Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Estudo assintótico para um modelo de evolução com operadores fracionários e coeficiente dependendo do tempo

Jéssika Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis

Setembro de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Estudo assintótico para um modelo de evolução com operadores fracionários e coeficiente dependendo do tempo

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Jéssika Ribeiro

Florianópolis
Setembro de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ribeiro, Jéssika
Estudo assintótico para um modelo de evolução com operadores fracionários e coeficiente dependendo do tempo / Jéssika Ribeiro ; orientador, Cleverson Roberto da Luz - Florianópolis, SC, 2016.
165 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Equação de Evolução. 3. Dissipação com Coeficiente Dependendo do Tempo. 4. Propriedades Assintóticas da Solução. 5. Equações Diferenciais Parciais. I. Luz, Cleverson Roberto da. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Estudo assintótico para um modelo de evolução com operadores fracionários e coeficiente dependendo do tempo

por

Jéssika Ribeiro[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
(UFSC)

Prof. Dr. Paulo Mendes de Carvalho Neto
(UFSC)

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
(USP)

Florianópolis, setembro de 2016.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

O estudo da Matemática é o mais indicado para desenvolver as faculdades, fortalecer o raciocínio e iluminar o espírito.

(Sócrates, Filósofo Grego)

Agradecimentos

Agradecer é uma arte, é um gesto de amor, é selar uma união, é admitir que houve um momento em que se precisou de alguém; é reconhecer que o homem jamais poderá lograr para si o dom de ser auto-suficiente. Ninguém se faz sozinho: sempre é preciso um olhar de apoio, uma palavra de incentivo, um gesto de compreensão, uma atitude de amor. A todos vocês, que compartilharam do meu ideal, dedico essa vitória com a mais profunda gratidão e respeito.

Primeiramente quero agradecer a Deus, por me conceder a graça de viver, saúde para que pudesse perseguir meus sonhos e por ter colocado em minha vida pessoas maravilhosas que me ajudam, me inspiram e me encorajam.

Falando em pessoas maravilhosas, quero agradecer aos meus pais, Elena e Nilson, pelo amor incondicional, pelo incentivo aos estudos, pela educação, pela compreensão e ajuda nos momentos difíceis e por ficarem mais felizes que eu por minhas conquistas. Vocês prepararam

cuidadosamente meu caminho para que o dia de hoje fosse possível. Amo vocês com todo meu coração!

À minha melhor amiga, que compartilha sobrenome comigo, Naise, que conhece minhas dificuldades e me apoia, pelo amor e atenção. Obrigada por ser minha companheirinha e guardiã das minhas melhores recordações. Tenho orgulho em ter você como irmã e estarei sempre ao seu lado! Te amo incondicionalmente.

Aos meus avós, pelo constante incentivo aos estudos, pelos ensinamentos, pela atenção e ajuda. Em especial a minha avó Elizia (in memorian), pelas tardes em que me fazia companhia enquanto eu estudava e pelos ensinamentos passados na maioria das vezes por seus gestos.

Ao meu namorado e amigo Fabio Casula, pela companhia, por me ouvir, pela paciência e compreensão, por todo o apoio e, claro, na condição de um bom matemático, por me ajudar também nos cálculos. Te admiro e te amo.

Aos meus amigos, Pierry, Francisca, Nico, D. Nerci, Sheyla, Oriana, Carlos e Ingrid e Domingos que sempre acreditaram em mim, me apoiaram, alguns me deram suporte matemático, fizeram parte das minhas melhores horas de lazer e me ajudaram a carregar o peso de dias difíceis, não medindo esforços para isso.

Aos meus colegas de mestrado pela companhia nos estudos, pela ajuda, pelos intervalos de aula regados a cafés, boas risadas e brainstormings sobre os exercícios.

Ao Prof. Cleverson, por ter aceitado ser meu orientador, pela sua prestatividade, competência, organização, paciência e dedicação (até mesmo nos finais de semana) comigo e com o nosso trabalho. Sem você nada disso seria possível. Meus sinceros agradecimentos.

As pessoas que me incentivaram a estudar matemática, em especial, Tia Mari, Prof. Simone, Prof. Vilmar, Prof. Oscar Janesch e Prof. Giuliano Boava.

A todos os professores que fizeram parte dessa jornada, pelas aulas, pelas monitorias, pela paciência e disposição em ajudar e também aos funcionários do departamento por toda assistência.

Á CAPES, pelo apoio financeiro nesse último ano.

Resumo

Neste trabalho estudamos propriedades da solução de uma equação σ-evolução, com o coeficiente do termo de amortecimento estrutural dependendo do tempo, baseado nas ideias de D'Abbicco-Ebert [6] e D'Abbicco-Charão-da Luz [5]. Para encontrar taxas explícitas de decaimento para a energia do problema em questão, dividimos o espaço de Fourier, $\mathbb{R}^n_\xi$, em duas regiões: alta e baixa frequência. Utilizamos diferentes métodos para cada região, considerando o caso com amortecimento "effective" dado pela condição $2\delta < \sigma(1+\alpha)$. Aplicamos o método de diagonalização usado por D'Abbicco-Ebert [6] para obter estimativas para a região de baixa frequência. Na alta frequência utilizamos o método desenvolvido por R. C. Charão, C. R da Luz e R. Ikehata em [3] e [4].

Abstract

In this work, we study properties of the solution for a σ-evolution equation with a time-dependent structural damping, based on the ideas of D'Abbicco-Ebert [6] and D'Abbicco-Charão-da Luz [5]. In order to obtain explicit decay rates for the energy of the associated Cauchy problem, we split the Fourier space, $\mathbb{R}^n_\xi$, in two regions: high and low frequency. We use different methods in each region to get our estimates,considering the effective damping case, given by condition $2\delta < \sigma(1+\alpha)$. We apply the diagonalization method used by D'Abbicco-Ebert [6] to obtain estimates in the low frequency region of the Fourier space. In the high frequency region we use the method developed by R. C. Charão, C. R da Luz and R. Ikehata in [3] and [4].

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar propriedades da solução de uma equação σ-evolução em $\mathbb{R}^n$, com o coeficiente do termo de amortecimento estrutural dependendo do tempo, usando o método descrito por D'Abbicco-Ebert [6] na baixa frequência e o método da energia no espaço de Fourier com multiplicadores adequados, usado por D'Abbicco-Charão-da Luz [5], na alta frequência.

Precisamente, queremos obter taxas explícitas de decaimento para a norma L^2 da solução do seguinte modelo:

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^\sigma u(t,x) + 2b(t)(-\Delta)^\delta u_t(t,x) = 0, \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde $\sigma > 0$, $\delta \in (0,\sigma)$, $2\delta < \sigma(1+\alpha)$ e $b(t) = \mu(1+t)^\alpha$ uma função positiva com $\mu > 0$ e $0 < \alpha < 1$.

O termo $2b(t)(-\Delta)^\delta u_t$ representa o amortecimento estrutural dependente do tempo e o operador $(-\Delta)^\delta$ é definido por $(-\Delta)^\delta v(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\delta}\widehat{v}(\xi))(x)$, para todo $v \in H^{2\delta}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathcal{F}$ denota a transformada de Fourier com respeito a variável x e representamos por $\widehat{v} = \mathcal{F}(v)$.

Naturalmente, o papel desempenhado pelo termo de amortecimento varia com a escolha do coeficiente $b(t)$ e dos paramêtros σ e δ. Devido a este fato, são necessárias diferentes aproximações para estudar a influência desses termos de amortecimento no perfil assintótico da solução, quando t vai para infinito. O modelo de interesse para o nosso trabalho é definido da seguinte maneira

$$b(t) = \mu(1+t)^\alpha \quad \text{para algum} \quad \mu > 0 \quad \text{e} \quad \alpha \in (0,1).$$

Temos que para uma classe específica de coeficientes $b(t)$ que dependem dos expoentes fracionários σ e δ, o perfil assintótico da solução de (1), quando $t \to \infty$, é o mesmo do problema

$$v_t(t,x) + \frac{1}{2b(t)}(-\Delta)^{\sigma-\delta}v(t,x) = 0, \quad v(0,x) = v_0(x), \tag{2}$$

para uma escolha adequada de v_0, dependendo de $u_0, u_1, b(t), \sigma$ e δ.

O problema acima é chamado de problema de difusão anômala, que significa que, em geral, $\sigma - \delta \neq 1$, e corresponde a equação do calor, quando $\sigma - \delta = 1$.

Considerando outra classe de coeficientes $b(t)$ o perfil assintótico de (1) não se comporta da mesma maneira que o de (2). Em D'Abbicco-Ebert [6], é apresentada uma classificação completa diferenciando estes dois casos. O caso "effective" é quando o fenômeno de difusão anômala ocorre e a condição $2\delta < \sigma(1+\alpha)$ é satisfeita. O caso "non-effective" é quando o fenômeno de difusão anômala não ocorre. Nesse caso o perfil da solução de (1) está relacionado ao perfil da função resultado da aplicação do operador pseudo-diferencial $exp\Big(-(-\Delta)^{\delta}\int_0^t b(\tau)\,d\tau\Big)$ à solução do problema de Cauchy da equação de evolução livre $u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma}u = 0$, com dados iniciais adequados. Nesse caso considera-se a condição $2\delta > \sigma(1+\alpha)$.

Resultados similares podem ser obtidos para $-1 \leq \alpha < 0$. Para $\alpha < -1$ temos "scattering", enquanto para $\alpha > 1$ temos "overdamping".

A classificação apresentada segue de modo análogo ao que foi feito em J. Wirth [17]. Nesse paper, assumindo um controle adequado na oscilação de $b(t)$, ele propôs uma classificação para a equação da onda com amortecimento exterior ($\sigma = 1$ e $\delta = 0$), isto é

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + 2b(t)u_t(t,x) = 0 \qquad (u,u_t)(0,x) = (u_0,u_1)(x),$$

provando que o comportamento assintótico dessa equação tem mudanças profundas de acordo com as propriedades de $b(t)$.

Recentemente este tópico vem sendo fortemente estudado por vários autores, especialmente no que se refere a modelos com dissipação estrutural e com coeficientes dependentes do tempo. Abaixo destacamos alguns resultados importantes.

M. Reissig [15] explica a teoria das taxas de decaimento $L_p - L_q$ para modelos da onda com coeficientes que dependem do tempo, explicando a influência de ocilações nos coeficientes usando uma classificação precisa e destacando como a massa e os termos de dissipação influenciam essas taxas.

Em [16], M. Reissig e X. Lu estudaram o problema de Cauchy para uma família de modelos de amortecimento estrutural entre a equação clássica da onda com amortecimento e o modelo da onda com dissipação viscoelástica. No paper eles encontraram taxas de decaimento para a energia da solução do seguinte problema de Cauchy

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + b(t)(-\Delta)^{\sigma} u_t(t,x) = 0$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x),$$

onde $\sigma \in (0,1]$, $\delta \in [0,1]$ e $b(t) = \mu(1+t)^{-\delta}$ com $\mu > 0$. Aqui $-\Delta$ é o operador de Laplace, $(-\Delta)^{\sigma} u_t$ o termo de dissipação e $b(t)$ o coeficiente decrescente que depende do tempo.

M. K. Mezadek [14] investigou e apresentou estimativas para a energia de ordem mais altas associada a solução de problemas de Cauchy para modelos σ-evolução com amortecimento estrutural. O problema estudado foi

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\sigma} u(t,x) + b(t)(-\Delta)^{\delta} u_t(t,x) = 0$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad u_t(0,x) = u_1(x)$$

onde $\sigma > 1$, $\delta \in (0,\sigma]$ e $b(t)$ é uma função monótona positiva.

Neste trabalho apresentamos com detalhes os resultados para a equação de evolução dada em (1). Na baixa frequência, utilizamos o método descrito por D'Abbicco-Ebert [6], e, no contexto da alta frequêcia, usamos o método da energia no espaço de Fourier para o caso geral, que assume apenas que o termo de amortecimento estrutural dependente do tempo, $b(t)$, é uma função positiva monótona crescente e diferenciável por partes, obtido por D'Abbico-Charão-da Luz [5]. Na baixa frequência, devido ao comportamento da função $m(t,\xi)$, usamos a curva $\Gamma_N(t,\xi)$, para dividir a região de baixa frequência em duas zonas: elíptica e pseudo-diferencial e, em ambas separadamente, encontramos estimativas para a solução, provando que esta decai polinomialmente. Na região de alta frequência provamos que a energia total no espaço de Fourier decai exponencialmente.

O trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos. O primeiro capítulo foi escrito com o intuito de tornar o trabalho o mais auto-contido possível, e por isso, nele apresentamos as principais notações, definições e resultados preliminares sobre Espaços L^p, Teoria de Distribuições, Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas, Transformada de Fourier, Espaços de Sobolev e alguns lemas que usaremos no decorrer do texto.

No Capítulo 2 estudamos o problema na baixa frequência e encontramos estimativas para a energia baseado no método de diagonalização utilizado em [6]. Motivados pelos diferentes comportamentos de $m(t,\xi)$, apresentados no texto, introduzimos duas zonas de baixa frequência: Zona pseudo-diferencial, denotada por Z_{pd} e elíptica denotada por Z_{ell}^{low}.

No Capítulo 3 encontramos taxa de decaimento para a energia na alta frequência usando o método da energia para o caso geral, apresentado em [5]. Utilizamos o método dos multiplicadores e encontramos algumas estimativas e para concluir aplicamos o Lema de Martinez [11] de acordo com as propriedades das funções em questão. Utilizamos este método para apresentar ao leitor um método diferente ao apresentado na baixa frequência, visto que, seguindo o método utilizado em [6], os resultados para a alta frequência seguiam de modo similar aos apresentados na baixa.

Por fim, no Capítulo 4 provamos o resultado principal do trabalho usando os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3. Mais precisamente provamos que a solução do modelo satisfaz a seguinte estimativa para $\bar{\theta} > \frac{2\delta}{1+\alpha}$:

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad &\leq \quad Ct^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{11}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right) e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

com $\bar{\theta}$, k_{01} e k_{11} definidos no Teorema 4.2. Também encontramos resultados para $\theta < \frac{2\delta}{1+\alpha}$ e $\theta = \frac{2\delta}{1+\alpha}$.

Com alguns resultados que não foram usados na demonstração do resultado principal do trabalho montamos um apêndice. Os resultados apresentados no apêndice são utilizados para provar resultados de perfil assintótico, mais precisamente a otimalidade das estimativas lineares, isto é, para provar o Teorema 2 dado em [6].

Capítulo 1

Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos que serão utilizados nos próximos capítulos, a fim de auxiliar a prova do resultado principal. Não serão apresentadas demonstrações, por serem considerados resultados conhecidos. Contudo, vamos procurar referenciá-los para que o leitor, caso tenha interesse, tenha contado com suas respectivas provas, facilitando a leitura e a compreensão do resultado na sua totalidade.

1.1 Notações e Primeiros Conceitos

1. $\mathbb{K}$ indica o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

2. $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ ponto no espaço $\mathbb{R}^n$;

3. $|\cdot|$ norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$;

4. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

5. $L^2(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mensuráveis tais que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx < +\infty$;

6. Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$ define norma;

7. $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ derivada de u em relação a t;

8. $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ segunda derivada de u em relação a t;

9. $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;

10. $\bigtriangledown u = grad\, u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dfrac{\partial u}{\partial x_3}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ representa o gradiente da função u;

11. Se $u = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ então $div\, u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ representa o divergente da função u;

12. $\triangle u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ representa o laplaciano da função u;

13. Se $\xi \in \mathbb{R}^n$ então $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n)$;

14. $\widehat{u}$ representa a transformada de Fourier da função u;

15. $\mathcal{F}^{-1}$ representa a transformada de Fourier inversa;

16. $*$ denota a convolução em termos de x em $\mathbb{R}^n$;

17. $\partial_x^k u$ representa a derivada de ordem k em relação x da função u;

18. Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções. Usa-se a notação $f \lesssim g$ se exite uma constante $C_1 > 0$ tal que $f(x) \leqslant C_1 g(x)$, para todo $x \in \Omega$;

19. Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções. Usa-se a notação $f \approx g$ se $f \lesssim g$ e $g \lesssim f$;

20. Seja $R \in M_2$ uma matriz 2×2. Denota-se por $|R| = max_{i,j}|R_{ij}|$.

Identidades úteis

Se f, g são funções escalares de classe $\mathcal{C}^1$, c é uma constante real e F e G são campos vetoriais também de classe $\mathcal{C}^1$, então as seguintes relações podem ser facilmente comprovadas.

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

2. $\nabla(cf) = c\nabla f$;

3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;

4. $\operatorname{div}(F+G) = \operatorname{div}(F) + \operatorname{div}(G)$;

5. $\operatorname{div}(fF) = f\operatorname{div}(F) + \nabla f \cdot F$;

Em que o ponto $\cdot$ indica o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

1.2 Distribuições

Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho as integrais realizadas sobre Ω são no sentido de Lebesgue, assim como a mensurabilidade das funções envolvidas.

Como referência para as Seções 1.2 e 1.3 citamos Brezis [2], Evans [8] e Medeiros-Rivera [12], [13].

Seja $u : \Omega \to \mathbb{K}$ uma função mensurável e seja $(K_i)_{i \in I}$ a família de todos os subconjuntos abertos K_i de Ω tais que $u = 0$ quase sempre em K_i. Considera-se o subconjunto aberto $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. Então $u = 0$ quase sempre em K.

Como consequência, define-se o *suporte* de u, que será denotado por $supp\,(u)$, como sendo o subconjunto fechado de Ω

$$supp\,(u) = \Omega \backslash K.$$

Definição 1.1 *Representamos por* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções*

$$u : \Omega \to \mathbb{K},$$

cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto de Ω*. Os elementos de* $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *são chamados de funções testes.*

Naturalmente, $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de soma de funções e de multiplicação por escalar.

Noção de convergência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

Definição 1.2 *Sejam $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_k \to \varphi$ se:*

i) *$\exists\ K \subset \Omega$, K compacto, tal que supp $(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ uniformemente em $x \in \Omega$.*

Definição 1.3 *O espaço vetorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ com a noção de convergência definida acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é chamado de espaço das funções testes.*

Definição 1.4 *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ e contínuo em relação a noção de convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Desse modo,

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}; \quad T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Observamos que $\mathcal{D}'(\Omega)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ o valor de T aplicado no elemento φ.

Noção de convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definição 1.5 *Dizemos que $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_k, \varphi \rangle \;\to\; \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definição 1.6 *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com esta definição tem-se que se $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ então $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, onde $D^\alpha u$ indica a derivada clássica de u. E, se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

1.3 Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.7 *Sejam Ω um conjunto aberto mensurável e $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por μ a medida de Lebesgue e $L^p(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ onde:*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad \text{se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup\operatorname{ess}_{x\in\Omega} |f(x)| \\
&= \inf\{C \in \mathbb{R}^+ \ / \ \mu\{x \in \Omega \ / \ |f(x)| > C\} = 0\} \\
&= \inf\{C > 0 : \ \ |f(x)| \leq C \ \ \textit{quase sempre em } \Omega\}.
\end{aligned}
$$

Observação 1.8 *As funções* $\| \cdot \|_{L^p(\Omega)} : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+, \ 1 \leq p \leq \infty,$ *são normas.*

Na verdade $L^p(\Omega)$ deve ser entendido como um conjunto de classes de funções onde duas funções estão na mesma classe se elas são iguais quase sempre em Ω.

Os espaços $L^p(\Omega), \ 1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach, sendo $L^2(\Omega)$ um espaço de Hilbert com o produto interno usual da integral. Além disso, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Teorema 1.9 $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega), \ \ 1 \leq p < +\infty.$

Teorema 1.10 (Interpolação dos espaços $L^p(\Omega)$) *Sejam* $1 \leq p < q \leq \infty$. *Se* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *então* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $r \in [p, q]$. *Além disso,*

$$
\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \, \|f\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)}
$$

com $\alpha \in [0,1]$ *tal que* $\dfrac{1}{r} = \alpha\dfrac{1}{p} + (1-\alpha)\dfrac{1}{q}.$

Espaços $L^p_{loc}(\Omega)$

Definição 1.11 *Sejam* Ω *um aberto do espaço* $\mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Indicamos por* $L^p_{loc}(\Omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *tais que* $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, *para todo* K *compacto de* Ω, *onde* χ_K *é a função característica de* K.

Observação 1.12 $L^1_{loc}(\Omega)$ *é chamado o espaço das funções localmente integráveis.*

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ consideremos o funcional $T = T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ definido por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

É fácil verificar que T define uma distribuição sobre Ω.

Lema 1.13 (Du Bois Reymond) *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$ *se e somente se* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} L^1_{loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

é linear, contínua e injetiva (devido ao Lema 1.13). Em decorrência disso é comum identificar a distribuição T_u com a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Nesse sentido tem-se que $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$

temos que toda função de $L^p(\Omega)$ define uma distribuição sobre Ω, isto é, toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição.

1.4 Espaço de Schwartz e Distribuições Temperadas

Para esta seção citamos Medeiros-Rivera [12], [13].

Definição 1.14 *Uma função $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é dita rapidamente decrescente no infinito quando para cada $k \in \mathbb{N}$ tem-se*

$$p_k(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$, o que é equivalente a dizer

$$\lim_{|x| \to \infty} P(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo polinômio P de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Consideremos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial de todas as funções rapidamente decrescentes no infinito. Sobre esse espaço, temos o seguinte sistema de seminormas:

$$p_k(\varphi) = \max_{\alpha \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Noção de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para φ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $p_k(\varphi_n - \varphi)$ converge para zero em $\mathbb{K}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.15 *O espaço $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposição 1.16 *Tem-se que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ densamente, para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Definição 1.17 *Considere $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com a noção de convergência definida acima. Se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{K}$ é linear e contínua, diz-se que T é uma distribuição temperada.*

O espaço vetorial de todas as distribuições temperadas com a convergência pontual será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Transformada de Fourier

Os conceitos e resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Dautray-Lions [7] e Evans [8].

Definição 1.18 *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos sua transformada de Fourier como sendo a função $\mathcal{F}\varphi$ definida no $\mathbb{R}^n$ por*

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\,x\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Observação 1.19 *Também denotaremos a transformada de Fourier de uma função* φ *por* $\widehat{\varphi}$.

Proposição 1.20 *Para* $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *existe* $C > 0$ *tal que*

$$||\widehat{u}||_{L^\infty}^2 \leq C||u||_{L^1}^2.$$

Observação 1.21 *A aplicação* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *dada por* $(\widetilde{\mathcal{F}}\varphi)(x) = (\mathcal{F}\varphi)(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, *é denominada transformada de Fourier inversa de* φ. *Além disso,* $\overline{\mathcal{F}\varphi} = \widetilde{\mathcal{F}}\overline{\varphi}$, *onde* $\overline{\varphi}$ *denota o complexo conjugado de* φ.

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\mathcal{F}\varphi$ e $\widetilde{\mathcal{F}}\varphi$ estão bem definidas para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, ambas são rapidamente decrescentes do infinito.

Proposição 1.22 *As aplicações*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Proposição 1.23 *Para todo* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *temos*

i) $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$;

ii) $D^\alpha(\mathcal{F}\varphi) = \mathcal{F}(-i^{|\alpha|}x^\alpha\varphi), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.24 *Seja T uma distribuição temperada. Definimos sua transformada de Fourier da seguinte forma*

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \widetilde{\mathcal{F}}\varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 1.25 *Da continuidade da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $\mathcal{F}T$ e $\widetilde{\mathcal{F}}T$ são distribuições temperadas.*

Proposição 1.26 *As aplicações*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos contínuos e $\mathcal{F}^{-1} = \widetilde{\mathcal{F}}$.

Para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definimos $\varphi_k = \varphi \chi_{B_k(0)}$, $k \in \mathbb{N}$, onde $\chi_{B_k(0)}$ é a função característica do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n;\, |x| \leq k\}$. Assim, $\mathcal{F}\varphi_k$ é dada por

$$(\mathcal{F}\varphi_k)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{|\xi| \leq k} e^{-i\, x \cdot \xi} \varphi(\xi)\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

É possível provar que $\mathcal{F}\varphi_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e que $\{\mathcal{F}\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como este espaço é de Hilbert, esta sequência tem um limite, que denotamos por $\mathcal{F}\varphi$. Ainda observa-se que $\mathcal{F}\varphi$ e a transformada de Fourier de φ (vista como distribuição temperada) coincidem para $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim fica definida a transformada de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.27 *Se $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então existem $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que*

i) $\widehat{D^\alpha u} = (iy)^\alpha \widehat{u}$ *para cada multi-índice α tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

ii) $\widehat{(u * v)} = C_1 \widehat{u}\,\widehat{v}$.

iii) $\widehat{u\,v} = C_2\,(\widehat{u} * \widehat{v})$.

iv) $u = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})$.

Teorema 1.28 (Teorema de Plancherel) *As aplicações*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \widetilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

são isomorfismos de espaços de Hilbert tais que

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi \rangle_{L^2} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \langle \widetilde{\mathcal{F}}\varphi, \widetilde{\mathcal{F}}\psi \rangle_{L^2}$$

para todo par $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Corolário 1.29 *Se $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $||\varphi|| = ||\mathcal{F}\varphi||$.*

Proposição 1.30 (Desigualdade de Hausdorff-Young) *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leqslant p \leqslant 2$ e p, q conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que*

$$\|\hat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p.$$

Exemplos

1. $\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Da Proposição 1.23, $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$, logo para cada $j = 1, 2, \ldots, n$ tem-se

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = i^2x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x) = -x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x).$$

Assim, pela linearidade da transformada de Fourier temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) &= \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}\right)(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n}(-x_j^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = -|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x).
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Usando o Exemplo 1, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta^2\varphi)(x) &= \mathcal{F}(\Delta(\Delta\varphi))(x) = -|x|^2\mathcal{F}(\Delta\varphi)(x) \\
&= -|x^2|(-|x|^2\mathcal{F}(\varphi)(x)) = |x|^4\mathcal{F}(\varphi)(x).
\end{aligned}$$

3. $\mathcal{F}(\nabla\varphi)(x) = ix\mathcal{F}(\varphi)(x)$:

Também usando que $\mathcal{F}(D^\alpha\varphi) = i^{|\alpha|}x^\alpha\mathcal{F}\varphi$, temos

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x) = ix_j\mathcal{F}(\varphi)(x), \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\nabla\varphi)(x) &= \mathcal{F}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)(x) \\ \vdots \\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ix_1\mathcal{F}(\varphi)(x) \\ \vdots \\ ix_n\mathcal{F}(\varphi)(x) \end{pmatrix} = ix\mathcal{F}(\varphi)(x).
\end{aligned}
$$

1.6 Espaços de Sobolev

Os principais resultados desta seção podem ser encontrados em Adams [1], Brezis [2], Kesavan [10] e Medeiros-Rivera [12], [13].

Definição 1.31 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u de $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leqslant m$, $D^\alpha u$ pertence a $\mathrm{L}^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado de Espaço de Sobolev de ordem m relativo ao espaço $L^p(\Omega)$.*

Resumidamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } D^\alpha u \in \mathrm{L}^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leqslant m\}.$$

Norma em $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{m,p} &= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p \, dx\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

com $p \in [1, \infty)$, e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)},$$

com $p = \infty$, define uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observações:

1. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

2. Quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ torna-se um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \qquad u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. Denota-se $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

4. $H^m(\Omega)$ é reflexivo e separável.

5. A norma usual em $H^2(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma dada por

$$||u||_{H^2} = ||u||^2 + ||\Delta u||^2.$$

O Espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.32 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Observações:

1. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2. Se $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$, o complemento de Ω em $\mathbb{R}^n$ possui medida de Lebesgue igual a zero.

3. Vale que $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

O Espaço $W^{-m,q}(\Omega)$

Definição 1.33 *Suponha $1 \leqslant p < \infty$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ representa-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Imersões de Sobolev

Teorema 1.34 (Teorema de Sobolev) *Sejam $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$.*

i) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para q satisfazendo* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$*;*

ii) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para $q \in [p, \infty)$;*

iii) *Se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$;*

sendo as imersões acima contínuas.

1.7 Desigualdades Importantes

Desigualdade de Young

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$ e $1 < p, q < \infty$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ou $q = 1$ e $p = \infty$ ou $q = \infty$ e $p = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.8 Teorema da Divergência e Fórmulas de Green

Valem as seguintes fórmulas para um aberto limitado Ω com fronteira de classe $\mathcal{C}^2$:

i. Para $F \in (H^1(\Omega))^n$:

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)(x)\, dx = \int_\Gamma F(x) \cdot \eta(x)\, d\Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega.$$

ii. Para $v \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla u(x)\, dx.$$

iii. Para $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H_0^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\, dx = \int_\Omega \Delta v(x) u(x)\, dx.$$

A função $\eta(x)$ denota a normal exterior unitária no ponto $x \in \partial\Omega$ e a função F integrada sobre $\partial\Omega$ é no sentido da função traço.

A fórmula de Peano-Baker

Sistemas de equações ordinárias de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}u = A(t)u, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{C}^n$$

são resolvidos em termos da solução fundamental $E(t,s)$, isto é, a solução é dada por $u(t) = E(t,0)u_0$. A matriz fundamental $E(t,s)$ é a solução para

$$\frac{d}{dt}E(t,s) = A(t)E(t,s), \quad E(s,s) = I_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Sabe-se que, para uma matriz constante A, essa solução pode ser expressada em termos de uma exponencial de matriz

$$E(t,s) = exp((t-s)A), \quad exp(A) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k.$$

Porém, para coeficientes não constantes essa representação não é válida. O teorema a seguir nos fornece uma representação pela fórmula de Peano-Baker (ver [14]).

Teorema 1.35 *Seja $A \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n})$. Então a solução fundamental para o sistema $\partial_t - A(t)$ é dada pela fórmula de Peano-Baker*

$$E(t,s) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) \cdots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k) dt_k \dots dt_2 dt_1$$

1.9 Lema de Martinez

Este resultado pode ser encontrado em [11].

Lema 1.36 *Seja $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função não crescente e $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função estritamente crescente de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\phi(0) = 0$ e*

$\phi(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$. Assuma que existem $\sigma \geq 0$ e $\omega > 0$ tal que, para todo $S > 0$

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{1+\sigma}\phi'(t)\,dt < \frac{1}{\omega}E(0)^\sigma E(S).$$

Então E tem a seguinte propriedade de decaimento:

Se $\sigma = 0$, então $E(t) \leq E(0)e^{1-\omega\phi(t)}, \quad \forall\, t \geq 0.$

Se $\sigma > 0$, então $E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+\sigma}{1+\sigma\omega\phi(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad \forall\, t \geq 0.$

1.10 Lema de Gronwall (Versão Integral)

Se para $t_0 \leq t \leq t_1$, $\phi(t) \geq 0$ e $\psi(t) \geq 0$ são funções contínuas tais que a desigualdade

$$\phi(t) \leq K + L\int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds$$

se mantenha em $t_0 \leq t \leq t_1$ com K, L constantes positivas, então

$$\phi(t) \leq Ke^{\left(L\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right)}.$$

Lista de Definições do Trabalho

Segue uma lista das principais definições que apareceram no decorrer do trabalho afim de facilitar a leitura:

1. $B_M := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq M\}$ e $B_M^c := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \geq M\}$

2. $b(t) = \mu(1+t)^\alpha$ onde $\alpha \in (0,1)$, $\mu > 0$

3. $\Lambda(t,s) := \displaystyle\int_s^t b(\tau)\, d\tau$ e $\Lambda^\sharp(t,s) := \displaystyle\int_s^t \frac{1}{2b(\tau)}\, d\tau$

4. $m(t,\xi) = |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta}$

5. $h(t,\xi) = \sqrt{-m(t,\xi)}$

6. $m_1 = -b(t)^2|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{2\sigma}$

7. $h_1(t,\xi) = \sqrt{-m_1(t,\xi)}$

8. Para N uma constante suficientemente grande defini-se

   $Z_{pd} := \{(t,\xi) \in [0,\infty) \times B_M : (1+t)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} \leq N\}$,

   $Z_{ell}^{low} := \{(t,\xi) \in [0,\infty) \times B_M : (1+t)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} \geq N\}$

9. $a_{ell}^{low}(t,s,\xi) := \dfrac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)} exp(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,s))E_{ell}^{low}(t,s,\xi)$

10. $R_1(t,\xi) = \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

11. $R_1^\sharp(t,\xi) = \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\mathcal{N}_1(t,\xi) := \dfrac{1}{2h(t,\xi)} R_1^\sharp(t,\xi)$

13. $R_2(t,\xi) = \left(\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi) + \mathcal{N}_1(t,\xi) R_1(t,\xi)\right) \mathcal{N}^{-1}(t,\xi)$

14. $e_{ell}(t,s,\xi) := \left(\dfrac{h(t,\xi)}{h(s,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(\displaystyle\int_s^t h(\tau,\xi)\, d\tau\right)$

15. $H(\tau_1,\tau_2,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & e^{-2\displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} h(\tau_3,\xi) d\tau_3} \end{pmatrix}$

16. $H(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. $A(\tau_1,\tau_2,\xi) = H(\tau_2,\tau_1,\xi) R_2(\tau_1,\xi) H(\tau_1,\tau_2,\xi)$

18. $\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) = H(\tau_1,\tau_2,\xi) R_2(\tau_2,\xi)$

19. $\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) = H(\infty) R_2(\tau_1,\xi)$

20. $\beta(t,\xi) := exp\left(\displaystyle\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \dfrac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right) d\tau\right)$

21. $\gamma(t,s,\xi) := exp\left(\displaystyle\int_s^t \left(h_1(\tau,\xi) - |\xi|^{2\delta} b(\tau) + \dfrac{|\xi|^{\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right) d\tau\right)$

22. $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ & \\ i & 1 \end{pmatrix}$

23. $Q_{ell}(t,s,\xi) = H(t,s,\xi) + \displaystyle\int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) Q_{ell}(\tau,s,\xi)\, d\tau$

24. $Q_{ell}(\infty,s,\xi) := \lim_{t\to\infty} Q_{ell}(t,s,\xi)$

25. $k(s,\xi) := \beta(s,\xi) P^{-1} Q_{ell}(\infty,s,\xi) \mathcal{N}(s,\xi) P$

Capítulo 2

Estimativas para a Baixa Frequência

Neste trabalho vamos estudar o comportamento assintótico das soluções do seguinte problema com operadores com potências fracionárias e coeficiente do termo dissipativo dependendo do tempo:

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\sigma} u(t,x) + 2b(t)(-\Delta)^{\delta} u_t(t,x) = 0, \quad t \geqslant 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n \\ & u(0,x) = u_0(x) \\ & u_t(0,x) = u_1(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $\sigma > 0$, $\delta \in (0,\sigma)$ $b(t) = \mu(1+t)^{\alpha}$ sendo $\mu > 0\,, \alpha \in (0,1)$ e $2\delta < \sigma(1+\alpha)$.

Denotamos a baixa frequência por

$$B_M := \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ |\xi| < M\}.$$

Aplicando a transformada de Fourier em (2.1), com respeito a variável x, obtemos:

$$\mathcal{F}(u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + 2b(t)(-\Delta)^\delta u_t) = \mathcal{F}(0).$$

Note que

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\sigma u) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\sigma}\widehat{u})) = |\xi|^{2\sigma}\widehat{u}$$

e, de modo análogo

$$\mathcal{F}((-\Delta)^\delta u_t) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2\delta}\widehat{u}_t)) = |\xi|^{2\delta}\widehat{u}_t.$$

Assim, temos a seguinte equação no espaço de Fourier

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^{2\sigma}\widehat{u}(t,\xi) + 2b(t)|\xi|^{2\delta}\widehat{u}_t(t,\xi) = 0, \quad t \geqslant 0, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \\
&\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi) \\
&\widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Para encontrar taxas explícitas de decaimento para a solução do problema (2.1) consideramos o problema (2.2) no espaço de Fourier, dividimos o $\mathbb{R}^n$ em duas regiões, alta e baixa frequência e utilizamos diferentes métodos para cada região.

Neste capítulo aplicamos o método de diagonalização usado por D'Abbicco-Ebert [6] para obter estimativas para a solução do problema (2.2) na região de baixa frequência. Tais estimativas serão usadas para provar o resultado principal que será enunciado e demonstrado no Capítulo 4.

No que segue denotamos:

$$\Lambda(t,s) \doteq \int_s^t b(\tau)\,d\tau, \qquad \Lambda^\sharp(t,s) \doteq \int_s^t \frac{1}{2b(\tau)}\,d\tau. \tag{2.3}$$

Definindo

$$w(t,\xi) = \widehat{u}(t,\xi)\,exp\left(|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)$$

temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(t,\xi) &= w(t,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right);\\
\widehat{u}_t(t,\xi) &= w_t(t,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)\\
&\quad + w(t,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda'(t,0)\right)\\
&= w_t(t,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)\\
&\quad + w(t,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)\left(-|\xi|^{2\delta}b(t)\right);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_{tt}(t,\xi) &= w_{tt}(t,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right) \\
&\quad + 2w_t(t,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)(-|\xi|^{2\delta}b(t)) \\
&\quad + w(t,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)(-|\xi|^{2\delta}b(t))(-|\xi|^{2\delta}b(t)) \\
&\quad + w(t,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)(-|\xi|^{2\delta}b'(t))
\end{aligned}
$$

e ainda,

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(0,\xi) &= \widehat{u}_0(\xi) = w(0,\xi) \\
\widehat{u}_t(0,\xi) &= w_t(0,\xi) + \widehat{u}_0(\xi)(-|\xi|^{2\delta}b(0)) \\
\Rightarrow \quad w_t(0,\xi) &= \widehat{u}_1(\xi) + \mu|\xi|^{2\delta}\widehat{u}_0(\xi).
\end{aligned}
$$

Usando as igualdades acima reescrevemos (2.2) da forma

$$
exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)\left[w_{tt}(t,\xi) + \left\{-|\xi|^{4\delta}b(t)^2 - |\xi|^{2\delta}b'(t) + |\xi|^{2\sigma}\right\} w(t,\xi)\right] = 0.
$$

Assim,

$$
\begin{cases}
w_{tt}(t,\xi) + m(t,\xi)\, w(t,\xi) = 0 \\
w(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi) \\
w_t(0,\xi) = \mu|\xi|^{2\delta}\widehat{u}_0(\xi) + \widehat{u}_1(\xi)
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

onde

$$
m(t,\xi) \doteq |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta}.
$$

Para todo $k > 0$ denotamos:

$$B_k \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ \ |\xi| < k\}, \quad B_k^c \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ \ |\xi| \geqslant k\}.$$

Formalmente, define-se:

$$B_0 = B_\infty^c = \emptyset \quad \text{e} \quad B_\infty = B_0^c = \mathbb{R}^n.$$

Lema 2.1 *Se $\alpha \in (0,1)$, $\delta \in (0,\sigma)$ e $2\delta < \sigma(1+\alpha)$. Então, para qualquer $c \in (0,1)$, existe $M > 0$, tal que*

$$m(t,\xi) \leqslant -c\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\}$$

para qualquer $\xi \in B_M$ e $t \geqslant 0$.

Demonstração:

Observe que

$$\begin{aligned} & m(t,\xi) \leqslant -c\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \leqslant -c\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\} \\ \Leftrightarrow \quad & |\xi|^{2\sigma} - (1-c)\,b(t)^2|\xi|^{4\delta} - (1-c)\,b'(t)|\xi|^{2\delta} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Para um dado $c \in (0,1)$, considere a função

$$\widetilde{m}(t,\xi) \doteq |\xi|^{2\sigma} - (1-c)b(t)^2|\xi|^{4\delta} - (1-c)b'(t)|\xi|^{2\delta}.$$

Para provar o lema é suficiente mostrar que $\widetilde{m}(t,\xi) \leqslant 0$, para todo $\xi \in B_M$ e $t \geqslant 0$.

Derivando $\widetilde{m}(t,\xi)$ com relação a t, obtemos

$$\widetilde{m}_t(t,\xi) = -(1-c)|\xi|^{4\delta} 2b(t)b'(t) - (1-c)|\xi|^{2\delta} b''(t)$$

sendo

$$b(t)b'(t) = \mu^2\alpha(1+t)^{2\alpha-1}$$
$$b''(t) = \mu\alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}.$$

Com isso

$$\begin{aligned}
&\widetilde{m}_t(t,\xi)\\
&= -(1-c)\,|\xi|^{4\delta} 2\mu^2\alpha(1+t)^{2\alpha-1} - (1-c)\,|\xi|^{2\delta}\mu\alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}\\
&= -(1-c)\,|\xi|^{2\delta}\mu\alpha(1+t)^{\alpha-1}\left[2\mu|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha} + (\alpha-1)(1+t)^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Fazendo $\widetilde{m}_t(t,\xi) = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
& 2\mu|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha} + (\alpha-1)(1+t)^{-1} = 0\\
\Rightarrow\quad & (1+t)^{\alpha} = -\frac{(\alpha-1)(1+t)^{-1}}{2\mu|\xi|^{2\delta}}\\
\Rightarrow\quad & (1+t)^{\alpha+1} = \frac{1-\alpha}{2\mu}|\xi|^{-2\delta}\\
\Rightarrow\quad & (1+t) = \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{-2\delta}{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que o único ponto crítico da função $\widetilde{m}(t,\xi)$ é

$$t_0 = -1 + \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{-2\delta}{\alpha+1}}.$$

Além disso, $\widetilde{m}_t(t,\xi) > 0$, para todo $t \in [0, t_0)$ e $\widetilde{m}_t(t,\xi) < 0$ para todo $t > t_0$. Logo, $\widetilde{m}(t_0,\xi)$ é o máximo absoluto da função $\widetilde{m}(t,\xi)$, para $t \geqslant 0$ e ξ fixo.

Note que:

$$\begin{aligned}
& b(t_0)^2 = \mu^2(1+t_0)^{2\alpha} = \mu^2 \left(\left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} |\xi|^{-\frac{2\delta}{\alpha+1}}\right)^{2\alpha} \\
\Rightarrow \quad & b(t_0)^2|\xi|^{4\delta} = \mu^2 \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& b'(t_0) = \mu\alpha(1+t_0)^{\alpha-1} = \mu\alpha \left(\left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} |\xi|^{-\frac{2\delta}{\alpha+1}}\right)^{\alpha-1} \\
\Rightarrow \quad & b'(t_0)|\xi|^{2\delta} = \mu\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\max_{t\geqslant 0} \widetilde{m}(t,\xi) &= \widetilde{m}(t_0,\xi) \\
&= |\xi|^{2\sigma} - (1-c)\left[\mu^2 \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}} + \mu\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}\right] \\
&= |\xi|^{2\sigma} - (1-c)\left[|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}} \left(\mu^2 \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + \mu\alpha \left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\right)\right] \\
&= |\xi|^{2\sigma} - C_{\alpha,\mu,c}|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

com

$$C_{\alpha,\mu,c} = (1-c)\left(\mu^2\left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} + \mu\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2\mu}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\right) > 0$$

pois $\alpha < 1$ e $c < 1$. Além disso, $C_{\alpha,\mu,c}$ é uma constante tal que $C_{\alpha,\mu,c} \to 0$ quando $\mu \to 0$ e $C_{\alpha,\mu,c} \to \infty$ quando $\mu \to \infty$.

Por hipótese temos que

$$\begin{aligned}
& 2\delta < \sigma(1+\alpha) \\
\Rightarrow\quad & 4\delta < 2\sigma(1+\alpha) \\
\Rightarrow\quad & \frac{4\delta}{1+\alpha} - 2\sigma < 0 \\
\Rightarrow\quad & 2\sigma - \frac{4\delta}{1+\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

Assim

$$\max_{t\geqslant 0} \widetilde{m}(t,\xi) = |\xi|^{2\sigma} - C_{\alpha,\mu,c}|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}} = |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}\left(-C_{\alpha,\mu,c} + |\xi|^{2\sigma - \frac{4\delta}{\alpha+1}}\right).$$

Seja $M > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\left(-C_{\alpha,\mu,c} + M^{2\sigma - \frac{4\delta}{\alpha+1}}\right) < 0.$$

Portanto, para $|\xi| \leqslant M$, concluímos que $\widetilde{m}(t,\xi) \leqslant \max\limits_{t\geqslant 0} \widetilde{m}(t,\xi) < 0$, para todo $|\xi| \leqslant M$ e $t \geqslant 0$, o que completa a demonstração.

■

Observação 2.2 *Do lema, segue que:*

$$m(t,\xi) \approx -\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\}$$

para qualquer $\xi \in B_M$, $t \geqslant 0$ e $M > 0$ dado pelo Lema 2.1.

Introduz-se na região $[0,\infty) \times B_M$, a curva dada por:

$$\Gamma_N(t,\xi) \doteq \left\{(t,\xi) \in [0,\infty) \times B_M \ / \ (1+t)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} = N\right\}$$

onde $N \geqslant 1$ é uma constante grande adequada e assumimos, sem perda de generalidade, $M \leqslant N^{\frac{1}{2\delta}}$.

Notação: Para todo $\xi \in B_M$ definimos t_ξ como a única solução para $(1+t_\xi)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} = N$.

Observação 2.3 *Note que, para todo $\xi \in B_M$, $m(t,\xi)$ se comporta de maneiras diferentes para $t \in [0,t_\xi]$ e $t \in [t_\xi,+\infty)$:*

1. *Para $t \in [0,t_\xi]$ segue que:*

$$m(t,\xi) \approx -b'(t)|\xi|^{2\delta} \approx -(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}.$$

2. *Para $t \geqslant t_\xi$ segue que:*

$$m(t,\xi) \approx -b(t)^2|\xi|^{4\delta} \approx -(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}.$$

Demonstração de 1: De fato, pelo Lema 2.1, temos

$$m(t,\xi) \leqslant -c\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\} \lesssim -b'(t)|\xi|^{2\delta}.$$

Por outro lado, como $t \in [0, t_\xi]$ segue que

$$\begin{aligned}
& (1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \leq (1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} = N \\
\Rightarrow \quad & \mu(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \leq \mu N. \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}}{\mu(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}} \leq \mu N \\
\Rightarrow \quad & \mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} \leq \mu^2 N(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta} \\
\Rightarrow \quad & b(t)^2|\xi|^{4\delta} \leqslant \frac{\mu N}{\alpha} b'(t)|\xi|^{2\delta}.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade acima

$$\begin{aligned}
m(t,\xi) &= |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \\
&\geqslant -b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \\
&\geqslant -\frac{\mu N}{\alpha} b'(t)|\xi|^{2\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \\
&= -c_1 b'(t)|\xi|^{2\delta},
\end{aligned}$$

com $c_1 = \frac{\mu N}{\alpha} + 1$ constante positiva.

Portanto, $m(t,\xi) \approx -b'(t)|\xi|^{2\delta}$.

■

Demonstração de 2: De fato, pelo Lema 2.1, temos

$$m(t,\xi) \quad \leqslant -c\left\{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right\} \lesssim -b(t)^2|\xi|^{4\delta}.$$

Por outro lado, como $t \geqslant t_\xi$,

$$\begin{aligned}
& \mu(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geqslant \mu(1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} = \mu N \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}}{\mu(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}} \geqslant \mu N \\
\Rightarrow \quad & \frac{\mu}{N}(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} \geqslant \mu(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}.
\end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
m(t,\xi) \quad &= \quad |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \\
&\geqslant \quad -b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(t)|\xi|^{2\delta} \\
&= \quad -\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} - \mu\alpha(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta} \\
&\geqslant \quad -\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} - \frac{\mu\alpha}{N}(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} \\
&= \quad -c_2 b(t)^2|\xi|^{4\delta},
\end{aligned}$$

com $c_2 = 1 + \frac{\alpha}{N\mu}$ constante positiva.

Portanto, $m(t,\xi) \approx -b(t)^2|\xi|^{4\delta}$.

$\blacksquare$

Devido ao comportamento da função $m(t,\xi)$, usamos a curva dada acima $\Gamma_N(t,\xi)$ para dividir a região de baixa frequência em duas zonas: pseudo-diferencial e elíptica, dadas por:

$$Z_{pd} \doteq \left\{(t,\xi) \in [0,\infty) \times B_M \;/\; (1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \leq N\right\}$$

$$Z_{ell}^{low} \doteq \left\{(t,\xi) \in [0,\infty) \times B_M \;/\; (1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geq N\right\}.$$

Pelos itens i) e ii):

$$m(t,\xi) \approx \begin{cases} -(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta} & \text{se } (t,\xi) \in Z_{pd}, \\ \\ -(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} & \text{se } (t,\xi) \in Z_{ell}^{low}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Sejam $c \in (0,1)$ e $M > 0$ dados pelo Lema 2.1. Para todo $\xi \in B_M$ definimos

$$W(t,\xi) = (ih(t,\xi)w(t,\xi)\,,\, w_t(t,\xi)), \quad h(t,\xi) \doteq \sqrt{-m(t,\xi)}.$$

Segue imediatamente dos resultados anteriores que

$$h(t,\xi) \approx \begin{cases} (1+t)^{\frac{\alpha-1}{2}}|\xi|^{\delta} & \text{se } (t,\xi) \in Z_{pd}, \\ \\ (1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta} & \text{se } (t,\xi) \in Z_{ell}^{low}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Como w é solução de (2.4) tem-se que W é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \partial_t W(t,\xi) = A(t,\xi)W(t,\xi) & t \geqslant 0 \\ W(0,\xi) = W_0(\xi) \end{cases} \tag{2.7}$$

sendo

$$W_0(\xi) = (ih(0,\xi)w(0,\xi), w_t(0,\xi))$$

e

$$A(t,\xi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} & ih(t,\xi) \\ -ih(t,\xi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Para todo $t \geqslant s \geqslant 0$, denota-se por $E(t,s,\xi)$ a solução fundamental do sistema (2.7), que é a matriz solução para

$$\begin{cases} \partial_t E(t,s,\xi) = A(t,\xi)E(t,s,\xi) & t \geqslant s \\ E(s,s,\xi) = I. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dessa forma, se $E(t,0,\xi)$ é a matriz solução de (2.8) para $s = 0$ então $W(t,\xi) = E(t,0,\xi)W_0(\xi)$ é a solução do problema (2.7).

Denotamos a solução fundamental por:

$$E(t,s,\xi) = \begin{cases} E_{pd}(t,s,\xi) & \text{se } (s,\xi),(t,\xi) \in Z_{pd}, \\ E_{ell}^{low}(t,s,\xi) & \text{se } (s,\xi),(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}. \end{cases}$$

2.1 Zona Pseudo-diferencial

Usa-se diferentes aproximações para E_{pd} e E_{ell}^{low}. O próximo resultado nos fornece uma estimativa para $E_{pd}(t,0,\xi)$.

Proposição 2.4 *Para todo $\xi \in B_M$ e $t \in [0,t_\xi]$, segue que:*

$$|E_{00}(t,0,\xi)| \lesssim \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)}, \qquad |E_{01}(t,0,\xi)| \lesssim h(t,\xi)(1+t),$$

$$|E_{10}(t,0,\xi)| \lesssim \frac{1}{h(0,\xi)}(1+t)^\alpha|\xi|^{2\delta}, \qquad |E_{11}(t,0,\xi)| \lesssim 1,$$

onde $(E_{ij})_{i,j=0,1}$ denota as entradas da matriz $E_{pd}(t,0,\xi)$.

Demonstração:

Temos, por (2.8), que:

$$\begin{cases} \partial_t E(t,0,\xi) = A(t,\xi)E(t,0,\xi) & t \geqslant 0 \\ E(0,0,\xi) = I. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} E'_{00}(t) & E'_{01}(t) \\ E'_{10}(t) & E'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} & ih(t,\xi) \\ -ih(t,\xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{00}(t) & E_{01}(t) \\ E_{10}(t) & E_{11}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} E_{00}(t) + ih(t,\xi)E_{10}(t) & \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} E_{01}(t) + ih(t,\xi)E_{11}(t) \\ -ih(t,\xi)E_{00}(t) & -ih(t,\xi)E_{01}(t) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} E_{00}(0) & E_{01}(0) \\ E_{10}(0) & E_{11}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pelas igualdades acima, obtemos

$$\begin{cases} E'_{00}(t) = \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} E_{00}(t) + ih(t,\xi)E_{10}(t) \\ E_{00}(0) = 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} E'_{01}(t) = \dfrac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} E_{01}(t) + ih(t,\xi)E_{11}(t) \\ E_{01}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} E'_{10}(t) = -ih(t,\xi)E_{00}(t) \\ E_{10}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} E'_{11}(t) = -ih(t,\xi)E_{01}(t) \\ E_{11}(0) = 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Integrando (2.11) e (2.12), temos:

$$\begin{aligned} E_{10}(t) - E_{10}(0) &= -i\int_0^t h(\tau,\xi)E_{00}(\tau)\,d\tau \\ \Rightarrow E_{10}(t) &= -i\int_0^t h(\tau,\xi)E_{00}(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$
\begin{aligned}
E_{11}(t) - E_{11}(0) &= -i \int_0^t h(\tau,\xi) E_{01}(\tau)\, d\tau \\
\Rightarrow E_{11}(t) &= 1 - i \int_0^t h(\tau,\xi) E_{01}(\tau)\, d\tau. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Multiplicando a equação (2.9) por $\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)}$ tem-se

$$
\begin{aligned}
& E'_{00}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} = \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)}\frac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} E_{00}(t) + ih(0,\xi)E_{10}(t) \\
\Rightarrow \quad & E'_{00}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} - \frac{\partial_t h(t,\xi) h(0,\xi)}{h(t,\xi)^2} E_{00}(t) = ih(0,\xi)E_{10}(t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(E_{00}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)}\right) = ih(0,\xi)E_{10}(t).
\end{aligned}
$$

Integrando em $(0,t)$,

$$
\begin{aligned}
& E_{00}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} - E_{00}(0) = i\int_0^t h(0,\xi)E_{10}(\tau)\, d\tau \\
\Rightarrow \quad & E_{00}(t) = \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)} + ih(t,\xi)\int_0^t E_{10}(\tau)\, d\tau. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Procedendo de maneira análoga em (2.10), temos:

$$
\begin{aligned}
& E'_{01}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} - \frac{\partial_t h(t,\xi) h(0,\xi)}{h(t,\xi)^2} E_{01}(t) = ih(0,\xi)E_{11}(t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(E_{01}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)}\right) = ih(0,\xi)E_{11}(t).
\end{aligned}
$$

Integrando em $(0,t)$,

$$\begin{aligned} & E_{01}(t)\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} - E_{01}(0) = i\int_0^t h(0,\xi)E_{11}(\tau)\,d\tau \\ \Rightarrow \quad & E_{01}(t) = ih(t,\xi)\int_0^t E_{11}(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Estimativa 1: $E_{10}(t)$

Substituindo (2.15) em (2.13) e usando que $h(t,\xi) = \sqrt{-m(t,\xi)}$ obtemos

$$\begin{aligned} E_{10}(t) &= -i\left[\int_0^t h(\tau,\xi)\left(\frac{h(\tau,\xi)}{h(0,\xi)} + ih(\tau,\xi)\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds\right)d\tau\right] \\ &= -i\left[\int_0^t \left(\frac{h(\tau,\xi)^2}{h(0,\xi)} + ih(\tau,\xi)^2\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds\right)d\tau\right] \\ &= -i\int_0^t \frac{h(\tau,\xi)^2}{h(0,\xi)}\,d\tau + \int_0^t h(\tau,\xi)^2\left(\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds\right)d\tau \\ &= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \int_0^t m(\tau,\xi)\left(\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds\right)d\tau. \end{aligned}$$

Seja $dv = m(\tau,\xi)\,d\tau$ e $u = \displaystyle\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} E_{10}(t) &= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \left[\left(\int_0^\tau E_{10}(s)\,ds\right)\left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)\Bigg|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)E_{10}(\tau)\,d\tau\right] \\ &= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \left(\int_0^t E_{10}(s)\,ds\right)\left(\int_0^t m(s,\xi)\,ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)E_{10}(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \int_0^t \left(\int_0^t m(s,\xi)\,ds\right) E_{10}(\tau)\,d\tau \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right) E_{10}(\tau)\,d\tau \\
&= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \int_0^t \left(\int_0^t m(s,\xi)\,ds - \int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right) E_{10}(\tau)\,d\tau \\
&= i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \int_0^t \left(\int_\tau^t m(s,\xi)\,ds\right) E_{10}(\tau)\,d\tau. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Provamos anteriormente que $m(t,\xi) \approx -(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}$ em Z_{pd}. Assim, usando esta equivalência em (2.17), obtemos:

$$
\begin{aligned}
|E_{10}(t)| &= \left| i\int_0^t \frac{m(\tau,\xi)}{h(0,\xi)}\,d\tau - \int_0^t \left(\int_\tau^t m(s,\xi)\,ds\right) E_{10}(\tau)\,d\tau \right| \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{h(0,\xi)}(1+\tau)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}\,d\tau \\
&\quad + \int_0^t \left(\int_\tau^t (1+s)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}\,ds\right) |E_{10}(\tau)|\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Integrando,

$$
\begin{aligned}
|E_{10}(t)| &\lesssim |\xi|^{2\delta}\frac{1}{h(0,\xi)}\frac{(1+\tau)^\alpha}{\alpha}\Big|_0^t + \int_0^t |\xi|^{2\delta}\frac{(1+s)^\alpha}{\alpha}\Big|_\tau^t |E_{10}(\tau)|\,d\tau \\
&\lesssim |\xi|^{2\delta}\frac{1}{h(0,\xi)}\left(\frac{(1+t)^\alpha - 1}{\alpha}\right) \\
&\quad + \int_0^t |\xi|^{2\delta}\left(\frac{(1+t)^\alpha - (1+\tau)^\alpha}{\alpha}\right)|E_{10}(\tau)|\,d\tau \\
&\lesssim \frac{1}{h(0,\xi)}(1+t)^\alpha|\xi|^{2\delta} + \int_0^t (1+t)^\alpha|\xi|^{2\delta}|E_{10}(\tau)|\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Considere $E_{10}^{\sharp}(t) = (1+t)^{-\alpha}|E_{10}(t)|$. Assim,

$$E_{10}^{\sharp}(t) \lesssim \frac{1}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta} + \int_0^t |\xi|^{2\delta}(1+\tau)^{\alpha} E_{10}^{\sharp}(\tau)\, d\tau.$$

Pelo Lema de Gronwall, segue que:

$$E_{10}^{\sharp}(t) \lesssim \frac{1}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta} exp\left(|\xi|^{2\delta}\int_0^t (1+\tau)^{\alpha} d\tau\right).$$

Pela definição de $E_{10}^{\sharp}$ temos que

$$\begin{aligned} |E_{10}(t)| &\lesssim \frac{(1+t)^{\alpha}}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta} exp\left(|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha} t\right) \\ &\lesssim \frac{(1+t)^{\alpha}}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta} exp\left(|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

Como $t \leqslant t_{\xi}$, temos:

$$(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \leqslant (1+t_{\xi})^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} = N.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |E_{10}(t)| &\lesssim \frac{(1+t)^{\alpha}}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta} exp(N) \\ \Rightarrow |E_{10}(t)| &\lesssim \frac{(1+t)^{\alpha}}{h(0,\xi)}|\xi|^{2\delta}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Estimativa 2: $E_{11}(t)$

Substituindo (2.16) em (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} E_{11}(t) &= 1 - i\left(\int_0^t h(\tau,\xi)\left(ih(\tau,\xi)\int_0^\tau E_{11}(s)\,ds\right)d\tau\right) \\ &= 1 + \int_0^t h(\tau,\xi)^2\left(\int_0^\tau E_{11}(s)\,ds\right)d\tau \\ &= 1 - \int_0^t m(\tau,\xi)\left(\int_0^\tau E_{11}(s)\,ds\right)d\tau. \end{aligned}$$

Seja $dv = m(\tau,\xi)\,d\tau$ e $u = \displaystyle\int_0^\tau E_{11}(s)\,ds$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} E_{11}(t) &= 1 - \left[\left(\int_0^\tau E_{11}(s)\,ds\right)\left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)\Bigg|_0^t \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)E_{11}(\tau)\,d\tau\right] \\ &= 1 - \left(\int_0^t E_{11}(s)\,ds\right)\left(\int_0^t m(s,\xi)\,ds\right) \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)E_{11}(\tau)\,d\tau \\ &= 1 - \int_0^t\left(\int_0^t m(s,\xi)\,ds - \int_0^\tau m(s,\xi)\,ds\right)E_{11}(\tau)\,d\tau \\ &= 1 - \int_0^t\left(\int_\tau^t m(s,\xi)\,ds\right)E_{11}(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Usando que $m(t,\xi) \approx -(1+t)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}$ em (2.19), tem-se:

$$\begin{aligned} |E_{11}(t)| &= \left|1 - \int_0^t\left(\int_\tau^t m(s,\xi)\,ds\right)E_{11}(\tau)\,d\tau\right| \\ &\lesssim 1 + \int_0^t\left(\int_\tau^t (1+s)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}ds\right)|E_{11}(\tau)|\,d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\int_0^t |\xi|^{2\delta}\left(\left.\frac{(1+s)^\alpha}{\alpha}\right|_\tau^t\right)|E_{11}(\tau)|\,d\tau\\
&= 1+\int_0^t |\xi|^{2\delta}\left(\frac{(1+t)^\alpha-(1+\tau)^\alpha}{\alpha}\right)|E_{11}(\tau)|\,d\tau\\
&\lesssim 1+|\xi|^{2\delta}(1+t)^\alpha\int_0^t |E_{11}(\tau)|\,d\tau\\
&\lesssim 1+(1+t_\xi)^\alpha|\xi|^{2\delta}\int_0^t |E_{11}(\tau)|\,d\tau
\end{aligned}
$$

na última estimativa foi usado que $t \leqslant t_\xi$.

Pelo Lema de Gronwall e usando que $t \leqslant t_\xi$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|E_{11}(t)| &\lesssim exp\left((1+t_\xi)^\alpha|\xi|^{2\delta}\int_0^t d\tau\right)\\
&\lesssim exp\left((1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}\right)\\
&= exp(N)
\end{aligned}
$$

pois $(1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}=N$. Isso implica que

$$
|E_{11}(t)| \lesssim 1. \tag{2.20}
$$

Estimativa 3: $E_{00}(t)$

Substituindo (2.13) em (2.15) temos

$$
\begin{aligned}
E_{00}(t) &= \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)}+ih(t,\xi)\int_0^t\left(-i\int_0^\tau h(s,\xi)\,E_{00}(s)\,ds\right)d\tau\\
&= \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)}+h(t,\xi)\int_0^t\left(\int_0^\tau h(s,\xi)E_{00}(s)\,ds\right)d\tau. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Considere $\widetilde{E}_{00}(t) = \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} E_{00}(t)$, a definição de $h(t,\xi)$ e o fato que $-m(t,\xi) \approx (1+t)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}$. Assim,

$$
\begin{array}{rcl}
\widetilde{E}_{00}(t) & = & 1 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_0^\tau h(0,\xi)h(s,\xi)E_{00}(s)\,ds \right) d\tau \\
& = & 1 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_0^\tau h(s,\xi)^2 \widetilde{E}_{00}(s)\,ds \right) d\tau \\
& = & 1 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_0^\tau -m(s,\xi)\widetilde{E}_{00}(s)\,ds \right) d\tau \\
& \lesssim & 1 + \displaystyle\int_0^t \left(\int_0^\tau (1+s)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}|\widetilde{E}_{00}(s)|\,ds \right) d\tau \\
& \lesssim & 1 + t \displaystyle\int_0^t (1+\tau)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}|\widetilde{E}_{00}(\tau)|\,d\tau \\
& \lesssim & 1 + (1+t_\xi) \displaystyle\int_0^t (1+\tau)^{-(1-\alpha)}|\xi|^{2\delta}|\widetilde{E}_{00}(\tau)|\,d\tau
\end{array}
$$

pois $t \leqslant t_\xi$.

Pelo Lema de Gronwall, temos:

$$
\begin{array}{rcl}
|\widetilde{E}_{00}(t)| & \lesssim & exp\left((1+t_\xi)\,|\xi|^{2\delta} \displaystyle\int_0^t (1+\tau)^{-(1-\alpha)}\,d\tau \right) \\
& = & exp\left((1+t_\xi)\,|\xi|^{2\delta} \left. \dfrac{(1+\tau)^\alpha}{\alpha} \right|_0^t \right) \\
& \lesssim & exp\left((1+t_\xi)\,|\xi|^{2\delta} \dfrac{(1+t)^\alpha}{\alpha} \right) \\
& \lesssim & exp\left(\dfrac{1}{\alpha}(1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \right) \\
& = & exp\left(\dfrac{N}{\alpha} \right).
\end{array}
$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
& \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)}\,|E_{00}(t)| = |\widetilde{E}_{00}(t)| \lesssim 1 \\
\Rightarrow \qquad & |E_{00}(t)| \lesssim \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)}
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

pois $h(t,\xi) > 0$.

Estimativa 4: $E_{01}(t)$

Substituindo (2.14) em (2.16) temos

$$
E_{01}(t) = ih(t,\xi)\int_0^t \left(1 - i\int_0^\tau h(s,\xi)E_{01}(s)\,ds\right)d\tau. \tag{2.23}
$$

Usando que $h(t,\xi) \approx (1+t)^{\frac{-(1-\alpha)}{2}}|\xi|^\delta$ em (2.23), temos:

$$
\begin{aligned}
|E_{01}(t)| &= \left| ih(t,\xi)\left(\int_0^t d\tau - i\int_0^t \left(\int_0^\tau h(s,\xi)E_{01}(s)\,ds\right)d\tau\right)\right| \\
&\leq h(t,\xi)\int_0^t d\tau + h(t,\xi)\int_0^t \left(\int_0^\tau h(s,\xi)|E_{01}(s)|\,ds\right)d\tau \\
&\leq t\,h(t,\xi) + t\,h(t,\xi)\left(\int_0^t h(s,\xi)|E_{01}(s)|\,ds\right) \\
&\lesssim (1+t)h(t,\xi) + (1+t)h(t,\xi)\left(\int_0^t (1+s)^{\frac{-(1-\alpha)}{2}}|\xi|^\delta|E_{01}(s)|\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Seja $E_{01}^\sharp(t) = (1+t)^{-1}h(t,\xi)^{-1}|E_{01}(t)|$. Então:

$$
\begin{aligned}
E_{01}^\sharp(t) &\lesssim 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{-(1-\alpha)}{2}}|\xi|^\delta|E_{01}(s)|\,ds \\
&= 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1+s)^{-1}|\xi|^\delta|E_{01}(s)|\,ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{1+\alpha}{2}} |\xi|^\delta h(s,\xi) E_{01}^\sharp(s)\, ds \\
&\lesssim 1 + \int_0^t (1+s)^{\frac{1+\alpha}{2}} (1+s)^{\frac{-1+\alpha}{2}} |\xi|^{2\delta} E_{01}^\sharp(s)\, ds \\
&\lesssim 1 + \int_0^t (1+s)^{\alpha} |\xi|^{2\delta} E_{01}^\sharp(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema de Gronwall, temos:

$$
\begin{aligned}
E_{01}^\sharp(t) &\lesssim exp\left(|\xi|^{2\delta} \int_0^t (1+s)^\alpha ds\right) \\
&\lesssim exp\left(|\xi|^{2\delta}(1+t)^\alpha t\right) \\
&\lesssim exp\left(|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha+1}\right) \\
&= exp(N)
\end{aligned}
$$

pois, como $t \leqslant t_\xi$ tem-se que $|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha+1} \leqslant N$.

Logo,

$$
|E_{01}(t)| \lesssim h(t,\xi)\,(1+t). \tag{2.24}
$$

Portanto, por (2.18), (2.20), (2.22) e (2.24) a proposição está demonstrada.

■

2.2 Zona Elíptica

Considere agora $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ e $t \geq s$. Definimos

$$a_{ell}^{low}(t,s,\xi) \doteq \frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)} exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,s)\right) E_{ell}^{low}(t,s,\xi) \tag{2.25}$$

onde $E_{ell}^{low}(t,s,\xi)$ é a solução fundamental de (2.8) para $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ e $\Lambda(t,s)$ definido em (2.3).

Na proposição anterior obtivemos estimativas para $E_{pd}(t,0,\xi)$. Na próxima proposição vamos obter estimativas para $a_{ell}^{low}(t,s,\xi)$ e consequentemente para $E_{ell}^{low}(t,s,\xi)$. Para provar o resultado precisamos estimar $h(t,\xi)$, $\partial_t h(t,\xi)$ e $\partial_t^2 h(t,\xi)$ em Z_{ell}^{low}. Temos que

$$h(t,\xi) = \sqrt{-m(t,\xi)} = \left(-|\xi|^{2\sigma} + b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right)^{\frac{1}{2}},$$

conforme a definição de $m(t,\xi)$.

Como $h(t,\xi) \approx (1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}$ e $N \leq (1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}$ em Z_{ell}^{low} tem-se

$$\begin{aligned}
\partial_t h(t,\xi) =& \ \frac{1}{2}\left(-|\xi|^{2\sigma} + b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(2b(t)b'(t)|\xi|^{4\delta} + b''(t)|\xi|^{2\delta}\right) \\
=& \ \frac{1}{2h(t,\xi)} \left(2b(t)b'(t)|\xi|^{4\delta} + b''(t)|\xi|^{2\delta}\right) \\
\lesssim& \ (1+t)^{-\alpha}|\xi|^{-2\delta}\left(2\mu^2\alpha(1+t)^{2\alpha-1}|\xi|^{4\delta}\right. \\
& \left. + \mu\alpha(\alpha-1)(1+t)^{\alpha-2}|\xi|^{2\delta}\right) \\
\lesssim& \ (1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Resta-nos estimar $\partial_t^2 h(t,\xi)$. Tem-se usando (2.26) que

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 h(t,\xi) &= \partial_t \left[\frac{1}{2h(t,\xi)}\left(2b(t)b'(t)|\xi|^{4\delta} + b''(t)|\xi|^{2\delta}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{2\partial_t h(t,\xi)b(t)b'(t)|\xi|^{4\delta}}{h(t,\xi)^2} - \frac{\partial_t h(t,\xi)b''(t)|\xi|^{2\delta}}{h(t,\xi)^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\xi|^{4\delta}b'(t)^2 + 2|\xi|^{4\delta}b(t)b''(t)}{h(t,\xi)} + \frac{b'''(t)|\xi|^{2\delta}}{h(t,\xi)}\right] \\
&\lesssim \frac{(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}(1+t)^{2\alpha-1}|\xi|^{4\delta}}{(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}} \\
&\quad + \frac{(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha-2}|\xi|^{2\delta}}{(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}} \\
&\quad + \frac{|\xi|^{4\delta}(1+t)^{2\alpha-2} + |\xi|^{4\delta}(1+t)^{2\alpha-2}}{(1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}} + \frac{(1+t)^{\alpha-3}|\xi|^{2\delta}}{(1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}} \\
&\lesssim |\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha-2} + (1+t)^{-3}[(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}(1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}] \\
&\lesssim |\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha-2} + (1+t)^{-3}(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}N^{-1} \\
&\lesssim |\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha-2} \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

para todo $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$.

Proposição 2.5 *Se* $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ *e* $t \geq s$ *então*

$$|a_{ell}^{low}(t,s,\xi)| \lesssim exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right),$$

com σ *e* δ *os expoentes dos laplacianos da equação* (2.1) *e* $\Lambda^\sharp(t,s)$ *definido em* (2.3).

Demonstração:

Para provarmos esse resultado vamos usar um processo de diagonalização. Considere o sistema

$$\begin{cases} \partial_t E(t,s,\xi) = A(t,\xi)E(t,s,\xi) & t \geqslant s \\ E(s,s,\xi) = I. \end{cases}$$

Seja $\widetilde{E} = PEP^{-1}$, com

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{i} & \frac{1}{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\partial_t \widetilde{E} = P\partial_t E P^{-1} = PAEP^{-1} = PAP^{-1}\widetilde{E}PP^{-1} = PAP^{-1}\widetilde{E},$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \partial_t \widetilde{E} &= \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} & ih(t,\xi) \\ -ih(t,\xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2i} & \frac{\sqrt{2}}{2i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \widetilde{E} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} + h(t,\xi) \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} h(t,\xi) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} - h(t,\xi) \right) & -\frac{1}{\sqrt{2}} h(t,\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2i} & \frac{\sqrt{2}}{2i} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \widetilde{E} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} + h(t,\xi) & -\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \\ -\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} & \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} - h(t,\xi) \end{pmatrix} \widetilde{E} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} & -\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \\ -\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} & \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \end{pmatrix} \widetilde{E} + \begin{pmatrix} h(t,\xi) & 0 \\ 0 & -h(t,\xi) \end{pmatrix} \widetilde{E}$$

$$= h(t,\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \widetilde{E} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{E}. \qquad (2.28)$$

Além disso,

$$\widetilde{E}(s,s,\xi) = PE(s,s,\xi)P^{-1} = PIP^{-1} = I.$$

Definimos

$$R_1(t,\xi) = \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1^\sharp(t,\xi) = \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{N}_1(t,\xi) = \frac{1}{2h(t,\xi)} R_1^\sharp(t,\xi) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(t,\xi) = I + \mathcal{N}_1(t,\xi).$$

Por (2.6) para $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ tem-se que $h(t,\xi) \approx (1+t)^\alpha |\xi|^{2\delta}$. Assim, por (2.26) tem-se

$$|R_1(t,\xi)| = \frac{|\partial_t h(t,\xi)|}{2h(t,\xi)} \lesssim \frac{(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}}{(1+t)^\alpha |\xi|^{2\delta}} \lesssim (1+t)^{-1} \qquad (2.29)$$

e

$$|\mathcal{N}_1(t,\xi)| = \frac{|\partial_t h(t,\xi)|}{4h(t,\xi)^2} \lesssim \frac{(1+t)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}}{(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}} = (1+t)^{-(1+\alpha)}|\xi|^{-2\delta}. \quad (2.30)$$

Como $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$, $(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geq N \Rightarrow (1+t)^{-(1+\alpha)}|\xi|^{-2\delta} \leq N^{-1}$.

Logo, para N suficientemente grande segue que

$$|\mathcal{N}_1(t,\xi) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Dessa forma $\mathcal{N}$ é limitado e inversível e sua inversa é limitada.

Seja

$$\dot{E}(t,s,\xi) = \mathcal{N}(t,\xi)\widetilde{E}(t,s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi), \tag{2.31}$$

logo

$$\begin{aligned} \partial_t \dot{E}(t,s,\xi) &= \partial_t \mathcal{N}(t,\xi)\widetilde{E}(t,s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi) \\ &\quad + \mathcal{N}(t,\xi)\partial_t \widetilde{E}(t,s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi). \end{aligned} \tag{2.32}$$

A primeira parcela da equação acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{N}(t,\xi)\widetilde{E}\mathcal{N}^{-1}(s,\xi) &= \partial_t \left(I + \mathcal{N}_1(t,\xi)\right)\left[\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\mathcal{N}(s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi)\right] \\ &= \partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi)\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde foi usado que $\mathcal{N}(t,\xi) = I + \mathcal{N}_1(t,\xi)$.

Utilizando (2.28) e a definição de $\widetilde{E}$ podemos reescrever a segunda parcela da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(t,\xi)\partial_t\widetilde{E}(t,s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi)\\
&= \mathcal{N}(t,\xi)\left[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\widetilde{E} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\widetilde{E}\right]\mathcal{N}^{-1}(s,\xi)\\
&= \mathcal{N}(t,\xi)h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\mathcal{N}(s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi)\\
&\quad + \mathcal{N}(t,\xi)\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\mathcal{N}(s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi)\\
&= (I+\mathcal{N}_1(t,\xi))\left[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\\
&= \left[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\\
&\quad + \mathcal{N}_1(t,\xi)\left[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Agora, notamos que

$$R_1(t,\xi) = h(t,\xi)D\mathcal{N}(t,\xi) - h(t,\xi)\mathcal{N}(t,\xi)D \tag{2.35}$$

onde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Além disso

$$R_1(t,\xi) = \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

De (2.35) e (2.36) obtemos

$$\begin{aligned} R_1(t,\xi) &= h(t,\xi) D \mathcal{N}(t,\xi) - h(t,\xi) \mathcal{N}(t,\xi) D \\ &= \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{N}(t,\xi) = I + \mathcal{N}_1(t,\xi)$ tem-se que

$$\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = h(t,\xi) D \mathcal{N}_1(t,\xi) - h(t,\xi) \mathcal{N}_1(t,\xi) D + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo a identidade anterior em (2.34) obtemos

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}(t,\xi) \partial_t \widetilde{E}(t,s,\xi) \mathcal{N}^{-1}(s,\xi) \\ &= \Bigg[h(t,\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + h(t,\xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{N}_1(t,\xi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- h(t,\xi)\mathcal{N}_1(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&+ h(t,\xi)\mathcal{N}_1(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\\
&+\mathcal{N}_1(t,\xi)\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Bigg]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\\
=&\Bigg[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(I+\mathcal{N}_1(t,\xi)) + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&+ \mathcal{N}_1(t,\xi)\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Bigg]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\\
=& h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\dot{E} + \Bigg[\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&+ \mathcal{N}_1(t,\xi)\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)\Bigg]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}\\
=& h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\dot{E} + \Bigg[\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}(I+\mathcal{N}_1(t,\xi))\\
&+ \mathcal{N}_1(t,\xi)\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Bigg]\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E} \qquad (2.37)\\
=& h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\dot{E} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\dot{E} + \mathcal{N}_1(t,\xi)R_1(t,\xi)\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\dot{E}.
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.33) e (2.37) em (2.32) e considerando

$$R_2(t,\xi) = \left(\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi) + \mathcal{N}_1(t,\xi)R_1(t,\xi)\right)\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)$$

obtemos

$$\partial_t \dot{E}(t,s,\xi) = R_2(t,\xi)\dot{E} + h(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\dot{E} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)}\dot{E}. \quad (2.38)$$

Defina

$$\dot{E}(t,s,\xi) = e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi) \quad (2.39)$$

onde

$$e_{ell}(t,s,\xi) = \left(\frac{h(t,\xi)}{h(s,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(\int_s^t h(\tau,\xi)\, d\tau\right) \quad (2.40)$$

e $Q_{ell}(t,s,\xi)$ é a solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t Q(t,s,\xi) = \left(-2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_2(t,\xi)\right)Q(t,s,\xi), \quad t \geqslant s \\ Q(s,s,\xi) = I. \end{cases} \quad (2.41)$$

Para provarmos que $Q(t,s,\xi)$ é solução de (2.41) vamos inicialmente escrever

$$Q(t,s,\xi) = (e_{ell}(t,s,\xi))^{-1}\dot{E}(t,s,\xi),$$

onde

$$(e_{ell}(t,s,\xi))^{-1} = \left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right)$$

e

$$\partial_t e_{ell}(t,s,\xi) = \left(\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(s,\xi)^{\frac{1}{2}} h(t,\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h(t,\xi)^{\frac{3}{2}}}{h(s,\xi)^{\frac{1}{2}}}\right) exp\left(\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right).$$

Com isso

$$\begin{aligned}
\partial_t Q(t,s,\xi) &= -(e_{ell}(t,s,\xi))^{-2}(\partial_t e_{ell}(t,s,\xi))\,\dot{E}(t,s,\xi) \\
&\quad +(e_{ell}(t,s,\xi))^{-1}\partial_t \dot{E}(t,s,\xi).
\end{aligned}$$

Substituindo (2.38), (2.39), $\partial_t e_{ell}(t,s,\xi)$ e $(e_{ell}(t,s,\xi))^{-1}$ escritos acima temos,

$$\begin{aligned}
\partial_t Q(t,s,\xi) &= -(e_{ell}(t,s,\xi))^{-2}(\partial_t e_{ell}(t,s,\xi))\,e_{ell}(t,s,\xi)\,Q(t,s,\xi) \\
&\quad + (e_{ell}(t,s,\xi))^{-1}\Bigg[h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} \\
&\quad + R_2(t,\xi)\Bigg] e_{ell}(t,s,\xi) Q(t,s,\xi) \\
&= \Bigg[-(e_{ell}(t,s,\xi))^{-1}(\partial_t e_{ell}(t,s,\xi)) + h(t,\xi)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} + R_2(t,\xi)\Bigg] Q(t,s,\xi) \\
&= \Bigg[-\left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right) exp\left(\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(s,\xi)^{\frac{1}{2}} h(t,\xi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{h(t,\xi)^{\frac{3}{2}}}{h(s,\xi)^{\frac{1}{2}}}\right) + h(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} + R_2(t,\xi)\Big] Q(t,s,\xi) \\
= \;& \Big[-\frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} - h(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&+ \frac{\partial_t h(t,\xi)}{2h(t,\xi)} + R_2(t,\xi)\Big] Q(t,s,\xi) \\
= \;& \left[h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + R_2(t,\xi)\right] Q(t,s,\xi) \\
= \;& -2\,h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q(t,s,\xi) + R_2(t,\xi)\,Q(t,s,\xi).
\end{aligned}
$$

Como $\dot{E}(s,s,\xi) = I$ tem-se que

$$Q(s,s,\xi) = (e_{ell}(s,s,\xi))^{-1}\dot{E}(s,s,\xi) = I.$$

Logo, temos que $\dot{E}(t,s,\xi)$ pode ser escrito como $\dot{E}(t,s,\xi) = e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)$, onde $Q_{ell}(t,s,\xi)$ é solução do sistema dado em (2.41).

Na sequência vamos estimar $|R_2(t,\xi)|$. Pelas estimativas anteriores resta estimar $|\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi)|$. Temos que

$$\mathcal{N}_1(t,\xi) = \frac{\partial_t h(t,\xi)}{4h(t,\xi)^2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

logo

$$\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi) = \frac{h(t,\xi)^2\,\partial_t^2 h(t,\xi) - 2\partial_t h(t,\xi)^2 h(t,\xi)}{4h(t,\xi)^4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando (2.26), (2.27) e o fato que $h(t,\xi) \approx (1+t)^\alpha|\xi|^{2\delta}$ em Z_{ell}^{low} segue que

$$\begin{aligned} |\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi)| &\lesssim \frac{(1+t)^{2\alpha+\alpha-2}|\xi|^{6\delta} + (1+t)^{2\alpha-2+\alpha}|\xi|^{6\delta}}{(1+t)^{4\alpha}|\xi|^{8\delta}} \\ &\lesssim (1+t)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}. \end{aligned}$$

E finalmente, por (2.29), (2.30), a estimativa acima e o fato de $\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)$ ser limitado, obtemos

$$\begin{aligned} |R_2(t,\xi)| &= |\left(\partial_t \mathcal{N}_1(t,\xi) + \mathcal{N}_1(t,\xi) R_1(t,\xi)\right) \mathcal{N}^{-1}(t,\xi)| \\ &\lesssim (1+t)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta} + (1+t)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta} \\ &\lesssim (1+t)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}. \qquad (2.42) \end{aligned}$$

Temos que $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$, então

$$(1+s)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} \geqslant N \Rightarrow (1+s)^{-(1+\alpha)}|\xi|^{-2\delta} \leqslant \frac{1}{N}.$$

Com isso e (2.42), segue que

$$\begin{aligned}
\int_s^t |R_2(\tau,\xi)|\,d\tau &\lesssim \int_s^t (1+\tau)^{-(2+\alpha)}|\xi|^{-2\delta}\,d\tau \\
&= |\xi|^{-2\delta}\left[-\frac{(1+t)^{-(1+\alpha)}}{1+\alpha}+\frac{(1+s)^{-(1+\alpha)}}{1+\alpha}\right] \\
&\lesssim |\xi|^{-2\delta}(1+s)^{-(1+\alpha)} \leqslant \frac{1}{N}. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

A solução $Q_{ell}(t,s,\xi)$ do sistema (2.41) é do tipo

$$Q_{ell}(t,s,\xi) = exp\left(\int_s^t \left(-2h(\tau,\xi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + R_2(\tau,\xi)\right)d\tau\right)$$

Assim, por (2.43) e do fato que $h(t,\xi)$ é não negativo obtemos

$$\begin{aligned}
|Q_{ell}(t,s,\xi)| &\leq exp\left(\left|\int_s^t \left(-2h(\tau,\xi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + R_2(\tau,\xi)\right)d\tau\right|\right) \\
&\leq exp\left(\left|-2\int_s^t h(\tau,\xi)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}d\tau\right| + \left|\int_s^t R_2(\tau,\xi)d\tau\right|\right) \\
&\leq exp\left(-2\int_s^t h(\tau,\xi) + \frac{1}{N}\right) \\
&= exp\left(-2\int_s^t h(\tau,\xi)\right) exp\left(\frac{1}{N}\right) \\
&\lesssim exp\left(-2\int_s^t h(\tau,\xi)\right).
\end{aligned}$$

Logo, $Q_{ell}(t,s,\xi)$ é limitado. Além disso,

$$|Q_{ell}(t,s,\xi)| \lesssim exp\left(-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right). \tag{2.44}$$

Por (2.31) e (2.39) segue que

$$\mathcal{N}(t,\xi)\widetilde{E}(t,s,\xi)\mathcal{N}^{-1}(s,\xi) = e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi).$$

Como $\widetilde{E} = PEP^{-1}$,

$$\mathcal{N}(t,\xi)PE_{ell}^{low}(t,s,\xi)P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(s,\xi) = e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)$$

ou ainda

$$E_{ell}^{low}(t,s,\xi) = P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P.$$

Já vimos que $\mathcal{N}, \mathcal{N}^{-1}$ são limitados. Assim, temos

$$|E_{ell}^{low}(t,s,\xi)| \lesssim |e_{ell}(t,s,\xi)|\,|Q_{ell}(t,s,\xi)|.$$

Por (2.40) e (2.44), podemos reescrever a desigualdade acima da seguinte maneira

$$|E_{ell}^{low}(t,s,\xi)| \lesssim \left(\frac{h(t,\xi)}{h(s,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right).$$

Usando a estimativa acima em (2.25) obtemos

$$|a_{ell}^{low}(t,s,\xi)| \lesssim \left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(-\int_s^t \big(b(\tau)|\xi|^{2\delta} + h(\tau,\xi)\big)\, d\tau\right). \tag{2.45}$$

Como $(s,\xi),(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ e $t \geqslant s$ temos que

$$\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)} \approx \frac{(1+s)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}}{(1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}} \lesssim 1. \tag{2.46}$$

Além disso, para N suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\frac{b'(t)}{2b(t)} = \frac{\mu\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{2\mu(1+t)^{\alpha}} \quad &= \quad \frac{\alpha}{2}(1+t)^{-1} \\
&= \quad \frac{\alpha}{2}(1+t)^{-\alpha-1}|\xi|^{-2\delta}(1+t)^{\alpha}|\xi|^{2\delta} \\
&\leq \quad \frac{C_\alpha}{2}N^{-1}h(t,\xi) \\
&\leq \quad 2h(t,\xi),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

pois, em Z_{ell}^{low} temos $(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geq N$.

Para concluir a demonstração encontraremos uma estimativa apropriada para $h(t,\xi)$. Para tal, usaremos a definição de $h(t,\xi)$ e a seguinte propriedade

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad \forall\, x \geqslant 0,\ y \geqslant -x.$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
h(t,\xi) &= \sqrt{b(t)^2|\xi|^{4\delta} + b'(t)|\xi|^{2\delta} - |\xi|^{2\sigma}} \\
&\leqslant \sqrt{b(t)^2|\xi|^{4\delta}} + \frac{b'(t)|\xi|^{2\delta} - |\xi|^{2\sigma}}{2\sqrt{b(t)^2|\xi|^{4\delta}}} \\
&= b(t)|\xi|^{2\delta} + \frac{b'(t)|\xi|^{2\delta} - |\xi|^{2\sigma}}{2b(t)|\xi|^{2\delta}} \\
&= b(t)|\xi|^{2\delta} + \frac{b'(t)}{2b(t)} - \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(t)}.
\end{aligned}
$$

Então por (2.47) tem-se

$$
-h(t,\xi) \leq b(t)|\xi|^{2\delta} - \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(t)}. \tag{2.48}
$$

Assim, usando (2.48) e (2.46) em (2.45) obtemos

$$
\begin{aligned}
|a_{ell}^{low}(t,s,\xi)| &\lesssim exp\left(-\int_s^t \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\,d\tau\right) \\
&= exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,s)\right)
\end{aligned}
$$

o que prova a proposição. ■

Capítulo 3

Estimativas para a Alta Frequência

Neste capítulo encontramos taxas de decaimento para a solução do problema (2.2) na região de alta frequência. Para tal, inicialmente, utilizamos a equação (2.2) e determinamos a energia desse sistema. Em todo capítulo consideramos $\xi \in {B_M}^c = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ |\xi| \geq M\}$, com $M > 0$ dado pelo Lema 2.1.

Multiplicando a equação (2.2) por $\overline{\widehat{u}}_t$ obtemos

$$\widehat{u}_{tt}(t)\overline{\widehat{u}}_t(t) + |\xi|^{2\sigma}\widehat{u}(t)\overline{\widehat{u}}_t(t) + 2b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 = 0.$$

Para $\widehat{v} = \widehat{v}(t,\xi)$ temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}|\widehat{v}|^2 = \frac{d}{dt}(\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}) = \widehat{v}_t\overline{\widehat{v}} + \widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}_t = \overline{\widehat{v}\overline{\widehat{v}}_t} + \widehat{v}\overline{\widehat{v}}_t = 2Re(\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}_t) \\
\Rightarrow \qquad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\widehat{v}|^2 = Re(\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}_t).
\end{aligned}
$$

Tomando a parte real da equação e usando a igualdade acima obtemos

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\right\} + 2b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 = 0.
$$

Seja $0 \leq S \leq T \leq +\infty$. Integrando a equação acima no intervalo $[S,T]$, temos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\{|\widehat{u}_t(T)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(T)|^2\right\} + 2\int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt \\
& \quad = \frac{1}{2}\left\{|\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2\right\}.
\end{aligned}
$$

Segue diretamente da identidade acima que

$$
\int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt \lesssim |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2. \tag{3.1}
$$

A densidade de energia é dada por:

$$
E(t,\xi) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2.
$$

O próximo passo será multiplicar a equação (2.2) por $\frac{\overline{\widehat{u}}}{2b(t)}$, Logo,

$$\frac{1}{2b(t)}\,\overline{\widehat{u}}(t)\widehat{u}_{tt}(t) + \frac{1}{2b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 + |\xi|^{2\delta}\,\overline{\widehat{u}}(t)\widehat{u}_t(t) = 0.$$

Note que $\widehat{u}_{tt}(t)\overline{\widehat{u}}(t) = \frac{d}{dt}\left\{\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right\} - |\widehat{u}_t(t)|^2$. Assim, considerando a parte real, a identidade acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 + |\xi|^{2\delta}\,Re\left(\overline{\widehat{u}}(t)\widehat{u}_t(t)\right)\\
&\quad = \frac{1}{2b(t)}\,|\widehat{u}_t(t)|^2 - \frac{1}{2b(t)}\,\left\{\frac{d}{dt}Re\left(\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Integrando a identidade acima de S a T tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \frac{1}{2b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\,dt + \int_S^T |\xi|^{2\delta}\,Re\left(\overline{\widehat{u}}(t)\widehat{u}_t(t)\right)\,dt\\
&\quad = \int_S^T \frac{1}{2b(t)}\,|\widehat{u}_t(t)|^2\,dt - \int_S^T \frac{1}{2b(t)}\,\left\{\frac{d}{dt}Re\left(\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right)\right\}\,dt.
\end{aligned}$$

Integrando por partes o último termo da identidade acima obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \frac{1}{2b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\,dt = -\int_S^T |\xi|^{2\delta}\,Re\left(\overline{\widehat{u}}(t)\widehat{u}_t(t)\right)\,dt\\
&\quad + \int_S^T \frac{1}{2b(t)}\,|\widehat{u}_t(t)|^2\,dt - \frac{1}{2b(T)}Re\left(\widehat{u}_t(T)\overline{\widehat{u}}(T)\right)\\
&\quad + \frac{1}{2b(S)}Re\left(\widehat{u}_t(S)\overline{\widehat{u}}(S)\right) - \int_S^T \frac{b'(t)}{2b(t)^2}\,Re\left(\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right)\,dt.
\end{aligned}$$

Usando as três desigualdades abaixo

$$
\begin{aligned}
&|\xi| \geq M \quad \Rightarrow \quad M^{\sigma} \leq |\xi|^{\sigma}, \\
&Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|, \\
&ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right),
\end{aligned}
$$

vamos estimar separadamente os termos do lado direito da igualdade acima:

- $-\dfrac{1}{2b(T)} Re\left(\widehat{u}_t(T)\overline{\widehat{u}}(T)\right) \lesssim |\widehat{u}_t(T)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(T)|^2;$
- $\dfrac{1}{2b(S)} Re\left(\widehat{u}_t(S)\overline{\widehat{u}}(S)\right) \lesssim |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2;$
- $$
\begin{aligned}
&-\int_S^T |\xi|^{2\delta} Re\left(\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right) dt \leq \int_S^T |\xi|^{2\delta}|\overline{\widehat{u}}(t)|\,|\widehat{u}_t(t)|\,dt \\
&= \int_S^T \frac{1}{b(t)^{\frac{1}{2}}}|\xi|^{\delta}|\widehat{u}(t)|\left(|\xi|^{\delta} b(t)^{\frac{1}{2}}|\overline{\widehat{u}}_t(t)|\right) dt \\
&\leq \int_S^T \frac{1}{4b(t)}|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}(t)|^2 dt + \int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt \\
&\leq \int_S^T \frac{1}{4b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 dt + \int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt;
\end{aligned}
$$
- $$
\begin{aligned}
&\int_S^T \frac{1}{2b(t)}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt \leq \int_S^T M^{-2\delta} M^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{M^{2\delta}}\int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt;
\end{aligned}
$$
- $-\displaystyle\int_S^T \frac{b'(t)}{2b(t)^2} Re\left(\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\right) dt \lesssim \int_S^T \frac{b'(t)}{b(t)^2}\left(|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\right) dt;$

nas estimativas acima usamos também que $\dfrac{1}{2b(t)} \leq 1$, $M^{2\sigma} \leq |\xi|^{2\sigma}$ e $|\xi|^{2\delta} \lesssim |\xi|^{2\sigma}$.

Portanto, segue das estimativas acima

$$\int_S^T \frac{1}{4b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 dt \lesssim |\widehat{u}_t(T)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(T)|^2$$
$$+ |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2 + \int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 dt$$
$$+ \int_S^T \frac{b'(t)}{b(t)^2}\left(|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\right) dt.$$

Usando a estimativa (3.1) e o fato da densidade de energia ser decrescente obtemos

$$\int_S^T \frac{1}{4b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 dt \lesssim |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2$$
$$+ \left(|\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2\right)\int_S^T \frac{b'(t)}{b(t)^2}\, dt.$$

Ainda, temos que

$$\int_S^T \frac{b'(t)}{b(t)^2}\, dt = \int_S^T \frac{\mu\alpha(1+t)^{\alpha-1}}{\mu^2(1+t)^{2\alpha}}\, dt = \frac{\alpha}{\mu}\int_S^T (1+t)^{-\alpha-1} dt$$
$$= \frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{(1+t)^{-\alpha}}{-\alpha}\bigg|_S^T\right) = \frac{\alpha}{\mu}\left(\frac{(1+T)^{-\alpha}}{-\alpha} - \frac{(1+S)^{-\alpha}}{-\alpha}\right)$$
$$\leq \frac{\alpha}{\mu}\frac{(1+S)^{-\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\mu}(1+S)^{-\alpha} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Dessa forma,

$$\int_S^T \frac{1}{4b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 dt \lesssim |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2. \tag{3.2}$$

Usando (3.1) e (3.2) temos

$$\int_S^T b(t)|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2dt + \int_S^T \frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t)|^2dt$$
$$\lesssim |\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(S)|^2. \tag{3.3}$$

Definimos agora o funcional

$$F(t) := \int_{|\xi|\geq M} b(t)|\xi|^{2\delta+\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2d\xi + \int_{|\xi|\geq M} \frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2d\xi.$$

e a energia na alta frequência

$$E_h(t) = \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geq M} \left(|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2\right) d\xi,$$

sendo que γ será escolhido adequadamente na demonstração do resultado principal.

Usando a estimativa (3.3) segue que

$$\begin{aligned}
\int_S^T F(t)\,dt \quad &= \int_S^T \left[\int_{|\xi|\geq M} b(t)|\xi|^{2\delta+\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2d\xi \right.\\
&\qquad \left. + \int_{|\xi|\geq M} \frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2d\xi\right] dt\\
&\leq \quad C\int_{|\xi|\geq M} \left(|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_t(S)|^2 + |\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(S)|^2\right) d\xi\\
&= \quad 2CE_h(S).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Também, utilizando o fato de que $b(t) \geq 1$ e $M^{2\delta} \leq |\xi|^{2\delta}$ obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b(t)}E_h(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{b(t)}\int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geq M}\frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geq M}\frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{1}{2M^{2\delta}}\int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{2\delta+\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi + \frac{1}{2}\int_{|\xi|\geq M}\frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq C\left(\int_{|\xi|\geq M}b(t)|\xi|^{2\delta+\gamma}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq M}\frac{1}{b(t)}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi\right) \\
&= CF(t).
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima de S a T, e usando a estimativa (3.4) temos

$$\int_S^T \frac{1}{b(t)}E_h(t)\,dt \leq C\int_S^T F(t)\,dt \leq C_1 E_h(S).$$

Assim, pelo Lema de Martinez (ver [11]) para $\sigma = 0$, $\phi(t) = \int_0^t \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau$ e $\omega = C^{-1}$ segue que $E_h(t) \leq E_h(0)e^{1-\omega\phi(t)}$, $\forall\, t \geq 0$ isto é,

$$\begin{aligned}
E_h(t) &\leq \frac{1}{2}\left(\int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_t(0)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}(0)|^2 d\xi\right) \\
&\quad e^{1-c\int_0^t \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}_0|^2 d\xi\right) e^{1-c\int_0^t \frac{1}{b(\tau)}\,d\tau} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{\gamma}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2\sigma+\gamma}|\widehat{u}_0|^2 d\xi\right) e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Resultado Principal

Neste capítulo vamos provar o resultado principal do trabalho. Antes porém, usando os resultados dos capítulos anteriores vamos obter algumas estimativas importantes para a demonstração.

Para $t \leq t_\xi$ já observamos que vale a seguinte equivalência

$$h(t_\xi, \xi) \approx (1 + t_\xi)^\alpha |\xi|^{2\delta}$$

e que t_ξ é a única solução para $(1 + t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} = N$. Dessa igualdade decorre que

$$(1 + t_\xi)^{\alpha+1} = \frac{N}{|\xi|^{2\delta}} \quad \Rightarrow \quad (1 + t_\xi) = \frac{N^{\frac{1}{\alpha+1}}}{|\xi|^{\frac{2\delta}{1+\alpha}}}.$$

Usando os resultados acima e a Proposição 2.4 podemos obter algumas estimativas:

Estimativa 1: Para $\xi \in B_M = \{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ |\xi| \leq M\}$ tem-se

$$\begin{aligned}
|E_{00}(t_\xi, 0, \xi)| + |E_{10}(t_\xi, 0, \xi)| &\lesssim \frac{h(t_\xi, \xi)}{h(0, \xi)} + \frac{1}{h(0, \xi)}(1 + t_\xi)^\alpha |\xi|^{2\delta} \\
&\lesssim \frac{h(t_\xi, \xi)}{h(0, \xi)} + \frac{h(t_\xi, \xi)}{h(0, \xi)} \\
&= 2\,\frac{h(t_\xi, \xi)}{h(0, \xi)},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{h(0, \xi)}{h(t_\xi, \xi)}\big(|E_{00}(t_\xi, 0, \xi)| + |E_{10}(t_\xi, 0, \xi)|\big) \lesssim 1.$$

Estimativa 2: Para $\xi \in B_M$ tem-se

$$|E_{01}(t_\xi, 0, \xi)| + |E_{11}(t_\xi, 0, \xi)| \lesssim h(t_\xi, \xi)(1 + t_\xi) + 1,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h(t_\xi, \xi)}\big(|E_{01}(t_\xi, 0, \xi)| + |E_{11}(t_\xi, 0, \xi)|\big) &\lesssim (1 + t_\xi) + \frac{1}{h(t_\xi, \xi)} \\
&\lesssim (1 + t_\xi) + (1 + t_\xi)^{-\alpha} |\xi|^{-2\delta} \\
&= \frac{N^{\frac{1}{\alpha+1}}}{|\xi|^{\frac{2\delta}{1+\alpha}}} + \frac{N^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{|\xi|^{-\frac{2\delta\alpha}{1+\alpha}}} |\xi|^{-2\delta} \\
&\lesssim |\xi|^{-\frac{2\delta}{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Estimativa 3: Para $\xi \in B_M$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\xi|^{2\delta}\Lambda(t_\xi, 0) &= |\xi|^{2\delta}\int_0^{t_\xi} b(\tau)\,d\tau \\
&= |\xi|^{2\delta}\int_0^{t_\xi} \mu(1+\tau)^\alpha d\tau \\
&= |\xi|^{2\delta}\mu\left(\frac{(1+\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_0^{t_\xi}\right) \\
&\leq \frac{\mu}{\alpha+1}(1+t_\xi)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \\
&= \frac{\mu N}{\alpha+1} \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Estimativa 4: Para $\xi \in B_M$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t_\xi, 0) &= |\xi|^{2(\sigma-\delta)}\int_0^{t_\xi} \frac{1}{2b(\tau)}\,d\tau \\
&= \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2\mu}\int_0^{t_\xi} (1+\tau)^{-\alpha} d\tau \\
&= \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2\mu}\left(\frac{(1+\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_0^{t_\xi}\right) \\
&= \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2\mu(1-\alpha)}\big((1+t_\xi)^{1-\alpha} - 1\big) \\
&\lesssim |\xi|^{2(\sigma-\delta)-2\delta\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)} \\
&= |\xi|^{2\left(\sigma-\frac{2\delta}{1+\alpha}\right)} \\
&\lesssim 1,
\end{aligned}$$

pois $\sigma(1+\alpha) > 2\delta$.

Consideramos agora $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$. Pela Proposição 2.5 temos uma estimativa para $|E_{ell}^{low}(t,s,\xi)|$, ou seja, temos uma estimativa para cada entrada da matriz $|E_{ell}^{low}(t,s,\xi)|$. Vamos escrever uma estimativa para a primeira e segunda coluna de $E(t,0,\xi)$ usando a notação já apresentada anteriormente $e_0 = (1,0)^T$ e $e_1 = (0,1)^T$:

$$\begin{aligned}
& |a_{ell}^{low}(t,0,\xi)| \lesssim e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \\
\Rightarrow \quad & \left| \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} E_{ell}^{low}(t,0,\xi) \right| \lesssim e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} \left| E_{ell}^{low}(t,0,\xi)e_0 \right| e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \lesssim e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} \left| E_{ell}^{low}(t,0,\xi)e_1 \right| e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \lesssim e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \qquad (4.2) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{h(t,\xi)} \left| E_{ell}^{low}(t,0,\xi)e_1 \right| e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \lesssim |\xi|^{-\frac{2\delta}{1+\alpha}} e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)},
\end{aligned}$$

pois $h(0,\xi) \approx |\xi|^{2\delta}$.

Para a região de baixa frequência temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 *Seja $\sigma > 0$, $\delta \in (0,\sigma)$, $b(t) = \mu(1+t)^\alpha$ com $\mu > 0$ e $\alpha \in (0,1)$, e assuma que $2\delta < \sigma(1+\alpha)$. Seja $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$, $q' = \frac{q}{q-1}$ e $k > 0$. Definimos*

$$\theta(k,n,p,q) := k + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \qquad (4.3)$$

e

$$k_{j1} = \frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)}\left(\theta - j\frac{2\delta}{1+\alpha}\right),$$

$$k_{j2} = \frac{1+\alpha}{2\delta}\theta - j = \frac{1+\alpha}{2\delta}\left(\theta - j\frac{2\delta}{1+\alpha}\right),$$

para $j = 0, 1$. *Então a solução para* (2.2) *satisfaz a seguinte estimativa ótima*

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t)\|_{L^{q'}(B_M)} \leq Ct^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{11}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (4.4)$$

uniformemente para todo $t > 0$, *dado que* $k_{11} > 0$, *isto é,*

$$\theta > \frac{2\delta}{1+\alpha}. \qquad (4.5)$$

Por outro lado, se

$$\theta < \frac{2\delta}{1+\alpha} \qquad (4.6)$$

temos a seguinte estimativa

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t)\|_{L^{q'}(B_M)} \leq Ct^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{12}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (4.7)$$

para todo $t > 0$, *onde* $-k_{12} > 0$, *como consequência de* (4.6).

No caso especial

$$\theta = \frac{2\delta}{1+\alpha} \qquad (4.8)$$

obtém-se

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t)\|_{L^{q'}(B_M)} \leq Ct^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C(log(1+t))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.9}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração:

Seja $\alpha \in (0,1)$ e $t \geq t_0 > 0$. Considere

$$p' = \frac{p}{p-1}, \qquad q' = \frac{q}{q-1}$$

e

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q'} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

No Capítulo 2 definimos

$$w(t,\xi) = \widehat{u}(t,\xi) \, exp\left(|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)\right)$$

e

$$W(t,\xi) = (ih(t,\xi)w(t,\xi)\,,\, w_t(t,\xi))$$

e observamos que a solução do problema (2.7) é dada por

$$W(t,\xi) = E(t,0,\xi)W_0(\xi)$$

com $W_0(\xi) = (ih(0,\xi)w(0,\xi), w_t(0,\xi))$.

Utilizando as definições acima e lembrando que $e_0 = (1,0)^T$ e $e_1 = (0,1)^T$ seque diretamente que

$$
\begin{aligned}
& e_0^T W(t,\xi) = e_0^T E(t,0,\xi) W_0(\xi) \\
\Rightarrow \quad & ih(t,\xi) w(t,\xi) = e_0^T E(t,0,\xi) W_0(\xi) \\
\Rightarrow \quad & ih(t,\xi) \widehat{u}(t,\xi) e^{|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} = e_0^T E(t,0,\xi)[ih(0,\xi)w(0,\xi), w_t(0,\xi)].
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\widehat{u}(t,\xi) = -\frac{i}{h(t,\xi)} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi)\left[ih(0,\xi)\widehat{u}_0(\xi), \mu|\xi|^{2\delta}\widehat{u}_0(\xi) + \widehat{u}_1(\xi)\right], \tag{4.10}
$$

onde nessa última igualdade usamos as expressões para $w(0,\xi)$ e $w_t(0,\xi)$ dadas em (2.4).

Na estimativa abaixo para simplificar a notação usamos $L^s = L^s(B_M)$. Assim, segue de (4.10) e da desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\| |\xi|^k \widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}} &= \| |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \widehat{u}_0(\xi) \\
&\quad - |\xi|^k i h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \widehat{u}_1(\xi) \\
&\quad - |\xi|^k i h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \mu |\xi|^{2\delta} \widehat{u}_0(\xi)\|_{L^{q'}} \\
&\le \| |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \widehat{u}_0(\xi)\|_{L^{q'}} \\
&\quad + \| |\xi|^k i h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \widehat{u}_1(\xi)\|_{L^{q'}} \\
&\quad + \| |\xi|^k i h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \mu |\xi|^{2\delta} \widehat{u}_0(\xi)\|_{L^{q'}} \\
&\le \| |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0\|_{L^r} \|\widehat{u}_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r} \|\widehat{u}_1\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&+\| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r} \|\widehat{u}_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
\lesssim &\| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r} \|u_0\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} \\
&+\| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r} \|u_1\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)} \qquad (4.11) \\
&+\| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r} \|u_0\|_{L^{p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

sendo que a última estimativa segue da desigualdade de Hausdorff-Young.

Para estimar as normas do lado direito de (4.11), vamos considerar na região de baixa frequência dois casos: zona pseudo-diferencial e zona elíptica.

Definimos

$$
N(t) := min\{(1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}} N^{\frac{1}{2\delta}}, M\} \leq N(0) = M
$$

isto é, $|\xi| < N(t)$, se e somente se, $t < t_\xi$.

Caso 1: Zona pseudo-diferencial: $\xi \in B_M, \ (t,\xi) \in Z_{pd}$

Considere $L^r(B_{N(t)})$. Note que pela Proposição 2.4, temos que

$$
\begin{aligned}
& |E_{00}(t,0,\xi)| \lesssim \frac{h(t,\xi)}{h(0,\xi)} \\
\Rightarrow \qquad & |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} |E_{00}(t,0,\xi)| \lesssim |\xi|^k
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& |E_{01}(t,0,\xi)| \lesssim h(t,\xi)(1+t) \\
\Rightarrow \qquad & |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}|E_{01}(t,0,\xi)| \lesssim |\xi|^k(1+t)
\end{aligned}
$$

em particular

$$
\begin{aligned}
|\xi|^{k+2\delta}h(t,\xi)^{-1}|E_{01}(t,0,\xi)| &\lesssim |\xi|^k|\xi|^{2\delta}(1+t) \\
&\leq |\xi|^k|\xi|^{2\delta}(1+t)^{\alpha+1} \\
&\leq |\xi|^k N \lesssim |\xi|^k.
\end{aligned}
$$

Podemos ainda afirmar que na zona pseudo-diferencial

$$
e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \approx 1.
$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0) &= |\xi|^{2\delta}\int_0^t \mu(1+\tau)^\alpha d\tau \\
&\leq \frac{\mu}{\alpha+1}(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \\
&\leq \frac{\mu}{\alpha+1}N \\
&\leq \mu N.
\end{aligned}
$$

Assim, $e^{-\mu N} \leq e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \leq 1$.

Utilizando os resultados acima vamos estimar os termos que aparecem do lado direito de (4.11) considerando $L^r(B_{N(t)})$:

$$\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \| \, |\xi|^k \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (1+t) \| \, |\xi|^k \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Usando a definição de $N(t)$ e que $|\xi| < N(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\| \, |\xi|^k \|_{L^r(B_{N(t)})} &= \left(\int_{B_{N(t)}} |\xi|^{kr} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq N(t)^k \left(volume\,(B_{N(t)}) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim N(t)^k N(t)^{\frac{n}{r}} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}\left(k+\frac{n}{r}\right)} \\
&\leq t^{-k_{02}}
\end{aligned}$$

pois $N(t) \lesssim (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}}$.

Assim, usando a estimativa acima em (4.12) segue que

$$\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

$$+\| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim t^{-k_{02}} \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (1+t) \, t^{-k_{02}} \, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim t^{-k_{02}} \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}} \, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.13}$$

Caso 2: Zona elíptica: $\xi \in B_M, \ (t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$

Considere $L^r_{B_M \setminus B_{N(t)}}$. Pelas estimativas (4.1) e (4.2) segue que

$$\frac{h(0,\xi)}{h(t,\xi)} \left| E_{ell}^{low}(t,0,\xi) e_0 \right| \, e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \lesssim e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}$$

$$\Rightarrow \qquad |\xi|^k h(0,\xi) \, h(t,\xi)^{-1} \, e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \, |E_{00}(t,0,\xi)| \lesssim |\xi|^k e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}$$

e

$$\frac{1}{h(t,\xi)} \left| E_{ell}^{low}(t,0,\xi) e_1 \right| \, e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \lesssim |\xi|^{-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}$$

$$\Rightarrow \qquad |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} \, e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \, |E_{01}(t,0,\xi)| \lesssim |\xi|^k |\xi|^{-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}.$$

De modo análogo ao feito no Caso 1, vamos estimar os termos do lado direito de (4.11) em $B_M \setminus B_{N(t)}$ usando as estimativas acima:

$$\| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \| \, |\xi|^k e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.14}$$

Para estimar

$$\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})}$$

vamos considerar quatro casos: $j = 0$ ou (4.5) é verdadeira; $j = 1$, (4.5) não é verdadeira e $r = +\infty$; $j = 1$, (4.6) é verdadeira e $r \in [1, +\infty)$; $j = 1$, (4.8) é verdadeira e $r \in [1, +\infty)$.

Caso 2.1: $j = 0$ ou (4.5) é verdadeira

Vamos estimar

$$\begin{aligned} &\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \\ &\quad = \left(\int_{B_M \setminus B_{N(t)}} \left(|\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j} e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Aplicando a mudança de variável

$$\eta = \xi \left(\Lambda(t,0)\right)^{\frac{1}{2\delta}}$$

temos

$$|\xi|^k = |\eta|^k \Lambda(t,0)^{-\frac{k}{2\delta}}$$

e como

$$-|\eta|^{2(\sigma-\delta)} = -|\xi|^{2(\sigma-\delta)} (\Lambda(t,0))^{\frac{(\sigma-\delta)}{\delta}}$$

segue que

$$e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} = e^{-|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(\Lambda(t,0))^{-\frac{(\sigma-\delta)}{\delta}}\Lambda^\sharp(t,0)}.$$

Usando que $\sigma(1+\alpha) > 2\delta$ segue para todo $t \geq t_0$ que

$$\begin{aligned}
&-|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(\Lambda(t,0))^{-\frac{(\sigma-\delta)}{\delta}}\Lambda^\sharp(t,0)\\
&\qquad \lesssim -|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(1+t)^{-\frac{(\sigma-\delta)}{\delta}(\alpha+1)}(1+t)^{1-\alpha}\\
&\qquad = -|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(1+t)^{\frac{-\sigma(\alpha+1)+\delta(\alpha+1)+\delta\,(1-\alpha)}{\delta}}\\
&\qquad \lesssim -|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(1+t)^{\frac{2\delta-\sigma(\alpha+1)}{\delta}}\\
&\qquad \leq -|\eta|^{2(\sigma-\delta)},
\end{aligned}$$

logo,

$$e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} = e^{-|\eta|^{2(\sigma-\delta)}(\Lambda(t,0))^{-\frac{(\sigma-\delta)}{\delta}}\Lambda^\sharp(t,0)} \quad \leq \quad e^{-c|\eta|^{2(\sigma-\delta)}}.$$

Dessa forma, sendo $\eta = \xi\,(\Lambda(t,0))^{\frac{1}{2\delta}}$ tem-se para todo $t \geq t_0$ que

$$\begin{aligned}
&\|\,|\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j}\,e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\\
&\quad = \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}}\left(|\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j}e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}\right)^r d\xi\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\quad \lesssim \Lambda(t,0)^{-\frac{1}{2\delta}\left(k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j\right)-\frac{n}{2\delta r}}\left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}}\left(|\eta|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j}\,e^{-c|\eta|^{2(\sigma-\delta)}}\right)^r d\eta\right)^{\frac{1}{r}}\\
&\quad \lesssim \Lambda(t,0)^{-\left(\frac{n}{r}+k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j\right)\frac{1}{2\delta}}\\
&\quad \lesssim (1+t)^{-\left(\frac{n}{r}+k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j\right)\frac{\alpha+1}{2\delta}}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
& \sigma(\alpha+1) > 2\delta \\
\Leftrightarrow \quad & \sigma(\alpha+1) - \delta(\alpha+1) > 2\delta - \delta(\alpha+1) \\
\Leftrightarrow \quad & (\sigma-\delta)(\alpha+1) > 2\delta - \delta - \delta\alpha \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\alpha+1}{\delta} > \frac{1-\alpha}{\sigma-\delta}. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $t \geq t_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} &\lesssim (1+t)^{-\left(\frac{n}{r}+k-\frac{2\delta}{\alpha+1}j\right)\frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)}} \\
&\leq t^{-k_{j1}}. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Caso 2.2: $j = 1$, (4.5) **não é verdadeira e** $r = +\infty$

Nesse caso queremos estimar

$$\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^\infty(B_M \setminus B_{N(t)})}.$$

Como $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ vale que $(1+t)^{1+\alpha}|\xi|^{2\delta} \geq N$. Logo

$$\begin{aligned}
& |\xi|^{-2\delta} \lesssim (1+t)^{1+\alpha} \\
\Rightarrow \quad & |\xi|^{-1} \lesssim (1+t)^{\frac{1+\alpha}{2\delta}} \\
\Rightarrow \quad & |\xi|^{-\left(\frac{2\delta}{1+\alpha}-k\right)} \lesssim (1+t)^{\frac{1+\alpha}{2\delta}\left(\frac{2\delta}{1+\alpha}-k\right)},
\end{aligned}$$

pois $\theta = k + \frac{n}{r} \leq \frac{2\delta}{1+\alpha}$ devido ao fato de que (4.5) não é satisfeita.

Assim

$$|\xi|^{k-\frac{2\delta}{1+\alpha}} \lesssim (1+t)^{1-\frac{(1+\alpha)k}{2\delta}} = (1+t)^{-k_{12}} \lesssim t^{-k_{12}}.$$

Portanto,

$$\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{1+\alpha}} e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \|_{L^{\infty}(B_M \setminus B_{N(t)})} \lesssim t^{-k_{12}}. \tag{4.17}$$

Caso 2.3: $j = 1$**,** (4.6) **é verdadeira e** $r \in [1, +\infty)$

Se (4.6) é verdadeira então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$k + \frac{n}{r} + \frac{\epsilon}{r} \leq \frac{2\delta}{1+\alpha}$$

assim,

$$-\frac{2\delta}{1+\alpha} + k + \frac{n}{r} + \frac{\epsilon}{r} \leq 0,$$

e por um cálculo feito acima

$$\begin{aligned} & |\xi|^{-1} \lesssim (1+t)^{\frac{\alpha+1}{2\delta}} \\ \Rightarrow \quad & |\xi|^{-\frac{2\delta}{1+\alpha}+k+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}} \lesssim (1+t)^{\frac{\alpha+1}{2\delta}\left(\frac{2\delta}{1+\alpha}-k-\frac{n}{r}-\frac{\epsilon}{r}\right)}. \end{aligned}$$

Usando a estimativa acima obtemos

$$
\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \\
&= \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} \left(|\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}}\right)^r \left(e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)}\right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} |\xi|^{r\left(k-\frac{2\delta}{1+\alpha}-\frac{n}{r}-\frac{\epsilon}{r}+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}\right)} \left(e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)}\right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} |\xi|^{r\left(k-\frac{2\delta}{1+\alpha}+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}\right)} |\xi|^{-n-\epsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta} r\left(k-\frac{2\delta}{1+\alpha}+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}\right)} |\xi|^{-n-\epsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}\left(k-\frac{2\delta}{1+\alpha}+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}\right)} \left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} |\xi|^{-n-\epsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}\left(k-\frac{2\delta}{1+\alpha}+\frac{n}{r}+\frac{\epsilon}{r}\right)} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{\alpha+1}{2\delta}\left(k+\frac{n}{r}\right)+1} \\
&\lesssim t^{-k_{12}}, \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

onde usamos que

$$
\left(\int_{B_M\setminus B_{N(t)}} |\xi|^{-n-\epsilon} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \leq C.
$$

Caso 2.4: $j = 1$**,** (4.8) **é verdadeira e** $r \in [1, +\infty)$

Nesse caso tem-se que

$$
\begin{aligned}
& k + \frac{n}{r} = \frac{2\delta}{1+\alpha} \\
\Rightarrow \quad & |\xi|^{r\left(-\frac{2\delta}{1+\alpha}+k+\frac{n}{r}\right)} = 1.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \\
&= \left(\int_{B_M \setminus B_{N(t)}} \left(|\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \right)^r \left(e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_{B_M \setminus B_{N(t)}} |\xi|^{r\left(-\frac{2\delta}{1+\alpha}+k+\frac{n}{r}-\frac{n}{r}\right)} \left(e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_{B_M \setminus B_{N(t)}} |\xi|^{r\left(-\frac{2\delta}{1+\alpha}+k+\frac{n}{r}\right)} |\xi|^{-n} \left(e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,0)} \right)^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\int_{B_M \setminus B_{N(t)}} |\xi|^{-n} d\xi \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\lesssim (log(1+t))^{\frac{1}{r}}. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Usando os resultados acima podemos finalmente provar as estimativas do teorema. Provamos cada estimativa para $t \geq t_0 > 0$. Para $0 < t < t_0$ o resultado é imediato pois por (4.11) existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t,\xi) \|_{L^{q'}} \leq K \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + K \, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall \; 0 < t < t_0.$$

Demonstração da estimativa (4.4)

Para a zona elíptica, isto é, $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$, assumindo (4.5), por (4.14) e (4.16) segue que

$$
\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \| \, |\xi|^{k} e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim t^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{11}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\, t \geq t_0. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Usando (4.13) e (4.20) em (4.11) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\| \, |\xi|^{k} \widehat{u}(t,\xi) \|_{L^{q'}(B_M)} \\
&\leq \| \, |\xi|^{k} h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k} h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + \| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim t^{-k_{02}} \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}} \, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\quad + t^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{11}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall\, t \geq t_0. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Note que segue de (4.15) que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)} < \frac{1+\alpha}{2\delta} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)}\,\theta < \frac{1+\alpha}{2\delta}\,\theta \\
\Rightarrow \quad & k_{01} < k_{02}. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Ainda, considerando (4.5) temos $\theta - \frac{2\delta}{\alpha+1} > 0,$ assim

$$\begin{aligned} & k_{11} = \frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)}\left(\theta - \frac{2\delta}{\alpha+1}\right) < \frac{1+\alpha}{2\delta}\left(\theta - \frac{2\delta}{\alpha+1}\right) = k_{12} \\ \Rightarrow \quad & k_{11} < k_{12}. \end{aligned}$$

Usando as observações acima em (4.21) obtemos para todo $t \geq t_0$:

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}(B_M)} \leq Ct^{-k_{01}} \, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{11}} \, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

o que conclui a prova de (4.4).

Demonstração da estimativa (4.7)

Para a zona elíptica assumindo (4.6), por (4.14), (4.16) para $j = 0$, (4.17) para $j = 1$ e $r = +\infty$, (4.18) para $j = 1$ e $r \in [1, +\infty)$ segue que

$$\begin{aligned} & \| \, |\xi|^k h(0,\xi) h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_0 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \| \, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \| \, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1} e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} e_0^T E(t,0,\xi) e_1 \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \lesssim \| \, |\xi|^k e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \| \, |\xi|^{k - \frac{2\delta}{\alpha+1}} \, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)} \|_{L^r(B_M \setminus B_{N(t)})} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \lesssim t^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \tag{4.23}$$

para todo $t \geq t_0$.

Usando (4.13) e (4.23) em (4.11) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\| |\xi|^k\widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}(B_M)}\\
&\leq \| |\xi|^k h(0,\xi)h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_0\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +\| |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +\| |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +\| |\xi|^k h(0,\xi)h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_0\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +\| |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +\| |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim t^{-k_{02}}\,\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}}\,\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad +t^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

para todo $t \geq t_0$.

Usando (4.22) em (4.24) temos para $t \geq t_0$ que

$$\| |\xi|^k\widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}(B_M)} \lesssim t^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

o que conclui a prova de (4.7).

Demonstração da estimativa (4.9)

Para a zona elíptica assumindo (4.8), por (4.14), (4.16) para $j=0$, (4.17) para $j=1$ e $r=+\infty$, (4.19) para $j=1$ e $r\in[1,+\infty)$ segue que

$$\|\, |\xi|^k h(0,\xi)h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_0\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \|\, |\xi|^k e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^{k-\frac{2\delta}{\alpha+1}}\, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,0)}\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim t^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (log(1+t))^{\frac{1}{r}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{4.25}$$

para todo $t \geq t_0 > 0$, pois nesse caso assumindo (4.8) tem-se $t^{-k_{12}} = 1 \leq (log(1+t))^{\frac{1}{r}}$.

Usando (4.13) e (4.25) em (4.11) concluímos que para todo $t \geq t_0$:

$$\|\, |\xi|^k \widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}(B_M)}$$

$$\leq \|\, |\xi|^k h(0,\xi)h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_0\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^k h(0,\xi)h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_0\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^k h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+\|\, |\xi|^{k+2\delta} h(t,\xi)^{-1}e^{-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}e_0^T E(t,0,\xi)e_1\|_{L^r(B_M\setminus B_{N(t)})}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim t^{-k_{02}}\, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + t^{-k_{12}}\, \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$+t^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (log(1+t))^{\frac{1}{r}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{4.26}$$

Usando (4.22) em (4.26) temos para $t \geq t_0$ que

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t,\xi)\|_{L^{q'}(B_M)} \lesssim t^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + (log(1+t))^{\frac{1}{r}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $t \geq t_0 > 0$, o que conclui a prova de (4.9).

■

Usando o Teorema 4.1 e os resultados obtidos no Capítulo 3 provamos o resultado principal do trabalho.

Teorema 4.2 *Seja $\sigma > 0$, $\delta \in (0,\sigma)$, $b(t) = \mu(1+t)^\alpha$ com $\mu > 0$ e $\alpha \in (0,1)$, e assuma que $2\delta < \sigma(1+\alpha)$. Seja $1 \leq p \leq 2$ e $k > 0$. Definimos*

$$\bar{\theta}(k,n,p) := k + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right),$$

e

$$k_{j1} = \frac{1-\alpha}{2(\sigma-\delta)}\left(\bar{\theta} - j\frac{2\delta}{1+\alpha}\right),$$

$$k_{j2} = \frac{1+\alpha}{2\delta}\bar{\theta} - j = \frac{1+\alpha}{2\delta}\left(\bar{\theta} - j\frac{2\delta}{1+\alpha}\right),$$

para $j = 0,1$.

Então a solução para (2.1) satisfaz a seguinte estimativa ótima

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad &\leq \quad Ct^{-k_{01}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{11}} \|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right) \, e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

uniformemente para todo $t > 0$, dado que $k_{11} > 0$, isto é,

$$\bar{\theta} > \frac{2\delta}{1+\alpha}.$$

Por outro lado, se

$$\bar{\theta} < \frac{2\delta}{1+\alpha}$$

temos a seguinte estimativa para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad &\leq \quad Ct^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + Ct^{-k_{12}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right)\, e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

No caso especial $\bar{\theta} = \frac{2\delta}{1+\alpha}$ obtém-se para todo $t > 0$:

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad &\leq \quad Ct^{-k_{01}}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + C(log(1+t))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|u_1\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \left(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-\sigma}(\mathbb{R}^n)}\right)\, e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Usando o teorema de Plancherel e a identidade $(-\Delta)^{\delta} f \doteq \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2\delta}\widehat{f}\,\big)$ temos

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta)^{\frac{k}{2}} u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^k\widehat{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\,|\xi|^k\widehat{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad \leq \|\,|\xi|^k\widehat{u}(t)\|_{L^2(B_M)} + \|\,|\xi|^k\widehat{u}(t)\|_{L^2(B_M^C)}. \end{aligned}$$

Escolhendo $\gamma = 2k - 2\sigma$ em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{2k} |\widehat{u}(t)|^2 \, d\xi \\
&\quad \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k-2\sigma} |\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2k} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \right) e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

logo

$$\| \, |\xi|^k \widehat{u}(t) \|_{L^2(B_M^C)} \lesssim \big(\|u_0\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|u_1\|_{H^{k-\sigma}(\mathbb{R}^n)} \big) \; e^{-C\,(1+t)^{1-\alpha}}.$$

O resultado do teorema segue diretamente da estimativa acima e do Teorema 4.1.

$\blacksquare$

Apêndice A

Resultados Adicionais

Neste apêndice vamos apresentar alguns outros resultados que são utilizados para provar resultados do perfil assintótico da equação (1). Mais precisamente, para provar o Teorema 2 dado em [6], que prova que a solução de (1) se comporta como a solução de um problema de difusão anômala. A demonstração do teorema 2 não conta neste apêndice.

Seja $Q(t,s,\xi) = H(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi)$ onde

$$H(\tau_1,\tau_2,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_{\tau_2}^{\tau_1} h(\tau_3,\xi)\,d\tau_3} \end{pmatrix}$$

e $Q(t,s,\xi)$ solução de (2.41).

Note que $H(t,s,\xi)H(s,t,\xi) = I$. De fato, pela definição de $H(t,s,\xi)$, temos

$$
\begin{aligned}
H(t,s,\xi)H(s,t,\xi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau}\, e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau + 2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.
\end{aligned}
$$

Assim, pela igualdade acima

$$
\begin{aligned}
Q(t,s,\xi) &= H(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
\Rightarrow \widetilde{Q}(t,s,\xi) &= H(t,s,\xi)^{-1}Q(t,s,\xi) \\
\Rightarrow \widetilde{Q}(t,s,\xi) &= H(s,t,\xi)Q(t,s,\xi).
\end{aligned}
$$

E então

$$
\widetilde{Q}_t(t,s,\xi) = H_t(s,t,\xi)Q(t,s,\xi) + H(s,t,\xi)Q_t(t,s,\xi). \tag{A.1}
$$

Substituindo (2.41) em (A.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q}_t(t,s,\xi) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2h(t,\xi)\, e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} H(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
&\quad + H(s,t,\xi)\left[-2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + R_2(t,\xi)\right] H(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
&= \Bigg[2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} H(t,s,\xi) \\
&\quad + H(s,t,\xi)\left(-2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} H(t,s,\xi)\right) \\
&\quad + H(s,t,\xi)R_2(t,\xi)H(t,s,\xi)\Bigg]\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
&= \Bigg[2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \\
&\quad - 2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_t^s h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} \\
&\quad + H(s,t,\xi)R_2(t,\xi)H(t,s,\xi)]\,\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
&= \Bigg[2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2h(t,\xi)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + H(s,t,\xi)R_2(t,\xi)H(t,s,\xi)]\,\widetilde{Q}(t,s,\xi) \\
&= [H(s,t,\xi)R_2(t,\xi)H(t,s,\xi)]\,\widetilde{Q}(t,s,\xi).
\end{aligned}
$$

Defina $A(\tau_1,\tau_2,\xi) \doteq H(\tau_2,\tau_1,\xi)R_2(\tau_1,\xi)H(\tau_1,\tau_2,\xi)$. Assim, a igualdade acima pode ser reescrita da forma

$$\widetilde{Q}_t(t,s,\xi) = A(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi).$$

Note que pela definição de $H(t,s,\xi)$ e (2.41) segue que $\widetilde{Q}(s,s,\xi) = H(s,s,\xi)Q(s,s,\xi) = I$.

Portanto, temos que $Q(t,s,\xi) = H(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi)$ com $\widetilde{Q}(t,s,\xi)$ solução do sistema

$$\begin{cases} \widetilde{Q}_t(t,s,\xi) = A(t,s,\xi)\widetilde{Q}(t,s,\xi), \quad t \geqslant s \\ \widetilde{Q}(s,s,\xi) = I. \end{cases}$$

Sendo que $A(t,s,\xi) \in L^1_{loc}$, pelo Teorema 1.35, $\widetilde{Q}$ é dado por

$$\widetilde{Q}(t,s,\xi) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(\tau_1,s,\xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2,s,\xi) \cdots \int_s^{\tau_{k-1}} A(\tau_k,s,\xi)\, d\tau_k \dots d\tau_1$$

com $\tau_0 = t$. Logo

$$\begin{aligned} Q_{ell}(t,s,\xi) = H(t,s,\xi)\Bigg[I &+ \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(\tau_1,s,\xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2,s,\xi) \cdots \int_s^{\tau_{k-1}} A(\tau_k,s,\xi)\, d\tau_k \dots d\tau_1 \Bigg] \\ = \quad & H(t,s,\xi)\Bigg[I + \int_s^t A(\tau_1,s,\xi)\, d\tau_1 \\ &+ \int_s^t A(\tau_1,s,\xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1 + \dots \Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= H(t,s,\xi) + \int_s^t H(t,s,\xi)A(\tau_1,s,\xi)\,d\tau_1 \\
&\quad + \int_s^t H(t,s,\xi)A(\tau_1,s,\xi)\int_s^{\tau_1} A(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1 + \ldots
\end{aligned} \tag{A.2}
$$

Vamos escrever a expressão para o segundo e o terceiro termo dessa soma, os outros seguem de modo análogo.

Inicialmente, note que

$$
\begin{aligned}
H(t,s,\xi)H(s,\tau,\xi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_\tau^s h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_s^t h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1 - 2\int_\tau^s h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\int_\tau^t h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1} \end{pmatrix} = H(t,\tau,\xi).
\end{aligned}
$$

Assim, pela definição de $A(\tau_1,s,\xi)$ e a igualdade acima, podemos escrever o segundo termo da forma

$$
\begin{aligned}
\int_s^t H(t,s,\xi)A(\tau_1,s,\xi)\,d\tau_1 &= \int_s^t H(t,s,\xi)H(s,\tau_1,\xi)R_2(\tau_1,\xi)H(\tau_1,s,\xi)\,d\tau_1 \\
&= \int_s^t H(t,\tau_1,\xi)R_2(\tau_1,\xi)H(\tau_1,s,\xi)\,d\tau_1.
\end{aligned}
$$

Seja $\widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi) = H(\tau_1, \tau_2, \xi)R_2(\tau_2, \xi)$. Logo,

$$\int_s^t H(t, s, \xi)A(\tau_1, s, \xi)\, d\tau_1 = \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi)H(\tau_1, s, \xi)\, d\tau_1. \tag{A.3}$$

Repetindo o procedimento para o terceiro termo segue que

$$\begin{aligned}
&\int_s^t H(t, s, \xi)A(\tau_1, s, \xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \\
&\quad = \int_s^t H(t, s, \xi)H(s, \tau_1, \xi)R_2(\tau_1, \xi)H(\tau_1, s, \xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \\
&\quad = \int_s^t H(t, \tau_1, \xi)R_2(\tau_1, \xi)H(\tau_1, s, \xi) \int_s^{\tau_1} A(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \\
&\quad = \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} H(\tau_1, s, \xi)H(s, \tau_2, \xi)R_2(\tau_2, \xi)H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \\
&\quad = \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} H(\tau_1, \tau_2, \xi)R_2(\tau_2, \xi)H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \\
&\quad = \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi)H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1. \qquad (A.4)
\end{aligned}$$

Substituindo (A.3) e (A.4) em (A.2) temos

$$\begin{aligned}
Q_{ell}(t, s, \xi) &= H(t, s, \xi) + \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi)H(\tau_1, s, \xi)\, d\tau_1 \\
&\quad + \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi)H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\
&= H(t, s, \xi) + \int_s^t \widetilde{A}(t, \tau_1, \xi) \Big[H(\tau_1, s, \xi) \\
&\quad + \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi)H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 + \dots \Big]\, d\tau_1.
\end{aligned}$$

Então, em particular, podemos escrever a igualdade acima da forma

$$Q_{ell}(t,s,\xi) = H(t,s,\xi) + \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) Q_{ell}(\tau,s,\xi)\, d\tau. \tag{A.5}$$

Proposição A.1 *Para todo* $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ *existe*

$Q_{ell}(\infty,s,\xi) \doteq \lim_{t\to\infty} Q_{ell}(t,s,\xi)$ *definido por*

$$\begin{aligned} Q_{ell}(\infty,s,\xi) \;=\; & H(\infty) + \int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \\ & + \int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1 + \ldots \end{aligned}$$

sendo

$$H(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) = H(\infty) R_2(\tau_1,\xi).$$

Em particular, a segunda linha de $Q_{ell}(\infty,s,\xi)$ *é nula.*

Demonstração:

Pela definição de $H(t,s,\xi)$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} H(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lim_{t\to\infty} e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\, d\tau} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o elemento a_{22} da matriz acima, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{-2\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} &= e^{-2\lim\limits_{t\to\infty}\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \\
&\leq e^{-2C\,|\xi|^{2\delta}\lim\limits_{t\to\infty}\int_s^t (1+\tau)^{\alpha}\,d\tau} \\
&= e^{-2C\,|\xi|^{2\delta}\lim\limits_{t\to\infty}\left(\left.\frac{(1+\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_s^t\right)} \\
&= e^{-2C\,|\xi|^{2\delta}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(1+t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\, e^{2C\,|\xi|^{2\delta}\frac{(1+s)^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$H(\infty) = \lim_{t\to\infty} H(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

E, portanto, segue da definição de $\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)$ e dos cálculos acima que

$$\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi) \doteq \lim_{t\to\infty}\widetilde{A}(t,\tau_2,\xi) = \lim_{t\to\infty} H(t,\tau_2,\xi)R_2(\tau_2,\xi) = H(\infty)R_2(\tau_2,\xi).$$

Por (A.6), a segunda linha de $Q_{ell}(\infty,s,\xi)$ é nula. De fato,

$$\begin{aligned}
Q_{ell}(\infty,s,\xi) &= H(\infty) + \int_s^{\infty} H(\infty)R_2(\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau \\
&\quad + \int_s^{\infty} H(\infty)R_2(\tau_1,\xi)\int_s^{\tau_1}\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1 + \ldots
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \int_s^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2(\tau, \xi) H(\tau, s, \xi)\, d\tau +$$

$$+ \int_s^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2(\tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi) H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1 + \dots$$

Na segunda igualdade, a integral da segunda parcela é uma matriz 2×2, obtida a partir do produto de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pela matriz $R_2(\tau, \xi) H(\tau, s, \xi)$, resultando na integral de uma matriz 2×2 com a segunda linha nula. Na terceira parcela, temos o produto da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pela matriz 2×2, $R_2(\tau_1, \xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1, \tau_2, \xi) H(\tau_2, s, \xi)\, d\tau_2 d\tau_1$. Portanto a terceira parcela será a integral de uma matriz 2×2 com a segunda linha nula. Seguindo esse raciocínio, temos uma soma infinita de matrizes onde todas possuem a segunda linha nula, portanto, $Q_{ell}(\infty, s, \xi)$ é uma matriz 2×2 com a segunda linha identicamente nula.

Vamos mostrar que $|Q_{ell}(\infty, s, \xi) - Q_{ell}(t, s, \xi)|$ vai para zero, quando $t \to \infty$. Como estamos trabalhando com matrizes 2×2, vamos considerar $e_0 = (1, 0)^T$ e $e_1 = (0, 1)^T$ e mostrar que a primeira e a segunda linha de $|Q_{ell}(\infty, s, \xi) - Q_{ell}(t, s, \xi)|$ vão a zero, quando $t \to \infty$. Assim, basta mostrar que

$$\left| e_0^T \left(Q_{ell}(\infty, s, \xi) - Q_{ell}(t, s, \xi) \right) \right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to \infty$$

e

$$\left|e_1^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi))\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t\to\infty.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
e_0^T(H(\infty)-H(\tau_1,\tau_2,\xi)) &= e_0^T\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-2\int_{\tau_2}^{\tau_1} h(\tau,\xi)\,d\tau}\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -e^{-2\int_{\tau_2}^{\tau_1} h(\tau,\xi)\,d\tau}\end{pmatrix}\\
&= (0,0)^T. \qquad \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Vamos agora utilizar a igualdade acima para estimar

$$|e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi))|.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi))\\
&\quad = e_0^T\Bigg[\Bigg(H(\infty)+\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau\\
&\qquad + \int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)\int_s^{\tau_1}\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1+\dots\Bigg)\\
&\qquad - \Bigg(H(t,s,\xi)+\int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau\\
&\qquad + \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau_1,\xi)\int_s^{\tau_1}\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1+\dots\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

$$= e_0^T \left[(H(\infty) - H(t,s,\xi)) + \left(\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right) + ((I) - (II)) + \dots \right] \qquad (A.8)$$

onde

$$(I) = e_0^T \int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1$$

e

$$(II) = e_0^T \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1.$$

Faremos os cálculos para as três primeiras parcelas, as outras seguem de modo análogo.

Por (A.7), a primeira parcela da última igualdade em (A.8) é $(0,0)^T$.

Calcularemos agora a diferença dada na segunda parcela. Para $T > t$, com t fixo, temos

$$e_0^T \left(\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right)$$
$$= e_0^T \lim_{T\to\infty} \left(\int_s^T \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right)$$
$$= e_0^T \lim_{T\to\infty} \left(\int_s^t \left[\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) - \widetilde{A}(t,\tau,\xi) \right] H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right)$$
$$+ e_0^T \lim_{T\to\infty} \int_t^T \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) - \widetilde{A}(t,\tau,\xi) &= H(\infty)R_2(\tau,\xi) - H(t,\tau,\xi)R_2(\tau,\xi) \\
&= \left(H(\infty) - H(t,\tau,\xi)\right) R_2(\tau,\xi).
\end{aligned}$$

Assim, por (A.7) tem-se

$$\begin{aligned}
& e_0^T \left(\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \right) \\
& \quad = e_0^T \lim_{T\to\infty} \int_t^T \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau \\
& \quad = e_0^T \int_t^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi) H(\tau,s,\xi)\, d\tau. \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Resta-nos calcular a diferença entre (I) e (II), que é um caso particular do cálculo feito acima, conforme pode ser observado abaixo:

$$\begin{aligned}
& e_0^T \left(\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \right. \\
& \quad \left. - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \right) \\
&= e_0^T \left[\left(\int_s^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) - \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau_1,\xi) \right) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1 \right] \\
&= e_0^T \int_t^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) H(\tau,s,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi) H(\tau_2,s,\xi)\, d\tau_2 d\tau_1,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (A.9).

Então podemos reescrever (A.8) da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
&e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi)) \\
&\quad = e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau \\
&\qquad + e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)\int_s^{\tau_1}\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1 \\
&\qquad + e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)\int_s^{\tau_2}\widetilde{A}(\tau_2,\tau_3,\xi)H(\tau_3,s,\xi) \\
&\qquad \int_s^{\tau_3}\widetilde{A}(\tau_3,\tau_4,\xi)H(\tau_4,s,\xi)d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2+\dots
\end{aligned}
$$

Antes de estimarmos o termo acima vale lembrar que, pela definição de $H(t,s,\xi)$, $|H(t,s,\xi)|=1$ e por (2.43) $|R_2(\tau,\xi)|\in L^1$, assim

$$
|\widetilde{A}(\tau_2,\tau_1,\xi)|\leq|H(\tau_2,\tau_1,\xi)|\,|R_2(\tau_1,\xi)|=|R_2(\tau_1,\xi)|, \tag{A.10}
$$

logo $|\widetilde{A}(\tau_2,\tau_1,\xi)|\in L^1$.

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi))\right| \\
&\quad \leq \left|e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau\right| \\
&\qquad + \left|e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)\int_s^{\tau_1}\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1\right| \\
&\qquad + \left|e_0^T\int_t^{\infty}\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)\int_s^{\tau_2}\widetilde{A}(\tau_2,\tau_3,\xi)H(\tau_3,s,\xi)\right. \\
&\qquad \left.\int_s^{\tau_3}\widetilde{A}(\tau_3,\tau_4,\xi)H(\tau_4,s,\xi)\,d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2\right|+\dots
\end{aligned}
$$

Vamos estimar separadamente cada termo dessa soma. Para o primeiro temos

$$\begin{aligned}\left|e_0^T \int_t^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)H(\tau,s,\xi)\,d\tau\right| &\leqslant |e_0^T| \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)|\,|H(\tau,s,\xi)|\,d\tau \\ &\leq \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)|\,d\tau.\end{aligned}$$

Para o segundo termo, usando (A.10) e (2.43) segue que

$$\begin{aligned}&\left|e_0^T \int_t^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi) \int_s^{\tau_1} \widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)H(\tau_2,s,\xi)\,d\tau_2 d\tau_1\right| \\ &\leqslant |e_0^T| \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)| \left(\int_s^{\tau_1} |\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)|\,|H(\tau_2,s,\xi)|\,d\tau_2\right) d\tau_1 \\ &= \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)| \left(\int_s^{\tau_1} |\widetilde{A}(\tau_1,\tau_2,\xi)|\,d\tau_2\right) d\tau_1 \\ &\leq \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)| \left(\int_s^{\tau_1} |R_2(\tau_2,\xi)|\,d\tau_2\right) d\tau_1 \\ &\leq \frac{C}{N} \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)|\,d\tau_1.\end{aligned}$$

A estimativa para o terceiro termo, segue de modo análogo ao que foi feito para o segundo, como segue

$$\begin{aligned}&\left|e_0^T \int_t^\infty \widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi) \int_s^{\tau_2} \widetilde{A}(\tau_2,\tau_3,\xi)H(\tau_3,s,\xi)\right| \\ &\qquad \left.\int_s^{\tau_3} \widetilde{A}(\tau_3,\tau_4,\xi)H(\tau_4,s,\xi) d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2\right| \\ &\leqslant |e_0^T| \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)| \int_s^{\tau_2} |\widetilde{A}(\tau_2,\tau_3,\xi)|\,|H(\tau_3,s,\xi)| \\ &\qquad \left(\int_s^{\tau_3} |\widetilde{A}(\tau_3,\tau_4,\xi)|\,|H(\tau_4,s,\xi)|\,d\tau_4\right) d\tau_3 d\tau_2\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)| \int_s^{\tau_2} |\widetilde{A}(\tau_2,\tau_3,\xi)| \int_s^{\tau_3} |\widetilde{A}(\tau_3,\tau_4,\xi)| \, d\tau_4 d\tau_3 d\tau_2$$
$$\leq \frac{C^2}{N^2} \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)| \, d\tau_2.$$

Os outros termos são todos estimados de modo análogo. Com isso,

$$\begin{aligned}
&|e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi) - Q_{ell}(t,s,\xi))| \\
&\quad \leq \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)| \, d\tau + \frac{C}{N} \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_1,\xi)| \, d\tau_1 \\
&\qquad + \frac{C^2}{N^2} \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau_2,\xi)| \, d\tau_2 + \dots
\end{aligned}$$

Note que o termo $\int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)| \, d\tau$ aparece em todos os termos da soma, assim, colocando este em evidência, obtemos

$$\begin{aligned}
|e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi) - Q_{ell}(t,s,\xi))| &\leq \left(1 + \frac{C}{N} + \left(\frac{C}{N}\right)^2 + \cdots\right) \\
&\quad \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)| \, d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C}{N}\right)^k \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)| \, d\tau.
\end{aligned}$$

Tomando N suficientemente grande, temos que a série acima é convergente, isto é,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{C}{N}\right)^k = \overline{C},$$

e, portanto,

$$|e_0^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi) - Q_{ell}(t,s,\xi))| \leq \overline{C} \int_t^\infty |\widetilde{A}(\infty,\tau,\xi)| \, d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \int_t^\infty |R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_t^T |R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \\
&\lesssim \frac{|\xi|^{-2\delta}}{(1+t)^{1+\alpha}}. \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

A última estimativa segue de (2.43).

Para concluir a demonstração, resta provar que

$$\left|e_1^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi) - Q_{ell}(t,s,\xi))\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Como provado anteriormente a segunda linha de $Q_{ell}(\infty,s,\xi)$ é nula. Assim, devemos mostrar que

$$|Q_{ell}(t,s,\xi)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } t \to \infty.$$

Por (A.5) temos que

$$e_1^T Q_{ell}(t,s,\xi) = e_1^T H(t,s,\xi) + e_1^T \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) Q_{ell}(\tau,s,\xi)\,d\tau.$$

Então, lembrando que $Q_{ell}(t,s,\xi)$ é limitado

$$
\begin{aligned}
|e_1^T Q_{ell}(t,s,\xi)| &\leqslant |e_1^T H(t,s,\xi)| + \left|e_1^T \int_s^t \widetilde{A}(t,\tau,\xi) Q_{ell}(\tau,s,\xi)\,d\tau\right| \\
&\leqslant |e_1^T H(t,s,\xi)| + C_1 \int_s^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Como feito para o outro caso, vamos estimar cada termo dessa soma separadamente. Assim, para o primeiro, temos

$$e_1^T H(t,s,\xi) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\displaystyle\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\displaystyle\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \end{pmatrix}$$

logo,

$$\begin{aligned}
|e_1^T H(t,s,\xi)| &= e^{-2\displaystyle\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau} \\
&\leq e^{-C|\xi|^{2\delta}\displaystyle\int_s^t (1+\tau)^\alpha d\tau} \\
&= e^{-C|\xi|^{2\delta}\left(\displaystyle\int_0^t (1+\tau)^\alpha d\tau - \int_0^s (1+\tau)^\alpha d\tau\right)} \\
&= e^{-C|\xi|^{2\delta}\displaystyle\int_0^t (1+\tau)^\alpha d\tau}\, e^{C|\xi|^{2\delta}\displaystyle\int_0^s (1+\tau)^\alpha d\tau} \\
&= C(s)\, e^{\frac{-C}{\mu}|\xi|^{2\delta}\displaystyle\int_0^t \mu(1+\tau)^\alpha d\tau} \\
&= C(s)\, e^{-C_2|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}
\end{aligned}$$

a última igualdade segue de (2.3), e

$$C(s) = e^{C|\xi|^{2\delta}\displaystyle\int_0^s (1+\tau)^\alpha d\tau}.$$

Para o segundo termo vamos separar em dois casos: $s \in \left(\frac{t}{2}, t\right]$ e $s \in \left(0, \frac{t}{2}\right]$.

Caso 1: $s \in \left(\frac{t}{2}, t\right]$

Pela definição de H

$$|e_1^T H(t,\tau,\xi)| = e^{-2\displaystyle\int_\tau^t h(\tau_1,\xi)\,d\tau_1} \leq 1.$$

Assim, pela observação acima e por (2.43) segue que

$$\begin{aligned}
\int_s^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau &= \int_s^t |e_1^T H(t,\tau,\xi) R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \\
&\leq \int_{\frac{t}{2}}^t |e_1^T H(t,\tau,\xi)|\,|R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \leq \int_{\frac{t}{2}}^t |R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \\
&\leq \frac{C|\xi|^{-2\delta}}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{1+\alpha}} \leq \frac{C|\xi|^{-2\delta}}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^{1+\alpha}} = \frac{\widetilde{C}|\xi|^{-2\delta}}{(1+t)^{1+\alpha}}. \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

Caso 2: $s \leq \frac{t}{2}$

Nesse caso, considere

$$\int_s^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau = \int_s^{\frac{t}{2}} |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau.$$

Note que a segunda integral é estimada da mesma maneira feita no caso anterior, ou seja,

$$\int_{\frac{t}{2}}^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\,d\tau = \int_{\frac{t}{2}}^t |e_1^T H(t,\tau,\xi) R_2(\tau,\xi)|\,d\tau \leq \frac{\widetilde{C}|\xi|^{-2\delta}}{(1+t)^{\alpha+1}}.$$

Para a primeira integral, utilizaremos o fato de que

$$f(\tau) = e^{-2\int_{\tau}^{t} h(\tau_1, \xi)\, d\tau_1}$$

é uma função crescente.

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{s}^{\frac{t}{2}} |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\, d\tau &= \int_{s}^{\frac{t}{2}} |e_1^T H(t,\tau,\xi) R_2(\tau,\xi)|\, d\tau \\
&= \int_{s}^{\frac{t}{2}} e^{-2\int_{\tau}^{t} h(\tau_1,\xi)\, d\tau_1} |R_2(\tau,\xi)|\, d\tau \\
&\leq e^{-2\int_{\frac{t}{2}}^{t} h(\tau_1,\xi)\, d\tau_1} \int_{s}^{\frac{t}{2}} |R_2(\tau,\xi)|\, d\tau \\
&\leq \frac{C}{N} e^{-2\int_{\frac{t}{2}}^{t} h(\tau_1,\xi)\, d\tau_1} \\
&\lesssim e^{-2c\int_{\frac{t}{2}}^{t} |\xi|^{2\delta}(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1} \\
&= e^{-c\int_{\frac{t}{2}}^{t} |\xi|^{2\delta}(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1 - c\int_{\frac{t}{2}}^{t} |\xi|^{2\delta}(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1} \\
&\leq e^{-c\int_{0}^{\frac{t}{2}} |\xi|^{2\delta}(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1 - c\int_{\frac{t}{2}}^{t} |\xi|^{2\delta}(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1} \\
&= e^{\frac{-c}{\mu}|\xi|^{2\delta} \int_{0}^{t} \mu(1+\tau_1)^{\alpha} d\tau_1} \\
&= e^{-c'|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}.
\end{aligned}$$

Logo, nesse caso,

$$\begin{aligned}\int_s^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\, d\tau &= \int_s^{\frac{t}{2}} |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\, d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t |e_1^T \widetilde{A}(t,\tau,\xi)|\, d\tau \\ &\lesssim \frac{|\xi|^{-2\delta}}{(1+t)^{\alpha+1}} + e^{-c'|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)}. \qquad (A.13)\end{aligned}$$

Pelo **caso 1**, (A.12) e pelo **caso 2**,(A.13), obtivemos que

$$|e_1^T Q_{ell}(t,s,\xi)| \lesssim e^{-c'|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} + \frac{|\xi|^{-2\delta}}{(1+t)^{\alpha+1}}. \qquad (A.14)$$

Note que (A.11) e (A.14) vão a zero quando $t \to \infty$, e, portanto, a proposição está provada.

■

Definimos

$$m_1(t,\xi) = -b(t)^2|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{2\sigma}.$$

Afirmação A.2 *Dado $m_1(t,\xi)$ como acima, vale que*

$$m_1(\tau,\xi) \approx -b(\tau)^2|\xi|^{4\delta}$$

Demonstração: Para $\xi \in B_M$ e $t \le t_\xi$ por (2.5) tem-se

$$m(t,\xi) \approx -b(t)^2|\xi|^{4\delta}.$$

Também pelas definições de $m(t,\xi)$ e $m_1(t,\xi)$ temos

$$m_1(t,\xi) \geq m(t,\xi).$$

Com esses dois resultados, podemos concluir que

$$m_1(t,\xi) \gtrsim -b(t)^2|\xi|^{4\delta}.$$

Por outro lado, vamos mostrar que $\exists\, c > 0$ tal que

$$m_1(t,\xi) = -b(t)^2|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{2\sigma} \leq -c\, b(t)^2|\xi|^{4\delta}$$

que é equivalente a mostrar que

$$(c-1)\,\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{2\sigma} \leq 0.$$

Considere $c < 1$. Para $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ vale que $(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geq N$. Assim,

$$\begin{aligned}
& (1+t)^{\alpha+1} \geq N|\xi|^{-2\delta} \\
\Leftrightarrow \quad & (1+t) \geq N^{\frac{1}{\alpha+1}}|\xi|^{-\frac{2\delta}{\alpha+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & (1+t)^{2\alpha} \geq N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{-\frac{4\delta\alpha}{\alpha+1}} \\
\Leftrightarrow \quad & (c-1)(1+t)^{2\alpha} \leq (c-1)N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{-\frac{4\delta\alpha}{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Com isso

$$
\begin{aligned}
(c-1)\,\mu^2(1+t)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{2\sigma} &\leq (c-1)\,\mu^2 N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{-\frac{4\delta\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{4\delta}+|\xi|^{2\sigma}\\
&= (c-1)\,\mu^2 N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}+|\xi|^{2\sigma}\\
&\leq (c-1)\,\mu^2 N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}+C_M|\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}\\
&= |\xi|^{\frac{4\delta}{\alpha+1}}\left(C_M+(c-1)\,\mu^2 N^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}\right)\\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

para N suficientemente grande. Note que na penúltima desigualdade usamos a condição $2\delta < \sigma(1+\alpha)$, ou seja, $2\sigma > \frac{4\delta}{1+\alpha}$.

Portanto, para todo $\xi \in B_M$ e $\tau \geqslant t_\xi$ concluímos que

$$m_1(\tau,\xi) \approx -b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} \tag{A.15}$$

para N suficientemente grande. ■

Consideramos agora a seguinte função:

$$\beta(t,\xi) \doteq exp\left(\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi)-h_1(\tau,\xi)-\frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)d\tau\right), \tag{A.16}$$

onde

$$h_1(\tau,\xi) \doteq \sqrt{-m_1(\tau,\xi)}.$$

Pela equivalência de $m_1(\tau,\xi)$ segue que $h_1(\tau,\xi) \approx b(\tau)|\xi|^{2\delta}$.

Na sequência vamos provar três lemas que serão usados na demonstração da Proposição A.6.

Lema A.3 *Para $h(\tau,\xi)$, $h_1(\tau,\xi)$ e $b(\tau)$ como definidos anteriormente vale que*

$$\left| h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} \right| \leqslant Ch_1(\tau,\xi)\left(\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{h_1(\tau,\xi)^2}\right)^2$$

para todo $(\tau,\xi) \in Z_{ell}^{low}$.

Demonstração:

Pela fórmula da expansão de Taylor para uma função $f(x)$ segue que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots$$

E ainda, utilizando o resto de Lagrange, temos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a_0)(x-a)^2,$$

onde a_0 está entre x e a.

Considere $f(x) = \sqrt{x}$, $x = -m(\tau,\xi)$ e $a = -m_1(\tau,\xi)$. Note que

$$\begin{aligned} x - a &= -m(\tau,\xi) + m_1(\tau,\xi) \\ &= -|\xi|^{2\sigma} + b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} + b'(\tau)|\xi|^{2\delta} - b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} + |\xi|^{2\sigma} \\ &= b'(\tau)|\xi|^{2\delta}. \end{aligned}$$

Assim

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4\sqrt{a_0}^3}(x-a)^2.$$

Substituindo os valores, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{-m(\tau,\xi)} &= \sqrt{-m_1(\tau,\xi)} + \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2\sqrt{-m_1(\tau,\xi)}} - \frac{(b'(\tau)|\xi|^{2\delta})^2}{8\sqrt{a_0^3}} \\
\Rightarrow \quad h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} &= -\frac{(b'(\tau)|\xi|^{2\delta})^2}{8\sqrt{a_0^3}} \\
\Rightarrow \quad \left| h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} \right| &= \frac{(b'(\tau)|\xi|^{2\delta})^2}{8\sqrt{a_0^3}}.
\end{aligned}$$

Como a_0 é um valor entre x e a, temos que $a_0 > a$ e então

$$\begin{aligned}
\left| h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} \right| &\leq \frac{(b'(\tau)|\xi|^{2\delta})^2}{8\sqrt{a^3}} \\
= \frac{(b'(\tau)|\xi|^{2\delta})^2}{8\,h_1(\tau,\xi)^3} &= Ch_1(\tau,\xi)\left(\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{h_1(\tau,\xi)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do lema.

■

Lema A.4 *Para $h(\tau,\xi)$, $h_1(\tau,\xi)$ e $b(\tau)$ como definidos anteriormente vale que*

$$\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)]}{2h(\tau,\xi)h_1(\tau,\xi)} \lesssim (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}$$

para todo $(\tau,\xi) \in Z_{ell}^{low}$.

Demonstração:

Inicialmente note que, por definição

$$m(\tau,\xi) = |\xi|^{2\sigma} - b(t)^2|\xi|^{4\delta} - b'(\tau)|\xi|^{2\delta}$$

e

$$m_1(\tau,\xi) = |\xi|^{2\sigma} - b(\tau)^2|\xi|^{4\delta}.$$

Assim

$$m(\tau,\xi) \leqslant -m_1(\tau,\xi) \quad \Rightarrow \quad h_1(\tau,\xi) \leqslant h(\tau,\xi).$$

Pelas equivalências para $h(\tau,\xi)$ e $h_1(\tau,\xi)$ temos

$$h_1(\tau,\xi) \geqslant C_1(1+\tau)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}$$

e

$$h(\tau,\xi) \geqslant C_2(1+\tau)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}.$$

Então segue que

$$\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)]}{2h(\tau,\xi)h_1(\tau,\xi)} \leqslant \frac{\mu\alpha(1+\tau)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)]}{2C_1C_2(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}}$$
$$= \frac{\mu\alpha(1+\tau)^{-\alpha-1}|\xi|^{-2\delta}[h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)]}{2C_1C_2}.$$

Como pode ser visto na demonstração do Lema A.3, temos

$$h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) \leq \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)}.$$

Substituindo na desigualdade acima

$$\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)]}{2h(\tau,\xi)h_1(\tau,\xi)} \lesssim (1+\tau)^{-\alpha-1}|\xi|^{-2\delta}\,\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{h_1(\tau,\xi)}$$
$$\lesssim (1+\tau)^{-\alpha-1}|\xi|^{-2\delta}\,\frac{(1+\tau)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}}{(1+\tau)^{\alpha}|\xi|^{2\delta}} = (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}.$$

■

Lema A.5 *Para $h(\tau,\xi)$, $h_1(\tau,\xi)$ e $b(\tau)$ como definidos anteriormente vale que*

$$\left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}\left[h(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta}\right]}{2h(\tau,\xi)^2}\right| \lesssim (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)} + (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}$$

para todo $(\tau,\xi) \in Z_{ell}^{low}$.

Demonstração:

Observe que

$$\begin{aligned}
\sqrt{b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} - |\xi|^{2\sigma}} &\leq \sqrt{b(\tau)|\xi|^{4\delta}} \\
\Rightarrow -h_1(\tau,\xi) &\geq -b(\tau)|\xi|^{2\delta} \\
\Rightarrow h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) &\geq h(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta}.
\end{aligned}$$

Se $h(\tau,\xi)-b(\tau)|\xi|^{2\delta}\geq 0$ então

$$\left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}\left[h(\tau,\xi)-b(\tau)|\xi|^{2\delta}\right]}{2h(\tau,\xi)^2}\right|\lesssim\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi)-h_1(\tau,\xi)]}{2h(\tau,\xi)h_1(\tau,\xi)}$$

e o resultado é obtido de maneira análoga ao lema anterior.

Dessa forma, considere $h(\tau,\xi)-b(\tau)|\xi|^{2\delta}<0$. Nesse caso

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}\left[h(\tau,\xi)-b(\tau)|\xi|^{2\delta}\right]}{2h(\tau,\xi)^2}\right|\lesssim(1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{(1+\tau)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}\left[b(\tau)|\xi|^{2\delta}-h(\tau,\xi)\right]}{(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}}\lesssim(1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}\\
\Leftrightarrow\quad&b(\tau)|\xi|^{2\delta}-h(\tau,\xi)\lesssim(1+\tau)^{-\alpha}|\xi|^{2(\sigma-\delta)}. \qquad (A.17)
\end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que a última estimativa é verdadeira.

Note que, usando as condições $\mu>0$, $2\delta<\sigma(1+\alpha)$ e $(1+\tau)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta}\geq N$, temos

$$\begin{aligned}
c^2(1+\tau)^{-2\alpha}|\xi|^{4(\sigma-\delta)} &\leq c^2N^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{\frac{4\delta\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{4(\sigma-\delta)}\\
&= c^2N^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{\frac{4\sigma(\alpha+1)-4\delta}{\alpha+1}}\\
&\leq c^2\,C_MN^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}}|\xi|^{\frac{4\sigma(\alpha+1)-2\sigma(\alpha+1)}{\alpha+1}}\\
&\leq c\,\mu\,|\xi|^{2\sigma},
\end{aligned}$$

para $c>0$ e N suficientemente grande.

Assim, para $c\mu > 1$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&\mu^2(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} + c^2(1+\tau)^{-2\alpha}|\xi|^{4(\sigma-\delta)} + |\xi|^{2\sigma} \\
&\quad \le \mu^2(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} + 2c\mu|\xi|^{2\sigma} + \mu\alpha(1+\tau)^{\alpha-1}|\xi|^{2\delta}.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\left[b(\tau)|\xi|^{2\delta} - c\,(1+\tau)^{-\alpha}|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\right]^2 \\
&\quad = \mu^2(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} + c^2(1+\tau)^{-2\alpha}|\xi|^{4(\sigma-\delta)} - 2c\mu\,|\xi|^{2\sigma} \\
&\quad \le b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} + b'(\tau)|\xi|^{2\delta} - |\xi|^{2\sigma} \\
&\quad = h(\tau,\xi)^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left|b(\tau)|\xi|^{2\delta} - c\,(1+\tau)^{-\alpha}|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\right| \le h(\tau,\xi),
$$

o que prova (A.17).

Assim, se $b(\tau)|\xi|^{2\delta} - c\,(1+\tau)^{-\alpha}|\xi|^{2(\sigma-\delta)} < 0$, a desigualdade é imediata. Caso contrário $b(\tau)|\xi|^{2\delta} - c\,(1+\tau)^{-\alpha}|\xi|^{2(\sigma-\delta)} \le h(\tau,\xi)$, como queríamos demonstrar.

■

Proposição A.6 *A função $\beta(t,\xi)$ é uniformemente limitada em Z_{ell}^{low},*

e

$$|\beta(t,\xi)-1| \lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + (1+t)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração:

Inicialmente queremos provar que $\beta(t,\xi)$ é uniformemente limitada, isto é, $|\beta(t,\xi)| \le K,\ \forall\,(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
|\beta(t,\xi)| &= exp\left(\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right) d\tau\right) \\
&\le exp\left(\int_t^\infty \left|h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right| d\tau\right).
\end{aligned}$$

A ideia da demonstração é somar e subtrair um termo adicional no integrando acima facilitando a estimativa de cada termo. Assim

$$\begin{aligned}
|\beta(t,\xi)| &\le exp\left(\int_t^\infty \left|h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)}\right| d\tau\right. \\
&\quad \left. + \int_t^\infty \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right| d\tau\right) \qquad \text{(A.18)} \\
&= exp\left(\int_t^\infty P(\tau,\xi)\,d\tau\right) exp\left(\int_t^\infty Q(\tau,\xi)\,d\tau\right)
\end{aligned}$$

onde

$$P(\tau,\xi) = \left|h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)}\right|$$

e

$$Q(\tau,\xi) = \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right|.$$

Vamos estimar $P(\tau,\xi)$ e $Q(\tau,\xi)$. Pelo Lema A.3, a definição de $b(\tau)$ e a equivalência $h_1(\tau,\xi) \approx b(\tau)|\xi|^{2\delta}$ provada anteriormente, temos

$$\begin{aligned} P(\tau,\xi) &\leqslant Ch_1(\tau,\xi)\left(\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{h_1(\tau,\xi)^2}\right)^2 \\ &\lesssim \frac{(1+\tau)^{2\alpha-2}|\xi|^{4\delta}}{[(1+\tau)^\alpha|\xi|^{2\delta}]^3} \\ &= (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$Q(\tau,\xi) \leqslant \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h(\tau,\xi)}\right| + \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h(\tau,\xi)} - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right|. \tag{A.19}$$

Estimamos cada módulo da desigualdade acima separadamente. Para o primeiro termo, pelo Lema A.4 temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h_1(\tau,\xi)} - \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h(\tau,\xi)}\right| &= \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}h(\tau,\xi) - b'(\tau)|\xi|^{2\delta}h_1(\tau,\xi)}{2h_1(\tau,\xi)h(\tau,\xi)}\right| \\ &\lesssim (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Para o segundo termo, utilizamos a expressão para $\partial_t h(\tau,\xi)$ calculada em (2.26), o Lema A.5 e a equivalência $h(\tau,\xi) \approx (1+\tau)^\alpha|\xi|^{2\delta}$ dada em (2.6):

$$\begin{aligned} &\left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h(\tau,\xi)} - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right| \\ &\quad = \left|\frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}}{2h(\tau,\xi)} - \frac{2b(\tau)b'(\tau)|\xi|^{4\delta} + b''(\tau)|\xi|^{2\delta}}{4h(\tau,\xi)^2}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta}]}{2h(\tau,\xi)^2} - \frac{b''(\tau)|\xi|^{2\delta}}{4h(\tau,\xi)^2} \right| \\
&\leq \left| \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta}]}{2h(\tau,\xi)^2} \right| + \left| \frac{b''(\tau)|\xi|^{2\delta}}{4h(\tau,\xi)^2} \right| \\
&\lesssim \left| \frac{b'(\tau)|\xi|^{2\delta}[h(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta}]}{2h(\tau,\xi)^2} \right| + \frac{(1+\tau)^{\alpha-2}|\xi|^{2\delta}}{(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta}} \\
&\lesssim (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)} + (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}. \quad \text{(A.21)}
\end{aligned}
$$

Considerando (A.20) e (A.21) em (A.19) obtemos

$$
Q(\tau,\xi) \lesssim (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)} + (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}.
$$

Usamos as estimativas obtidas para $P(\tau,\xi)$ e $Q(\tau,\xi)$ em (A.18) segue que

$$
\begin{aligned}
|\beta(t,\xi)| \quad &\leq \quad exp\left(C \int_t^\infty (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}\, d\tau \right) \\
&\qquad exp\left(C \int_t^\infty (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}\, d\tau \right). \text{(A.22)}
\end{aligned}
$$

Observe que para t fixo e $T > t$ tem-se

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\infty (1+\tau)^{-(\alpha+2)}|\xi|^{-2\delta}\, d\tau \\
&\quad = |\xi|^{-2\delta} \lim_{T\to\infty} \int_t^T (1+\tau)^{-(\alpha+2)}\, d\tau \\
&\quad = |\xi|^{-2\delta} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{(1+\tau)^{-(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)} \right) \Big|_t^T \\
&\quad = |\xi|^{-2\delta} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{(1+T)^{-(\alpha+1)} - (1+t)^{-(\alpha+1)}}{-(\alpha+1)} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|\xi|^{-2\delta}}{\alpha+1}(1+t)^{-(\alpha+1)} \\
&\lesssim 1 \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

pois $(t,\xi) \in Z_{ell}^{low}$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
&\int_t^\infty (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}\,d\tau \\
&\quad = |\xi|^{2(\sigma-2\delta)} \lim_{T\to\infty} \int_t^T (1+\tau)^{-(2\alpha+1)}\,d\tau \\
&\quad = |\xi|^{2(\sigma-2\delta)} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{(1+\tau)^{-2\alpha}}{-2\alpha} \right)\Bigg|_t^T \\
&\quad = |\xi|^{2(\sigma-2\delta)} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{(1+T)^{-2\alpha} - (1+t)^{-2\alpha}}{-2\alpha} \right) \\
&\quad = \frac{|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}}{2\alpha}(1+t)^{-2\alpha} \lesssim 1 \qquad \text{(A.24)}
\end{aligned}
$$

sendo que na última estimativa foi usado que $2\delta < \sigma(1+\alpha)$ e $(1+t)^{\alpha+1}|\xi|^{2\delta} \geq N$.

Portanto, usando (A.23) e (A.24) em (A.22) concluímos que

$$
|\beta(t,\xi)| \leq exp\,(C) = K,
$$

sendo K é uma constante e N suficientemente grande. Portanto, $\beta(t,\xi)$ é uniformemente limitado em Z_{ell}^{low}.

Resta mostrar que

$$
|\beta(t,\xi) - 1| \lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + (1+\tau)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}.
$$

Para isso note que

$$|\beta(t,\xi)-1| = \left|exp\left(\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right) d\tau\right) - exp\,(0)\right|.$$

Seja $f(x) = e^x$ e

$$a := \int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right) d\tau < \infty.$$

Pelo Teorema do Valor Médio segue que

$$\begin{aligned} &\left|exp\left(\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right) d\tau\right) - exp\,(0)\right| \\ &\quad \leqslant f'(c) \int_t^\infty \left|h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right| d\tau, \end{aligned}$$

para algum c entre 0 e a. Logo

$$\begin{aligned} |\beta(t,\xi) - 1| &\lesssim \int_t^\infty \left|h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right| d\tau \\ &\leqslant \int_t^\infty P(\tau,\xi)\, d\tau + \int_t^\infty Q(\tau,\xi)\, d\tau \\ &\lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + (1+t)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)} \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da proposição.

■

Definimos agora as seguintes funções:

$$\gamma(t,s,\xi) := exp\left(\int_s^t \left(h_1(\tau,\xi) - b(\tau)|\xi|^{2\delta} + \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right) d\tau\right)$$

e

$$\psi_\alpha(t,s) = \begin{cases} (1+t)^{1-3\alpha} & \text{se } \alpha < 1/3 \\ log(e+t) & \text{se } \alpha = 1/3 \\ (1+s)^{1-3\alpha} & \text{se } \alpha > 1/3. \end{cases}$$

Proposição A.7 *Para todo $t \geq s$ e $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ tem-se*

$$|\gamma(t,s,\xi) - 1| \quad \lesssim \quad |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\psi_\alpha(t,s).$$

Demonstração:

Inicialmente vamos utilizar a expansão de Taylor com resto de Lagrange da função $f(x) = \sqrt{x}$ para escrevermos $h_1(t,\xi)$ de maneira mais conveniente. Considere então $x = -m_1(t,\xi)$ e $a = b(t)^2|\xi|^{4\delta}$. Procedendo de maneira análoga ao que foi feito no Lema A.3 temos

$$\begin{aligned} \sqrt{-m_1(t,\xi)} \quad &= \quad \sqrt{b(t)^2|\xi|^{4\delta}} + \frac{1}{2\sqrt{b(t)^2|\xi|^{4\delta}}}\left(-m_1(t,\xi) - b(t)^2|\xi|^{4\delta}\right) \\ &\quad - \frac{1}{8\sqrt{(b(t)^2|\xi|^{4\delta})^3}}\left(-m_1(t,\xi) - b(t)^2|\xi|^{4\delta}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16\sqrt{{a_0}^5}}\left(-m_1(t,\xi) - b(t)^2|\xi|^{4\delta}\right)^3 \end{aligned}$$

com $x < a_0 < a$. Logo,

$$\begin{aligned} h_1(t,\xi) \quad &= \quad b(t)|\xi|^{2\delta} - \frac{|\xi|^{2\sigma}}{2b(t)|\xi|^{2\delta}} - \frac{|\xi|^{4\sigma}}{8b(t)^3|\xi|^{6\delta}} - \frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{{a_0}^5}} \\ &= \quad b(t)|\xi|^{2\delta} - \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(t)} - \frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{8b(t)^3} - \frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{{a_0}^5}}. \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade obtida para $h_1(t,\xi)$ obtém-se

$$
\begin{aligned}
|\gamma(t,s,\xi)-1| &= \left|exp\left(\int_s^t\left(h_1(\tau,\xi)-b(\tau)|\xi|^{2\delta}+\frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right)d\tau\right)-1\right| \\
&= \left|exp\left(\int_s^t\left(b(\tau)|\xi|^{2\delta}-\frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}-\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{8b(\tau)^3}\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.-\frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{a_0}^5}-b(\tau)|\xi|^{2\delta}+\frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right)d\tau\right)-1\right| \\
&= \left|exp\left(\int_s^t\left(-\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{8b(\tau)^3}-\frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{a_0}^5}\right)d\tau\right)-exp\,(0)\right|.
\end{aligned}
$$

Então aplicando o pelo Teorema do Valor Médio na igualdade acima, com

$$
a:=\int_s^t\left(-\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{8b(\tau)^3}-\frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{a_0}^5}\right)<\infty
$$

e $c\in\mathbb{R}$, $a<c<0$ temos

$$
\begin{aligned}
|\gamma(t,s,\xi)-1| &= e^c\left|\int_s^t\left(-\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{8b(\tau)^3}-\frac{|\xi|^{6\sigma}}{16\sqrt{a_0}^5}\right)d\tau-0\right| \\
&\lesssim \int_s^t\left(\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{b(\tau)^3}+\frac{|\xi|^{6\sigma}}{2\sqrt{a_0}^5}\right)d\tau. \qquad (A.25)
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que

$$
\frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{b(\tau)^3}\lesssim\frac{|\xi|^{6\sigma}}{2\sqrt{a_0}^5}, \qquad \forall\,(s,\xi)\in Z_{ell}^{low}.
$$

Na demonstração do Lema A.5 obtivemos a seguinte estimativa

$$
c_1(1+\tau)^{-2\alpha}|\xi|^{4(\sigma-\delta)}\leq\mu|\xi|^{2\sigma},
$$

assim,

$$\begin{aligned}
c_1|\xi|^{2\sigma} &\leq \mu\,(1+\tau)^{2\alpha}|\xi|^{4\delta} \\
&= \mu^{-1}b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} \\
\Rightarrow |\xi|^{4\sigma} &\leq c_2\, b(\tau)^4\xi|^{8\delta}.
\end{aligned}$$

Por (A.15), existe $c_3 > 0$ tal que

$$\begin{gathered}
m_1(\tau,\xi) \leq -c_3\, b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} \\
\Rightarrow c_3\, b(\tau)^2|\xi|^{4\delta} \leq -m_1(\tau,\xi).
\end{gathered}$$

Das duas estimativas acima e lembrando que $a_0 > x = -m_1(\tau,\xi)$ obtemos

$$\begin{aligned}
b(\tau)^6|\xi|^{4\sigma+12\delta} &\leq c_2\, b(\tau)^{10}|\xi|^{20\delta} \\
&= c_2\left(b(\tau)^2|\xi|^{4\delta}\right)^5 \\
&\leq c_4\big(-m_1(\tau,\xi)\big)^5 \\
&\leq c_4\, a_0^5.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& b(\tau)^3|\xi|^{2\sigma+6\delta} \lesssim \sqrt{a_0^5} \\
\Rightarrow \quad & b(\tau)^3|\xi|^{6\sigma+6\delta} \lesssim |\xi|^{4\sigma}\sqrt{a_0^5}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{|\xi|^{6\sigma}}{2\sqrt{a_0^5}} \lesssim \frac{|\xi|^{4\sigma-6\delta}}{b(\tau)^3}.$$

Usando a estimativa acima em (A.25) obtemos para $\alpha \neq 1/3$:

$$\begin{aligned}
|\gamma(t,s,\xi)-1| &\lesssim \int_s^t \frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{b(\tau)^3}\, d\tau \\
&\lesssim |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} \int_s^t (1+\tau)^{-3\alpha} d\tau \\
&= |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} \left(\frac{(1+\tau)^{-3\alpha+1}}{-3\alpha+1} \right) \Bigg|_s^t \\
&= \frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{-3\alpha+1}(1+t)^{-3\alpha+1} - \frac{|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}}{-3\alpha+1}(1+s)^{-3\alpha+1} \\
&\lesssim |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} \psi_\alpha(t,s).
\end{aligned}$$

Se $\alpha = 1/3$ então

$$\begin{aligned}
|\gamma(t,s,\xi)-1| &\lesssim |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} \int_s^t (1+\tau)^{-1} d\tau \\
&= |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} \left(ln\,(1+\tau) \right) \Big|_s^t \\
&= |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\, ln\,(1+t) - |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\, ln\,(1+s) \\
&\lesssim |\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\, ln\,(1+t).
\end{aligned}$$

As duas últimas estimativas provam a proposição.

■

Lema A.8 *Para todo $t \geq s$ e $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ podemos reescrever a função $a_{ell}(t,s,\xi)$ definida em (2.25) em função de $\gamma(t,s,\xi)$ da seguinte* *maneira:*

$$a_{ell}(t,s,\xi) = \frac{\beta(s,\xi)}{\beta(t,\xi)}\gamma(t,s,\xi)exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^{\sharp}(t,s)\right)$$
$$P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P$$

sendo $\beta(t,\xi)$ *definido em* (A.16).

Demonstração:

Usando a definição de $a_{ell}(t,s,\xi)$, a definição de $e_{ell}(t,s,\xi)$ dada em (2.40) e a expressão $E_{ell}^{low}(t,s,\xi)$ dada em (2.45) temos

$$\begin{aligned}
a_{ell}(t,s,\xi) &= \frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,s)\right)E_{ell}^{low}(t,s,\xi)\\
&= \frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}exp\left(-|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,s)\right)P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)e_{ell}(t,s,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P\\
&= \left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)exp\left(-|\xi|^{2\delta}\int_s^t b(\tau)\,d\tau\right)\\
&\quad exp\left(\int_s^t h(\tau,\xi)\,d\tau\right)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P\\
&= \left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}exp\left(\int_s^t\left(-|\xi|^{2\delta}b(\tau)+h(\tau,\xi)\right)\,d\tau\right)\\
&\quad P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P.
\end{aligned}$$

Vamos reescrever os dois primeiros termos do produto acima de uma outra forma. O primeiro termo $\left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}$ pode ser escrito como a exponencial de uma integral de s a t, e assim agrupar com a outra exponencial. Para isso note que

$$\frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)} = \frac{\partial_t(ln(h(\tau,\xi)))}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&exp\left(\int_s^t -\frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\,d\tau\right) = exp\left(\int_s^t -\frac{\partial_t(ln(h(\tau,\xi)))}{2}\,d\tau\right)\\
&= exp\left(\int_s^t \partial_t\left(ln(h(\tau,\xi))^{-\frac{1}{2}}\right)\,d\tau\right) = exp\left(ln(h(\tau,\xi))^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_s^t\\
&= exp\left(ln(h(t,\xi))^{-\frac{1}{2}} - ln((s,\xi))^{-\frac{1}{2}}\right) = exp\left(ln\left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
&= \left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
&exp\left(\int_s^t \left(-|\xi|^{2\delta}b(\tau) + h(\tau,\xi)\right)\,d\tau\right)\\
&= exp\left(\int_s^t \left(-|\xi|^{2\delta}b(\tau) + h(\tau,\xi) + h_1(\tau,\xi) + \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right.\right.\\
&\quad\left.\left. -h_1(\tau,\xi) - \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right)\,d\tau\right)\\
&= exp\left(\int_s^t \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)\right)\,d\tau\right)\\
&\quad exp\left(\int_s^t \left(h_1(\tau,\xi) - |\xi|^{2\delta}b(\tau) + \frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\right)\,d\tau\right)\\
&\quad exp\left(\int_s^t -\frac{|\xi|^{2(\sigma-\delta)}}{2b(\tau)}\,d\tau\right)\\
&= exp\left(\int_s^t \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)\right)\,d\tau\right)\gamma(t,s,\xi)\,exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right).
\end{aligned}$$

Pelas duas últimas igualdades temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{h(s,\xi)}{h(t,\xi)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left(\int_s^t \left(-|\xi|^{2\delta}b(\tau)d\tau + h(\tau,\xi)\right)\, d\tau\right) \\
&= exp\left(\int_s^t -\frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\, d\tau\right) exp\left(\int_s^t \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi)\right)\, d\tau\right) \\
&\quad \gamma(t,s,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right) \\
&= exp\left(\int_s^t \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)\, d\tau\right) \\
&\quad \gamma(t,s,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right) \\
&= exp\left(\int_s^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)\, d\tau\right. \\
&\quad \left. - \int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)\, d\tau\right) \\
&\quad \gamma(t,s,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right) \\
&= \frac{exp\left(\int_s^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)\, d\tau\right)}{exp\left(\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)}\right)\, d\tau\right)} \\
&\quad \gamma(t,s,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right) \\
&= \frac{\beta(s,\xi)}{\beta(t,\xi)}\, \gamma(t,s,\xi)\, exp\left(-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo essa última igualdade na igualdade de $a_{ell}(t,s,\xi)$ do início da demonstração o lema está demonstrado.

■

Usando as Proposições A.1, A.6 e A.7 provamos o seguinte resultado.

Proposição A.9 *Seja*

$$K(s,\xi) := \beta(s,\xi)P^{-1}Q_{ell}(\infty,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P,$$

então para todo $t \geq s$ *e* $(s,\xi) \in Z_{ell}^{low}$ *vale a estimativa:*

$$\begin{aligned} &\left|K(s,\xi)e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)} - a_{ell}(t,s,\xi)\right| \\ &\quad \lesssim \left((1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + \psi_\alpha(t,s)\,|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\right) e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Vamos reescrever o termo da esquerda da expressão acima usando a definição de $K(s,\xi)$ e a igualdade de $a_{ell}(t,s,\xi)$ dada no Lema A.8 de maneira a facilitar nossas estimativas. Assim,

$$\begin{aligned} &\left|K(s,\xi)e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)} - a_{ell}(t,s,\xi)\right| \\ &= \Bigg|\beta(s,\xi)P^{-1}Q_{ell}(\infty,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P\, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)} \\ &\quad -\frac{\beta(s,\xi)}{\beta(t,\xi)}\,\gamma(t,s,\xi)\, e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)}P^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\mathcal{N}(s,\xi)P\Bigg| \\ &= \Bigg|\beta(s,\xi)e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)}P^{-1} \\ &\quad \left[Q_{ell}(\infty,s,\xi) - \frac{\gamma(t,s,\xi)}{\beta(t,\xi)}\,\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right]\mathcal{N}(s,\xi)P\Bigg|. \end{aligned} \tag{A.26}$$

Agora, note que para provarmos o resultado devemos estimar os temos dessa última igualdade. Observe que

- Pela Proposição A.6, $\beta(s,\xi)$ é uniformemente limitado;

- As matrizes P e P^{-1} são constantes;

- A matriz $\mathcal{N}(s,\xi)$ é limitada;

Com isso resta-nos estimar de maneira conveniente a expressão entre colchetes da igualdade acima. Temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\gamma(t,s,\xi)\beta(t,\xi)^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad=\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\gamma(t,s,\xi)Q_{ell}(\infty,s,\xi)+\gamma(t,s,\xi)Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right.\\
&\qquad\left.-\gamma(t,s,\xi)\beta(t,\xi)^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad\leq\left|\gamma(t,s,\xi)-1\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\\
&\qquad+\left|\gamma(t,s,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\beta(t,\xi)^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad=\left|\gamma(t,s,\xi)-1\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\\
&\qquad+\left|\gamma(t,s,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\beta(t,\xi)^{-1}Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right.\\
&\qquad\left.+\beta(t,\xi)^{-1}Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\beta(t,\xi)^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad\leq\left|\gamma(t,s,\xi)-1\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|+\left|\gamma(t,s,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\left|1-\beta(t,\xi)^{-1}\right|\\
&\qquad+\left|\beta(t,\xi)^{-1}\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad=\left|\gamma(t,s,\xi)-1\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|+\left|\gamma(t,s,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\left|1-\beta(t,\xi)^{-1}\right|\\
&\qquad+\left|\beta(t,\xi)^{-1}\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right.\\
&\qquad\left.+\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(\infty,s,\xi)-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\right|\\
&\quad\leq\left|\gamma(t,s,\xi)-1\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|+\left|\gamma(t,s,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\left|1-\beta(t,\xi)^{-1}\right|\\
&\qquad+\left|\beta(t,\xi)^{-1}\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)\right|\left|I-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right|\\
&\qquad+\left|\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right|\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi)\right|.
\end{aligned}
\tag{A.27}
$$

Estimaremos as quatro diferenças da desigualdade acima separadamente.

Estimativa 1: $\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi)\right|$

Utilizando as estimativas (A.11) e (A.14) e a Proposição A.1, que nos garante que a segunda linha de $Q_{ell}(\infty,s,\xi)$ é nula, isto é, ${e_1}^T Q_{ell}(\infty,s,\xi)=(0,0)$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\left|Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi)\right| \\
&\quad\leq \left|{e_0}^T(Q_{ell}(\infty,s,\xi)-Q_{ell}(t,s,\xi))\right|+\left|{e_1}^T(Q_{ell}(t,s,\xi))\right| \\
&\quad\lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}+e^{-c'|\xi|^{2\delta}\Lambda(t,0)} \\
&\quad\lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}.
\end{aligned}
$$

Estimativa 2: $\left|I-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right|$

Utilizando que $\mathcal{N}=I+\mathcal{N}_1$ e a estimativa obtida em (2.30) temos,

$$
\begin{aligned}
\left|I-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right| &= \left|\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)-\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\mathcal{N}(t,\xi)\right| \\
&= \left|\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right|\left|I-\mathcal{N}(t,\xi)\right| \\
&= \left|\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)\right|\left|\mathcal{N}_1(t,\xi)\right| \\
&\lesssim \left|\mathcal{N}_1(t,\xi)\right| \\
&\lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}.
\end{aligned}
$$

Estimativa 3: $\left|1-\beta(t,\xi)^{-1}\right|$

Pelos cálculos feitos na Proposição A.6 obtém-se

$$\begin{aligned}
|\beta(t,\xi)^{-1}| &= \left| exp\left(-\int_t^\infty \left(h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)} \right) d\tau \right) \right| \\
&\leq exp\left(\int_t^\infty \left| h(\tau,\xi) - h_1(\tau,\xi) - \frac{\partial_t h(\tau,\xi)}{2h(\tau,\xi)} \right| d\tau \right) \\
&\leq K.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|1-\beta(t,\xi)^{-1}| &= |\beta(t,\xi)^{-1}\beta(t,\xi) - \beta(t,\xi)^{-1}| \\
&= |\beta(t,\xi)^{-1}|\,|\beta(t,\xi) - 1| \\
&\lesssim (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + (1+t)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}.
\end{aligned}$$

Estimativa 4: $\big|\gamma(t,s,\xi) - 1\big|$

Pela Proposição A.7:

$$|\gamma(t,s,\xi) - 1| \lesssim \psi_\alpha(t,s)\,|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}.$$

Usando as quatro estimativas acima e o fato das funções $Q_{ell}(\infty,s,\xi)$, $\gamma(t,s,\xi)$, $\beta(t,\xi)^{-1}$ e $\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)$ serem limitadas em (A.27) obtemos

$$\begin{aligned}
&\big|Q_{ell}(\infty,s,\xi) - \gamma(t,s,\xi)\beta(t,\xi)^{-1}\mathcal{N}^{-1}(t,\xi)Q_{ell}(t,s,\xi)\big| \\
&\qquad \lesssim \psi_\alpha(t,s)\,|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)} + (1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta} + (1+t)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young segue que

$$
\begin{aligned}
(1+t)^{-2\alpha}|\xi|^{2(\sigma-2\delta)} &= (1+t)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}}|\xi|^{-\delta}(1+t)^{\frac{1-3\alpha}{2}}|\xi|^{2\sigma-3\delta} \\
&\leq \frac{1}{2}\Big((1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}+(1+t)^{1-3\alpha}|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big((1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}+\psi_\alpha(t,s)\,|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}\Big)
\end{aligned}
$$

pois $(1+t)^{1-3\alpha}\leq\psi_\alpha(t,s)$.

Considerando as duas últimas estimativas em (A.26) concluímos que

$$
\begin{aligned}
&\left|K(s,\xi)e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)}-a_{ell}(t,s,\xi)\right| \\
&\quad\lesssim\Big(\psi_\alpha(t,s)\,|\xi|^{2(2\sigma-3\delta)}+(1+t)^{-(\alpha+1)}|\xi|^{-2\delta}\Big)\;e^{-|\xi|^{2(\sigma-\delta)}\Lambda^\sharp(t,s)}
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração da proposição.

■

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones.* Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[3] R. C. Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping.* J. Hyperbolic Differ. Eqns. (2013), no. 3, 563–575.

[4] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space.* J. Math. Anal. Appl. (2013), no. 1, 247–255.

[5] M. D'Abbicco, R. Coimbra Charão, C. R. da Luz, *Sharp time decay rates on a hyperbolic plate model under effects of an intermediate damping with a time-dependent coefficient.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A (2016), 2419–2447.

[6] M. D'Abbicco, M. R. Ebert, *A classification of structural dissipations for evolution operators.* Math. Methods in the Appl. Sci., (2015). Available from: http://dx.doi.org/10.1002/mma.3713.

[7] R. Dautray, J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Volume 2: Functional and Variational Methods, Springer, Berlin Heidelberg, 1988.

[8] L. C. Evans, *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2002.

[9] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations.* Studia Math. **143** (2000), 175–197.

[10] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.* Wiley Eastern Limited, Bangalore, 1989.

[11] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems.* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 4 (1999), pp. 419-444.

[12] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Iniciação aos espaços de Sobolev.* IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1977.

[13] L. A. Medeiros, P. H. Rivera, *Espaços de Sobolev e aplicações às equações diferenciais parciais.* Textos de Métodos Matemáticos No. 9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.

[14] M. K. Mezadek, *Structural damped σ-evolution operators.* Dr.Sc Thesis , TU Bergakademie Freiberg, Germany, 2014.

[15] M. Reissig, *L_p-L_q Decay Estimates for Wave Equation with Time-Dependent Coefficients.* J. Nonlinear Math. Physics (2004), 534–548.

[16] M. Reissig, X.Lu, *Rates of decay for structural damped models with decreasing in time coefficients.* Int. J. Dynamical Systems and Diff. Eqns. (2009), 21–55.

[17] J. Wirth, *Asymptotic properties of solutions to wave equations with time-dependent dissipation.* Dr.Sc Thesis, TU Bergakademie Freiberg, Germany, 2005.