. *Sejam S um semigrupo inverso e $s, t \in S$. Então $s \leqslant t$ é equivalente a cada um dos itens abaixo.*

i. $s = ts^*s$

ii. $s = ss^*t$

iii. *Existe $f \in E(S)$ tal que $s = ft$.*

Demonstração. Suponha que $s \leqslant t$, neste caso existe $e \in E(S)$ tal que $s = te$. Usando que idempotentes comutam, temos

$$ss^*t = te(te)^*t = teet^*t = tt^*te = te = s.$$

Mais ainda,

$$ts^*s = t(te)^*te = tet^*te = tt^*te = te = s.$$

Como $f = ss^* \in E(S)$, então existe $f \in E(S)$ tal que $s = ft$. Com isto, $s \leqslant t$ implica nos itens i, ii e iii.

Reciprocamente, se $s = ts^*s$, então $s \leqslant t$, pois $s^*s \in E(S)$. Se existe $f \in E(S)$ tal que $s = ft$, então

$$ts^*s = tt^*fft = ftt^*t = ft = s.$$

Como $ss^* \in E(S)$, segue que $s \leqslant t$. Se, além disso, $s = ss^*t$, pelo que acabamos de provar segue que $s \leqslant t$, visto que $ss^* \in E(S)$. Portanto cada um dos itens i, ii e iii, implica em $s \leqslant t$.

■

Em particular, se $e, f \in E(S)$ são tais que $e \leqslant f$, pela proposição acima, temos $e = ef$.

Proposição 9. *Seja S um semigrupo inverso.*

i. Se $s \in S$ e $e \in E(S)$, então $ses^* \in E(S)$ e $ses^* \leqslant ss^*$.

ii. Seja T um semigrupo e $\phi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos sobrejetor. Então $\phi(E(S)) = E(T)$. Neste caso, T é necessariamente semigrupo inverso e ϕ preserva $*$.

iii. Sejam $s, t, r \in S$ com $t \leqslant s$. Então $tr \leqslant sr$ e $rt \leqslant rs$.

Demonstração. i. Seja $s \in S$ qualquer. Lembrando que $s^*s \in E(S)$ e que idempotentes comutam, temos

$$(ses^*)^2 = se(s^*s)es^* = see(s^*s)s = se^2s^*ss^* = ses^*.$$

O que motra que $ses^* \in E(S)$. Mais ainda,

$$(ses^*)ss^* = se(s^*ss^*) = ses^*$$

ou seja, $ses^* \leqslant ss^*$.

ii. Seja $\phi : S \to T$ um homomorfismo de semigrupos sobrejetor. Primeiro, vamos mostrar que $\phi(E(S)) = E(T)$. Seja $k \in E(T)$, como ϕ é sobrejetor, existe $s \in S$ tal que $\phi(s) = k$. Tome $e = s\left(s^2\right)^* s$ e lembre que ss^*, $s^*s \in E(S)$ e, portanto, comutam.

Agora, note que

$$\begin{aligned}
e^2 &= \left(s\left(s^2\right)^* s\right)^2 = \left(ss^*s^*s\right)\left(ss^*s^*s\right) \\
&= \left(s^*sss^*\right)\left(ss^*s^*s\right) = s^*s\left(ss^*s\right)s^*s^*s \\
&= s^*sss^*s^*s = \left(s^*s\right)\left(ss^*\right)s^*s \\
&= \left(ss^*\right)\left(s^*s\right)s^*s = \left(ss^*\right)\left(s^*ss^*\right)s \\
&= ss^*s^*s = \left(s\left(s^2\right)^* s\right) = e
\end{aligned}$$

O que mostra que $e \in E(S)$. Além disso, como $k \in E(T)$, temos que $\phi(s) = k = k^2 = \phi(s)^2 = \phi(s^2)$ então

$$\begin{aligned}
\phi(e) &= \phi\left(s\left(s^2\right)^* s\right) = \phi(s)\,\phi\left(\left(s^2\right)^*\right)\phi(s) \\
&= \phi\left(s^2\right)\phi\left(\left(s^2\right)^*\right)\phi\left(s^2\right) = \phi\left(s^2\left(s^2\right)^* s^2\right) \\
&= \phi\left(s^2\right) = \phi(s) = k
\end{aligned}$$

Assim, mostramos que existe $e \in E(S)$ tal que $\phi(e) = k$. E é claro que se $e \in E(S)$, então $\phi(e) \in E(T)$. Portanto, $\phi(E(S)) = E(T)$.

Ademais, seja $t \in T$, então existe $s \in S$ tal que $t = \phi(s)$. Como ϕ é um homomorfismo, tem-se

$$t = \phi(s) = \phi(ss^*s) = \phi(s)\,\phi(s^*)\,\phi(s) = t\phi(s^*)t \text{ e}$$

$$\phi(s^*) = \phi(s^*ss^*) = \phi(s^*)\,t\phi(s^*) \tag{2.5}$$

Desta forma, $\phi(s^*)$, é um elemento que satisfaz a Equação 2.1. Ainda, se $g, h \in E(T)$, existem $e, f \in E(S)$ tais que $g = \phi(e)$ e $h = \phi(f)$, então

$$gh = \phi(e)\phi(f) = \phi(ef) = \phi(fe) = \phi(f)\phi(e) = hg.$$

Portanto, os idempotentes de T comutam e, pela Proposição 6, segue que T é semigrupo inverso. Pela unicidade do elemento t^* em T e pela Equação 2.5, segue que $\phi(s^*) = \phi(s)^*$.

iii. Sejam $s, t, r \in S$ com $t \leqslant s$. Então existe $e \in E(S)$ tal que $t = se$, assim $rt = rse$, donde $rt \leqslant rs$. Pelo item iii da Proposição 8, também existe $f \in E(S)$ tal que $t = fs$, logo $tr = fsr$, logo $tr \leqslant sr$.

■

A cada semigrupo inverso podemos associar um grupo. Para isso, vamos definir uma relação de equivalência em S. Sejam $s, t \in S$, escrevemos $s \sim t$ se existe $e \in E(S)$, tal que

$$es = et.$$

Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, as propriedades reflexiva e simétrica são imediatas. Para verificar que $\sim$ é transitiva, suponha que $r \sim s$ e $s \sim t$. Então existem $e, f \in E(S)$ tais que $er = es$ e $fs = ft$. E assim $efs = eft$. Lembrando que $E(S)$ é subsemigrupo comutativo, temos

$$(fe)t = (fe)s = f(es) = f(er) = (fe)r.$$

Como $fe \in E(S)$, segue que $r \sim t$. Isto mostra que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Proposição 10. *Seja S um semigrupo inverso. A relação $\sim$ definida acima é uma congruência, isto é, dados $s, t, u \in S$ com $s \sim t$, tem-se $su \sim tu$ e $us \sim ut$.*

Demonstração. Sejam $s, t, u \in S$ e suponha que $s \sim t$. Desta forma, existe $e \in E(S)$ tal que $es = et$, então $esu = etu$, ou seja, $su \sim tu$. Ademais, pela Proposição 9, $ueu^* \in E(S)$ e lembrando que idempotentes comutam, segue que

$$\begin{aligned} (ueu^*)\, us &= ueu^*us = uu^*ues \\ &= uu^*uet = ueu^*ut \\ &= (ueu^*)\, ut. \end{aligned}$$

Logo, o elemento $ueu^* \in E(S)$ satisfaz $(ueu^*)\, us = (ueu^*)\, ut$ e, portanto, $us \sim ut$. ∎

Observação 4. Dados $e, f \in E(S)$, seja $g := ef \in E(S)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} ge &= (ef)\, e = (fe)\, e = fe^2 = fe = f^2 e \\ &= f\,(fe) = f\,(ef) = (fe)\, f = (ef)\, f = gf \end{aligned}$$

provando que $e \sim f$, isto é, quaisquer idempotentes estão relacionados por $\sim$.

Proposição 11. *Seja S um semigrupo inverso não vazio. O quociente $G(S) = S/{\sim}$ é um grupo. Além disso, $G(S)$ é o* grupo imagem homomorfa máxima *de S, isto é, se G é um grupo, $\psi : S \to G$ é um* *homomorfismo sobrejetivo e $s \sim t$ então $\psi(s) = \psi(t)$. E assim, ψ se fatora a um homomorfismo de $G(S)$ em G.*

Demonstração. Para cada $s \in S$, seja $[s]$ a sua classe de equivalência. No quociente $G(S)$, defina uma operação de multiplicação por $[s][t] := [st]$. Esta operação está bem definida, pois $\sim$ é uma congruência.

Sejam $[s], [t], [u] \in G(S)$. Então,

$$([s][t])\,[u] = [st][u] = [(st)\,u] = [s\,(tu)] = [s][tu] = [s]\,([t][u])\,.$$

Além disso, sejam $e \in E(S)$, $[s] \in G(S)$ e tome $[e]$. Note que, $es \sim s$, pois $e(es) = e^2 s = es$ e, assim, $[es] = [s]$. Por outro lado, como todos os idempotentes estão relacionados, temos que $[e] = [s^* s]$, donde

$$[s]\,[e] = [s]\,[s^* s] = [ss^* s] = [s]\,.$$

Ainda, como ss^* e $s^* s$ são idempotentes, então

$$[ss^*] = [e] = [s^* s]\,.$$

Provando que $G(S)$ é um grupo, no qual o elemento neutro é a classe dos idempotentes.

Sejam G um grupo e $\psi : S \to G$ um homomorfismo sobrejetivo. Pela Proposição 9 $\psi(E(S)) = E(G) = \{1\}$, então $\psi(e) = 1$ para todo $e \in E(S)$. Se $s, t \in S$ são tais que $s \sim t$, então existe $e \in E(S)$ tal que $es = et$. Com isto,

$$\begin{gathered} \psi\,(es) = \psi\,(et) \\ \Leftrightarrow \psi\,(e)\,\psi\,(s) = \psi\,(e)\,\psi\,(t) \\ \Leftrightarrow \psi(s) = \psi(t). \end{gathered}$$

O que mostra o desejado. ■

Seja $\sigma \colon S \to G(S)$ a aplicação quociente, ou seja, $\sigma(s) = [s]$ e seja 1 o elemento neutro de $G(S)$.

A Observação 4 nos garante que quaisquer idempotentes estão relacionados. Mas, em geral, elementos não-idempotentes podem estar relacionados a idempotentes. Por exemplo, se S possui um *zero*, ou seja, um elemento $0 \in S$ satisfazendo $s0 = 0$ para todo $s \in S$, então todos os elementos de S estão relacionados (e assim $G(S)$ é o grupo trivial). Isto acontece, por exemplo, para $S = I(X)$ cujo zero é dado pela função vazia.

Definição 12. *Um semigrupo inverso é dito $E-$*unitário *se o conjunto* *dos idempotentes de S forma uma classe de equivalência para a relação $\sim$, isto é, se $\sigma^{-1}(1) = E(S)$.*

Exemplo 5. Seja $G = \mathbb{Z}_2$. Vejamos qual é o grupo imagem homomorfa máxima do semigrupo universal, $S(G)$, do Exemplo 2. Como $1, e$ são idempotentes, então estão relacionados pela relação $\sim$. Além disso, note que s não está relacionado a nenhum idempotente, pois se $s \sim e$, então deveria existir um idempotente f tal que $fs = fe$, mas

$$es = s \neq e = ee \text{ e } 1s = s \neq e = 1e.$$

Assim, o grupo máximo de $S(G)$ possui dois elementos e, portanto, é o próprio G (a menos de isomorfismo). Mais ainda, como $\sigma^{-1}(1) = E$, segue que $S(G)$ é $E-$unitário.

Na verdade, todo semigrupo universal associado a um grupo é E-unitário. Veremos isto no Exemplo 11.

Proposição 13. *Um semigrupo inverso S é E-unitário se, e somente se, dados $e \in E(S)$ e $s \in S$ com $e \leqslant s$, tem-se que $s \in E(S)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que S é E-unitário e sejam $e \in E(S)$ e $s \in S$ tais que $e \leqslant s$. Pela Proposição 8, temos $e = es$, então $e^2 = es$. Isto mostra que $s \sim e$, ou seja, $[s] = [e] = 1$. Como S é E-unitário, segue que $s \in E(S)$.

($\Leftarrow$) Suponha que dados $e \in E(S)$ e $s \in S$ com $e \leqslant s$, tem-se que $s \in E(S)$. Seja $s \in S$ tal que $[s] = 1$. E assim $s \sim e$ para todo $e \in E(S)$. Logo, existe $f \in E(S)$ tal que $fe = fs$, assim $efe = efs$ e $ef = efs$, isto é, $ef \leqslant s$. Como $ef \in E(S)$, por hipótese, $s \in E(S)$ e, portanto, S é E-unitário. ∎

Exemplo 6. Seja $s \in B(l^2(\mathbb{N}))$ o operador *shift*, isto é, se $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$, para $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, é a base canônica de $l^2(\mathbb{N})$, então $s(e_i) = e_{i+1}$. Observe que

$$\langle s(e_k), e_n \rangle = \langle e_{k+1}, e_n \rangle = \langle e_k, e_{n-1} \rangle$$

pois $\langle e_{k+1}, e_n \rangle = 1$ se $k+1 = n$ e 0 caso contrário. Portanto, o adjunto $t := s^*$ de s é dado pela fórmula $t(e_k) = e_{k-1}$ para $k > 0$ e $t(e_0) = 0$. Temos $s^*s(e_k) = s^*(e_{k+1}) = e_k = id(e_k)$, donde segue que s^*s é o operador identidade sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, ou seja, s é uma isometria[1].

O conjunto $S = \{s^n t^m; n, m \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo inverso com a operação de composição de operadores e involução dada pelo operador adjunto. Além disso, é possível provar que se $s^n t^m = s^l t^k$, então $n = l$

[1] Um operador é uma *isometria* se preserva a norma.

e $m = k$. Assim, podemos identificar o conjunto S com o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ através da aplicação $s^n t^m \mapsto (n, m)$. Com esta identificação, multiplicação sobre S se transforma na operação sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por

$$(n, m) \cdot (l, k) = \begin{cases} (n, m - l + k) & \text{se } m \geqslant l \\ (n + l - m, k) & \text{se } m \leqslant l. \end{cases}$$

Se $r = s^n t^m$ um elemento qualquer de S, então $r^* r \in E(S)$. Como

$$r^* r = (s^n t^m)^* \, s^n t^m = t^{*m} s^{*n} s^n t^m = s^m t^n s^n t^m = s^m t^m,$$

segue que $E(S) = \{s^m t^m; m \in \mathbb{N}\}$. Com a identificação $S \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, os idempotentes de S se identificam com a diagonal de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que por sua vez, se identifica com $\mathbb{N}$. Sejam $e = s^m t^m$ e $r = s^l t^k$ tais que $e \leqslant r$, ou seja, $s^m t^m = s^l t^k s^m t^m$. Se $k \geqslant m$, então

$$s^m t^m = s^l t^k s^m t^m = s^l t^{k-m} t^m = s^l t^k$$

e $m = l = k$. Se $m \geqslant k$, temos

$$s^m t^m = s^l t^k s^m t^m = s^l s^{m-k} t^m = s^{l+m-k} t^m$$

e $m = l + m - k$, ou seja $l = k$ e $r = s^k t^k \in E(S)$. Pela Proposição 13, segue que S é E-unitário.

Mais ainda, sejam $u = s^n t^m$ e $v = s^l t^k$ tais que $\sigma(u) = \sigma(v)$. Como S E-unitário, veremos no Lema 15, que $vu^* u = uv^* v$, com isto temos,

$$s^n t^m s^k t^k = s^n t^m s^k t^l s^l t^k = uv^* v = vu^* u = s^l t^k s^m t^n s^n t^m = s^l t^k s^m t^m$$

Se $m \leqslant k$,

$$s^n t^m s^k t^k = s^l t^k s^m t^m \Rightarrow s^n s^{k-m} t^k = s^l s^{k-m} t^m \Rightarrow s^{n+k-m} t^l = s^{l+k-m} t^m$$

Então $k = m$ e $n + k - m = l + k - m$, ou seja, $k = m$ e $n = l$. Se $m \geqslant k$,

$$s^n t^{m-k} t^k = s^l t^{k-m} t^m \Rightarrow s^n t^m = s^{l+m-k} t^m$$

Donde, $n = l + m - k$, ou seja, $m - n = k - l$. Portanto, $[s^n t^m] = [s^l t^k]$ se, e somente se, $m - n = k - l$. Dessa forma, temos um isomorfismo $\varphi : G(S) \to \mathbb{Z}$

$$[s^n t^m] \mapsto m - n$$

Portanto, $G(S) \cong \mathbb{Z}$.

Definição 14. *Seja S um semigrupo inverso e sejam $s, t \in S$. Uma* cota inferior *para s e t é um elemento $u \in S$ satisfazendo $u \leqslant s$ e $u \leqslant t$. O* ínfimo *entre s e t é a maior cota inferior de s e t, caso exista. Neste caso, o ínfimo entre s, t é denotado por $s \wedge t$.*

Observação 5. Em geral, o ínfimo entre dois elementos arbitrários $s, t \in S$ pode não existir. Uma condição obviamente necessária para isto é a existência de uma cota inferior, ou seja, um elemento $u \in S$ tal que $u \leqslant s$ e $u \leqslant t$. Observe que se tal u existe, então temos $e := u^*u \leqslant u^*s, u^*t \leqslant s^*s, s^*t, t^*s$. Em particular, segue que $e = es^*t = et^*s$, donde $\sigma(s^*t) = 1$ em $G(S)$ e, portanto, $\sigma(s) = \sigma(t)$. Isto é, portanto, uma condição necessária para que o par s, t admita uma cota inferior. Veremos em seguida que no caso de semigrupos inversos E-unitários, $\sigma(s) = \sigma(t)$ é uma condição suficiente para a existência do ínfimo entre $s, t \in S$. Em particular, como $E(S)$ é um semigrupo inverso E-unitário, seguirá que o ínfimo entre quaisquer dois idempotentes e, f sempre existe e é igual ao seu produto, isto é $e \wedge f = ef$.

Se, no entanto, o ínfimo entre dois elementos $s, t \in S$ existe, então ele é único. Para provar isto, suponha que $w, u \in S$, sejam ínfimos de s, t, então $w \leqslant s, t$. Como $u = s \wedge t$, temos que $w \leqslant u$. Por outro lado, $u \leqslant s, t$, como $w = s \wedge t$, temos que $u \leqslant w$. Donde $u = w$ e o ínfimo é único.

Vejamos um Lema do artigo de (MILAN; STEINBERG, 2014):

Lema 15. *Seja S um semigrupo inverso E-unitário. Se $\sigma(s) = \sigma(t)$, então o ínfimo entre s e t existe e é igual a st^*t. Além disso, $st^*t = ts^*s$.*

Demonstração. Suponha que S seja E-unitário e sejam $s, t \in S$. Observe que $st^*t \leqslant s$ e $ts^*s \leqslant t$. Se $\sigma(s) = \sigma(t)$, então st^* e s^*t são idempotentes, pois $\sigma(st^*) = \sigma(s)\sigma(t^*) = \sigma(s)\sigma(t)^{-1} = \sigma(s)\sigma(s)^{-1} = 1$. Como S é E-unitário, $st^* \in E(S)$. Similarmente, $s^*t \in E(S)$. Com isto, temos

$$\begin{aligned} \sigma(ts^*s) &= \sigma(t)\sigma(s^*)\sigma(s) = \sigma(t)\sigma(s)^{-1}\sigma(s) = 1\sigma(s) \\ &= \sigma(s) = \sigma(t) = \sigma(s)\sigma(t)^{-1}\sigma(t) = \sigma(s)\sigma(t^*)\sigma(t) = \sigma(st^*t). \end{aligned}$$

Defina $u := ts^*s$ e $v := st^*t$. Pela equação acima, $\sigma(u) = \sigma(v)$ e então uv^* e vu^* são idempotentes. Além disso, como idempotentes comutam,

$$\begin{aligned} u^*u &= (ts^*s)^*(ts^*s) = s^*st^*ts^*s \\ &= (s^*s)^2 t^*t = s^*st^*t = s^*s(t^*t)^2 \\ &= t^*ts^*st^*t = (st^*t)^*(st^*t) = v^*v. \end{aligned}$$

Assim,

$$u = uu^*u = uv^*v = ev \text{ com } e = uv^* \Rightarrow u \leqslant v$$

$$v = vv^*v = vu^*u = fu \text{ com } f = vu^* \Rightarrow v \leqslant u.$$

Pela propriedade antissimétrica segue que $u = v$.

Seja $w \in S$ tal que $w \leqslant s, t$, então existem $e, f \in E(S)$ tais que $w = es$, $w = ft$. Usando que $ts^* \in E(S)$,

$$w = ww^*w = (ft)(es)^*(es) = fts^*es = fets^*s.$$

Logo existe $g = ef \in E(S)$ tal que $w = gts^*s$, ou seja, $w \leqslant ts^*s$. Isto prova que ts^*s é o maior elemento de S que é menor que s, t. ■

Corolário 16. *Seja S um semigrupo inverso E-unitário. Se $\sigma(s) = \sigma(t)$, então $s^*t = s^*st^*t = t^*s$ e $st^* = ss^*tt^* = ts^*$.*

Demonstração. Por simetria e como $\sigma(s) = \sigma(t)$ se, e somente se, $\sigma(s^*) = \sigma(t^*)$, basta mostrar que $t^*s = s^*st^*t$.

Observe que $s^*st^*t \leqslant s^*s, t^*t$. E se $f \leqslant s^*s, t^*t$,

$$f = fs^*s \text{ e } f = ft^*t \Rightarrow f = f^2 = ft^*tfs^*s = ft^*ts^*s.$$

Donde, $f \leqslant t^*ts^*s$ e t^*ts^*s é o ínfimo entre t^*t e s^*s.
Além disso, como $t^*s = t^*tt^*s$, temos $t^*s \leqslant t^*t$. Analogamente, $t^*s \leqslant s^*s$. Seja f como acima, já sabemos que

$$f \leqslant t^*ts^*s = t^*(ts^*s).$$

Como $\sigma(s) = \sigma(t)$, pelo Lema 15 temos que $ts^*s \leqslant s, t$, então pelo item iv da Proposição 9,

$$t^*(ts^*s) \leqslant t^*s.$$

Por transitividade, $f \leqslant t^*s$, isto mostra que t^*s também é ínfimo entre s^*s e t^*t. Pela unicidade do ínfimo segue que $t^*s = s^*st^*t$. ■

Para cada $e \in E(S)$ defina o conjunto

$$D_e = \{t \in S; tt^* \leqslant e\}.$$

Observação 6. Note que se $t \in D_{s^*s}$, então

$$tt^* = tt^*s^*s \Leftrightarrow t^*tt^* = t^*tt^*s^*s \Leftrightarrow t^* = t^*s^*s$$

$$\Leftrightarrow t^{**} = (t^*s^*s)^* \Leftrightarrow t = s^*st.$$

e se $w \in D_{ss^*}$

$$ww^* = ww^*ss^* \Leftrightarrow w^*ww^* = w^*ww^*ss^* \Leftrightarrow w^* = w^*ss^*$$

$$\Leftrightarrow w^{**} = (w^*ss^*)^* \Leftrightarrow w = ss^*w.$$

Proposição 17 (Teorema de Vagner-Preston)**.** *Seja S um semigrupo inverso. Para cada $s \in S$, defina*

$$\gamma_s : D_{s^*s} \to D_{ss^*}$$

$$t \mapsto st$$

Então γ_s é uma bijeção de D_{s^*s} em D_{ss^*}. Ademais, a aplicação

$$\gamma : S \to I(S)$$

$$s \mapsto \gamma_s$$

é um isomorfismo de S em um subsemigrupo inverso de $I(S)$.

Demonstração. Primeiro vamos verificar que γ_s está bem definida. De fato, seja $t \in D_{s^*s}$, então $tt^* = tt^*s^*s$ e assim

$$\begin{aligned} (st)(st)^*(ss^*) &= (stt^*s^*)ss^* = stt^*(s^*ss^*) \\ &= stt^*s^* = (st)(st)^* \end{aligned}$$

provando que $(st)(st)^* \leqslant ss^*$, logo $\gamma_s(t) \in D_{ss^*}$, e γ_s está bem definida.

Agora, sejam $r, t \in D_{s^*s}$ tais que $\gamma_s(r) = \gamma_s(t)$. Pela Observação 6, temos que

$$t = s^*st = s^*\gamma_s(t) = s^*\gamma_s(r) = s^*sr = r$$

logo γ_s é injetiva.

Para a sobrejetividade, seja $w \in D_{ss^*}$, então pela Observação 6, temos que $w = s\,(s^*w)$. Vamos provar que $(s^*w) \in D_{s^*s}$, de fato

$$\begin{aligned}
(s^*w)\,(s^*w)^*\,s^*s &= (s^*ww^*s)\,(s^*s)\\
&= (s^*ww^*)\,(ss^*s)\\
&= s^*ww^*s\\
&= (s^*w)\,(s^*w)^*
\end{aligned}$$

provando que $(s^*w)\,(s^*w)^* \leqslant s^*s$ e, portanto, $s^*w \in D_{s^*s}$. Como $w = s\,(s^*w)$ e s^*w pertence ao domínio de γ_s, então $w = \gamma_s\,(s^*w)$, e γ_s é sobrejetora. Temos assim, que para cada $s \in S$, a aplicação γ_s é bijetora.

Agora vamos provar que γ é um isomorfismo de semigrupos inversos. Como já provamos que γ_s é uma bijeção entre D_{s^*s} e D_{ss^*} para cada $s \in S$, segue que $\gamma_s \in I(S)$ e γ está bem definida.

Sejam $s, r \in S$ tais que $\gamma_s = \gamma_r$. Então $D_{s^*s} = D_{r^*r}$. Observe que $s^* \in D_{s^*s}$, pois $(s^*s^{**})\,s^*s = (s^*s)^2 = s^*s = s^*s^{**}$, então $s^*s^{**} \leqslant s^*s$. Como $s^* \in D_{s^*s}$, então $s^* \in D_{r^*r}$. Assim

$$ss^* = \gamma_s(s^*) = \gamma_r(s^*) = rs^*. \tag{2.6}$$

Analogamente temos $r^* \in D_{r^*r} = D_{s^*s}$, e

$$rr^* = \gamma_r(r^*) = \gamma_s(r^*) = sr^*. \tag{2.7}$$

Usando as Equações 2.6, 2.7 e que idempotentes comutam segue que

$$\begin{aligned}
r &= rr^*r = (sr^*)\,r = (ss^*s)\,(r^*r)\\
&= (ss^*)\,s\,(r^*r) = (rs^*)\,s\,(r^*r)\\
&= r\,(s^*s)\,(r^*r) = r\,(r^*r)\,(s^*s)\\
&= (rr^*r)\,(s^*s) = r\,(s^*s)\\
&= (rs^*)\,s = (ss^*)\,s = s
\end{aligned}$$

provando a injetividade de γ .

Sejam $s, t \in S$. Vamos provar que $\gamma_{st} = \gamma_s\gamma_t$. Se $w \in D(st)$, afirmamos que $w \in D_{t^*t}$ e que $\gamma_t(w) \in D_{s^*s}$. De fato, como $w \in D(st)$, temos que $ww^* \leqslant (st)^*\,(st)$, isto é, $ww^* = ww^*\,(t^*s^*st)$. Visto que $(st)^*\,(st) = (st)^*\,s\,(tt^*t) = (st)^*\,(st)\,(t^*t)$, então $(st)^*\,(st) \leqslant t^*t$ e por transitividade temos $ww^* \leqslant t^*t$, logo $w \in D_{t^*t}$. Vejamos que $\gamma_t(w) = tw \in D_{s^*s}$. Note que

$$(tw)\,(tw)^* = t\,(ww^*)\,t^* = t\,(ww^*t^*s^*st)\,t^* = (tw)\,(tw)^*\,(s^*stt^*) \tag{2.8}$$

logo, $(tw)\,(tw)^* \leqslant s^*stt^*$. Além disso, como idempotentes comutam,

$$s^*stt^* = tt^*s^*s = tt^*s^*\,(ss^*s) = tt^*\,(s^*s)\,(s^*s) = s^*stt^*\,(s^*s)$$

ou seja, $s^*stt^* \leqslant s^*s$. Então por transitividade $(tw)\,(tw)^* \leqslant s^*s$. Provando, assim, que $w \in D_{t^*t}$ e $\gamma_t(w) \in D_{s^*s}$.

Por outro lado, seja $w \in D_{t^*t}$ tal que $\gamma_t(w) \in D_{s^*s}$, afirmamos que $w \in D_{(st)^*st}$. De fato, por hipótese temos que $ww^* \leqslant t^*t$ e $(tw)\,(tw)^* \leqslant s^*s$, isto é, $ww^* = ww^*t^*t$ e $(tw)\,(tw)^* = (tw)\,(tw)^*\,s^*s$. Assim,

$$\begin{aligned} ww^* &= ww^*t^*t = t^*tww^* = (t^*tt^*)\,t\,(ww^*) \\ &= (t^*t)\,(ww^*)\,(t^*t) = t^*\,(t\,(ww^*)\,t^*)\,t \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} t^*\,(tww^*t^*)\,t &= t^*\,(tww^*t^*s^*s)\,t \\ &= t^*\,(tww^*t^*s^*s)\,tt^*t \\ &= t^*\,(tww^*t^*tt^*)\,s^*st \\ &= [t^*\,(tww^*t^*)\,t]\,t^*s^*st \end{aligned}$$

Provando que $t^*\,(tww^*t^*)\,t \leqslant t^*s^*st$ e, portanto, $ww^* = t^*\,(tww^*t^*)\,t \leqslant t^*s^*st$. Logo $w \in D(st)$. Das duas inclusões segue que o domínio de $\gamma_s\gamma_t$ é igual a $D_{(st)^*st}$. Desta forma, dado $w \in D_{(st)^*st}$, temos

$$\gamma_s\gamma_t(w) = \gamma_s\,(tw) = s\,(tw) = (st)\,w = \gamma_{st}(w).$$

Donde γ é isomorfismo de S em sua imagem. ■

Esta proposição nos diz que todo semigrupo S é isomorfo a um subsemigrupo de $I(X)$ para algum X. A proposição ainda nos diz que podemos tomar $X = S$. Este resultado é uma versão para semigrupos inverso do Teorema de Caley para grupos que afirma que todo grupo é isomorfo a um subgrupo do grupo das bijeções (globais) de $G \to G$.

2.1 AÇÕES DE SEMIGRUPOS

Nesta seção, serão definidas ações de semigrupos sobre objetos de diferentes categorias. A fim de estudar estas ações, usaremos como referência (EXEL, 2008).

Definição 18. *Sejam S um semigrupo inverso e X um conjunto. Uma ação de S sobre X é um homomorfismo de semigrupos inversos*

$$\theta : S \to I(X)$$

$$s \mapsto \theta_s$$

tal que a união dos domínios de θ_s é o conjunto X.

Por exemplo, a aplicação γ do Teorema 17 é uma ação do semigrupo inverso S sobre si mesmo. O domínio de cada θ_s será denotado por D_{s^*}.

Observação 7. Seja $s \in S$. Como θ é um homomorfismo de semigrupos inversos, pela Proposição 9 segue que $\theta_{s^*} = \theta_s^* = \theta_s^{-1}$.

Observação 8. Lembrando que se $e \in E(S)$, então $e = e^2 = e^*$, temos

$$\theta_e = \theta_e\theta_e = \theta_e\theta_{e^*} = \theta_e\theta_e^{-1} = id$$

Portanto, para todo $e \in E(S)$ temos que θ_e é a aplicação identidade em algum subconjunto de X.

Observação 9. Sejam $e, f \in E(S)$ e D_e o domínio de θ_e. Então $D_{ef} = D_e \cap D_f$. De fato, temos que $\theta_{ef} = \theta_e\theta_f : D_{ef} \to D_{ef}$. Seja $x \in D_{ef}$, então $x \in D_f$ e $\theta_f(x) \in D_e$, mas $\theta_f(x) = id(x) = x$, portanto $x \in D_e \cap D_f$. Por outro lado, se $x \in D_e \cap D_f$, $x \in D_f$ e $\theta_f(x) \in D_e$, então $x \in D_{ef}$.

Mais ainda, se S possui unidade 1, então $e = 1e$ para todo $e \in E(S)$. Com isto, $D_e = D_{e1} = D_e \cap D_1 \subset D_1$ para todo $e \in E(S)$. Deste modo,

$$X = \bigcup_{e \in E(S)} D_e \subset D_1.$$

Portanto, $X = D_1$.

Observação 10. Observe ainda que $\theta_s : D_{s^*} \to D_s$ e $\theta_{s^*s} = \theta_{s^*}\theta_s : D_{s^*} \to D_{s^*}$ possuem o mesmo domínio, logo $D_{s^*} = D_{s^*s}$. Dessa forma, $\theta_s : D_{s^*s} \to D_{ss^*}$.

Proposição 19. *Se $s \in S$ e $e \in E(S)$, então*

$$\theta_s \left(D_e \cap D_{s^*s}\right) = D_{ses^*}.$$

Demonstração. Como e, $s^*s \in E(S)$, pela Observação 9 temos $D_e \cap D_{s^*s} = D_{es^*s}$, então $\theta_s \left(D_e \cap D_{s^*s}\right) = \theta_s \left(D_{es^*s}\right)$.

Mas observe que $\theta_s(D_{es^*s})$ é o domínio de θ_{ses^*s}. De fato, seja $y \in \theta_s(D_{es^*s})$, então existe $x \in D_e \cap D_{s^*s}$ tal que $y = \theta_s(x)$, mas como $x \in D_e \cap D_{s^*s}$, temos $x = \theta_e(x) = \theta_{s^*s}$, assim

$$y = \theta_s(x) = \theta_s(\theta_e(\theta_{s^*s}(x))) = \theta_{ses^*s}(x) \quad \in D_{ses^*s}.$$

Por outro lado, seja $y \in D_{ses^*s}$, então existe $x \in D_{(ses^*s)^*} = D_{s^*ses^*}$ tal que

$$y = \theta_{ses^*s}(x) = \theta_s(\theta_e(\theta_{s^*s}(x))) = \theta_s(\theta_e(x)) = \theta_s(x)$$

em que $x \in D_e \cap D_{s^*s} = D_{es^*s}$, o que mostra que $y \in \theta_s(D_{es^*s})$. Pelas duas inclusões segue que $\theta_s(D_{es^*s}) = D_{ses^*s}$. Ainda, pela Observação 10, temos

$$D_{ses^*s} = D_{ses^*s(ses^*s)^*} = D_{ses^*ss^*ses^*} = D_{ses^*ses^*} = D_{ses^*}$$

em que a última igualdade segue do fato que ses^* é um idempotente. Portanto, $\theta_s(D_e \cap D_{s^*s}) = D_{ses^*}$. ■

Para o próximo resultado, recomenda-se a leitura do Apêndice A sobre Ações Parciais.

Proposição 20. *Seja S uma semigrupo inverso E-unitário e X um conjunto. Toda ação $\theta\colon S \to I(X)$ de S sobre um conjunto X induz uma ação parcial $\widetilde{\theta}\colon G(S) \to I(X)$ de $G(S)$ sobre X de tal forma que $\widetilde{\theta}_g(x) = \theta_s(x)$ sempre que $\sigma(s) = g$ e $x \in D_{s^*s}$.*

Demonstração. Suponha que S seja E-unitário e que θ seja uma ação de S sobre X. Desta forma, as aplicações

$$\theta_s : D_{s^*s} \to D_{ss^*}$$

são tais que $\theta_s \circ \theta_t = \theta_{st}$ para quaisquer $s, t \in S$ e $X = \bigcup_{s \in S} D_{s^*s}$.

Defina $\widetilde{\theta} = \left\{ \left(\widetilde{D}_g\right)_{g \in G(S)}, \left(\widetilde{\theta}_g\right)_{g \in G(S)} \right\}$ por

$$\widetilde{D}_{g^{-1}} := \bigcup_{\sigma(s)=g} D_{s^*s} \;\text{ e }\; \widetilde{\theta}_g(x) := \theta_s(x) \text{ com } \sigma(s) = g$$

em que $\widetilde{\theta}_g : \widetilde{D}_{g^{-1}} \to \widetilde{D}_g$.

Para provar que cada $\widetilde{\theta}_g$ está bem definida, seja $x \in \widetilde{D}_{g^{-1}}$, e suponha que existem $s, t \in S$ tais que $\sigma(s) = \sigma(t)$ e $x \in D_{s^*s} \cap D_{t^*t}$.

Como $\sigma(s) = \sigma(t)$ e S é E-unitário segue do Lema 15 que $st^*t = ts^*s$ então

$$st^*t = ts^*s \Leftrightarrow ss^*st^*t = tt^*ts^*s \Leftrightarrow s\left(s^*st^*t\right) = t\left(s^*st^*t\right)$$

Tome $f := s^*st^*t \in E(S)$. Neste caso, $\theta_f = \mathrm{id}|_{D_f}$ e pelo que foi visto acima $sf = tf$. Além disso, como $x \in D_{s^*s} \cap D_{t^*t}$, então $x \in D_{s^*st^*t} = D_f$ pela Observação 9. Desta forma,

$$\theta_s(x) = \theta_s\left(\theta_f(x)\right) = \theta_{sf}(x) = \theta_{tf}(x) = \theta_t\left(\theta_f(x)\right) = \theta_t(x).$$

Provando a boa definição de $\widetilde{\theta}_g$.

Vejamos que $\widetilde{\theta}$ satisfaz a definição de ação parcial:

i. Sabendo que o conjunto dos idempotentes de S é da forma $\{s^*s; s \in S\}$ e como $X = \bigcup_{s \in S} D_{s^*s}$, tem-se $X = \bigcup_{e \in E} D_e = \bigcup_{\sigma(s)=1} D_{s^*s}$. Além disso, para $x \in X$, vale que

$$\widetilde{\theta}_1(x) = \theta_e(x) \text{ para algum } e \in E.$$

Como $\theta_e = \mathrm{id}_{D_e}$, segue que $\widetilde{\theta}_1$ é a identidade em X.

ii. Se $x \in \widetilde{\theta}_{h^{-1}}\left(\widetilde{D}_h \cap \widetilde{D}_{g^{-1}}\right)$, então existe $y \in \widetilde{D}_h \cap \widetilde{D}_{g^{-1}}$ tal que $x = \widetilde{\theta}_{h^{-1}}(y)$. Pela forma como cada $\widetilde{D}_g$ e $\widetilde{\theta}_g$ foram definidos, existem $s, t \in S$ tais que $\sigma(s) = h$, $\sigma(t) = g$, $y \in D_s \cap D_{t^*}$ e $x = \theta_{s^*}(y)$. Sendo assim,

$$x \in \theta_{s^*}\left(D_s \cap D_{t^*}\right).$$

Além disso, como θ é ação de semigrupo, os domínios de $\theta_t \circ \theta_s$ e θ_{ts} são iguais, então $x \in D_{(ts)^*ts}$, mas

$$D_{(ts)^*ts} \subset \bigcup_{\sigma(r)=(gh)^{-1}} D_{r^*r} = \widetilde{D}_{(gh)^{-1}}.$$

Donde, $\widetilde{\theta}_{h^{-1}}\left(\widetilde{D}_h \cap \widetilde{D}_{g^{-1}}\right) \subset \widetilde{D}_{(gh)^{-1}}$. Para x como acima, vale que

$$\widetilde{\theta}_g \circ \widetilde{\theta}_h(x) = \theta_t \circ \theta_s(x) = \theta_{ts}(x) = \widetilde{\theta}_{gh}(x).$$

Portanto, $\widetilde{\theta}$ é uma ação parcial de $G(S)$ sobre X.

$\blacksquare$

2.1.1 Ações topológicas de Semigrupos

Definição 21. *Uma* ação topológica *de um semigrupo inverso S sobre um espaço topológico X é uma ação $\theta : S \to I(X)$ tal que para todo $s \in S$, a aplicação θ_s é contínua e o seu domínio é um subconjunto aberto de X.*

Neste caso, pela Observação 7, temos que cada θ_s é um homeomofirmo entre abertos de X. Mais ainda, se S é um semigrupo inverso E-unitário e θ é uma ação de S sobre o espaço topológico X, pela Proposição 20, esta induz uma ação parcial $\widetilde{\theta}$ de $G(S)$ sobre X. Mais ainda, é claro que o domínio de cada $\widetilde{\theta}_g$ é um aberto de X. Seja B um aberto em $\widetilde{D}_g$, que é a união dos D_{ss^*} com $\sigma(s) = g$. Desta forma, podemos escrever B como união dos abertos $B_s := B \cap D_{ss^*}$ com $\sigma(s) = g$. Daí, $\widetilde{\theta}_s^{-1}(B)$ é a união dos $\widetilde{\theta}_g^{-1}(B_s) = \theta_s^{-1}(B_s)$, que são abertos já que cada θ_s é contínua. Logo, $\widetilde{\theta}_g^{-1}(B)$ é aberto e, portanto, $\widetilde{\theta}_g$ é contínua.

Definição 22. *Um semi-reticulado E é um semigrupo comutativo em que todo elemento é idempotente.*

Exemplo 7. Pela Proposição 6 todo semi-reticulado é um semigrupo inverso. Para todo semigrupo inverso S, o conjunto de seus idempotentes, $E(S)$, é um semi-reticulado.

Definição 23. *Seja E um semi-reticulado e considere o semi-reticulado $\{0,1\}$ com operação de multiplicação. Um* caracter *de E é um homomorfismo não nulo $\chi : E \to \{0,1\}$. O conjunto de todos os caracteres de E é denotado por $\widehat{E}$.*

Em particular, um caracter é uma função $f : E \to \{0,1\}$, então, como conjuntos,

$$\widehat{E} \subset \{0,1\}^E\,[2].$$

Munimos o conjunto $\{0,1\}^E$ com a topologia produto, em que $\{0,1\}$ tem a topologia discreta, ou seja, a topologia em $\{0,1\}^E$ é a da convergência pontual. Pelo Teorema de Tychonoff (MUNKRES, 2000), $\{0,1\}^E$ é um espaço topológico compacto Haudorff, pois é um produto de tais espaços.

Proposição 24. *Seja E um semi-reticulado. Dado $e \in E$, defina $U_e := \{\chi \in \widehat{E}; \chi(e) = 1\}$. Então a topologia produto sobre $\widehat{E}$, induzida*

[2] $\{0,1\}^E$ é o conjunto de todas as funções $f : E \to \{0,1\}$.

de $\{0,1\}^E$*, coincide com a menor topologia para a qual* U_e *é aberto e fechado para todo* $e \in E$*. Com esta topologia,* $\widehat{E}$ *é um espaço localmente compacto Hausdorff. Mais ainda, cada* U_e *é compacto (e aberto). Em particular, se* E *tem unidade, então* $\widehat{E} = U_1$ *é compacto.*

Demonstração. Como esta é a menor topologia para a qual U_e é aberto e fechado para todo $e \in E$, então é gerada pelos U_e e $V_e := \widehat{E} \setminus U_e$. Vejamos que esta topologia é a da convergência pontual.

Seja $\{\chi_i\}_i$ uma net em $\widehat{E}$ tal que $\chi_i \to \chi \in \widehat{E}$. Para todo aberto V tal que $\chi \in V$, existe i_0 tal que $\chi_i \in V$ para todo $i > i_0$. Em particular, para cada $e \in E$, χ pertence a U_e ou V_e. Se $\chi \in U_e$, então existe i_0 tal que $\chi_i \in U_e$ para todo $i > i_0$. Ou seja, se $\chi(e) = 1$, então $\chi_i(e) = 1$ para todo $i > i_0$, donde $\chi_i(e) \to \chi(e)$. Se $\chi \in V_e$, então existe i_0 tal que $\chi_i \in V_e$ para todo $i > i_0$. Ou seja, se $\chi(e) = 0$, então $\chi_i(e) = 0$ para todo $i > i_0$, donde $\chi_i(e) \to \chi(e)$. Isto mostra que se $\chi_i \to \chi$ em $\widehat{E}$, então $\chi_i(e) \to \chi(e)$ para todo $e \in E$.

Por outro lado, seja $\{\chi_i\}_i$ uma net em $\widehat{E}$ tal que $\chi_i(e) \to \chi(e)$ para todo $e \in E$.
Fixe $e \in E$. Se $\chi(e) = 1$, então existe i_0 tal que $\chi_i(e) = 1$ para todo $i > i_0$, ou seja, se $\chi \in U_e$, então $\chi_i \in U_e$ para todo $i > i_0$. Se $\chi(e) = 0$, então existe i_0 tal que $\chi_i(e) = 0$ para todo $i > i_0$, ou seja, se $\chi \in V_e$, então $\chi_i \in V_e$ para todo $i > i_0$.

Seja W aberto qualquer da base de $\widehat{E}$ tal que $\chi \in W$. Então W é intersecção finita de abertos da forma U_e e V_f, isto é,

$$W = U_{e_1} \cap ... \cap U_{e_k} \cap V_{e_{k+1}} ... \cap V_{e_n}.$$

Pelo que foi provado acima, existem $i_1, ..., i_n$ tais que $\chi_i \in U_{e_1}$ para todo $i > i_1$,..., $\chi_i \in V_{e_n}$ para todo $i > i_n$. Se i_0 é o elemento que é maior ou igual a $i_1, ..., i_n$, então $\chi_i \in W$ para todo $i > i_0$. Assim $\chi_i \to \chi$ em $\widehat{E}$.

Portanto, $\widehat{E}$ não é apenas subconjunto de $\{0,1\}^E$, mas também subespaço topológico. Deste fato, segue que $\widehat{E}$ é Hausdorff.

Para provar que $\widehat{E}$ é localmente compacto, seja $\widehat{E_0} := \widehat{E} \sqcup \{0\}$, em que 0 é o homomorfismo nulo de E em $\{0,1\}$.
Seja $\{\chi_i\}_i$ uma net em $\widehat{E_0}$ que converge para χ em $\{0,1\}^E$. Se $e, f \in E$, então

$$\chi(ef) = \lim \chi_i(ef) = \lim \chi_i(e)\chi_i(f) = \lim \chi_i(e) \lim \chi_i(f) = \chi(e)\chi(f).$$

O que mostra que χ é homomorfismo, logo $\chi \in \widehat{E_0}$. Logo $\widehat{E_0}$ é fechado em $\{0,1\}^E$ e, portanto, compacto. Como $\widehat{E} = \widehat{E_0} \setminus \{0\}$, segue que $\widehat{E}$ é localmente compacto.

Mais ainda, seja $\{\chi_i\}_i$ uma net em U_e que converge para χ em $\widehat{E}_0$. Então, $\chi_i(e) = 1$ para todo i, assim

$$1 = \lim_i \chi_i(e) = \chi(e).$$

Desta forma, $\chi \in U_e$ e U_e é fechado contido no compacto $\widehat{E}_0$. Portanto, U_e é compacto. Em particular, se E possui unidade, então $U_1 = \widehat{E}$ é compacto. ■

Exemplo 8. Sejam $\widehat{E}$ o conjunto dos caracteres de $E = E(S)$, U_{s^*s} e U_{ss^*} os conjuntos definidos na proposição acima. Para cada $s \in S$, seja $\beta_s : U_{s^*s} \to U_{ss^*}$ a aplicação dada por

$$\beta_s\left(\chi\right)\left(e\right) := \chi\left(s^* e s\right) \text{ para } \chi \in U_{s^*s} \text{ e } e \in E.$$

Estas aplicações estão bem definidas, visto que para $\chi \in U_{s^*s}$ dado, tem-se

$$\beta_s(\chi)(ss^*) = \chi(s^*ss^*s) = \chi(s^*s) = 1.$$

Donde $\beta_s(\chi) \in U_{ss^*}$. Vejamos que $\beta : S \to I(\widehat{E})$ dada por $s \mapsto \beta_s$ é uma ação topológica de S sobre $\widehat{E}$.

i. Para provar que $\beta_{st} = \beta_s \circ \beta_t$ vejamos, inicialmente, que $U_{t^*s^*st}$ é o domínio de $\beta_s \circ \beta_t$. Para isto, seja $\chi \in U_{t^*s^*st}$, então $\chi(t^*s^*st) = 1$. Sabe-se que $t^*s^*st = t^*s^*stt^*t$, com isto

$$1 = \chi(t^*s^*st) = \chi(t^*s^*stt^*t) = \chi(t^*s^*st)\chi(t^*t) = 1\chi(t^*t) = \chi(t^*t).$$

Logo, $\chi \in U_{t^*t}$. Mais ainda, $\beta_t(\chi)(s^*s) = \chi(t^*s^*st) = 1$, donde $\beta_t(\chi) \in U_{s^*s}$. Por outro lado, se $\chi \in \widehat{E}$ é tal que $\chi \in U_{t^*t}$ e $\beta_t(\chi) \in U_{s^*s}$, então $1 = \beta_t(\chi)\left(s^*s\right) = \chi(t^*s^*st)$, logo $\chi \in U_{t^*s^*st}$. Isto mostra que β_{st} e $\beta_s \circ \beta_t$ tem o mesmo domínio.

Além disso, se $\chi \in U_{t^*s^*st}$ e $e \in E$, então

$$\beta_{st}\left(\chi\right)\left(e\right) = \chi\left(\left(st\right)^* est\right) = \chi\left(t^*s^*est\right) = \beta_t\left(s^*es\right) = \beta_s \circ \beta_t(e)$$

Portanto, $\beta_{st} = \beta_s \circ \beta_t$.

ii. Claro que $\bigcup_{s\in S} U_{s^*s} \subseteq \widehat{E}$. Por outro lado, se $\chi \in \widehat{E}$, sabe-se que existe $e \in E$ tal que $\chi(e) = 1$. Mas $e = s^*s$ para algum $s \in S$, donde $\chi\left(s^*s\right) = 1$ e $\chi \in U_{s^*s} \subseteq \bigcup_{s\in S} U_{s^*s}$.

iii. Pela proposição acima, já sabemos que cada U_{s^*s} é aberto. Para a continuidade de cada β_s, seja $\{\chi_i\}_i$ uma net em U_{s^*s} que converge para χ. Então $\chi_i(e) \to \chi(e)$ para todo $e \in E$. Em particular, $s^*es \in E$, então

$$\chi_i(s^*es) \to \chi(s^*es) \text{ para todo } e \in E.$$

Ou seja, $\beta_s(\chi_i)(e) \to \beta_s(\chi)(e)$ para todo $e \in E$. Logo $\beta_s(\chi_i) \to \beta_s(\chi)$ e, portanto, β_s é contínua.

Portanto, β é uma ação topológica de S sobre $\widehat{E}$.

2.1.2 Ações de semigrupos sobre semi-reticulados

Definição 25. *Seja E um semi-reticulado. Um* ideal *de E é um conjunto $I \subset E$ tal que para quaisquer $e \in E$ e $f \in I$, tem-se que $ef \in I$.*

Definição 26. *Uma ação de um semigrupo inverso S sobre um semi-reticulado E é uma ação θ de S sobre E tal que cada θ_s preserva a multiplicação e o seu domínio é um ideal de E.*

Exemplo 9. Sejam S um semigrupo inverso E-unitário e $E := E(S)$. Defina, para cada $f \in E$, $E_f := Ef = fE = \{e \in E : e \leq f\}$ o ideal principal[3] gerado por f. Para $s \in S$, seja

$$\theta_s : E_{s^*s} \to E_{ss^*}$$

$$e \mapsto \theta_s(e) = ses^*.$$

Note que θ_s está bem definida, pois se $e \in E_{s^*s}$, então $e = es^*s$ e, assim, $\theta_s(e) = ses^* = ses^*ss^*$ que pertence a E_{ss^*}. Vejamos que θ é uma ação de S sobre o semi-reticulado $E(S)$ no sentido da Definição 26:

i. Para provar que $\theta_{st} = \theta_s \circ \theta_t$, inicialmente, vamos verificar que os domínios dessas aplicações são iguais. Seja $e \in E_{t^*s^*st}$. Então sabemos que $e = et^*s^*st$, logo

$$\begin{aligned} tet^* &= t(et^*s^*st)t^* \\ &= te(t^*tt^*)s^*s \\ &= tet^*s^*s. \end{aligned}$$

[3]Um ideal é principal se é gerado por um único elemento.

O que mostra que $\theta_t(e) = tet^* \in E_{s^*s}$, com isto

$$\begin{aligned} e &= et^*s^*st \\ &= e\left(t^*tt^*\right)s^*st \\ &= t^*\left(tet^*s^*s\right)t \\ &= t^*\left(tet^*\right)t \\ &= et^*tt^*t = et^*t. \end{aligned}$$

Donde $e \in E_{t^*t}$. Logo, e pertence ao domínio de $\theta_s \circ \theta_t$. Por outro lado, se $e \in E_{t^*t}$ e $\theta_t(e) = tet^* \in E_{s^*s}$, então $e = et^*t$ e $tet^* = tet^*s^*s$ e assim

$$t^*\left(tet^*\right)t = t^*\left(tet^*s^*s\right)t.$$

Usando a comutatividade de $E(S)$, vale o seguinte

$$et^*tt^*t = et^*tt^*s^*st \Rightarrow et^*t = et^*s^*st.$$

Como $e = et^*t$,

$$e = et^*s^*st.$$

Logo, $e \in E_{t^*s^*st}$ e, portanto, θ_{st} e $\theta_s \circ \theta_t$ possuem o mesmo domínio.

Por fim, para $e \in E_{t^*s^*st}$, tem-se

$$\begin{aligned} \theta_{st}(e) &= ste\,(st)^* = stet^*s^* \\ &= \theta_s\left(tet^*\right) = \theta_s\left(\theta_t(e)\right) = \theta_s \circ \theta_t(e). \end{aligned}$$

O que mostra que $\theta_{st} = \theta_s \circ \theta_t$.

ii. Se $e \in E(S)$, sabemos que $e \in E_e$ e portanto $e \in \bigcup_{s\in S} E_{ss^*}$. Desta forma, a união dos domínios de todos os θ_s é E.

iii. Para $e, f \in D_{s*s}$, temos

$$\begin{aligned} \theta_s(ef) &= sefs^* = sefs^*sefs^* = sees^*sffs \\ &= ses^*sfs^* = \theta_s(e)\theta_s(f) \end{aligned}$$

Logo, θ é uma ação de S sobre o semi-reticulado $E(S)$.

2.2 CARACTERIZAÇÃO DE SEMIGRUPOS INVERSOS E-UNITÁRIOS

Para dar continuidade a leitura deste trabalho, recomenda-se a leitura do Apêndice A. O objetivo agora é mostrar que todo semigrupo inverso $E-$unitário pode ser escrito como um produto semidireto de um semi-reticulado E por um grupo G. Para isso vejamos a definição de ação parcial de um grupo G sobre um semi-reticulado E.

Definição 27. *Sejam E um semi-reticulado e G um grupo com unidade 1. Uma ação parcial de G sobre E é um par*

$$\theta = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$$

em que $\{D_g\}_g$ é uma coleção de subconjuntos de E, e $\{\theta_g\}_g$ é uma coleção de aplicações

$$\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

i. *$D_1 = E$ e θ_1 é a identidade;*

ii. *$\theta_g \circ \theta_h \subset \theta_{gh}$ para quaisquer $g, h \in G$ no sentido que o domínio de $\theta_g \circ \theta_h$, $\theta_{h^{-1}}(D_h \bigcap D_{g^{-1}})$, está contido em $D_{(gh)^{-1}}$ e, neste conjunto, as funções são iguais.*

iii. *Para todo $g \in G$ o conjunto D_g é um ideal de E e cada θ_g preserva a multiplicação.*

Observação 11. Se S é um semigrupo inverso E-unitário e θ é a ação de S sobre o semi-reticulado $E := E(S)$ do Exemplo 9, então esta ação produz uma ação parcial de $G(S)$ sobre o semi-reticulado E. De fato, pela Proposição 20, a ação de S sobre E do Exemplo 9 produz uma ação parcial de $G := G(S)$ sobre E (como conjunto).

Como cada D_g, definido naquela proposição, é uma união de ideais de E, este conjunto também é um ideal.

Se $e, f \in D_{g^{-1}}$, existem $s, t \in S$, com $\sigma(s) = \sigma(t) = g$, tais que $e \in D_{s^*s}$ e $f \in D_{t^*t}$. Sabendo que D_{s^*s} e D_{t^*t} são ideais de E, o elemento $ef \in D_{s^*s} \cap D_{t^*t} = D_{s^*st^*t} = D_{t^*ts^*st^*t} = D_{(st^*t)^*st^*t}$. Mais ainda, no Lema 15 e no Corolário 16 foi provado que $\sigma(st^*t) = \sigma(s) = \sigma(t) = g$, $st^*t = ts^*s$ e $s^*t = s^*st^*t$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\theta_g(ef) &= \theta_{st^*t}(ef) = (st^*t)ef(st^*t)^* \\
&= (st^*t)ef(ts^*s)^* = st^*tefs^*st^* = ses^*st^*tft^* \\
&= ses^*tft^* = \theta_s(e)\theta_t(f) = \theta_g(e)\theta_g(f).
\end{aligned}$$

O que mostra que θ_g preserva a multiplicação.

Definição 28. *Seja θ uma ação parcial de G sobre um semi-reticulado E. Definimos o* produto semidireto de E por G via θ, *como sendo o subconjunto de $E \times G$ definido por*

$$E \underset{\theta}{\rtimes} G := \{(e,g)\,;g \in G \ \ e \ e \in D_g\}.$$

No produto semidireto de E por G via θ, define-se uma operação de multiplicação da seguinte forma

$$(e,g)\cdot(f,h) = \left(\theta_g\left(\theta_g^{-1}(e)f\right), gh\right),$$

em que $g,h \in G$, $e \in D_g$ e $f \in D_h$.

Esta operação está bem definida, pois como $e \in D_g$, então $\theta_g^{-1}(e) \in D_{g^{-1}}$. Sabendo que $D_{g^{-1}}$ e D_h são ideais de E e que $f \in D_h$, segue que $\theta_g^{-1}(e)f \in D_{g^{-1}} \cap D_h$. Sendo assim, $\theta_g\left(\theta_g^{-1}(e)f\right) \in \theta_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)$, que está contido em D_{gh} pelo item i da Proposição 53 do Apêndice A.

Observação 12. Esta operação é associativa, pois para $h \in G$, $e \in D_h$ e $d, f \in E$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned}
\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(de)f\right) &= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(dee)f\right) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(de)\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(de)\right)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right) = de\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\\
&= d\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)\right)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\\
&= d\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\\
&= d\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right).
\end{aligned}$$

Sejam $(d,g),(e,h),(f,k) \in E \rtimes G$. Como, em particular, $\theta_{g^{-1}}(e) \in E$, vale que

$$\theta_{g^{-1}}(d)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right).$$

Mais ainda, $\theta_{g^{-1}}(d)e = \theta_{g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)$, pois $\theta_{g^{-1}}(d)e \in D_{g^{-1}}$. Com isto,

$$\begin{aligned}
\theta_{g^{-1}}(d)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right) &= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\theta_g\left[\theta_{g^{-1}}(d)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\right] &= \theta_g\left[\theta_h\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right)\right] \\
&= \theta_{gh}\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)f\right).
\end{aligned}$$

Provado isso, tem-se

$$\begin{aligned}
\left[(d,g)(e,h)\right](f,k) &= \left(\theta_{gh}\left[\theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(d)e\right)\right)f\right], ghk\right) \\
&= \left(\theta_g\left[\theta_{g^{-1}}(d)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(e)f\right)\right], ghk\right) \\
&= (d,g)\left[(e,h)(f,k)\right].
\end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação em $E \rtimes G$ é associativa e, assim, este conjunto é um semigrupo.

Teorema 29. *Se E é um semi-reticulado, G é um grupo e α é uma ação parcial de G sobre E, então*

$$S := E \underset{\alpha}{\rtimes} G$$

é um semigrupo inverso E-unitário. Ademais, o grupo imagem homomorfa máxima e o semi-reticulado dos idempotentes de S são isomorfos a G e E, respectivamente.

Demonstração. i. Para determinar quais os idempotentes deste semigrupo, suponha que $(e,g) \in E(S)$, então

$$(e,g) = (e,g)^2 = \left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\,e\right), g^2\right).$$

Neste caso, $g^2 = g$, logo $g = 1$. Para todo elemento $s = (e,1) \in S$, vale que

$$(e,1)^2 = \left(\theta_1\left(\theta_1(e)e\right), 1\right) = \left(\theta_1\left(e^2\right), 1\right) = (e,1).$$

Portanto,

$$E(S) = \{(e,g) \in S; g = 1\}.$$

Além do mais, seja

$$\varphi : E(S) \to E$$

$$(e,1) \mapsto \varphi(e,1) = e.$$

Dados $(e,1),(f,1)\in E(S)$, tem-se

$$\begin{aligned}\varphi\left((e,1)(f,1)\right) &= \varphi\left(\theta_1\left(\theta_1(e)f\right),1\right)=\varphi\left(ef,1\right)\\ &= ef=\varphi(e,1)\varphi(f,1).\end{aligned}$$

Assim sendo, φ é homomorfismo. Como $E=D_1$, φ é sobrejetiva e a injetividade é imediata. Logo, $E(S)\cong E$ e, em particular, $E(S)$ é comutativo.

ii. Seja $s=(e,g)\in S$ qualquer. Observe que $t:=\left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)$ satisfaz a Equação 2.1:

$$\begin{aligned}sts &= (e,g)\left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)(e,g)\\ &= \left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\theta_{g^{-1}}(e)\right),gg^{-1}\right)(e,g)\\ &= \left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\right),1\right)(e,g)\\ &= (e,1)(e,g)=\left(\theta_1\left(\theta_1(e)e\right),1g\right)\\ &= \left(\theta_1(ee),g\right)=(e,g)=s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}tst &= \left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)(e,g)\left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)\\ &= \left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\theta_{g^{-1}}(e)\right),gg^{-1}\right)\\ &= \left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\right),1\right)\\ &= \left(\theta_{g^{-1}}(e),g^{-1}\right)(e,1)=\left(\theta_{g^{-1}}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(e)\right)e\right),g^{-1}1\right)\\ &= \left(\theta_{g^{-1}}\left(ee\right),g^{-1}\right)=\left(\theta_{g^{-1}}\left(e\right),g^{-1}\right)=t\end{aligned}$$

Como os idempotentes de S comutam e para cada $s\in S$, existe um elemento $s^*:=t$ tal que $ss^*s=s$ e $s^*ss^*=s^*$, pela Proposição 6, segue que S é semigrupo inverso.

iii. Vejamos quais são as classes de equivalência na relação $\sim$.

$$(x,g)\sim(y,h)\Leftrightarrow\exists\ e\in E \text{ tal que } (e,1)(x,g)=(e,1)(y,h)$$

$$\Leftrightarrow\left(\theta_1\left(\theta_1(e)x\right),1g\right)=\left(\theta_1\left(\theta_1(e)y\right),1h\right) \text{ para algum } e\in E$$

$$\Leftrightarrow (ex,g)=(ey,h) \text{ para algum } e\in E$$

$$\Leftrightarrow ex=ey \text{ para algum } e\in E \text{ e } g=h.$$

Mas para quaisquer $x,y\in E$, existe $e\in E$ tal que $ex=ey$. Portanto, a classe de equivalência de (x,g) é o conjunto $D_g\times\{g\}$. Desta forma, a aplicação $D_g\times\{g\}\mapsto g$ está bem definida e é um isomorfismo entre $G(S)$ e G.

iv. Usando o isomorfismo $G(S) \cong G$ descrito acima, a aplicação quociente $\sigma\colon S \to G(S)$ corresponde a projeção $S \to G$. Assim os elementos do núcleo deste homomorfismo são os pares $(e, 1)$ com $e \in E$, que são exatamente os idempotentes de S. Logo S é E-unitário.

■

Reciprocamente, temos o próximo teorema.

Teorema 30. *Sejam S um semigrupo inverso E-unitário, θ a ação de S sobre $E := E(S)$ do Exemplo 9 e $\widetilde{\theta}$ a ação parcial induzida de $G := G(S)$ sobre E. Então,*

$$S \cong E \underset{\widetilde{\theta}}{\rtimes} G.$$

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : S &\to E \underset{\widetilde{\theta}}{\rtimes} G \\ s &\mapsto (ss^*, \sigma(s)) . \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida, uma vez que $ss^* \in E_{ss^*} = \{e \in E(S); e \leqslant ss^*\}$.

i. φ é homomorfismo: Inicialmente, observe que se $\sigma(s) = g$, então $\sigma(s^*) = \sigma(s)^{-1} = g^{-1}$, além disso,

$$\begin{aligned} \alpha_g\left(\widetilde{\theta}_{g^{-1}}\left(ss^*\right)tt^*\right) &= \widetilde{\theta}_g\left(s^*ss^*s^{**}tt^*\right) \\ &= \widetilde{\theta}_g\left(s^*ss^*stt^*\right) \\ &= \widetilde{\theta}_g\left(s^*stt^*\right) \\ &= s\left(s^*stt^*\right)s^* = stt^*s^*. \end{aligned}$$

Sabendo disto,

$$\begin{aligned} \varphi\left(st\right) &= \left(st\left(st\right)^*, \sigma(st)\right) \\ &= \left(stt^*s^*, \sigma(s)\sigma(t)\right) \\ &= \left(\alpha_g\left(\alpha_{g^{-1}}\left(ss^*\right)tt^*\right), \sigma(s)\sigma(t)\right) \\ &= \left(ss^*, \sigma(s)\right)\left(tt^*, \sigma(t)\right) = \varphi(s)\varphi(t). \end{aligned}$$

ii. Sejam $s, t \in S$ tais que $\varphi(s) = \varphi(t)$, isto é, $ss^* = tt^*$ e $\sigma(s) = \sigma(t)$.

Pelo Lema 15, segue que

$$s^* = s^*ss^* = s^*tt^* = t^*ss^* = t^*tt^* = t^*.$$

Donde, $s = t$ e φ é injetiva.

iii. Se $(e,g) \in E \underset{\alpha}{\rtimes} G$, então $e \in \bigcup_{\sigma(s)=g} E_{ss^*} = \widetilde{D}_g$, desta forma, $e = ess^*$ para algum $s \in S$ tal que $\sigma(s) = g$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\varphi(es) &= \left(es\,(es)^*, \sigma(es)\right) = (ess^*e, \sigma(e)\sigma(s)) \\
&= (ess^*, \sigma(s)) = (e,g).
\end{aligned}$$

Isto mostra que φ é sobrejetiva. Portanto, φ é isomorfismo entre S e $E \underset{\widetilde{\theta}}{\rtimes} G$. ■

Provamos, assim, que existe uma correspondência entre semigrupos inversos E-unitários e produtos semidiretos de grupos por semi-reticulados. Além disso, provamos que dado um par (E,G), em que E é um semi-reticulado e G é um grupo, existe um semigrupo inverso E-unitário S tal que E é isomorfo ao conjunto dos idempotentes de S e G é isomorfo ao grupo imagem homomorfa máxima de S, pois sempre podemos considerar a ação trivial de G sobre E.

Exemplo 10. Sejam E um semi-reticulado e G um grupo. Podemos considerar a ação parcial trivial de G sobre E. Então semigrupo inverso dado pelo produto semidireto de E por G via esta ação, $S := E \rtimes G$, coincide com o conjunto $E \times G$ com operação de multiplicação definida entrada a entrada. Ademais, $E(S) \cong E$ e $G(S) \cong G$.

Exemplo 11. Seja G um grupo com unidade 1. Seja E o conjunto definido por todos os subconjuntos finitos de G que contém 1. Neste conjunto defina $\cdot : E \times E \to E$ por $A \cdot B = A \cup B$ para $A, B \in E$. É claro que esta operação está bem definida e, além disso,

$$A^2 = A \cup A = A \text{ e } AB = A \cup B = B \cup A = BA.$$

Dessa forma, E é um semi-reticulado. Ademais, $\{1\}$ é o elemento neutro de E, pois todo elemento de E contém $\{1\}$.
Para cada $g \in G$, defina $D_g := \{A \in E; g \in A\}$ e $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$, em que $\theta_g(A) = gA$. Note que,

i. $D_1 = E$ e $\theta_1(A) = 1A = A$ para todo $A \in E$.

ii. Seja $A \in D_{h^{-1}}$ tal que $\theta_h(A) \in D_{g^{-1}}$. Então, $g^{-1} \in hA$, ou seja, existe $a \in A$ tal que $g^{-1} = ha$, mas isto implica que $h^{-1}g^{-1} = h^{-1}ha = a \in A$. O que mostra que o domínio de $\theta_g\theta_h$ está contido em $D_{h^{-1}g^{-1}}$. Visto isto, temos

$$\theta_g\theta_h(A) = \theta_g(hA) = ghA = \theta_{gh}(A).$$

iii. Se $A \in D_g$ e $B \in E$, então $AB = A \cup B$ é finito, contém 1 e g, donde pertence a D_g. Logo, D_g é ideal de E.

iv. Para $A, B \in D_{g^{-1}}$,

$$\begin{aligned} \theta_g(AB) &= g(AB) = g(A \cup B) = gA \cup gB \\ &= \theta_g(A) \cup \theta_g(B) = \theta_g(A)\theta_g(B) \end{aligned}$$

Logo, cada θ_g é homomorfismo entre $D_{g^{-1}}$ e D_g.

Com isto, temos uma ação parcial θ de G sobre o semi-reticulado E. Seja $E \rtimes G$ o produto semidireto de E por G via θ. Considere a aplicação $\psi : S(G) \to E \rtimes G$ definida por

$$\varepsilon_A[g] \mapsto (A, g)$$

Como a forma normal de cada $\alpha \in S(G)$ é única, segue que ψ é injetiva. Pela forma como ψ foi definida, é imediato que ela é sobrejetiva.
Além disso, sejam $\alpha = \varepsilon_A g, \beta = \varepsilon_B h \in S(G)$, em que A e B são subconjuntos finitos de G contendo g e h, respectivamente, além da unidade 1. Então,

$$\begin{aligned} \psi(\alpha)\psi(\beta) = (A, g)(B, h) &= \left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(A)\,B\right), gh\right) \\ &= \left(\theta_g\left(g^{-1}A \cup B\right), gh\right) \\ &= \left(gg^{-1}A \cup gB, gh\right) = (A \cup gB, gh). \end{aligned}$$

Vimos no exemplo 2, que $\varepsilon_{gB}[g] = [g]\varepsilon_B$, usando isto, temos

$$\begin{aligned} \psi(\alpha\beta) &= \psi(\varepsilon_A[g]\varepsilon_B[h]) = \psi(\varepsilon_A\varepsilon_{gB}[g][h]) \\ &= \psi\left(\varepsilon_A\varepsilon_{gB}[g][g^{-1}gh]\right) = \psi\left(\varepsilon_A\varepsilon_{gB}[g][g^{-1}][gh]\right) \\ &= \psi(\varepsilon_A\varepsilon_{gB}[gh]) = (A \cup gB, gh). \end{aligned}$$

Desta forma, $\psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta)$. Logo, $S(G) \cong E \rtimes G$. Este produto semidireto é a *Expansão de Birget-Rhodes do grupo G*.
Pelo Teorema 29, segue que $S(G)$ é semigrupo inverso $E-$unitário.

Além disso, o grupo imagem homomorfa máxima de $S(G)$ é o próprio G e E é o conjunto dos idempotentes de $S(G)$ (a menos de isomorfismo).

3 A C^*-ÁLGEBRA DE UM SEMIGRUPO INVERSO

O objetivo deste trabalho é estudar a C^*-álgebra de um semigrupo inverso E-unitário. Para isso, neste capítulo faremos a construção da C^*-álgebra de um semigrupo inverso S. Usaremos como referência o livro de (PATERSON, 2012).

Fixe S um semigrupo inverso. Seja $\mathbb{C}[S]$ o espaço vetorial das funções $a : S \to \mathbb{C}$ de suporte finito, ou seja, tais que o conjunto $\{s \in S; a(s) \neq 0\}$ é finito. Se $a_s := a(s)$, então podemos identificar a função a como a soma formal finita da forma

$$a = \sum_{s \in S} a_s s.$$

Em particular, dado $s \in S$ o elemento $s := 1 \cdot s \in \mathbb{C}[S]$ representa a função característica de $\{s\}$ e S é uma base para $\mathbb{C}[S]$.

Sejam $a = \sum_{s \in S} a_s s$, $b = \sum_{s \in S} b_s s \in \mathbb{C}[S]$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Neste conjunto, são definidas operações de soma e multiplicação por escalar como

$$a + b := \sum_{s \in S} (a_s + b_s) s \quad \text{e} \quad \lambda a := \sum_{s \in S} (\lambda a_s) s.$$

Mais ainda, sejam $a = \sum_{s \in S} a_s s$ e $b = \sum_{t \in S} b_t t$ em $\mathbb{C}[S]$. Considere a operação de multiplicação dada por

$$ab := \sum_{s \in S} a_s s \cdot \sum_{t \in S} b_t t = \sum_{s,t \in S} a_s b_t st.$$

Observação 13. Sejam $\sum_{s \in S} a_s s$, $\sum_{t \in S} a_t t$ e $\sum_{r \in S} a_r r$ elementos de $\mathbb{C}[S]$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{s \in S} a_s s \cdot \sum_{t \in S} a_t t \right) \cdot \sum_{r \in S} a_r r &= \sum_{s,t \in S} a_s a_t st \cdot \sum_{r \in S} a_r r \\
&= \sum_{s,t,r \in S} (a_s a_t)\, a_r\, (st)\, r \\
&= \sum_{s,t,r \in S} a_s\, (a_t a_r)\, s\, (tr) \\
&= \sum_{s \in S} a_s s \cdot \left(\sum_{t \in S} a_t t \cdot \sum_{r \in S} a_r r \right).
\end{aligned}$$

Portanto, $\cdot : \mathbb{C}[S] \times \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[S]$ é associativa e, assim, $\mathbb{C}[S]$ é uma álgebra.

Defina uma aplicação $* : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[S]$ por

$$\left(\sum_{s\in S} a_s s\right)^* := \sum_{s\in S} \bar{a_s} s^*.$$

Observação 14. Sejam $\sum_{s\in S} a_s s$ e $\sum_{t\in S} a_t t$ elementos de $\mathbb{C}[S]$. Então,

i.
$$\left(\sum_{s\in S} a_s s\right)^{**} = \left(\sum_{s\in S} \bar{a_s} s^*\right)^* = \sum_{s\in S} \bar{\bar{a_s}} s^{**} = \sum_{s\in S} a_s s.$$

ii.

$$\begin{aligned}\left(\sum_{s\in S} a_s s \cdot \sum_{t\in S} a_t t\right)^* &= \left(\sum_{s,t\in S} a_s a_t st\right)^* \\ &= \sum_{s,t\in S} \overline{a_s a_t}\,(st)^* = \sum_{s,t\in S} \overline{a_t a_s} t^* s^* \\ &= \left(\sum_{t\in S} a_t t\right)^* \cdot \left(\sum_{s\in S} a_s s\right)^*.\end{aligned}$$

Logo, esta aplicação é uma involução em $\mathbb{C}[S]$. Portanto, $\mathbb{C}[S]$ é uma $*$-álgebra.

Definição 31. *Uma representação de S em um espaço de Hilbert H é um homomorfismo de semigrupos $\varphi\colon S \to B(H)$*[1] *que preserva involução no sentido que $\varphi(s^*) = \varphi(s)^*$, o operador adjunto de $\varphi(s) \in B(H)$. Uma representação de uma $*$-álgebra B em um espaço de Hilbert H é um $*$-homomorfismo $\pi : B \to B(H)$. Uma representação φ de S (ou B) em H é dita não-degenerada se*

$$D := span\,\{\varphi(s)\xi; s \in S, \xi \in H\}$$

é denso em H.

[1] $B(H)$ é o espaço dos operadores lineares limitados de H. Este espaço é uma C^*-álgebra. Mais ainda, toda C^*-álgebra é $*$-isomorfa a alguma sub-C^*-álgebra de $B(H)$ para algum espaço de Hilbert H.

Proposição 32. *Seja φ uma representação de um semigrupo inverso S sobre um espaço de Hilbert H. São equivalentes:*

i. *φ é uma representação não-degenerada de S.*

ii. *Se $\langle \varphi(s)(\xi), x\rangle = 0$ para quaisquer $s \in S, \xi \in H$, então $x = 0$.*

iii. *Se $\varphi(s)(x) = 0$ para todo $s \in S$, então $x = 0$.*

Demonstração. i $\Rightarrow$ ii Se $x \in H$ é tal que $\langle \varphi(s)(\xi), x\rangle = 0$ para todo $s \in S, \xi \in H$, então $x \in D^{\perp}$, mas

$$D^{\perp\perp} = \overline{D}.$$

Como D é denso em H, segue que $D^{\perp} = \{0\}$, logo $x = 0$.

ii $\Rightarrow$ i Para provar que

$$\overline{\text{span}\varphi(S)(\xi)} = H,$$

seja $x \in D^{\perp}$. Então

$$\langle \varphi(s)(\xi), x\rangle = 0 \text{ para todo } s \in S, \xi \in H.$$

Por hipótese, segue que $x = 0$. Daí

$$D^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \overline{D} = D^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

O que mostra que D é denso em H, logo φ é representação de S.

i $\Rightarrow$ iii Seja $x \in H$ tal que $\varphi(s)(x) = 0$ para todo $s \in S$. Então

$$\langle \varphi(s)(x), \xi\rangle = 0 \text{ para quaisquer } s \in S, \xi \in H.$$

Assim,

$$\langle x, \varphi(s)^*(\xi)\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, \varphi(s^*)(\xi)\rangle = 0 \ \forall s \in S, \xi \in H.$$

Pela definição de produto interno,

$$\langle \varphi(s^*)(\xi), x\rangle = 0 \text{ para quaisquer } s \in S, x \in H.$$

Como φ é representação de S segue que $x = 0$.

iii $\Rightarrow$ i Se $x \in D^{\perp}$, então

$$\langle \varphi(s)(\xi), x\rangle = 0 \text{ para quaisquer } s \in S, \xi \in H.$$

Logo,

$$\langle \xi, \varphi(s^*)(x) \rangle = 0 \text{ para quaisquer } s \in S, \xi \in H.$$

Em particular, para $\xi = \varphi(s^*)(x)$, temos

$$0 = \langle \varphi(s^*)(x), \varphi(s^*)(x) \rangle = \|\varphi(s^*)(x)\| \Rightarrow \varphi(s^*)(x) = 0.$$

Por hipótese, segue que $x = 0$, donde $D^\perp = \{0\}$ e $\overline{D} = H$. O que mostra que φ é representação não-degenerada de S.

■

Observação 15. Se π é uma representação de uma $*$-álgebra B em H, as mesmas 3 afirmações são equivalentes trocando-se S por B e $s \in S$ por $b \in B$. A demonstração deste fato também é a mesma.

Proposição 33. *Seja H um espaço de Hilbert. Então existe uma bijeção entre o conjunto das representações de S em H e o conjunto das representações de $\mathbb{C}[S]$ em H dada da seguinte forma: Se $\varphi\colon S \to B(H)$ é uma representação de S em H, então a representação de $\mathbb{C}[S]$ associada a φ é a aplicação $\widetilde{\varphi}(\sum a_s s) = \sum a_s \varphi(s)$. Mais ainda, φ é não-degenerada se, e somente se, $\widetilde{\varphi}$ é não-degenerada.*

Demonstração. Sejam R_S e $R_{\mathbb{C}[S]}$ os conjuntos das representações de S e $\mathbb{C}[S]$, respectivamente, em um espaço de Hilbert H. Seja $\phi : R_S \to R_{\mathbb{C}[S]}$ dada por $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, em que

$$\widetilde{\varphi}(\sum a_s s) = \sum a_s \varphi(s).$$

Esta aplicação está bem definida, pois uma combinação linear finita de operadores lineares limitados é novamente um operador linear limitado.

Sejam φ e π representações de S em H, tais que $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\pi}$. Se $a = \sum_{s \in S} a_s s \in \mathbb{C}[S]$, então

$$\widetilde{\varphi}(\sum a_s s) = \widetilde{\pi}(\sum a_s s).$$

Em particular, para todo $s \in S$, $\varphi(s) = \widetilde{\varphi}(1 \cdot s) = \widetilde{\pi}(1 \cdot s) = \pi(s)$. Logo, $\varphi = \pi$ e ϕ é injetiva.

Seja π uma representação de $\mathbb{C}[S]$ em H. Definimos uma aplicação φ dada por $\varphi(s) := \pi(1 \cdot s)$, que preserva a multiplicação e involução e, portanto, é uma representação de S. Mais ainda, $\widetilde{\varphi} = \pi$. Portanto, ϕ é sobrejetiva.

Além disso, seja $\varphi : S \to B(H)$ uma representação não-degenerada de S. Suponha que $\widetilde{\varphi}(a)(x) = 0$ para $a \in \mathbb{C}[S]$. Então, em particular,

$$\varphi(s)(x) = 0 \text{ para todo } s \in S.$$

Logo, pela Proposição 32, segue que $x = 0$ e pela observação anterior, $\widetilde{\varphi}$ é não-degenerada. Por outro lado, seja $\varphi : \mathbb{C}[S] \to B(H)$ uma representação não-degenerada de $\mathbb{C}[S]$. Suponha que

$$\varphi(s)(x) = 0$$

para todo $s \in S$. Então, para todo $a = \sum_{s \in S} a_s s \in \mathbb{C}[S]$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(a)(x) &= \varphi\left(\sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s s\right)(x) = \sum_{s \in S}^{\text{finito}} \left(a_s \varphi(s)\right)(x) \\ &= \sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s \varphi(s)(x) = \sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s 0 = 0 \end{aligned}$$

Pela observação acima, segue que $x = 0$ e, portanto, a representação de S associada a φ é não-degenerada.

■

Observação 16. Seja $\varphi : S \to B\,(H)$ uma representação de S em um espaço de Hilbert H. Então $\varphi(e)$ é uma projeção sempre que $e \in E(S)$. Ademais, se $e, f \in E(S)$ satisfazem $e \leqslant f$, então $\varphi(e) \leqslant \varphi(f)$, lembrando que se $P, Q \in B(H)$ são projeções, então $P \leq Q$ significa que $PQ = P$.

Para provar isto, sejam $\varphi : S \to B\,(H)$ uma representação de S em um espaço de Hilbert H e $e \in E(S)$. Como φ é $*$-homomorfismo,

$$\varphi(e)^* = \varphi(e^*) = \varphi(e)$$

$$\varphi(e)^2 = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

Provando que $\varphi(e)$ é autoadjunto e idempotente, logo é projeção. Em particular, o operador $\varphi(s)$ é uma isometria parcial para todo $s \in S$, pois como φ é um $*$-homomorfismo, então

$$\varphi(s)\varphi(s)^* = \varphi(ss^*).$$

Sabendo que $ss^* \in E(S)$, $\varphi(ss^*)$ é uma projeção e, pela equação acima, $\varphi(s)$ é uma isometria parcial. Inda, como $B(H)$ é uma C^*-álgebra, vale

que
$$\|\varphi(s)\|_{B(H)}^2 = \|\varphi(s)^*\varphi(s)\|_{B(H)} \leqslant 1.$$
Portanto, $\|\varphi(s)\|_{B(H)} \leqslant 1$.

Se $e, f \in E(S)$ são tais que $e = ef$, então
$$\varphi(e) = \varphi(ef) = \varphi(e)\varphi(f)$$
Portanto, $\varphi(e) \leqslant \varphi(f)$ em $B(H)$.

Definição 34. *Uma C^*-seminorma sobre uma $*$-álgebra B é uma aplicação $p : B \to \mathbb{R}_+$ que é uma seminorma e, além disso,*

i. $p(ab) \leqslant p(a)p(b)$

ii. $p(a^*) = p(a)$

iii. $p(a^*a) = p(a)^2$

Sejam B uma $*$-álgebra e $p : B \to \mathbb{R}$ uma C^*-seminorma. Então, o conjunto
$$I := \{b \in B; p(b) = 0\}$$
é um ideal autoadjunto de B. Além disso, p se fatora a uma C^*-norma sobre o quociente B/I e o completamento deste quociente com esta C^*-norma é, portanto, uma C^*-álgebra.

Algumas $*$-álgebras possuem uma C^*-seminorma máxima, tais como $*$-álgebras de Banach. Mais ainda, em muitos casos, a C^*-seminorma máxima já é uma C^*-norma. Este é o caso para a nossa álgebra de interesse: $\mathbb{C}[S]$. Isto segue do seguinte resultado:

Proposição 35. *Sejam S um semigrupo inverso e $a = \sum_{s\in S} a_s s \in \mathbb{C}[S]$. Então para toda C^*-seminorma p sobre $\mathbb{C}[S]$, temos $p(a) \leqslant \|a\|_1 := \sum_{s\in S} |a_s|$. Em particular,*
$$\|a\|_u := \sup\{p(a); p \text{ é uma } C^*\text{-seminorma sobre } \mathbb{C}[S]\}$$
é a maior C^*-seminorma sobre $\mathbb{C}[S]$.

Demonstração. Seja $p : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{R}$ uma C^*-seminorma. Observe que se $e \in E(S)$ é visto como o elemento $e = 1 \cdot e$ de $\mathbb{C}[S]$, então
$$p(e) = p(e^2) = p(e^*e) = p(e)^2.$$
Desta forma, $p(e) = 1$ ou $p(e) = 0$. Em particular, $s^*s \in E(S)$ para todo $s \in S$. Logo,
$$p(s)^2 = p(s^*s) \leqslant 1.$$

Assim, $p(s) \leqslant 1$. Provado isto, para $a = \sum_{s\in S} a_s s \in C[S]$, temos

$$p(a) = p(\sum_{s\in S} a_s s) \leqslant \sum_{s\in S} p(a_s s) = \sum_{s\in S} |a_s| p(s) \leqslant \sum_{s\in S} |a_s| = \|a\|_1 .$$

Portanto, para qualquer C^*-seminorma $p : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{R}$, tem-se $p(a) \leqslant \|a\|_1$.

Com isto, garantimos que o conjunto

$$\{p(a); p \text{ é } C^*\text{-seminorma sobre } \mathbb{C}[S]\}$$

é limitado em $\mathbb{R}$. Deste modo, $\|\cdot\|_u : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{R}$ definida no enunciado desta proposição está bem definida. Além disso, pelas propriedades de supremo esta aplicação é uma C^*-seminorma sobre $\mathbb{C}[S]$. ■

Exemplo 12. No espaço $\mathbb{C}[S]$, considere o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[S] \times \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[S]$ dado por

$$\left(\sum_{s\in S} a_s s, \sum_{s\in S} b_s s\right) \mapsto \left\langle \sum_{s\in S} a_s s, \sum_{s\in S} b_s s \right\rangle := \sum_{s\in S} a_s \bar{b_s}.$$

Em particular,

$$\langle s, t \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } s = t \\ 0 & \text{se } s \neq t \end{cases}$$

Então S é uma base ortonormal de $\mathbb{C}[S]$.

Seja $l^2(S)$ o completamento de $\mathbb{C}[S]$ na norma que provém deste produto interno. Como produto interno é uma função contínua, podemos estedê-lo a $l^2(S)$ e, portanto, este é um espaço de Hilbert.

Seja $\gamma : S \to I(S)$ o homomorfismo de semigrupos da Proposição 17. Para cada $s \in S$ defina

$$\pi(s)(t) := \begin{cases} \gamma(s)(t) = st & \text{se } t \in D_{s^*s} \\ 0 & \text{se } t \notin D_{s^*s}. \end{cases}$$

Considere $H_s := \{b_1 t_1 + ... + b_k t_k; k \in \mathbb{N},\ b_j \in \mathbb{C} \text{ e } t_j \in D_{s^*s}\}$. Se $x = \sum_t b_t t \in H_s$, então defina $\pi(s)(x) := \sum_t b_t \gamma(s)(t)$. Para cada $s \in S$, esta aplicação é contínua, pois

$$\|\pi(s)(x)\|^2 \quad = \quad \left|\sum_t b_t \gamma(s)(t)\right|^2 = \left\|\sum_t b_t st\right\|^2 = \left\langle \sum_t b_t st, \sum_t b_t st \right\rangle$$

$$= \sum_t b_t \bar{b_t} = \left\| \sum_t b_t t \right\|^2 = \|x\|^2 .$$

Desta forma, $\pi(s)$ se estende a $\overline{H_s}$. Se $x \in \overline{H_s}^{\perp}$, então $\pi(s)(x) := 0$. Pela forma como foi definida, aplicação $s \mapsto \pi(s)$ é um homomorfismo. Mais ainda, pela equação acima

$$\|\pi(s)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\pi(s)(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| = 1.$$

Portanto, $\pi(s) \in B(l^2(S))$. Além disso,

$$\langle \pi(s)(r), t \rangle = \langle sr, t \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } sr = t \text{ e } r \in D_{s^*s} \\ 0 & \text{se } sr \neq t \text{ ou } r \notin D_{s^*s}. \end{cases}$$

Suponha que $sr = t$ e $r \in D_{s^*s}$, então pela Observação 6 temos que $r = s^*sr$, assim

$$r = s^*sr = s^*t \text{ e } sr = ss^*t.$$

Como $sr = t$, segue que $t = ss^*t$, então $tt^* = ss^*tt^*$, donde $t \in D_{ss^*}$. Neste caso,

$$\langle \pi(s)(r), t \rangle = \langle sr, t \rangle = 1 = \langle r, s^*t \rangle = \langle r, \pi(s^*)t \rangle .$$

Se $sr \neq t$, então $r \neq s^*t$ ou $t \notin D_{ss^*}$, pois

$$r = s^*t \Rightarrow sr = ss^*t,$$

mas como $sr \neq t$, tem-se $t \neq ss^*t$ e $t \notin D_{ss^*}$. Diante disto,

$$\langle \pi(s)(r), t \rangle = \langle s(r), t \rangle = 0 = \langle r, s^*t \rangle = \langle r, \pi(s^*)t \rangle .$$

Provando que $\pi(s)^* = \pi(s^*)$. Isto mostra que a aplicação $\pi : S \to B(l^2(S))$ é um $*$-homomorfismo e, portanto, é uma representação de S. Esta representação chama-se *representação regular a esquerda de S*.

Proposição 36 (Teorema de Wordingham)**.** *A representação de $\mathbb{C}[S]$ em $l^2(S)$ induzida pela representação regular a esquerda de S é injetiva.*

Demonstração. A demonstração deste fato é feita no Teorema 2.1.1 (PATERSON, 2012). ■

Seja $\pi : \mathbb{C}[S] \to B(H)$ uma representação de $\mathbb{C}[S]$ em H. Defina $\|\cdot\| : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{R}$, por

$$\|a\| = \|\pi(a)\|_{B(H)} .$$

Para $a, b \in \mathbb{C}[S]$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, a aplicação $\|\cdot\|$ satisfaz:

i.

$$\begin{aligned} \|a+b\| &= \|\pi(a)+\pi(b)\|_{B(H)} \leqslant \|\pi(a)\|_{B(H)} + \|\pi(b)\|_{B(H)} \\ &= \|a\| + \|b\| . \end{aligned}$$

ii.

$$\|\lambda a\| = \|\pi(\lambda a)\|_{B(H)} = \|\lambda \pi(a)\|_{B(H)} = |\lambda| \, \|\pi(a)\|_{B(H)} = |\lambda| \, \|a\| .$$

iii. Como $B(H)$ é uma C^*-álgebra, vale a submultiplicatividade da norma, então

$$\|ab\| = \|\pi(ab)\|_{B(H)} \leqslant \|\pi(a)\|_{B(H)} \|\pi(b)\|_{B(H)} = \|a\| \, \|b\| .$$

iv. Em $B(H)$ vale a identidade C^*, assim

$$\|a^*a\| = \|\pi(a^*a)\|_{B(H)} = \|\pi(a)^*\pi(a)\|_{B(H)} = \|\pi(a)\|_{B(H)}^2 = \|a\|^2 .$$

Portanto, $\|\cdot\|$ é uma C^*-seminorma sobre $\mathbb{C}[S]$.

Com isto e sabendo que a representação regular a esquerda de S é fiel, segue que a C^*-seminorma máxima $\|\cdot\|_u$ é uma C^*-norma em $\mathbb{C}[S]$. Desta forma, $I = \{x; \|x\|_u = 0\}$ é o ideal nulo.

Definição 37. *A C^*-álgebra de um semigrupo inverso S é o completamento de $C[S]$ com respeito a sua C^*-norma máxima, e é denotada por $C^*(S)$.*

Observação 17. De outra forma, poderíamos definir a C^*-álgebra do semigrupo inverso S como a C^*-álgebra envolvente do espaço $l^1(S)$, dado pelo completamento de $\mathbb{C}[S]$ na norma $\|\cdot\|_1 : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{R}_+$

$$a = \sum_{s \in S}^{\text{finito}} a_s s \mapsto \sum_{s \in S}^{\text{finito}} |a_s| .$$

Observação 18. Vimos acima que uma representação $\pi : \mathbb{C}[S] \to B(H)$ produz uma C^*-seminorma. Então, π é contrativa com respeito a C^*-norma máxima. Portanto, π se estende a um $*$-homomorfismo de $C^*(S)$ em $B(H)$.

Seja S um semigrupo inverso finito. Então $\mathbb{C}[S]$ tem dimensão finita, a saber, a cardinalidade, n, de S. Segue que todas as normas sobre $\mathbb{C}[S]$ são equivalentes e que $\mathbb{C}[S]$ já é completo com respeito à cada uma delas. Em particular, $\mathbb{C}[S] = C^*(S)$ é uma C^*-álgebra de dimensão finita. Toda C^*-álgebra de dimensão finita é uma soma direta finita da forma $\bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$, onde $M_n(\mathbb{C})$ denota a álgebra das matrizes de ordem $n \times n$. A determinação exata dos números naturais k e $n_1, n_2, \ldots, n_k$ depende da estrutura das representações (irredutíveis) da álgebra em questão, no caso $C^*(S) = \mathbb{C}[S]$. Sabemos que tais representações correspondem a representações de S. Assim a determinação de $C^*(S)$ se reduz ao estudo das representações de S; e basta, na verdade, conhecer as representações *irredutíveis* (representações sem subespaços invariantes[2]). O número k é a quantidade de representações irredutíveis, e os números n_i suas multiplicidades. Este processo pode ser complicado se n é muito grande. Claro, por uma questão de dimensões sempre temos $n = dim(C^*(S)) = dim(\bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})) = n_1^2 + \ldots + n_k^2$.

Em alguns casos simples podemos calcular exatamente k e $n_1, \ldots, n_k$. Por exemplo, se $S = S(G)$ é o semigrupo universal de $G = \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 13. Seja $G = \mathbb{Z}_2$ e $S = \{1, e, s\}$ o semigrupo universal associado a G, visto no Exemplo 3. Então $C^*(S) \cong \mathbb{C}^3$. Isto ocorre, pois $\mathbb{C}[S]$ tem dimensão 3 e é completo na C^*-norma máxima.

Exemplo 14. Se E é um semi-reticulado, então E é um semigrupo inverso e, assim, podemos considerar $C^*(E)$. Esta é uma C^*-álgebra comutativa, cujo espectro será descrito no que segue. Lembramos que o espectro de uma C^*-álgebra comutativa A é o conjunto $\widehat{A}$ dos seus caracteres, isto é, homomorfismos não nulos $A \to \mathbb{C}$. Este é um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff quando munido da topologia fraca-$*$. Ver (MURPHY, 1990) para mais detalhes.

Proposição 38. *Seja E um semi-reticulado visto como semigrupo inverso. Então o seu espectro, $\widehat{C^*(E)}$, é homeomorfo a $\widehat{E}$.*

Demonstração. Note que $\widehat{E}$ e $\widehat{\mathbb{C}[E]}$ são os conjuntos das representações de E e $\mathbb{C}[E]$ no espaço de Hilbert $\mathbb{C}$, respectivamente. Portanto, estão em bijeção pela Proposição 33. Defina

$$\varphi : \widehat{E} \to \widehat{C^*(E)}$$

$$\tau \mapsto \varphi(\tau) := \widetilde{\tau}$$

da seguinte forma: dado $x = \sum_{e \in E} \lambda_e e \in \mathbb{C}[E]$, vimos na Proposição

[2]Seja A uma C^*-álgebra e (φ, H) uma representação de A. Um subespaço K de H é invariante por φ se $\varphi(a)(K) \subset K$ para todo $a \in A$

33 que

$$\phi\left(\tau\right)\left(x\right)=\sum_{e\in E}\lambda_e\tau(e)$$

é uma representação de $\mathbb{C}[E]$ no espaço de Hilbert $\mathbb{C}$, então $\phi(\tau)$ se estende a um $*$-homomorfismo, $\widetilde{\tau}$, de $C^*(E)$ em $\mathbb{C}$. Como τ não é nulo, então τ é uma representação não-degenerada de E em $\mathbb{C}$ e, assim, $\phi(\tau)$ é uma representação não-degenerada de $\mathbb{C}[E]$ em $\mathbb{C}$ que, por sua vez, é não nulo. Portanto, $\widetilde{\tau}$ é não nulo.

Além disso, a aplicação φ é homeomorfismo. Para provar isto, seja $\{\tau_i\}_i$ uma net que converge para τ em $\widehat{E}$, então $\tau_i(e)\to\tau(e)$ para todo $e\in E$. Seja $x=\sum_e\lambda_e e\in\mathbb{C}[E]$, então

$$\varphi(\tau_i)(x)=\sum_e\lambda_e\tau_i(e)\to\sum_e\lambda_e\tau(e)=\varphi(\tau)(x).$$

Como $\|\varphi(\tau_i)\|\leqslant 1$ para todo i, segue que

$$\varphi(\tau_i)(x)\to\varphi(\tau)(x)\text{ para todo }x\in C^*(E)=\overline{\mathbb{C}[E]}.$$

Portanto, φ é contínua.

Seja Ω_i uma net que converge para Ω em $\widehat{C^*(E)}$. Então, $\Omega_i(x)\to\Omega(x)$ para todo $x\in C^*(E)$, em particular, para $x=e$ (em que e é visto como elemento de $C^*(E)$). Desta forma, para $\tau_i=\varphi^{-1}(\Omega_i)$ e $\tau=\varphi^{-1}(\Omega)$,

$$\tau_i(e)=\varphi^{-1}\left(\Omega_i(e)\right)\to\varphi^{-1}\left(\Omega(e)\right)=\tau(e)\text{ para todo }e\in E.$$

Como a topologia em $\widehat{E}$ é a topologia a convergência pontual, segue que φ^{-1} é contínua. ■

Observação 19. Seja E um semi-reticulado. Como $C^*(E)$ é uma C^*-álgebra comutativa, pelo Teorema de Gelfand, sabemos que

$$C^*(E)\cong C_0\left(\widehat{C^*(E)}\right).$$

Pela Proposição 38, segue que $C^*(E)\cong C_0\left(\widehat{E}\right)$.

Proposição 39. *Sejam S um semigrupo inverso e E o conjunto dos idempotentes de S. Então o homomorfismo canônico $C^*(E)\to C^*(S)$ induzido pela inclusão $E\to S$ é injetivo.*

A demonstração deste fato não é trivial. Mas ela seguirá como consequência do Corolário 47 no caso em que S é E-unitário.

4 A C^*-ÁLGEBRA DE UM SEMIGRUPO INVERSO E-UNITÁRIO

No primeiro capítulo, vimos que todo semigrupo inverso E-unitário S pode ser escrito como o produto semidireto $E \rtimes G$, em que E e G são, respectivamente, o conjunto dos idempotentes e o grupo imagem homomorfa máxima de S, e a ação parcial é a induzida da ação de S sobre E descrita no Exemplo 9. Desta forma o que se espera é que $C^*(S) \cong C^*(E) \rtimes G$. Neste capítulo iremos provar este resultado. Identificando $C^*(E) \cong C_0(\widehat{E})$ através da transformada de Gelfand, isto implicará no isomorfismo $C^*(S) \cong C_0(\widehat{E}) \rtimes G$. Vejamos, inicialmente, alguns exemplos de ações parciais necessárias para provar este resultado.

Seja S um semigrupo inverso E-unitário.

Exemplo 15. Pela Proposição 20, a ação β de S sobre $\widehat{E}$ do Exemplo 8 induz uma ação parcial $\widetilde{\beta}$ de $G := G(S)$ sobre $\widehat{E}$ da seguinte forma: para cada $g \in G$, sejam $\widetilde{U}_{g^{-1}} := \bigcup_{\sigma(s)=g} U_{s^*s}$ e $\widetilde{\beta}_g : \widetilde{U}_{g^{-1}} \to \widetilde{U}_g$ dada por

$$\widetilde{\beta}_g(\chi) = \beta_s(\chi) \text{ em que } \sigma(s) = g,$$

e $\beta_s(\chi)(e) = \chi(s^*es)$. Além disso, como cada β_s é contínua, cada $\widetilde{\beta}_g$ é contínua e sendo $\widetilde{U}_g$ uma união arbitrária de abertos, segue que $\widetilde{U}_g$ é aberto.

Como cada $\widetilde{U}_g$ é aberto contido no espaço localmente compacto $\widehat{E}$, então $\widetilde{U}_g$ é um espaço localmente compacto. Para cada $g \in G$, seja

$$\widetilde{C}_0(\widetilde{U}_g) := \left\{ f \in C_0(\widehat{E}); f(\chi) = 0 \text{ para todo } \chi \in \widehat{E} \setminus \widetilde{U_g} \right\}.$$

Desta forma, $\widetilde{C}_0(\widetilde{U}_g)$ é um ideal de $C_0(\widehat{E})$. Embora, aqui, o conjunto $\widetilde{C}_0(\widetilde{U}_g)$ não seja visto como o conjunto das funções contínuas, definidas no conjunto $\widetilde{U}_g$, que se anulam no infinito, há um isomorfismo entre estas C^*-álgebras, isto será provado ao final deste exemplo. Defina

$$\alpha_g : \widetilde{C}_0(\widetilde{U}_{g^{-1}}) \to \widetilde{C}_0(\widetilde{U}_g)$$

$$f \mapsto f \circ \widetilde{\beta}_{g^{-1}}.$$

Esta aplicação é um $*$-isomorfismo entre ideais fechados de $C_0(\widehat{E})$, pois $\widetilde{\beta}_{g^{-1}}$ é um homeomorfismo para todo $g \in G$. Mais ainda, estas aplicações satisfazem a definição de ação parcial:

i. Como $\widetilde{U}_1 = \widehat{E}$, segue que $\widetilde{C}_0(\widetilde{U}_1) = C_0(\widehat{E})$. A aplicação $\alpha_1(f) = f \circ \widetilde{\beta}_1 = f \circ id = f$.

ii. Suponha que $f \in \widetilde{C}_0\left(\widetilde{U}_{h^{-1}}\right)$ seja tal que $\alpha_h(f) \in \widetilde{C}_0\left(\widetilde{U}_{g^{-1}}\right)$. Seja $\chi \notin \widetilde{U}_{(gh)^{-1}}$, então $\chi \notin \widetilde{\beta}_{h^{-1}}\left(\widetilde{U}_h \cap \widetilde{U}_{g^{-1}}\right)$, uma vez que $\widetilde{\beta}$ é uma ação parcial. Se $\chi \notin \widetilde{U}_{h^{-1}}$, então $f(\chi) = 0$, pois $f \in \widetilde{C}_0\left(\widetilde{U}_{h^{-1}}\right)$. Agora, se $\chi \in \widetilde{U}_{h^{-1}}$, mas $\chi \notin \widetilde{\beta}_{h^{-1}}\left(\widetilde{U}_h \cap \widetilde{U}_{g^{-1}}\right)$, então existe $\tau \in \widetilde{U}_h$, que não pertence a $\widetilde{U}_{g^{-1}}$, tal que $\chi = \beta_{h^{-1}}(\tau)$. Desta forma,

$$f(\chi) = f(\beta_{h^{-1}}(\tau)) = f \circ \beta_{h^{-1}}(\tau) = 0,$$

pois $\tau \notin U_{g^{-1}}$ e $\alpha_h(f) = f \circ \beta_{h^{-1}} \in \widetilde{C}_0(\widetilde{U}_{g^{-1}})$. Desta forma, $f(\chi) = 0$ para todo $\chi \notin U_{(gh)^{-1}}$, ou seja, $f \in \widetilde{C}_0(\widetilde{U}_{(gh)^{-1}})$. Provando que o domínio de $\alpha_g \circ \alpha_h$ está contido em $\widetilde{C}_0(\widetilde{U}_{(gh)^{-1}})$. Para f que pertence ao domínio de tal função, tem-se

$$\begin{aligned}
(\alpha_g \circ \alpha_h)(f) &= \alpha_g(\alpha_h(f)) = \alpha_g(f \circ \beta_{h^{-1}}) \\
&= (f \circ \beta_{h^{-1}}) \circ \beta_{g^{-1}} = f \circ \left(\beta_{h^{-1}} \circ \beta_{g^{-1}}\right) \\
&= f \circ \left(\beta_{h^{-1}g^{-1}}\right) = f \circ \beta_{(gh)^{-1}} = \alpha_{gh}(f).
\end{aligned}$$

Portanto, α é uma ação parcial de G sobre $C_0(\widehat{E})$.

Vejamos agora que se U é um subconjunto aberto de um espaço localmente compacto Hausdorff E, então $\widetilde{C}_0(U) \cong C_0(U)$. Defina $\varphi : C_0(U) \to \widetilde{C}_0(U)$, por

$$f \mapsto \widetilde{f} := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta aplicação está bem definida, pois se $f \in C_0(U)$, então:

i. $\widetilde{f}$ é contínua. De fato, seja $\varepsilon > 0$, então

$$\widetilde{f}^{-1}(B(0,\varepsilon)) = \left\{x \in U; \left|\widetilde{f}(x)\right| \geqslant \varepsilon\right\}^C = \{x \in U; |f(x)| \geqslant \varepsilon\}^C.$$

Mas o conjunto $\{x \in U; |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ é compacto, no espaço Hausdorff E, então é fechado. Logo, $\widetilde{f}^{-1}(B(0,\varepsilon))$ é aberto.

Se $t \neq 0$ e $\varepsilon \leqslant |t|$, então $\widetilde{f}^{-1}(B(t,\varepsilon)) = f^{-1}(B(t,\varepsilon))$, que é aberto.

Qualquer outro aberto, pode ser escrito como uma união de bolas abertas como acima. Portanto, $\widetilde{f}$ é contínua.

ii. A função $\widetilde{f} \in C_0(E)$, visto que o conjunto

$$\{x \in E; |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$$

é um compacto contido no aberto U e, portanto, é compacto de E.

A aplicação φ é claramente um $*$-homomorfismo. Para a injetividade, sejam f, g tais que $\widetilde{f} = \widetilde{g}$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E$, em particular, para todo $x \in U$. Portanto, $f = g$. Ainda, se $g \in \widetilde{C}_0(U)$, defina $f : U \to \mathbb{C}$ por $f(x) := g(x)$ para $x \in U$. Desta forma, f é contínua e para todo $\varepsilon > 0$,

$$\{x \in U / \, |f(x)| \geqslant \varepsilon\} = \{x \in E / \, |f(x)| \geqslant \varepsilon\},$$

que é compacto e, portanto, $f \in C_0(U)$. Além disso, $\varphi(f) = g$. O que prova a sobrejetividade de φ. Portanto, $\widetilde{C}_0(U) \cong C_0(U)$.

Exemplo 16. Sejam S um semigrupo inverso E-unitário, $E := E(S)$ e $G := G(S)$. No Exemplo 9, vimos que a aplicação

$$\beta : S \to I(X)$$

$$s \mapsto \beta_s$$

em que $\beta_s : E_{s^*s} \to E_{ss^*}$, com $E_{ss^*} = \{e \in E(S); e \leqslant ss^*\}$, dada por

$$\beta_s(e) = ses^*$$

é uma ação do semigrupo inverso S sobre o semi-reticulado E.

Pela Proposição 20, β induz uma ação parcial, $\widetilde{\beta}$, de G sobre E em que $\widetilde{\beta}_g : E_{g^{-1}} \to E_g$,

$$\widetilde{E}_g := \bigcup_{\sigma(s)=g} E_{ss^*}$$

$$\widetilde{\beta}_g(e) := \beta_s(e) = ses^* \text{ com } s \text{ tal que } \sigma(s) = g$$

para $e \in E_{s^*s}$. No Exemplo 9, foi provado que E_{ss^*} é um ideal de E, então $\widetilde{E}_g$ também é um ideal de E.

Exemplo 17. Sejam S um semigrupo inverso E-unitário e $\widetilde{\beta}$ a ação parcial de G sobre $E = E(S)$ do exemplo acima. A partir desta ação parcial, vamos construir uma ação parcial de G sobre a $*$-álgebra $\mathbb{C}[E]$, definida no capítulo anterior. Para cada $g \in G$, seja

$$B_g := \left\{ \sum_{e \in \widetilde{E}_g}^{finito} \lambda_e e; \lambda_e \in \mathbb{C} \right\}.$$

Como $\widetilde{E}_g$ é um ideal de E, então B_g é um ideal de $\mathbb{C}[E]$. Mais ainda, como $e^* = e$ para todo $e \in E$, segue que $\widetilde{E}_g$ é ideal autoadjunto de $\mathbb{C}[E]$. Para cada $g \in G$, defina a aplicação $\theta_g : B_{g^{-1}} \to B_g$ por

$$\theta_g \left(\sum_{e \in \widetilde{E}_{g^{-1}}}^{\text{finito}} \lambda_e e \right) = \sum_{e \in \widetilde{E}_g^{-1}}^{\text{finito}} \lambda_e \widetilde{\beta}_g(e).$$

Como cada $\widetilde{\beta}_g$ é bijetivo e preserva a multiplicação, e pela forma como θ_g foi definido ele é um $*$-isomorfismo entre ideais autoadjuntos de $\mathbb{C}[E]$. Portanto, θ é uma ação parcial $*$-algébrica de G sobre $\mathbb{C}[E]$.

Sendo assim, podemos considerar o produto cruzado algébrico $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$. Um elemento típico deste produto cruzado algébrico será da forma

$$\sum_{g \in G(S)}^{\text{finito}} x_g \delta_g,$$

em que cada x_g é uma combinação linear finita de elementos da forma $\lambda_e e$ com $e \leq ss^*$, $\sigma(s) = g$.

Observação 20. Seja θ a ação do exemplo acima. Lembrando que se A é uma álgebra de Banach comutativa tal que o seu conjunto de caracteres não nulos, o seu *espectro*, é não vazio, então a *transformada de Gelfand* de um elemento $a \in A$ é a função $\widehat{a} : \widehat{A} \to \mathbb{C}$, que é dada por

$$\tau \mapsto \widehat{a}(\tau) := \tau(a).$$

Em particular, $C^*(E)$ é uma álgebra de Banach comutativa e, pela Observação 19, sabemos que $C^*(E) \cong C_0(\widehat{E})$. Desta forma, se $e \in B_g \subset C^*(E)$ e $\chi \in \widehat{E}$, então

$$\widehat{e}(\chi) = \chi(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in U_e \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em que $U_e = \left\{\chi \in \widehat{E}; \chi(e) = 1\right\}$. Logo, $\widehat{e}$ é a função característica de U_e. Como $e \leqslant s^*s$, para algum $s \in S$ tal que $\sigma(s) = g$, tem-se

$$1 = \chi(e) = \chi(s^*s)\chi(e) \Rightarrow \chi(s^*s) = 1,$$

e, assim, $U_e \subset \widetilde{U}_g$. Mais ainda, se $0 < \varepsilon \leqslant 1$, então

$$\left\{\chi \in \widetilde{U}_g; |\widehat{e}(\chi)| \geqslant \varepsilon\right\} = U_e,$$

que é um subconjunto compacto, pela Observação 24. O que mostra que $\widehat{e} \in C_0(\widetilde{U}_g)$.

Se $e \in B_{g^{-1}}$. Então,

$$\begin{aligned} \widehat{\theta_g(e)}(\chi) &= \widehat{(ses^*)}(\chi) = \chi(ses^*) \\ &= \widetilde{\beta}_{g^{-1}}(\chi)(e) = \widehat{e} \circ \widetilde{\beta}_{g^{-1}}(\chi) \end{aligned}$$

Pela linearidade, segue que para todo $a \in B_{g^{-1}}$,

$$\widehat{\theta_g(a)}(\chi) = \widehat{a} \circ \widetilde{\beta}_{g^{-1}}(\chi) \text{ para todo } \chi \in \widehat{E}.$$

Ou seja, $\widehat{\theta_g(a)} = \widehat{a} \circ \widetilde{\beta}_{g^{-1}}$. Como a transformada de Gelfand e a aplicação α_g do Exemplo 15 são isométricas, tem-se

$$\|\theta_g(a)\| = \left\|\widehat{\theta_g(a)}\right\| = \left\|\widehat{a} \circ \widetilde{\beta}_{g^{-1}}\right\| = \|\alpha_g(\widehat{a})\| = \|\widehat{a}\| = \|a\|.$$

Portanto, as aplicações θ_g do exemplo anterior são contínuas.

Para provar a próxima afirmação, precisamos do seguinte Teorema:

Teorema 40 (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** *Sejam X um espaço localmente compacto Hausdorff e A uma sub-$*$-álgebra de $C_0(X)$ que satisfaz:*

i. A separa pontos de X, isto é, se $x, y \in X$, com $x \neq y$, então existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

ii. Para cada $x \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq 0$.

Então A é densa em $C_0(X)$.

Afirmação 41. A imagem de $B_{g^{-1}}$, via o isomorfismo de Gelfand, é densa em $C_0(U_{g^{-1}})$.

Demonstração. i. Seja $\chi \in U_{g^{-1}}$. Então $\chi \in U_{s^*s}$, para algum $s \in S$ tal que $\sigma(s) = g$. Desta forma $\widehat{s^*s}(\chi) = 1$.

ii. Sejam $\chi, \tau \in U_{g^{-1}}$ tais que $\chi \neq \tau$. Sabemos que existe $e \in E$ tal que $\chi(e) \neq \tau(e)$, digamos que $\tau(e) = 1$ e $\chi(e) = 0$, então $\tau \in U_e$ e $\chi \notin U_e$. Como $\tau \in U_{g^{-1}}$, então $\tau \in U_{s^*s}$ para algum $s \in S$ tal que $\sigma(s) = g$. Desta forma, $\tau \in U_e \cap U_{s^*s}$ e $\chi \notin U_e \cap U_{s^*s}$.

Na Observação 9, foi provado que $U_e \cap U_{s^*s} = U_{es^*s}$. Mais ainda,

$$es^*s = es^*ss^*s \Rightarrow es^*s \leqslant s^*s,$$

ou seja, $es^*s \in B_{g^{-1}}$. Sabendo que $\widehat{es^*s}$ é a função característica de U_{es^*s}, segue que

$$1 = \widehat{es^*s}(\tau) \neq \widehat{es^*s}(\chi) = 0$$

.

Portanto, as condições do Teorema 40 são satisfeitas e a imagem de $B_{g^{-1}}$, via o isomorfismo de Gelfand, é densa em $C_0(U_{g^{-1}})$.

■

Portanto, a ação α de G sobre $C_0(\widehat{E})$ corresponde a uma ação de G sobre $C^*(\widehat{E})$ que quando restrita a $C[E]$ é a ação θ do exemplo acima.

Exemplo 18. Seja θ a ação do Exemplo 17. Dado $g \in G$, defina $D_g := \overline{B_g}$. Pela Observação acima, as aplicações $\theta_g : B_{g^{-1}} \to B_g$ são contínuas e se estendem a aplicações $\widetilde{\theta}_g : D_{g^{-1}} \to D_g$. Desta forma, $\widetilde{\theta}$ é uma ação de G sobre $C^*(E)$.

Proposição 42. *Seja θ uma ação parcial de G sobre uma $*$-álgebra A. Se existem aplicações lineares $\varphi_g : D_g \to B$ para cada $g \in G$ que satisfazem*

i. $\varphi_g(x)\varphi_h(y) = \varphi_{gh}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(x)\,y\right)\right)$ *para todo $x \in D_g$ e para todo $y \in D_h$;*

ii. $\varphi_g(x)^* = \varphi_{g^{-1}}\left(\theta_g^{-1}(x^*)\right)$ *para todo $x \in D_g$.*

para quaisquer $g, h \in G$. Então existe um $*$-homomorfismo $\varphi : A \rtimes_{alg} G \to B$ que é dado por

$$\varphi\left(\sum_{g\in G} x_g\delta_g\right) = \sum_{g\in G}\varphi_g(x_g).$$

Demonstração. Como as aplicações φ_g são lineares, então φ é linear. Sejam $x = \sum_g x_g\delta_g, y = \sum_h y_g\delta_h \in A \rtimes_{alg} G$, então

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi\left(\sum_g x_g\delta_g \sum_h y_h\delta_h\right)\\
&= \varphi\left(\sum_{g,h} \theta_g\left(\theta_{g^{-1}}\left(x_g\right)y_h\right)\delta_{gh}\right)\\
&= \sum_{g,h} \varphi_{gh}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}\left(x_g\right)y_h\right)\right)\\
&= \sum_{g,h} \varphi_{gh}\left(x \cdot y\right) = \sum_{g,h} \varphi_g\left(x_g\right)\varphi_g\left(y_h\right)\\
&= \sum_g \varphi_g\left(x_g\right)\sum_h \varphi_h\left(y_h\right) = \varphi(x)\varphi(y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x)^* &= \varphi\left(\sum_g x_g\delta_g\right)^* = \left(\sum_g \varphi_g(x_g)\right)^*\\
&= \sum_g \left(\varphi_g(x_g)\right)^* = \sum_g \varphi_{g^{-1}}\left(\theta_{g^{-1}}\left(x^*_{g^{-1}}\right)\right)\\
&= \varphi\left(\left(\sum_g x_g\delta_g\right)^*\right) = \varphi\left(x^*\right).
\end{aligned}$$

Portanto, φ é linear, preserva multiplicação e involução e, assim, $\varphi : A \rtimes_{alg} G \to B$ é um $*$-homomorfismo. ■

Considere a ação parcial do Exemplo 17 e para cada $g \in G$, defina

$$\varphi_g : B_g \to \mathbb{C}[S]$$

em que

$$\varphi_g\left(\sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant ss^*}^{\text{finito}} \lambda_e e\right) = \sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant ss^*}^{\text{finito}} \lambda_e es.$$

Esta aplicação está bem definida. De fato, suponha que para algum $e \in E$ existam $s, t \in S$ tais que $\sigma(s) = \sigma(t)$ e $e \leqslant ss^*$ e $e \leqslant tt^*$. Pelo

Lema 15, sabemos que

$$t^*ss^* = s^*tt^*, \text{ pois } \sigma(s^*) = \sigma(t^*).$$

Por hipótese, $ss^*e = e = tt^*e$, então

$$t^*ss^*e = t^*tt^*e \Rightarrow s^*tt^*e = t^*e \Rightarrow s^*ss^*e = t^*e \Rightarrow s^*e = t^*e \Rightarrow es = et.$$

Isto prova que a aplicação φ_g está bem definida.
Fixe $g, h \in G$ e sejam $x = \sum_{\sigma(s)=g; e \leqslant ss^*} \lambda_e e$ e $y = \sum_{\sigma(t)=h; f \leqslant tt^*} \lambda_f f$, então

$$\begin{aligned}
\varphi_g(x)\varphi_h(y) &= \sum \lambda_e es \sum \lambda_f ft \\
&= \sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f esft \\
&= \sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f ess^*sft \\
&= \sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f esfs^*st \\
&= \varphi_{gh}\left(\sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f esfs^*\right) \\
&= \varphi_{gh}\left(\sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f ess^*sfs^*\right) \\
&= \varphi_{gh}\left(\sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f ss^*esfs^*\right) \\
&= \varphi_{gh}\left(\theta_g\left(\sum_s \sum_t \lambda_e \lambda_f s^*esf\right)\right) = \\
&= \varphi_{gh}\left(\theta_g\left(\left(\sum_s \lambda_e s^*es\right)\sum_t \lambda_f f\right)\right) \\
&= \varphi_{gh}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}\left(\sum_s \lambda_e e\right)\sum_t \lambda_f f\right)\right).
\end{aligned}$$

E também

$$\varphi_g\left(\sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \lambda_e e\right)^* = \left(\sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \lambda_e es\right)^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \bar{\lambda_e} s^* e \\
&= \sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \bar{\lambda_e} s^* s s^* e \\
&= \sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \bar{\lambda_e} s^* e s s^* \\
&= \varphi_{g^{-1}} \left(\sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \bar{\lambda_e} s^* e s \right) \\
&= \varphi_{g^{-1}} \left(\theta_{g^{-1}} \left(\sum_{\sigma(s)=g, e\leqslant s^*s} \lambda_e e \right)^* \right).
\end{aligned}
$$

Assim, as aplicações φ_g satisfazem as condições da Proposição 42 e, então, existe um $*-$homomorfismo

$$\varphi : \mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G \to \mathbb{C}[S].$$

Por outro lado, defina

$$\psi : \mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$$

$$\sum_{s\in S}^{\text{finito}} \lambda_s s \mapsto \sum_{[s]\in G(S)}^{\text{finito}} \lambda_s s s^* \delta_{[s]},$$

em que $[s] := \sigma(s)$. Sejam $x = \sum_{s\in S} \lambda_s s$, $y = \sum_{s\in S} \beta_s s \in \mathbb{C}[S]$ e $a \in \mathbb{C}$, então

$$
\begin{aligned}
\psi(x + ay) &= \psi\left(\sum_{s\in S} \lambda_s s + a \sum_{s\in S} \beta_s s \right) \\
&= \psi\left(\sum_{s\in S} (\lambda_s + a\beta_s) s \right) = \\
&= \sum_{s\in S} (\lambda_s + a\beta_s) s s^* \delta_{[s]} \\
&= \sum_{s\in S} \lambda_s s^* + \sum_{s\in S} a\beta_s s^* \delta_{[s]}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s\in S}\lambda_s s^*\delta_{[s]} + a\sum_{s\in S}\beta_s s^*\delta_{[s]} = \psi(x) + a\psi(y).$$

Se $x = \sum_{s\in S}\lambda_s s$ e $y = \sum_{t\in S}\lambda_t t \in \mathbb{C}[S]$, então

$$\begin{aligned}
\psi(xy) &= \psi\left(\sum_{s\in S}\lambda_s s\sum_{t\in S}\lambda_t t\right) = \psi\left(\sum_{s,t\in S}\lambda_s\lambda_t st\right)\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t\,(st)\,(st)^*\,\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t stt^*s^*\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t s\,(s^*stt^*)\,s^*\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t\theta_{[s]}\,(s^*stt^*)\,\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t\theta_{[s]}\,(s^*\,(ss^*)\,stt^*)\,\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s],[t]}\lambda_s\lambda_t\theta_{[s]}\left(\theta_{[s]^{-1}}\,(ss^*)\,tt^*\right)\delta_{[s][t]}\\
&= \sum_{[s]}\lambda_s ss^*\delta_{[s]}\sum_{[t]}\lambda_t tt^*\delta_{[t]} = \psi(x)\psi(y).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\psi(x^*) &= \psi\left(\left(\sum_{s\in S}\lambda_s s\right)^*\right) = \psi\left(\sum_{s\in S}\bar{\lambda_s} s^*\right)\\
&= \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}s^*s\delta_{[s^*]} = \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}s^*s\delta_{[s]^{-1}}\\
&= \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}s^*ss^*s\delta_{[s]^{-1}} = \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}s^*\,(ss^*)\,s\delta_{[s]^{-1}}\\
&= \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}\theta_{[s]-1}\,(ss^*)\,\delta_{[s]^{-1}}\\
&= \sum_{[s]}\bar{\lambda_s}\theta_{[s]-1}\,((ss^*)^*)\,\delta_{[s]^{-1}}
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{[s]} \lambda_s ss^* \delta_{[s]} \right)^* = \psi(x)^*.$$

Portanto, ψ é $*$-homomorfismo.

Teorema 43. *$\mathbb{C}[S]$ é $*$-isomorfa a $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$.*

Demonstração. Sejam φ e ψ como acima. Seja $x_g = \sum_{[s]=g; e \leqslant ss^*} \lambda_e e \in B_g$, então

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(x_g \delta_g) &= \psi \circ \varphi \left(\sum_{[s]=g; e \leqslant ss^*} \lambda_e e \delta_g \right) = \psi \left(\sum_{[s]=g; e \leqslant ss^*} \lambda_e es \right) \\ &= \sum_{[s]; e \leqslant ss^*} \lambda_e ess^* e^* \delta_{[es]} = \sum_{[s]; e \leqslant ss^*} \lambda_e ess^* \delta_{[e][s]}. \end{aligned}$$

Visto que $e \leqslant ss^*$, então $e = ess^*$ e como $[e] = 1$, tem-se

$$\psi \circ \varphi(x_g \delta_g) = \sum_{[s]; e \leqslant ss^*} \lambda_e ess^* \delta_{[s]} = \sum_{[s]=g; e \leqslant ss^*} \lambda_e e \delta_g = x_g \delta_g.$$

Por definição, $\varphi(x_g \delta_g) = \varphi_g(x_g)$, assim $\psi \circ \varphi_g(x_g) = x_g \delta_g$. Dessa forma, se $x = \sum_g x_g \delta_g$,

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi \circ \varphi \left(\sum_g x_g \delta_g \right) = \psi \left(\sum_g \varphi_g(x_g) \right) = \sum_g x_g \delta_g.$$

O que prova que $\psi \circ \varphi$ é a identidade de $\mathbb{C}[E] \rtimes G$.
Por outro lado, seja $x = \sum_{s \in S} \lambda_s s \in \mathbb{C}[S]$, então

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(x) &= \varphi \circ \psi \left(\sum_{s \in S} \lambda_s s \right) = \varphi \left(\sum_{[s]} \lambda_s ss^* \delta_{[s]} \right) \\ &= \sum_{s \in S} \lambda_s ss^* s = \sum_{s \in S} \lambda_s s = x. \end{aligned}$$

Donde, $\varphi \circ \psi$ é a identidade de $\mathbb{C}[S]$. Portanto, $\mathbb{C}[S]$ é isomorfa a $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$. ■

Temos assim um $*$-isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G \to \mathbb{C}[S]$. O objetivo é provar que existe um $*$-isomorfismo entre $C^*(E) \rtimes G$ e $C^*(S)$. Para isso, vejamos a definição de subálgebra essencial.

Definição 44. *Sejam A uma C^*-álgebra e B uma sub-$*$-álgebra de A. Dizemos que B é uma* subálgebra essencial *se toda representação de B for contrativa com relação a norma induzida de A.*

Exemplo 19. $\mathbb{C}[S]$ é uma subálgebra essencial de $C^*(S)$.
Seja $\pi : \mathbb{C}[S] \to B(H)$ uma representação. Pelo que foi observado anteriormente, dado $a \in \mathbb{C}[S]$

$$\|\pi(a)\| \leqslant \sup\{p(a);\ \text{p é seminorma sobre } \mathbb{C}[S]\} = \|a\|_u .$$

O que mostra que π é contrativo e como $\mathbb{C}[S]$ é uma sub-$*$-álgebra de $C^*(S)$, o resultado segue.

Exemplo 20. $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$ é uma subálgebra essencial de $C^*(E) \rtimes G$.
Já sabemos que $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$ é uma sub-$*$-álgebra de $C^*(E) \rtimes G$.
Seja $\pi : \mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G \to B(H)$ uma representação de $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$. Para cada $g \in G$, defina $\pi_g : B_g \to B(H)$, por

$$\pi_g(x_g) := \pi(x_g\delta_g)$$

Como π é uma representação, cada π_g preserva a soma e multiplicação por escalar. Além disso,

$$\begin{aligned} \pi_g(x_g)\pi_h(x_h) &= \pi(x_g\delta_g)\pi(x_h\delta_h) = \pi\left(x_g\delta_g x_h\delta_h\right) \\ &= \pi\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(x_g)x_h\right)\delta_{gh}\right) = \pi_{gh}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(x_g)x_h\right)\right). \end{aligned}$$

$$\pi_g(x_g)^* = \pi(x_g\delta_g)^* = \pi\left((x_g\delta_g)^*\right) = \pi\left(\theta_{g^{-1}}\left(a^*\right)\delta_{g^{-1}}\right).$$

Em particular, temos que

$$\pi_1 : \mathbb{C}[E] \to B(H)$$

é uma representação de $\mathbb{C}[E]$, então é contrativo, pelo exemplo anterior. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \|\pi_g(x_g)\|^2 &= \|\pi_g(x_g)\pi_g(x_g)^*\| \\ &= \left\|\pi\left(x_g\delta_g\right)\pi\left(\theta_{g^{-1}}(x_g^*)\right)\right\| \\ &= \left\|\pi\left(x_g\delta_g\theta_{g^{-1}}(x_g^*)\delta_{g^{-1}}\right)\right\| \\ &= \left\|\pi\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(x_g)\right)\theta_{g^{-1}}(x_g^*)\delta_1\right)\right\| \\ &= \left\|\pi\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}\left(x_g x_g^*\right)\right)\delta_1\right)\right\| \\ &= \left\|\pi\left(x_g x_g^*\delta_1\right)\right\| = \left\|\pi_1\left(x_g x_g^*\right)\right\| \leqslant \left\|x_g x_g^*\right\| = \|x_g\|^2 \end{aligned}$$

Isto mostra que cada π_g é contrativo. Desta forma, podemos estender

cada π_g a $\varphi_g : D_g \to B(H)$, em que $D_g = \overline{B_g}$. Pelo que vimos acima, os itens i e ii da Proposição 42 são satisfeitos. Então temos um $*$-homomorfismo $\varphi : C^*(E) \rtimes_{alg} G \to B(H)$. Assim φ é um representação de $C^*(E) \rtimes_{alg} G$.
Para $x = \sum_{g \in G} x_g \delta_g \in C^*(E) \rtimes_{alg} G$ defina

$$p(x) := \|\varphi(x)\|_{B(H)}$$

Visto que φ é $*$-homomorfismo e $B(H)$ é uma C^*-álgebra, p é uma C^*-seminorma em $C^*(E) \rtimes G$. Assim, se $x \in \mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$

$$\|\pi(x)\| = \|\varphi(x)\| = p(x) \leqslant \sup_p \|p(x)\| = \|x\|_{C^*(E) \rtimes G}$$

Donde, π é contrativo e, portanto, $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$ é uma subálgebra essencial de $C^*(E) \rtimes G$.

Proposição 45. *O produto cruzado $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$ é denso em $C^*(E) \rtimes G$.*

Demonstração. Como, por definição, $C^*(E) \rtimes G$ é o completamento de $C^*(E) \rtimes_{alg} G$, basta mostrar que todo elemento de $C^*(E) \rtimes_{alg} G$ pode ser aproximado por elementos de $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$. Mas todo elemento de $C^*(E) \rtimes_{alg} G$ é uma soma finita de elementos da forma $x\delta_g$ com $x \in D_g$, basta mostrar que tais elementos podem ser aproximados.

Pelo Lema 68, sabemos que

$$\|x\delta_g\|_{C^*(E) \rtimes G} \leqslant \|x\|_{C*(E)}.$$

Sabendo que qualquer elemento de $x \in C^*(E)$ pode ser aproximado por uma sequência $\{x_n\}_n$ em B_g, segue que o elemento $x\delta_g$ é aproximado por $\{x_n \delta_g\}_n$. ∎

Vejamos um resultado que foi extraído do artigo (EXEL; GIORDANO; GONÇALVES, 2011) [1].

Lema 46. *Sejam A_1 e A_2 C^*-álgebras e B_1, B_2 subálgebras essenciais e densas de A_1 e A_2, respectivamente. Se existe um $*$-isomorfismo $\varphi : B_1 \to B_2$, então A_1 e A_2 são $*$-isomorfas.*

Isto ocorre, pois se B_1 é uma subálgebra essencial densa de uma C^*-álgebra A_1, então, em particular, $\varphi : B_1 \to B_2 \subset A_2$ é uma representação de B_1 e, portanto, é contrativa. Da mesma forma, a inversa φ^{-1} também é contrativa. Portanto, se estende a um $*$-isomorfismo entre A_1 e A_2.

[1] Neste artigo, subálgebras essenciais são chamadas de *core subalgebras*.

Corolário 47. *Existe um $*$-isomorfismo entre $C^*(E) \rtimes G$ e $C^*(S)$.*

Demonstração. Nos exemplos acima, vimos que $\mathbb{C}[E] \rtimes_{alg} G$ e $\mathbb{C}[S]$ são subálgebras essenciais de $C^*(E) \rtimes G$ e $C^*(S)$, respectivamente. Além disso, pela Proposição 45 e sabendo que $C^*(S)$ é o completamento de $\mathbb{C}[S]$, estas sub-$*$-álgebras são densas nestas C^*-álgebras. Pelo Lema 46, segue o desejado. ■

Corolário 48. *Para todo semigrupo inverso E-unitário S, o homomorfismo canônico $C^*(E) \to C^*(S)$ induzido pela inclusão $E \to S$ é injetivo.*

Demonstração. Pelo Corolário 47, sabemos que existe um $*$-isomorfismo $\widetilde{\varphi} : C^*(E) \rtimes G \to C^*(S)$, que é dado pela extensão de φ do Teorema 43. Além disso, pela Proposição 62, temos um homomorfismo injetor $\phi : C^*(E) \to C^*(E) \rtimes G$, definido por $a \mapsto a\delta_1$. Assim, $\widetilde{\varphi} \circ \phi : C^*(E) \to C^*(S)$ é injetor. ■

Desta forma, $C^*(E)$ pode ser visto como C^*-subálgebra de $C^*(S)$.

Teorema 49. *A C^*-álgebra de um semigrupo inverso E-unitário, $C^*(S)$, é isomorfa ao produto cruzado $C_0(\widehat{E}) \rtimes G$, cuja ação foi descrita no Exemplo 15.*

Demonstração. Pela Observação 19, sabemos que

$$C_0\left(\widehat{E}\right) \cong C^*(E).$$

Então, $\mathbb{C}^*(E) \rtimes G \cong C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes G$. Portanto, pelo Corolário 47, segue que

$$C^*(S) \cong C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes G.$$

■

Exemplo 21. No Exemplo 11, vimos que o semigrupo universal de um grupo G é $E-$unitário. Mais ainda G é o grupo máximo de $S(G)$ e o conjunto E de todos os subconjuntos finitos de G que contém 1 é o conjunto dos idempotentes deste semigrupo, a menos de isomorfismo. Assim, pelo Teorema 49, tem-se que

$$C^*\left(S(G)\right) \cong C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes G.$$

Visto que E possui elemento neutro, $\widehat{E}$ é compacto e $C_0\left(\widehat{E}\right) = C\left(\widehat{E}\right)$. O conjunto $\widehat{E}$ é formado pelos caracteres τ de E.

Como τ é um homomorfismo, basta definir os valores que esta função assume nos elementos $P_g = \{1, g\}$ para cada $g \in G$. Desta forma, dado um conjunto em E qualquer, digamos $A = \{1, g_1, ..., g_n\}$, então $A = P_1 \cup P_{g_1} \cup ... \cup P_{g_n}$, e assim,

$$\tau(A) = \tau(P_1)\tau(P_{g_1})...\tau(P_{g_n}).$$

Para cada $\tau \in \widehat{E}$, defina

$$P_\tau := \{g \in G; \tau(P_g) = 1\},$$

e χ_τ a função característica de P_τ. E seja $\phi : \widehat{E} \to X$, dada por $\tau \mapsto \chi_\tau$, em que $X := \{\chi : G \to \{0,1\}; \chi(1) = 1\}$. Afirmamos que ϕ é um homeomorfismo. De fato,

i. Para a injetividade, sejam $\tau_1, \tau_2 \in \widehat{E}$ tais que $\chi_{\tau_1} = \chi_{\tau_2}$. Assim, para todo $g \in P_{\tau_1}$, temos que

$$\chi_{\tau_1}(g) = \chi_{\tau_2}(g) \Rightarrow 1 = \chi_{\tau_2}(g)$$

o que mostra que $g \in P_{\tau_2}$, caso contrário, $\chi_{\tau_2}(g) = 0$. Da mesma forma, se $g \in P_{\tau_2}$, obtemos que $g \in P_{\tau_1}$. Donde $P_{\tau_1} = P_{\tau_2}$, logo $\tau_1 = \tau_2$.

ii. Seja $\chi \in X$ e considere

$$Q = \{g \in G; \chi(g) = 1\}.$$

Defina $\tau : E \to \{0,1\}$, por

$$\tau(A) = 1 \text{ se } A \subset Q$$

e $\tau(A) = 0$ caso contrário. É claro, que $\tau \in \widehat{E}$. Agora,

$$P_\tau = \{g \in G; \tau(P_g) = 1\} = Q$$

pela forma como definimos. Então $\chi_\tau = \chi$ e ϕ é sobrejetiva.

iii. Agora seja $\{\tau_i\}_{i \in I}$ uma *net* que converge para τ em $\widehat{E}$. Então,

$$\tau_i(A) \to \tau(A) \text{ para todo } A \in E.$$

Em particular, para todo $g \in G$, $\tau_i(P_g) \to \tau(P_g)$. Assim, se $g \in P_\tau$, existe $i_0 \in I$ tal que $g \in P_{\tau_i}$ para todo $i \geqslant i_0$ e se $g \notin P_\tau$, para todo $i_0 \in I$ existe $i \geqslant i_0$ tal que $g \notin P_{\tau_i}$. Posto isto, dado $g \in G$

$$\chi_{\tau_i}(g) \to \chi_{\tau}(g).$$

Isto mostra que $\chi_{\tau_i} \to \chi_{\tau}$ em X. Portanto, ϕ é contínua. Sendo $\widehat{E}$ compacto e X Hausdorff, então ϕ é homeomorfismo.

Desse modo, $\widehat{E}$ é o conjunto das funções $\tau : G \to \{0,1\}$ tais que $\tau(1) = 1$. Ou seja, $\widehat{E} \subset \{0,1\}^G$ que é o conjunto das partes de G. Vimos acima que $\widehat{E}$ é compacto e, portanto, fechado na topologia produto, pois é Hausdorff.
Para cada $g \in G$, defina $D_g := \{\chi \in X; \chi(g) = 1\}$ e $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ por $\theta_g(\chi)(h) = \chi(g^{-1}h)$ para todo $h \in G$. Observe que,

i. $D_1 = \{\chi \in X; \chi(1) = 1\} = X$. Dado $\chi \in X$, $\theta_1(\chi)(g) = \chi(1g) = \chi(g)$ para todo $g \in G$. Donde θ_1 é a identidade em X.

ii. Sejam $g, h \in G$ e $\chi \in D_{h^{-1}}$ tal que $\theta_h(\chi) \in D_{g^{-1}}$. Então,

$$\theta_g \circ \theta_h(\chi)(k) = \theta_h(\chi)(g^{-1}k) = \chi(h^{-1}g^{-1}k) = \chi((gh)^{-1}k) = \theta_{gh}(\chi)(k)$$

para todo $k \in G$. E, assim, $\theta_g \circ \theta_h \subset \theta_{gh}$.

iii. Cada D_g é aberto. Para isso, seja $\{\chi_i\}_i \subset D_g^C$ uma *net* que converge para χ em X. Então $\chi_i(h) \to \chi(h)$ para todo $h \in G$, em particular, $\chi_i(g) \to \chi(g)$. Mas $\chi_i(g) = 0$ para todo i, então $\chi(g) = 0$. Isto mostra que $\chi \in D_g^C$ e D_g é aberto. Na verdade, D_g também é fechado.
Agora seja $\{\chi_i\}_i \subset D_g$ uma *net* que converge para χ em D_g. Então $\chi_i(h) \to \chi(h)$ para todo $h \in G$. Em particulpar,

$$\chi_i(g^{-1}h) \to \chi(g^{-1}h) \text{ para todo } h \in G$$

então, $\theta_g(\chi_i)(h) \to \theta_g(\chi)(h)$ e θ_g é contínua.

Portanto, θ é uma ação parcial topológica de G sobre X e como $X \cong \widehat{E}$, temos uma ação parcial topológica de G sobre $\widehat{E}$.

Agora, cada D_g é fechado, contido no compacto X, então cada D_g é compacto Hausdorff. Desta forma, para todo $g \in G$, $C_0(D_g)$ é uma sub-C^*-álgebra de $C_0(X)$. Defina $A_g := C_0(D_g)$.

Cada $\theta_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$ é um homeomorfismo, então $\alpha_g : C_0\left(D_{g^{-1}}\right) \to C_0\left(D_g\right)$ definida por

$$f \mapsto f \circ \theta_{g^{-1}}$$

é um $*$-isomorfismo. Dessa forma, se $f \in C_0(D_g)$, defina $\alpha_g(f) = f \circ \theta_{g^{-1}}$. Temos que,

i. $A_1 = C_0(D_1) = C_0(X)$ e se $f \in C_0(X)$, tem-se que $\alpha_1(f) = f \circ \theta_1 = f \circ (id_x) = f$. Logo, α_1 é a identidade de X.

ii. Se $f \in A_{h^{-1}}$ é tal que $\alpha_h(f) \in A_{g^{-1}}$, então

$$\begin{aligned} \alpha_g \circ \alpha_h(f) &= \alpha_g(\alpha_h(f)) = \alpha_g(f \circ \theta_{h^{-1}}) = (f \circ \theta_{h^{-1}}) \circ \theta_{g^{-1}} \\ &= f \circ \left(\theta_h^{-1} \circ \theta_{g^{-1}}\right) = f \circ \theta_{(gh)^{-1}} = \alpha_{gh}(f) \end{aligned}$$

iii. Como já foi observado acima, cada A_g é ideal fechado de $C_0(X)$ e cada α_g é $*$-isomorfismo.

Dessa forma, α é uma ação parcial C^*-algébrica de G sobre $C_0(\widehat{E})$.

Precisamos provar agora que a ação α de G sobre $C_0(\widehat{E})$ é a mesma ação que foi usada para provar o Teorema 49. Vejamos qual é a ação para o semigrupo $S(G)$. Para cada $g \in G$, definimos o conjunto

$$B_g = \bigcup_{\sigma(s)=g} E_{ss^*} = \bigcup_{\sigma(s)=g} (ss^*E).$$

Se $s = \varepsilon_B[g]$, para algum $B \subset G$ finito que contém 1 e $e = \varepsilon_A \in E$, temos que um elemento de B_g é da forma, $\varepsilon_A\varepsilon_B[g][g^{-1}] = \varepsilon_{A\cup B\cup\{g\}}$. Ou seja,

$$B_g = \{\varepsilon_A; A \subset G \text{ finito e tal que } 1, g \in A\}.$$

Mais ainda, $\beta_g : B_{g^{-1}} \to B_g$ é dado por $\beta_g(e) = ses^*$ em que $\sigma(s) = g$. Em particular, $\sigma([g]) = g$, então para $e = \varepsilon_A$

$$\beta_g(e) = [g]\varepsilon_A[g^{-1}] = \varepsilon_{gA}[g^{-1}][g] = \varepsilon_{gA\cup\{g\}} = \varepsilon_{gA}.$$

Essa ação produz uma ação parcial γ de G sobre $\widehat{E}$ da seguinte forma: Para cada $g \in G$, defina

$$C_g := \bigcup_{\sigma(s)=g} \left\{\chi \in \widehat{E}; \chi(ss^*) = 1\right\} \text{ e}$$

$$\gamma_g(\chi)(e) = \chi(\beta_{g^{-1}}(e)) = \chi(\varepsilon_{g^{-1}A}).$$

Note que

$$C_g = \left\{\chi \in \widehat{E};\ \text{existe } B \subset G \text{ finito, com } 1, g \in G \text{ tal que } \chi(\varepsilon_B)\right\}.$$

Para provar isso, seja $\chi \in C_g$, então existe $s = \varepsilon_A[g]$, com $A \subset G$, finito, contendo 1 e g tal que $\chi(ss^*) = 1$. Logo,

$$1 = \chi(ss^*) = \chi(\varepsilon_A[g][g^{-1}]\varepsilon_A) = \chi(\varepsilon_{A\cup\{g\}}) = \chi(\varepsilon_A).$$

Por outro lado, se χ é tal que existe $B \subset G$, com $1, g \in B$ tal que $\chi(\varepsilon_B) = 1$, então

$$1 = \chi(\varepsilon_B) = \chi(\varepsilon_B\varepsilon_B[g][g^{-1}]) = \chi(\varepsilon_B[g][g^{-1}]\varepsilon_B) = \chi(ss^*)$$

onde $s = \varepsilon_B[g]$ é tal que $\sigma(s) = g$. Vejamos que C_g é identificado com D_g. Seja $\tau \in C_g$ e $\chi_\tau \in X$, temos que

$$\chi_\tau(g) = \tau(\varepsilon_{P_g}) \text{ em que } P_g = \{1, g\}.$$

Como $\tau \in C_g$, pelo que provamos acima existe $A \subset G$ finito, com $1, g \in A$, tal que $\tau(\varepsilon_A) = 1$. Como $\varepsilon_A = \varepsilon_{A\cup P_g} = \varepsilon_A \cup \varepsilon_{P_g}$, temos que

$$1\tau(\varepsilon_A) = \tau(\varepsilon_A)\tau(\varepsilon_{P_g}) = 1\tau(\varepsilon_{P_g}) = \tau(\varepsilon_{P_g}).$$

Portanto, $\chi_\tau(g) = \tau(\varepsilon_{P_g}) = 1$ e $\chi_\tau \in D_g$. Por outro lado, seja $\chi \in D_g$ e $\tau \in \widehat{E}$ tal que $\chi = \chi_\tau$, então

$$1 = \chi(g) = \tau(\varepsilon_{P_g})$$

Como P_g é subconjunto finito de G que contém $1, g$ e $\tau(\varepsilon_{P_g}) = 1$, então $\tau \in C_g$.

Agora, vejamos que $\gamma_{g^{-1}} : C_g \to C_g$ e $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ são a mesma ação através do isomorfismo $\phi : \widehat{E} \to X$ visto acima. Seja $\chi \in D_{g^{-1}}$, então $\chi(g^{-1}) = 1$, como $\chi(1) = 1$, segue que $\chi(g) = 1$. Seja $\tau \in \widehat{E}$ tal que $\chi_\tau = \chi$. Vimos acima que, se A é subconjunto finito de G contendo $1, g$, então

$$\tau(\varepsilon_A) = \prod_{h\in A} \tau(\varepsilon_{P_h}) = \prod_{h\in A} \chi(h).$$

Seja $\xi = \theta_g(\chi)$, vejamos que se η é tal que $\xi = \chi_\eta$, então $\eta = \gamma_g(\tau)$. Pelo que foi visto na equação acima, temos que

$$\eta(\varepsilon_A) = \prod_{h\in A} \theta_g(\chi)(h) = \chi(g^{-1}h).$$

Por outro lado,

$$\gamma_g(\tau)(\varepsilon_A) = \tau(\varepsilon_{g^{-1}A}) = \prod_{t \in g^{-1}A} \chi(t).$$

Mas $t \in g^{-1}A$ se, e somente se, $t = g^{-1}h$ com $h \in A$. Logo, θ e γ são a mesma ação sob a identificação ϕ. Portanto,

$$C^*\left(S(G)\right) \cong C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes_\theta G.$$

O Teorema 6.5 de (EXEL, 1998), nos diz que existe uma correspondência biunívoca entre:

i. Representações parciais de G em um espaço de Hilbert H;

ii. Representações de $S(G)$ em um espaço de Hilbert H;

iii. $*$-Representações de $C^*(S(G))$ em um espaço de Hilbert H.

Portanto, $*$-representações de $C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes_\theta G$ codificam as representações parciais de G.

Exemplo 22. Seja S o semigrupo gerado pelo operador *shift*, visto no exemplo 6. Vejamos qual é a ação de S sobre $E(S)$, para isso, seja $u = s^n t^m$, então $u^*u = (t^*)^m(s^*)^n s^n t^m = s^m t^n s^n t^m = s^m t^m$. Seja $e_p = s^p t^p \in E(S)$, então $e_p \leqslant u^*u$, se $e_p = e_p u^*u$, ou seja, $s^p t^p = s^p t^p s^m t^m$. Se $p \leqslant m$, então

$$s^p t^p = s^p s^{m-p} t^m = s^m t^m$$

e $p = m$. Se $p \geqslant m$, então

$$s^p t^p = s^p t^{p-m} t^m = s^p t^p$$

Donde, para qualquer $p \geqslant m$, tem-se que $e_p \leqslant u^*u$. Assim, para $u = s^n t^m$

$$E_{u^*u} = \{e_p; m \leqslant p\} = \{e_m, e_{m+1}, e_{m+2}, ...\} =: E_m.$$

Além disso, $\beta_u : E_{u^*u} \to E_{uu^*}$ é dada por,

$$\beta_u(e) = ue_pu^* = s^n t^m s^p t^p s^m t^n.$$

Como $m \leqslant p$ temos,

$$s^n t^m s^p t^p s^m t^n = s^n s^{p-m} t^{p-m} t^n = s^{n+p-m} t^{n+p-m}.$$

A ação β de S sobre $E(S)$ produz uma ação θ de $G(S) \cong \mathbb{Z}$ sobre $E(S)$, da seguinte forma: Para cada $k \in \mathbb{Z}$, defina $\theta_k : D_{-k} \to D_k$ em que

$$D_k = \bigcup_{\sigma(u)=k} E_{uu^*} = \bigcup_{n-m=k} E_n \quad \text{e} \quad \theta_k(e_p) = ue_p u^* \text{ com } \sigma(u) = k.$$

Se $k \geqslant 0$, vale que $n - m = k \geqslant 0$ e $n \geqslant m$. Se $e \in E_n$, para algum n tal que $n - m = k$, então $e = e_{n+l}$, com $l \geqslant 0$. Posto isso, segue que $n+l \geqslant n+l-m \geqslant n-m = k$, então $e \in E_k$. Como $E_k \subset \bigcup_{n-m=k} E_n$, segue que se $k \geqslant 0$, então $D_k = E_k$. Além disso, $D_{-k} = E$ para $k \geqslant 0$. Note que, se $u = s^n t^m \in E_{u^*u}$, com $n - m = k \geqslant 0$, então

$$\theta_k(e_p) = s^{p+k} t^{p+k} = e_{p+k},$$

e, $\theta_{-k} = \theta_k^{-1}$.

Agora, seja $\chi \in \widehat{E}$, então sabemos que deve existir $e_p \in E$ tal que

$$\chi(e_p) = 1.$$

Além disso, se $\chi(e_p) = 1$ e $n \leqslant p$, então $e_p \leqslant e_n$, ou seja, $e_p = e_p e_n$. Dessa forma,

$$1 = \chi(e_p) = \chi(e_p)\chi(e_n) = \chi(e_n).$$

Assim, $\chi = \chi_p$, em que χ_p é a função característica em $U_p = \{e_0, e_1, ..., e_p\}$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Se $\chi(e) = 1$ para todo $e \in E$, então $\chi = \chi_\infty$. A topologia em $\widehat{E}$ tem como base os conjuntos

$$V_{e_k} = \left\{\chi \in \widehat{E}; \chi(e_k) = 1\right\} = \{\chi_p; k \leqslant p\} \cong U_k^c$$

e por $V_{e_k}^c \cong U_k$, ou seja, a topologia é gerada pelos U_k e U_K^c. Mais ainda, como $1 = id \in E$, então $\widehat{E}$ é compacto.

Defina $\phi : \widehat{E} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} =: \mathbb{N}_\infty$

$$\chi_k \mapsto k.$$

Essa aplicação é claramente uma bijeção. Em $\mathbb{N}_\infty$ temos a topologia gerada pelos abertos de $\mathbb{N}$ e pelos conjuntos $\mathbb{N}_\infty - K$ em que K é compacto de $\mathbb{N}$, ou seja, K é subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Para $\{k\}$ aberto de $\mathbb{N}$, o conjunto

$$\phi^{-1}(\{k\}) = \{\chi_k\} = \bigcap_{p \geqslant k} V_{e_k}$$

é aberto de $\widehat{E}$. Se $U \in \mathbb{N}_\infty$ é da forma $U = \mathbb{N}_\infty - K$, com K finito de $\mathbb{N}$, temos que, $\phi^{-1}(U) = \widehat{\widehat{E}} - \{\chi_k; k \in K\}$, que é aberto de $\widehat{E}$. Como $\widehat{E}$ é compacto, tem-se que ϕ é homeomorfismo. Portanto, $\widehat{E} \cong \mathbb{N}_\infty$.

Temos agora uma ação parcial $\widehat{\theta}$, de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{N}_\infty$, dada por $\widehat{\theta_k} : X_{-k} \to X_k$

$$\widehat{\theta_k}(\chi)(e_p) = \chi(e_{p+k}),$$

em que $X_k = \left\{\chi \in \widehat{E}; \chi(e_p) = 1 \text{ com } e_p \in D_k\right\}$. Pelo Teorema 49, temos que

$$C^*(S) \cong C(\mathbb{N}_\infty) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$$

onde $\alpha_k : C(X_k) \to C(X_{-k})$ e $\alpha_k(f) := f \circ \widehat{\theta_{-k}}$.

Na verdade, como vimos no Exemplo 6, temos que S é o semigrupo gerado por uma isometria s tal que $s^*s \neq 1$. Então sua C^*-álgebra, $C^*(S)$, é $*$-isomorfa a Álgebra de Toeplitz, pelo Teorema de Coburn (MURPHY, 1990).

5 CONCLUSÃO

Com a teoria estudada nesta dissertação, acerca de semigrupos inversos E-unitários, concluímos que: Todo semigrupo inverso E-unitário é da forma $E \rtimes G$, em que E é o conjunto dos idempotentes de S e G é o grupo imagem homomorfa máxima de S. Mais ainda, se E é um semirreticulado e G é um grupo, então $E \rtimes G$ é um semigrupo inverso E-unitário e E e G são isomorfos ao semi-reticulado dos idempotente e ao grupo imagem homomorfa máxima deste semigrupo, respectivamente.

Sobre a C^*-álgebra de um semigrupo inverso E-unitário, $C^*(S)$, provamos que $C^*(S)$ é isomorfa ao produto cruzado $C^*(E) \rtimes G$ que, por sua vez, é isomorfo a $C_0(\widehat{E}) \rtimes G$, como era esperado. Além disso, provamos também que $\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[E] \rtimes G$. Como um exemplo, usamos o semigrupo universal de um grupo G, $S(G)$ e vimos que $C^*\left(S(G)\right) \cong C_0\left(\widehat{E}\right) \rtimes_\theta G$, em que $\widehat{E}$ é o conjunto das funções $\tau : G \to \{0,1\}$ tais que $\tau(1) = 1$.

APÊNDICE A – Ações parciais e produtos cruzados

Para provar os resultados deste trabalho é necessário estudar ações parciais e também produtos cruzados parciais. Para isso, o livro de (EXEL, 2015) será usado como referência.

A.1 AÇÕES PARCIAIS

Definição 50. *Sejam* $\boldsymbol{X}$ *um conjunto e* $\boldsymbol{G}$ *um grupo com unidade* $\boldsymbol{1}$*. Uma* ação parcial de $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{X}$ *é um par*

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\{\boldsymbol{D_g}\}_{g\in G}, \{\boldsymbol{\theta_g}\}_{g\in G}\right)$$

em que $\{\boldsymbol{D_g}\}_{\boldsymbol{g}}$ *é uma coleção de subconjuntos de* $\boldsymbol{X}$*, e* $\{\boldsymbol{\theta_g}\}_{\boldsymbol{g}}$ *é uma coleção de aplicações*

$$\boldsymbol{\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g}$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

i. $\boldsymbol{D_1 = X}$ *e* $\boldsymbol{\theta_1}$ *é a identidade;*

ii. $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h \subset \theta_{gh}}$.

O item *ii* da definição significa que no conjunto dos pontos onde é possível fazer a composição $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h}$ temos que $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}}$. Além disso, o domínio de $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h}$ está contido no domínio de $\boldsymbol{\theta_{gh}}$. Note que o domínio de $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h}$ é o conjunto dos elementos $\boldsymbol{x \in D_{h^{-1}}}$ tais que $\boldsymbol{\theta_h(x) \in D_{g^{-1}}}$, ou seja, o domínio de $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_h}$ é $\boldsymbol{\theta_{h^{-1}}(D_h \bigcap D_{g^{-1}})}$. No caso em que $\boldsymbol{D_g = X}$ para todo $\boldsymbol{g \in G}$ dizemos que a ação é global.

Definição 51. *À quadrupla* $\left(\boldsymbol{X, G, \{D_g\}_g, \{\theta_g\}_g}\right)$*, em que* $\boldsymbol{\theta}$ *é uma ação parcial, chamamos de* sistema dinâmico parcial*.*

Proposição 52. *Seja* $\boldsymbol{\theta}$ *uma ação parcial de* $\boldsymbol{G}$ *sobre* $\boldsymbol{X}$*. Então cada* $\boldsymbol{\theta_g}$ *é uma bijeção de* $\boldsymbol{D_{g^{-1}}}$ *em* $\boldsymbol{D_g}$ *e além disso* $\boldsymbol{\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}}$

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{\theta}$ seja uma ação parcial. Pelo item *ii* da definição de ação parcial, sabemos que

$$\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \subset \theta_{gg^{-1}} = \theta_{1_g}}$$

Então a composição $\boldsymbol{\theta_g \circ \theta_{g^{-1}}}$ é a identidade em seu domínio, que é o conjunto dos pontos $\left\{\boldsymbol{x \in D_g ; \theta_{g^{-1}}(x) \in D_{g^{-1}}}\right\}$, mas sendo $\boldsymbol{\theta}$ uma ação parcial, este conjunto é exatamente $\boldsymbol{D_g}$. Analogamente,

$$\boldsymbol{\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g \subset \theta_{g^{-1}g} = \theta_{1_g}}$$

Mas o domínio de $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g$ é $D_{g^{-1}}$. Dessa forma, temos que

$$Id_{D_{g^{-1}}} = \theta_g \circ \theta_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$$

$$Id_{D_g} = \theta_{g^{-1}} \circ \theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$$

O que mostra que θ_g e $\theta_{g^{-1}}$ são inversíveis e que $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. ■

Vejamos uma equivalência para a definição de ações parciais.

Proposição 53. *Sejam* $\{D_g\}_g$ *uma coleção de subconjuntos de* X *e* $\{\theta_g\}_g$ *uma coleção de aplicações* $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$. *Temos que,* $\theta = \left(\{D_g\}_g, \{\theta_g\}_g\right)$ *é uma ação parcial se, e somente se,* $D_1 = X$, θ_1 *é aplicação identidade e*

i. $\theta_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right) \subset D_{gh}$

ii. $\theta_g\left(\theta_h(x)\right) = \theta_{gh}(x)$ *para todo* $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$

Demonstração. Suponha que $\theta = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ seja uma ação parcial. Pelo item i da Definição 50, segue que $D_1 = X$, θ_1 é aplicação identidade.

Seja $x \in \theta_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right)$, então existe $y \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ tal que $x = \theta_g(y)$. Como $y \in D_h$, existe $t \in D_{h^{-1}}$ tal que $\theta_h(t) = y$ que pertence a $D_{g^{-1}}$. Dessa forma, y pertence ao domínio de $\theta_g \circ \theta_h$ que, pelo item ii da Definição 50, está contido em $D_{h^{-1}g^{-1}}$ e, também,

$$x = \theta_g\left(\theta_h(t)\right) = \theta_{gh}(t) \in D_{gh}.$$

Logo, $\theta_g\left(D_{g^{-1}} \cap D_h\right) \subset D_{gh}$.

Para provar o item ii, seja $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}$. Neste caso, existe $y \in D_{gh}$ tal que $x = \theta_{(gh)^{-1}}(y)$, ou seja, $y = \theta_{gh}(x)$. Como $x \in D_{h^{-1}}$, temos que $\theta_{(gh)^{-1}}(y) \in D_{h^{-1}}$, com isso

$$\theta_h(x) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}(y)\right) = \theta_{hh^{-1}g^{-1}}(y) = \theta_{g^{-1}}(y)$$

Assim,

$$\theta_g\theta_h(x) = \theta_g\theta_{g^{-1}}(y) = y = \theta_{gh}(x) \text{ para } x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}.$$

Reciprocamente, suponha que $D_1 = X$ e $\theta_1 = id$ e que as condições i e ii do enunciado desta proposição sejam satisfeitas.

Pelo item i, $\theta_{h^{-1}}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) \subset D_{h^{-1}g^{-1}} = D_{(gh)^{-1}}$, ou seja, o

domínio de $\theta_g\theta_h$ está contido no domínio de θ_{gh}.
Seja $x \in \theta_{h^{-1}}\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right)$, que está contido em $D_{h^{-1}g^{-1}}$ e, além disso, $x = \theta_{g^{-1}}(y)$ para algum $y \in D_h$, ou seja, $x \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$. Pelo item ii, temos

$$\theta_g\left(\theta_h(x)\right) = \theta_{gh}(x).$$

Portanto, θ é ação parcial. ■

Proposição 54. *Se* $\theta = \left(\{D_g\}_g, \{\theta_g\}_g\right)$ *é uma ação parcial de* G *sobre* X*, então*

$$\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh} \text{ para quaisquer } g, h \in G.$$

Demonstração. Pela Proposição 53, sabemos que $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset \cap D_{gh}$. Seja $x \in \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$, então existe $y \in D_{g^{-1}}$ tal que $x = \theta_g(y) \in D_g$. Dessa forma, $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subset D_g \cap D_{gh}$.

Para a outra inclusão, seja $x \in D_g \cap D_{gh}$. Deste modo, existem $y \in D_{g^{-1}}$ e $t \in D_{(gh)^{-1}}$ tais que

$$\theta_g(y) = x = \theta_{gh}(t)$$

Isso garante que $\theta_{gh}(t) \in D_g$ e, sendo θ uma ação parcial,

$$y = \theta_{g^{-1}}\theta_g(y) = \theta_{g^{-1}}\theta_{gh}(t) = \theta_h(t) \in D_h$$

Logo, y que pertence a $D_{g^{-1}} \cap D_h$ é tal que $x = \theta_g(y)$, ou seja, $x \in \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h)$. O que prova a igualdade dos dois conjuntos. ■

Observe que se θ é uma ação parcial, então para cada $g \in G$

$$\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$$

é uma bijeção entre subconjuntos de X, ou seja, cada θ_g é uma bijeção parcial de X. Visto isso, podemos ver uma ação parcial como uma aplicação

$$\theta : G \to I(X).$$

A proposição abaixo nos diz sob quais condições uma aplicação θ como acima é uma ação parcial.

Proposição 55. *Sejam* G *um grupo,* X *um conjunto e*

$$\theta : G \to I(X)$$

uma aplicação. Então $\boldsymbol{\theta}$ *é uma ação parcial se, e somente se, para quaisquer* $\boldsymbol{g, h \in G}$

i. $\boldsymbol{\theta_1}$ *é a aplicação identidade em* $\boldsymbol{X}$*.*

ii. $\boldsymbol{\theta_g^* = \theta_{g^{-1}}}$

iii. $\boldsymbol{\theta_{gh}\theta_{h^{-1}} = \theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}}$

iv. $\boldsymbol{\theta_{g^{-1}}\theta_{gh} = \theta_{g^{-1}}\theta_g\theta_h}$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Da definição de ação parcial, temos que $\boldsymbol{\theta_1}$ é a identidade em $\boldsymbol{X}$. No exemplo 4 vimos que $\boldsymbol{\theta_g^* = \theta_g^{-1}}$. Mas pela proposição 52 sabemos que $\boldsymbol{\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}}$, logo $\boldsymbol{\theta_g^* = \theta_{g^{-1}}}$. Para provar que $\boldsymbol{\theta_{gh}\theta_{h^{-1}} = \theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}}$, note que o domínio de $\boldsymbol{\theta_{gh}\theta_{h^{-1}}}$ é o conjunto $\boldsymbol{\theta_h\left(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}\right)}$ e o domínio de $\boldsymbol{\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}}$ é o conjunto dos $\boldsymbol{x \in D_h}$ tais que $\boldsymbol{x = \theta_h\theta_{h^{-1}}(x) \in D_{g^{-1}}}$, ou seja, $\boldsymbol{D_h \cap D_{g^{-1}}}$. Agora note que pela proposição 54 para quaisquer $\boldsymbol{t, s \in G}$ temos $\boldsymbol{\theta_t\left(D_{t^{-1}} \cap D_s\right) = D_t \cap D_{ts}}$, em particular para $\boldsymbol{t = h}$ e $\boldsymbol{s = h^{-1}g^{-1}}$ temos

$$\boldsymbol{\theta_h\left(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}\right) = D_h \cap D_{hh^{-1}g^{-1}} = D_h \cap D_{g^{-1}}}$$

Portanto, essas duas aplicações tem o mesmo domínio. Sendo assim, seja $\boldsymbol{x \in \theta_h\left(D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}\right)}$, logo $\boldsymbol{y := \theta_{h^{-1}}(x) \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}}$ e, pela proposição 53, segue que $\boldsymbol{\theta_g\theta_h(y) = \theta_{gh}(y)}$, ou seja,

$$\boldsymbol{\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}(x) = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}(x)}$$

o que mostra o desejado.

Pelo que acabamos de provar, temos que $\boldsymbol{\theta_{st}\theta_{t^{-1}} = \theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}}$ para todo $\boldsymbol{s, t \in G}$ e usando que $\boldsymbol{\theta_g^* = \theta_{g^{-1}}}$ temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta_t\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}} &= \boldsymbol{\theta_{t^{-1}}^*\theta_t^*\theta_s^* = [\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}]^*}\\ &= \boldsymbol{[\theta_{st}\theta_{t^{-1}}]^* = \theta_{t^{-1}}^*\theta_{st}^* = \theta_t\theta_{t^{-1}s^{-1}}}\end{aligned}$$

Em particular, para $\boldsymbol{t = g^{-1}, s = h^{-1}}$, temos que

$$\boldsymbol{\theta_{g^{-1}}\theta_g\theta_h = \theta_{g^{-1}}\theta_{gh}}.$$

($\Leftarrow$) Suponha que os itens i - iv sejam satisfeitos. Precisamos provar que $\boldsymbol{\theta_g\theta_h \subset \theta_{gh}}$. Inicialmente vamos provar que o domínio de $\boldsymbol{\theta_g\theta_h}$ está contido em $\boldsymbol{D_{gh}}$. Seja $\boldsymbol{x \in D_{h^{-1}}}$ e tal que $\boldsymbol{\theta_h(x) \in D_{g^{-1}}}$. Como o item ii nos diz que $\boldsymbol{\theta_{g^{-1}} = \theta_g^*}$, então $\boldsymbol{\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}}$, assim $\boldsymbol{\theta_h(x)}$

pertence ao domínio de $\theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}$, então pelo item iii, $\theta_h(x)$ pertence ao domínio de $\theta_{gh}\theta_{h^{-1}}$, logo $x = \theta_{h^{-1}}\theta_h(x) \in D_{gh}$. Além disso, existe único $y \in D_h$ tal que $x = \theta_{h^{-1}}(y)$, posto isto

$$\theta_{gh}(x) = \theta_{gh}\theta_{h^{-1}}(y) = \theta_g\theta_h\theta_{h^{-1}}(y) = \theta_g\theta_h(x).$$

O que mostra que $\theta_g\theta_h \subset \theta_{gh}$. ■

No Capítulo 2, a fim de provar o Teorema 29, usamos que toda ação de um semigrupo inverso E-unitário sobre um conjunto X induz uma ação parcial de $G(S)$ sobre X. Vejamos a demonstração para este fato.

A.1.1 Ação parcial topológica

Definição 56. *Seja $\theta = \left(\{D_g\}_g, \{\theta_g\}_g\right)$ uma ação parcial de G sobre um espaço topológico X. Se para cada $g \in G$ o conjunto D_g é um aberto de X e θ_g é um homeomorfismo, então dizemos que θ é uma* ação parcial topológica.

Definição 57. *Um* sistema dinâmico parcial topológico *é uma quádrupla $\left(X, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ em que $\theta = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ é uma ação parcial topológica do grupo G sobre X.*

Um homeomorfismo parcial é uma aplicação $f \in I(X)$ tal que seu domínio e sua imagem de f são subconjuntos abertos de X e f for um homeomorfismo de seu domínio em sua imagem. Denotamos o conjunto de todos os homeomorfismos parciais de X é denotado por $pHomeo(X)$. Se θ é uma ação parcial topológica de G sobre X, então podemos ver esta ação como uma aplicação

$$\theta : G \to pHomeo(X).$$

Vejamos sob quais condições uma aplicação θ como acima é uma ação parcial topológica.

Proposição 58. *Sejam G um grupo, X um espaço topológico e*

$$\theta : G \to pHomeo(X)$$

uma aplicação. Então θ é uma ação parcial topológica se, e somente se, as condições i a iv da proposição 55 são satisfeitas.

Demonstração. Já sabemos que $\boldsymbol{\theta}$ é ação parcial se e somente se, i a iv da proposição 55 são satisfeitas. Além disso, como $\boldsymbol{\theta}$ é uma aplicação de $\boldsymbol{G}$ em $\boldsymbol{phomeo(X)}$, então para cada $\boldsymbol{g \in G}$ temos que $\boldsymbol{\theta_g}$ é homeomorfismo e $\boldsymbol{D_g}$ é aberto de $\boldsymbol{X}$, então $\boldsymbol{\theta}$ é ação parcial topológica.

■

A.1.2 Ações parciais algébricas e produtos cruzados parciais algébricos

Definição 59. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{A}$ uma álgebra. Dizemos que uma ação parcial $\boldsymbol{\theta}$ de $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{A}$ é uma* ação parcial algébrica *se para cada $\boldsymbol{g \in G}$ o conjunto $\boldsymbol{D_g}$ é um ideal de $\boldsymbol{A}$ e cada $\boldsymbol{\theta_g}$ é um isomorfismo. Se $\boldsymbol{A}$ é uma $*$-álgebra, uma ação parcial $\boldsymbol{\theta}$ de $\boldsymbol{G}$ sobre $\boldsymbol{A}$ é uma* ação parcial $*$-algébrica *se para cada $\boldsymbol{g \in G}$ o conjunto $\boldsymbol{D_g}$ é um ideal autoadjunto de $\boldsymbol{A}$ e cada $\boldsymbol{\theta_g}$ é um $*$-isomorfismo.*

Podemos ver uma ação parcial álgebrica, no caso de $\boldsymbol{A}$ ser uma álgebra, ou uma ação parcial $*$-algébrica, se $\boldsymbol{A}$ for uma $*$-álgebra, como uma aplicação

$$\boldsymbol{\theta : G \to I(A)}$$

em que o domínio de cada $\boldsymbol{\theta_g}$ é um ideal (autoadjunto, no caso de $\boldsymbol{A}$ ser uma $*$-álgebra) e cada $\boldsymbol{\theta_g}$ for um isomorfismo ($*$-isomorfismo). Pela Proposição 55, temos que uma aplicação $\boldsymbol{\theta}$ como acima é ação parcial álgebrica (ou $*$-algébrica) se, e somente se, satisfaz os itens i - iv desta proposição.

No primeiro capítulo, vimos a definição de produto semidireto de um semirreticulado $\boldsymbol{E}$ por um grupo $\boldsymbol{G}$ via uma ação parcial $\boldsymbol{\theta}$. Analogamente, poderíamos definir um produto semidireto de uma álgebra (ou $*$-álgebra) por um grupo. No entanto, quando falamos de álgebras não temos apenas uma operação de multiplicação, mas também soma e multiplicação por escalar. Assim, vamos definir produto cruzado parcial.

Definição 60. *O* produto cruzado parcial algébrico *da álgebra $\boldsymbol{A}$ pelo grupo $\boldsymbol{G}$ via a ação parcial $\boldsymbol{\theta}$ é a álgebra $\boldsymbol{A} \rtimes_{alg} \boldsymbol{G}$ formada por todas as somas finitas*

$$\sum_{\boldsymbol{g \in G}}^{finito} \boldsymbol{a_g \delta_g}$$

em que cada $\boldsymbol{a_g \in D_g}$ e $\boldsymbol{\delta_g}$ indica que $\boldsymbol{a_g}$ pertence a $\boldsymbol{D_g}$.

Observação 21. Dois elementos $\sum_{g\in G} a_g\delta_g$ e $\sum_{g\in G} b_g\delta_g$ do produto cruzado são iguais se $a_g = b_g$ para todo $g \in G$.

Por enquanto denote o produto cruzado parcial algébrico por $A \rtimes G$. Em $A \rtimes G$ definimos as operações de multiplicação por escalar e adição por

$$\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{g\in G} b_g\delta_g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\,\delta_g$$

$$\lambda \sum_{g\in G} a_g\delta_g = \sum_{g\in G} (\lambda a_g)\,\delta_g$$

Podemos ainda definir uma operação de multiplicação em $A \rtimes G$, mas primeiro defina

$$a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h = \theta_g\left(\theta_g^{-1}(a_g)b_h\right)\delta_{gh}$$

em que $g, h \in G$ e $a_g \in D_g$, $b_h \in D_h$. Assim, definimos a multiplicação em $A \rtimes G$ por

$$\sum_{g\in G} a_g\delta_g \cdot \sum_{h\in G} b_h\delta_h = \sum_{g,h\, \in G} \theta_g\left(\theta_g^{-1}(a_g)b_h\right)\delta_{gh}$$

Lema 61. *A operação de multiplicação em $A \rtimes G$ é associativa se, e somente se, para $h \in G$, $b \in D_h$, $a, c \in A$ tem-se*

$$a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)\,c\right) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(ab)\,c\right).$$

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponha que a multiplicação em$A \rtimes G$ seja associativa. Então para quaisquer $a\delta_g$, $b\delta_h$, $c\delta_k \in A \rtimes G$ temos que

$$\theta_{gh}\left[\theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)\right)c\right] = \theta_g\left[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right)\right]$$

Em particular, se $g = 1$,

$$\theta_{1h}\left[\theta_{h^{-1}1}\left(\theta_1\left(\theta_1(a)b\right)\right)c\right] = \theta_1\left[\theta_1(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right)\right]$$

Então

$$\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(ab)\,c\right) = a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right).$$

$\Leftarrow$ Suponha que $x\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)\,c\right) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(xb)\,c\right)$ para todo $h \in G$, $b \in D_h$, $x, c \in A$. Em particular, para $x = \theta_{g^{-1}}(a)$

com $a \in D_g$, temos

$$\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right) = \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)c\right).$$

Além disso $\theta_{g^{-1}}(a)b = \theta_{g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)$, pois $\theta_{g^{-1}}(a)b \in D_{g^{-1}}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right) &= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)c\right)\\ &= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)c\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\theta_g\left[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right)\right] &= \theta_g\left[\theta_h\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)c\right)\right]\\ &= \theta_{gh}\left(\theta_{h^{-1}g^{-1}}\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)c\right).\end{aligned}$$

Pela forma como a multiplicação no produto cruzado foi definida e pelo que foi provado assim, segue que

$$\begin{aligned}\left(a\delta_g b\delta_h\right)c\delta_k &= \theta_{gh}\left[\theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)b\right)\right)c\right]\delta_{ghk}\\ &= \theta_g\left[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right)\right]\delta_{ghk}\\ &= a\delta_g\left(b\delta_h c\delta_k\right).\end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação é associativa.

$\blacksquare$

Proposição 62. *Seja* $\theta = \left(\{D_g\},(\theta_g)\right)$ *uma ação parcial algébrica de* G *sobre* A*. Então*

$$\phi : A \to A \rtimes G$$

$$a \mapsto a\delta_1$$

é um homomorfismo injetor.

Demonstração. Inicialmente, veja que ϕ é homomorfismo. Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $a, b \in A$. Temos que

$$\phi\left(\lambda a + b\right) = \left(\lambda a + b\right)\delta_1 = \left(\lambda a\right)\delta_1 + b\delta_1 =$$

$$\lambda\left(a\delta_1\right) + b\delta_1 = \lambda\phi\left(a\right) + \phi\left(b\right)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\phi(a)\cdot\phi(b) &= (a\delta_1)\cdot(b\delta_1)=\theta_1(\theta_1(a)\,b)\,\delta_{1\cdot 1}\\ &= (\theta_1(a)\,b)\,\delta_1=(ab)\,\delta_1=\phi(ab)\end{aligned}$$

Para a injetividade, sejam $a, b \in A$ tais que $\phi(a) = \phi(b)$. Então $a\delta_1 = b\delta_1$, mas isso implica que $a = b$ pela Observação 21. ■

Seja $\theta = (\{D_g\}, \{\theta_g\})$ uma ação parcial $*-$algébrica de G sobre A, defina

$$* : A \rtimes G \to A \rtimes G$$

$$a\delta_g \mapsto \theta_{g^{-1}}(a^*)\,\delta_{g^{-1}}$$

Proposição 63. *A aplicação $*$ acima satisfaz:*

i. $\left((a\delta_g)^*\right)^* = a\delta_g$

ii. $(\lambda a\delta_g + b\delta_g)^* = \bar{\lambda}(a\delta_g)^* + (b\delta_g)^*$

iii. $(a\delta_g \cdot b\delta_h)^* = (b\delta_h)^* \cdot (a\delta_g)^*$

Demonstração. i.

$$\begin{aligned}\left((a\delta_g)^*\right)^* &= \left(\theta_{g^{-1}}(a^*)\,\delta_{g^{-1}}\right)^*\\ &= \theta_g\left(\left(\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)^*\right)\delta_{\left(g^{-1}\right)^{-1}}\\ &= \theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a^{**})\right)\delta_g\\ &= id(a)\,\delta_g\\ &= a\delta_g\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}(\lambda a+b)^* &= \theta_{g^{-1}}\left((\lambda a+b)^*\right)\delta_{g^{-1}}\\ &= \theta_{g^{-1}}\left(\bar{\lambda}a^*+b^*\right)\delta_{g^{-1}}\\ &= \bar{\lambda}\theta_{g^{-1}}(a^*)\,\delta_{g^{-1}}+\theta_{g^{-1}}(b^*)\,\delta_{g^{-1}}\\ &= \bar{\lambda}(a\delta_g)^*+(b\delta_g)^*\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}(a\delta_g\cdot b\delta_h)^* &= \left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)\,b\right)\delta_{gh}\right)^*\\ &= \theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a)\,b\right)\right)^*\right)\delta_{h^{-1}g^{-1}}\\ &= \theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\theta_g\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\right)\delta_{h^{-1}g^{-1}} \quad (A.1)\end{aligned}$$

Visto que cada D_g é ideal autoadjunto, $a^* \in D_g$, então $\theta_{g^{-1}}(a^*) \in D_{g^{-1}}$ e como $b^* \in D_h$, tem-se que $b^*\theta_{g^{-1}}(a^*) \in D_h \cap D_{g^{-1}}$. Logo, $\theta_g\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right) \in \theta_g\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right)$, mas pela Proposição 54 $\theta_g\left(D_h \cap D_{g^{-1}}\right) = D_g \cap D_{gh}$, então pela Proposição 53 , temos que

$$\begin{aligned}\theta_{h^{-1}g^{-1}}\left(\theta_g\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\right) &= \theta_{h^{-1}}\theta_{g^{-1}}\left(\theta_g\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\right)\\ &= \theta_{h^{-1}}\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right) \qquad \text{(A.2)}\end{aligned}$$

Das equações A.1 e A.2, temos que

$$(a\delta_g \cdot b\delta_h)^* = \theta_{h^{-1}}\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\delta_{h^{-1}g^{-1}}. \qquad \text{(A.3)}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}(b\delta_h)^* \cdot (a\delta_g)^* &= \theta_{h^{-1}}(b^*)\,\delta_{h^{-1}} \cdot \theta_{g^{-1}}(a^*)\,\delta_{g^{-1}}\\ &= \theta_{h^{-1}}\left(\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b^*)\right)\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\delta_{h^{-1}g^{-1}}\\ &= \theta_{h^{-1}}\left(b^*\theta_{g^{-1}}(a^*)\right)\delta_{h^{-1}g^{-1}} \qquad \text{(A.4)}\end{aligned}$$

Comparando as equações A.3 e A.4 o resultado segue.

■

Note que para que $A \rtimes_{alg} G$ seja uma $*-$álgebra, ainda é necessário que a multiplicação seja associativa.

A.2 PRODUTO CRUZADO PARCIAL C^*-ALGÉBRICO

Sejam A uma C^*-álgebra e G um grupo.

Definição 64. *Uma* ação parcial C^*-algébrica de G sobre A *é uma ação parcial* $\theta = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ *na qual para cada* $g \in G$, *tem-se*

i. D_g *é um ideal fechado de* A.

ii. θ_g *é um* $*$*-isomorfismo de* $D_{g^{-1}}$ *em* D_g.

Como cada D_g é um ideal fechado de A, então cada D_g é uma sub-C^*-álgebra. Além disso, sendo θ_g um $*$-isomorfismo entre C^*-álgebras segue que θ_g é contrativo e, portanto, contínuo.

Definição 65. *Dizemos que* $\varphi \in I(A)$ *é um automorfismo parcial de* A *se o seu domínio e imagem são ideais bilaterais fechados de* A *e* φ

for um $*$-isomorfismo de seu domínio em sua imagem. Denotamos por $pAut(A)$ *o conjunto de todos os automorfismos parciais de* A.

Proposição 66. *Seja* $\theta : G \to pAut(A)$ *uma aplicação. Então* θ *é uma ação parcial* C^**-algébrica se, e somente se, satisfaz as condições i - iv da Proposição 55.*

A demonstração deste fato é imediata pela forma como automorfismos parciais e ações parciais C^*-algébricas foram definidos e pela Proposição 55. A quádrupla $\left(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ em que A é uma C^*-álgebra, G é um grupo e θ é uma ação parcial C^*-algébrica é chamada de *sistema dinâmico* C^**-algébrico.*

Fixe $\theta = \left(\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}\right)$ uma ação parcial C^*-algébrica. Como todo ideal fechado de uma C^*-álgebra é autoadjunto, temos que, em particular, θ é uma ação parcial $*$-algébrica. Com isso, podemos tomar o produto cruzado algébrico de A pelo grupo G via a ação parcial θ, $A \rtimes_{alg} G$.

Teorema 67. *Seja* $\theta = (\{D_g\}, \{\theta_g\})$ *uma ação parcial* C^**-algébrica de* G *sobre a* C^**-álgebra* A*. Então* $A \rtimes_{alg} G$ *é associativo.*

Demonstração. Suponha que $\theta = (\{D_g\}, \{\theta_g\})$ seja uma ação parcial C^*-algébrica de G sobre A e sejam $h \in G$, $b \in D_h$, $a, c \in A$. Como D_h é um ideal autoadjunto de A, em particular, é uma C^*-álgebra e, assim, admite uma unidade aproximada, digamos $\{e_i\}_{i\in I}$. Com isso, e sabendo que θ_g é contínua para todo $g \in G$, temos

$$\begin{aligned}
a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)c\right) &= a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(\lim_i be_i)c\right)\\
&= a\theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(be_i)c\right)\\
&= a\theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(b)\theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)\lim_i \theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= a\theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(b)\right)\theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(e_i)c\right) =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ab\theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(ab)\right)\theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(ab)\lim_i \theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(ab)\theta_{h^{-1}}(e_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\lim_i \theta_{h^{-1}}(abe_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(\lim_i abe_i)c\right)\\
&= \theta_h\left(\theta_{h^{-1}}(ab)c\right)
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 61, este produto cruzado parcial algébrico é associativo. ■

Lema 68. *Seja B uma C^*-álgebra com relação a norma $\|\cdot\|$. Se p é uma C^*-seminorma sobre B, então*

$$p(b) \leqslant \|b\| \;\; \forall\; b \in B.$$

Demonstração. Defina $J := \{b \in B; p(b) = 0\}$. Se $b \in J$ e $a \in B$ é qualquer temos que $0 \leqslant p(ab) \leqslant p(a)p(b) = 0$, e da mesma forma $p(ba) = 0$, donde J é ideal de B. Defina uma norma $|\cdot| : B/J \to \mathbb{R}$ por

$$|b + I| := p(x).$$

Seja $A := \overline{B/J}$ o completamento de B/J com respeito a esta norma norma, então a aplicação quociente

$$\psi : B \to \overline{B/J}$$

entre as C^*-álgebras B e A é um $*$-homomorfismo e, portanto, é contrativo, deste modo para $b \in B$, temos

$$p(b) = |b + I| = |\psi(b)| \leqslant \|b\|\,.$$

■

Proposição 69. *Seja p uma C^*-seminorma sobre $A \rtimes_{alg} G$. Então,* *para* $a = \sum_{g \in G} a_g \delta_g \in A \rtimes_{alg} G$, *temos que*

$$p(a) \leqslant \sum_{g \in G} \|a_g\| .$$

Demonstração. Pela definição de C^*-seminorma temos

$$\begin{aligned} p(a_g\delta_g)^2 &= p\left((a_g\delta_g)(a_g\delta_g)^*\right) \\ &= p\left((a\delta_g)\left(\theta_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}}\right)\right) \\ &= p\left(\theta_g\left(\theta_{g^{-1}}(a_g)\theta_{g^{-1}}(a_g^*)\right)\delta_{gg^{-1}}\right) \\ &= p\left(\theta_g\theta_{g^{-1}}(a_g a_g^*)\delta_1\right) = p(a_g a_g^* \delta_1) \end{aligned}$$

Além disso, vimos que $A\delta_1 \cong A$, então pelo Lema 68 temos que $p(a\delta_1) \leqslant \|a\|$ para todo $a \in A$, logo

$$p(a_g\delta_g)^2 \leqslant p\left(a_g(a_g)^*\delta_1\right) \leqslant \left\|a_g a_g^*\right\| = \|a_g\|^2$$

Portanto, para todo $g \in G$, tem-se que $p(a_g\delta_g) \leqslant \|a_g\|$. Com isso e pela desigualdade triangular da definição de seminorma, temos

$$p(a) = p\left(\sum_{g \in G} a_g\delta_g\right) \leqslant \sum_{g \in G} p(a_g\delta_g) \leqslant \sum_{g \in G} \|a_g\| .$$

■

Para $a = \sum_{g \in G} a_g\delta_g \in A \rtimes_{alg} G$, defina

$$\|a\|_{max} = sup\,\{p(a); p \text{ é seminorma em } A \rtimes_{alg} G\}$$

Afirmação 70. $\|\cdot\|_{max}$ é seminorma em $A \rtimes_{alg} G$ e é finito.

Demonstração. É finito pois a proposição acima nos diz que $p(a) \leqslant \sum_{g \in G} \|a_g\|$ e o produto cruzado algébrico consiste de combinações lineares finitas.

i.

$$\begin{aligned} \|a+b\| &= \sup_p p(a+b) \leqslant \sup_p \left(p(a)+p(b)\right) \\ &\leqslant \sup_p p(a) + \sup_p p(b) = \|a\| + \|b\| \end{aligned}$$

ii.

$$\|\lambda a\| = \sup_p\ p(\lambda a) = \sup_p\ |\lambda|\, p(a) = |\lambda| \sup_p\ p(a) = |\lambda|\, \|a\|$$

iii.

$$\begin{aligned} \|ab\| &= \sup_p\ p(ab) \leqslant \sup_p \left(p(a)p(b)\right) \\ &= \sup_p\ p(a) \sup_p\ p(b) = \|a\|\, \|b\| \end{aligned}$$

iv.

$$\|a\| = \sup_p\ p(a) = \sup_p\ p(a^*) = \|a^*\|$$

v.

$$\|a^*a\| = \sup_p\ p(a^*a) = \sup_p\ p(a)^2 = \left(\sup_p\ p(a)\right)^2 = \|a\|^2$$

■

Observação 22. Para cada $a \in A \rtimes_{alg} G$ não nulo é possível construir uma seminorma p tal que $p(a) \neq 0$. Dessa forma, $\|\cdot\|_{max}$ é uma C^*-norma.

Definição 71. *O* produto cruzado parcial C^*−algébrico de A por G via θ *é o completamento de* $A \rtimes_{alg} G$ *com respeito a norma* $\|\cdot\|_{max}$. *Denotaremos este produto cruzado por* $A \rtimes G$.

REFERÊNCIAS

EXEL, R. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 126, n. 12, p. 3481–3494, 1998.

EXEL, R. Inverse semigroups and combinatorial c*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 39, n. 2, p. 191–313, 2008.

EXEL, R. Partial dynamical systems, fell bundles and applications. *arXiv preprint arXiv:1511.04565*, 2015.

EXEL, R.; GIORDANO, T.; GONÇALVES, D. Envelope algebras of partial actions as groupoid c*-algebras. *Journal of Operator Theory*, v. 65, n. 1, p. 197–210, 2011.

KELLENDONK, J.; LAWSON, M. V. Partial actions of groups. *International Journal of Algebra and Computation*, World Scientific, v. 14, n. 01, p. 87–114, 2004.

LAWSON, M. V. *Inverse Semigroups: The theory of partial symmetries*. [S.l.]: World Scientific, 1998.

MCALISTER, D. Groups, semilattices and inverse semigroups. ii. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 196, p. 351–370, 1974.

MILAN, D.; STEINBERG, B. On inverse semigroup c*-algebras and crossed products. *Groups, Geometry, and Dynamics*, v. 8, n. 2, p. 485–512, 2014.

MUNKRES, J. R. *Topology*. [S.l.]: Prentice Hall, 2000.

MURPHY, G. J. *C*-Algebras and Operator Theory*. San Diego: Academic Press, 1990. 296 p. ISBN 0125113609.

PATERSON, A. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

PETRICH, M.; REILLY, N. A representation of e-unitary inverse semigroups. *The Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford Univ Press, v. 30, n. 3, p. 339–350, 1979.