

Priscilla Sayuri Saito de Oliveira

**Estudo de modelos matemáticos com equações  
diferenciais ordinárias em sistemas biológicos**

Florianópolis  
2016



Priscilla Sayuri Saito de Oliveira

**Estudo de modelos matemáticos com equações diferenciais  
ordinárias em sistemas biológicos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção de grau de Licenciado em Matemática

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Jáuber Cavalcante de Oliveira

Florianópolis  
2016



Priscilla Sayuri Saito de Oliveira  
Estudo de modelos matemáticos com equações diferenciais ordinárias em sistemas  
biológicos

Esta monografia foi julgada adequada  
como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE  
CURSO no Curso de Matemática - Ha-  
bilitação Licenciatura, e aprovada em sua  
forma final pela Banca Examinadora desig-  
nada pela Portaria nº 24/2016/CCM.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2016

---

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda Janesch  
Coordenadora de Curso

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira

---

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan

---

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Florianópolis  
2016



Eu dedico esse trabalho ao meu pai Carlos Roberto de Oliveira.



# Agradecimentos

Agradeço ao meu pai que não está mais presente para me parabenizar mas que tenho certeza que está orgulhoso de mim. Agradeço por todo o esforço que sempre fez para cuidar de mim e de minha família, por ter confiado em mim nos momentos que mais precisei e por todo amor que me deu.

Agradeço a minha mãe por sempre ter trabalhado muito para poder dar a mim e aos meus irmãos as oportunidades que ela teve, aguentado firme muitos momentos difíceis. Agradeço a ela por ter me apoiado e incentivado estudar em uma universidade federal, uma das melhores decisões da minha vida.

Agradeço ao meu amigo Diego Gutiérrez Mendoza que sempre percebia o meu falso “tudo bem” e conseguia me fazer rir em qualquer momento, até nos mais difíceis, por ter tornado os momentos mais bobos tão divertidos e por ter me feito enxergar o mundo de uma maneira diferente.

Agradeço ao meu “praticamente” irmão Jair Torres, um homem quase perfeito, que me deu sábias palavras quando estava desorientada e precisando de uma palavra que me guiasse, e que viveu comigo muitos episódios engraçados que me fizeram esquecer todos os problemas.

Agradeço ao meu amigo Diego Alejandro Tabares Gómez que foi um anjo para mim nesses anos da universidade, que me acolheu diversas vezes aguentando a minha choroadeira e que tem o sorriso e abraço que sempre recarregam as minhas energias.

Agradeço ao meu amigo Luis Betancur que aceitava os convites de chás nas noites e companhia para comer guloseimas nos momentos que precisava desabafar, sempre acompanhada de boas risadas.

Agradeço ao meu amigo Julian Esteban Barrera Torres que me acolheu em momentos difíceis e que sempre esteve presente nos momentos significativos para mim, apesar das nossas diferenças, e por todas as histórias que escrevemos juntos nesses últimos cinco anos.

Agradeço à minha melhor amiga Helena Carol Koch que sempre me ajudou a se erguer e que sempre esteve ao meu lado para curtir a vida. Agradeço por todas as memórias que construímos juntas que vai me fazer feliz toda vez que eu lembrar.

Agradeço ao meu amigo Eduardo Pandini que me ajudou tanto durante a graduação, que me diz sábias palavras quando eu precisava escutar uma opinião realista e que me deu carinho e várias horas de conversa que me fez sorrir e ficar alegre.

Agradeço ao meu amigo Leonardo Biz que me deu colos, momentos que me fez sentir em paz com o seu sorriso angelical e sua preciosa amizade.

Agradeço ao meu amigo Natã Machado que me reconfortou em vários momentos com um ótimo abraço e que sempre foi uma pessoa transparente, leal e esforçado que me inspirou a estudar.

Agradeço ao meu amigo Jeison Diaz que cuidou de mim e me deu muito carinho no ano mais difícil da minha vida e que me fez dar muitas gargalhadas.

Agradeço aos professores José Luiz Rosas Pinho e Silvia Martini de Holanda Janesch pelo apoio, pelas orientações e carinho.

Agradeço aos professores Matheus Cheque Bortolan e Ruy Coimbra Charão por terem aceitado o convite e pela ajuda para melhorar este trabalho.

Por fim, agradeço ao professor Jáuber Cavalcante de Oliveira por ter aceitado me orientar, pela paciência que teve em me explicar cada detalhe inúmeras vezes, pelo comprometimento, pela dedicação e pela inspiração que me deu mostrando a beleza da matemática.

*“The more I learn, the more I realize I don’t know. The more I realize I don’t know,  
the more I want to learn.”  
(Albert Einstein )*



# Resumo

Este trabalho consiste no estudo de um modelo matemático de equações diferenciais ordinárias num sistema biológico para a propagação de doenças. Esse modelo é um caso particular do modelo SIS (suscetíveis – infectados – suscetíveis) que é apropriado para modelar doenças em que o indivíduo recuperado volta a ser suscetível. Para isso, é apresentado definições e teoremas sobre existência e unicidade de soluções, estabilidade de soluções e bifurcações de equações diferenciais ordinárias.

**PALAVRAS-CHAVE:** modelo matemático, equações diferenciais ordinárias, bifurcações e estabilidade.



# Abstract

In this work we study ordinary differential equations and in particular certain mathematical models related to the propagation of diseases in biological systems. This model is a particular case of the SIS (susceptible - infected - susceptible) model that is appropriate for modeling diseases in which the recovered individual is again susceptible. For this it is presented a set of definitions and theories on the existence and uniqueness of solutions, stability of solutions and bifurcations of ordinary differential equations.

**Keywords:** mathematical model, ordinary differential equations, stability and bifurcations.



# Sumário

<b>1</b>	<b>EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>2.1</b>	<b>Adimensionalização . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Princípio de Estabilidade Linear . . . . .</b>	<b>26</b>
<b>2.3</b>	<b>Estabilidade segundo Lyapunov . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>ANÁLISE QUALITATIVA DE MODELOS COM BIFURCAÇÕES . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO: ESTUDO DE CASO DA PROPAGAÇÃO DE UMA INFECÇÃO . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Deduzindo o modelo para a propagação de uma infecção . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Análise do comportamento da equação (4.10) . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>4.2.1</b>	Soluções estacionárias . . . . .	51
<b>4.2.2</b>	Comportamento qualitativo . . . . .	51
<b>4.2.3</b>	Simulação . . . . .	52
<b>4.2.4</b>	Análise de estabilidade . . . . .	52
<b>4.2.5</b>	Diagrama de bifurcação . . . . .	53
<b>4.3</b>	<b>Interpretação dos resultados . . . . .</b>	<b>54</b>

# Lista de ilustrações

Figura 1	– O gráfico da função $f(x)$ da equação 3.1 mostrando as duas soluções estacionárias. Fonte: SEGEL, 2013, p. 85. . . . .	39
Figura 2	– Solução numérica de (3.1) com diversos valores iniciais. Fonte: SEGEL, 2013, p. 85. . . . .	40
Figura 3	– O gráfico da função $f(x) = c(x - \frac{1}{3}x^3)$ com soluções estacionárias $x = 0$ , $x = +\sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 89. . . . .	41
Figura 4	– Algumas soluções numéricas da equação (3.2) com vários valores iniciais. Fonte: SEGEL, 2013, p. 89. . . . .	41
Figura 5	– A posição e a estabilidade das soluções estacionárias quando $r < 0$ da função $f(x) = r + x^2$ , Fonte: SEGEL, 2013, p. 95. . . . .	43
Figura 6	– O gráfico de $f(x)$ da equação 3.3 para valores diferentes de $r$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 95. . . . .	43
Figura 7	– Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 95. . . . .	44
Figura 8	– Soluções estacionárias e suas estabilidades. Fonte: SEGEL, 2013, p. 96. . . . .	44
Figura 9	– Comparação para $r < 0$ , $r = 0$ e $r > 0$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 96. . . . .	46
Figura 10	– Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 96. . . . .	46
Figura 11	– O gráfico $f(x)$ da equação (3.4). Fonte: SEGEL, 2013, p. 97. . . . .	47
Figura 12	– A mudança do número de soluções estacionárias com a variação do parâmetro $r$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 97. . . . .	48
Figura 13	– Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 97. . . . .	48
Figura 14	– O gráfico da função $f(x)$ da equação (4.12) com $R_0 = 8$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 109. . . . .	51
Figura 15	– O gráfico com $R_0 = 3, 5$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 109. . . . .	52
Figura 16	– Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 111. . . . .	53

# Introdução

No início de 2016, os médicos sem fronteiras (MSF), uma organização humanitária internacional, listou 5 epidemias para acompanhar naquele ano. As doenças listadas foram: cólera, malária, sarampo, meningite e vírus e parasitas emergentes e re-emergentes como dengue, chikungunya e zika, e em abril deste ano o Ministério da Saúde divulgou que o Brasil já registrou 802.249 casos prováveis de dengue em 2016.

A modelagem matemática pode ser uma ótima ferramenta para prever como a doença se manifesta em uma determinada situação ou quais parâmetros são mais sensíveis para o melhoramento da propagação e auxiliar a política pública para conter o aumento de infectados, gerando soluções que mostrem quantas pessoas devem ser vacinadas para estabilizar a propagação, por exemplo.

O objetivo deste trabalho é o estudo do modelo matemático de equações diferenciais ordinárias da propagação de doenças. Esse modelo é um caso particular do modelo SIS (suscetíveis – infectados – suscetíveis) que é apropriado para modelar doenças nas quais o indivíduo recuperado volta a ser suscetível, como por exemplo, meningite meningocócica e a peste causadas por bactérias, doenças sexualmente transmissíveis e a malária causada por protozoários.

No primeiro capítulo serão apresentados definições e teoremas de existência e unicidade de soluções. No segundo capítulo veremos como adimensionalizar a equação, o princípio de estabilidade linear e estabilidade segundo Lyapunov. No terceiro capítulo, será dado um espaço para fazermos a análise qualitativa de modelos com bifurcações, e por fim, no último capítulo, estudaremos o modelo matemático de propagação de doenças.

Este estudo baseou-se nos livros de APOSTOL (1994), R. GRIMSHAW (1990) e de Q. KONG (2014) para a parte técnica, e o livro de SEGEL e EDELSTEIN-KESHET (2013) para a parte sobre as modelagens de sistemas biológicos.



# 1 Existência e Unicidade de soluções

## Teoremas de existência e unicidade

A seguir são listados os resultados matemáticos que serão utilizados para a compreensão do modelo matemático estudado.

**Teorema 1.1.** *Suponha que  $P$  é uma função contínua em um intervalo aberto  $I$ . Escolha qualquer ponto  $a$  em  $I$  e seja  $b$  qualquer número real. Então existe uma e somente uma função  $y = f(x)$  que satisfaz o problema com valor inicial*

$$y' + P(x)y = 0,$$

com

$$f(a) = b,$$

no intervalo  $I$ . Essa função é dada por

$$f(x) = be^{-A(x)},$$

com

$$A(x) = \int_a^x P(t)dt.$$

**Teorema 1.2.** *Suponha  $P$  e  $Q$  duas funções contínuas em um intervalo aberto  $I$ . Escolha qualquer ponto  $a$  em  $I$  e seja  $b$  qualquer número real. Então existe uma e somente uma função  $y = f(x)$  que satisfaz o problema de valor inicial*

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

com

$$f(a) = b,$$

no intervalo  $I$ . Essa função é dada por

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)} dt,$$

com

$$A(x) = \int_a^x P(t)dt.$$

**Teorema 1.3.** *Sejam  $y$  e  $u$  duas funções tais que  $y = ue^{-\frac{ax}{2}}$ . Então, em  $\mathbb{R}$ ,  $y$  satisfaz a equação diferencial  $y'' + ay' + by = 0$  se e somente se  $u$  satisfaz a equação diferencial*

$$u'' + \frac{4b - a^2}{4}u = 0,$$

com  $a$  e  $b$  constantes reais.

Esse teorema reduz o estudo da equação  $y'' + ay' + by = 0$  em um caso especial da equação  $y'' + by = 0$ , e será usado mais adiante.

Com a ajuda do próximo teorema, conseguimos determinar todas as soluções da equação  $y'' + by = 0$ .

**Teorema 1.4.** *Suponha duas funções  $f$  e  $g$  que satisfaçam a equação diferencial  $y'' + by = 0$  em  $\mathbb{R}$ . Suponha também que  $f$  e  $g$  satisfaçam as condições iniciais*

$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = g'(0).$$

Então  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$ .

**Teorema 1.5.** *Seja  $b$  um número real e considere duas funções  $u_1$  e  $u_2$  em  $\mathbb{R}$  da seguinte maneira:*

(a) *Se  $b = 0$ , tome  $u_1(x) = 1$ , e  $u_2(x) = x$ .*

(b) *Se  $b < 0$ , tome  $b = -k^2$  e defina  $u_1(x) = e^{kx}$  e  $u_2(x) = e^{-kx}$ .*

(c) *Se  $b > 0$ , tome  $b = k^2$  e defina  $u_1(x) = \cos kx$ , e  $u_2(x) = \sin kx$ .*

Então toda solução da equação diferencial  $y'' + by = 0$  em  $(-\infty, +\infty)$  é dada por

$$y = c_1u_1(x) + c_2u_2(x),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

**Teorema 1.6.** *Seja  $d = a^2 - 4b$  o discriminante da equação diferencial linear  $y'' + ay' + by = 0$ . Então qualquer solução dessa equação em  $\mathbb{R}$  é dada por*

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)],$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes, e as funções  $u_1$  e  $u_2$  são determinadas de acordo com o sinal algébrico do discriminante como segue:

(a) *Se  $d = 0$ , então  $u_1(x) = 1$  e  $u_2(x) = x$ .*

- (b) Se  $d > 0$ , então  $u_1(x) = e^{kx}$  e  $u_2(x) = e^{-kx}$ , onde  $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$ .  
 (c) Se  $d < 0$ , então  $u_1(x) = \cos kx$  e  $u_2(x) = \sin kx$ , onde  $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$ .

**Observação:** No caso (b), quando o discriminante for positivo, a solução  $y$  da equação  $y = e^{\frac{-ax}{2}} [c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)]$  é uma combinação linear de duas funções exponenciais,

$$y = e^{\frac{-ax}{2}} (c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \text{ com}$$

$$r_1 = -\frac{a}{2} + k = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}, \quad r_2 = -\frac{a}{2} - k = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}.$$

**Teorema 1.7.** Seja  $R = R(x)$  uma função contínua em  $\mathbb{R}$  e  $L(y) := y'' + ay' + by$ , sendo  $y$  uma função duas vezes continuamente diferenciável (de classe  $C^2$ ) em  $\mathbb{R}$  e  $a, b$  constantes. Se  $y_1$  é a solução particular da equação não homogênea  $L(y) = R$ , então a solução geral é obtida adicionando a solução geral da equação homogênea  $L(y) = 0$  a  $y_1$ .

**Teorema 1.8.** Sejam  $v_1$  e  $v_2$  soluções da equação  $L(y) = 0$  onde  $L(y) = y'' + ay' + by$ . Seja  $W$  o Wronskiano de  $v_1$  e  $v_2$ . Então a equação não homogênea  $L(y) = R$  tem uma solução particular  $y_1$  dada pela fórmula

$$y_1(x) = t_1(x)v_1(x) + t_2(x)v_2(x),$$

onde

$$t_1(x) = - \int v_2(x) \frac{R(x)}{W(x)} dx, \quad t_2(x) = \int v_1(x) \frac{R(x)}{W(x)} dx.$$

Essa fórmula utilizada no teorema para encontrar a solução  $y_1$  também é chamada de variação de parâmetros. Foi utilizada pela primeira vez por Johann Bernoulli em 1697, para resolver as equações de primeira ordem, e depois por Lagrange em 1774, para solucionar as equações lineares de segunda ordem.

O próximo teorema nos mostra como encontrar a fórmula implícita que é satisfeita por qualquer solução da equação  $A(y)y' = Q(x)$ .

**Teorema 1.9.** Seja  $y = y(x)$  alguma solução da equação diferencial separável

$$A(y)y' = Q(x)$$

tal que  $y'$  é contínua em um intervalo aberto  $I$ . Suponha que  $Q$  e a composta  $A \circ y$  são contínuas em  $I$ . Seja  $G$  alguma primitiva de  $A$ , isto é,  $G' = A$ . Então a solução  $y$  satisfaz a fórmula implícita

$$G(y) = \int Q(x)dx + C$$

para alguma constante  $C$ .

### Teoremas de existência de única solução local

**Condição Lipschitz:** dizemos que uma função  $f : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaz a condição Lipschitz se existe uma constante  $L$  tal que

$$\|\mathbf{f}(x, t) - \mathbf{f}(y, t)\| \leq L|x - y|,$$

para todos  $x, y \in D$ , e para todo  $t \in I$ , isto é,  $L$  independente de  $t$  e  $x$ .

**Observação:** A norma euclidiana de um vetor  $x \in \mathbb{R}^n$  é definida por  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

**Teorema 1.10.** *Seja  $f$  função com valores em  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz a condição Lipschitz com constante  $L$  para  $x \in D$  com  $D$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $|t - t_0| \leq \delta$ . Sejam  $x(t)$  e  $y(t)$  soluções do problema de valor inicial*

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t), t)$$

para  $|t - t_0| \leq \delta$  com

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0,$$

onde  $x_0, y_0 \in D$ . Então,

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|e^{L|t-t_0|}.$$

**Teorema 1.11.** *Seja  $f(\mathbf{x}, t)$  contínua para  $|t - t_0| \leq \alpha, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq \beta$ , e satisfazendo uma condição Lipschitz com constante  $L$  nessa região. Suponha que  $|f(\mathbf{x}, t)| \leq M$  nessa região e  $\delta = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right)$ . Então, o problema de valor inicial*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t f(\mathbf{x}(s), s)ds$$

tem uma única solução para  $|t - t_0| \leq \delta$ .

**Teorema 1.12.** *Seja  $f(x, t; \mu, t_0, x_0)$  uma função contínua para  $|t - \zeta| \leq \alpha, |x - \xi| \leq \beta, |\mu - \mu_0| \leq \gamma$ , que satisfaz a condição de Lipschitz com constante  $L$  nessa região. Seja*

$x_0(\mu)$  e  $t_0(\mu)$  funções contínuas de  $\mu$  para  $|\mu - \mu_0| \leq \gamma$  de modo que  $x_0(\mu_0) = \xi$  e  $t_0(\mu_0) = \zeta$ . Então, existe um  $\delta > 0$  e  $\epsilon > 0$  tais que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t; \mu, t_0, x_0) \\ x(t_0(\mu)) = x_0(\mu) \end{cases} \quad (1.1)$$

tem uma solução única  $x = x(t, \mu)$  para  $|t - \zeta| \leq \delta$  e  $|\mu - \mu_0| \leq \epsilon$  e esta solução é uma função contínua de  $t$  e  $\mu$ .

Em um teorema anterior, foi estabelecida a existência de uma única solução local. O teorema a seguir permite estender esta solução de modo a atingir uma de duas possibilidades quando  $t$  tende ao infinito:  $(t, x(t))$  tende a fronteira do domínio de  $f$ , ou a solução “explode em tempo finito”. Este resultado é extremamente útil, pois no caso de ser possível provar que soluções locais permanecem limitadas, isto é, que apenas a primeira opção ocorre, e se  $I = \mathbb{R}$  e  $D = \mathbb{R}^n$ , isso implica a existência de solução global.

**Teorema 1.13.** *Seja  $f(x, t)$  uma função contínua para  $x$  em um domínio  $D$  e  $t$  em um intervalo aberto  $I$ . Supomos que  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz nesta região. Então, para todo  $x \in D$ , para todo  $t_0 \in I$ , o problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

tem uma única solução  $x(t)$ , a qual está definida para  $t_0 \leq t < T \leq \infty$  e é tal que, ou  $T = \infty$  ou  $T < \infty$ , e  $|x(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow T$  ou  $(x(t), t)$  aproxima-se da fronteira do domínio produto  $D \times I$  quando  $t \rightarrow T$ .



## 2 Estabilidade de soluções

### 2.1 Adimensionalização

A seguir mostraremos com um exemplo que a adimensionalização da equação pode nos dar vantagens, como reduzir a quantidade dos parâmetros livres e mostrar quais parâmetros têm maior influência no modelo.

**Exemplo 2.1.** *Um modelo bem conhecido de crescimento populacional que depende da densidade é a equação logística. Essa equação é dada por*

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

com  $r > 0$  sendo a taxa de crescimento intrínseco com unidade de medida  $\frac{1}{\text{tempo}}$  e  $K > 0$  sendo a capacidade de carga com a mesma unidade de  $N$  que é a população total.

*Dividindo os dois lados por  $K$  e reagrupando os termos, temos*

$$\frac{1}{K} \frac{dN}{dt} = r \frac{N}{K} \left(1 - \frac{N}{K}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{N}{K}\right) = r \frac{N}{K} \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

*Definindo  $y(t) = \frac{N(t)}{K}$ , (note que como  $K$  tem a mesma unidade de  $N$ , então  $y$  é adimensional) podemos reduzir a equação substituindo  $\frac{N}{K}$  por  $y$  e obteremos*

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y).$$

*Além disso, podemos introduzir uma nova variável adimensional  $s$  definida como  $s = rt$  para eliminar o parâmetro  $r$  da equação. Substituindo  $dt = \frac{ds}{r}$  na equação acima segue que*

$$\frac{dy}{ds} = y(1 - y).$$

Esse exemplo ilustra que a inserção das variáveis adimensionais reduz o número de parâmetros, e como não há mais parâmetros livres não é necessário considerar os valores que os parâmetros  $r$  e  $K$  assumem.

## 2.2 Princípio de Estabilidade Linear

Agora vamos discutir a estabilidade das soluções de equações gerais. Para isso, consideramos a equação

$$x' = f(t, x), \quad (2.1)$$

com  $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Seja  $x = \phi(t)$  uma solução da equação (2.1) no intervalo  $[t_*, \infty)$  para algum  $t_* \geq 0$ .

**Definição 2.2.** *Seja  $x(t; t_0, x_0)$  qualquer solução da equação (2.1) satisfazendo  $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$ , com  $t_0 \geq t_*$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Então*

(a)  $\phi(t)$  é dita *estável* se para todo  $\varepsilon > 0$  e para todo  $t_0 \geq t_*$  existe um  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tal que  $|x_0 - \phi(t_0)| < \delta$  implica que  $|x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

(b)  $\phi(t)$  é dita *uniformemente estável* se é estável com  $\delta = \delta(\varepsilon)$  independentemente da escolha de  $t_0$ ; isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que para todo  $t_0 \geq t_*$ ,  $|x_0 - \phi(t_0)| < \delta$  implica que  $|x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| < \varepsilon$  para todo  $t \geq t_0$ .

(c)  $\phi(t)$  é dita *assintoticamente estável* se é estável e se para todo  $t_0 \geq t_*$ , existe  $\delta_1 = \delta_1(t_0) > 0$  tal que  $|x_0 - \phi(t_0)| < \delta_1$  implica que  $|x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

(d)  $\phi(t)$  é dita *instável* se não é estável.

**Definição 2.3.** *Uma solução estacionária da equação diferencial  $\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t))$  satisfaz  $f(t, u(t)) = 0$  para todo  $t$  em  $\mathbb{R}_+$ .*

**Exemplo 2.4.** *Considere a equação*

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) \cdot (p - x(t)) \quad (2.2)$$

com  $a > 0$  e  $p > 0$  constantes.  $\forall \tau \geq 0$ , e  $\forall \xi \in [0, \infty)$ , a única solução global da equação (2.2), que satisfaz  $x(t, \tau, \xi) = \xi$ , é

$$x(t, \tau, \xi) = \frac{p\xi e^{ap(t-\tau)}}{p + \xi(e^{ap(t-\tau)} - 1)}$$

para  $t \in [\tau, \infty)$ .

Vamos mostrar pela definição que uma das soluções estacionárias  $x \equiv p$  é uniformemente estável. Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ . Então,

$$\begin{aligned} \|x(t, \tau, \xi) - p\| &= \left\| \frac{p\xi e^{ap(t-\tau)} - p}{p + \xi(e^{ap(t-\tau)} - 1)} \right\| \\ &= \left\| \frac{-p^2 + p\xi}{p + \xi(e^{ap(t-\tau)} - 1)} \right\| \\ &\leq \frac{|p|\|\xi - p\|}{|p|} = \|\xi - p\| < \delta(\epsilon) = \epsilon, \forall t \in [\tau, +\infty). \end{aligned}$$

Agora consideramos a equação diferencial ordinária autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

e supomos que existe uma solução estacionária  $x = x_{ss}$ . Então,  $\frac{d(x_{ss})}{dt} = 0$  e  $f(x_{ss}) = 0$ . Suponha que estejamos perto da solução estacionária e defina  $x(t) = x_{ss} + x_p(t)$  com  $x_p = x_p(t)$ . Aqui,  $x_p$  representa uma pequena perturbação. Queremos avaliar o comportamento do modelo quando introduzimos uma pequena perturbação no sistema. Com o tempo, se  $x_p(t)$  diminuir implicará que  $x_{ss} + x_p \approx x_{ss}$  e a solução estacionária será localmente estável. Mas se  $x_p(t)$  aumentar,  $x_{ss}$  será instável.

Substituindo  $x(t) = x_{ss} + x_p$  na equação temos que,

$$\frac{d[x_{ss} + x_p]}{dt} = f(x_{ss} + x_p).$$

Agora aproximaremos a função  $f$  utilizando a série de Taylor para obtermos,

$$f(x_{ss} + x_p) = f(x_{ss}) + f'(x_{ss})x_p + f''(x_{ss})\frac{x_p^2}{2} + t.o.s.$$

na qual t.o.s. são os termos de ordem superior.

Como consequência da hipótese de que tínhamos uma solução estacionária, havíamos observado que  $\frac{d(x_{ss})}{dt} = 0$  e  $f(x_{ss}) = 0$ . Logo, podemos reescrever a equação como

$$\frac{dx_p}{dt} \approx f'(x_{ss})x_p + f''(x_{ss})\frac{x_p^2}{2} + t.o.s.$$

Como queremos saber somente o comportamento do modelo quando há pequenas perturbações, eliminamos os termos de ordem superior, e assim segue que

$$\frac{dx_p}{dt} \approx f'(x_{ss})x_p.$$

Definindo a constante  $\lambda$  como  $\lambda = f'(x_{ss})$ , a equação pode ser simplificada como

$$\frac{dx_p}{dt} = \lambda x_p.$$

Quando  $\lambda = f'(x_{ss}) > 0$ , o crescimento é exponencial e  $x_{ss}$  é instável. Mas quando  $\lambda = f'(x_{ss}) < 0$ , temos um decrescimento exponencial e  $x_{ss}$  é estável.

**Observação:** Quando  $\lambda$  for 0, os termos de ordem superior passam a ter importância no sistema e portanto, não conseguimos fazer nenhuma afirmação quanto ao crescimento ou o decrescimento da função.

**Exemplo 2.5.** Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \frac{x}{1+x} - \alpha x,$$

com  $\alpha > 0$  constante. Mostremos que existe a solução estacionária no ponto  $x = 0$  e determinemos como a estabilidade da solução depende do parâmetro  $\alpha$ .

Primeiro mostramos que de fato  $x = 0$  é uma solução estacionária.

$$f(0) = \frac{0}{1+0} - 0 = 0 = \frac{dx}{dt}.$$

Logo,  $x(t) = x_{ss} = 0$  é solução estacionária.

Calculando a derivada da função, temos

$$f'(x) = \frac{1(1+x) - (x).1}{(1+x)^2} - \alpha = \frac{1}{(1+x)^2} - \alpha$$

Agora, encontramos a constante  $\lambda$  avaliando a derivada da função no ponto  $x = 0$ .

$$\lambda = f'(x_{ss}) = f'(0) = 1 - \alpha$$

Assim,  $x_{ss}$  é estável se  $\lambda < 0$ , ou seja,  $1 - \alpha < 0$  ou  $\alpha > 1$ .

**Definição 2.6.** Dada uma função vetorial de várias variáveis  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ , a representação matricial da derivada, quando existe, é denominada matriz Jacobiana e é definida por

$$JF(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos analisar a estabilidade da solução nula da equação diferencial não linear

$$x' = f(t, x), \quad (2.3)$$

com  $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $f(t, 0) \equiv 0$ . A ideia é linearizar  $f(t, x)$  encontrando uma equação que seja próxima a equação (2.3) para poder utilizar o resultado da estabilidade da equação linear para analisar a estabilidade da equação não-linear. Para isso, vamos encontrar uma equação linear “próxima” da equação (2.3) quando  $x$  for pequeno. Notemos que, quando  $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , a função  $f$  pode ser linearizada da seguinte maneira:

$$f(t, x) = f(t, 0) + \frac{\partial f(t, 0)}{\partial x} x + r(t, x) = A(t)x + r(t, x),$$

na qual  $A(t) := \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$  é matriz Jacobiana e  $r \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  é o termo de erro. Vamos analisar a estabilidade da equação (2.3) em dois casos.

**Caso 1.** Assuma que a matriz Jacobiana  $\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)$  de  $f$  no ponto  $x = 0$  seja uma matriz constante que não depende do tempo. Nesse caso a equação não-linear acima é escrita como

$$x' = Ax + r(t, x), \quad (2.4)$$

com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $r \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  satisfazendo  $r(t, 0) \equiv 0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ .

O teorema a seguir mostra que podemos estabelecer a estabilidade de soluções para (2.4) a partir da análise dos autovalores de  $x' = Ax$  desde que  $r(t, x)$  seja “pequeno” no sentido descrito no teorema a seguir.

**Teorema 2.7.** *Sejam  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , os autovalores da matriz  $A$ . Suponha que  $|r(t, x)| = o(|x|)$  quando  $x \rightarrow 0$  uniformemente para  $t \in [0, \infty)$ , i.e.,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|r(t, x)|}{|x|} = 0$  uniformemente para  $t \in [0, \infty)$ .*

(a) *Se  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , então a função nula é uniformemente estável e assintoticamente estável.*

(b) *Se existe  $i \in 1, \dots, n$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , então a solução nula é instável.*

**Exemplo 2.8.** Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x' = -kxe^{-y} - seny \\ y' = -ky\cos x + tgx \end{cases} \quad (2.5)$$

com  $k \in \mathbb{R}$ . Então a matriz Jacobiana será dada por

$$A = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -ke^{-y} & kxe^{-y} - \cos y \\ kysenx + \sec^2 x & -k\cos x \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos reescrever o sistema (2.5) na forma

$$\begin{cases} x' = -kx - y + r_1(x, y) \\ y' = x - ky + r_2(x, y), \end{cases} \quad (2.6)$$

com

$$|r_1(x, y)| + |r_2(x, y)| = o(|x| + |y|) \text{ quando } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Vamos resolver a equação característica  $\det(A - \lambda I) = 0$  para encontrar os autovalores da matriz  $A$ .

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k - \lambda & -1 \\ 1 & -k - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-k - \lambda)(-k - \lambda) - (-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2k\lambda + (k^2 + 1) = 0$$

Utilizando a fórmula de bhaskara obtemos que os autovalores da matriz  $A$  são  $\lambda = -k \pm i$ . Logo, pelo Teorema 2.7 a solução nula da equação (2.6), e conseqüentemente a solução nula da equação (2.5), é uniformemente estável e assintoticamente estável se  $k > 0$  e instável se  $k < 0$ .

**Caso 2.** Considere a equação

$$x' = A(t)x + r(t, x), \quad (2.7)$$

com  $A \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times n})$  e  $r \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  satisfazendo  $r(t, 0) \equiv 0$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Vamos analisar a estabilidade da solução nula da equação (2.7) baseados na seguinte equação linearizada:

$$x' = A(t)x. \quad (2.8)$$

O Teorema 2.9 a seguir estabelece um resultado similar ao do teorema anterior: a estabilidade de soluções de (2.7) pode ser determinada pelo estudo da estabilidade do problema  $x' = A(t)x$  desde que o quociente  $\frac{r(t,x)}{x}$  seja integrável em  $\mathbb{R}_+$ .

**Teorema 2.9.** *Suponha que existe uma função  $p \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$  tal que  $\int_0^\infty p(t)dt < \infty$ , e  $|r(t,x)| \leq p(t)|x|$  para  $|x|$  suficientemente pequeno e para todo  $t \in [0, \infty)$ .*

(a) *Se a equação (2.8) for uniformemente estável, então a solução nula da equação (2.7) é uniformemente estável.*

(b) *Se a equação (2.8) for uniformemente estável e assintoticamente estável, então a equação zero da equação (2.7) é uniformemente estável e assintoticamente estável.*

**Exemplo 2.10.** *Vamos analisar a estabilidade da solução nula da equação diferencial de segunda ordem*

$$x'' + \frac{3e^t}{e^t + 1}x' + 2x - \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}x^2 = 0. \quad (2.9)$$

Sejam  $x_1 = x$  e  $x_2 = x'$ . Então podemos reescrever a equação (2.9) por um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - \frac{3e^t}{e^t+1}x_2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}x_1^2. \end{cases}$$

Ainda podemos reescrever como

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 + \frac{3}{e^t+1}x_2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}x_1^2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Considere o sistema (2.10) como a perturbação do sistema linear

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

com os termos de perturbação  $r_1(x_1, x_2) = 0$  e  $r_2(x_1, x_2) = \frac{3}{e^t+1}x_2 + \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}x_1^2$ .

Então quando  $|x_1| \leq 1$ ,

$$|r_1(x_1, x_2)| + |r_2(x_1, x_2)| \leq \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}|x_1| + \frac{3}{e^t+1}|x_2|$$

$$\left( \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{e^t+1} \right) (|x_1| + |x_2|).$$

Note que

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{e^t+1} \right) dt < \infty.$$

Portanto, as condições do Teorema 2.7 são satisfeitas com

$$p(t) = \frac{1}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{e^t+1}.$$

Observamos que a matriz do sistema é dada por  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ , na qual os autovalores são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$ . Logo, o sistema (2.11) é uniformemente estável e assintoticamente estável. E pelo Teorema 2.9, a solução nula do sistema (2.10) e a solução nula da equação (2.9) são uniformemente estável e assintoticamente estável.

Encerramos a seção com dois teoremas de estabilidade para o caso de equações da forma

$$x' = [A(t) + B(t)]x. \quad (2.12)$$

No primeiro deles, impõe-se uma condição de integrabilidade sobre  $B(t)$ , enquanto no outro, mostra-se que a análise dos autovalores da matriz  $A$  determina a estabilidade desde que a matriz  $B$  seja “assintoticamente pequena”, no sentido que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |B(t)| = 0$ .

**Teorema 2.11.** *Suponha que  $B \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times n})$  tal que  $\int_0^{\infty} |B(t)| dt < \infty$ .*

(a) *Se a equação (2.8) é uniformemente estável então a equação (2.12) é uniformemente estável.*

(b) *Se a equação (2.8) é uniformemente estável e assintoticamente estável, então a equação (2.12) é uniformemente estável e assintoticamente estável.*

**Teorema 2.12.** *Assuma que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{n \times n})$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} |B(t)| = 0$ . Se  $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então a equação  $x' = (A + B(t))x$  é uniformemente estável e assintoticamente estável.*

### 2.3 Estabilidade segundo Lyapunov

**Definição 2.13.** *Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua, onde  $D$  é um aberto. Uma equação diferencial autônoma é uma equação da forma*

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.13)$$

Apresentaremos o método de Lyapunov para a equação geral autônoma não-linear com  $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  e  $f(0) = 0$ . A vantagem deste método é que podemos discutir a estabilidade mesmo não tendo as informações prévias das soluções. Primeiro, vamos definir as funções de Lyapunov para discutir a estabilidade da solução nula da equação (??).

**Definição 2.14.** *Sejam  $D$  uma vizinhança aberta da origem e  $V \in C(D, \mathbb{R})$  tal que  $V(0) = 0$ . Então dizemos que  $V$  é*

(a) *positiva semi-definida se  $V(x) \geq 0$  para  $x \in D$ , e negativa semi-definida se  $V(x) \leq 0$  para  $x \in D$ ;*

(b) *positiva definida se  $V(x) > 0$  para  $x \in D$  tal que  $x \neq 0$ , e negativa definida se  $V(x) < 0$  para  $x \in D$  tal que  $x \neq 0$ ;*

(c) *indefinida se  $V(x)$  muda de sinal em qualquer vizinhança de  $x = 0$ .*

**Exemplo 2.15.** *Com  $D = \mathbb{R}^2$ ,*

*$V(x, y) = (x + y)^2$  é positiva semi-definida mas não positiva definida;*

*$V(x, y) = 3x^2 + 2y^6$  e  $V(x, y) = (x - y)^2 + y^4$  são positivas definidas;*

*$V(x, y) = x^2 - 5y^4$  e  $V(x, y) = xy$  são indefinidas.*

**Definição 2.16.** *Sejam  $D$  uma vizinhança aberta da origem e  $V : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função de classe  $C^1$ . Definimos*

$$\dot{V}(x) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \right] (x) = [\nabla V \cdot f](x),$$

com  $\nabla V$  sendo o gradiente de  $V$ .

**Exemplo 2.17.** *Seja  $V(x_1, x_2) = k(1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$ . Então a derivada de  $V(x)$  da*

$$\text{equação } \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -k \operatorname{sen} x_1 \end{cases} \text{ é}$$

$$\dot{V}(x) = k(\operatorname{sen} x_1)x_2 + x_2(-k \operatorname{sen} x_1) = 0.$$

**Teorema 2.18.** *Sejam  $D$  uma vizinhança aberta da origem e  $V \in C^1(C, \mathbb{R})$ .*

(a) *Se  $V(x)$  é definida positiva e  $\dot{V}(x)$  é negativa semi-definida, então a solução nula de  $x' = f(x)$  é uniformemente estável.*

(b) *Se  $V(x)$  é positiva definida e  $\dot{V}(x)$  é negativa definida, então a solução nula de  $x' = f(x)$  é uniformemente estável e assintoticamente estável.*

(c) *Se  $V(0) = 0$  e se em qualquer vizinhança de  $x = 0$  em  $D$  existe  $x_0$  tal que  $V(x_0) > 0$  e  $\dot{V}(x)$  é positiva definida, então a solução nula de  $x' = f(x)$  é instável.*

A seguir veremos exemplos que não são possíveis de concluir a estabilidade através da linearização. Nesses exemplos seram apresentados como se constrói a função Lyapunov.

**Exemplo 2.19.** *Considere o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x' = -x + xy^2 \\ y' = -2x^2y - y^3. \end{cases}$$

Seja  $V = ax^2 + by^2$  com  $a, b > 0$  para serem determinadas. Então

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(-x + xy^2) + 2by(-2x^2y - y^3) \\ &= -2ax^2 + 2ax^2y^2 - 4bx^2y^2 - 2by^4. \end{aligned}$$

Se fixamos  $a = 2$  e  $b = 1$ , então  $V = 2x^2 + y^2$  é positiva definida em  $D = \mathbb{R}^2$  e  $\dot{V} = -4x^2 - 2y^4$  é negativa definida. Portanto, pelo item (b) do Teorema 2.18, a solução nula é uniformemente estável e assintoticamente estável.

**Exemplo 2.20.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = 2xy + x^3 \\ y' = -x^2 + y^5. \end{cases}$$

Seja  $V = ax^2 + by^2$  com  $a, b > 0$  para ser determinado. Então

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(2xy + x^3) + 2b(-x^2 + y^5) \\ &= 4ax^2y + 2ax^4 - 2bx^2y + 2by^6. \end{aligned}$$

Se fixamos  $a = 1$  e  $b = 2$ , então  $V = x^2 + 2y^2$  é positiva definida em  $D = \mathbb{R}^2$  e  $\dot{V} = 2x^4 + 4y^6$  é positiva definida. Assim, pelo item (c) do Teorema 2.18, a solução nula é instável.

Para aplicar o Teorema 2.18, o ponto crucial é encontrar a função Lyapunov apropriada. No próximo exemplo, mostraremos que a escolha inadequada da função Lyapunov não permite que o Teorema 2.18 seja aplicado.

**Exemplo 2.21.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y \\ y' = x^5 - 2y^3. \end{cases}$$

Primeiro vamos tentar com  $V = ax^2 + by^2$  com  $a, b > 0$  a serem determinados. Então

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2axx' + 2byy' = 2ax(-x^3 - y) + 2by(x^5 - 2y^3) \\ &= -6ax^4 - 2axy + 2bx^5y - 4by^4.\end{aligned}$$

Note que para qualquer escolha para  $a$  e  $b$  não conseguimos cancelar os termos  $-2axy$  e  $2bx^5y$ . Isso significa que a escolha inicial de  $V$  não foi boa. Então, vamos escolher  $V = ax^6 + by^2$ . Assim temos

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 6ax^5x' + 2byy' = 2ax^5(-x^3 - y) + 2by(x^5 - 2y^3) \\ &= -18ax^8 - 6ax^5y + 2bx^5y - 4by^4.\end{aligned}$$

Se fixamos  $a = 1$  e  $b = 3$ , então  $V = x^6 + 3y^2$  é positiva definida em  $D = \mathbb{R}^2$  e  $\dot{V} = -18x^8 - 12y^4$  é negativo definido. Portanto, pelo item (b) do Teorema 2.18, a solução nula é uniformemente estável e assintoticamente estável.

**Exemplo 2.22.** Considere a equação

$$u'' + 2u + 3u^2 = 0. \quad (2.14)$$

Sejam  $x = u$ , e  $y = u'$ . Então a equação (2.14) se torna um sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2x - 3x^2. \end{cases} \quad (2.15)$$

Seja

$$V = \frac{y^2}{2} + \int_0^x (2s + 3s^2) ds.$$

Então  $V$  é positiva definida em  $D = \{(x, y) : |x| + |y| < \frac{1}{2}\}$  e

$$\dot{V} = y(-2x - 3x^2) + (2x + 3x^2)y = 0$$

é negativo semi-definido em  $D$ . Pelo item (a) do Teorema 2.18, a solução nula do sistema (2.15) é uniformemente estável e conseqüentemente a solução nula ( $u = 0$ ) da equação (2.14) é uniformemente estável.

**Exemplo 2.23.** Considere a equação

$$u'' + 3u' + \operatorname{senu} = 0. \quad (2.16)$$

Sejam  $x = u$ , e  $y = u'$ . Então a equação (2.16) pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{senu} - 3y. \end{cases} \quad (2.17)$$

Seja

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x \operatorname{sens} ds. \quad (2.18)$$

Então  $V$  é positiva definida em  $D = \{(x, y) : |x| + |y| < \pi\}$ , e

$$\dot{V}(x, y) = y(-\operatorname{senu} - 3y) + (\operatorname{senu})y = -3y^2$$

que é negativo semi definido em  $D$ . Pelo item (a) do Teorema 2.18, a solução nula do sistema (2.17) é uniformemente estável, e conseqüentemente a solução nula da equação (2.16) é uniformemente estável.

**Definição 2.24.** Seja  $x = x(t)$  uma solução da equação  $x' = f(x)$  definida no seu intervalo máximo de existência  $(\alpha, \beta)$ . Então o conjunto  $\{(t, x(t)) : t \in (\alpha, \beta)\}$  é chamado de curva de solução, e o conjunto  $\{x(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$  é chamado de órbita (ou trajetória).

O próximo teorema é uma extensão do item (a) do Teorema 2.18 e permitirá mostrar que a solução nula da equação (2.16) também é assintoticamente estável com a mesma função Lyapunov.

**Teorema 2.25.** Seja  $D$  uma vizinhança aberta da origem e  $V \in C^1(D, \mathbb{R})$ . Suponha que  $V(x)$  é positiva definida e  $\dot{V}(x)$  é negativo semi-definida. Além disso, se o conjunto  $D_0 := \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$  não contém órbita não-trivial da equação  $x' = f(x)$ , com  $f(0) = 0$ , então a solução nula da equação  $x' = f(x)$  é uniformemente estável e assintoticamente estável.

**Exemplo 2.26.** Considere o sistema (2.17) e seja  $V(x, y)$  definido como em (2.18). Então  $V(x, y)$  é positiva definida e  $\dot{V}(x, y)$  é negativa semi-definida como foi mostrado anteriormente. Note que

$$\dot{V}(x, y) = 0 \leftrightarrow y = 0.$$

Assim,  $D_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Para qualquer solução  $(x(t), y(t))$  da equação (2.17) em  $D_0$  temos  $y(t) \equiv 0$ . Então por (2.17),  $x(t) \equiv 0$ . Isso implica que  $D_0$  não contém nenhuma órbita não trivial do sistema 2.17. Portanto, pelo Teorema 2.25 a solução nula do sistema 2.17 é uniformemente estável e assintoticamente estável, e conseqüentemente a solução nula da equação (2.16) é uniformemente estável e assintoticamente estável.

**Exemplo 2.27.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y - x^3y^2 \\ y' = -x - x^2y^5. \end{cases} \quad (2.19)$$

Seja  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . Então  $V$  é positiva definida em  $D = \mathbb{R}^2$  e

$$\dot{V}(x, y) = 2x(y - x^3y^2) + 2y(-x - x^2y^5) = -2x^2y^2(x^2 + y^4)$$

que é negativa semi-definida em  $D$ . Note que  $D_0 = \{(x, y) : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ . Para qualquer solução  $(x(t), y(t))$  da equação (2.17) em  $D_0$ , temos  $x(t) \equiv 0$  ou  $y(t) \equiv 0$ . Então pelo sistema (2.19), temos  $x(t) \equiv 0$  e  $y(t) \equiv 0$ . Isso implica que  $D_0$  não contém nenhuma órbita não-trivial do sistema (2.19). Portanto, pelo Teorema 2.25, a solução nula de (2.19) é uniformemente estável e assintoticamente estável.

**Exemplo 2.28.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = y^3 - x^3y^4 \\ y' = -xy^2 - x^2y^7. \end{cases} \quad (2.20)$$

Seja  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . Então  $V$  é positiva definida em  $D = \{(x, y) : |x| + |y| < l\}$  para qualquer  $l > 0$ , e

$$\dot{V}(x, y) = 2x(y^3 - x^3y^4) + 2y(-xy^2 - x^2y^7) = -2x^2y^4(x^2 + y^4)$$

que é negativa semi-definida em  $D$ . Pelo item (a) do Teorema 2.18, a solução nula do sistema (2.20) é uniformemente estável. Note que  $D_0 = \{(x, y) \in D : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ . Para qualquer solução  $(x(t), y(t))$  do sistema (2.20) em  $D_0$ , temos  $x(t) \equiv 0$  ou  $y(t) \equiv 0$ . Se  $x(t) \equiv 0$ , então pela primeira equação do sistema (2.20) temos  $y(t) \equiv 0$ ; entretanto, se  $y(t) \equiv 0$ , então pelo sistema (2.20) temos  $x(t) \equiv c$  para algum  $c \in \mathbb{R}$  arbitrário. Isso implica que para qualquer  $l > 0$ ,  $D_0$  contém pontos de equilíbrio não triviais  $(c, 0)$  com  $0 < |c| < l$ . No entanto, observamos que  $(c, 0)$  é solução para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, o Teorema 2.25 não pode ser aplicado. De fato, pela definição de assintoticamente estável, podemos observar que a solução nula do sistema (2.20) não é assintoticamente estável.



### 3 Análise qualitativa de modelos com bifurcações

Vamos encontrar soluções analíticas aplicando métodos geométricos e qualitativos em equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Também vamos analisar a sensibilidade de parâmetros e apresentar algumas transições chamadas de bifurcações, que variam conforme variamos o parâmetro.

Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x) \equiv f(x) \quad (3.1)$$

que possui duas soluções estacionárias,  $x \equiv 0$  e  $x \equiv 1$ .

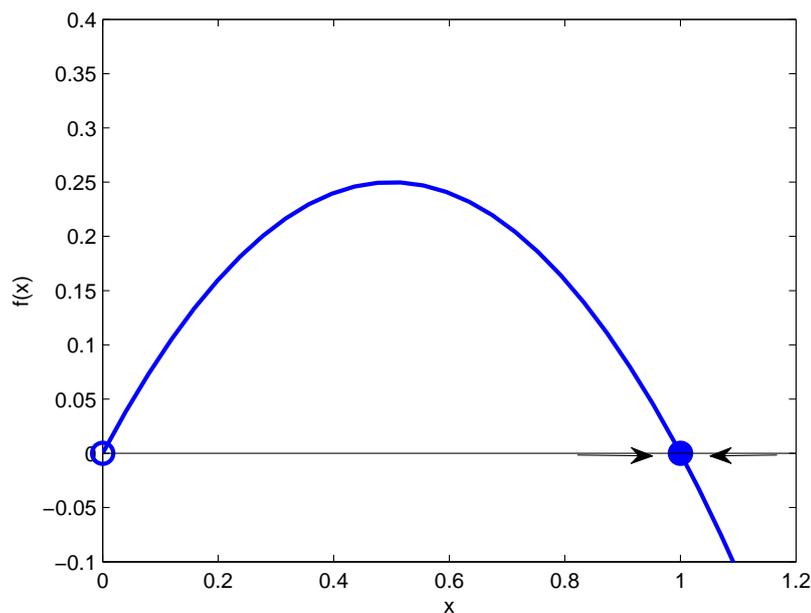


Figura 1 – O gráfico da função  $f(x)$  da equação 3.1 mostrando as duas soluções estacionárias. Fonte: SEGEL, 2013, p. 85.

As setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução

instável. A solução estacionária  $x = 1$  é estável e está representada por um ponto preto na Figura 1 e a solução instável  $x = 0$  está representada por um ponto branco. A imagem de  $x$  está definida para valores positivos de  $x$  no qual  $x$  representa a densidade da população.

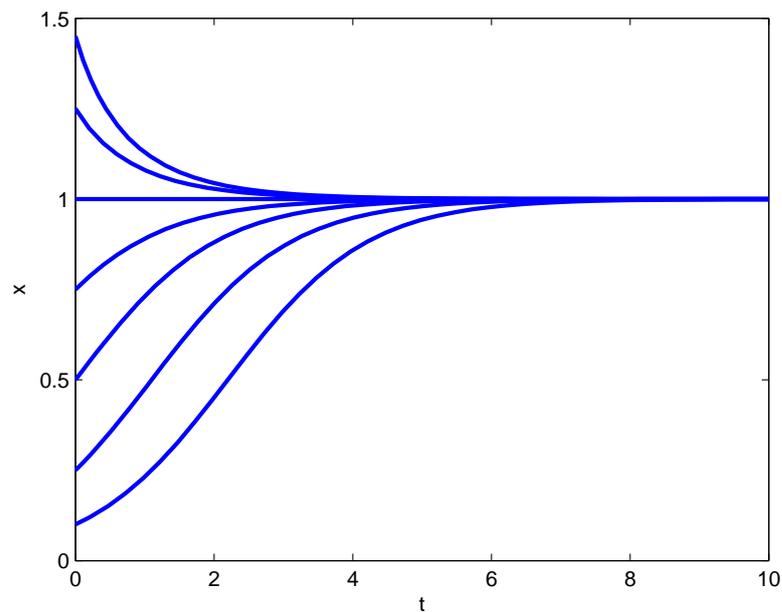


Figura 2 – Solução numérica de (3.1) com diversos valores iniciais. Fonte: SEGEL, 2013, p. 85.

Note que para todos os valores de  $x_0 > 0$ , as soluções tendem a  $x = 1$  quando  $t$  tende ao infinito.

Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = c \left( x - \frac{1}{3}x^3 \right) \equiv f(x), \quad (3.2)$$

com  $c > 0$  constante. Note que as soluções estacionárias são  $x = \sqrt{3}$ ,  $x = 0$  e  $x = -\sqrt{3}$ .

Na Figura 3 a seguir, as setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução instável.

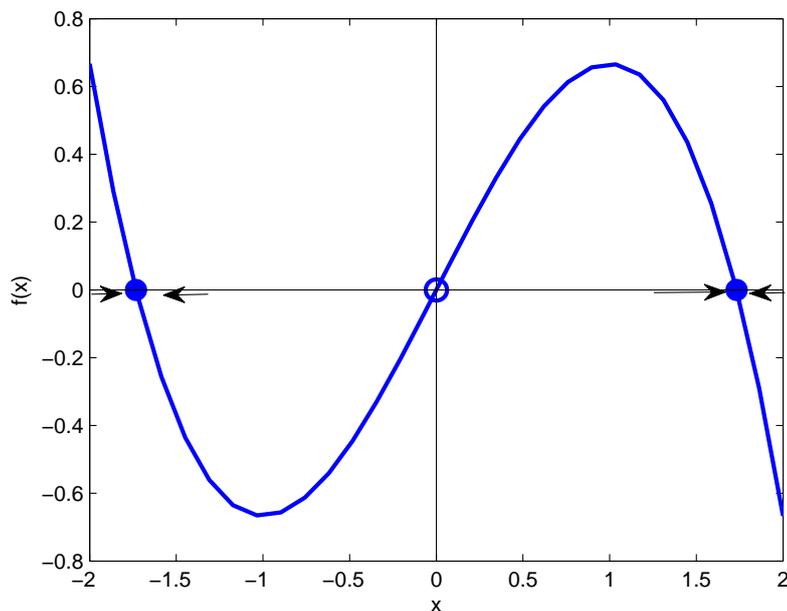


Figura 3 – O gráfico da função  $f(x) = c(x - \frac{1}{3}x^3)$  com soluções estacionárias  $x = 0$ ,  $x = +\sqrt{3}$  e  $x = -\sqrt{3}$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 89.

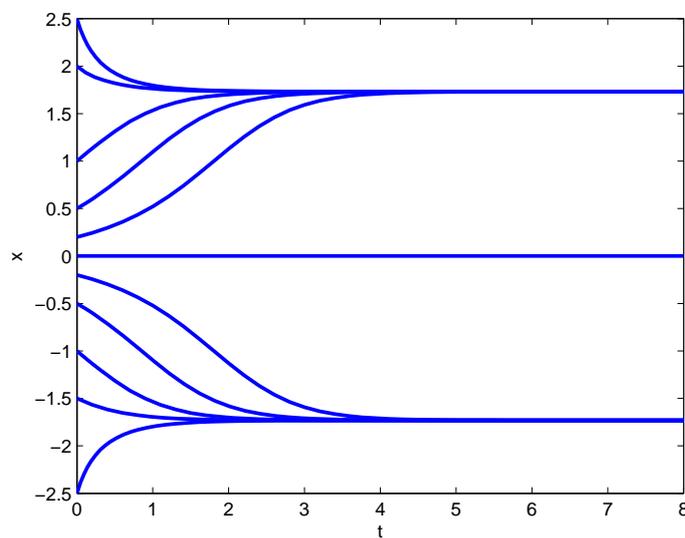


Figura 4 – Algumas soluções numéricas da equação (3.2) com vários valores iniciais. Fonte: SEGEL, 2013, p. 89.

Note que para  $x_0 > 0$  as soluções tendem para a solução estacionária  $x = +\sqrt{3} \approx 1,73$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Considere a equação

$$\frac{dx}{dt} = c \left( x - \frac{1}{3}x^3 + A \right) \equiv f(x)$$

na qual  $A$  é uma constante. Para  $A = 0$ , por exemplo, existe três soluções estacionárias. Porém, quando variamos o parâmetro  $A$ , o número de soluções estacionárias se altera também. Quando ocorre uma mudança no comportamento qualitativo como existência e estabilidade de soluções, denominamos de bifurcação. Nesse exemplo, o parâmetro  $A$  é o que chamamos de parâmetro de bifurcação e o valor de  $A$  para qual ocorre a bifurcação é chamado de ponto de bifurcação.

### Bifurcação tipo sela-nó

Um exemplo simples de bifurcação tipo sela-nó pode ser ilustrado através da variação do parâmetro  $r$  na equação diferencial ordinária

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = r + x^2. \quad (3.3)$$

Na equação (3.3), as soluções estacionárias são  $x_{ss} = \pm\sqrt{-r}$ . Quando  $r = 0$ , as duas soluções estacionárias coexistem e desaparecem quando  $r > 0$ .

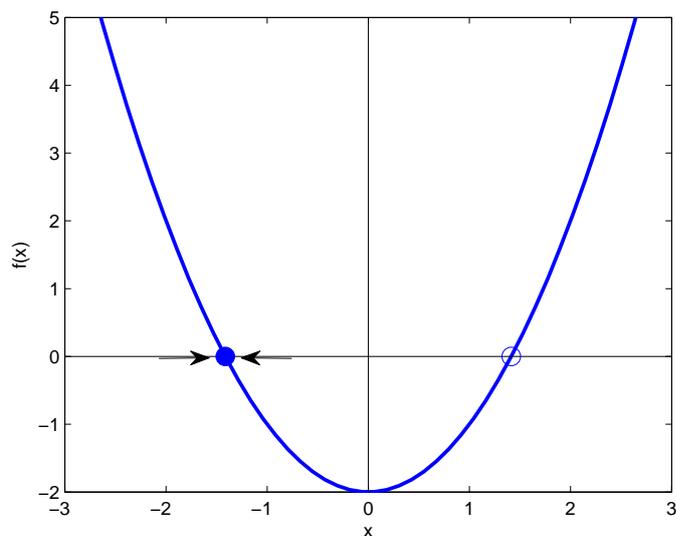


Figura 5 – A posição e a estabilidade das soluções estacionárias quando  $r < 0$  da função  $f(x) = r + x^2$ , Fonte: SEGEL, 2013, p. 95.

O ponto preto significa que a solução é estável e o ponto branco significa que a solução é instável. Ainda, As setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução instável.

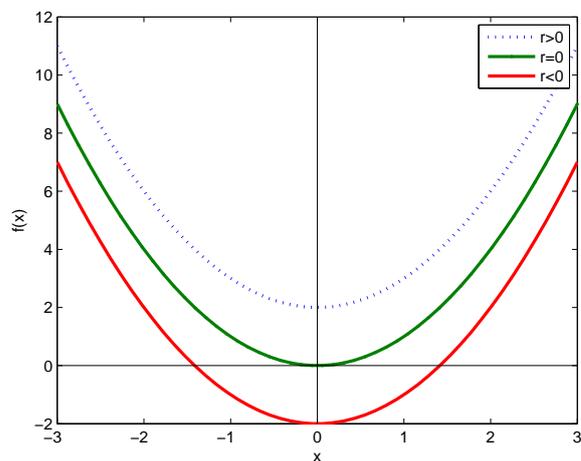


Figura 6 – O gráfico de  $f(x)$  da equação 3.3 para valores diferentes de  $r$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 95.

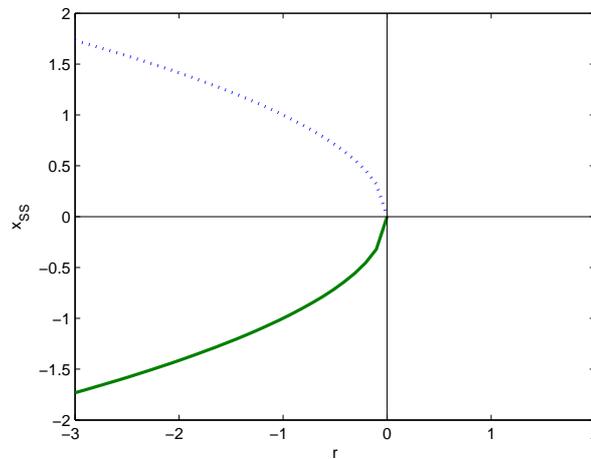


Figura 7 – Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 95.

A curva pontilhada está representando a solução instável e a curva preenchida está representando a solução estável.

### Bifurcação transcritical

Na bifurcação transcritical, as soluções com estabilidade distinta mudam de comportamento no ponto de bifurcação trocando de estabilidade. Considere a equação  $\frac{dx}{dt} = rx - x^2$ .

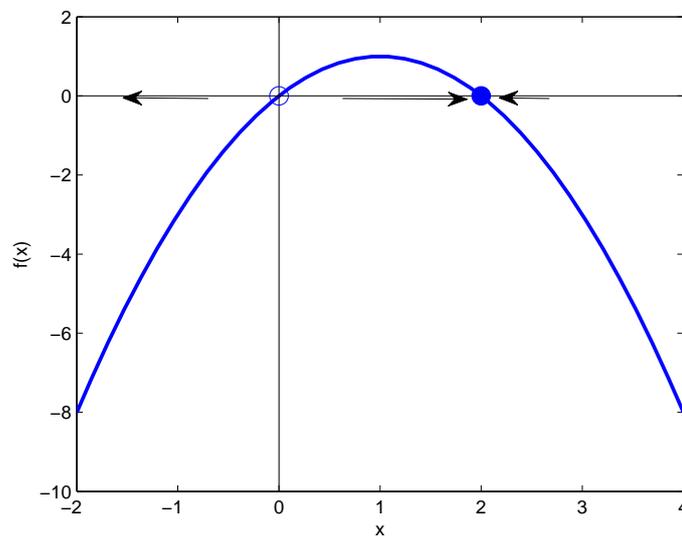


Figura 8 – Soluções estacionárias e suas estabilidades. Fonte: SEGEL, 2013, p. 96.

As setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução instável. Na Figura 8 podemos perceber que há duas soluções estacionárias, uma instável representada por um ponto branco e a outra estável representada por um ponto preto. O gráfico da Figura 8 é para  $r > 0$ .

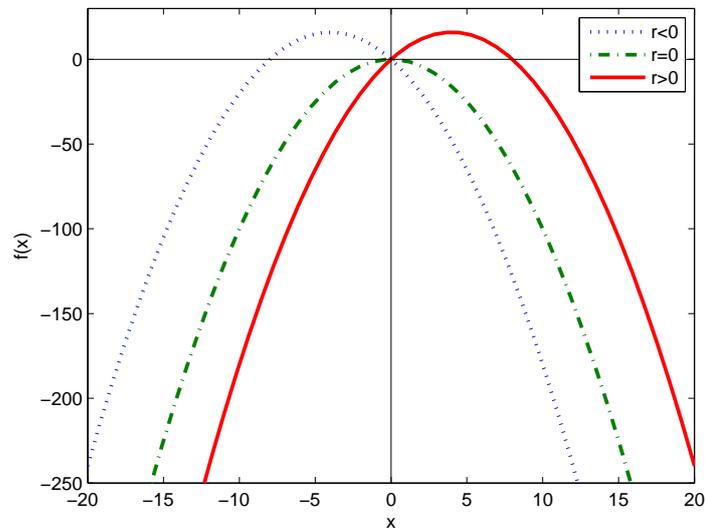


Figura 9 – Comparação para  $r < 0$ ,  $r = 0$  e  $r > 0$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 96.

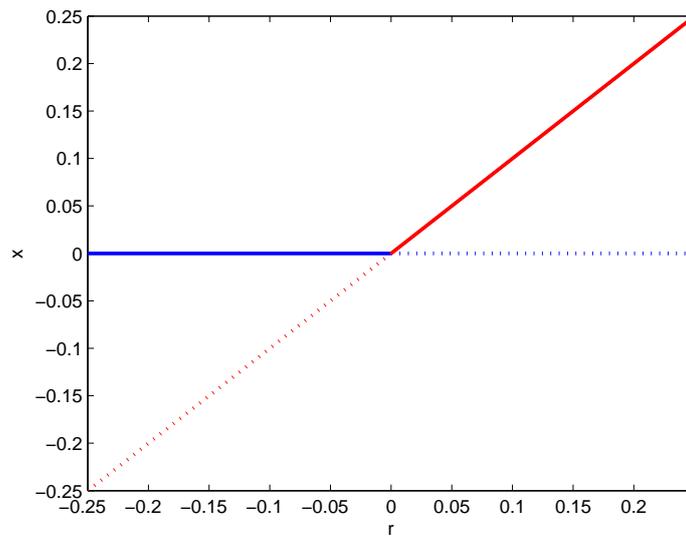


Figura 10 – Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 96.

Para  $r > 0$  e  $r < 0$  existem duas soluções estacionárias, mas no ponto de bifurcação  $r = 0$  a solução estacionária estável (linha reta) coexiste com a solução estacionária instável (linha pontilhada) trocando de instabilidade no ponto de bifurcação.

### Bifurcação em forquilha

A bifurcação em forquilha pode ser ilustrada pela equação

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4) temos três soluções estacionárias. As três soluções coexistem até o ponto de bifurcação  $r = 0$  e após esse ponto surgem mais duas soluções, totalizando três soluções estacionárias diferentes.

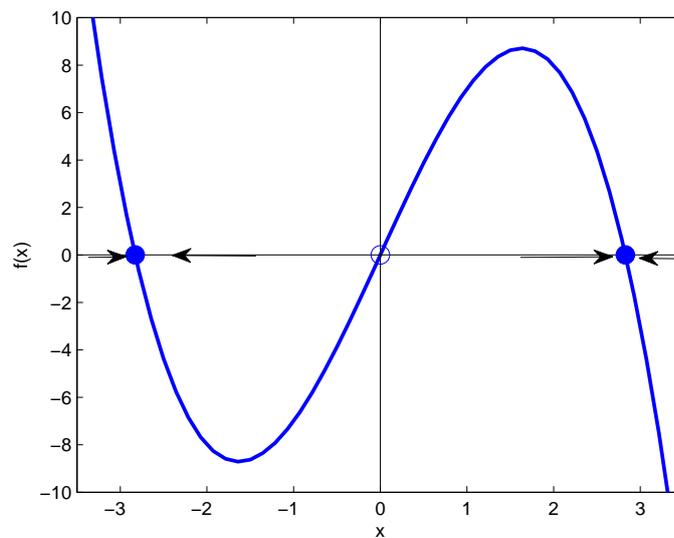


Figura 11 – O gráfico  $f(x)$  da equação (3.4). Fonte: SEGEL, 2013, p. 97.

As setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução instável. Na Figura 11 temos três soluções estacionárias, duas estáveis e uma instável.

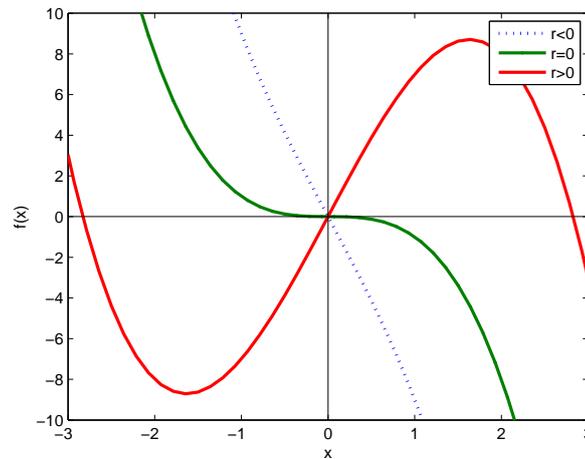


Figura 12 – A mudança do número de soluções estacionárias com a variação do parâmetro  $r$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 97.

Na Figura 12, para  $r > 0$  existe três soluções estacionárias mas para  $r < 0$ , por exemplo, só existe uma solução estacionária  $x = 0$ .

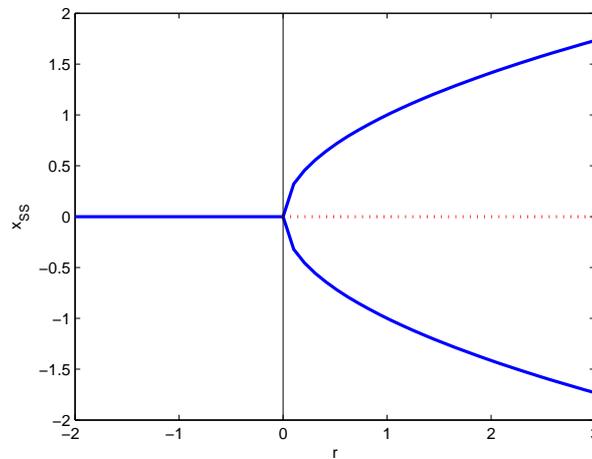


Figura 13 – Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 97.

Na Figura 13, para  $r < 0$  existe apenas uma solução estacionária, a qual é estável. No ponto de bifurcação, há três soluções estacionárias coexistindo. Para  $r > 0$ ,  $x = 0$  que estava estável torna-se instável e existe duas soluções estacionárias estáveis.

## 4 Desenvolvimento de um modelo: Estudo de caso da propagação de uma infecção

### 4.1 Deduzindo o modelo para a propagação de uma infecção

O modelo que será estudado é um caso particular do modelo SIS e possibilita a modelagem de doenças como meningite meningocócica, a peste causadas por bactérias, doenças sexualmente transmissíveis e a malária causada por protozoários.

Assuma que a população estudada pode ter livre acesso, ou seja, qualquer indivíduo pode ter contato com qualquer outro indivíduo. Além disso, a população não aumentará nem diminuirá, mantendo o sistema fechado. Iremos dividir a população em dois grupos: o primeiro será composto por pessoas saudáveis mas suscetível a contrair a doença, e o segundo composto por pessoas infectadas com capacidade de transmitir a doença por contato. Ainda, assuma que as pessoas infectadas podem ser curadas a uma taxa constante, mas se tornando novamente suscetíveis à doença, sem possuir um período de imunidade.

Seja  $S(t)$  o número de pessoas suscetíveis e  $I(t)$  o número de pessoas infectadas na população. As equações que modelam a interação entre esses dois grupos são

$$\frac{dS}{dt} = \mu I - \beta SI, \quad (4.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I. \quad (4.2)$$

Vamos verificar que a população total é conservada. Seja  $N(t) = S(t) + I(t)$ , a população total. Então temos

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = \mu I - \beta SI + \beta SI - \mu I = 0. \quad (4.3)$$

Como  $\frac{dN}{dt} = 0$ ,  $N$  é uma constante e, conseqüentemente, a população total é conservada.

Como a população é conservada nesse modelo, podemos substituir  $I(t)$  por  $N - S(t)$  na equação (4.1). Assim, podemos reescrever (4.1) como

$$\frac{dS}{dt} = \mu(N - S) - \beta S(N - S). \quad (4.4)$$

Agora vamos adimensionalizar a equação e reduzir os parâmetros identificando o parâmetro importante que afeta o comportamento qualitativo das soluções. Suponha que o tempo será medido em dias. Note que na equação (4.1) a unidade de medida do termo da esquerda é dada por [número de pessoas]/[tempo]. Isso significa que a unidade de medida de  $\mu$  deve ser [1]/[tempo] e que a unidade de medida de  $\beta$  deve ser [1]/[número de pessoas  $\times$  tempo]. Então,  $\frac{1}{\mu}$  possui a unidade de tempo, e mede o tempo que o indivíduo infectado necessita para se curar da infecção. Podemos definir as variáveis adimensionais como sendo

$$y^* = \frac{S}{N}, \quad x^* = \frac{I}{N}, \quad t^* = \frac{t}{1/\mu} = \mu t.$$

Substituindo  $S = y^*N$ ,  $I = x^*N$ ,  $t = t^*/\mu$  nas equações (4.1) e (4.2), temos

$$\frac{d(y^*N)}{d(t^*/\mu)} = \mu x^*N - \beta(y^*N)(x^*N), \quad (4.5)$$

$$\frac{d(x^*N)}{d(t^*/\mu)} = \beta(y^*N)(x^*N) - \mu x^*N. \quad (4.6)$$

Cancelando as constantes  $N$  e  $\mu$  segue que

$$\frac{dy^*}{dt^*} = x^* - \left(\frac{\beta N}{\mu}\right) x^* y^*, \quad (4.7)$$

$$\frac{dx^*}{dt^*} = \left(\frac{\beta N}{\mu}\right) x^* y^* - x^*. \quad (4.8)$$

Reescrevendo os parâmetros restantes como sendo  $R_0 \equiv \beta N/\mu$  e renomeando as variáveis obtemos as equações

$$\frac{dy}{dt} = x - R_0 xy, \quad (4.9)$$

$$\frac{dx}{dt} = R_0 xy - x. \quad (4.10)$$

## 4.2 Análise do comportamento da equação (4.10)

### 4.2.1 Soluções estacionárias

Considere a equação que representa a fração de pessoas infectadas

$$\frac{dx}{dt} = R_0(1-x)x - x = x(R_0y - 1) = x[(R_0 - 1) - R_0x]. \quad (4.11)$$

Nessa equação, as soluções estacionárias são  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1 - \frac{1}{R_0}$ .

### 4.2.2 Comportamento qualitativo

Como queremos analisar o aumento da população infectada, vamos analisar a equação dos indivíduos infectados

$$\frac{dx}{dt} = R_0x \left[ \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) - x \right] \equiv f(x). \quad (4.12)$$

Pela Figura 14 podemos observar que quando  $R_0 > 1$ , a doença progride até chegar no quadro endêmico que é quando uma certa quantidade da população total permanece infectada. Já quando  $R_0 < 1$ , temos a única solução estacionária estável em  $x_0 = 0$ , mostrando a erradicação da doença.

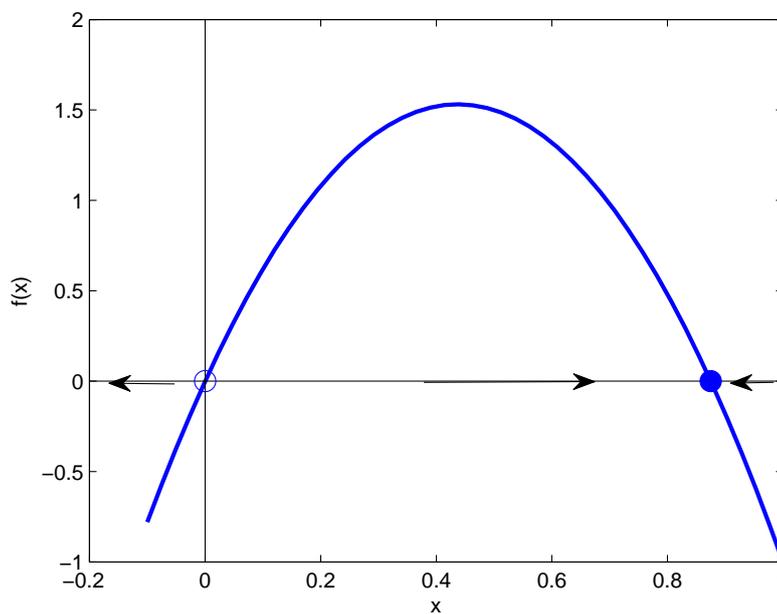


Figura 14 – O gráfico da função  $f(x)$  da equação (4.12) com  $R_0 = 8$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 109.

As setas apontando para um ponto indicam que este ponto representa uma solução estável. As setas divergindo de um ponto indicam que o mesmo representa uma solução instável. Apesar da Figura 14, considere apenas  $f(x) \geq 0$ .

### 4.2.3 Simulação

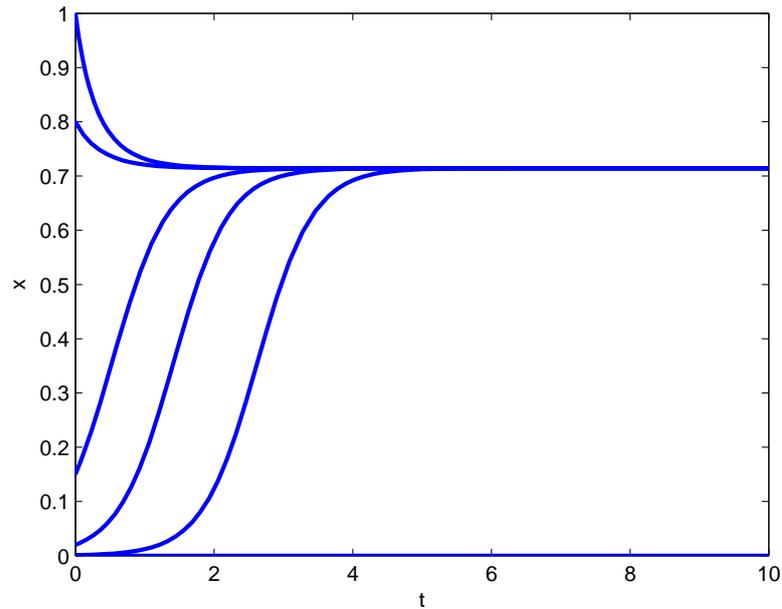


Figura 15 – O gráfico com  $R_0 = 3,5$ . Fonte: SEGEL, 2013, p. 109.

Como mostra o gráfico, para todos os valores iniciais com  $x > 0$  a solução converge para a solução estacionária endêmica  $1 - \frac{1}{R_0}$ .

### 4.2.4 Análise de estabilidade

$$f(x) = xR_0 \left[ \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) - x \right] = R_0 \left[ x \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) - x^2 \right].$$

Consequentemente

$$f'(x) = R_0 \left[ \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) - 2x \right].$$

Assim, para a solução estacionária  $x_0 = 0$  temos

$$f'(0) = R_0 \left[ \left( 1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] = R_0 - 1,$$

o que implica que a solução estacionária associada a ausência de doença é instável quando  $R_0 > 1$ .

Analogamente para a solução estacionária  $x_1 = 1 - 1/R_0$  temos

$$f'(x_1) = R_0 \left[ \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - 2 \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right] = -R_0 \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) = 1 - R_0.$$

Portanto, a solução estacionária do estado de doença endêmica é estável somente quando  $R_0 > 1$ .

#### 4.2.5 Diagrama de bifurcação

Temos duas soluções estacionárias, a  $x_0 = 0$  que não depende de  $R_0$ , e outra solução estacionária  $x_1 = 1 - \frac{1}{R_0}$  que depende de  $R_0$ . Na Figura 16 abaixo, podemos perceber que há uma mudança no comportamento qualitativo dessas duas soluções no ponto de bifurcação  $R_0 = 1$ . A solução  $x_0$  que é estável para  $R_0 < 1$  torna instável para  $R_0 > 1$  enquanto a solução  $x_1$  torna-se estável para  $R_0 > 1$ . Conforme variamos o valor do parâmetro  $R_0$ , o número de fração das pessoas infectadas também se altera. Por exemplo, para  $R_0 = 2$  temos que  $x = 0,5$ , ou seja, 50% da população total está infectada. Também note que quando  $R_0 \rightarrow \infty$ ,  $x_1$  converge para 1, implicando na infecção de toda população.

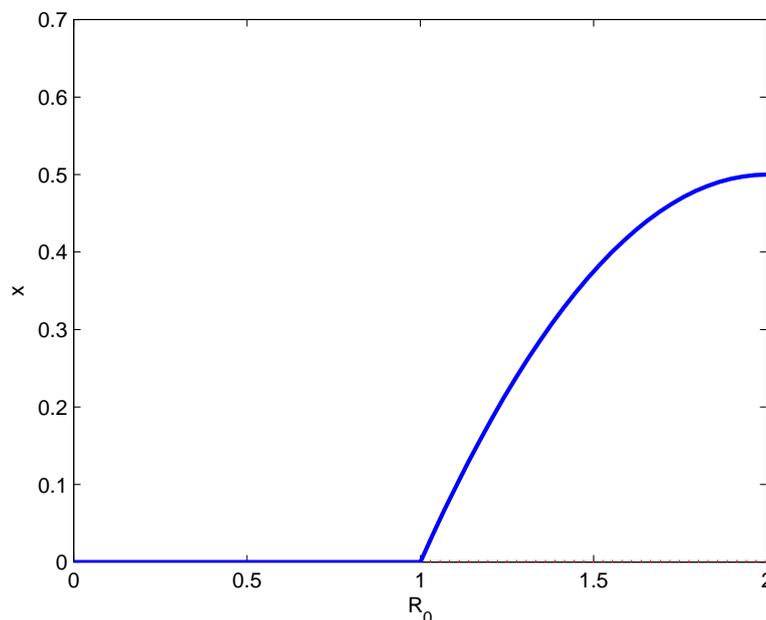


Figura 16 – Diagrama de bifurcação. Fonte: SEGEL, 2013, p. 111.

### 4.3 Interpretação dos resultados

Verificamos que o resultado da infecção depende de um único parâmetro  $R_0 = \beta N/\mu$ , e que existe uma transição no comportamento qualitativo em  $R_0 = 1$ . Abaixo desse valor, a doença não pode se reproduzir suficientemente rápido para ser sustentada e, conseqüentemente, desaparece após algum tempo. Acima deste valor, este número reprodutivo implica que cada infectado infecta mais de um indivíduo suscetível, em média, e a doença torna-se endêmica.

## Conclusão

Neste trabalho estudamos as definições, teoremas e exemplos sobre existência e unicidade de soluções, adimensionalização da equação, princípio de estabilidade linear, estabilidade segundo Lyapunov, análise qualitativa de modelos com bifurcação de equações diferenciais ordinárias para compreender a construção de cada etapa do modelo matemático de propagação de doenças. Entendemos a importância do reconhecimento do parâmetro principal que “governa” o sistema e como este modifica o desenvolvimento da propagação de doenças, conforme atribuímos a ele valores diferentes. Há uma certa dificuldade em entender a base teórica que está por trás do modelo, devido ao fato de os resultados apresentados não serem visto no curso de Licenciatura em Matemática, mas é um tema instigante e que precisa ser pesquisado para atender as necessidades da sociedade.



# Referencial Bibliográfico

APOSTOL, T. , **Cálculo, Volume 2** , Reverte, 1994.

Q. Kong, **A Short course in ordinary differential equations**, Springer International, 2014.

R. Grimshaw, **Nonlinear Ordinary Differential Equations**, Blackwell Scientific Publications, 1990.

SEGEL, Lee A. and EDELSTEIN-KESHET, Leah, **A primer on Mathematical Models in Biology**, SIAM, 2013.

## Bibliografia Complementar

1. BRAUER, Fred; NOHEL, John A. **The qualitative theory of ordinary differential equations: an introduction**. Courier Corporation, 2012.
2. I.I. Vrabie, **Differential Equations: An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications**, World Scientific Pub Co Inc, 2004.