

Mauricio Policarpo

# **Grafos e Multigrafos: o Teorema da Matriz-Árvore**

Brasil

2016

Mauricio Policarpo

## **Grafos e Multigrafos: o Teorema da Matriz-Árvore**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau Licenciado em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

Brasil

2016

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática — Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n.º. 18/2016/CCM.

---

Prof. Dra. Silvia Martini de Holanda Janesch  
Professora da disciplina  
(Universidade Federal de Santa Catarina)

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Gustavo Adolfo Torres Fernandes  
da Costa  
Orientador  
(Universidade Federal de Santa Catarina)

---

Prof. Dr. Luciano Bedin  
(Universidade Federal de Santa Catarina)

---

Prof. Dr. Wagner Barbosa Muniz  
(Universidade Federal de Santa Catarina)

*Aos meus pais, Mauro e Marineiva,  
por cada sorriso nas chegadas e por cada lágrima nas partidas.  
À minha irmã, Fernanda,  
por todo carinho e amor.*

# Agradecimentos

A Deus.

Ao Lucas, por cada palavra de apoio, por cada oportunidade de crescimento e pelo incrível ser humano que me acompanha.

À Mônica, por todas as tardes de estudo, a quem eu desejo um futuro brilhante e que me mostrou uma amizade de coração.

À família Cardoso, que me acolheu com muito amor.

Ao Professor Pinho, pelo exemplo de ser humano, com quem eu tive a oportunidade de trabalhar e aprender durante a graduação.

Ao Professor Gustavo, pelo exemplo de professor, por todas as tardes de estudo e pela dedicação e orientação despendidas durante a elaboração deste trabalho.

*“I hope to convince you that mathematical trees are no less  
lovely than their biological counterparts...”*  
*(Joe Malkevitch)*

# Resumo

O trabalho apresenta definições, resultados básicos e um breve histórico da Teoria de Grafos. Seu objetivo principal é demonstrar o Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff para grafos e multigrafos não orientados, utilizando alguns resultados da Álgebra Linear, e demonstrar o Teorema da Matriz-Árvore de Tutte para grafos e multigrafos orientados, utilizando propriedades de determinantes e do grupo de permutações juntamente com o Princípio de Inclusão-Exclusão da Análise Combinatória. Foi realizada uma pesquisa bibliográfica, onde se destacaram os trabalhos de Abreu et al e Muldoon.

**Palavras-chaves:** Grafos. Multigrafos. Teorema da Matriz-Árvore. Teorema de Tutte.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Grafo não orientado . . . . .	11
Figura 2 – Multigrafo não orientado . . . . .	12
Figura 3 – Grafo orientado . . . . .	12
Figura 4 – Multigrafo orientado . . . . .	13
Figura 5 – Grafo completo $K_3$ . . . . .	13
Figura 6 – Árvore geradora . . . . .	15
Figura 7 – Arborescência geradora . . . . .	15
Figura 8 – Grafo orientado de $G_{\sigma_2}$ . . . . .	19
Figura 9 – Grafo $G^*$ para $G'$ conexo . . . . .	24
Figura 10 – Grafo $G^*$ para $G'$ desconexo . . . . .	24
Figura 11 – Orientação atribuída às arestas do grafo da Figura 1 . . . . .	28
Figura 12 – Grafo não orientado 2 . . . . .	36
Figura 13 – Árvores geradoras do grafo da Figura 12 . . . . .	37
Figura 14 – Multigrafo não orientado 2 . . . . .	38
Figura 15 – Árvores geradoras do multigrafo da Figura 14 . . . . .	39
Figura 16 – Multigrafo orientado e desconexo . . . . .	40
Figura 17 – Spregs . . . . .	41
Figura 18 – Não spregs . . . . .	42
Figura 19 – Multigrafo orientado 2 . . . . .	44
Figura 20 – Spregs geradores . . . . .	45
Figura 21 – Representação do Caso 2 . . . . .	46
Figura 22 – Grafo orientado 2 . . . . .	50
Figura 23 – Árborescências geradoras do grafo da Figura 22 . . . . .	51
Figura 24 – Multigrafo orientado 3 . . . . .	52
Figura 25 – Árborescências geradoras do multigrafo da Figura 24 . . . . .	53
Figura 26 – Sete pontes de Königsberg . . . . .	54
Figura 27 – Leonhard Paul Euler . . . . .	54
Figura 28 – Multigrafo do problema das sete pontes de Königsberg . . . . .	55
Figura 29 – Gustav Robert Kirchhoff . . . . .	55
Figura 30 – Arthur Cayley . . . . .	56
Figura 31 – William Thomas Tutte . . . . .	56
Figura 32 – Otakar Borůvka . . . . .	57

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Grupo simétrico $S_3$ . . . . .	17
Tabela 2 – Grupo simétrico $S_2$ . . . . .	19
Tabela 3 – Graus de entrada e saída . . . . .	40

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1	Grafos e Multigrafos . . . . .	11
1.2	Árvores e Arborescências Geradoras . . . . .	13
1.3	Permutações . . . . .	16
1.4	Fórmula de Cauchy-Binet . . . . .	20
1.5	Princípio de Inclusão-Exclusão . . . . .	21
<b>2</b>	<b>O TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE DE KIRCHHOFF</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>O TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE DE TUTTE</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>BREVE HISTÓRICO DA TEORIA DE GRAFOS</b> . . . . .	<b>54</b>
	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>58</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>59</b>

# Introdução

Esta monografia aborda um ramo da Matemática chamado Teoria de Grafos. Inicialmente serão apresentadas definições e resultados básicos dessa teoria, juntamente com resultados da Álgebra Linear, da Análise Combinatória e da Álgebra. Dessa forma, será possível construir a caixa de ferramentas necessária para o entendimento do Teorema da Matriz-Árvore (TMA), principal objeto de estudo deste trabalho. Serão abordadas duas versões diferentes desse teorema e suas respectivas demonstrações.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar a demonstração do TMA de Kirchhoff para grafos e multigrafos não orientados, utilizando alguns resultados da Álgebra Linear, e apresentar a demonstração do TMA de Tutte para grafos e multigrafos orientados, utilizando propriedades de determinantes e do grupo de permutações juntamente com o Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE) da Análise Combinatória. Também são objetivos deste trabalho: estudar conceitos básicos da Teoria de Grafos, utilizar conhecimentos adquiridos durante a graduação visando ao entendimento de demonstrações até então não vistas e fazer um breve relato da história da Teoria de Grafos, com ênfase no Teorema da Matriz-Árvore.

Atualmente, a Teoria de Grafos não consta no conteúdo programático do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Porém, as disciplinas Fundamentos de Matemática II, Álgebra Linear I e II e Álgebra II, que fazem parte do conteúdo programático do curso, oferecem a base necessária para o entendimento das definições e resultados básicos da Teoria de Grafos.

A metodologia adotada foi a pesquisa bibliográfica. Por meio de leituras de livros e artigos sobre o tema, se destacaram trabalhos de Abreu et al, Muldoon, Shokranian, Boldrini et al, Knill, Morgado et al, Fritscher, Nikolopoulos e Papadopoulos, Lodder e Rossetto, que embasam esta monografia.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1 encontram-se definições e resultados básicos da Teoria de Grafos, resultados sobre permutações, a fórmula de Cauchy-Binet e o Princípio de Inclusão-Exclusão. O Capítulo 2 apresenta a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff para grafos e multigrafos não orientados. No Capítulo 3 encontra-se a demonstração do Teorema da Matriz-Árvore de Tutte para grafos e multigrafos orientados. Por fim, o Capítulo 4 relata uma breve história da Teoria de Grafos.

# 1 Definições e Resultados Básicos

Este capítulo apresenta algumas definições e resultados da Teoria de Grafos, da Análise Combinatória, da Álgebra e da Álgebra Linear, fundamentais para o entendimento das demonstrações que serão apresentadas nos capítulos sucessivos.

## 1.1 Grafos e Multigrafos

Nesta seção, apresentaremos as definições geométricas de grafos e multigrafos finitos e suas representações em termos de diagramas, com o auxílio de exemplos. As referências utilizadas foram [1, p.13-15], [2, p.1.3-1.5] e [3, p.2.6-2.7].

**Definição 1.1.** Um **grafo não orientado** é um par  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto não vazio e finito de pontos do  $\mathbb{R}^3$ , chamados de **vértices**. Dois vértices estão ligados no máximo por uma linha (ou arco de curva), chamada de **aresta**, à qual não se fixou uma orientação, sendo  $E$  o conjunto das arestas.

**Exemplo 1.1.** Grafo não orientado com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ , como mostra a Figura 1.

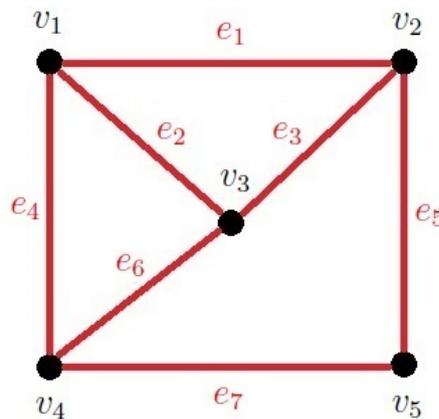


Figura 1 – Grafo não orientado

**Definição 1.2.** Um **multigrafo não orientado** é um par  $(V, E)$ , com os conjuntos  $V$  e  $E$  finitos e não vazios, onde pelo menos dois vértices estão ligados por mais de uma aresta.

**Exemplo 1.2.** Multigrafo não orientado com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ , como mostra a Figura 2.

**Definição 1.3.** Um **grafo orientado** é um grafo onde cada aresta tem uma orientação ou sentido fixado.

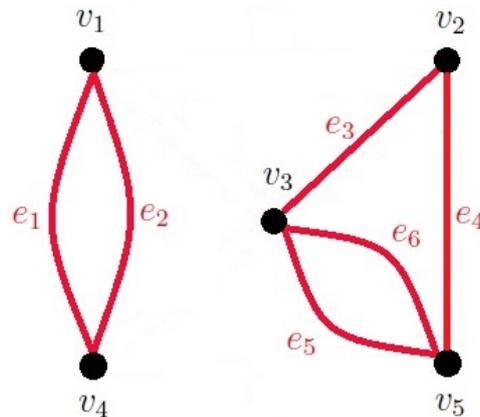


Figura 2 – Multigrafo não orientado

**Exemplo 1.3.** A Figura 3 mostra um grafo orientado com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ .

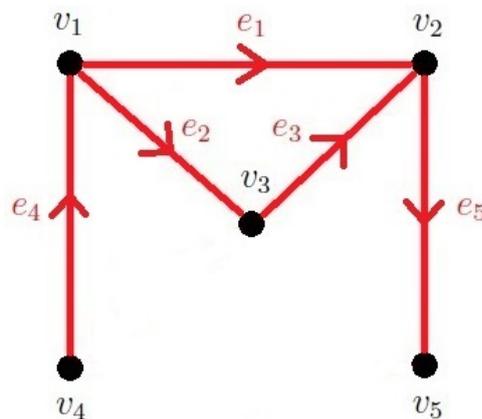


Figura 3 – Grafo orientado

**Definição 1.4.** Um **multigrafo orientado** é um multigrafo onde cada aresta está orientada.

**Exemplo 1.4.** A Figura 4 mostra um multigrafo orientado com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ .

Utilizaremos a notação  $G(V, E)$ , ou apenas  $G$ , para nos referirmos a um grafo ou multigrafo, onde  $V$  é o conjunto de seus vértices e  $E$  é o conjunto de suas arestas. O par  $(v_i, v_j)$  indicará a aresta que liga os vértices  $v_i$  e  $v_j$  de um grafo orientado ou não. Neste último caso, os pares  $(v_i, v_j)$  e  $(v_j, v_i)$  representarão a mesma aresta. No caso orientado, entende-se que o par é ordenado. Outra notação, já empregada nos exemplos, denota as arestas por  $e_i, i = 1, 2, \dots, |E|$ , onde  $|E|$  é o número de arestas de  $G$ .

**Definição 1.5.** Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo qualquer, orientado ou não. Dizemos que  $G'(V', E')$  é um **subgrafo** de  $G$  se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .

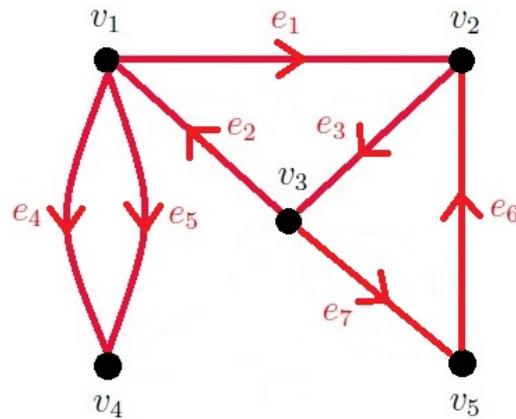
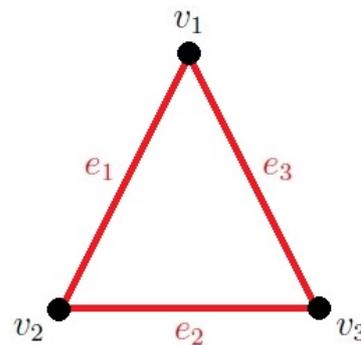


Figura 4 – Multigrafo orientado

Alguns grafos recebem nomes especiais, como é o caso dos grafos completos:

**Definição 1.6.** Dizemos que  $K_n$ , ou  $K_n(V, E)$ , é um grafo **completo** se  $K_n$  é um grafo não orientado com  $n$  vértices e se existe uma aresta ligando cada par de vértices.

**Exemplo 1.5.** A Figura 5 mostra o grafo completo  $K_3$ .

Figura 5 – Grafo completo  $K_3$ 

## 1.2 Árvores e Arborescências Geradoras

Nesta seção, continuaremos a apresentar algumas definições básicas da Teoria de Grafos, com o objetivo de definir árvores e arborescências geradoras. Foram utilizadas as referências [1, p.15-17], [4, p.5.1-5.5] e [5, p.6.1-6.2].

**Definição 1.7.** Uma sequência finita  $v_1, v_2, \dots, v_k$  de vértices de um grafo ou multigrafo  $G(V, E)$  qualquer, orientado ou não, é chamada **cadeia** quando  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ , para  $1 \leq i \leq k - 1$ . Na cadeia, um mesmo vértice pode ocorrer mais de uma vez.

Na Definição 1.7, no caso de multigrafos, é possível que mais de uma aresta ligue os vértices  $v_i$  e  $v_{i+1}$ . A notação  $(v_i, v_{i+1})$  indica uma delas, sem especificar. No caso de  $G$  ser orientado, o par  $(v_i, v_{i+1})$  é ordenado, representando uma aresta orientada de  $v_i$  para  $v_{i+1}$ .

**Definição 1.8.** Chamamos de **caminho** as cadeias que possuem todos os vértices distintos.

Portanto, se  $G$  é orientado, um caminho possui uma orientação natural definida pela orientação das arestas. Nesse caso, dizemos que o caminho é orientado.

**Definição 1.9.** Chamamos de **trilha** as cadeias que possuem todas as arestas distintas.

**Definição 1.10.** Um **ciclo** é um caminho fechado que também é uma trilha, ou seja, apenas o primeiro e o último vértice do caminho são iguais e as arestas são distintas.

Essa definição nos permite afirmar que todo multigrafo não orientado possui pelo menos um ciclo. Pois, conforme a Definição 1.2, os multigrafos não orientados possuem pelo menos dois vértices ligados por mais de uma aresta, logo esses dois vértices formam um ciclo.

**Definição 1.11.** Dizemos que um grafo ou multigrafo, orientado ou não, é **conexo** quando existe um caminho (sem considerar a orientação em casos de grafos e multigrafos orientados) ligando cada par de vértices do grafo. Quando esse caminho não existe, dizemos que o grafo é **desconexo**, ou seja, é formado por mais de uma componente conexa.

**Exemplo 1.6.** No grafo da Figura 1, a sequência de vértices  $v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_5$  é uma cadeia. Um exemplo de caminho e trilha é a sequência de vértices  $v_4, v_1, v_3, v_2$  do grafo da Figura 3. Já no grafo da Figura 4, a sequência de vértices  $v_5, v_2, v_3, v_5$  é um ciclo. Os grafos das Figuras 1, 3 e 4 são conexos e o grafo da Figura 2 é desconexo e possui duas componentes conexas.

**Definição 1.12.** Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos.

**Definição 1.13.** Seja  $G$  um grafo ou multigrafo não orientado e seja  $G' \subseteq G$ . Dizemos que o subgrafo  $G'$  é uma **árvore geradora** de  $G$  se  $G'$  contém todos os vértices de  $G$  e é uma árvore.

**Exemplo 1.7.** A Figura 6 mostra uma árvore geradora do grafo da Figura 1.

Para grafos e multigrafos orientados, as árvores geradoras são chamadas de arborescências geradoras. Porém, utilizaremos outras definições para entendermos esse conceito, como veremos a seguir:

**Definição 1.14.** Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado com  $a, b \in V$ . Dizemos que o vértice  $b$  é **acessível** a partir do vértice  $a$  se existe um caminho de  $a$  para  $b$ , obedecendo a orientação de  $G$ .

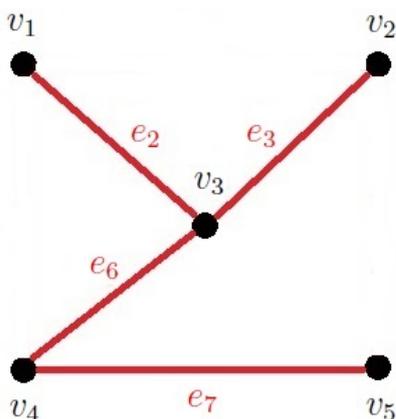


Figura 6 – Árvore geradora

**Definição 1.15.** *Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado. O vértice  $v \in V$  é uma raiz se qualquer outro vértice de  $G$  é acessível a partir de  $v$ .*

**Exemplo 1.8.** No grafo da Figura 3, temos que o vértice  $v_5$  é acessível a partir de  $v_4$ , pois existe o caminho  $(v_4, v_1, v_2, v_5)$  que liga o vértice  $v_4$  ao  $v_5$ . Além disso,  $v_4$  é uma raiz, pois o caminho  $(v_4, v_1, v_3, v_2, v_5)$  mostra que todos os vértices do grafo são acessíveis a partir de  $v_4$ .

**Definição 1.16.** *Seja  $G$  um grafo orientado. Dizemos que  $G$  é uma arborescência se contém uma única raiz e é uma árvore, quando desconsideramos sua orientação.*

**Definição 1.17.** *Seja  $G$  um grafo ou multigrafo orientado e seja  $G'$  um grafo orientado, tal que  $G' \subseteq G$ . Dizemos que  $G'$  é uma arborescência geradora de  $G$  se  $G'$  contém todos os vértices de  $G$  e é uma arborescência.*

**Exemplo 1.9.** A Figura 7 mostra uma arborescência geradora do multigrafo da Figura 4, que possui como raiz o vértice  $v_1$ .

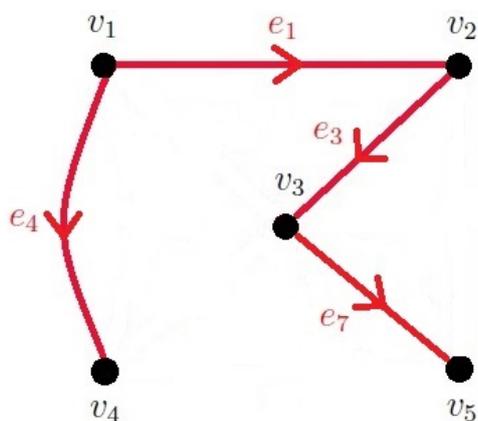


Figura 7 – Arborescência geradora

Observemos que quando falamos em árvore geradora estamos nos referindo a grafos ou multigrafos não orientados e quando falamos em arborescência geradora estamos nos referindo a grafos ou multigrafos orientados.

É possível contar o número de árvores ou arborescências geradoras de um grafo qualquer? A resposta é sim e a maneira de fazê-lo é dada pelo **Teorema da Matriz-Árvore (TMA)**, que é o principal objeto de estudo deste trabalho. Duas versões desse teorema para grafos e multigrafos, orientados ou não, e suas respectivas demonstrações serão apresentadas nos próximos capítulos.

### 1.3 Permutações

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre permutações, assunto de Álgebra e Análise Combinatória. Veremos também que esses resultados podem ser associados a grafos orientados e a resultados da Álgebra Linear, sendo uma importante ferramenta para a demonstração do TMA de Tutte, Teorema 3.1, Capítulo 3. As referências utilizadas foram [7, p.8.1-8.6], [10, p.159-166] e [11, p.72-73].

**Definição 1.18.** Dizemos que  $\sigma$  é uma **permutação** de  $n$  elementos,  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ , se  $\sigma$  é uma bijeção do conjunto  $I_n = \{1, \dots, n\}$  nele mesmo.

**Proposição 1.1.** O número de permutações do conjunto  $I_n$  é  $n!$ .

Seja  $S_n = \{\sigma_j \mid j = 1, 2, \dots, n!\}$  o conjunto das permutações de  $I_n$ . Definamos em  $S_n$  uma operação entre dois elementos quaisquer pela composição de funções, ou seja,

$$(\sigma_i \circ \sigma_j)(k) = \sigma_i(\sigma_j(k)), k \in I_n.$$

Esta operação é associativa. O elemento neutro é a permutação identidade  $Id$ , tal que  $Id(k) = k, \forall k \in I_n$  e  $(\sigma_i \circ Id)(k) = (Id \circ \sigma_i)(k)$ . Ademais, para cada  $\sigma \in S_n$ , existe uma permutação  $\sigma^{-1} \in S_n$ , a permutação inversa de  $\sigma$ , tal que  $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = Id$ . Portanto, temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.** O conjunto  $S_n$  é um grupo com respeito à operação definida acima, chamado de grupo das permutações (ou grupo simétrico).

Utilizaremos a seguinte notação matricial para nos referirmos à permutação  $\sigma_j$ :

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_j(1) & \sigma_j(2) & \cdots & \sigma_j(n) \end{pmatrix},$$

onde os elementos da primeira linha pertencem ao domínio da bijeção  $\sigma_j$  e os elementos da segunda linha pertencem à imagem.

Empregando a notação anterior, temos

$$\sigma_i \circ \sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ \sigma_i(\sigma_j(1)) & \cdots & \sigma_i(\sigma_j(k)) & \cdots & \sigma_i(\sigma_j(n)) \end{pmatrix}.$$

**Definição 1.19.** *Seja  $\sigma_j \in S_n$ . Dizemos que  $fix(\sigma_j)$  é o conjunto dos elementos de  $I_n$  cuja imagem pela  $\sigma_j$  é igual ao próprio elemento, ou seja,  $fix(\sigma_j) = \{i \in I_n \mid \sigma_j(i) = i\}$ . No caso que  $\sigma_j = Id$ , a permutação identidade, obtemos  $fix(\sigma_j) = I_n$ .*

**Exemplo 1.10.** Pela Proposição 1.1, o grupo simétrico  $S_3$  possui  $3!$  elementos, ou seja, 6 permutações. A Tabela 1 apresenta todas as permutações de  $S_3$  com seus respectivos conjuntos  $fix$ .

Nome	Notação de $\sigma$	$fix(\sigma)$
$\sigma_1 = Id$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\{1, 2, 3\}$
$\sigma_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\{1\}$
$\sigma_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\{3\}$
$\sigma_4$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\emptyset$
$\sigma_5$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\emptyset$
$\sigma_6$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\{2\}$

Tabela 1 – Grupo simétrico  $S_3$

**Definição 1.20.** *Dizemos que uma permutação  $\sigma_j \in S_n$  é **cíclica** se, para algum  $l \leq n$  e  $C_l = \{i_1, i_2, \dots, i_l\} \subseteq I_n$ , temos que:*

- $\sigma_j(i_p) = i_{p+1}$ , para  $1 \leq p < l$ ;
- $\sigma_j(i_l) = i_1$ ;
- $k \in fix(\sigma_j)$ , para  $k \in I_n$  e  $k \notin C_l$ .

A notação que utilizaremos para a permutação cíclica será  $\sigma_j = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ . Se a permutação cíclica possuir  $l = n$ , então  $fix(\sigma) = \emptyset$ . Porém, se possuir  $l < n$ , então  $fix(\sigma) \neq \emptyset$ .

**Definição 1.21.** *Seja  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_l) \in S_n$  uma permutação cíclica, com  $l \leq n$ . Dizemos que o **comprimento** de  $\sigma$  é igual a  $l$ .*

**Definição 1.22.** *Sejam  $\sigma_i = (i_1, i_2, \dots, i_{l_1})$  e  $\sigma_j = (j_1, j_2, \dots, j_{l_2})$  permutações cíclicas de  $S_n$ , com  $l_1, l_2 \leq n$ . Dizemos que  $\sigma_i$  e  $\sigma_j$  são **disjuntas** se  $\{i_1, i_2, \dots, i_{l_1}\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{l_2}\} = \emptyset$ .*

**Definição 1.23.** Seja  $\sigma$  uma permutação qualquer de  $S_n$  e sejam  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$ , com  $l \in \mathbb{N} - \{0\}$ , permutações cíclicas disjuntas entre si. Se  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_l$ , dizemos que esse produto é uma **decomposição em permutações cíclicas** de  $\sigma$ .

**Proposição 1.3.** Uma permutação  $\sigma$  possui uma única decomposição em permutações cíclicas disjuntas, com exceção das permutações identidades que não possuem decomposição.

**Exemplo 1.11.** Sejam  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  duas permutações do grupo simétrico  $S_6$ , tais que

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conforme a Definição 1.20, a permutação  $\sigma_1$  corresponde à permutação cíclica  $(2, 6, 3, 5)$  de comprimento igual a 4. Conforme a Proposição 1.3, a permutação  $\sigma_2$  possui uma única decomposição em permutações cíclicas disjuntas, tal que

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (1, 3, 6) \circ (2, 5). \end{aligned}$$

**Definição 1.24.** Dizemos que o **sinal** de uma permutação  $\sigma$  é igual ao valor fornecido pela função  $s : S_n \rightarrow \{1, -1\}$ , definida como:

- $s(\sigma) = 1$ , se  $\sigma$  é o elemento identidade de  $S_n$ ;
- $s(\sigma) = (-1)^{L-k}$ , se a decomposição em permutações cíclicas de  $\sigma$  possui  $k \geq 1$  permutações cíclicas de comprimentos  $l_1, \dots, l_k$  cada, onde  $L = \sum_{i=1}^k l_i$ .

**Exemplo 1.12.** Temos que o sinal de  $\sigma_2$  do Exemplo 1.11 é  $s(\sigma_2) = (-1)^{3+2-2} = (-1)^3 = -1$ .

**Definição 1.25.** Seja  $\sigma$  uma permutação de  $n$  elementos. Dizemos que  $G_\sigma$ , ou  $G_\sigma(V, E)$ , é o **grafo orientado de  $\sigma$**  se  $V = \{1, \dots, n\}$  e  $E = \{(j, \sigma(j)) \mid j \in V \text{ e } \sigma(j) \neq j\}$ .

A Definição 1.25 possibilita a construção de grafos orientados a partir de permutações. O exemplo a seguir apresenta o grafo orientado de  $\sigma_2$  do Exemplo 1.11.

**Exemplo 1.13.** Temos que  $\sigma_2 = (1, 3, 6)(2, 5)$ . Portanto,  $G_{\sigma_2}$  possui  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E = \{(1, 3), (2, 5), (3, 6), (5, 2), (6, 1)\}$ . A Figura 8 é a representação geométrica de  $G_{\sigma_2}$ .

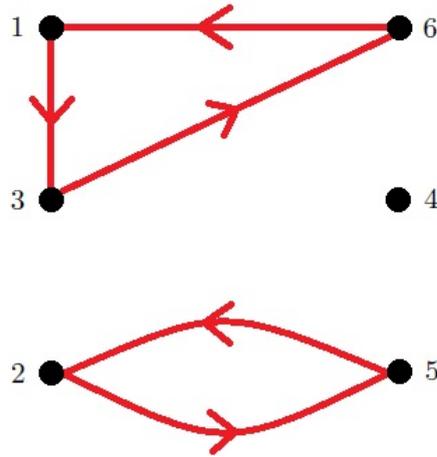


Figura 8 – Grafo orientado de  $G_{\sigma_2}$

**Proposição 1.4.** *Seja  $\sigma$  uma permutação de  $n$  elementos e seja  $G_\sigma(V, E)$  o grafo orientado de  $\sigma$ . A permutação cíclica  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ , com  $1 \leq l \leq n$ , pertence à decomposição em permutações cíclicas de  $\sigma$  se, e somente se, o gráfico orientado de  $(i_1, i_2, \dots, i_l, i_1)$  define um subgrafo de  $G_\sigma$ .*

A seguir, definimos o determinante de uma matriz  $A$  de ordem  $n$ .

**Definição 1.26.** *Seja  $M_n$  o espaço das matrizes de ordem  $n$ . A função que associa a cada matriz  $A = (a_{jk}) \in M_n$  o número real  $\det(A)$ , dado por*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)},$$

*é chamada de **função determinante** e o seu valor na matriz  $A$  é chamado de **determinante de  $A$** . A somatória é considerada sobre todas as permutações  $\sigma$  do grupo de permutações  $S_n$ .*

**Exemplo 1.14.** *Seja  $A = (a_{ij}) \in M_2$ . A Tabela 2 fornece todas as permutações do grupo simétrico  $S_2$  e seus respectivos sinais.*

Nome	$\sigma$	$s(\sigma)$
$\sigma_1 = Id$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	1
$\sigma_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1

Tabela 2 – Grupo simétrico  $S_2$

Aplicando a Definição 1.26, temos

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_2} s(\sigma) \prod_{j=1}^2 a_{j\sigma(j)} \\
 &= s(\sigma_1) \cdot (a_{1\sigma_1(1)} \cdot a_{2\sigma_1(2)}) + s(\sigma_2) \cdot (a_{1\sigma_2(1)} \cdot a_{2\sigma_2(2)}) \\
 &= 1 \cdot (a_{11} \cdot a_{22}) - 1 \cdot (a_{12} \cdot a_{21}) \\
 &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},
 \end{aligned}$$

que é o conhecido resultado para o determinante de uma matriz  $2 \times 2$ .

Abaixo apresentamos um teorema de Álgebra Linear que também será utilizado no Capítulo 2.

**Teorema 1.1.** *Seja  $M_n$  o espaço das matrizes de ordem  $n$  e  $A \in M_n$ . Seja também  $\text{adj}(A)$  a matriz adjunta<sup>1</sup> de  $A$  e  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$ . Então,*

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n.$$

## 1.4 Fórmula de Cauchy-Binet

Esta seção apresenta a fórmula de Cauchy-Binet, resultado da Álgebra Linear que será utilizado na demonstração do TMA de Kirchhoff para grafos e multigrafos não orientados, Teorema 2.1, Capítulo 2. A referência utilizada foi [12, p.1].

**Teorema 1.2** (Fórmula de Cauchy-Binet). *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$  e  $n \times m$ , respectivamente. Então,  $\det(A \cdot B) = 0$ , se  $m > n$ . Se  $m \leq n$ ,*

$$\det(A \cdot B) = \sum_P \det(A_P) \det(B_P),$$

onde a somatória é sobre todos os subconjuntos  $P$  de  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  com  $m$  elementos. Para cada  $P$ ,  $A_P$  é a matriz  $m \times m$  obtida de  $A$  mantendo as colunas de  $A$  cujos índices pertencem a  $P$ ;  $B_P$  é a matriz  $m \times m$  obtida de  $B$  mantendo as linhas de  $B$  cujos índices pertencem a  $P$ .

**Exemplo 1.15.** Utilizaremos a fórmula de Cauchy-Binet para obter  $\det(A \cdot B)$  quando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup> Uma definição de matriz adjunta está disponível na página 72 de [11].

Nesse caso, pelo Teorema 1.2, temos que  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  e os possíveis subconjuntos  $P$  de  $S$  são:  $P_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $P_2 = \{1, 2, 4\}$ ,  $P_3 = \{1, 3, 4\}$  e  $P_4 = \{2, 3, 4\}$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} A_{P_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, & B_{P_1} &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_{P_2} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, & B_{P_2} &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \\ A_{P_3} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & B_{P_3} &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \\ A_{P_4} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & B_{P_4} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det(A_{P_1}) \cdot (B_{P_1}) + \det(A_{P_2}) \cdot (B_{P_2}) + \det(A_{P_3}) \cdot (B_{P_3}) + \det(A_{P_4}) \cdot (B_{P_4}) \\ &= (-23) \cdot 51 + (-37) \cdot 19 + 33 \cdot (-73) + 39 \cdot (-40) \\ &= -1173 - 703 - 2409 - 1560 \\ &= -5845. \end{aligned}$$

No Teorema 1.2, se  $m = n$ , então  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ , que é o conhecido resultado do determinante do produto de duas matrizes quadradas e de mesma ordem.

## 1.5 Princípio de Inclusão-Exclusão

Esta seção apresenta o Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE), que será utilizado no Capítulo 3, na demonstração do TMA de Tutte (Teorema 3.1). As referências utilizadas foram [8, p.9.4] e [13, p.61-64].

O PIE fornece uma fórmula para o cálculo do número de elementos na reunião de um número finito de conjuntos. A fórmula é dada no Teorema 1.3.

Denotaremos o número de elementos de um conjunto  $A$  por  $|A|$ .

**Teorema 1.3** (Princípio de Inclusão-Exclusão). *O número de elementos na reunião dos conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  é dado pela fórmula:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|,$$

onde a somatória é considerada sobre todos os subconjuntos  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $I \neq \emptyset$ .

O exemplo a seguir ilustra o PIE nos casos  $n = 2$  e  $n = 3$ .

**Exemplo 1.16.** Para  $n = 2$ , temos:

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2| &= \sum_{I \subseteq \{1,2\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
 &= (-1)^{|\{1\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + (-1)^{|\{2\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + (-1)^{|\{1,2\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| \\
 &= (-1)^{1-1} |A_1| + (-1)^{1-1} |A_2| + (-1)^{2-1} |A_1 \cap A_2| \\
 &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.
 \end{aligned}$$

Para  $n = 3$ , temos:

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{I \subseteq \{1,2,3\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
 &= (-1)^{|\{1\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + (-1)^{|\{2\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| \\
 &\quad + (-1)^{|\{3\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| + (-1)^{|\{1,2\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| \\
 &\quad + (-1)^{|\{1,3\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + (-1)^{|\{2,3\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \\
 &\quad + (-1)^{|\{1,2,3\}|-1} \left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \\
 &= (-1)^{1-1} |A_1| + (-1)^{1-1} |A_2| + (-1)^{1-1} |A_3| + (-1)^{2-1} |A_1 \cap A_2| \\
 &\quad + (-1)^{2-1} |A_1 \cap A_3| + (-1)^{2-1} |A_2 \cap A_3| + (-1)^{3-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
 &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
 \end{aligned}$$

A razão para a expressão *inclusão-exclusão* pode ser entendida da seguinte forma: no caso  $n = 2$ , a contagem do número de elementos em  $A_1 \cup A_2$  é realizada somando-se os números de elementos em  $A_1$  e em  $A_2$ . Nessa etapa é incluído um excesso de elementos, pois  $A_1$  e  $A_2$  podem ter elementos em comum. Na etapa seguinte, o excesso  $|A_1 \cap A_2|$  é excluído pois, do contrário, ele seria contado duas vezes. Da mesma forma, para  $n = 3$ , em geral, pode ocorrer de os conjuntos  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  possuírem, dois a dois, elementos em comum. A soma dos números de elementos em  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  incluirá  $|A_1 \cap A_2|$ ,  $|A_1 \cap A_3|$  e  $|A_2 \cap A_3|$  elementos a mais, que são excluídos pelos termos negativos. Nesse caso, são excluídos também os elementos que pertencem aos três conjuntos simultaneamente. Estes são incluídos somando-se  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ .

## 2 O Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff

O TMA de Kirchhoff, Teorema 2.1 deste capítulo, fornece uma fórmula para calcular o número de árvores geradoras em um grafo ou multigrafo não orientado. O Teorema é devido ao físico e matemático alemão Gustav Robert Kirchhoff (1884-1887, ver Capítulo 4).

Este capítulo apresenta uma demonstração desse teorema para grafos e multigrafos não orientados. Foram utilizados resultados da Álgebra Linear e, em especial, das propriedades de matrizes e determinantes. As referências utilizadas foram [1, p.13,27-28,71-72,81-91], [5, p.6.3-6.7], [14, p.37], [15, p.238] e [11, p.73]. Em [1], encontra-se a demonstração do teorema para o caso de grafos não orientados. Em [15], o teorema aparece na versão para multigrafos não orientados. Dessa forma, adequamos a demonstração presente em [1] para o caso de grafos e multigrafos não orientados.

Neste capítulo, em todas as definições, proposições, lemas e teoremas, denotamos por  $G(V, E)$ , ou apenas  $G$ , um grafo ou multigrafo não orientado e sem loops (arestas que ligam um vértice a ele mesmo), onde  $V$  representa o conjunto dos vértices e  $E$  o conjunto das arestas de  $G$ . Denotamos a matriz transposta de uma matriz  $C$  qualquer por  $C^T$ .

**Definição 2.1.** *Seja  $v$  um vértice de  $G$ . Dizemos que  $\text{grau}(v)$  é o **grau do vértice**  $v$ , cujo valor é igual ao número de arestas ligadas a  $v$ . Se  $\text{grau}(v) = 0$ , dizemos que  $v$  é um vértice **isolado**.*

**Lema 2.1.** *Seja  $G$  conexo e com  $n$  vértices. Então,  $G$  possui no mínimo  $(n - 1)$  arestas.*

Demonstração: Queremos provar que  $|E| \geq n - 1$ . Para isso, aplicaremos o princípio de indução sobre o número de vértices de  $G$ .

Se  $G$  possuir apenas um vértice, teremos  $|E| = 0$ . Se  $G$  possuir apenas dois vértices, como  $G$  é conexo, temos  $|E| \geq 1$ . Ambos os casos são compatíveis com a desigualdade  $|E| \geq n - 1$ .

Adotaremos como hipótese indutiva que o lema é verdadeiro para todos os grafos e multigrafos conexos que possuem  $1 \leq |V| \leq n_0$ , onde  $n_0$  é fixo. Nosso objetivo é provar que o lema também é verdadeiro para um grafo ou multigrafo conexo  $G^*(V^*, E^*)$  qualquer, com  $|V^*| = n_0 + 1$ , ou seja, queremos provar que vale a desigualdade  $|E^*| \geq (n_0 + 1) - 1 \geq n_0$ .

Seja  $v$  um vértice qualquer de  $G^*$  e  $G'(V', E')$  o subgrafo de  $G^*$  que não possui o vértice  $v$  e as arestas que ligam  $v$  a outro vértice. Portanto, temos  $V' = V^* - \{v\}$ . Precisamos analisar dois casos:

**Caso 1.**  $G'$  é conexo. A Figura 9 ilustra  $G^*$  para esse caso.

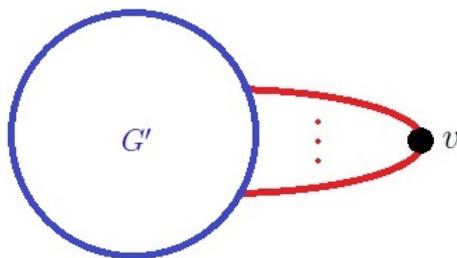


Figura 9 – Grafo  $G^*$  para  $G'$  conexo

Temos  $|V'| = |V^*| - 1$  e, portanto,  $|V'| = n_0$ . Usando a hipótese indutiva, temos  $|E'| \geq n_0 - 1$ . Como  $G^*$  também é conexo, há pelo menos uma aresta que o liga o vértice  $v$  a outro vértice. Portanto,

$$\begin{aligned} |E^*| &\geq |E'| + 1 \\ &\geq (n_0 - 1) + 1 \\ &\geq n_0. \end{aligned}$$

Chegando ao resultado desejado para  $G'$  conexo.

**Caso 2.**  $G'$  é formado pelas componentes conexas  $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_k(V_k, E_k)$ ,  $k > 1$ . A Figura 10 ilustra  $G^*$  para esse caso.

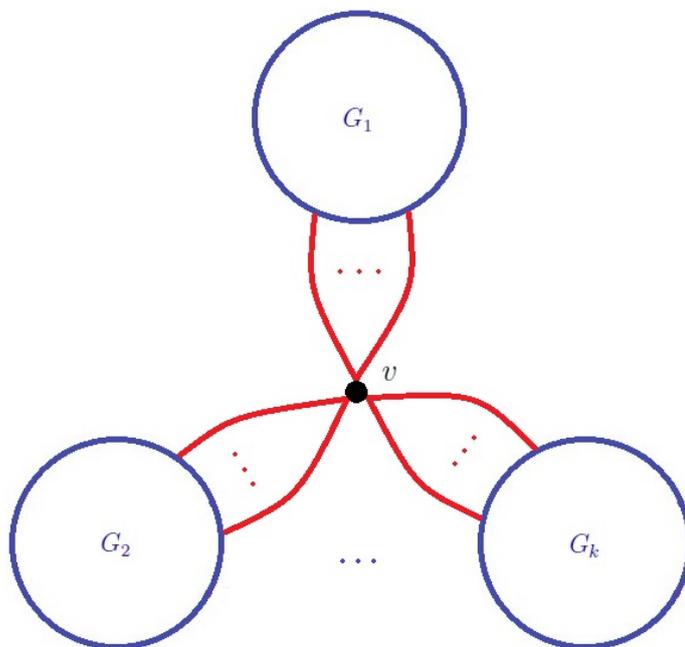


Figura 10 – Grafo  $G^*$  para  $G'$  desconexo

Temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k |V_j| &= |V'| \\
 &= |V^*| - 1 \\
 &= n_0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como  $G'$  possui mais de uma componente conexa e como cada componente corresponde a um grafo ou multigrafo conexo, temos  $|V_j| < n_0$ . Aplicando a hipótese indutiva em cada componente conexa, temos  $|E_j| \geq |V_j| - 1$ . Com isso e com o resultado 2.1, temos

$$\begin{aligned}
 |E'| &= \sum_{j=1}^k |E_j| \\
 &\geq \sum_{j=1}^k (|V_j| - 1) \\
 &\geq \left( \sum_{j=1}^k |V_j| \right) - k \\
 &\geq n_0 - k.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Em  $G^*$ , cada componente conexa de  $G'$  possui pelo menos uma aresta que liga um vértice da componente ao vértice  $v$ . Portanto, podemos afirmar que  $|E^*| \geq |E'| + k$ . Com isso e com o resultado 2.2, temos

$$\begin{aligned}
 |E^*| &\geq |E'| + k \\
 &\geq (n_0 - k) + k \\
 &\geq n_0.
 \end{aligned}$$

Chegando ao resultado desejado para  $G'$  formado por  $k$  componentes conexas.

Logo,  $G$  possui no mínimo  $(n - 1)$  arestas. ■

**Lema 2.2.** *Seja  $G$  um grafo sem ciclos com  $n$  vértices. Então,  $G$  possui no máximo  $(n - 1)$  arestas.*

Demonstração: Nesse caso  $G$  não é um multigrafo, pois não possui ciclos.

Queremos provar que  $|E| \leq n - 1$ . Para isso, aplicaremos o princípio de indução sobre o número de vértices de  $G$ .

Se  $G$  possuir apenas um vértice, teremos  $|E| = 0$ . Se  $G$  possuir apenas dois vértices, teremos  $|E| = 0$  ou  $1$ , porque  $G$  pode ser conexo ou desconexo. Ambos os casos satisfazem a desigualdade  $|E| \leq n - 1$ .

Adotaremos como hipótese indutiva que o lema é verdadeiro para todos os grafos sem ciclos que possuem  $1 \leq |V| \leq n_0$ , onde  $n_0$  é fixo. Nosso objetivo é provar que o lema também é verdadeiro para um grafo  $G^*(V^*, E^*)$  sem ciclos e com  $|V^*| = n_0 + 1$ , ou seja, queremos provar que vale a desigualdade  $|E^*| \leq (n_0 + 1) - 1 \leq n_0$ .

Seja  $e = (a, b)$  uma aresta qualquer de  $G^*$ . Se  $G^*$  for desconexo,  $e$  pertencerá a uma componente conexa qualquer de  $G^*$ . Diremos que  $G'(V', E')$  corresponde ao subgrafo de  $G^*$  que não possui a aresta  $e$ . Assim, temos  $|V'| = |V^*|$  e  $|E'| = |E^*| - 1$ .

Mesmo que  $G^*$  seja desconexo, sabemos que os vértices  $a$  e  $b$  pertencem a mesma componente conexa de  $G^*$ . Como  $G^*$  não possui ciclos, temos que  $a$  e  $b$  não pertencem a mesma componente conexa de  $G'$ , pois, do contrário, haveria um caminho ligando  $a$  e  $b$ , em  $G'$ , e este caminho juntamente com  $e$  formaria um ciclo em  $G^*$ . Isso é uma contradição, porque temos que  $G^*$  não possui ciclos, pela hipótese indutiva. Assim,  $G'$  possui uma componente conexa a mais do que  $G^*$ .

Seja  $G'$  formado pelas componentes conexas  $G_1(V_1, E_1), G_2(V_2, E_2), \dots, G_k(V_k, E_k)$ , com  $k > 1$ . Como  $G'$  possui no mínimo duas componentes conexas, temos  $|V_j| \leq n_0$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Usando a hipótese indutiva em cada componente conexa de  $G'$ , temos  $|E_j| \leq |V_j| - 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} |E'| &= \sum_{j=1}^k |E_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k (|V_j| - 1) \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^k |V_j| \right) - k \\ &\leq (n_0 + 1) - k. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sabemos que  $|E^*| = |E'| + 1$  e que  $G'$  possui pelo menos duas componentes conexas e, portanto,  $2 - k \leq 0$ . Com isso e com o resultado 2.3, temos

$$\begin{aligned} |E^*| &= |E'| + 1 \\ &\leq (n_0 + 1 - k) + 1 \\ &\leq n_0 + (2 - k) \\ &\leq n_0. \end{aligned}$$

Chegando ao resultado desejado.

Logo,  $G$  possui no máximo  $(n - 1)$  arestas. ■

**Lema 2.3.** *Seja  $\mathbb{A}$  uma árvore com  $n$  vértices. Então,  $\mathbb{A}$  possui  $(n - 1)$  arestas.*

Demonstração: Como toda árvore é um grafo conexo, pelo Lema 2.1, temos que  $\mathbb{A}$  possui no mínimo  $(n-1)$  arestas. Como toda árvore também é um grafo sem ciclos, pelo Lema 2.2, temos que  $\mathbb{A}$  possui no máximo  $(n-1)$  arestas. Logo,  $\mathbb{A}$  possui  $(n-1)$  arestas. ■

**Lema 2.4.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices e  $(n-1)$  arestas. Se  $G$  não possui vértices isolados, então existem pelo menos dois vértices de  $G$  com grau igual a 1.*

Demonstração: Seja  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Ao somarmos os graus de todos os vértices de  $G$ , temos que cada aresta é contada duas vezes, pois liga dois vértices. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \text{grau}(v_j) &= 2|E| \\ &= 2(n-1) \\ &= 2n-2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Por hipótese, temos que  $G$  não possui vértices isolados, portanto  $\text{grau}(v_j) \geq 1, \forall j$ , com  $1 \leq j \leq n$ . Faremos a demonstração por absurdo, supondo que exista no máximo um vértice com grau igual a 1. Sem perda de generalidade, consideraremos  $\text{grau}(v_1) \geq 1$  e  $\text{grau}(v_k) \geq 2, \forall k$ , com  $2 \leq k \leq n$ . Então,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \text{grau}(v_j) &= \text{grau}(v_1) + \sum_{k=2}^n \text{grau}(v_k) \\ &\geq 1 + \sum_{k=2}^n 2 \\ &\geq 1 + 2(n-1) \\ &\geq 2n-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Chegamos assim a uma contradição entre os resultados 2.4 e 2.5. Logo, existem pelo menos dois vértices de  $G$  com grau igual a 1. ■

O Lema 2.3 diz que as árvores possuem uma quantidade de arestas menor, em uma unidade, do que a quantidade de vértices. Associando-o ao Lema 2.4, obtemos que as árvores que possuem dois ou mais vértices têm pelo menos dois vértices com grau igual a 1.

**Definição 2.2.** *Dizemos que  $A$ , ou  $A(G)$ , é a **matriz de adjacência** de  $G$ , cujas entradas são dadas por  $a_{ij} = k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  é o número de arestas que ligam o vértice  $v_i$  ao  $v_j$  de  $G$ . No caso em que  $G$  é um grafo, temos  $k \in \{0, 1\}$ . No caso em que  $G$  é um multigrafo,  $k \geq 2$  para pelo menos um par de vértices.*

**Exemplo 2.1.** A matriz de adjacência do grafo da Figura 1 é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz de adjacência  $A$  é quadrada, cuja ordem é igual a  $|V|$ . Todas as entradas da diagonal de  $A$  são nulas, pois não há loops em  $G$ .

Seria natural pensarmos que não atribuiríamos orientação para demonstrarmos um teorema sobre grafos e multigrafos não orientados. Porém, a demonstração que veremos neste capítulo utiliza a matriz de incidência, que, na sua definição, dada a seguir, atribui uma orientação a  $G$ .

**Definição 2.3.** Dado  $G(V, E)$ , escolha uma orientação qualquer para suas arestas, fixando-a em seguida. A **matriz de incidência**  $\beta$ , ou  $\beta(G)$ , com respeito à orientação fixada, é a matriz com entradas  $\beta_{ij}$ , tais que

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j \text{ chega em } v_i; \\ -1, & \text{se } e_j \text{ sai de } v_i; \\ 0, & \text{quando } e_j \text{ não chega e não sai de } v_i. \end{cases},$$

onde  $e_j \in E$  e  $v_i \in V$ .

**Exemplo 2.2.** Uma orientação foi atribuída às arestas do grafo da Figura 1, conforme mostra a Figura 11.

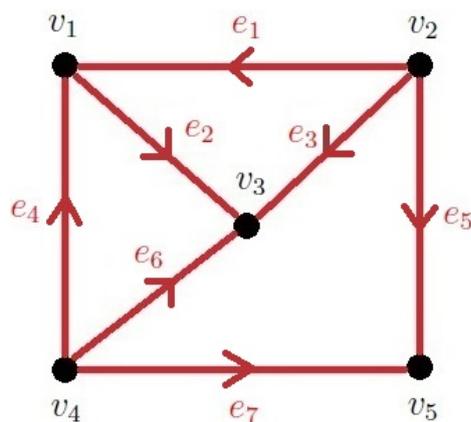


Figura 11 – Orientação atribuída às arestas do grafo da Figura 1

A matriz de incidência com respeito à orientação fixada é:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da definição anterior, segue que o número de linhas de  $\beta$  é igual a  $|V|$ , número de vértices de  $G$ , e o número de colunas é igual a  $|E|$ , número de arestas de  $G$ . Portanto, a ordem da matriz  $\beta$  é  $|V| \times |E|$ . Cada coluna de  $\beta$  traz informações de uma aresta de  $G$  e cada linha traz informações de um vértice. Como uma aresta liga apenas dois vértices de um grafo ou multigrafo, em cada coluna de  $\beta$  teremos apenas uma entrada igual a 1 (referente ao vértice  $v_i$  de entrada da aresta) e outra igual a  $-1$  (referente ao vértice de saída da mesma aresta), independentemente da orientação que é fixada às arestas de  $G$ . As demais entradas serão nulas. Portanto, a soma dos elementos de cada coluna de  $\beta$  é igual a zero.

**Definição 2.4.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices. Dizemos que  $D$ , ou  $D(G)$ , é a **matriz diagonal dos graus dos vértices** de  $G$  se  $D$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  com entradas  $d_{ij}$ , tais que*

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{grau}(v_i), & \text{para } i = j \text{ e } v_i \in V; \\ 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

**Exemplo 2.3.** A matriz diagonal do grafo da Figura 1 é:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Definição 2.5.** *Seja  $D$  a matriz diagonal e  $A$  a matriz de adjacência de  $G$ . A matriz  $L = D - A$  é a **matriz laplaciana** de  $G$ .*

**Exemplo 2.4.** Pelo Exemplo 2.1, conhecemos a matriz de adjacência do grafo da Figura 1. Já pelo Exemplo 2.3, conhecemos a matriz diagonal do mesmo grafo. Portanto, a matriz laplaciana desse grafo é:

$$\begin{aligned}
L &= D - A \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Proposição 2.1.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices,  $L$  sua matriz laplaciana e  $\beta$  sua matriz de incidência com respeito a uma orientação qualquer. Então,  $L = \beta\beta^T$ .*

Demonstração: Seja  $F = \beta \cdot \beta^T$ , queremos demonstrar que  $F = D - A$ . Independentemente da orientação adotada em  $G$ , temos que o número de linhas da matriz  $\beta$  é igual ao número de vértices de  $G$  e o número de colunas é igual ao número de arestas de  $G$ , isto é,  $\beta$  é de ordem  $n \times |E|$ . Como  $F$  é o produto de  $\beta$  pela sua transposta  $\beta^T$ , que é de ordem  $|E| \times n$ , temos que  $F$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , como  $L$ .

Pela Definição 2.3, sabemos que são atribuídos valores 1 ou  $-1$  às entradas  $\beta_{ij}$  quando o vértice  $v_i$  possui a aresta  $e_j$  chegando nele ou saindo dele, caso contrário é atribuído valor zero. Por isso, a linha  $i$  da matriz  $\beta$  possui  $\text{grau}(v_i)$  elementos não nulos, o que independe da orientação adotada em  $G$ .

Ao multiplicarmos  $\beta$  pela sua transposta, os elementos  $f_{ij}$  de  $F$  correspondem ao produto interno entre as linhas  $i$  e  $j$  de  $\beta$ . Analisaremos os casos desse produto para  $i = j$  e  $i \neq j$ .

No caso  $i = j$ , se  $v_i$  possuir uma aresta  $e_j$  saindo dele, então  $\beta_{ij} = -1$ , e será adicionado o valor de  $(-1) \cdot (-1)$ , que é 1, ao valor de  $f_{ii}$  no produto interno. Se  $v_i$  possuir uma aresta  $e_j$  chegando nele, então  $\beta_{ij} = 1$ , e será adicionado o valor de  $1 \cdot 1$ , que também é 1, ao valor de  $f_{ii}$  no produto interno. Se a aresta  $e_j$  não sair e não chegar em  $v_i$ , então  $\beta_{ij} = 0$ , e será adicionado 0 ao valor de  $f_{ii}$  no produto interno. Por isso, temos que  $f_{ii} = \text{grau}(v_i)$ , pois somamos  $\text{grau}(v_i)$  vezes o número 1. Com isso, a diagonal da matriz  $F$  é igual a diagonal da matriz  $D$ . Como  $G$  não possui loops, a matriz  $A$  possui valores nulos na diagonal. Assim, para  $i = j$ , as entradas de  $F$  são iguais as entradas de  $D - A$ .

No caso  $i \neq j$ , se a aresta  $e_l$ ,  $0 \leq l \leq |E|$ , de  $G$  sai de  $v_i$  e chega em  $v_j$ , temos  $\beta_{il} = -1$  e  $\beta_{jl} = 1$ . Assim, será adicionado o valor  $1 \cdot (-1)$ , que é  $-1$ , ao valor de  $f_{ij}$

no produto interno. O mesmo aconteceria se a aresta  $e_l$  saísse de  $v_j$  e chegasse em  $v_i$ . Portanto, independentemente da orientação adotada em  $G$ , sempre é adicionado o valor  $-1$  ao produto interno entre as linhas  $i$  e  $j$  de  $\beta$  cada vez que existir uma aresta ligando os vértices  $v_i$  e  $v_j$ . Nesse caso, temos  $f_{ij} = -k$ , onde  $k$  é o número de arestas que ligam  $v_i$  e  $v_j$ . Pela Definição 2.2, temos  $a_{ij} = k$ . Como as entradas que não estão na diagonal da matriz  $D$  são nulas, para  $i \neq j$ , temos que as entradas de  $F$  são iguais as entradas de  $D - A$ .

Portanto,  $F = D - A$ . Logo,  $L = \beta\beta^T$ . ■

**Exemplo 2.5.** Para fins de ilustração, aplicaremos a Proposição 2.1 ao grafo da Figura 1, com respeito à orientação atribuída na Figura 11. Pelo Exemplo 2.2, conhecemos a matriz de incidência  $\beta$ . Portanto, pelo Proposição 2.1, temos

$$\begin{aligned} L &= \beta \cdot \beta^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

conforme mostramos no Exemplo 2.4.

**Lema 2.5.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices e  $\omega$  componentes conexas,  $\beta$  sua matriz de incidência com respeito a uma orientação qualquer e  $r(\beta)$  o posto de  $\beta$ . Então,  $r(\beta) = n - \omega$ .*

Demonstração: Cada componente conexa de  $G$  possui uma matriz de incidência com respeito a uma orientação atribuída. Por isso, podemos escrever  $\beta$  da seguinte forma:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta^{(\omega-1)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \beta^{(\omega)} \end{pmatrix}.$$

Onde  $\beta^{(i)}$  corresponde à componente conexa  $G^{(i)}$ , com  $1 \leq i \leq \omega$ , de  $G$ .

Como a soma dos elementos de cada coluna de  $\beta^{(i)}$  é igual a zero, temos que  $r(\beta^{(i)}) \leq n_i - 1$ , onde  $n_i$  é o número de vértices de  $G^{(i)}$ . Nosso objetivo é obter  $r(\beta^{(i)}) = n_i - 1$ .

Temos que  $r(\beta^{(i)}) = r((\beta^{(i)})^T)$ , pois o posto de uma matriz é igual ao posto de sua transposta. Mostraremos que  $r((\beta^{(i)})^T) = n_i - 1$ . Para isso, devemos mostrar que o núcleo  $N((\beta^{(i)})^T)$  de  $(\beta^{(i)})^T$  tem dimensão 1. Chegaremos ao resultado após concluirmos que  $\mathbf{1} = \underbrace{[1 \ 1 \cdots 1]^T}_{n_i \text{ vezes}}$  é base do subespaço  $N((\beta^{(i)})^T)$ .

Temos que  $\mathbf{1}^T \cdot \beta^{(i)} = \mathbf{0}$ , onde  $\mathbf{0}$  é a matriz nula. Portanto,  $\mathbf{1}$  pertence ao subespaço. Faltando provar que  $\mathbf{1}$  gera o subespaço.

Seja  $x \in N((\beta^{(i)})^T)$ . Escolheremos  $x_1$  e  $x_2$  como sendo quaisquer duas coordenadas de  $x$ , sendo que cada coordenada está relacionada a um vértice de  $G^{(i)}$ . Como  $G^{(i)}$  é conexo, existe um caminho entre esses dois vértices relacionados a  $x_1$  e  $x_2$ . Digamos que esse caminho é formado por  $q$  arestas. Para cada uma dessas arestas existe uma coluna  $c_k$ ,  $1 \leq k \leq q$ , em  $\beta^{(i)}$  que possui uma entrada igual a 1, outra igual a  $-1$  e as demais iguais a zero. Como  $x^T \beta^{(i)} = \mathbf{0}$ , segue que  $x^T c_k = \mathbf{0}$ . Como esse resultado vale para qualquer aresta, vale também para  $x_1 = x_2$ . Assim,  $x$  é o produto entre  $\mathbf{1}$  e algum escalar. Então,  $\mathbf{1}$  gera o subespaço  $N((\beta^{(i)})^T)$ .

Portanto,  $r((\beta^{(i)})^T) = n_i - 1$ . Assim,  $r(\beta^{(i)}) = n_i - 1$ . Logo,  $r(\beta) = n - \omega$ . ■

**Proposição 2.2.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices e  $\omega$  componentes conexas,  $L$  sua matriz laplaciana e  $r(L)$  o posto de  $L$ . Então,  $r(L) = n - \omega$ .*

Demonstração: Seja  $\beta$  a matriz de incidência de  $G$  e seja  $r(\beta)$  o posto de  $\beta$ . Como o posto de uma matriz e o posto de sua transposta são iguais e como o produto de uma matriz por sua transposta não altera o posto, temos que  $r(\beta) = r(\beta^T) = r(\beta \cdot \beta^T)$ . Pela Proposição 2.1, temos que  $r(\beta \cdot \beta^T) = r(L)$ . Assim,  $r(\beta) = r(L)$ . Logo, pelo Lema 2.5, temos que  $r(L) = n - \omega$ . ■

**Lema 2.6.** *Seja  $G$  conexo e com  $n$  vértices,  $L$  sua matriz laplaciana,  $\text{adj}(L)$  a matriz adjunta de  $L$  e seja  $J$  uma matriz quadrada com mesma ordem de  $L$  e com todas entradas iguais a 1. Então,  $\text{adj}(L)$  é um múltiplo de  $J$ .*

Demonstração: Usando a Proposição 2.2 e a hipótese  $G$  conexo, temos que  $r(L) = n - 1$ . Pela demonstração do Lema 2.5, sabemos que o núcleo de  $L$  tem dimensão 1 e é gerado por  $\mathbf{1} = \underbrace{[1 \ 1 \cdots 1]^T}_n$ .

Pelo Teorema 1.1, temos

$$L \cdot \text{adj}(L) = \det(L) \cdot I,$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

Quando somamos todas as linhas de  $L$ , obtemos um linha nula. Como a soma de linhas de uma matriz quadrada não altera o determinante, temos que  $\det(L) = 0$ . Por isso,

$$\begin{aligned} L \cdot \text{adj}(L) &= \det(L) \cdot I \\ &= 0 \cdot I \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{0}$  é a matriz nula.

Isso significa que as colunas de  $\text{adj}(L)$  pertencem ao núcleo de  $L$  e, conseqüentemente, são múltiplas de  $\mathbf{1}^T$ .

Como a matriz  $L$  é simétrica, temos que a matriz  $\text{adj}(L)$  também é simétrica. Com isso e com o fato de que as colunas de  $\text{adj}(L)$  são múltiplas de  $\mathbf{1}^T$ , concluímos que todas as entradas de  $\text{adj}(L)$  são iguais. Logo,  $\text{adj}(L)$  é um múltiplo de  $J$ . ■

**Lema 2.7.** *Seja  $\beta$  uma matriz de incidência de  $G$  e seja  $\beta'$  uma submatriz quadrada de  $\beta$ . Então,  $\det(\beta') = 0, 1$  ou  $-1$ .*

Demonstração: A matriz  $\beta$  possui apenas duas entradas não nulas em cada coluna, uma igual a 1 e outra igual a  $-1$ . Por isso, para calcularmos  $\det(\beta')$  temos três casos para analisar: quando  $\beta'$  possui duas entradas não nulas em cada coluna, quando possui uma ou mais colunas com apenas uma entrada não nula e quando possui uma coluna com todas as entradas iguais a zero.

No caso em que  $\beta'$  possui uma coluna com todas as entradas iguais a zero, temos que  $\det(\beta') = 0$ .

Se cada coluna de  $\beta'$  possuir duas entradas não nulas, então uma entrada é igual a 1 e a outra é igual a  $-1$ . Nesse caso, se escolhermos uma linha qualquer e somarmos a esse linha todas as linhas restantes de  $\beta'$ , então obteremos uma linha com todas as entradas nulas. Como a soma das linhas de uma matriz quadrada não altera o valor de seu determinante e como o determinante de uma matriz quadrada que possui uma linha nula é igual a zero, temos que  $\det(\beta') = 0$ .

Já no caso em que pelo menos uma coluna de  $\beta'$  possui apenas uma entrada não nula (igual a 1 ou  $-1$ ), basta aplicarmos o método de Laplace expandindo essa coluna. Durante o método, se alguma submatriz quadrada resultante possuir dois elementos não nulos em cada coluna ou possuir uma coluna nula, teremos  $\det(\beta') = 0$  (pelos argumentos vistos nos dois parágrafos anteriores). Se isso não ocorrer, continuamos aplicando o método

nas submatrizes resultantes, expandindo a coluna que possui apenas um elemento não nulo, até chegarmos a última submatriz quadrada de ordem 1. Se a entrada dessa submatriz for igual a zero, teremos  $\det(\beta') = 0$ . Caso contrário, essa entrada será igual a 1 ou  $-1$ , implicando em  $\det(\beta') = 1$  ou  $-1$ .

Logo,  $\det(\beta') = 0, 1$  ou  $-1$ . ■

**Lema 2.8.** *Seja  $G$  com  $n$  vértices e  $\beta$  sua matriz de incidência com respeito a uma orientação qualquer. Chamaremos de  $\beta^*$  uma submatriz construída a partir de  $n - 1$  colunas de  $\beta$ . Assim,  $\beta^*$  corresponde a um subgrafo  $H$  de  $G$ . Seja  $\beta'$  a matriz resultante da retirada de qualquer linha de  $\beta^*$ . Então,  $|\det(\beta')| = 1$  ou  $0$ . Se  $|\det(\beta')| = 1$ ,  $H$  é uma árvore geradora de  $G$ . Se  $|\det(\beta')| = 0$ ,  $H$  não é uma árvore geradora de  $G$ .*

Demonstração: Faremos a demonstração, sem perda de generalidade, para  $\beta'$  originada a partir da remoção da última linha de  $\beta^*$ , que traz informações do vértice  $v_n$ . Percebemos que  $\beta'$  é uma matriz quadrada de ordem  $n - 1$ . Aplicando o Lema 2.7, temos  $|\det(\beta')| = 1$  ou  $0$ .

Suponhamos que  $H$  não é uma árvore geradora de  $G$ . Então  $H$  é desconexo, pois tem  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas. Existe pelo menos uma componente conexa de  $H$  que não possui o vértice  $v_n$ , conseqüentemente a soma das colunas de  $\beta'$  correspondentes a essa componente resulta em uma coluna nula. Como a soma de colunas não altera o determinante e como conseguimos obter uma coluna nula, temos que  $\det(\beta') = 0$ .

No caso que  $H$  é uma árvore geradora de  $G$ , renomeamos os vértices e as arestas de uma forma diferente. Primeiro escolhemos um vértice diferente de  $v_n$  e que tenha grau 1, pois uma árvore tem no mínimo dois vértices de grau 1 (Lemas 2.3 e 2.4). Chamamos esse vértice de  $u_1$  e a única aresta incidente a ele de  $y_1$ . Seja  $H' = H - \{u_1, y_1\}$  a árvore  $H$  sem o vértice  $u_1$  e a aresta  $y_1$ . Escolha um vértice de  $H'$  diferente de  $v_n$ , que tenha grau 1. Chamamos esse vértice de  $u_2$  e a única aresta incidente a ele de  $y_2$ . Continuamos esse processo, sempre desconsiderando o vértice que já foi renomeado e a aresta incidente a ele. Esse processo nos permite renomear as arestas de forma que  $y_i$  incide no vértice  $u_i$  e no vértice  $u_j$ , para  $i < j$ .

Essa renomeação dos vértices de  $H$  nos fornece uma nova matriz  $\beta''$ , que é o resultado da permutação de linhas de  $\beta'$ . Por isso,  $|\det(\beta')| = |\det(\beta'')|$ . Além disso,  $\beta''$  é uma matriz triangular inferior, cujas entradas da diagonal principal são 1 ou  $-1$ . Aplicando o método de Laplace, temos  $|\det(\beta'')| = 1$ . Conseqüentemente,  $|\det(\beta')| = 1$ .

Logo, temos  $|\det(\beta')| = 1$  somente se  $H$  é uma árvore geradora de  $G$ . Caso contrário, temos  $|\det(\beta')| = 0$ . ■

**Teorema 2.1** (Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff). *Seja  $L$  a matriz laplaciana de  $G$ ,  $\text{adj}(L)$  a matriz adjunta de  $L$  e seja  $J$  a matriz com mesma ordem de  $L$  e com todas*

entradas iguais a 1. Então,

$$\text{adj}(L) = \tau(G) \cdot J,$$

onde  $\tau(G)$  é o número de árvores geradoras de  $G$ .

Demonstração: Consideraremos que  $G$  possui  $n$  vértices e  $e$  arestas. Pelo Lema 2.6, temos que  $\text{adj}(L)$  é um múltiplo de  $J$ . Portanto, precisamos mostrar que o número de árvores geradoras de  $G$  é igual ao valor de qualquer cofator de  $L$ .

Atribuiremos uma orientação qualquer às arestas de  $G$ . Seja  $\beta$  a matriz de incidência referente a essa orientação atribuída a  $G$ . Chamaremos de  $B$  a matriz originada a partir da retirada da última linha de  $\beta$ . Temos que a submatriz dada por  $B \cdot B^T$  é obtida por meio da retirada da última linha e coluna de  $L$ . Portanto, o elemento  $l_{nn}$  de  $L$  possui cofator igual a  $\det(B \cdot B^T)$ .

Pelo Teorema 1.2, temos

$$\det(B \cdot B^T) = \sum_P \det(B_P) \det(B_P^T).$$

Onde a somatória é sobre todos os subconjuntos  $P$  de  $\{1, 2, \dots, e\}$  com  $n - 1$  elementos. Para cada  $P$ ,  $B_P$  é a matriz  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtida de  $B$  mantendo as colunas de  $B$  cujos índices pertencem a  $P$ ;  $B_P^T$  é a matriz  $(n - 1) \times (n - 1)$  obtida de  $B^T$  mantendo as linhas de  $B^T$  cujos índices pertencem a  $P$ .

Pelo Lema 2.8, temos que  $|\det(B_P)| = 1$  se e somente se  $B_P$  corresponde a uma árvore geradora de  $G$ , caso contrário temos que  $\det(B_P) = 0$ . Como  $\det(B_P) = \det(B_P^T)$ , a somatória acima nos permite contar o número de árvores geradoras de  $G$ . Portanto,  $\det(B \cdot B^T) = \tau(G)$ .

Logo,  $\text{adj}(L) = \tau(G) \cdot J$ . ■

O Teorema 2.1 fornece uma fórmula para calcular o número de árvores geradoras de grafos e multigrafos não orientados, que é igual ao valor de qualquer cofator da matriz adjunta da matriz laplaciana de  $G$ .

No Exemplo 2.6, calculamos o número de árvores geradoras de um grafo não orientado. No Exemplo 2.7, calculamos o número de árvores geradoras de um multigrafo não orientado.

**Exemplo 2.6.** A Figura 12 mostra um grafo não orientado.

A matriz laplaciana e a matriz adjunta desse grafo são iguais a

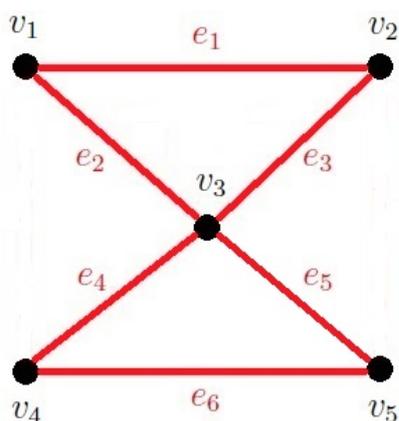


Figura 12 – Grafo não orientado 2

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \text{adj}(L) = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.1, o grafo da Figura 12 possui nove árvores geradoras, mostradas na Figura 13.

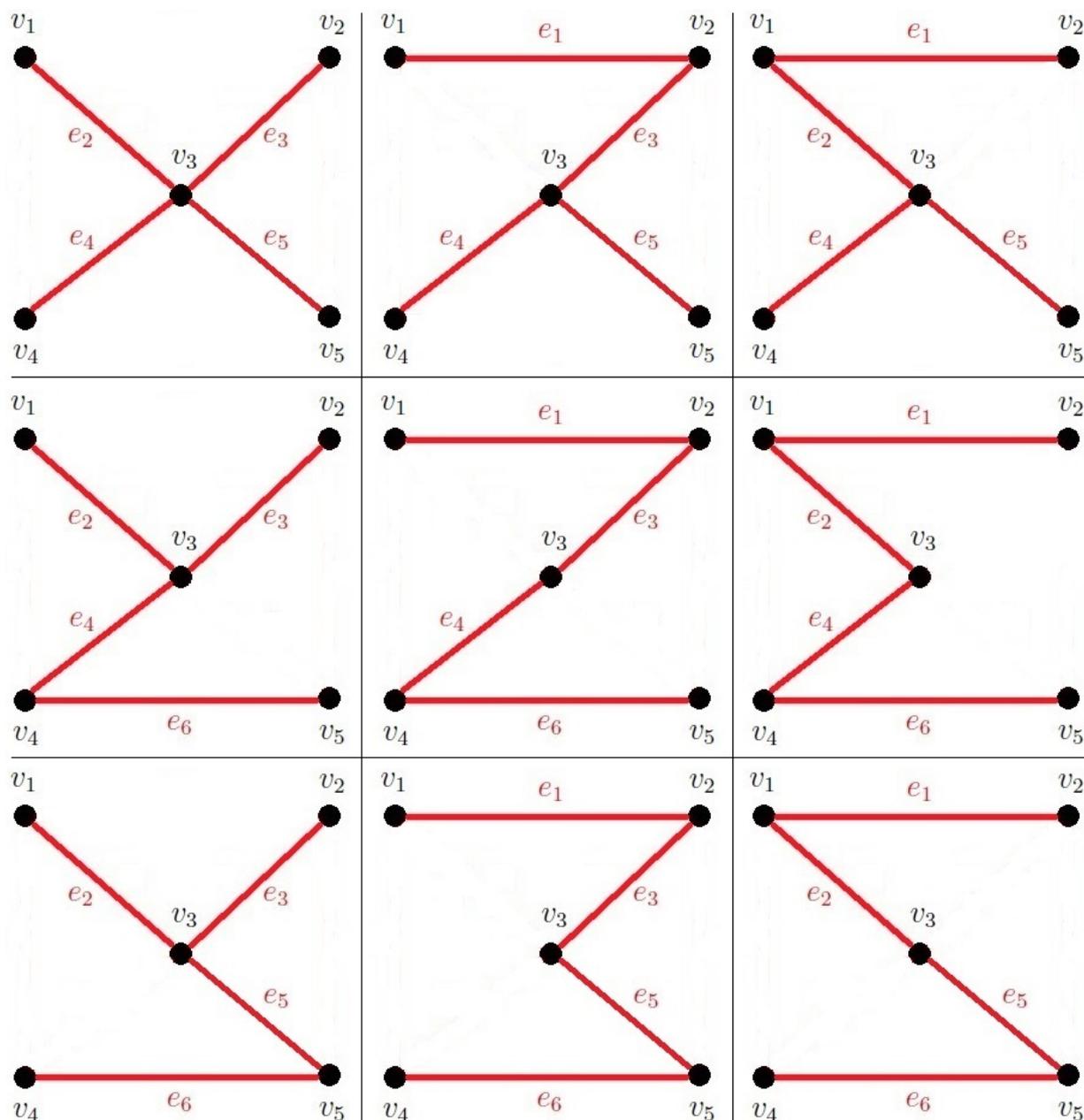


Figura 13 – Árvores geradoras do grafo da Figura 12

**Exemplo 2.7.** A Figura 14 mostra um multigrafo não orientado.

A matriz laplaciana e a matriz adjunta desse multigrafo são iguais a

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \text{adj}(L) = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.1, o multigrafo da Figura 14 possui sete árvores geradoras, mostradas

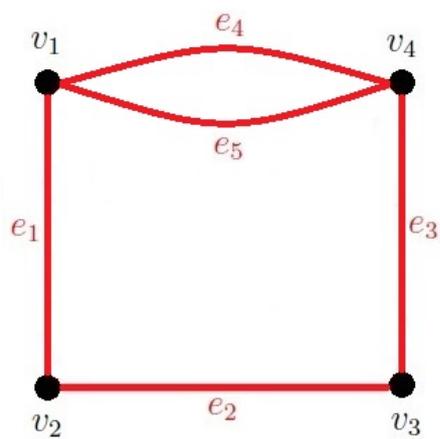


Figura 14 – Multigrafo não orientado 2

na Figura 15.

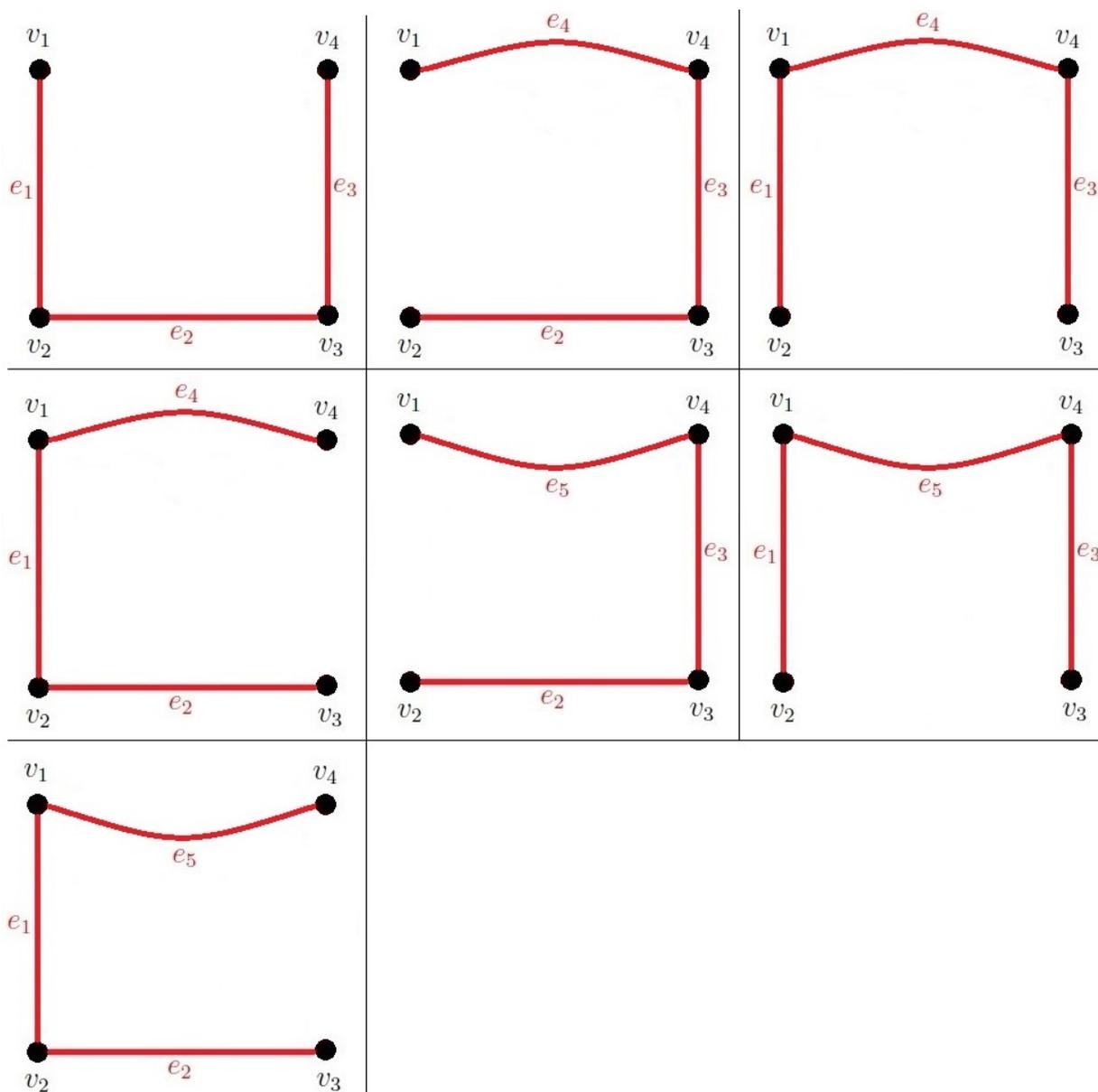


Figura 15 – Árvores geradoras do multigrafo da Figura 14

### 3 O Teorema da Matriz-Árvore de Tutte

O Teorema de Tutte, chamado neste trabalho de TMA de Tutte, fornece uma fórmula para calcular o número de arborescências geradoras de grafos e multigrafos orientados. Este capítulo apresenta uma demonstração desse teorema que utiliza resultados da Álgebra, Álgebra Linear e Análise Combinatória. As referências utilizadas foram [2, p.1.5], [3, p.2.3] e [9, p.10.1-10.9]. A demonstração presente em [9] se refere a grafos orientados, porém ela foi adequada para que também inclísse multigrafos orientados.

Em todas as definições, proposições, lemas e teoremas deste capítulo,  $G$  ou  $G(V, E)$  denota um grafo ou multigrafo orientado e sem loops. Denotamos o número de elementos de um conjunto  $C$  qualquer por  $|C|$ .

**Definição 3.1.** *Seja  $v$  um vértice de  $G$ . Denotamos como  $\text{grau}_{in}(v)$  o grau de entrada do vértice  $v$ , ou seja, o número de arestas orientadas que chegam em  $v$ , e como  $\text{grau}_{out}(v)$  o grau de saída do vértice  $v$ , que é o número de arestas orientadas que saem de  $v$ .*

**Exemplo 3.1.** A Figura 16 mostra um multigrafo orientado e desconexo.

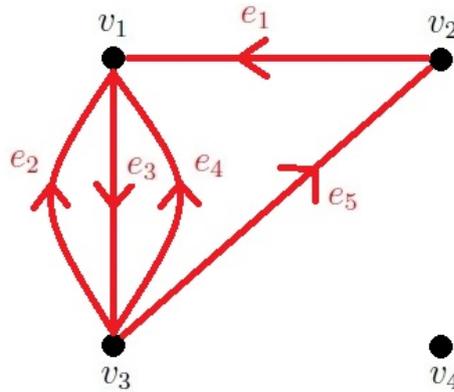


Figura 16 – Multigrafo orientado e desconexo

A Tabela 3 mostra os valores dos graus de entrada e saída dos vértices do multigrafo da Figura 16.

<i>vértice</i>	<i>grau<sub>in</sub>(vértice)</i>	<i>grau<sub>out</sub>(vértice)</i>
$v_1$	3	1
$v_2$	1	1
$v_3$	1	3
$v_4$	0	0

Tabela 3 – Graus de entrada e saída

**Definição 3.2.** *Seja  $e$  uma aresta de  $G$  e sejam  $u$  e  $v$  vértices de  $G$ , tal que  $e = (u, v)$ . Dizemos que  $u$  é um vértice **antecessor** de  $v$  e que  $v$  é um vértice **sucessor** de  $u$ .*

**Definição 3.3.** *Seja  $v$  um vértice do grafo ou multigrafo  $G$ . Dizemos que  $P_v$  é a **lista dos antecessores** de  $v$  se  $P_v = \{u \mid u \in V \text{ e } (u, v) \in E\}$ . Dizemos que  $S_v$  é a **lista dos sucessores** de  $v$  se  $S_v = \{u \mid u \in V \text{ e } (v, u) \in E\}$ .*

**Definição 3.4.** *Um **spreg** (em inglês, “a single predecessor graph”) com raiz no vértice  $v$  é um grafo ou multigrafo orientado no qual cada vértice possui um único antecessor e a raiz não possui antecessores, ou seja,  $\text{grau}_{in}(v) = 0$  e  $\text{grau}_{in}(u) = 1$ , para todo vértice  $u$ ,  $u \neq v$ , do spreg.*

Destacamos que a raiz considerada pela Definição 3.4 é diferente da considerada na Definição 1.15. Um spreg com raiz  $v$  pode ser um grafo ou multigrafo orientado desconexo, conforme mostra a Figura 17 do Exemplo 3.2. Já um grafo ou multigrafo orientado que possui uma raiz conforme a Definição 1.15 é necessariamente conexo, pois todos os vértices são acessíveis a partir da raiz. Porém, destacamos que essa diferença desaparece quando consideramos apenas spregs conexos. É isso que ocorre na demonstração do TMA de Tutte, Teorema 3.1.

**Exemplo 3.2.** A Figura 17 mostra um grafo e um multigrafo orientado que são spregs com raiz em  $v$ .

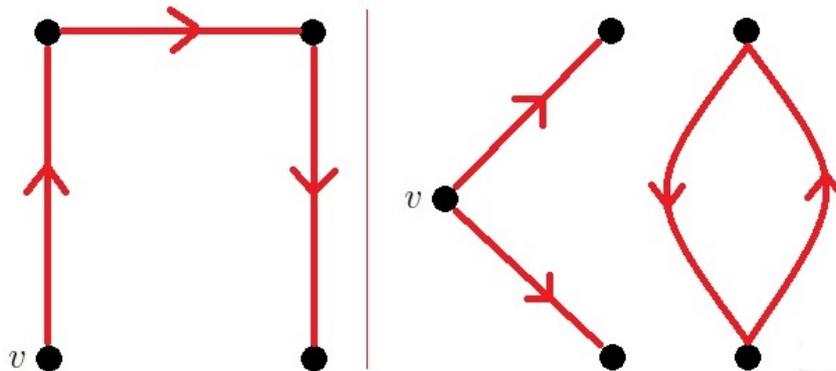


Figura 17 – Spregs

A Figura 18 mostra um grafo e um multigrafo orientado que não são spregs.

**Proposição 3.1.** *Seja  $G(V, E)$  uma arborescência com raiz em  $v \in V$ . Então,  $G$  é um spreg com raiz  $v$ .*

Demonstração: Nosso objetivo é mostrar que  $\text{grau}_{in}(v) = 0$  e  $\text{grau}_{in}(u) = 1, \forall u \in V - \{v\}$ . Para isso, faremos uma demonstração por contradição.

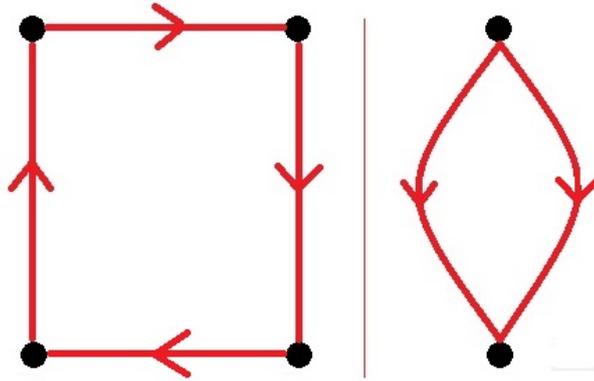


Figura 18 – Não spregs

No primeiro caso, suponhamos que  $\text{grau}_{in}(v) > 0$ . Seja  $u \in P_v$ . Como  $v$  é raiz, todos os vértices são acessíveis a partir de  $v$ , portanto existe um caminho orientado de  $v$  a  $u$ . Como  $u \in P_v$ , existe uma aresta  $e \in E$  tal que  $e = (u, v)$ . Se adicionarmos  $e$  no final do caminho orientado de  $v$  a  $u$ , obteremos um ciclo orientado. Como  $G$  é uma arborescência, temos que  $G$  é uma árvore se desconsiderarmos sua orientação. Assim,  $G$  não possui ciclos. Chegando a uma contradição. Portanto,  $\text{grau}_{in}(v) = 0$ .

No segundo caso, suponhamos que  $\exists u \in V - \{v\}$  tal que  $\text{grau}_{in}(u) > 1$ . Sejam  $u_1, u_2 \in P_u$ . É importante notar que podemos ter  $u_1 = v$  ou  $u_2 = v$ . Como  $v$  é raiz, todos os vértices são acessíveis a partir de  $v$ , portanto existe um caminho orientado de  $v$  a  $u_1$  e outro de  $v$  a  $u_2$ . Como  $u_1, u_2 \in P_u$ , existe  $e_1 = (u_1, u)$  e  $e_2 = (u_2, u)$ . Se desconsiderarmos a orientação de  $G$ , teremos que o caminho de  $v$  a  $u_1$  e o caminho de  $v$  a  $u_2$ , juntamente com  $e_1$  e  $e_2$ , devem possuir um ciclo. Como  $G$  é uma árvore no caso em que desconsideramos sua orientação, temos que  $G$  não possui ciclos. Chegando a uma contradição. Portanto,  $\text{grau}_{in}(u) = 1, \forall u \in V - \{v\}$ . Perceba que não podemos ter  $\text{grau}_{in}(u) = 0$ , pois todos os vértices  $u \in V - \{v\}$  são acessíveis a partir de  $v$ .

Logo,  $G$  é um spreg com raiz  $v$ . ■

**Proposição 3.2.** *Seja  $G(V, E)$  um spreg com  $n$  vértices e raiz  $v$ . Então,  $G$  possui uma arborescência com raiz em  $v$  e mais  $k \geq 0$  componentes conexas, cada uma contendo um único ciclo orientado.*

Demonstração: Temos dois casos para analisar: quando  $G$  é conexo e quando  $G$  possui  $k > 1$  componentes conexas. Se  $G$  é conexo então  $G$  é uma arborescência pois, do contrário, possuirá um ciclo e, nesse caso, algum vértice  $u$  do ciclo terá  $\text{grau}_{in} > 1$ , o que não pode ocorrer pela Definição 3.4.

No segundo caso,  $G$  possui as componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$ , com  $k > 1$ . Como  $G$  é um spreg com raiz  $v$ , uma dessas componentes conexas possui o vértice  $v$ . Sem perda de generalidade, diremos que a componente conexa  $G_1$  possui o vértice  $v$ . Aplicando os

mesmos argumentos do parágrafo anterior, concluímos que  $G_1$  é uma arborescência com raiz em  $v$ .

Agora devemos mostrar que cada componente conexa  $G_2, \dots, G_k$  é formada por um único ciclo orientado. Seja  $G'(V', E')$  uma componente conexa qualquer de  $G$ , exceto  $G_1$ . Sabemos que  $\text{grau}_{in}(v') = 1, \forall v' \in V'$ . Suponhamos que não há ciclos orientados em  $G'$ . Desconsiderando a orientação de  $G'$ , temos que ele pode ter um ciclo não orientado ou ser uma árvore, pois é conexo. No caso que  $G'$  tem um ciclo não orientado, teremos  $\text{grau}_{in}(v'') \geq 2$  para algum  $v'' \in V'$  quando voltamos a considerar sua orientação. Chegando a uma contradição com a hipótese  $\text{grau}_{in}(v') = 1, \forall v' \in V'$ . Com essa hipótese, sabemos que cada vez que contamos o grau de entrada de um vértice estamos contando também uma aresta, com isso temos  $|V'| = |E'|$ . Porém, no caso que  $G'$  é uma árvore quando desconsideramos sua orientação, temos que  $|V'| = |E'| + 1$  pelo Lema 2.3. Chegando novamente a uma contradição. Portanto, cada componente conexa  $G_2, \dots, G_k$  é formada por um único ciclo orientado.

Logo,  $G$  possui uma arborescência com raiz em  $v$  e mais  $k \geq 0$  componentes conexas, cada uma contendo um único ciclo orientado. ■

**Definição 3.5.** *Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado. Dizemos que  $G'(V', E')$  é um **spreg gerador** de  $G$  se  $G'$  é um spreg que possui  $V' = V$  e  $E' \subseteq E$ .*

**Proposição 3.3.** *Seja  $G$  um grafo ou multigrafo orientado de  $n$  vértices e  $Sp(G)$  o conjunto dos spregs geradores de  $G$  com raiz  $v_n$ . Então, o número de elementos de  $Sp(G)$  é*

$$|Sp(G)| = \prod_{i=1}^{n-1} \text{grau}_{in}(v_i).$$

Demonstração: Para cada vértice  $v_i, i \neq n$ , seja  $E_{v_i}, i = 1, 2, \dots, n-1$ , o conjunto das arestas orientadas que chegam em  $v_i$ . O número de elementos em  $E_{v_i}$  é  $\text{grau}_{in}(v_i)$ . Um spreg é obtido escolhendo-se uma aresta em cada um dos conjuntos  $E_{v_i}, i \neq n$ , havendo  $\text{grau}_{in}(v_i)$  possibilidades de escolha em cada conjunto. Portanto, o número total de spregs geradores é

$$|Sp(G)| = \prod_{i=1}^{n-1} \text{grau}_{in}(v_i).$$

Note que o número de arestas do spreg gerador é  $n-1$ . ■

**Exemplo 3.3.** A Figura 19 mostra um multigrafo orientado.

Calcularemos o número de spregs geradores do multigrafo acima com raiz em  $v_4$ .

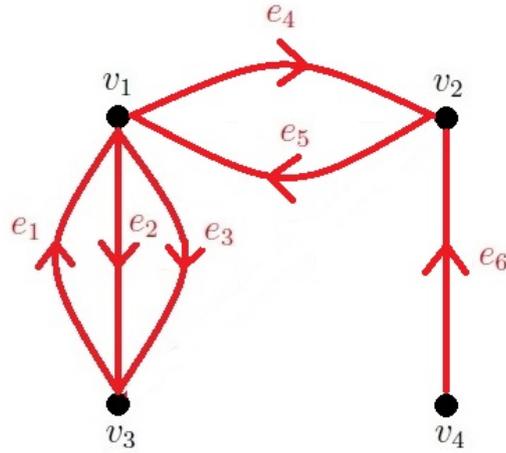


Figura 19 – Multigrafo orientado 2

Temos  $\text{grau}_{in}(v_1) = 2$ ,  $\text{grau}_{in}(v_2) = 2$  e  $\text{grau}_{in}(v_3) = 2$ . Segundo a Proposição 3.3, temos

$$\begin{aligned} |Sp(G)| &= \prod_{i=1}^{4-1} \text{grau}_{in}(v_i) \\ &= (\text{grau}_{in}(v_1)) \cdot (\text{grau}_{in}(v_2)) \cdot (\text{grau}_{in}(v_3)) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

A Figura 20 mostra os oito spregs geradores com raiz em  $v_4$  do multigrafo da Figura 19.

A seguir, apresentamos a definição de matriz laplaciana para grafos e multigrafos orientados, que será utilizada no decorrer deste capítulo. Destacamos que a Definição 2.5 não será mais considerada, pois se refere a grafos e multigrafos não orientados.

**Definição 3.6.** *Seja  $G(V, E)$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , um grafo ou multigrafo orientado e  $m_{ij}$ ,  $m_{ij} \geq 0$ , o número de arestas que saem de  $v_i$  e chegam em  $v_j$ . A **matriz laplaciana** de  $G$  é a matriz quadrada  $L = (L_{ij})$ , de ordem  $n$ , dada como segue:*

$$L_{ij} = \begin{cases} \text{grau}_{in}(v_j), & \text{se } i = j; \\ -m_{ij}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado com  $n$  vértices. Escolha um vértice qualquer de  $G$  para ser o vértice raiz. Denote os vértices de  $G$  por  $v_1, \dots, v_n$ , sendo  $v_n$  o vértice escolhido. Seja  $\mathcal{L}$  a matriz obtida da exclusão da  $n$ -ésima linha e  $n$ -ésima coluna da matriz laplaciana  $L$  de  $G$ . Portanto,  $\mathcal{L}$  é uma matriz de ordem  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

De acordo com a Definição 1.26, temos que

$$\det \mathcal{L} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathcal{L}_\sigma,$$

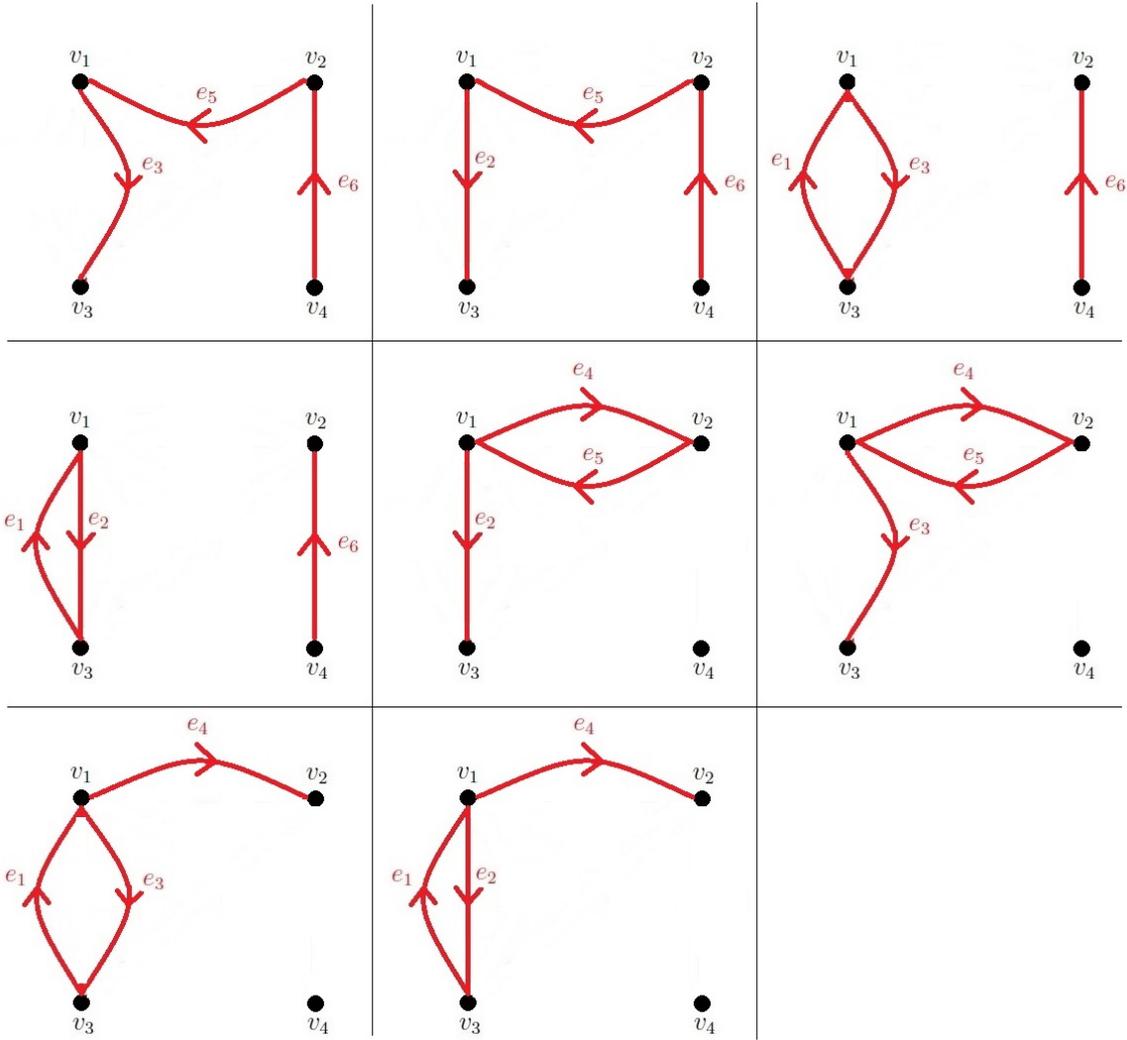


Figura 20 – Spregs geradores

$$\mathcal{L}_\sigma := s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)}, \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{L}_\sigma$  é o termo correspondente à permutação  $\sigma \in S_{n-1}$  na expansão de  $\det \mathcal{L}$ . Portanto, como  $j = 1, \dots, n-1$ , segue que  $\mathcal{L}_{j\sigma(j)} = L_{j\sigma(j)}$  e

$$\mathcal{L}_\sigma = s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} L_{j\sigma(j)}.$$

A seguir, consideramos  $\mathcal{L}_\sigma$  nos casos em que a permutação  $\sigma$  é a permutação identidade, ou possui uma, ou mais de uma, permutação cíclica em sua decomposição única como um produto de permutações cíclicas.

**Caso 1.**  $\sigma = Id$ . Nesse caso,  $s(\sigma) = +1, \sigma(j) = j$  e

$$\mathcal{L}_\sigma = \prod_{j=1}^{n-1} L_{jj} = \prod_{j=1}^{n-1} \text{grau}_{in}(v_j) = |Sp(G)|.$$

**Caso 2.**  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ . Nesse caso,  $s(\sigma) = (-1)^{l-1}$  e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\sigma &= (-1)^{l-1} \prod_{j=1}^{n-1} L_{j\sigma(j)} \\
 &= (-1)^{l-1} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} L_{jj} \prod_{k=1}^l L_{i_k i_{k+1}} \\
 &= (-1)^{l-1} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^l (-m_{i_k i_{k+1}}) \\
 &= (-1)^{2l-1} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^l m_{i_k i_{k+1}} \\
 &= (-1) \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^l m_{i_k i_{k+1}}. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Associemos à permutação  $\sigma$  a seguinte sequência de vértices:

$$C(\sigma) = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_l}, v_{i_1}).$$

Suponha que  $m_{i_k i_{k+1}} \geq 1$ , para todo  $k = 1, \dots, l$  e  $i_{l+1} = i_1$ . Então, a sequência  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$  corresponde a ciclos orientados em  $G$ , pelo menos um, formados com a mesma sequência de vértices  $C(\sigma)$  escolhendo-se para cada par de vértices  $v_{i_k}$  e  $v_{i_{k+1}}$  uma das  $m_{i_k i_{k+1}}$  arestas que os liga. Veja a Figura 21.

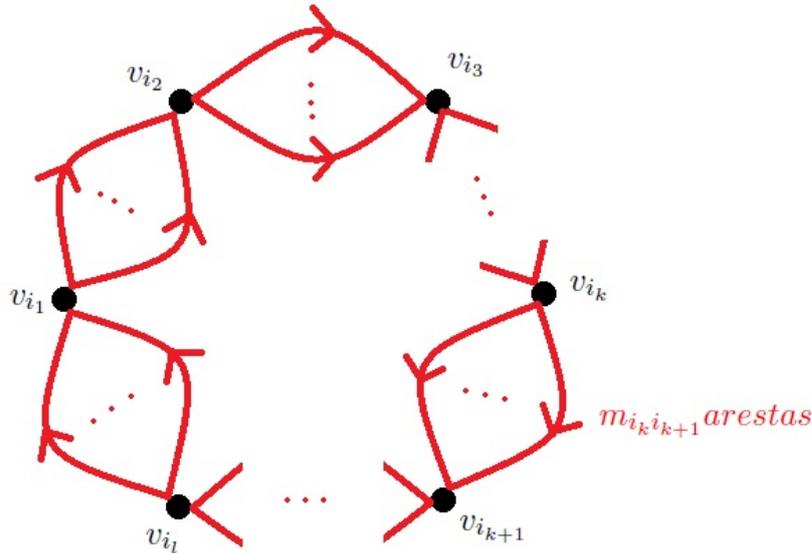


Figura 21 – Representação do Caso 2

Portanto, o segundo produtório da Equação 3.2 corresponde ao número de ciclos orientados em  $G$  com os vértices da sequência  $C(\sigma)$ .

Se não houver pelo menos uma aresta ligando qualquer par dos vértices adjacentes em  $C(\sigma)$ , ou seja,  $m_{i_k i_{k+1}} = 0$ , para algum  $k$ , então  $C(\sigma)$  não corresponde a um ciclo orientado em  $G$  e o termo  $L_\sigma$  em questão será igual a zero e não contribuirá para  $\det \mathcal{L}$ .

O primeiro produtório da Equação 3.2 conta o número de escolhas possíveis de predecessores para o vértices de  $G$  que não fazem parte de  $C_\sigma$ .

Portanto, no Caso 2,  $|\mathcal{L}_\sigma|$  é o número de spregs de  $G$  que contêm um ciclo orientado.

**Caso 3.**  $\sigma = (i_{1,1}, i_{1,2}, \dots, i_{1,l_1})(i_{2,1}, i_{2,2}, \dots, i_{2,l_2})$ . Nesse caso,  $s(\sigma) = (-1)^{l_1+l_2-2}$ , e

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\sigma &= (-1)^{l_1+l_2-2} \prod_{j=1}^{n-1} L_{j\sigma(j)} \\
 &= (-1)^{l_1+l_2-2} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} L_{jj} \prod_{k=1}^{l_1} L_{i_{1,k}i_{1,k+1}} \prod_{k=1}^{l_2} L_{i_{2,k}i_{2,k+1}} \\
 &= (-1)^{l_1+l_2-2} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^{l_1} (-m_{i_{1,k}i_{1,k+1}}) \prod_{k=1}^{l_2} (-m_{i_{2,k}i_{2,k+1}}) \\
 &= (-1)^{2l_1+2l_2-2} \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^{l_1} m_{i_{1,k}i_{1,k+1}} \prod_{k=1}^{l_2} m_{i_{2,k}i_{2,k+1}} \\
 &= \prod_{j \in \text{fix}(\sigma)} \text{grau}_{in}(v_j) \prod_{k=1}^{l_1} m_{i_{1,k}i_{1,k+1}} \prod_{k=1}^{l_2} m_{i_{2,k}i_{2,k+1}}. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Os produtórios da Equação 3.3 podem ser interpretados da mesma forma que no caso anterior. O primeiro conta o número de escolhas possíveis de predecessores para os vértices de  $G$  que não fazem parte das sequências de vértices  $C_1$  e  $C_2$  associadas às permutações cíclicas disjuntas de  $\sigma$ . Esses ciclos corresponderão a ciclos orientados disjuntos de  $G$ , se  $m_{i_{1,k}i_{1,k+1}} \geq 1$  e  $m_{i_{2,k}i_{2,k+1}} \geq 1$ , para todo  $k$ . Nesse caso, o segundo produtório conta o número de ciclos orientados formados com os vértices da sequência  $C_1$  e o terceiro produtório conta o número de ciclos orientados formados com os vértices da sequência  $C_2$ .

Assim, no Caso 3,  $|\mathcal{L}_\sigma|$  é o número de spregs de  $G$  que contêm dois ciclos orientados disjuntos. Se  $C_1$  e  $C_2$  não forem ciclos orientados de  $G$ , ou seja, quando existirem vértices adjacentes em  $C_1$  ou em  $C_2$  não ligados por uma aresta, então  $\mathcal{L}_\sigma = 0$ .

É imediato agora a generalização para o caso em que  $\sigma$  é o produto de um número arbitrário de permutações cíclicas disjuntas. O resultado final é o seguinte:

**Lema 3.1.** *Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado com  $n$  vértices. Escolha um vértice qualquer de  $G$  para ser o vértice raiz. Enumere os vértices de  $G$  tal que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , sendo  $v_n$  o vértice escolhido como raiz. Seja  $m_{ab} \geq 0$  o número de arestas de  $v_a$  a  $v_b$ , neste sentido. Seja  $\mathcal{L}$  a matriz de ordem  $(n-1) \times (n-1)$  obtida eliminando-se a  $n$ -ésima linha e  $n$ -ésima coluna de  $L$ , a matriz laplaciana de  $G$ . Seja  $S_{n-1}$  o grupo das permutações  $\sigma$  do conjunto  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ . Temos que*

$$\det \mathcal{L} = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathcal{L}_\sigma.$$

Se  $\sigma = Id$ , então  $\mathcal{L}_\sigma = |Sp(G)|$ . Suponha, agora, que  $\sigma$  é o produto de  $k > 0$  permutações cíclicas disjuntas, isto é,

$$\sigma = (i_{1,1}, i_{1,2}, \dots, i_{1,l_1}) \cdots (i_{k,1}, i_{k,2}, \dots, i_{k,l_k}).$$

Seja  $C_\sigma$  a união dos ciclos  $C_j, j = 1, \dots, k$ , associados às permutações cíclicas disjuntas de  $\sigma$ ,

$$C_\sigma = \bigcup_{j=1}^k C_j.$$

Se  $C_j \subseteq G$ , isto é,  $C_j$  corresponde a um ciclo orientado em  $G$ , e  $fix(\sigma) \neq \emptyset$ , então

$$\mathcal{L}_\sigma = (-1)^k \prod_{j \in fix(\sigma)} grau_{in}(v_j) \prod_{j=1}^{l_1} m_{i_{1,j}, i_{1,j+1}} \cdots \prod_{j=1}^{l_k} m_{i_{k,j}, i_{k,j+1}}.$$

Se  $C_j \subseteq G$  e  $fix(\sigma) = \emptyset$ , então

$$\mathcal{L}_\sigma = (-1)^k \prod_{j=1}^{l_1} m_{i_{1,j}, i_{1,j+1}} \cdots \prod_{j=1}^{l_k} m_{i_{k,j}, i_{k,j+1}}.$$

Se  $C_j \not\subseteq G$ , isto é,  $C_j$  não corresponde a um ciclo orientado de  $G$ , então  $\mathcal{L}_\sigma = 0$ . Além disso,  $|\mathcal{L}_\sigma|$  é igual ao número de spreps contendo  $C_\sigma$ .

**Teorema 3.1** (Teorema da Matriz-Árvore de Tutte, 1948). *Seja  $G(V, E)$  um grafo ou multigrafo orientado com  $n$  vértices. Escolha um vértice qualquer de  $G$  para ser o vértice raiz. Enumere os vértices de  $G$  tal que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , sendo  $v_n$  o vértice escolhido como raiz. O número de arborescências geradoras de  $G$  com raiz no vértice escolhido  $v_n$  é*

$$N = \det \mathcal{L}.$$

Demonstração: Seja  $U$  o conjunto de todos os spreps geradores com raiz  $v_n$  e  $U_j, j = 1, \dots, M$ , o subconjunto de  $U$  dos spreps que contêm o ciclo  $C_j$ . Seja  $\mathcal{A}$  o subconjunto de  $U$  de todas as arborescências com raiz em  $v_n$ . Portanto,

$$U = \mathcal{A} \cup U_1 \cup \cdots \cup U_M.$$

Como  $\mathcal{A} \cap U_j = \emptyset$ , para todo  $j$ , temos

$$|U| = |\mathcal{A}| + \left| \bigcup_{j=1}^M U_j \right|.$$

Segue que

$$|\mathcal{A}| = |U| - \left| \bigcup_{j=1}^M U_j \right|. \quad (3.4)$$

Pela Proposição 3.3, sabemos que

$$|U| = \prod_{j=1}^{n-1} grau_{in}(v_j). \quad (3.5)$$

O segundo termo da Equação 3.4 pode ser analisado mediante o Princípio de Inclusão-Exclusão (PIE). Portanto, aplicando o Teorema 1.3 na Equação 3.4, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |U| - \sum_{I \subseteq \{1, \dots, M\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{j \in I} U_j \right| \\ &= |U| + \sum_{I \subseteq \{1, \dots, M\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{j \in I} U_j \right|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pela Proposição 3.2, sabemos que se os spregs possuírem ciclos, então cada ciclo pertencerá a uma componente conexa diversa. Com isso, sabemos que os ciclos que os spregs contêm são disjuntos entre si. Portanto, teremos  $U_j \cap U_k = \emptyset$  sempre que  $C_j \cap C_k \neq \emptyset$ . Dessa forma, podemos considerar a somatória da Equação 3.6 apenas sobre os ciclos orientados disjuntos dois a dois, tal que

$$|\mathcal{A}| = |U| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, M\}, I \neq \emptyset \\ C_j \cap C_k = \emptyset, \forall j, k \in I}} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{j \in I} U_j \right|. \quad (3.7)$$

Da Equação 3.7, sabemos que  $\left| \bigcap_{j \in I} U_j \right|$  corresponde ao número de spregs que contêm a união de ciclos orientados formados por  $\bigcup_{j \in I} C_j$ . Aplicando o Lema 3.1, temos

$$\left| \bigcap_{j \in I} U_j \right| = |\mathcal{L}_\sigma|. \quad (3.8)$$

Aplicando a Equação 3.1 na Equação 3.8, obtemos

$$\left| \bigcap_{j \in I} U_j \right| = \left| \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)} \right|. \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação 3.9 na Equação 3.7 e depois aplicando o Lema 3.1 juntamente com a Equação 3.1, temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}| &= |U| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, M\}, I \neq \emptyset \\ C_j \cap C_k = \emptyset, \forall j, k \in I}} (-1)^{|I|} \left| \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)} \right| \\ &= |U| + \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, M\}, I \neq \emptyset \\ C_j \cap C_k = \emptyset, \forall j, k \in I}} s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na Equação 3.10, a somatória é realizada sobre todas as possíveis coleções de ciclos disjuntos. Pela Proposição 1.3, sabemos que a somatória não é realizada apenas sobre as permutações identidades. Com isso, temos

$$|\mathcal{A}| = |U| + \sum_{\sigma \neq id} s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)}. \quad (3.11)$$

Substituindo a Equação 3.5 na Equação 3.11, temos

$$|\mathcal{A}| = \prod_{j=1}^{n-1} \text{grau}_{in}(v_j) + \sum_{\sigma \neq id} s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)}. \quad (3.12)$$

Sabemos que a somatória da Equação 3.12 não é considerada apenas sobre as permutações identidades. Porém, se  $\sigma$  fosse igual a uma permutação identidade, teríamos que  $s(\sigma) = 1$  e o produtório dentro da somatória da equação corresponderia a

$$\prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma(j)} = \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{jj} = \prod_{j=1}^{n-1} \text{grau}_{in}(v_j).$$

Portanto, podemos reescrever a Equação 3.12 da seguinte forma:

$$|\mathcal{A}| = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} s(\sigma) \prod_{j=1}^{n-1} \mathcal{L}_{j\sigma_I(j)}.$$

Pela Definição 1.26, temos que  $|\mathcal{A}| = \det(\mathcal{L})$ . Logo, o número de arborescências geradoras de  $G$  com raiz no vértice escolhido  $v_n$  é  $N = \det \mathcal{L}$ . ■

Para calcularmos o número de arborescências geradoras que um grafo ou multigrafo orientado possui, basta aplicarmos o Teorema 3.1 em todos os vértices e somarmos os valores obtidos para cada vértice. Portanto, podemos afirmar que o Teorema 3.1 nos fornece uma fórmula que permite calcular o número de arborescências geradoras de grafos e multigrafos orientados. Essa fórmula nos diz que o número de arborescências geradoras com raiz em  $v_j$  de um grafo ou multigrafo orientado é igual ao valor do determinante da matriz laplaciana do grafo, excluindo sua  $j$ -ésima linha e coluna.

**Exemplo 3.4.** Calcularemos o número de arborescências geradoras do grafo da Figura 22 com raiz em  $v_3$ .

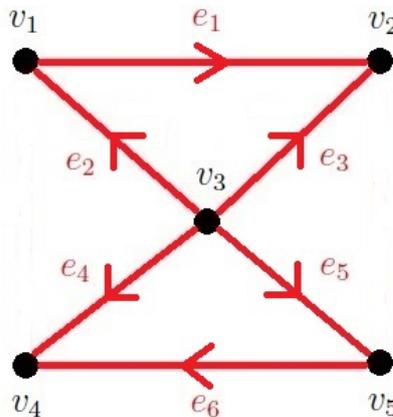


Figura 22 – Grafo orientado 2

A matriz laplaciana desse grafo é igual a

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e  $\det(\mathcal{L}) = 4$ .

Pelo Teorema 3.1, o número de arborescências geradoras do grafo da Figura 22 com raiz em  $v_3$  é igual a 4. A Figura 23 mostra as quatro arborescências geradoras desse grafo.

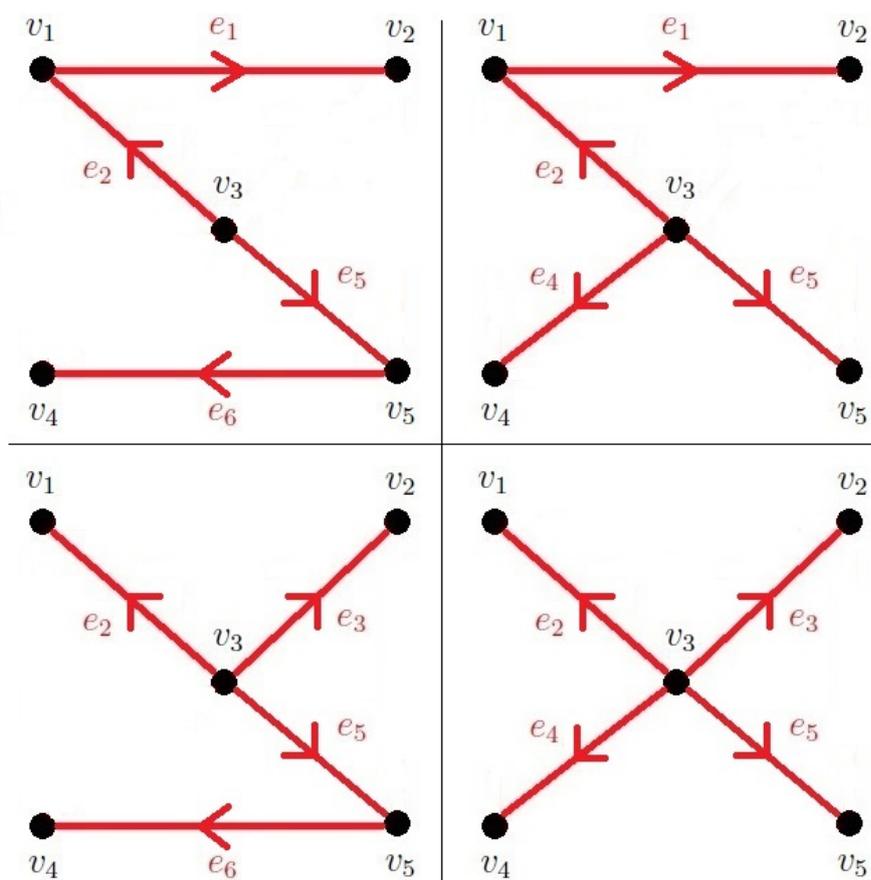


Figura 23 – Árvore geradoras do grafo da Figura 22

**Exemplo 3.5.** Calcularemos o número de arborescências geradoras do multigrafo da Figura 24 com raiz em  $v_4$ .

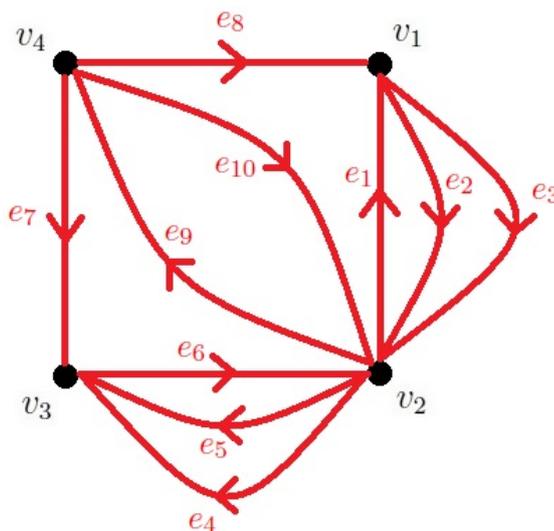


Figura 24 – Multigrafo orientado 3

A matriz laplaciana desse multigrafo é igual a

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e  $\det(\mathcal{L}) = 14$ .

Pelo Teorema 3.1, o número de arborescências geradoras do grafo da Figura 24 com raiz em  $v_4$  é igual a 14. A Figura 25 mostra as quatorze arborescências geradoras desse multigrafo.

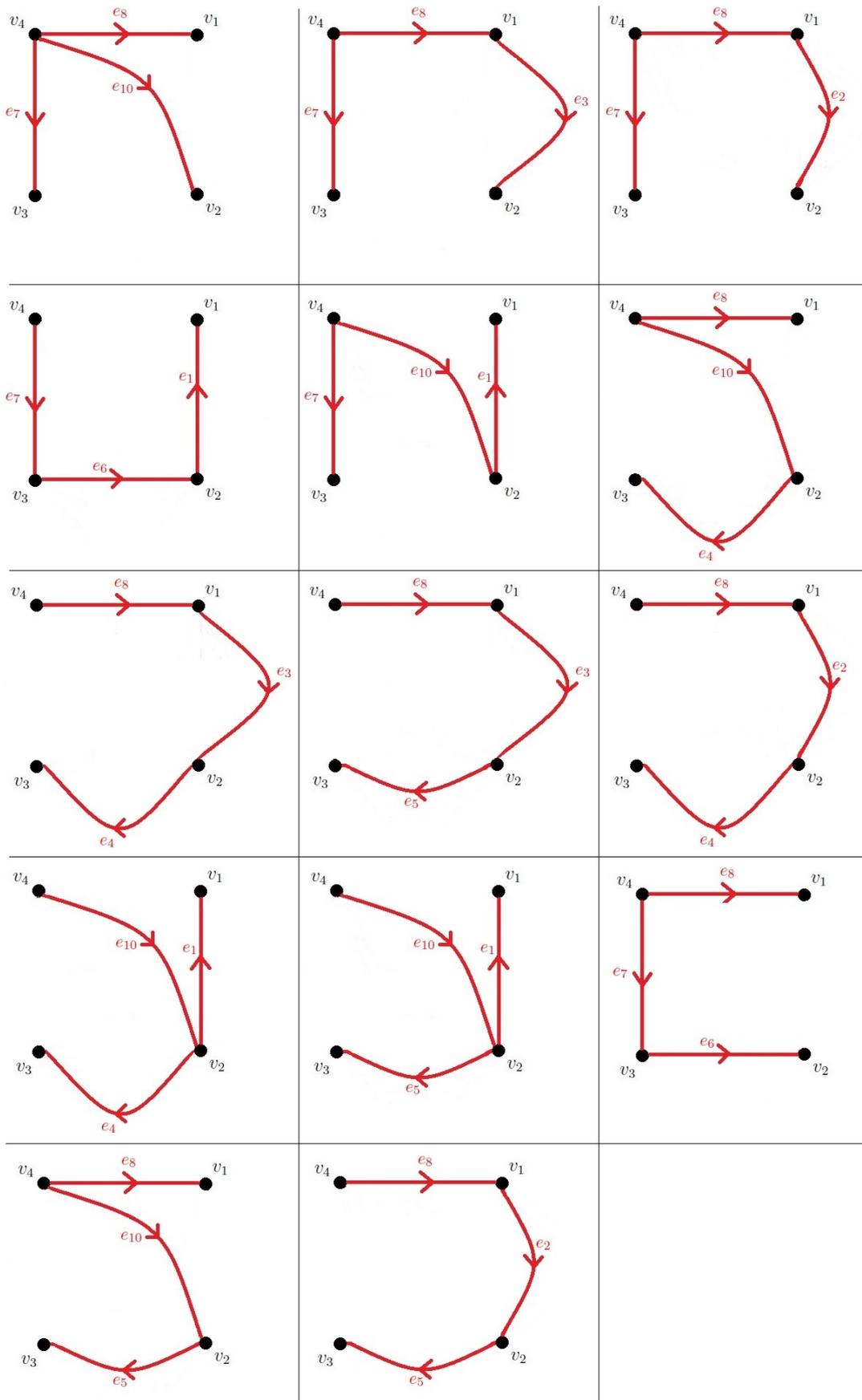


Figura 25 – Árvorescências geradoras do multigrafo da Figura 24

## 4 Breve Histórico da Teoria de Grafos

Este capítulo apresenta um breve histórico sobre a origem da Teoria de Grafos e do Teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff e de Tutte. As referências utilizadas foram [1, p.87], [6, p.7.3], [16, p.1-3], [17, p.3-4], [18], [19], [20] e [21].

No início do século XVIII, um problema envolvendo as sete pontes da antiga cidade alemã de Königsberg (agora pertencente à Rússia e chamada de Kaliningrado) intrigava as pessoas que ali viviam e, em particular, o matemático Carl Gottlieb Ehler (1685-1753). O problema consistia em encontrar um caminho contínuo, saindo de qualquer ponto da cidade, que passasse uma única vez por cada uma das sete pontes. As pontes ligavam duas grandes ilhas no rio Pregel ao resto da cidade. A Figura 26 mostra a disposição das pontes, na época, sobre o rio de Königsberg.

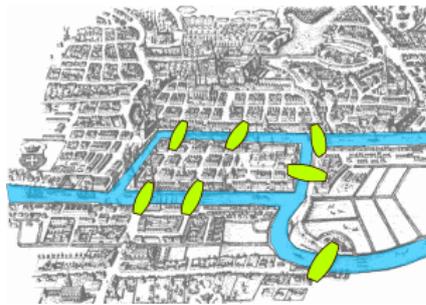


Figura 26 – Sete pontes de Königsberg

Ehler comunicou o problema ao matemático suíço Leonhard Paul Euler (1707-1783, Figura 27), que solucionou o problema em 1736.



Figura 27 – Leonhard Paul Euler

Para analisar o problema, Euler trocou as áreas de terra por pontos (vértices) e as pontes por arcos (arestas), conforme mostra a Figura 28. Olhando para o multigrafo, a solução do problema consistia em encontrar um caminho que saísse de um vértice qualquer,

percorresse cada aresta uma única vez e chegasse ao vértice de origem. O caminho de um grafo que obedece essas condições foi denominado *caminho de Euler* e o grafo ou multigrafo que possui um caminho de Euler foi denominado *grafo de Euler*.

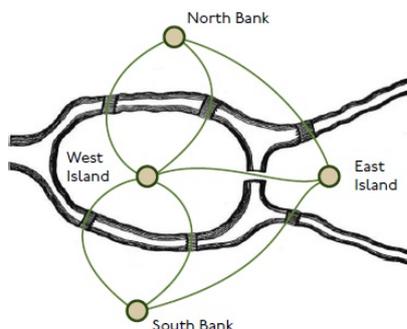


Figura 28 – Multigrafo do problema das sete pontes de Königsberg

Euler demonstrou que um grafo conexo  $G$  é um grafo de Euler se e somente se todos os vértices de  $G$  possuem grau par. Para isto, basta supor que  $G$  possui um caminho de Euler, chamado  $C$ . Para todo vértice  $v \in G$ , cada aresta que tem  $v$  como extremo aparece uma única vez em  $C$ . Porém, o caminho  $C$  entra em  $v$  o mesmo número de vezes que sai (digamos  $s$  vezes). Portanto,  $v$  tem grau  $2s$ , ou seja, grau par.

O multigrafo da Figura 28 possui todos os vértices com grau ímpar. Assim, Euler concluiu que não existia um caminho contínuo que passe uma única vez em cada uma das sete pontes de Königsberg, dando origem a um novo campo de estudos da Matemática, chamado Teoria de Grafos.

No ano de 1847, estudando circuitos elétricos, o físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887, Figura 29) provou um importante resultado da Teoria de Grafos, que ficou conhecido como o Teorema da Matriz-Árvore. Como vimos no Capítulo 2, esse teorema fornece uma fórmula para contar o número de árvores geradoras de grafos e multigrafos não orientados. Após o resultado apresentado por Kirchhoff, a demonstração de um teorema similar para grafos orientados demorou mais de cem anos para aparecer.



Figura 29 – Gustav Robert Kirchhoff

Em 1857, o matemático britânico Arthur Cayley (1821-1895, Figura 30) fez importantes contribuições à Teoria de Grafos com a publicação do artigo *On the Theory of the Analytical Forms Called Trees* [22]. Em seu trabalho, Cayley utilizou pela primeira vez a palavra *árvore*.

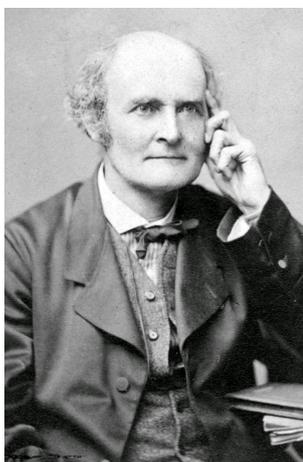


Figura 30 – Arthur Cayley

No ano de 1889, Cayley publicou o artigo *A Theorem on Trees* [23], onde apresentou a *Fórmula de Cayley*, segundo a qual o número de árvores geradoras de um grafo completo com  $n$  vértices é igual a  $n^{n-2}$ . Porém, Cayley não provou a fórmula, apenas obteve as árvores geradoras para grafos completos de até seis vértices e concluiu que ela funcionaria para  $n$  vértices.

Em 1918, o matemático alemão Heinz Prüfer (1896-1934) demonstrou a Fórmula de Cayley [24]. No ano de 1948, o matemático britânico William Thomas Tutte (1917-2002, Figura 31) apresentou um trabalho intitulado *The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles* [25], contendo a demonstração de uma versão do Teorema da Matriz-Árvore para grafos orientados, que ficou conhecido como Teorema de Tutte, como vimos no Capítulo 3.



Figura 31 – William Thomas Tutte

Existem ainda as *árvores geradoras mínimas*, que foram primeiramente estudadas pelo matemático tcheco Otakar Borůvka (1899-1995, Figura 32) em seus trabalhos *On a Certain Minimal Problem* [26] e *A Contribution to the Solution of a Problem on the Economical Construction of Power Networks* [27]. Nesse caso, cada aresta do grafo possui um peso. A árvore geradora que possuir o menor valor obtido da soma dos pesos de suas arestas é chamada de árvore geradora mínima. Ressaltamos que as árvores geradoras mínimas não foram objeto de estudo deste trabalho.



Figura 32 – Otakar Borůvka

Atualmente, uma importante e conhecida aplicação da Teoria de Grafos está presente no algoritmo PageRank, que é utilizado pela empresa Google para posicionar websites entre os resultados de buscas. Nesse algoritmo, há uma imensa arborescência, onde cada vértice corresponde a uma página da web e cada aresta corresponde a uma referência de uma página para outra, obedecendo o sentido da aresta. Dessa forma, a empresa consegue estabelecer um ranking do grau de importância dos websites. Alguns trabalhos sobre o assunto estão disponíveis em [28], [29], [30] e [31].

# Conclusão

Neste trabalho, vimos que grafos e multigrafos são estruturas formadas pelo par  $(V, E)$ , onde  $V$  representa um conjunto de pontos, chamados vértices, e  $E$  representa um conjunto de linhas que ligam esses pontos, chamadas arestas. Em um grafo, cada par de vértices é ligado, no máximo, por uma aresta. Em um multigrafo, há pelo menos um par de vértices ligado por mais de uma aresta. Vimos que os grafos e multigrafos orientados possuem orientação em cada uma de suas arestas e que os grafos e multigrafos não orientados não possuem orientação. No Capítulo 1, estudamos essas e outras definições da Teoria de Grafos.

Muitos grafos e multigrafos não orientados possuem árvores geradoras, que são subgrafos que têm todos os vértices do grafo ou do multigrafo, e são árvores, ou seja, subgrafos conexos e sem ciclos. No Capítulo 2, apresentamos a demonstração do TMA de Kirchhoff, utilizando resultados da Álgebra Linear. Esse teorema afirma que o número de árvores geradoras de grafos e multigrafos não orientados é igual ao valor de qualquer cofator da matriz adjunta da matriz laplaciana do grafo ou multigrafo.

No caso de grafos e multigrafos orientados, muitos possuem arborescências geradoras, que são subgrafos que têm todos os vértices do grafo ou do multigrafo, e são arborescências, ou seja, contêm uma única raiz e são árvores quando desconsideramos a orientação de suas arestas. No Capítulo 3, vimos uma demonstração do TMA de Tutte, utilizando propriedades de determinantes e do grupo de permutações juntamente com o Princípio de Inclusão-Exclusão da Análise Combinatória. Esse teorema afirma que o número de arborescências geradoras de grafos e multigrafos orientados, com raiz em um dos seus vértices, é igual ao valor do determinante da matriz laplaciana, excluídas a linha e a coluna referentes ao vértice escolhido como raiz.

No Capítulo 4, vimos que a Teoria de Grafos surge em 1736, a partir de uma questão levantada pelos habitantes da antiga cidade alemã de Königsberg e resolvida por um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Leonhard Paul Euler. Também vimos que a primeira versão do TMA foi apresentada por Kirchhoff, em 1847.

Por fim, ressaltamos que foi possível apresentar a demonstração do TMA de Kirchhoff e de Tutte com base em conhecimentos adquiridos durante a graduação, juntamente com o estudo de resultados básicos da Teoria de Grafos, que não consta no conteúdo programático do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC no ano de 2016.

# Referências

- [1] ABREU, N.; DEL-VECCHIO, R.; TREVISAN, V.; VINAGRE, C. T. M. **Minicurso Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução**. In: COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 3., 2014, Florianópolis. **Notas**. Florianópolis: UFSC, 2014. Disponível em: <[http://mtm.ufsc.br/coloquiosul/notas\\_minicurso\\_6.pdf](http://mtm.ufsc.br/coloquiosul/notas_minicurso_6.pdf)>. Acesso em: 14 jan. 2015.
- [2] MULDOON, M. **Lecture 1: First Steps in Graph Theory**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/IntroToMatrixTree.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [3] — **Lecture 2: Representation, Sameness and Parts**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/RepresentingGraphs.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [4] — **Lecture 5: Walks, Trails, Paths and Connectedness**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/WalksTrailsAndPaths.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [5] — **Lecture 6: Trees and Forests**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/TreesAndForests.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [6] — **Lecture 7: The Matrix-Tree Theorem**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/IntroToMatrixTree.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [7] — **Lecture 8: Matrix-Tree Ingredients**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/MatrixTreeIngredients.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.
- [8] — **Lecture 9: The Principle of Inclusion/Exclusion**. Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/InclusionExclusion.pdf>>. Acesso em: 14 mar. 2016.

- [uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/InclusionExclusion.pdf](http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/InclusionExclusion.pdf)>.  
Acesso em: 14 mar. 2016.
- [9] — **Lecture 10: Proof of the Matrix-Tree Theorem.** Course on Discrete Mathematics (MATH 20902). Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~mrm/Teaching/DiscreteMaths/LectureNotes/MatrixTreeProof.pdf>>.  
Acesso em: 14 mar. 2016.
- [10] SHOKRANIAN, S. **Álgebra 1.** Rio de Janeiro : Editora Ciência Moderna Ltda., 2010.  
ISBN 978-85-7393-951-4.
- [11] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear.** Editora HARBRA: 3 ed. 1980.  
ISBN 85-294-0202-2.
- [12] KNILL, O. **Cauchy-Binet for Pseudo-Determinants.** Disponível em:  
<<http://www.math.harvard.edu/~knill/graphgeometry/papers/bi.pdf>>.  
Acesso em: 11 mar. 2016.
- [13] MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P. de; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade:** com as soluções dos exercícios. 9. ed. Rio de Janeiro : SBM, 1991.  
ISBN 978-85-85-85818-01-2.
- [14] FRITSCHER, E. **Propriedades espectrais de um grafo.** 2011. 116 f..  
Dissertação (Pós-Graduação em Matemática Aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.
- [15] NIKOLOPOULOS, S. D; PAPADOPOULOS, C. **On the number of spanning trees of  $K_n^m \pm G$  graphs.** Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol. 8, 2006. p. 235-248. Disponível em:  
<<https://hal.inria.fr/hal-00961111/document>>. Acesso em 19 jun. 2016.
- [16] LODDER, J. **Networks and Spanning Trees.** Disponível em:  
<[http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload\\_library/46/Pengelly\\_projects/Project-12/12-networks-trees.pdf](http://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Pengelly_projects/Project-12/12-networks-trees.pdf)>. Acesso em 22 fev. 2016.
- [17] ROSSETTO, D. R. **Algoritmos de Busca de Caminhos em Grafos aplicados aos problemas:** Alinhamento de Proteínas e Quebra-cabeça de 15 peças. 2007. 68 f..  
Dissertação (Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

- [18] UFSC. **Problema das Pontes de Königsberg**. Disponível em:  
<<http://www.inf.ufsc.br/grafos/problema/pontes/grafos.html>>. Acesso em 27 jul. 2016.
- [19] CARL Gottlieb Ehler. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em:  
<[https://en.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Gottlieb\\_Ehler](https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Gottlieb_Ehler)>. Acesso em 25 out. 2016.
- [20] SEVEN Bridges of Königsberg. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em:  
<[https://en.wikipedia.org/wiki/Seven\\_Bridges\\_of\\_Königsberg](https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg)>. Acesso em 25 out. 2016.
- [21] PAGERANK. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Disponível em:  
<<https://pt.wikipedia.org/wiki/PageRank>>. Acesso em 09 dez. 2016.
- [22] CAYLEY, A. **On the Theory of the Analytical Forms Called Trees**, Philosophical Magazine, 4, 13, 1857. p.172-176.
- [23] CAYLEY, A. **A Theorem on Trees**, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 1889. p.376-378.
- [24] PRÜFER, H. **Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen**, Archiv der Mathematik und Physik, 3, 27, 1918. p.142-144.
- [25] TUTTE, W. T. **The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles**, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 44 (4), 1948. p.463-482.
- [26] BORŮVKA, O. **O jistém problému minimálním** (On a Certain Minimal Problem), Práce Moravské Přírodovědecké Společnosti v Brně, 3, 1926. p.37-58.
- [27] BORŮVKA, O. **Příspěvek k řešení otázky ekonomické stavby elektrovedních sítí** (A Contribution to the Solution of a Problem on the Economical Construction of Power Networks), Elektronický obzor, 15, 1926. p.153-154.
- [28] CHUNG, F. ZHAO, W. **PageRank and random walks on graph**. Department of Mathematics, University of California, San Diego. Disponível em:  
<<http://www.math.ucsd.edu/~fan/wp/lov.pdf>>. Acesso em 09 dez. 2016
- [29] CHUNG, F. **The Mathematics of PageRank**. Department of Mathematics, University of California, San Diego. 2008. Disponível em:  
<<http://www.math.ucsd.edu/~fan/talks/jmm1.pdf>>. Acesso em 09 dez. 2016
- [30] KENTER, F. **PageRank, Spectral Graph Theory, and the Matrix Tree Theorem**. Department of Mathematics, University of California, San Diego. 2010.

Disponível em:

<<http://www.math.ucsd.edu/~fan/teach/261/2010/Lecture3.pdf>>. Acesso em 09 dez. 2016

[31] MEYER, C. **Google's PageRank and Beyond**. Department of Mathematics, North Carolina State University. 2007. Disponível em:

<[http://meyer.math.ncsu.edu/Meyer/Talks/CSU\\_11\\_2\\_07.pdf](http://meyer.math.ncsu.edu/Meyer/Talks/CSU_11_2_07.pdf)>. Acesso em 09 dez. 2016