Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Uma caracterização da simplicidade de C*-álgebras de grupóides

Fabio de Sales Casula

Orientador: Prof. Dr. Alcides Buss

Florianópolis

Fevereiro de 2016

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Uma caracterização da simplicidade de C*-álgebras de grupóides

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Fabio de Sales Casula

Florianópolis

Fevereiro de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Casula, Fabio de Sales
Uma caracterização da simplicidade de C*-álgebras de grupóides / Fabio de Sales Casula ; orientador, Alcides Buss - Florianópolis, SC, 2017.
156 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Matemática Pura. 3. Álgebra de Operadores. 4. C*-álgebras. 5. Grupóides. I. Buss, Alcides. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Uma caracterização da simplicidade de C*-álgebras de grupóides

por

Fabio de Sales Casula[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática, Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão

Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Alcides Buss
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Misha Dokuchaev
(USP)

Prof. Dr. Ruy Exel
(UFSC)

Prof. Dr. Eliezer Batista
(UFSC)

Prof. Dr. Jorge Garcés Pérez
(UFSC)

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Florianópolis, Fevereiro de 2016.

À minha família.

Agradecimentos

Depois de seis anos, desde o início de meus estudos em matemática, concluo esta etapa tão importante de minha vida. Muitas pessoas fizeram parte desta jornada e são dignas de agradecimento.

Começo agradecendo meus pais, que sempre tiveram total confiança em minhas capacidades, sempre me incentivaram e me proporcionaram o melhor. Agradeço ao meu irmão, meu melhor amigo, que sempre esteve presente nas horas mais importantes e decisivas. Mesmo sendo mais novo do que eu, de modo que eu devesse passar o exemplo, em muitas situações o contrário ocorreu e sou grato por muitos conselhos e conversas.

Agradeço à minha namorada, Jéssika, que vivenciou todo este mestrado comigo, me apoiando, me aguentando nas horas mais difíceis e celebrando comigo cada uma das conquistas que obtive. Certamente você foi a pessoa mais importante de Florianópolis durante estes anos!

Também agradeço meus amigos, tanto de Porto Alegre quanto de

Florianópolis. São muitos e cada um deles sabe quem é e o quanto foi importante durante esta jornada!

Agradeço aos professores da UFSC, principalmente aos professores Ruy Exel e Alcides Buss. Ambos são exemplos de pesquisadores e me ajudaram muito durante o mestrado. Em particular agradeço ao professor Alcides, meu orientador, que com maestria lidou comigo por estes dois anos. Foi um prazer discutir tanta Matemática com você!

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro e a todos os funcionários do Departamento de Matemática da UFSC.

Resumo

Dado um grupóide G localmente compacto, hausdorff e étale, estudamos representações da *-álgebra $Cc(G)$ a fim de construir as C^*-álgebras cheia e reduzida de G.

Conseguimos caracterizar a simplicidade da C^*-álgebra cheia, a partir de certas propriedades topológicas de G. Finalmente, fazemos o uso do teorema principal para discutir a simplicidade de certas C^*-álgebras bem conhecidas.

Abstract

Given a groupoid G locally compact, hausdorff and étale, we study representations of the *-algebra $Cc(G)$ ir order to build the full and the reduced C^*-algebras.

We accomplish a caracterization of the full C^*-algebras' simplicity, from certain topological properties of G. Finally, we apply the main theorem in order to discuss the simplicity of some well known C^*-algebras.

Conteúdo

Introdução

A essência deste trabalho é, além de caracterizar a simplicidade da C^*-álgebra de um grupóide, estudar grupóides em si e temas relacionados com os mesmos. Um grupóide pode ser definido como uma categoria pequena na qual todo morfismo é isomorfismo e é uma estrutura que permeia várias áreas em Matemática. Para referências sobre o tema, recomendamos [7], de onde nos baseamos para escrever o primeiro capítulo deste trabalho. Citamos ainda o livro de Jean Renault [13] que é uma referência clássica para o assunto.

Como é comum em Álgebra de Operadores, a partir de uma estrutura base tenta-se construir de maneira inteligente C^*-álgebras. Neste caso, o trabalho em questão estará interessado em, a partir de um grupóide topológico com certas propriedades particulares, construir C^*-álgebras destes grupóides. Esta teoria é muito estudada e já se mostrou muito útil, uma vez que várias C^*-álgebras conhecidas acabam sendo isomorfas à C^*-álgebra de um certo grupóide. Por exemplo, considere

H um grupo discreto agindo em um espaço X localmente compacto e Hausdorff. O produto cruzado desta ação é isomorfo à C^*-álgebra do grupóide de transformação de tal ação. Tal resultado é bem conhecido na área de Álgebras de Operadores e pode ser deduzido de resultados mais gerais, tais como o principal resultado em [1]. Outros exemplos clássicos de C^*-álgebras isomorfas à C^*-álgebras de grupóides são as Álgebras de Rotação e Álgebras de Cuntz, que serão discutidas no final deste trabalho.

A classe de grupóides em que estaremos interessados neste trabalho é a dos grupóides étale, localmente compacto e Hausdorff. Iremos trabalhar principalmente com grupóides efetivos e minimais. Grupóides principais e topologicamente principais formam uma classe especial de grupóides efetivos e também serão abordados e estudados. Além destes, trataremos rapidamente de grupóides amenable, uma classe de grupóides muito interessante e que estão bastante relacionados com o teorema principal desta dissertação.

A principal referência deste trabalho é a [10] e o Teorema 5.1 desta referência, citado abaixo, é o teorema base da dissertação.

Teorema. (Teorema 5.1 de [10]) Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Então $C^*(G)$ é simples se e somente se as condições a seguir forem satisfeitas:

1) $C^*(G) \simeq C^*_r(G)$,

2) G topologicamente principal,

3) G minimal.

Ainda na referência [10], o Lema 3.1 da mesma nos afirma que topologicamente principal implica em efetivo e que vale o contrário caso o grupóide satisfaça o segundo axioma de enumerabilidade. Ademais, durante a fase de preparação, conseguimos concluir que poderíamos omitir a hipótese de G satisfazer o segundo axioma de enumerabilidade caso trocássemos topologicamente principal por efetivo e assim o fizemos, ou seja, mostramos o seguinte resultado:

Teorema. (Teorema Principal) Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Então $C^*(G)$ é simples se e somente se as condições a seguir forem satisfeitas:

1) $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$,

2) G efetivo,

3) G minimal.

Além disso, na Seção 4.3, será exposto ao leitor um roteiro indicando que o teorema principal pode ser escrito em termos de grupóides amenable da seguinte forma:

Teorema. (Teorema Principal em termos de Amenabilidade) Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Então $C^*(G)$ é simples se e somente se G for amenable, minimal e efetivo.

Uma vez que o trabalho é baseado em um teorema principal e que tal demonstração é bastante técnica, a seguir é exposto ao leitor uma breve estratégia da demonstração e das construções fundamentais ao longo do texto. Considere G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Definindo $C_c(G)$ o conjunto das funções contínuas $f : G \to \mathbb{C}$ com suporte compacto, o Teorema 1 do trabalho mostra que $C_c(G)$ possui uma estrutura de *-álgebra. A fim de construir as C^*-álgebras cheia e reduzida de G, estudamos representações de $C_c(G)$, ou seja, *-homomorfismos $C_c(G) \to B(H)$, onde H é um espaço de Hilbert. Em particular, na Seção 3.2 construímos a representação regular de $C_c(G)$, denotada por π_λ, e mostramos que esta representação é fiel. Assim, estamos em condições de definir as C^*-álgebras cheia e reduzida. Ambas são completamentos de $C_c(G)$, com respeito às seguintes C^*-normas:

Para $f \in C_c(G)$,

$$\|f\|_u := \sup_{\pi \text{ rep}} \|\pi(f)\|,$$

$$\|f\|_r := \|\pi_\lambda(f)\|,$$

onde $\|.\|_u$ é a norma da C^*-cheia e $\|.\|_r$ é da reduzida.

Tendo construído as C^*-álgebras, estamos em condições de discutir o teorema principal. Ainda no contexto de representações, a Proposição 26 constrói, para cada $u \in G^{(0)}$, uma representação de $C^*(G)$, denotada por $\pi_{[u]}$. Usamos estas representações para estudar a representação soma direta de $\pi_{[u]}$ (para $u \in G^{(0)}$) e concluir que tal representação é injetiva quando restrita à $C_0(G^{(0)})$. Com isto, conseguimos demonstrar a Proposição 27, fundamental para o trabalho. Tal proposição estuda grupóides efetivos e os relaciona com ideais das C^*'s cheia e reduzida. A seguir, após uma série de resultados auxiliares, conseguimos concluir a Proposição 28, que, no mesmo estilo da Proposição 27, relaciona grupóides minimais com ideais das C^*-álgebras.

Uma vez demonstradas as proposições 27 e 28, o teorema fundamental, Teorema 4 no texto, segue de maneira muito simples.

O trabalho contém 4 capítulos, organizados como segue:

No primeiro capítulo, abordamos a teoria elementar de grupóides. Começamos estudando grupóides num contexto algébrico, para posteriormente definir e estudar propriedades de grupóides topólogicos. Damos um foco especial à classe dos grupóides étale, localmente compacto e Hausdorff, que serão abordados por todo o texto. É neste capítulo que provamos inúmeras propriedades a respeito de tais grupóides e que serão fundamentais para as construções feitas nos capítulos 2 e 3. Terminamos o capítulo com exemplos variados, desde os mais básicos até exemplos mais complexos. Em particular, estudamos ações de grupos, grupóides de transformação e mostramos que existe uma equivalência entre certas ações e seus respectivos grupóides de transformação. Este capítulo foi baseado nas referências [9] e [7] para as propriedades de grupóides e os exemplos mais básicos. O exemplo mais elaborado do capítulo e provavelmente do texto, foi retirado de [18].

No segundo capítulo, já estamos interessados basicamente em grupóides topológicos. O objetivo deste capítulo é fazer a construção da *-álgebra $C_c(G)$ para G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Um capítulo pequeno mas técnico, fundamental para definirmos as C^*-álgebras de grupóides, no capítulo seguinte. As referências [9] e [17] foram as mais usadas nesta parte do texto.

O terceiro capítulo consagra a construção das C^*-álgebras cheia e reduzida de um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Ambas C^*-álgebras são completamentos da *-álgebra $C_c(G)$ construída no capítulo anterior. Para podermos definir as normas que serão usadas nos completamentos, estudamos representações de $C_c(G)$. Em particular, estudamos a representação regular de $C_c(G)$, base para a construção da C^*-reduzida, e também mostramos que esta representação é injetiva, fato extremamente útil para justificarmos que a até então C^*-seminorma que dá origem à C^*-cheia é, de fato, uma C^*-norma. Concluímos o capítulo mostrando que $C_0(G^{(0)})$ pode ser vista como sub-C^*-álgebra de $C^*(G)$, fato de grande valia para uma construção no capítulo seguinte. Novamente, as referências [9] e [17] foram as mais usadas neste capítulo.

O quarto e último capítulo trata dos resultados principais deste trabalho. Começamos o capítulo estudando um pouco mais a fundo grupóides. Em particular, grupóides minimais e efetivos são estudados com mais detalhes e são apresentadas proposições que caracterizam convenientemente tais grupóides. Posteriormente apresentamos várias construções importantes por si só, que nos levam a concluir o resultado principal de maneira bem simples, apenas combinando os resultados anteriores. Então abordamos de maneira expositiva o conceito de amenabilidade para grupóides. Citamos vários fatos conhecidos e referências para o tema. Em particular, diante dos fatos citados, conseguiremos reescrever o teorema principal em termos de amenabilidade. Finalmente concluímos o trabalho com uma seção de exemplos e aplicações do teorema principal. Nesta seção, o objetivo é provar a simplicidade ou a não simplicidade de certas C^*-álgebras fazendo uso do teorema principal. Estudamos grupóides discretos e retomamos os assuntos de ações de grupos e grupóides de transformação. Também tratamos de C^*-álgebras de grupos, além das Álgebras de Rotação e de Cuntz. A referência mais usada neste capítulo foi a [10], artigo base para esta dissertação. Muitas outras referências foram usadas para construir a Seção 4.3 e estas são citadas no decorrer da seção.

Os pré-requisitos para esta dissertação são poucos. Consideramos que o leitor conheça um básico de Topologia e de Álgebra de Operadores, no nível da referência [8], por exemplo. Na última seção do trabalho temas mais avançados são abordados. Recomendamos [6], [2] e [15] para temas como C^*-universal, Álgebras de Rotação e Produtos Cruzados.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupóides e Categorias

Este capítulo trata de apresentar definições e propriedades básicas a respeito de grupóides. Em particular, nesta seção, iremos tratar apenas o caso algébrico, além de justificar que podemos estudar grupóides com um viés categórico.

Definição 1. *Sejam G um conjunto e $G^{(2)} \subset G \times G$. Então G é um* grupóide *se existirem aplicações $(\gamma, \eta) \to \gamma\eta$ de $G^{(2)}$ em G e $\gamma \to \gamma^{-1}$ de G em G (chamados, respectivamente, de multiplicação e inversa) tais que:*

(a) (Associatividade) Se (γ, η) e (η, ξ) estão em $G^{(2)}$, então $(\gamma\eta, \xi)$ e $(\gamma, \eta\xi)$ estão em $G^{(2)}$ e vale que $(\gamma\eta)\xi = \gamma(\eta\xi)$.

(b) (Propriedade involutiva (ou involução)) Para qualquer $\gamma \in G$, vale que $(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$.

(c) (Lei do cancelamento) Para qualquer $\gamma \in G$, tem-se que $(\gamma^{-1}, \gamma) \in G^{(2)}$ e se $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, então $\gamma^{-1}(\gamma\eta) = \eta$ e $(\gamma\eta)\eta^{-1} = \gamma$.

O conjunto $G^{(2)}$ é chamado de conjunto dos *pares componíveis*. Um elemento $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$ é dito um par componível e γ^{-1} é dito o inverso de γ.

Definição 2. *Seja G um grupóide. O conjunto dos elementos $\gamma \in G$ tais que $\gamma = \gamma^{-1} = \gamma^2$ é denotado por $G^{(0)}$ e chamado de* espaço de unidades *de G. A função $r : G \to G^{(0)}$ definida por $r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ é chamada de range e a função $s : G \to G^{(0)}$ definida por $s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma$ é chamada de source.*

Para qualquer $\gamma \in G^{(0)}$, definimos $G_\gamma := s^{-1}(\gamma)$ e $G^\gamma = r^{-1}(\gamma)$.

A proposição a seguir mostra algumas propriedades básicas dos conjuntos e mapas definidos acima.

Proposição 1. *Seja G um grupóide. Então vale que:*

(a) Dados $\gamma, \eta \in G$, temos que $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$ se, e somente se $s(\gamma) = r(\eta)$.

(b) Se $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, então $r(\gamma\eta) = r(\gamma)$ e $s(\gamma\eta) = s(\eta)$.

(c) Para qualquer $\gamma \in G$, tem-se que $s(\gamma) = r(\gamma^{-1})$ e $r(\gamma) = s(\gamma^{-1})$.

(d) Se $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, então $(\eta^{-1}, \gamma^{-1}) \in G^{(2)}$ e temos que $(\gamma\eta)^{-1} = \eta^{-1}\gamma^{-1}$.

(e) Para qualquer $\gamma \in G$, tem-se que $s(\gamma)$, $r(\gamma) \in G^{(0)}$. Ademais, r e s são retrações em $G^{(0)}$.

(f) Para qualquer $\gamma \in G$, temos que $(r(\gamma), \gamma), (\gamma, s(\gamma)) \in G^{(2)}$ e vale que $r(\gamma)\gamma = \gamma = \gamma s(\gamma)$.

Demonstração: (a) Sejam $\gamma, \eta \in G$ tais que $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$. A lei do cancelamento garante que $(\gamma^{-1}, \gamma) \in G^{(2)}$. Usando a associatividade, temos que $(\gamma^{-1}\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, de modo que

$$(\gamma^{-1}\gamma)\eta = \gamma^{-1}(\gamma\eta) = \eta,$$

onde a igualdade da direita segue da lei do cancelamento.

Novamente pela lei do cancelamento, temos que $(\eta, \eta^{-1}) \in G^{(2)}$. Assim, podemos escrever

$$\eta\eta^{-1} = ((\gamma^{-1}\gamma)\eta)\eta^{-1} = \gamma^{-1}\gamma,$$

onde a igualdade da direita é novamente justificada pela lei do cancelamento. Portanto, concluimos que $\gamma^{-1}\gamma = \eta\eta^{-1}$, ou seja, $s(\gamma) = r(\eta)$.

Agora suponha que $s(\gamma) = r(\eta)$. Temos que $(\gamma, \gamma^{-1}) \in G^{(2)}$, donde segue que $(\gamma, \gamma^{-1}\gamma) \in G^{(2)}$, usando a associatividade. Por hipótese, $\gamma^{-1}\gamma = \eta\eta^{-1}$, de modo que $(\gamma, \eta\eta^{-1}) \in G^{(2)}$. Analogamente, mostra-se que $(\eta\eta^{-1}, \eta) \in G^{(2)}$. Assim, usando a associatividade, segue que $(\gamma, (\eta\eta^{-1})\eta) \in G^{(2)}$. Mas a lei do cancelamento garante que $(\eta\eta^{-1})\eta = \eta$, donde segue o resultado.

(c) Seja $\gamma \in G$. Usando a involução, temos

$$r(\gamma^{-1}) = \gamma^{-1}(\gamma^{-1})^{-1} = \gamma^{-1}\gamma = s(\gamma).$$

A outra igualdade é análoga.

(b) Se $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, então $\gamma\eta \in G$, de modo que $((\gamma\eta)^{-1}, \gamma\eta) \in G^{(2)}$. Ademais, $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$ também garante que $(\gamma\eta, \eta^{-1}) \in G^{(2)}$. Daí, pela associatividade, temos que $((\gamma\eta)^{-1}, (\gamma\eta)\eta^{-1}) \in G^{(2)}$, ou seja, $((\gamma\eta)^{-1}, \gamma) \in G^{(2)}$, pela lei do cancelamento. Agora, usando o item (a), temos $s((\gamma\eta)^{-1}) = r(\gamma)$. Pelo item (c), temos $s((\gamma\eta)^{-1}) = r(\gamma\eta)$, donde segue o resultado. O outro caso é análogo.

(d) Combinando os itens já demonstrados, temos que, se $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, então $s(\gamma) = r(\eta)$, de modo que $r(\gamma^{-1}) = s(\eta^{-1})$, o que garante que $(\eta^{-1}, \gamma^{-1}) \in G^{(2)}$.

Ademais, $s(\eta) = s(\gamma\eta) = r((\gamma\eta)^{-1})$ garante que $(\eta, (\gamma\eta)^{-1}) \in G^{(2)}$, de modo que $(\eta^{-1}\eta)(\gamma\eta)^{-1} = (\gamma\eta)^{-1}$, pela lei do cancelamento. Por outro lado, usando a associatividade e a lei do cancelamento, obtemos

$$\begin{aligned} \eta^{-1}\gamma^{-1} &= (\eta^{-1}\gamma^{-1}(\gamma\eta))(\gamma\eta)^{-1} \\ &= (\eta^{-1}(\gamma^{-1}(\gamma\eta)))(\gamma\eta)^{-1} = (\eta^{-1}\eta)(\gamma\eta)^{-1}, \end{aligned}$$

donde segue o resultado.

(e) Usando os itens anteriores, temos que, para qualquer $\gamma \in G$,

$$s(\gamma)^{-1} = (\gamma^{-1}\gamma)^{-1} = \gamma^{-1}\gamma = s(\gamma).$$

Além disso, $r(s(\gamma)) = r(s(\gamma)^{-1}) = s(s(\gamma))$, o que garante que $(s(\gamma), s(\gamma)) \in G^{(2)}$. Pela lei do cancelamento, segue que

$$s(\gamma)s(\gamma) = (\gamma^{-1}(\gamma\gamma^{-1}))\gamma = \gamma^{-1}\gamma = s(\gamma),$$

ou seja, $s(\gamma) \in G^{(0)}$. Usando que $r(\gamma) = s(\gamma^{-1})$, segue também que $r(\gamma) \in G^{(0)}$.

Agora, para qualquer $u \in G^{(0)}$, temos que

$$s(u) = u^{-1}u = u^2 = u$$

e

$$r(u) = uu^{-1} = u^2 = u,$$

o que mostra que r e s são retrações em $G^{(0)}$.

(f) Seja $\gamma \in G$. Mais uma vez fazendo o uso dos itens anteriores, temos que

$$s(r(\gamma)) = s(\gamma\gamma^{-1}) = s(\gamma^{-1}) = r(\gamma),$$

o que mostra que $(r(\gamma), \gamma) \in G^{(2)}$. Daí, pela lei do cancelamento, segue que

$$r(\gamma)\gamma = (\gamma\gamma^{-1})\gamma = \gamma.$$

O outro caso é análogo. Fica, portanto, demonstrada a proposição.

■

1.1.1 Grupóides como categorias

Grupóides também podem ser definidos em termos de categorias. Lembramos que uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

(i) uma classe de objetos $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;

(ii) para todo par (u, v) de objetos em $\mathcal{C}$, existe um conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, v)$ de u para v;

(iii) para qualquer objeto w em $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe um único morfismo I_w em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, w)$ chamado morfismo identidade;

(iv) para quaisquer objetos u, v, w em $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe uma função

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, v) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v, w) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, w)$$

$$(f, g) \to g \circ f$$

chamada composição de morfismos, que satisfaz o seguintes axiomas:

(a) para quaisquer objetos u e v, o morfismo identidade I_u satisfaz $f \circ I_u = f$ e $I_u \circ g = g$, para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, v)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v, u)$;

(b) a composição é associativa, ou seja, para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u, v)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(v, w)$ e $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(w, z)$, temos que
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Escrevemos $u \xrightarrow{f} v$ ou $f : u \to v$, para indicar que temos um morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(u,v)$. Ademais, u é denominado por domínio de f e v codomínio de f. A coleção de todos o morfismos é denotado por $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$.

Também lembramos que uma categoria é dita pequena se o $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ e $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ são conjuntos. Ademais, um morfismo $f : u \to v$ é um isomorfismo se existir um morfismo $g : v \to u$ tal que $f \circ g = I_v$ e $g \circ f = I_u$, tal morfismo g é denotado por f^{-1}.

Com isso, estamos em condições de definir um grupóide em termos de categorias:

Definição 3. *Um grupóide é uma categoria pequena na qual todos os morfismos são isomorfismos.*

A definição acima, além de elegante, é muito útil, visto que possibilita uma interpretação geométrica do grupóide. Neste trabalho, usaremos essencialmente a primeira definição, mas, a fim de completude, vamos mostrar que tais definições coincidem e como podemos fazer tal interpretação geométrica.

Seja $\mathcal{G}$ uma categoria pequena na qual todos os morfismos são isomorfismos. Defina $G := \mathrm{Hom}(\mathcal{G})$. É imediato ver que existe uma correspondência biunívoca entre os objetos de uma categoria e os morfismos identidade, ou seja,

$$\{u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})\} \leftrightarrow \{I_u \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}) \,|\, u \in \mathrm{Ob}(\mathcal{G})\}$$

$$u \longleftrightarrow I_u$$

de modo que podemos definir $G^{(0)} := \mathrm{Ob}(\mathcal{G})$ e, via a correspondência, termos que $G^{(0)} \subset G$.

Uma vez que todo morfismo é isomorfismo, podemos definir a inversão em G da maneira óbvia. Ademais, para qualquer morfismo $\gamma : u \to v$, definimos as funções source e range por

$$s : G \to G^{(0)} \, \gamma \mapsto u$$

$$r : G \to G^{(0)} \, \gamma \mapsto v,$$

ou seja, estamos interpretando γ como uma flecha de $u = s(\gamma)$ para $v = r(\gamma)$

$$u = s(\gamma) \xrightarrow{\gamma} r(\gamma) = v$$

Assim, dados quaisquer morfismos $\gamma : v \to w$ e $\eta : u \to v$, a função composição garante que

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "\eta"] \arrow[rr, bend right, "\gamma\circ\eta"'] & v \arrow[r, bend left, "\gamma"] & w \end{tikzcd},$$

onde $v = s(\gamma) = r(\eta)$, o que nos motiva a definir

$$G^{(2)} := \{(\gamma, \eta) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{G}) \mid s(\gamma) = r(\eta)\},$$

de tal forma que a multiplicação em G é definida por

$$G^{(2)} \to G\,(\gamma, \eta) \mapsto \gamma \circ \eta := \gamma\eta.$$

Observamos que, para qualquer morfismo $\gamma : u \to v$, temos $\gamma\gamma^{-1} = I_v$ e $\gamma^{-1}\gamma = I_u$. Daí, usando a correspondência acima, podemos identificar $I_v = v = r(\gamma)$ e $I_u = u = s(\gamma)$. Também é fácil perceber que, novamente via a correspondência, $G^{(0)}$ é exatamente o conjunto dos morfismos γ tais que $\gamma = \gamma^{-1} = \gamma^2$. De fato, é claro que qualquer I_u satisfaz $I_u = {I_u}^{-1} = {I_u}^2$. Por outro lado, dado um morfismo $\gamma : u \to v$ tal que $\gamma = \gamma^{-1} = \gamma^2$, temos $u = v$, visto que $\gamma = \gamma^{-1}$, e $\gamma = \gamma^2$ garante que $\gamma\gamma^{-1} = I_u = \gamma^2\gamma^{-1} = \gamma$, de modo que $\gamma \in G^{(0)}$.

Finalmente, a partir das definições da categoria $\mathcal{G}$, é imediato verificar as outras propriedades restantes para garantir que G é um grupóide, de acordo com a definição 1.

Agora, devemos mostrar que, a partir de um grupóide G fixado, podemos enxergar G como uma categoria pequena $\mathcal{G}$ onde os morfismos são isomorfismos. De fato, defina $\mathrm{Ob}(\mathcal{G}) := G^{(0)}$ e $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}) := G$. Começamos por observar que, uma vez que G é um conjunto, naturalmente a categoria $\mathcal{G}$ será pequena.

Qualquer $\gamma \in G$ é interpretado como $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(s(\gamma), r(\gamma))$, de modo que a multiplicação do grupóide garante a boa definição da função composicão. Mais precisamente, sejam $\gamma, \eta \in G$ tais que $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, ou seja, $s(\gamma) = r(\eta)$. Segue que $\gamma\eta := \xi \in G$ satisfaz $s(\xi) = s(\eta)$ e

$r(\xi) = r(\gamma)$. Assim, a função composição

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(s(\eta), r(\eta)) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(s(\gamma), r(\gamma)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(s(\xi), r(\xi))$$

$$(\eta, \gamma) \to \gamma \circ \eta := \gamma\eta = \xi$$

está bem definida. Ademais, a associatividade do grupóide garante a associatividade da composição dos morfismos.

Também é claro que a inversão do grupóide garante que todo $\gamma \in G$ visto como morfismo será um isomorfismo. Finalmente, vamos construir os morfismos identidade para qualquer $u \in G^{(0)}$. Uma vez que $u = s(u) = r(u)$ e que $G^{(0)} \subset G$, podemos definir I_u sendo exatamente $u \in G$. Daí, é claro que para quaisquer $\gamma, \eta \in G$ tais que $s(\gamma) = u = r(\eta)$, temos que $\gamma \circ u = \gamma u = \gamma s(\gamma) = \gamma$ e $u \circ \eta = u\eta = r(\eta)\eta = \eta$, garantindo a propriedade dos morfismos identidade. Fica assim demonstrada a equivalência entre as definições apresentadas.

1.2 Grupóides Topológicos

Até então, tratamos de grupóides apenas no contexto algébrico. No entanto, podemos muni-los com topologias, enriquecendo bastante sua estrutura. De fato, neste trabalho, estaremos interessados em grupóides com topologia, conhecidos como grupóides topológicos. Mais precisamente:

Definição 4. *Seja G um grupóide com uma estrutura de espaço topológico. Considere $G^{(2)}$ com a topologia induzida da topologia produto e $G^{(0)}$ com a topologia induzida. Então G será dito um grupóide topológico se as aplicações multiplicação e inversa forem contínuas.*

OBS.: Segue diretamente da definiçao anterior que, num grupóide topológico, as funções range e source também serão contínuas.

Vamos agora estudar algumas propriedades e definições básicas dos grupóides topológicos. Para isso, considere G um grupóide topológico localmente compacto e Hausdorff.

Proposição 2. *Os conjuntos $G^{(0)}$ e $G^{(2)}$ são fechados de G e $G \times G$, respectivamente.*

Demonstração: Considere uma net u_i em $G^{(0)}$ convergindo para u em G. Como as funções range e source são contínuas, temos que $r(u_i) \to r(u)$ e $s(u_i) \to s(u)$. Mas $u_i \in G^{(0)}$, de modo que $r(u_i) = s(u_i) = u_i$, garantindo que $u = s(u) = r(u) \in G^{(0)}$, ou seja, $G^{(0)}$ é fechado de G.

Seja agora uma net (γ_i, η_i) em $G^{(2)}$ convergindo para (γ, η) em $G \times G$. Portanto temos que $\gamma_i \to \gamma$ e $\eta_i \to \eta$, o que garante que $s(\gamma_i) \to s(\gamma)$ e $r(\eta_i) \to r(\eta)$. Mas $s(\gamma_i) = r(\eta_i)$, de modo que
$s(\gamma) = r(\eta)$, isto é, $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, como gostaríamos. ■

A fim de justificar mais algumas propriedades relacionadas com grupóides topológicos, vamos usar dois fatos de topologia geral, a saber:

(1) Seja X um espaço topológico. Então um subconjunto A é aberto se, e somente se para qualquer elemento $a \in A$ e uma net x_i convergindo para a, existe um índice i_0 tal que $x_i \in A$ para todo $i_0 \preceq i$ (informalmente, diremos que, nesse caso, $x_i \in A$ para índices suficientemente grandes ou que $x_i \in A$ eventualmente).

(2) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação sobrejetiva e contínua entre espaços topológicos X e Y.

Então f é uma aplicação aberta se, e somente se para qualquer net $(y_i) \in Y$ convergente, digamos, $y_i \to f(x)$, existe uma subnet (y_j) e elementos $(x_j) \in X$ tais que $x_j \to x$ em X e $y_j = f(x_j)$, para todo j.

Proposição 3. *Seja G um grupóide tal que $G^{(0)}$ é um aberto em G. Então para qualquer $g \in G^{(0)}$, temos que $r^{-1}(g)$ e $s^{-1}(g)$ são espaços discretos, ou seja, para qualquer net convergente $h_i \to h$ em $r^{-1}(g)$, temos que $h_i = h$ para índices $i's$ suficientemente grandes (e análogo para $s^{-1}(g)$).*

Demonstração: Temos $h_i \to h$ com $r(h_i) = r(h) = s(h^{-1})$. Segue que $h^{-1}h_i \to h^{-1}h = s(h) \in G^{(0)}$.

Temos que $G^{(0)}$ é aberto, de modo que $h^{-1}h_i \in G^{(0)}$ eventualmente (pelo fato (1) citado acima). Portanto $h^{-1}h_i = s(h^{-1}h_i) = s(h_i) = h_i^{-1}h_i$ para tais índices $i's$.

Pela lei do cancelamento, segue que, novamente para tais índices,

$h = h_i$, garantindo que $r^{-1}(g)$ é discreto. A demonstração para $s^{-1}(g)$ é análoga. ■

1.2.1 O caso Étale

Vamos agora definir e estudar algumas propriedades dos grupóides étale. Esta é uma importante classe de grupóides e grande parte dos teoremas e proposições deste trabalho serão feitas sobre esta classe.

Definição 5. *Um grupóide topológico G é dito* étale *se as funções $r, s : G \to G^{(0)}$ forem homeomorfismos locais, ou seja, para qualquer $g \in G$, existe uma vizinhança aberta U de G tal que $s(U)$ é aberto e $s|_U : U \to s(U)$ é homeomorfismo. Em particular, segue que r e s são aplicações abertas.*

Proposição 4. *Suponha que G é um grupóide topológico tal que as funções range e source são aplicações abertas. (Em particular, se G é étale, já que todo homeomorfismo local é uma aplicação aberta.) Então a aplicação multiplicação $G^{(2)} \to G$ também é aberta.*

Demonstração: Considere $A, B \subset G$ abertos. Vamos mostrar que

$$AB := \{\alpha\beta | (\alpha, \beta) \in G^{(2)}, \alpha \in A, \beta \in B\}$$

é aberto. Considere um elemento $\alpha\beta \in AB$ e uma net $y_i \to \alpha\beta$. Basta mostrar que $y_i \in AB$ eventualmente, como já foi discutido. Temos que

$r(y_i) \to r(\alpha\beta) \in r(A)$. Como a função range é aplicação aberta, segue (da caracterizaçao de aplicação aberta anteriormente citada) que, passando a uma subnet se necessário, existe uma net α_i em A tal que $\alpha_i \to \alpha$ e $r(\alpha_i) = r(y_i)$. Portanto temos que $(\alpha_i^{-1}, y_i) \in G^{(2)}$ e a net $\alpha_i^{-1} y_i \to \beta \in B$. Mas como B é aberto, segue que $\alpha_i^{-1} y_i \in B$ eventualmente, de modo que $\alpha_i \alpha_i^{-1} y_i = y_i \in AB$ eventualmente, como gostaríamos. ■

Definição 6. *Seja G um grupóide topológico. Um subconjunto $U \subset G$ é dito uma bisseção se as restrições $r|_U, s|_U$ das funções range e source a U forem homeomorfismos sobre a imagem.*

Proposição 5. *Se G for étale, então o conjunto* $\mathrm{Bis}(G)$ *das bisseções abertas forma uma base para a topologia de G.*

Demonstração: Considere A um aberto de G e $x \in A$. Como G é étale, existem vizinhanças abertas U_1 e U_2 de x tais que as funções range e source são homeomorfismos em tais respectivas vizinhanças. Assim, defina $V := A \cap U_1 \cap U_2$. Segue que V é aberto, $x \in V \subset A$ e que as funções range e source são homeomorfismos em V, ou seja, $V \in \mathrm{Bis}(G)$. Isso garante que $\mathrm{Bis}(G)$ é base para a topologia de G.

■

Corolário 1. *Se G é étale, então é $G^{(0)}$ é aberto em G.*

Demonstração: Basta observar que para qualquer $u \in G^{(0)}$, existe

$g \in G$ tal que $r(g) = u$ e que, para tal g, existe uma bisseção aberta U garantindo que $r(U)$ seja um aberto contendo u. Assim, segue que $G^{(0)}$ é escrito como união de tais abertos.

■

Seguindo com a notação da proposição anterior, vamos provar dois resultados importantes a respeito da estrutura de $\mathrm{Bis}(G)$, que serão fundamentais adiante.

Proposição 6. *Seja G étale. Temos que:*

(1) *Se $U \in \mathrm{Bis}(G)$, então $U^{-1} := \{\gamma^{-1} | \gamma \in U\} \in \mathrm{Bis}(G)$.*

(2) *Se $U, V \in \mathrm{Bis}(G)$, então*

$$UV := \{\gamma\eta | (\gamma, \eta) \in U \times V \cap G^{(2)} \in \mathrm{Bis}(G) \times \mathrm{Bis}(G)\} = p(U \times V \cap G^{(2)}),$$

onde p é a multiplicação do grupóide. Ademais, $UV \in \mathrm{Bis}(G)$.

Demonstração: Para demonstrar (1), basta observar que $r|_{U^{-1}} : U^{-1} \to r(U^{-1}) = s(U)$ é precisamente a composição $s \circ \iota$, onde $\iota : U^{-1} \to U$ é a inversão em G. Como a função source é um homeomorfismo em U e a função inversão é um homeomorfismo (já que é bijetivo, contínuo e com inversa $\iota^{-1} = \iota$, pois para todo $\gamma \in G, (\gamma^{-1})^{-1} = \gamma$), temos que U^{-1} é aberto e $r|_{U^{-1}}$ é homeo na imagem. Analogamente, $s|_{U^{-1}}$ será homeo sobre a imagem, o que demonstra (1).

Agora considere U e V bisseções abertas. Vamos mostrar que UV é também uma bisseção aberta.

Antes de mais nada, observemos que, sem perda de generalidade, podemos considerar que $s(U) = r(V)$. De fato, defina os abertos $E := s(U) \cap r(V), U' := s|_U{}^{-1}(E)$ e $V' := r|_V{}^{-1}(E)$. Como U e V são bisseções abertas, segue que $E = s(U') = r(V')$ e que U' e V' são também bisseções abertas.

Ademais, temos que $U \times V \cap G^{(2)} = U' \times V' \cap G^{(2)}$, pois se $(g, h) \in U \times V \cap G^{(2)}$, então $s(g) = r(h) \in E$, de modo que existem $g' \in U', h' \in V'$ tais que $s(g) = s(g')$ e $r(h) = r(h')$, mas, como as funções range e source são homeomorfismos em U e V, segue que $g = g', h = h'$. Portanto temos que $UV = U'V'$ e assim podemos considerar as bisseções abertas U e V tendo $s(U) = r(V)$.

Agora defina por ϕ a composição $U \to s(U) = r(V) \to V$, ou seja, $\phi := r|_V{}^{-1} \circ s|_U$ e então considere $f : U \to U \times V \cap G^{(2)}, x \mapsto (x, \phi(x))$. É claro que ϕ é homeomorfismo e que f é contínua e injetiva. Ademais, f é sobrejetiva, pois para qualquer $(g, h) \in U \times V \cap G^{(2)}$, temos que $s(g) = r(h)$ garante que $h = r|_V{}^{-1} \circ s|_U(g) = \phi(g)$. Denotando por π_1 a projeção de $U \times V \cap G^{(2)}$ em U, observamos que π_1 é injetiva e sobrejetiva em U.

De fato, como $\pi_1 \circ f = Id_U$ e f sobrejetiva, segue que π_1 é injetiva. Ademais, para qualquer $u \in U$, temos que $s(u) \in s(U) = r(V)$, de modo que $s(u) = r(h)$, para certo $h \in V$, logo existe $(u, h) \in U \times V \cap G^{(2)}$ que garante a sobrejetividade de π_1 em U. Com isso, podemos concluir que, como π_1 é contínua, f e π_1 são homeomorfismos.

Agora considere $p : U \times V \cap G^{(2)} \to UV := W$ e observe que para qualquer $(g, h) \in U \times V \cap G^{(2)}$, vale que $r(gh) = r(g)$, de modo que vale a seguinte igualdade:

$$r|_W \circ p = r|_U \circ \pi_1. \tag{1.1}$$

Do que fizemos antes, sabemos que $r|_U \circ \pi_1$ é homeomorfismo. Ademais, como p é sobrejetora, segue que $r|_W$ é injetora (usando a igualdade (1.1) e o fato de $r|_U \circ \pi_1$ ser homeomorfismo) e portanto bijeção sobre $r(W)$. Também observamos que p é injetora. De fato, se $p(x) = p(y)$, então novamente via (1.1) segue que $r|_U \circ \pi_1(x) = r|_U \circ \pi_1(y)$, o que garante que $x = y$. Mais uma vez fazendo o uso de (1.1), concluimos que $r(W) = r(U)$ é um conjunto aberto. Finalmente, como $r|_U \circ \pi_1$ é homeomorfismo e $r|_W, p$ são bijeções contínuas, segue que são também homeomorfismos.

Uma vez que $U \times V \cap G^{(2)}$ é aberto, segue que W é aberto. Analogamente, conseguimos mostrar que $s|_W$ é homeomorfismo sobre a imagem, o que demonstra (2), como gostaríamos.

■

1.3 Exemplos

1.3.1 Exemplos canônicos

Exemplo 1. *Qualquer conjunto X pode ser visto como um grupóide de modo trivial. De fato, podemos enxergar qualquer ponto $x \in X$ como uma flecha "trivial":*

$$x \xrightarrow{x} x$$

Assim, as função range e source, bem como a inversão no grupóide são definidas como sendo a identidade em X, ou seja, $s = r = \iota = Id_X$, onde $\iota : X \to X$ denota a inversão. Também define-se

$$\begin{aligned} G^{(2)} &= \{(x,y) \in X \times X \mid s(x) = x = r(y) = y\} \\ &= \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}, \end{aligned}$$

de modo que a multiplicação é dada por

$$G^{(2)} \to G\,, (x,x) \mapsto x.$$

Também observamos que, se X é um espaço topológico, então o grupóide acima é um grupóide topológico étale.

Exemplo 2. *Todo grupo $(G, \cdot)$ pode ser visto como um grupóide de maneira canônica. De fato, seja $e \in G$ a identidade de G. Defina*

$G^{(0)} = \{e\}$, *de modo que para qualquer* $g \in G$, $s(g) = r(g) = e$. *Assim,* $G^{(2)} = G \times G$, *donde segue que a multiplicação é dada por*

$$G^{(2)} \to G \,, (g,h) \mapsto g \cdot h$$

Também é claro que a inversão no grupóide é dada pela inversão já existente do grupo.

Ademais, se G *é um grupo topológico, isto é, um grupo que também é um espaço topológico no qual as operações de multiplicação e inversão são contínuas, também é um grupóide topológico, por definição. Como* $G^{(0)}$ *consiste de apenas um ponto, observe que* G *é étale se e somente se a sua topologia é discreta, ou seja,* G *é um grupo discreto.*

Exemplo 3. *Seja* X *um conjunto qualquer. O produto cartesiano* $X \times X := G$ *pode ser visto como um grupóide sobre* X *(ou seja, o espaço de unidades* $G^{(0)}$ *é identificado com* X*) da seguinte maneira: Para qualquer* $g = (x,y) \in G$, *enxergamos* g *como uma flecha*

$$y \xrightarrow{g=(x,y)} x \,,$$

ou seja, a partir da correspondência

$$\{(x,x) \in X \times X \,|\, x \in X\} \leftrightarrow X$$

$$(x,x) \longleftrightarrow x,$$

definimos $r((x,y)) = x$ e $s((x,y)) = y$. Segue que $G^{(2)}$ é definido por

$$G^{(2)} = \{((x,y),(x',y')) \in G \times G \,|\, y = x'\}$$

e a multiplicação é dada por

$$G^{(2)} \to G\,, ((x,y),(y,y')) \mapsto (x,y').$$

Geometricamente, para $g = (x,y)$ e $h = (x',y')$, temos

$$\begin{tikzcd} y' \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[rr, bend right, "gh"'] & x' = y \arrow[r, bend left, "g"] & x \end{tikzcd}$$

Naturalmente, a inversa é definida por $[(x,y) \to (y,x)]$, de modo que, para qualquer $g = (x,y) \in G$, temos que

$$gg^{-1} = (x,y)(y,x) = (x,x) \simeq x = r(g)$$

e

$$g^{-1}g = (y,x)(x,y) = (y,y) \simeq y = s(g).$$

É também fácil ver que

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= \{g \in G \,|\, g = g^{-1} = g^2\} \\ &= \{(x,x) \in G \,|\, x \in X\} \simeq X, \end{aligned}$$

donde segue que G é um grupóide sobre X.

No contexto topológico, se X for um espaço topológico discreto e G um grupo discreto, então obtemos um grupóide étale, se munirmos $G = X \times X$ com a topologia produto.

Exemplo 4. *(Grupóide de isotropia) Seja G um grupóide e $u \in G^{(0)}$.*

Defina $G(u) := G^u \cap G_u = \{\gamma \in G | s(\gamma) = r(\gamma) = u\}$. Usando as propriedades básicas de grupóides, temos que $G(u)$ é um grupo com a multiplicação de G e com elemento neutro u. A união

$$Iso(G) := \cup_{u \in G^{(0)}} G(u) = \{\gamma \in G | s(\gamma) = r(\gamma)\}$$

tem uma estrutura natural de grupóide, apresentada a seguir. Defina

$$Iso(G)^{(2)} := \{(\gamma, \eta) \in G \times G | \gamma, \eta \in G(u), u \in G^{(0)}\}$$

A partir de $Iso(G)^{(2)}$ definido acima, segue que se $(\gamma, \eta) \in Iso(G)^{(2)}$, então existe $u \in G^{(0)}$ tal que $u = s(\gamma) = r(\eta)$, de modo que $\gamma\eta$ está bem definido e temos que $s(\gamma\eta) = s(\eta) = u = r(\gamma) = r(\gamma\eta)$. Ademais, para qualquer $\gamma \in G(u)$, temos que $\gamma^{-1} \in G(u)$. Portanto defina as aplicações multiplicação e inversão exatamente como em G. Por construção, as funções range e source coincidem em $Iso(G)$ e temos que $Iso(G)^{(0)} = G^{(0)}$.

O grupóide $Iso(G)$ é conhecido por grupóide de isotropia de G.

Proposição 7. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff e $Iso(G)$ seu grupóide de isotropia. Então $Iso(G)$ é fechado na topologia induzida, de modo que também será localmente compacto e Hausdorff.*

Demonstração: Basta observar que, se (ξ_i) é uma net em $Iso(G)$ convergente para $\xi \in G$, então $s(\xi_i) = r(\xi_i)$, de modo que $s(\xi) = r(\xi)$, uma vez que as funções range e source são contínuas. Daí segue que $\xi \in Iso(G)$, garantindo que é fechado em tal topologia. Sendo fechado em G, também será localmente compacto Hausdorff, fatos bem conhecidos de topologia geral. ■

Exemplo 5. *(Grupóide de Deaconu-Renault) Seja X um espaço compacto de Hausdorff e $\sigma : X \to X$ uma* aplicação de recobrimento*, ou seja, σ é um homeomorfismo local sobrejetor. Seja*

$$G := \{(x, n, y) \in X \times \mathbb{Z} \times X;\ \textit{existem } k, l \geq 0 \textit{ tais que}$$

$$n = k - l \ \textit{e}\ \sigma^k(x) = \sigma^l(y)\}.$$

Então defina

$$G^{(2)} = \{((x, n, y), (w, m, z)) \in G \times G | y = w\}$$

e as operações em G

$$(x,n,y)(y,m,z) := (x,n+m,z),\ (x,n,y)^{-1} := (y,-n,x).$$

Com estas operações, G é um grupóide cujo espaço de unidades $G^{(0)}$ pode ser identificado com X. De fato, começamos por observar que a multiplicação está bem definida. Considere $(x,n,y),(y,m,z) \in G$ tais que $n = k-l$ e $m = s-p$, de modo que $\sigma^k(x) = \sigma^l(y)$ e $\sigma^s(y) = \sigma^p(z)$. Portanto $n+m = (k+s)-(l+p)$ e segue que

$$\sigma^{k+s}(x) = \sigma^s(\sigma^k(x)) = \sigma^s(\sigma^l(y)) = \sigma^l(\sigma^s(y)) = \sigma^l(\sigma^p(z)) = \sigma^{l+p}(z),$$

o que mostra a boa definição da multiplicação. O caso da inversão é imediato. Ademais, observamos que as operações de associatividade, lei do cancelamento e involução seguem diretamente do fato de que $\mathbb{Z}$ possui tais propriedades, de modo que G tem uma estrutura de grupóide. Agora, seja $\xi = (x,n,y) \in G^{(0)}$. Segue que $\xi = \xi^2 = \xi^{-1}$, e, em particular, $(x,n,y) = (y,-n,x)$, donde segue que $x = y$ e $n = -n$, de modo que $n = 0$. Asssim, $\xi = (x,0,x)$, de forma que identificamos naturalmente $G^{(0)}$ com X. Também é imediato observar que, sobre a identificação acima, temos $r(x,n,y) = x$ e $s(x,n,y) = y$.

Concluímos este exemplo mencionando que é possível munir G com uma topologia na qual G será um grupóide de Hausdorff, localmente *compacto, com* $G^{(0)}$ *aberto em* G. *(Teorema 1 de [23]). Além disso, na Seção 1.3.3 vamos abordar um exemplo de grupóide que engloba o Deaconu-Renault acima apresentado. Desta forma, no final da Seção 1.3.3 vamos concluir que o grupóide de Deaconu-Renault é étale.*

1.3.2 Ações de Grupos e o Grupóide de transformação

A teoria de ações de grupos em conjuntos é bastante rica e usada em várias áreas da Matemática. Em particular, podemos criar uma classe muito importante de grupóides a partir de ações de grupos, os chamados *grupóides de transformação.*

Lembramos que uma ação de um grupo H (com unidade e) em um conjunto X é uma aplicação $H \times X \to X, (h, x) \to h \cdot x$ tal que $e \cdot x = x$ para qualquer $x \in X$ e para quaisquer $g, h \in H, x \in X$, temos $g(h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

Defina $G := H \times X$. Vamos definir uma estrutura de grupóide em G da seguinte forma:

$$G^{(2)} := \{((g, x), (h, y))|y = g^{-1} \cdot x\}$$

e os mapas multiplicação e inversão dados por

$$((g, x), (h, y)) \to (gh, x)$$

e

$$(g,x)^{-1} := (g^{-1}, g^{-1} \cdot x)$$

A partir dos axiomas de grupo e da ação de grupo apresentada, é imediato verificar as propriedades que garantem G ser um grupóide. Com tal estrutura, G é conhecido como *grupóide de transformação.* Ademais, temos que os mapas source e range são dados por

$$s(g,x) = (g,x)^{-1}(g,x) = (g^{-1}, g^{-1} \cdot x)(g,x) = (e, g^{-1} \cdot x)$$

e

$$r(g,x) = (g,x)(g,x)^{-1} = (g,x)(g^{-1}, g^{-1} \cdot x) = (e,x)$$

e o espaço de unidades $G^{(0)}$ é dado pelos elementos $\xi := (g,x)$ tais que $\xi = \xi^{-1} = \xi^2$, ou seja, os elementos tais que $(g,x) = (g^{-1}, g^{-1} \cdot x) = (g^2, x)$, o que implica que $g = e$, de modo que $G^{(0)} = e \times X \simeq X$, via $(e,x) \longleftrightarrow x$.

Considere agora X um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff e H um grupo discreto.

Suponha que a ação $\alpha \colon H \times X \to X$ é contínua. Isto equivale à dizer que para qualquer $h \in H$, a função $\alpha_h \colon X \to X$, $x \mapsto h \cdot x$ é contínua; mais ainda, como $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$ segue que cada α_h é um homeomorfismo de X. É comum o termo "ação contínua"mas vamos apenas usar ação, uma vez que o contexto deixará claro qual ação estamos nos referindo.

Diante disso, temos:

Proposição 8. *Seja $\alpha : H \times X \to X$ uma ação de um grupo discreto H em um espaço topológico localmente compacto Hausdorff X. Denotando por G o grupóide de transformação de tal ação e munindo-o da topologia produto, G é um grupóide localmente compacto, Hausdorff e étale.*

Demonstração: É fácil ver que G tem estrutura de grupóide topológico, uma vez que a ação α é contínua no sentido definido previamente. Ademais, as propriedades topológicas de X e H garantem que G é localmente compacto e Hausdorff.

Vamos justificar que G é étale. Para isso, basta mostrarmos que a função range é um homeomorfismo local. De fato, a demonstração de que a função source é homeomorfimo local é análoga. Explicitamente, temos $r : G \to G^{(0)}$ dada por $r(h, x) = (e, x)$. Portanto, para qualquer $\xi = (h, x) \in G$ fixado, defina $U_\xi = \{h\} \times X \subset G$. Como H tem topologia discreta, segue que U_ξ é aberto em G. Por construção, temos que $r(U_\xi) = X$, claramente aberto em X. Também é claro que U_ξ é homeomorfmo a X via a função range, o que garante que tal função é um homeomorfismo local, ou seja, que o grupóide de transformação é étale.

■

Finalmente, vamos caracterizar algumas ações de grupo a partir de propriedades do grupóide de transformação. Para isso, precisamos de algumas definições. Salientamos que tais definições serão particularmente úteis mais adiante, precisamente no Capítulo 4 deste trabalho.

Definição 7. *Seja $\alpha : H \times X \to X$ uma ação de um grupo discreto H em um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff.*

*A ação é dita **livre** se para quaisquer $x \in X$ e $h \in H$, $h \cdot x = x$ implicar $h = e$.*

*A ação é dita **topologicamente livre** se*

$$\{x \in X | H(x) = \{e\}\}$$

for denso em X, onde

$$H(x) = \{h \in H | h \cdot x = x\}.$$

*A ação é dita **minimal** se todo aberto H-invariante de X for trivial (ou X ou $\emptyset$). Um aberto $A \subset X$ é dito H-invariante se para qualquer $a \in A$ e $h \in H$, tivermos $h \cdot a \in A$.*

Definição 8. *Um grupóide topológico G é dito **principal** se o grupóide de isotropia de G for igual ao espaço de unidades de G, ou seja, se*

$$Iso(G) = G^{(0)}.$$

*O grupóide G será dito **topologicamente principal** se*

$$\{u \in G^{(0)} | G(u) = \{u\}\}$$

é denso em $G^{(0)}$. *Lembramos que* $G(u) = \{\gamma \in G | s(\gamma) = r(\gamma) = u\}$.

G será dito ***minimal*** *se os únicos conjuntos abertos invariantes são os triviais. Um conjunto* $D \subset G^{(0)}$ *é dito um* invariante *se para qualquer* $\gamma \in G$ *tal que* $s(\gamma) \in D$, *tivermos* $r(\gamma) \in D$. *É fácil ver que esta definição é equivalente a dizermos que para qualquer* $\gamma \in G$ *tal que* $r(\gamma) \in D$, *então* $s(\gamma) \in D$.

No Capítulo 4 deste trabalho, vamos estudar com mais detalhes os grupóides apresentados na definição anterior. Agora, vamos nos concentrar em caracterizar os grupóides de transformação que satisfazem as condições da Definição 8.

Proposição 9. *Sejam* $\alpha : H \times X \to X$ *ação de um grupo discreto* H *sobre um espaço topológico localmente compacto Hausdorff* X *e* G *o grupóide de transformação associado. Então:*

(i) G *é principal se e somente se* α *é livre.*

(ii) G *é topologicamente principal se e somente se* α *é topologicamente livre.*

(iii) G *é minimal se e somente se* α *é minimal.*

Demonstração: Antes de demonstrar cada item em particular, fixe um $x_0 \in X$ qualquer. Através da identificação $G^{(0)} \simeq X$, podemos considerar $x_0 \in G^{(0)}$. Segue que os conjuntos

$$G_{x_0} = \{(g, x) | s(g, x) = (e, g^{-1} \cdot x) = (e, x_0)\}$$

e

$$G^{x_0} = \{(g,x)|r(g,x) = (e,x) = (e,x_0)\}$$

podem ser escritos na forma

$$G_{x_0} = \{(g, g\cdot x_0)|g \in H\}$$

e

$$G^{x_0} = \{(g,x_0)|g \in H\}.$$

Assim, dado $\xi \in G(x_0)$, existem $g, g' \in H$ tais que $\xi = (g, g\cdot x_0) = (g', x_0)$, donde segue que $g = g'$ e $g\cdot x_0 = x_0$. Ou seja, podemos escrever

$$G(x_0) = \{(g,x_0)|g \in G,\ g\cdot x_0 = x_0\} = \{(g,x_0)|g \in H(x_0)\}.$$

Vamos agora demonstrar os itens propostos.

(i) Por definição, G é principal se e somente se $G(x) = (e,x)$ para todo x, e pela equação acima, isto é equivalente à afirmar que $H(x) = e$ para todo x, e isto é equivalente a dizer que a ação α é livre.

(ii) Começamos por observar que, para qualquer $x \in X$, vale $G(x) = \{x\}$ se, e somente se $H(x) = \{e\}$. Isto é imediato, visto que $h \in H(x)$ se, e somente se $(h,x) \in G(x)$ e que $G^{(0)} = \{e\} \times X \simeq X$. Disto, é também fácil ver que $\{x \in X|H(x) = \{e\}\}$ é denso em X se, e somente se $\{(e,x) \in G^{(0)}|G(x) = \{x\}\}$ é denso em $G^{(0)}$, o que garante a equivalência proposta.

(iii) Faremos ambos os casos por contraposição.

Se α não for minimal, então existe um aberto A não trivial e H-invariante. Uma vez que $G^{(0)}$ é identificado com X, considere A visto 'dentro de $G^{(0)}$', ou seja, defina $D = \{e\} \times A \subset G^{(0)}$. Afirmamos que D é um subconjunto aberto invariante de G. Para isso, seja $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) \in D$. Escrevendo $\gamma = (g, x)$, temos que $s(\gamma) = (e, g^{-1} \cdot x) \in D$, ou seja, $g^{-1} \cdot x \in A$. Disto segue que $g(g^{-1} \cdot x) = x \in A$, de modo que $(e, x) = r(g, x) = r(\gamma) \in D$, provando a ida.

Agora, se G não for minimal, então existe um aberto não trivial $D \subset G^{(0)} = \{e\} \times X$ invariante. Para mostrar que a ação não é minimal, basta encontrarmos um aberto não trivial de X e que seja H-invariante.

Seja $A = \pi_X(D) \subset X$ onde π_X é a projeção de $H \times X$ em X. Assim, A é um aberto não trivial, visto que D é aberto e não trivial. Afirmamos que A é H-invariante. Para isso, sejam $h \in H$ e $x \in A$. Vamos mostrar que $h \cdot x \in A$, o que demonstrará o resultado.

Observamos que $(e, h \cdot x) \in D$. De fato, $(e, h \cdot x) = s(h^{-1}, x)$ e se $s(h^{-1}, x) \notin D$, então $r(h^{-1}, x) = (e, x) \notin D$, visto que D é invariante. Mas isto implicaria que $x \notin A$, um absurdo. Segue que $s(h^{-1}, x) \in D$, garantindo que $h \cdot x \in A$, provando que A é H-invariante. ∎

Para concluir esta seção, vamos estudar mais uma classe de ações, as ações efetivas. Classicamente, podemos definir que uma ação α :

$H \times X \to X$ de um grupo discreto em um espaço topológico localmente compacto Hausdorff é **efetiva** se para quaisquer $h_1, h_2 \in H$ distintos, existir $x \in X$ tal que $h_1 \cdot x \neq h_2 \cdot x$. Outra definição, equivalente a primeira, é dizer que α é efetiva se

$$\bigcap_{x \in X} H(x) = \{e\}.$$

Uma terceira definição equivalente para ação efetiva é dizer que o homomorfismo de grupos abaixo é injetor:

$$\Phi : H \to Homeo(X)$$

$$h \mapsto \Phi_h|_x = h \cdot x$$

É imediato ver que Φ acima definido é homomorfismo de grupos e que a caracterização de ação efetiva dada por Φ é equivalente à primeira apresentada. Ademais, temos que

$$Ker(\Phi) = \{h \in H | \Phi_h = id_X\} =$$

$$\{h \in H | h \cdot x = x \text{ para todo } x \in X\} =$$

$$\{h \in H | h \in H(x) \text{ para todo } x \in X\} =$$

$$\bigcap_{x \in X} H(x),$$

o que garante que as definições acima são equivalentes.

No Capítulo 4, a noção de grupóide efetivo será crucial. Adiantamos que um grupóide topológico G é efetivo se, por definição, o interior de $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ é vazio. Ademais, a Proposição 25 do Capítulo 4 nos dá uma caracterização de tal conceito. Queremos mostrar que uma ação é efetiva se, e somente se o grupóide de transformação de tal ação for efetivo. No entanto, a definição clássica de ação efetiva não é forte o suficiente para garantir tal equivalência, de modo que, a fim de conseguirmos nossa caracterização, vamos redefinir a noção de ação efetiva da seguinte forma:

Definição 9. *Uma ação $\alpha : H \times X \to X$ de um grupo discreto em um espaço topológico localmente compacto Hausdorff é* ***efetiva*** *se para qualquer $h \in H, h \neq e$, e U aberto não vazio de X, existir $x \in U$ tal que $h \cdot x \neq x$. Equivalentemente, α é efetiva se para todo $h \in H, h \neq e$, o conjunto*

$$\{x \in X | h \cdot x \neq x\}$$

é denso em X.

Observemos rapidamente que toda ação livre é efetiva: De fato, seja U aberto não vazio em X e $x \in U$. Para qualquer $h \in H$, $h \neq e$, temos que $hx \neq x$. Isto vale pois se $hx = x$, então $h = e$ visto que a ação é livre.

Proposição 10. *Uma ação $\alpha : H \times X \to X$ de um grupo discreto H em um espaço topológico localmente compacto Hausdorff X é efetiva* *se, e somente se G, o grupóide de transformação de tal ação, é efetivo.*

Demonstração: Para tal demonstração, começamos por observar que o grupóide G é étale e portanto possui uma base dada por bisseções abertas. Ademais, através da Proposição 25 do Capítulo 4, o grupóide é efetivo se, e somente se para qualquer bisseção aberta não vazia $B \subset G\backslash G^{(0)}$, existir $\gamma \in B$ tal que $s(\gamma) \neq r(\gamma)$.

Suponha que a ação seja efetiva e seja B uma bisseção aberta não vazia, $B \subset G\backslash G^{(0)}$. Segue que existe $\gamma = (h, x) \in B$, com $h \in H, h \neq e$, pois $B \cap G^{(0)} = \emptyset$. Como B é aberto, temos uma vizinhança aberta de V_h de h e U aberto de X não vazios tais que $V_h \times U \subset B$. Por hipótese da ação efetiva, existe um $x_0 \in U$ tal que $h \cdot x_0 \neq x_0$. Ademais, para tal $x_0 \in U$, temos $\xi := (h, x_0) \in B$. Afirmamos que $s(\xi) \neq r(\xi)$, o que mostra que G é efetivo. De fato, $s(\xi) = s(h, x_0) = (e, h^{-1} \cdot x_0)$ e $r(\xi) = r(h, x_0) = (e, x_0)$, o que mostra que $s(\xi) \neq r(\xi)$, pois, do contrário, teríamos $h^{-1} \cdot x_0 = x_0$, o que implicaria $h \cdot x_0 = x_0$.

Agora, considere G efetivo, $h \in H, h \neq e$ e $U \subset X$ aberto não vazio. Defina $D = \{h\} \times U$. Como $h \neq e$, segue que $D \subset G\backslash G^{(0)}$. Uma vez que G é étale, existe uma bisseção aberta não vazia $B \subset D$. Como G é efetivo, existe $\gamma \in B \subset D$ tal que $s(\gamma) \neq r(\gamma)$. Podemos escrever $\gamma = (h, x)$, para algum $x \in X$. Segue que $s(\gamma) = s(h, x) = (e, h^{-1} \cdot x) \neq r(\gamma) = r(h, x) = (e, x)$, ou seja, $h^{-1} \cdot x \neq x$, de modo que $h \cdot x \neq x$, mostrado que a ação é efetiva.

■

Para concluir esta seção, anunciamos uma relação entre grupóides topologicamente principais e efetivos, cuja demonstração segue da Proposição 3.6 de [14].

Proposição 11. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff e étale. Então:*

(i) Se G é topologicamente principal, então é efetivo.

(ii) Se G é efetivo e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então é topologicamente principal.

Corolário 2. *Seja $\alpha : H \times X \to X$ uma ação de um grupo discreto H em um espaço topológico localmente compacto, Hausdorff. Se a ação for topologicamente livre, então a ação é efetiva.*

Demonstração: Seja G o grupóide de transformação de tal ação. A Proposição 8 garante que G é étale. Assim, usando a Proposição 9, segue que G é topologicamente principal, pois a ação é topologicamente livre. Pela Proposição 11 acima, temos que G é efetivo, donde segue, novamente pela Proposição 9 que a ação é efetiva. ∎

Com as mesmas hipóteses do corolário acima, é possível mostrar que se H for enumerável e X satisfizer o segundo axioma de enumerabilidade, então o grupóide de transformação também satisfará o segundo axioma de enumerabilidade. Neste caso, se ação for efetiva, será topologicamente livre.

No entanto, o exemplo a seguir mostra que nem toda ação efetiva é topologicamente livre. Para isso, vamos exibir um grupóide efetivo mas não topologicamente principal:

Exemplo 6. *Sejam o espaço topológico localmente compacto, Hausdorff* $X = (0,1) \times \mathbb{T}$ *com a topologia usual e o grupo* $(\mathbb{R}, +)$ *considerado como grupo discreto. Defina a ação*

$$\alpha : \mathbb{R} \times X \to X$$

$$(t, (s, e^{i\theta})) \mapsto (s, e^{i(\theta + 2\pi st)})$$

e considere G *o grupóide de transformação associado. É fácil ver que* α *de fato define uma ação. Vamos começar mostrando que* G *não é topologicamente principal, de modo que a ação não será topologicamente livre.*

Antes de mais nada, lembramos que $G^{(0)} \simeq X$*, e podemos, através desta identificação, considerar que são iguais. Assim, fixe* $u \in G^{(0)}$ *e escreva* $u = (s_0, e^{i\theta_0})$*. Vamos calcular o grupo de isotropia em* u*,* $G(u)$*:*

$$G(u) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X = G | s(t, x) = r(t, x) = u\}.$$

Considere $(t, x) \in G(u)$ *e escreva* $x = (s, e^{i\theta})$*. Temos que* $r(t, x) = x = s(t, x) = t^{-1} \cdot x = \alpha(-t, x) = u$*, ou seja,*

$$(s, e^{i\theta}) = (s_0, e^{i\theta_0}) = (s, e^{i(\theta - 2\pi st)}),$$

donde segue que $u = x$ e que $st \in \mathbb{Z}$. Assim, escrevendo $u = (s, e^{i\theta})$, temos

$$G(u) = \frac{1}{s}\mathbb{Z} \times \{u\}. \tag{1.2}$$

Com isto, fica claro que, para qualquer $u \in G^{(0)}$, o grupo de isotropia em u é não trivial, o que impossibilita G ser topologicamente principal.

Vamos agora mostrar que G é efetivo, concluindo nosso exemplo. Para isso, devemos mostrar que o interior de $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ é vazio. Mas, por definição, o interior de $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ é a união de todos os abertos contidos em $Iso(G)$ e que não se interceptam com $G^{(0)}$. Portanto, fixe U um aberto não vazio satisfazendo $U \cap G^{(0)} = \emptyset$. Vamos mostrar que $U\backslash Iso(G) \neq \emptyset$, o que garantirá que G é efetivo, visto que todo aberto contido em $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ será vazio.

Por hipótese de U, devem existir $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, 0 < a < b < 1$ e $\theta \in (0, 2\pi)$ tais que

$$\{t\} \times ((a, b) \times \{e^{i\theta}\}) \subset U.$$

Fixe $s \in (a, b)$. Se $st \notin \mathbb{Z}$, segue de (1.2) que $(t, (s, e^{i\theta})) \in U\backslash Iso(G)$. Por outro lado, se $st \in \mathbb{Z}$, seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon \in (0, 1/t)$ e $s + \epsilon \in (a, b)$. Temos

$$st < (s + \epsilon)t < st + 1,$$

ou seja, $(s+\epsilon)t \notin \mathbb{Z}$ *e, novamente por* (1.2)*,* $(t,(s+\epsilon,e^{i\theta})) \in U\backslash Iso(G)$*, o que demonstra o resultado.*

1.3.3 Um exemplo mais elaborado

A seguir, apresentamos um grupóide localmente compacto, Hausdorff e étale. Tal exemplo foi retirado de [18]. Como mencionado no final do Exemplo 5, vamos usar o exemplo a seguir para concluir que o grupóide de Deaconu-Renault é étale.

Exemplo 7. *Sejam* X *um espaço compacto Hausdorff,* Γ *um grupo (com unidade 1) e* P *um semigrupo tal que* $1 \in P \subset \Gamma$*.*

Denote por $End(X)$ *o conjunto dos homeomorfismos locais sobrejetivos* $T : X \to X$*. Diremos que* P *age em* X *por endomorfismos se existir uma aplicação* $\theta : P \to End(X)$ *tal que* $\theta(1) = Id_X$ *e para quaisquer* $n, m \in P$*, temos que* $\theta_n \circ \theta_m = \theta_{mn}$*.*

Assumindo uma condição técnica, vamos construir um grupóide $G \subset X \times \Gamma \times X$*. Tal grupóide é bastante relacionado ao importante grupóide de Deaconu-Renault. Portanto, suponha que* $P^{-1}P \subset PP^{-1}$ *(por exemplo, isso é imediato se* $P = \mathbb{N}^k; \Gamma = \mathbb{Z}^k$*).*

Defina

$$G := \{(x, g, y) \in X \times \Gamma \times X | \exists n, m \in P, \theta_n(x) = \theta_m(y), g = nm^{-1}\}$$

e

$$G^{(2)} := \{((x,g,y),(x',h,y')) \in G \times G | y = x'\}$$

com as aplicações multiplicação e inversão dadas respectivamente por

$$(x,g,y)(y,h,z) \to (x,gh,z)$$

e

$$(x,g,y)^{-1} = (y,g^{-1},x).$$

Devemos verificar que as aplicações acima estão bem definidas, daí é facilmente verificável que G *tem estrutura de grupóide, com espaço de unidades* $G^{(0)} \simeq X$.

Considere $(x,g,y) \in G$. *Então existem* $n,m \in P$ *tais que* $nm^{-1} = g$ *e* $\theta_n(x) = \theta_m(y)$. *Portanto* $g^{-1} = mn^{-1}$, *de modo que* $(y,g^{-1},x) \in G$, *garantindo que a inversão está bem definida. Agora, considere o par* $((x,g,y),(y,h,z)) \in G^{(2)}$. *Segue que existem* $n,m,p,q \in P$ *tais que* $g = nm^{-1}, \theta_n(x) = \theta_m(y); h = pq^{-1}, \theta_p(y) = \theta_q(z)$. *A hipótese* $P^{-1}P \subset PP^{-1}$ *garante que* $m^{-1}p$ *pode ser escrito da forma* $m^{-1}p = uv^{-1}$ *para certos* $u,v \in P$. *Daí, segue que* $mu = pv$ *e portanto*

$$\begin{aligned}\theta_{nu}(x) &= \theta_u(\theta_n(x)) = \theta_u(\theta_m(y)) \\ &= \theta_{mu}(y) = \theta_{pv}(y) = \theta_v(\theta_p(y)) = \theta_v(\theta_q(z)) = \theta_{qv}(z).\end{aligned}$$

Ademais, $nu(qv)^{-1} = n(uv^{-1})q^{-1} = nm^{-1}pq^{-1} = gh$, *o que mostra que* $(x, gh, z) \in G$, *de modo que a multiplicação também está definida.*

Lembrando que os elementos $\xi \in G^{(0)}$ *são exatamente os que satisfazem* $\xi = \xi^{-1} = \xi^2$ *e escrevendo* $\xi = (x, g, y)$, *segue que* $x = y$ *e* $g = e$ *necessariamente. Portanto temos que*

$$G^{(0)} = \{(x, 1, x) | x \in X\} \simeq X$$

Tendo compreendido a parte algébrica de G, *vamos agora munir* G *com uma topologia de modo que* G *será um grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale. Vamos começar construindo uma base para a topologia de* G. *Para quaisquer* $n, m \in P$ *e* A, B *subconjuntos abertos de* X, *defina*

$$\sum(n, m, A, B) := \{(x, g, y) \in G \,|\, x \in A,\ y \in B,\ g = nm^{-1},\ \theta_n(x) = \theta_m(y)\}$$

Afirmamos que os conjuntos acima construidos formam uma base para a topologia de G. *De fato, fixe*

$$(x, g, y) \in \sum(n_1, m_1, A_1, B_1) \cap \sum(n_2, m_2, A_2, B_2).$$

Vamos construir um conjunto $\sum(n, m, A, B)$ *de forma que* $(x, g, y) \in \sum(n, m, A, B) \subset \sum(n_1, m_1, A_1, B_1) \cap \sum(n_2, m_2, A_2, B_2)$.

A hipótese $P^{-1}P \subset PP^{-1}$ *garante que existem* $p_1, p_2 \in P$ *tais que* $n_2^{-1}n_1 = p_2p_1^{-1}$. *Ademais,* $g = n_im_i^{-1}$ *e* $\theta_{n_i}(x) = \theta_{m_i}(y)$, $i = 1, 2$. *Também temos que* $\theta_{p_i} : X \to X$ *é homeomorfismo local, portanto existe vizinhança aberta* U_i *de* $\theta_{n_i}(x)$ *na qual* θ_{p_i} *é injetiva.*

Defina agora $\sum(n, m, A, B)$ *por*

$$m = m_1p_1,\; n = n_1p_1;$$

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \theta_{n_1}^{-1}(U_1) \cap \theta_{n_2}^{-1}(U_2);$$

$$B = B_1 \cap B_2 \cap \theta_{m_1}^{-1}(U_1) \cap \theta_{m_2}^{-1}(U_2).$$

De $g = n_1m_1^{-1} = n_2m_2^{-1}$ *e* $n_2^{-1}n_1 = p_2p_1^{-1}$ *segue que* $m_1 = m_2p_2p_1^{-1}$, *o que garante que* $m = m_1p_1 = m_2p_2p_1^{-1}p_1 = m_2p_2$. *Ademais, as mesmas igualdades garantem que*

$$n = n_1p_1 = n_2m_2^{-1}m_1p_1 = n_2p_2.$$

Portanto, segue que

$$nm^{-1} = n_2p_2p_2^{-1}m_2^{-1} = n_2m_2^{-1} = g.$$

Por construção, $x \in A$ *e* $y \in B$. *Também é claro que* A *e* B *são* *abertos e que*

$$\theta_n(x) = \theta_{n_1 p_1}(x) = \theta_{p_1}(\theta_{n_1}(x)) = \theta_{p_1}(\theta_{m_1}(y)) = \theta_m(y),$$

o que garante que $(x, g, y) \in \sum(n, m, A, B)$. *Agora seja* $(x', g, y') \in \sum(n, m, A, B)$. *Para* $i = 1, 2$, *temos que*

$$\theta_{p_i}(\theta_{n_i}(x')) = \theta_{n_i p_i}(x') = \theta_n(x') = \theta_m(y') = \theta_{m_i p_i}(y') = \theta_{p_i}(\theta_{m_i}(y')).$$

Mas, observando que θ_{p_i} *é injetiva em* U_i *e que* $x' \in A \subset \theta_{n_i}^{-1}(U_i)$, $y' \in B \subset \theta_{m_i}^{-1}(U_i)$, *segue que* $\theta_{n_i}(x') = \theta_{m_i}(y')$, *o que garante que* $(x', g, y') \in\subset \sum(n_1, m_1, A_1, B_1) \cap \sum(n_2, m_2, A_2, B_2)$, *donde segue o resultado.*

Tendo definido a topologia de G, *vamos mostrar que* G *é um grupóide topológico, ou seja, que as aplicações multiplicação e inversão são contínuas. Primeiro, estudaremos a inversa. Considerando* $I : G \to G$, $(x, g, y) \mapsto (y, g^{-1}, x)$ *a inversão em* G, *sejam* $\xi(x, g, y) \in G$ *e uma net convergente* $\xi_i = (x_i, g_i, y_i) \to \xi$. *Por definição da base da topologia, temos* $\xi \in \sum(n, m, A, B)$, *para certos* n, m, A *e* B. *Segue que existe um índice* i_0 *tal que* $\xi_i \in \sum(n, m, A, B)$ *para todo* $i > i_0$. *Daí é claro que* $I(\xi_i), I(\xi) \in \sum(m, n, B, A)$, *garantindo a continuidade da inversa.*

Agora, considere $M : G^{(2)} \to G$, $((x, g, y), (y, h, z)) \mapsto (x, gh, z)$. *Sejam* $\eta = ((x, g, y), (y, h, z)) \in G^{(2)}$ *e uma net convergente* $\eta_i = ((x_i, g_i, y_i), (y_i, h_i, z_i)) \to \eta$. *Como* $G^{(2)}$ *é munido da topologia pro-*

duto, temos que $(x_i, g_i, y_i) \to (x, g, y)$ *e* $(y_i, h_i, z_i) \to (y, h, z)$. *Novamente usando a definição da base da topologia, existem* $n, m, k, l \in P$ *e abertos* A, B, C *de* X *tais que* $(x, g, y) \in \sum(n, m, A, B)$ *e* $(y, h, z) \in \sum(k, l, B, C)$. *Segue que* $(x_i, g_i, y_i) \in \sum(n, m, A, B)$ *e* $(y_i, h_i, z_i) \in \sum(k, l, B, C)$, *para todo índice* $i > i_0$, *para certo* i_0. *Observando ainda que existem* $p, q \in P$ *satisfazendo* $gh = nm^{-1}kl^{-1} = npq^{-1}l^{-1} = np(lq)^{-1}$, *visto que* $P^{-1}P \subset PP^{-1}$, *temos*

$$\begin{aligned} M(((x_i, g_i, y_i), (y_i, h_i, z_i))) &= (x_i, g_ih_i, z_i), M(((x, g, y), (y, h, z))) \\ &= (x, gh, z) \in \sum(np, lq, A, C), \end{aligned}$$

garantindo a continuidade de M.

Tendo provado que G *é um grupóide topológico, vamos justificar que a topologia de* G *é Hausdorff e localmente compacta. Primeiro, vejamos que* G *é Hausdorff. De fato, sejam* $\xi = (x, g, y), \eta = (x', h, y') \in G$ *distintos. Pela base da topologia, podemos escrever que* $\xi \in \sum(n, m, A, B) := V_\xi$ *e que* $\eta \in \sum(k, l, A', B') := V_\eta$. *Se* $x \neq x'$, *como* X *é Hausdorff, segue que existem vizinhanças abertas disjuntas de* x *e* x', *respectivamente. Nesse caso, mesmo que ainda tenhamos* $g = h$ *e* $y = y'$, *segue que* $V_\xi \cap V_\eta = \emptyset$, *o que é claro, uma vez que* $A \cap A' = \emptyset$. *Se tivermos* $y \neq y'$, *conseguimos separar os pontos de forma análoga. Finalmente, se tivermos* $x = x'$, $y = y'$ *e* $g \neq h$, *é claro que as vizinhanças* V_ξ *e* V_η

serão disjuntas. Assim, fica demonstrado que G é Hausdorff.

Para mostrarmos que é localmente compacto, defina, para quaisquer $n, m \in P$, o conjunto

$$E(n,m) := \{(x,y) \in X \times X \mid \theta_n(x) = \theta_m(y)\}$$

e uma função

$$\iota : E(n,m) \to G\,, (x,y) \mapsto (x, nm^{-1}, y).$$

A função ι depende de $n, m \in P$, mas vamos omitir a dependência, para não carregar a notação. Vamos mostrar que ι é contínua e que $E(n,m)$ é compacto. Tendo isso sido demonstrado, o argumento de que G é localmente compacto segue de:

Restringindo a imagem, podemos ver $\iota : E(n,m) \to \sum(n,m,X,X)$, que é, nesse caso, bijeção contínua. Uma vez que $\sum(n,m,X,X)$ é Hausdorff, segue que ι é homeomorfismo, donde segue que $\sum(n,m,X,X)$ também é um espaço compacto. Assim, para qualquer $\xi \in G$, existe um elemento $\sum(n,m,A,B)$ tal que $\xi \in \sum(n,m,A,B) \subset \sum(n,m,X,X)$, o que mostra que G é localmente compacto.

Para mostrarmos que $E(n,m)$ é compacto, basta provar que é fechado, uma vez que é um subconjunto do compacto $X \times X$. Considerando uma net $(\xi_i = (x_i, y_i)) \in E(n,m)$ convergindo para $\xi = (x,y) \in X \times X$, a topologia produto garante que $x_i \to x$, $y_i \to y$, de modo que

$\theta_n(x_i) \to \theta_n(x)$ e $\theta_m(y_i) \to \theta_m(y)$. Mas $\theta_n(x_i) = \theta_m(y_i)$, o que garante que $\theta_n(x) = \theta_m(y)$, ou seja, $\xi \in E(n,m)$ e portanto $E(n,m)$ é compacto.

Vamos agora mostrar que ι é contínua. Para isso, vamos mostrar que dados $\xi \in E(n,m)$ e W uma vizinhança aberta de $\iota(\xi)$, existe uma vizinhança aberta Z de ξ tal que $\iota(Z) \subset W$.

Sejam $(x_0, y_0) \in E(n,m)$ e W' uma vizinhança aberta de $\iota(x_0, y_0) = (x_0, nm^{-1}, y_0)$. A base construída para a topologia de G garante que existem k, l, A, B tais que

$$(x_0, nm^{-1}, y_0) \in \sum(k, l, A, B) \subset W',$$

em particular, temos que $nm^{-1} = kl^{-1}$ e $\theta_k(x_0) = \theta_l(y_0)$. Ademais, a hipótese sobre P garante que existem $p, q \in P$ tais que $k^{-1}n = pq^{-1}$. Como $\theta_p : X \to X$ é homeomorfismo local, seja W uma vizinhança aberta onde $\theta_k(x_0)$ é injetiva. Daí, defina os conjuntos

$$U := A \cap \theta_k^{-1}(W),$$

$$V := B \cap \theta_l^{-1}(W),$$

$$Z := U \times V \cap E(n,m).$$

É claro que Z é aberto de $E(n,m)$ e que $(x_0, y_0) \in Z$. Vamos mostrar que $\iota(Z) \subset W'$, concluindo a continuidade de ι. Seja $(x,y) \in Z$. Temos *que*

$$\theta_p(\theta_k(x)) = \theta_{kp}(x) = \theta_{nq}(x) = \theta_q(\theta_n(x)) = \theta_q(\theta_m(y)) = \theta_{mq}(y),$$

pois $k^{-1}n = pq^{-1}$ *e* $(x,y) \in E(n,m)$. *Segue que*

$$\theta_{mq}(y) = \theta_p(\theta_l(y)),$$

onde a igualdade acima segue de $mq = lp$, *o que é consequência imediata das igualdades* $k^{-1}n = pq^{-1}$ *e* $nm^{-1} = kl^{-1}$. *Observando que* $x \in U \subset \theta_k^{-1}(W)$ *e que* $y \in V \subset \theta_l^{-1}(W)$, *temos que* $\theta_k(x), \theta_l(y) \in W$, *o que garante que* $\theta_k(x) = \theta_l(y)$, *uma vez que* θ_p *é injetiva em* W. *Assim, temos que* $\iota(x,y) = (x, nm^{-1}, y) = (x, kl^{-1}, y) \in \sum(k,l,A,B) \subset W'$, *como gostaríamos.*

Finalmente, vamos mostrar que G *é um grupóide étale. Faremos a demonstração de que a função range é um homeomorfismo local. Para qualquer* $\xi = (x,g,y) \in G$, *temos que* $r(\xi) = (x,g,y)(y,g^{-1},x) = (x,1,x)$, *de modo que podemos ver o mapa range por*

$$r : G \to X,\ (x,g,y) \mapsto x.$$

Seja $\xi = (x,g,y) \in G$. *Segue que* $\xi \in \sum(n,m,A,B)$, *para certos* $n,m \in P$, *e* A,B *abertos de* X. *Em particular,* $g = nm^{-1}$ *e*

$\theta_n(x) = \theta_m(y)$. Agora, usando que θ_n e θ_m são homeomorfismos locais, temos que existem vizinhanças abertas $U \subset A$ e $V \subset B$ de x e y respectivamente tais que $\theta_{n|U}$ e $\theta_{m|V}$ são homeomorfismos.

Defina $H := \sum(n, m, U, V)$. É claro que $\xi \in H$. Afirmamos que $r_{|H}$ é injetiva. De fato, sejam $(z, g, h), (z', g, h') \in H$ tais que $z = z'$, ou seja, $r((z, g, h)) = r((z', g, h'))$. Segue que $\theta_n(z) = \theta_n(z')$, de modo que $\theta_m(h) = \theta_m(h')$. Como θ_m é injetiva em V, segue que $h = h'$, o que mostra que $r_{|H}$ é injetiva.

Portanto, até então temos que

$$r_{|H} : H \to r(H) = \{z \in U \mid (z, g, h) \in H\}$$

é uma bijeção contínua. Vamos mostrar que a inversa $[z \to (z, g, h)]$ está bem definida e também é contínua.

A boa definição segue do seguinte fato: Se $z = z' \in r(H)$, então existem $g, g' \in G$ e $h, h' \in V$ tais que $(z, g, h), (z', g', h') \in H$. Assim, é claro que $g = g'$. Ademais, temos que

$$\theta_m(h) = \theta_n(z) = \theta_n(z') = \theta_m(h'),$$

donde segue que $h = h'$, visto que $\theta_{m|V}$ é homeomorfismo.

Resta a continuidade de tal função. Para isso, se $z_i \to z$ em $r(H)$, devemos mostrar que $h_i \to h$, o que garantirá que $(z_i, g, h_i) \to (z, g, h)$.

Uma vez que $(z_i, g, h_i), (z, g, h) \in H$, segue que $\theta_n(z_i) = \theta_m(h_i)$

e $\theta_n(z) = \theta_m(h)$. *Mas* $z_i \to z$ *garante que* $\theta_n(z_i) \to \theta_n(z)$, *ou seja,* $\theta_m(h_i) \to \theta_m(h)$. *Agora, observando que* $h_i, h \in V$ *e que* θ_m *é homeomorfismo em* V, θ_m^{-1} *também é contínua, de modo que* $h_i \to h$, *como gostaríamos.*

Para concluir, vamos mostrar que $r(H)$ *é aberto. Para isso, sejam* $z \in r(H)$ *e uma net convergente* $z_i \to z$. *Queremos mostrar que* $z_i \in r(H)$ *para índices suficientemente grandes. Considere os homeomorfismos acima definidos* $\theta_n : U \to \theta_n(U)$ *e* $\theta_m : V \to \theta_m(V)$ *e defina o aberto não vazio* $W = \theta_n(U) \cap \theta_m(V)$. *De fato,* W *não é vazio pois para o* ξ *fixado acima, temos* $\theta_n(x) = \theta_m(y)$ *com* $x \in U$ *e* $y \in V$. *Como* $z \in r(H)$, *temos que* $z \in U$ *de modo que* $z_i \in U$ *para todo* $i \succ i_0$, *para certo* i_0. *Ademais,* $\theta_n(z_i) \to \theta_n(z) = \theta_m(h)$.

Com isso, considerando os índices $i \succ i_0$, *temos que* $(\theta_m|_W)^{-1}(\theta_n(z_i)) \to (\theta_m|_W)^{-1}(\theta_m(h)) = h$, *de modo que* $(z_i, g, (\theta_m|_W)^{-1}(\theta_n(z_i))) \in H$, *ou seja,* $z_i \in r(H)$, *concluindo a demonstração.*

Considere agora G o grupóide de Deaconu-Renault para um espaço compacto Hausdorff X e uma aplicação de recobrimento $\sigma : X \to X$. É fácil ver que G pode ser escrito em termos do grupóide do Exemplo 7 acima. Basta considerar o grupo dos inteiros com os naturais sendo o semigrupo. Ademais, a ação θ é definida por

$$\theta : \mathbb{N} \to End(X)$$

$$n \mapsto \theta_n|_x := \sigma^n(x),$$

ou seja, a composição da função σ. É imediato ver que as hipóteses necessárias para as construções são todas satisfeitas. Deste modo, concluímos que o grupóide de Deaconu-Renault é étale.

Capítulo 2

A *-álgebra $C_c(G)$

Os espaços topológicos que estamos interessados são, antes de mais nada, Hausdorff e localmente compactos. Nesse contexto, temos dois resultados fundamentais que serão usados em larga escala e que apresentamos em seguida.

Primeiro, o fato de qualquer aberto de um espaço Hausdorff e localmente compacto também ter tais propriedades. Segundo, o Lema de Urysohn para tais espaços, enunciado a seguir.

Lema 1 (Urysohn; versão para espaços localmente compactos, Hausdorff)**.** *Seja X um espaço Hausdorff, localmente compacto. Dados subconjuntos disjuntos $K, F \subset X$, onde K é compacto e F é fechado, temos que existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f|_K \equiv 1$ e $f|_F \equiv 0$.*

Observamos que o lema acima pode ser demonstrado com a versão usual do Lema de Urysohn para espaços normais, através da compactificação à um ponto de X.

O objetivo deste capítulo é construir, a partir de um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff, uma *-álgebra, que posteriormente nos levará a construção das C^*-álgebras de um grupóide.

Portanto, considere G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff.

Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Definimos o suporte de f por

$$supp(f) := \overline{\{x \in G | f(x) \neq 0\}}.$$

Usando esses dois resultados acima, podemos demonstrar o seguinte fato, muito usado neste trabalho:

Proposição 12. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff e étale. Para qualquer U aberto não vazio de G, existe $f \in C_c(G)$ não nula com $supp(f) \subset U$.*

Demonstração: Seja $x \in U$. Como U é aberto, é um espaço localmente compacto Hausdorff, de modo que existe uma vizinhança aberta B de x cujo fecho $\overline{B}$ seja compacto. Agora, usando o mesmo argumento para B, temos que existe uma vizinhança aberta V de x cujo fecho $\overline{V}$ seja compacto. Ou seja, temos as seguintes inclusões

$$x \in V \subset \overline{V} \subset B \subset \overline{B} \subset U.$$

É claro que o fechado $G \setminus B$ é disjunto do compacto $\overline{V}$, de modo que existe uma função contínua $f : G \to [0,1] \subset \mathbb{C}$ tal que $f|_{\overline{V}} \equiv 1$ e $f|_{G\setminus B} \equiv 0$.

Portanto, temos $\{\gamma \in G \,|\, f(\gamma) \neq 0\} \subset B$, o que garante que $supp(f) \subset \overline{B} \subset U$, finalizando a demonstração.

■

Com isso, definimos $C_c(G)$ sendo o conjunto das funções contínuas $f : G \to \mathbb{C}$ que tenham suporte compacto, ou seja, $supp(f)$ é um conjunto compacto.

Agora, definimos $\mathcal{C}(G)$ como sendo as funções em $C_c(G)$ que tenham o suporte contido em alguma bisseção aberta de G, ou seja,

$$\mathcal{C}(G) := \{f \in C_c(G) | supp(f) \subset U, \exists U \in \mathrm{Bis}(G)\},$$

onde $\mathrm{Bis}(G)$ é o conjunto das bisseções abertas de G.

Um resultado muito importante, demonstrado usando argumentos de partição da unidade, garante que

$$C_c(G) = span\, \mathcal{C}(G),$$

ou seja, todo elemento de $C_c(G)$ é uma combinação linear finita de elementos de $\mathcal{C}(G)$. Tal resultado será fundamental para provarmos que a estrutura de *-álgebra em $C_c(G)$ apresentada a seguir está bem definida. Observamos desde já que, com as informações até aqui, já é claro que $C_c(G)$ tem estrutura de espaço vetorial.

Ademais, a fim de fixar notação, se U for uma bisseção aberta e $f \in \mathcal{C}(G)$ é tal que $supp(f) \subset U$, então diremos que $f \in C_c(U)$.

Tendo feito as construções necessárias, estamos em condições de provar o importante teorema:

Teorema 1. *Sejam $f, g \in C_c(G)$. Então as operações a seguir estão bem definidas e garantem uma estrutura de *-álgebra em $C_c(G)$, como segue:*

$$\begin{aligned} f \cdot g : G \to \mathbb{C}, x \mapsto f \cdot g(x) \quad &:= \sum_{h \in G; r(h) = r(x)} f(h) g(h^{-1}x) \\ &= \sum_{(y,z) \in G^{(2)}; yz = x} f(y) g(z) \end{aligned}$$

$$f^* : G \to \mathbb{C}, x \mapsto f^*(x) := \overline{f(x^{-1})}.$$

Demonstração: Por ser um teorema com demonstração longa e vários passos a serem justificados, optamos por demonstrar o teorema a partir de uma série de afirmações.

Afirm. 1: Seja $f \in C_c(U)$, em que U é bisseção aberta. Então

$f^* \in C_c(U^{-1})$.

Observamos que, uma vez demonstrada a afirmação acima, segue que a aplicação * está bem definida em $C_c(G)$, visto que $C_c(G) = span\, \mathcal{C}(G)$ e que é imediato verificar que * é uma aplicação conjugado linear.

Já sabemos que U^{-1} é uma bisseção aberta e é claro que f^* é contínua. Convém observar que

$$supp(f^*) = \overline{\{x \in G | f(x^{-1}) \neq 0\}} := \overline{H},$$

onde H é apenas uma notação para o conjunto em questão a fim de facilitar a escrita.

Dado $x \in supp(f^*)$, existe uma net (x_i) tal que $f(x_i^{-1}) \neq 0$ e $x_i \to x$. Como $f(x_i^{-1}) \neq 0$, temos $x_i^{-1} \in supp(f)$. Ademais, uma vez que $x_i^{-1} \to x^{-1}$, segue que $x^{-1} \in supp(f) \subset U$, portanto $x \in U^{-1}$, mostrando que $supp(f^*) \subset U^{-1}$.

Resta mostrarmos que $supp(f^*)$ é compacto. Como $supp(f)$ é compacto e a função inversão é contínua, temos que $supp(f)^{-1}$ é compacto (onde a notação empregada aqui é a mesma da Proposição 6). É imediato perceber que $H \subset \{x^{-1} | f(x) \neq 0\} \subset supp(f)^{-1}$. Como $supp(f)^{-1}$ é compacto, segue que $\overline{H} \subset supp(f)^{-1}$, o que mostra que $supp(f^*) = \overline{H}$ é compacto, já que é um conjunto fechado contido em um compacto.

Com isso, fica demonstrado a boa definição da aplicação * em $\mathcal{C}(G)$.

Para termos a boa definição da involução em $C_c(G)$, basta observarmos que para quaisquer $f, g \in C_c(G)$, vale que $(f+g)^* = f^* + g^*$ e então usarmos o fato de que $C_c(G)$ é um espaço vetorial e span linear de $\mathcal{C}(G)$. Vamos agora estudar a multiplicação.

Afirm. 2: Dadas $f, g \in C_c(G)$, temos que a soma

$$\sum_{h \in G; r(h)=r(g)} f(h)g(h^{-1}x)$$

é finita, para qualquer $x \in G$.

Fixado $x \in G$, já observamos que, como G é étale, então $G^{(0)}$ é aberto em G (Corolário 1). Portanto $r^{-1}(r(x))$ é discreto, tendo em vista a Proposição 3. Defina

$$I := \{h \in G | f(h) \neq 0; r(h) = r(x)\}.$$

É imediato observar que $I \subset supp(f) \cap r^{-1}(r(x))$. Uma vez que $supp(f)$ é compacto e $r^{-1}(r(x))$ é discreto, temos necessariamente que I é finito, garantindo a afirmação e mostrando que a função $f \cdot g$ está bem definida.

De fato, I será finito pois, do contrário, existirá uma net $h_i \in I$ com infinitos elementos distintos entre si. Assim, como $supp(f)$ é compacto, segue que existirá uma subnet $h_j \in supp(f)$ convergente para $h \in supp(f)$. Uma vez que $r(h_i) = r(x)$, segue que $r(h) = r(x)$, mostrando que $h \in r^{-1}(r(x))$, o que é absurdo, visto que $r^{-1}(r(x))$ é discreto.

Tendo já mostrado que a soma é finita, continuemos com $x \in G$

fixado. A próxima afirmação nos dará uma outra maneira de calcular $f \cdot g(x)$, o que nos será útil mais adiante.

Afirm. 3: Para $x \in G$ fixado, temos que

$$\sum_{(y,z)\in G^{(2)};yz=x} f(y)g(z) = \sum_{y\in G;r(y)=r(x)} f(y)g(y^{-1}x).$$

De fato, isso é apenas uma "mudança de variável". Considerando a soma à direita e, para cada y no somatório, escrevendo $z = y^{-1}x$, temos que $r(z) = r(y^{-1}) = s(y)$, portanto $(y, z) \in G^{(2)}$ e que $yz = y(y^{-1}x) = x$, exatamente o que é apresentando no conjunto de índices da soma à esquerda.

Afirm. 4: Se $f, g \in \mathcal{C}(G)$, então $f \cdot g \in \mathcal{C}(G)$.

Dadas tais funções f e g, denotemos por $A := supp(f) \subset U$ e $B := supp(g) \subset V$, onde U e V são bisseções abertas. Fixemos um $x \in G$. Se $f \cdot g(x) \neq 0$, então existem y, z tais que $yz = x$ e $f(y), g(z) \neq 0$, garantindo que $y \in A \subset U$ e $z \in B \subset V$, ou seja, $x \in UV$. Ademais, como a função $r|_U$ é homeomorfismo e $r(y) = r(x)$, segue que podemos escrever $y = r|_U{}^{-1}(r(x))$. Analogamente, podemos escrever $z = s|_V{}^{-1}(s(x))$.

Pelo mesmo argumento, se $x \in UV$, então existirão únicos y, z tais que $y \in U, z \in V$ e $yz = x$ pois as funções $r|_U$ e $s|_V$ são homeomorfismos. Portanto, a partir de tais dados, podemos concluir que

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} f(r|_U{}^{-1}(r(x)))\ g(s|_V{}^{-1}(s(x))), \text{se } x \in UV \\ 0, \text{se } x \notin UV \end{cases}$$

Em particular, observamos que $f \cdot g|_{UV}$ é contínua.

Agora, como A e B são compactos, então $A \times B$ também será. Como $G^{(2)}$ é um fechado de G, segue que $G^{(2)} \cap A \times B$ é um fechado de $A \times B$. Segue daí que AB é compacto, uma vez que a multiplicação $A \times B \cap G^{(2)} \to AB$ é contínua e sobrejetora.

É claro que $AB \subset UV$. Vamos justificar que $f \cdot g$ se anula fora de AB. De fato, se $x \notin UV$, já vimos que $f \cdot g(x) = 0$. Agora, se $x \in UV \backslash AB$, então, sem perda de generalidade, $x = yz$, para certo $y \notin A$, de modo que $f(y) = 0$ (lembre-se que $A = supp(f)$).

Disso, concluimos que AB é um compacto no qual $f \cdot g$ se anula fora dele. Pela definição do $supp(f \cdot g)$, segue que $supp(f \cdot g) \subset AB$, já que $supp(f \cdot g)$ é o menor fechado que contém os pontos onde $f \cdot g$ não se anula. Portanto, temos que o fechado $supp(f \cdot g)$ está contido em um compacto, o que garante que $supp(f \cdot g)$ é compacto.

Para concluir, resta justificar que $f \cdot g$ é contínua em todo o domínio, não apenas em UV. Justificado tal fato, teremos justificado que se $f \in C_c(U)$ e $g \in C_c(V)$, então $f \cdot g \in C_c(UV)$, finalizando a afirmação.

Para justificar a continuidade de $f \cdot g$, lembremos que $f \cdot g$ se anula fora do compacto AB e que AB está contido no aberto UV, onde já sabemos que $f.g$ é contínua. Portanto, dados $x \in G$ e uma net x_i convergindo para x, temos que: se $x \notin UV$, então x pertence ao aberto $G \backslash AB$, de modo que $x_i \in G \backslash AB$ eventualmente, mostrando que $f \cdot g(x_i) = f \cdot g(x) = 0$ para tais índices. Assim, trivialmente temos que $f \cdot g(x_i) \to f \cdot g(x)$. Agora, se $x \in UV$, então $x_i \in UV$ eventualmente, pois UV é aberto. Logo $f \cdot g(x_i) \to f \cdot g(x)$ pois em UV já vimos que $f \cdot g$ é contínua.

Novamente usando que $C_c(G) = span\, \mathcal{C}(G)$, temos que, a partir da Afirmação 4, é verdade que se $f, g \in C_c(G)$, então $f \cdot g \in C_c(G)$. Por completude, vamos justificar melhor essa passagem. De fato, se $f \in C_c(U)$ e $g \in C_c(V)$ onde U e V são bisseções abertas, sabemos que $f.g \in C_c(UV)$ e que UV é bisseção aberta. Agora, considerando $f, g \in C_c(G)$ e escrevendo f e g como span linear de elementos de $\mathcal{C}(G)$, ou seja, $f = \sum f_i$ e $g = \sum g_j$ com $f_i \in C_c(U_i)$ e $g_j \in C_c(V_j)$, segue que $f.g = \sum f_i.g_j$, onde $f_i.g_j \in C_c(U_iV_j)$, donde segue o resultado.

Finalmente, para concluir que $C_c(G)$ tem estrutura de *-álgebra, devemos provar que, para quaisquer $f, g, h \in C_c(G)$, vale:

$(i)\, (f^*)^* = f$. Basta notar que, para qualquer $x \in G$,

$$(f^*)^*(x) = \overline{f^*(x^{-1})} = \overline{\overline{f((x^{-1})^{-1})}} = f(x).$$

$(ii)\, (f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*$. Já vimos que, para qualquer $x \in G$, temos que $f \cdot g(x) = \sum_{\alpha\beta = x} f(\alpha) g(\beta)$. Daí, segue que

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^*(x) &= \overline{f \cdot g(x^{-1})} = \sum_{\alpha\beta = x^{-1}} \overline{f(\alpha) g(\beta)} \\
&= \sum_{\beta^{-1}\alpha^{-1} = x} g^*(\beta^{-1}) f^*(\alpha^{-1}) = \sum_{\gamma\eta = x} g^*(\gamma) f^*(\eta) \\
&= (g^* \cdot f^*)(x).
\end{aligned}
$$

(iii) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Usando a expressão da multiplicação como acima, temos para $x \in G$,

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g) \cdot h(x) &= \sum_{\alpha\beta = x} (f \cdot g)(\alpha) h(\beta) \\
&= \sum_{\alpha\beta = x} \left(\sum_{\gamma\eta = \alpha} f(\gamma) g(\eta) \right) h(\beta) \\
&= \sum_{\gamma\eta\beta = x} f(\gamma) g(\eta) h(\beta), \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
f \cdot (g \cdot h)(x) &= \sum_{\alpha\beta = x} f(\alpha)(g \cdot h)(\beta) = \sum_{\alpha\beta = x} f(\alpha) \left(\sum_{\gamma\eta = \beta} g(\gamma) h(\eta) \right) \\
&= \sum_{\alpha\gamma\eta = x} f(\alpha) g(\gamma) h(\eta), \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

donde segue a demonstração, visto que as equações (2.1) e (2.2) são iguais.

Capítulo 3

C^*-álgebras de um grupóide

3.1 Representações de $C_c(G)$

Mais uma vez, estaremos tratando do caso de G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Lembramos que, nesse caso, $G^{(0)}$ é um aberto (e fechado) de G. Dessa maneira, usando o mesmo argumento do final do Teorema 1, qualquer função contínua de suporte compacto f que estiver definida apenas em $G^{(0)}$, terá uma extensão contínua trivial para $C_c(G)$, bastando estender com zeros.

Se U é uma bisseção aberta de G e $f \in C_c(U)$, então vimos que $f^* \in C_c(U^{-1})$ e que $f \cdot f^* \in C_c(UU^{-1})$. Observamos que, nesse caso,

$UU^{-1} = r(U)$ via o homeomorfismo r:

De fato, UU^{-1} é uma bisseção aberta e homeomorfa a $r(UU^{-1})$. Mas, para qualquer $xy^{-1} \in UU^{-1}$, temos que $r(xy^{-1}) = r(x) \in r(U)$ e que para qualquer $r(z) \in r(U)$, temos que $zz^{-1} \in UU^{-1}$ e $r(zz^{-1}) = r(z)$, justificando o homeomorfismo.

Uma vez que $r(U) \subset G^{(0)}$, podemos concluir que $f \cdot f^* \in C_c(G^{(0)})$ para qualquer $f \in C_c(U)$. A fim de estudar as representações de $C_c(G)$, precisamos da seguinte caracterização.

Proposição 13. *$C_c(G^{(0)})$ pode ser escrito como uma união de C^*-álgebras.*

Demonstração: Seja K um compacto contido em $G^{(0)}$. Defina

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(K): &= \{f : G \to \mathbb{C} \quad | \quad \text{f é continua e se anula fora de K}\} \\ &= \{f : G \to \mathbb{C} \,|\, supp(f) \subset K\}. \end{aligned}$$

Com a multiplicação e a involução natural, temos que $\mathcal{C}(K)$ é uma *-álgebra. Ademais, definindo a norma por $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$, segue que $\mathcal{C}(K)$ é uma C^*-álgebra.

Tendo feita tal construção padrão, a demonstração seguirá de: para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$, denote por $K_f := supp(f)$. Assim, afirmamos que

$$C_c(G^{(0)}) = \bigcup_{f \in C_c(G^{(0)})} \mathcal{C}(K_f).$$

É claro que se $f \in C_c(G^{(0)})$, então $f \in \mathcal{C}(K_f)$. Agora, seja $g \in \bigcup_{f \in C_c(G^{(0)})} \mathcal{C}(K_f)$. Então $g \in \mathcal{C}(K_f)$ para certa $f \in C_c(G^{(0)})$. Portanto g se anula fora do compacto K_f, de modo que $supp(g) \subset K_f$, o que mostra que $supp(g)$ é compacto, concluindo que $g \in C_c(G^{(0)})$.

■

Vamos agora começar de fato a estudar representações de $C_c(G)$.

Para isso, considere $\pi : C_c(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação qualquer, onde H é um espaço de Hilbert e $\mathcal{B}(H)$ é a C^*-álgebra dos operadores limitados em H. Lembramos que, por representação, queremos dizer que π é um *-homomorfismo.

Fixemos um $f \in \mathcal{C}(G)$. Logo, existe U bisseção aberta tal que $f \in C_c(U)$ e $f \cdot f^* \in C_c(UU^{-1}) \subset C_c(G^{(0)})$. Mas, de acordo com a proposição 8, temos que $f \cdot f^* \in A$, onde A é alguma das C^*-álgebras citadas na Proposição. Portanto, se restringirmos π a A, temos $\pi|_A : A \to \mathcal{B}(H)$ um *-homomorfismo entre C^*-álgebras, o que garante que $\|\pi(f \cdot f^*)\| \leq \|f \cdot f^*\|_\infty$.

Mas daí segue que $\|\pi(f)\|^2 = \|\pi(f \cdot f^*)\| \leq \|f \cdot f^*\|_\infty$. Afirmamos que $\|f \cdot f^*\|_\infty = \|f\|_\infty^2$, donde seguirá que $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty$, para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$. Vamos aos fatos:

Proposição 14. *Para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$, temos $\|f \cdot f^*\|_\infty = \|f\|_\infty^2$.*

Demonstração: Suponha $f \in C_c(U)$, onde U é uma bisseção aberta.

Para cada $x \in G$, temos que $f \cdot f^*(x) = \sum_{yz=x} f(y)\overline{f(z^{-1})}$. Consideremos agora $x \in G$ tal que $f \cdot f^*(x) \neq 0$. Logo, existe pelo menos um par $(y, z) \in G^{(2)}$ tal que $yz = x$ e $f(y), f(z^{-1}) \neq 0$, o que garante que $y, z^{-1} \in supp(f) \subset U$.

Observemos que esse par (y, z) é único, uma vez que U é uma bisseção. De fato, se existisse, por exemplo, algum par (y', z') nas mesmas condições, então teríamos que $r(y) = r(x) = r(y')$ e que $y, y' \in U$, o que seria absurdo, dado que a função range é homeomorfismo em U. Analogamente justificamos a unicidade de z.

Mais uma vez usando que $yz = x$, temos que $s(y) = r(z) = s(z^{-1})$, o que garante que $y = z^{-1}$, uma vez que $y, z^{-1} \in U$ e a função source é homeomorfismo sobre U. Agora, usando o fato de que a função range é homeo em U e que $r(y) = r(x)$, segue que podemos escrever $y = r|_U{}^{-1}(r(x))$.

Assim, concluímos que para qualquer $x \in G$ tal que $f \cdot f^*(x) \neq 0$, existe único $y \in U$ (a saber, $y = r|_U{}^{-1}(r(x))$) tal que $f \cdot f^*(x) = f(y)\overline{f(y)} = |f(y)|^2$. Portanto, calculamos

$$\|f \cdot f^*\|_\infty = \sup_{x \in G} \|f \cdot f^*(x)\| = \sup_{y \in U} |f(y)|^2 = \|f\|_\infty^2,$$

onde a igualdade da direita é justificada uma vez que $supp(f) \subset U$.

■

A partir de tal proposição, como já foi citado, podemos concluir o seguinte lema:

Lema 2. *Se* $\pi : C_c(G) \to \mathcal{B}(H)$ *é representação, então* $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ *para qualquer* $f \in \mathcal{C}(G)$. *Com isso, segue que* $\sup\limits_{\pi\ rep} \|\pi(f)\| < \infty$, *para qualquer* $f \in C_c(G)$.

Demonstração: De fato, f pode ser escrita por $f = f_1 + ... + f_n$, onde cada $f_i \in \mathcal{C}(G)$. Portanto temos que

$$\|\pi(f)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\pi(f_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty < \infty$$

Também observamos que o número $\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty$ não depende da representação π, de modo que para qualquer $f \in C_c(G)$, temos que

$$\sup_{\pi \text{ rep}} \|\pi(f)\| < \infty,$$

onde o supremo é tomado na coleção de todas as representações de $C_c(G)$. ∎

Vamos agora usar tais fatos para construir a C^*-álgebra (cheia) de G. Para isso, definimos

$$\|f\|_u := \sup_{\pi \text{ rep}} \|\pi(f)\|, \forall f \in C_c(G).$$

É imediato verificar que $\|\cdot\|_u$ é C^*-seminorma em $C_c(G)$. Mas, de fato, vamos em seguida fazer uma contrução de uma representação fiel (injetiva) de $C_c(G)$, o que garantirá que $\|\cdot\|_u$ é uma C^*-norma em $C_c(G)$. Tendo feito isso, definiremos a C^*-álgebra cheia de G como sendo o completamento de $C_c(G)$ em tal norma, ou seja,

$$C^*(G) := \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_u}$$

3.2 Representações regulares

Vamos agora na direção de construir a representação de $C_c(G)$ acima citada. Tal representação é conhecida como representação regular, denotada por π_λ. Após sua construção, será possível definir a C^*-álgebra reduzida de G.

De fato, a representação regular é uma soma direta (indexada por $G^{(0)}$) de certas representações, denotadas por π_λ^u, ou seja, $\pi_\lambda := \oplus_{u \in G^{(0)}} \pi_\lambda^u$. Portanto, a fim de entendermos a representação regular, fixemos $u \in G^{(0)}$. Associado a tal u, temos o conhecido espaço de Hilbert $l^2(s^{-1}(u))$ definido por

$$l^2(s^{-1}(u)) = \left\{ \xi : s^{-1}(u) \to \mathbb{C} \mid \sum_{g \in s^{-1}(u)} |\xi(g)|^2 < \infty \right\},$$

com produto interno dado por

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{g \in s^{-1}(u)} \xi(g)\overline{\eta(g)}.$$

Agora, definimos π_λ^u:

$$\pi_\lambda^u : C_c(G) \to \mathcal{B}(l^2(s^{-1}(u)))$$

$$f \mapsto \pi_\lambda^u(f) : l^2 \to l^2$$

$$\xi \mapsto \pi_\lambda^u(f)\xi : s^{-1}(u) \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \pi_\lambda^u(f)\xi(g),$$

definido por

$$\pi_\lambda^u(f)\xi(g) = \sum_{h|r(h)=r(g)} f(h)\xi(h^{-1}g)$$

onde estamos abreviando a notação de $l^2(s^{-1}(u))$ para l^2, a fim de facilitar a escrita.

Precisamos mostrar que tal aplicação está bem definida e que é, de fato, um *-homomorfismo. Para isso, vamos seguir um esquema de demonstração análogo ao feito no Teorema 1. Segue então o

Teorema 2. *Seja G étale e $u \in G^{(0)}$. Então a aplicação π_λ^u definida acima é uma representação de $C_c(G)$.*

Demonstração: Abreviaremos a notação de $l^2(s^{-1}(u))$ por l^2, a fim de facilitar a escrita.

Afirm. 1: Fixados $f \in C_c(G)$ e $\xi \in l^2$, a soma $\sum_{h|r(h)=r(g)} f(h)\xi(h^{-1}g)$ é finita (e portanto bem definida) para qualquer $g \in s^{-1}(u)$.

De fato, basta observar que o conjunto de índices da soma tais que

f não se anula é finito, pois

$$\{h \in G \mid f(h) \neq 0;\, r(h) = r(g)\} \subset r^{-1}(r(g)) \cap supp(f),$$

e sabemos que $r^{-1}(r(g))$ é discreto e $supp(f)$ é compacto.

Afirm. 2: Para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$ e $\xi \in l^2$, temos que $\|\pi_\lambda^u(f)\xi\| \leq \|f\|_\infty \|\xi\|$.

Para demonstrar tal desigualdade, fixemos $f \in C_c(U)$, onde U é uma bisseção aberta. Nesse caso, observamos que para qualquer $g \in s^{-1}(u)$, o conjunto $r^{-1}(r(g)) \cap supp(f)$ tem no máximo um elemento. Sejam x e y elementos de tal interseção. Então $r(x) = r(g) = r(y)$ e que $x, y \in supp(f) \subset U$. Mas a função range é homeomorfismo em U, garantindo que $x = y$. Nesse caso, usaremos a notação h_g para nos referir a tal elemento.

Portanto, podemos escrever $\pi_\lambda^u(f)\xi$ da seguinte forma:

$$\pi_\lambda^u(f)\xi(g) = \begin{cases} f(h_g)\xi(h_g^{-1}g), \; \exists! h_g \in r^{-1}(r(g)) \cap supp(f) \\ 0, r^{-1}(r(g)) \cap supp(f) = \emptyset \end{cases}$$

Com isso, podemos calcular

$$
\begin{aligned}
\|\pi^u_\lambda(f)\xi\|^2 &= \sum_{g\in s^{-1}(u)} |f(h_g)\xi(h_g^{-1}g)|^2 \leq \sum_{g\in s^{-1}(u)} |f(h_g)|^2|\xi(h_g^{-1}g)|^2 \\
&\leq \|f\|^2_\infty \sum_{g\in s^{-1}(u)} |\xi(h_g^{-1}g)|^2 \leq \|f\|^2_\infty\|\xi\|^2.
\end{aligned}
$$

Tendo provado a desigualdade enunciada, segue que $\pi^u_\lambda(f)$ está definida como função e é contínua. Ademais, segue também da desigualdade demonstrada que $\pi^u_\lambda(f)$ é contínua para qualquer $f \in C_c(G)$. Por construção, é claro que será um operador linear, de modo que $\pi^u_\lambda(f) \in \mathcal{B}(l^2)$. Assim, a função π^u_λ está bem definida. Segue, novamente por construção, que π^u_λ é linear.

As próximas duas afirmações mostrarão que π^u_λ é um *-homomorfismo, concluindo o teorema.

Afirm. 3: Para quaisquer $f_0, f_1 \in C_c(G)$, temos que
$\pi^u_\lambda(f_0 \cdot f_1) = \pi^u_\lambda(f_0)\pi^u_\lambda(f_1)$.

Para provar tal igualdade, devemos avaliar as funções em um $\xi \in l^2$. Mas, uma vez que o conjunto $(\delta_g)_{g\in s^{-1}(u)}$ forma uma base ortonormal para l^2, basta avaliarmos nos elementos da base. Lembramos que as funções δ_g são definidas por

$$
\delta_g(h) = \begin{cases} 1,\ h = g \\ 0,\ h \neq g \end{cases}
$$

Portanto, fixando um δ_{g_0}, temos

$$\pi_\lambda^u(f_0)\delta_{g_0}(g) = \sum_{h;r(h)=r(g)} f_0(h)\delta_{g_0}(h^{-1}g) = f_0(g{g_0}^{-1}),$$

o que nos leva a concluir que

$$\pi_\lambda^u(f_0)\delta_{g_0} = \sum_{g;s(g)=u} f_0(g{g_0}^{-1})\delta_g.$$

Portanto, calculamos

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda^u(f_0)\pi_\lambda^u(f_1)\delta_{g_0} &= \pi_\lambda^u(f_0)\left(\sum_{s(g)=u} f_1(g{g_0}^{-1})\delta_g\right) \\
&= \sum_{s(h)=u}\left(\sum_{s(g)=u} f_0(hg^{-1})f_1(g{g_0}^{-1})\right)\delta_h.
\end{aligned}$$

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda^u(f_0\cdot f_1)\delta_{g_0} &= \sum_{s(h)=u} f_0\cdot f_1(h{g_0}^{-1})\delta_h \\
&= \sum_{s(h)=u}\left(\sum_{k;r(k)=r(h{g_0}^{-1})} f_0(k)f_1(k^{-1}h{g_0}^{-1})\right)\delta_h.
\end{aligned}$$

Para mostrar a igualdade entre esses termos, vamos mostrar que os somatórios entre parênteses coincidem. Isso será feito a partir de uma mudança de variável.

Para isso, fixemos $h \in G$ tal que $s(h) = u$. É imediato verificar que as funções a seguir são bijeções inversas entre si:

$$\phi : s^{-1}(u) \to r^{-1}(r(h)),\ g \mapsto hg^{-1}$$

$$\psi : r^{-1}(r(h)) \to s^{-1}(u),\ k \mapsto k^{-1}h$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in s^{-1}(u)} f_0(hg^{-1}) f_1(g{g_0}^{-1}) &= \sum_{g \in s^{-1}(u)} f_0(\phi(g)) f_1(\psi(\phi(g)){g_0}^{-1}) \\
&= \sum_{k \in r^{-1}(r(h))} f_0(k) f_1(\psi(k){g_0}^{-1}) \\
&= \sum_{k \in r^{-1}(r(h))} f_0(k) f_1(k^{-1}h{g_0}^{-1}).
\end{aligned}$$

Apenas enfatizamos que a igualdade

$$\sum_{g \in s^{-1}(u)} f_0(\phi(g)) f_1(\psi(\phi(g)){g_0}^{-1}) = \sum_{k \in r^{-1}(r(h))} f_0(k) f_1(\psi(k){g_0}^{-1})$$

segue apenas do fato de, nomeando por $k = \phi(g)$, os índices do somatório podem ser tomados no conjunto $r^{-1}(r(h))$ em vez de $s^{-1}(u)$ uma vez que temos as bijeções ϕ e ψ apresentadas.

Afirm. 4: Para qualquer $f \in C_c(G)$, temos $\pi_\lambda^u(f)^* = \pi_\lambda^u(f^*)$.

Fixando um $f \in C_c(G)$, para provar tal igualdade, basta mostrarmos que

$$\langle \pi_\lambda^u(f^*)\delta_{g_0}, \delta_{g_1}\rangle = \langle \delta_{g_0}, \pi_\lambda^u(f)\delta_{g_1}\rangle ,$$

para elementos quaisquer $\delta_{g_0}, \delta_{g_1}$ da base ortonormal de l^2. Então, calculando

$$\begin{aligned}
\langle \pi_\lambda^u(f^*)\delta_{g_0}, \delta_{g_1}\rangle &= \left\langle \sum_{s(g)=u} f^*(g{g_0}^{-1})\delta_g, \delta_{g_1}\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{s(g)=u} \overline{f(g_0 g^{-1})}\delta_g, \delta_{g_1}\right\rangle \\
&= \sum_{s(g)=u} \overline{f(g_0 g^{-1})}\,\langle \delta_g, \delta_{g_1}\rangle = \overline{f(g_0 g_1^{-1})} \\
&= \sum_{s(g)=u} \overline{f(g g_1^{-1})}\,\langle \delta_{g_0}, \delta_g\rangle \\
&= \left\langle \delta_{g_0}, \sum_{s(g)=u} f(g g_1^{-1})\delta_g \right\rangle = \langle \delta_{g_0}, \pi_\lambda^u(f)\delta_{g_1}\rangle ,
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. Vale apenas ressaltar que, sem perda de generalidade, assumimos que o produto interno é linear na primeira variável e conjugado linear na segunda.

■

Obs.: Na demonstração do teorema anterior, mais precisamente na Afirmação 3, foi mostrado que, para qualquer $u \in G^{(0)}$ e $g_0 \in s^{-1}(u)$, vale a igualdade

$$\pi_\lambda^u(f)\delta_{g_0} = \sum_{s(g)=u} f(g{g_0}^{-1})\delta_g.$$

Novamente através de uma mudança de variável, podemos reescrever tal soma da seguinte forma:

$$\pi_\lambda^u(f)\delta_{g_0} = \sum_{s(g)=u} f(g{g_0}^{-1})\delta_g = \sum_{s(g)=r(g_0)} f(g)\delta_{gg_0}$$

De fato, basta notar que as funções

$$\phi : s^{-1}(u) \to s^{-1}(r(g_0)),\ g \mapsto g{g_0}^{-1}$$

$$\psi : s^{-1}(r(g_0)) \to s^{-1}(u),\ h \mapsto hg_0$$

são bijeções inversas entre si, donde segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in s^{-1}(u)} f(g{g_0}^{-1})\delta_g &= \sum_{g\in s^{-1}(u)} f(\phi(g))\delta_g \\
&= \sum_{h\in s^{-1}(r(g_0))} f(\phi(\psi(h)))\delta_{\psi(h)} \\
&= \sum_{h\in s^{-1}(r(g_0))} f(h)\delta_{hg_0}.
\end{aligned}$$

Com isso, observemos que para qualquer $f \in C_c(G)$ e $h \in G$ fixados, definindo $u = s(h)$, podemos escrever

$$\pi_\lambda^u(f)\delta_u = \sum_{g;\, s(g)=r(u)=u} f(g)\delta_{gu},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left\langle \pi_\lambda^{s(h)}(f)\delta_{s(h)}, \delta_h \right\rangle &= \left\langle \sum_{g;\, s(g)=u} f(g)\delta_{gu}, \delta_h \right\rangle \\ &= \sum_{g; s(g)=u} f(g) \left\langle \delta_{gu}, \delta_h \right\rangle = f(h) \end{aligned}$$

onde a igualdade da direita segue simplesmente do fato de, como estamos numa base ortonormal, vale que

$$gu = h \Leftrightarrow g = hu^{-1} \Leftrightarrow g = hu \Leftrightarrow g = h(h^{-1}h) = h.$$

Assim, fica demonstrada a seguinte proposição

Proposição 15. *Todo $f \in C_c(G)$ pode ser expresso através da fórmula*

$$f(h) = \left\langle \pi_\lambda^{s(h)}(f)\delta_{s(h)}, \delta_h \right\rangle, \forall h \in G.$$

O próximo objetivo é construir a representação regular de $C_c(G)$ e mostrar que é uma representação fiel. Assim, estaremos em condições de definir a C^*-álgebra reduzida de G, bem como justificar com precisão a construção da C^*-álgebra cheia de G, onde foi assumido que a representação regular é fiel.

Enfatizamos mais uma vez que para qualquer $u \in G^{(0)}$, $C_c(G)$ é representada via π_λ^u no espaço de Hilbert $l^2(s^{-1}(u))$. A partir de tais espaços, podemos construir outro espaço de Hilbert da seguinte maneira:

Denotando por S a soma direta algébrica

$$S = \bigoplus_{u \in G^{(0)}} l^2(s^{-1}(u)),$$

definimos um produto interno em S por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{u \in G^{(0)}} \langle x_u, y_u \rangle_{l^2(s^{-1}(u))},$$

onde $x = (x_u)$ e $y = (y_u)$.

Tal produto interno induz de maneira canônica uma norma em S e o completamento de S em tal norma é um espaço de Hilbert, denotado por $l^2(G)$. Ou seja,

$$l^2(G) := \overline{\bigoplus_{u \in G^{(0)}} l^2(s^{-1}(u))}.$$

Tendo criado o espaço de Hilbert acima, fixemos agora $f \in C_c(G)$. Defina a aplicação

$$\pi_\lambda(f) : S \to S$$

$$x = (x_u) \mapsto (\pi_\lambda^u(f)(x_u)).$$

Por construção, é imediato observar que $\pi_\lambda(f)$ é linear. Vejamos que é contínua. De fato, lembramos que na Afirmação 2 do Teorema 2, foi mostrado que $\|\pi_\lambda^u(f)x_u\| \leq \|f\|_\infty \|x_u\|$, para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$. Disso, segue que

$$\|\pi_\lambda(f)(x)\|^2 = \sum_{u \in G^{(0)}} \|\pi_\lambda^u(f)x_u\|^2 \leq \|f\|_\infty{}^2 \sum_{u \in G^{(0)}} \|x_u\|^2 = \|f\|_\infty{}^2 \|x\|^2,$$

ou seja, $\|\pi_\lambda(f)(x)\| \leq \|f\|_\infty \|x\|$, para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$.

Agora, para um $f \in C_c(G)$ qualquer, escrevemos $f = f_1 + .. + f_n$, onde os $f_i's$ estão suportados em bisseções abertas. Segue que

$$\|\pi_\lambda(f)(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\pi_\lambda(f_i)(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty \|x\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty \right) \|x\|,$$

o que demonstra a continuidade de $\pi_\lambda(f)$.

Sendo, portanto, um operador linear contínuo, $\pi_\lambda(f)$ tem uma (única) extensão a $l^2(G)$, que, por abuso de linguaguem, terá a mesma notação. Com isso demonstrado, podemos definir formalmente a representação regular de G:

Definição 10. *A representação regular de $C_c(G)$ é o *-homomorfismo*

$$\pi_\lambda : C_c(G) \to \mathcal{B}(l^2(G))$$

$$f \mapsto \pi_\lambda(f)$$

que satisfaz $\pi_\lambda(f)(x) = (\pi_\lambda^u(f)(x_u))$, *para todo* $x = (x_u) \in S$.

Proposição 16. *A representação regular de* $C_c(G)$ *é fiel.*

Demonstração: Isto segue como corolário da Proposição 15. De fato, suponha $f \in C_c(G)$ tal que $\pi_\lambda(f) \equiv 0$. Portanto, para qualquer $x = (x_u) \in S$, temos que $\pi_\lambda(f)x = (\pi_\lambda^u(f)(x_u)) = 0$. Em particular, segue que $\pi_\lambda^{s(h)}(f)\delta_{s(h)} = 0$, para todo $h \in G$, o que demonstra o resultado, tendo em vista a proposição citada.

■

3.3 C^*-álgebras

Finalmente, estamos em condições de definir precisamente as C^*-álgebras de G.

Definição 11. *Seja* G *étale. A* ***C^*-álgebra cheia de*** G *é o completamento de* $C_c(G)$ *com respeito à* C^**-norma*

$$\|f\|_u := \sup_{\pi\, rep} \|\pi(f)\|, \text{ para toda } f \in C_c(G),$$

denotada por $C^*(G)$.

A ***C^*-álgebra reduzida de*** G *é o completamento de* $C_c(G)$ *com* *respeito à C^*-norma*

$$\|f\|_r := \|\pi_\lambda(f)\|, \textit{ para toda} f \in C_c(G),$$

denotada por $C_r^*(G)$.

Em relação à norma reduzida, podemos expressa-la de outra maneira, a saber:

Proposição 17. *Para qualquer $f \in C_c(G)$, temos*

$$\|\pi_\lambda(f)\| = \sup_{u \in G^{(0)}} \|\pi_\lambda^u(f)\|.$$

Demonstração: Primeiro, observamos que para qualquer $u \in G^{(0)}$, temos que

$$\|\pi_\lambda^u(f)\| := \sup_{\|x_u\| \leq 1} \|\pi_\lambda^u(f)(x_u)\| \leq \|\pi_\lambda(f)\|.$$

De fato, para qualquer $x_u \in l^2(s^{-1}(u))$, podemos definir $\overline{x_u} := (0...x_u..0..) \in l^2(G)$, onde a única coordenada possivelmente não nula é a u-ésima. Assim, segue que

$$\|\pi_\lambda^u(f)(x_u)\| = \|\pi_\lambda(f)(\overline{x_u})\| \leq \|\pi_\lambda(f)\|\|\overline{x_u}\| = \|\pi_\lambda(f)\|\|x_u\|.$$

Portanto, tomando o supremo em $u \in G^{(0)}$, segue que

$$\sup_u \|\pi_\lambda^u(f)\| \leq \|\pi_\lambda(f)\|.$$

Agora, calculamos

$$\|\pi_\lambda(f)\| = \sup_{x \in l^2(G), \|x\| \leq 1} \|\pi_\lambda(f)x\| = \sup_{x \in S, \|x\| \leq 1} \|\pi_\lambda(f)x\|$$

onde a igualdade da direita segue do fato de que S é denso em $l^2(G)$.

Mas, para $x \in S$, temos

$$\|\pi_\lambda(f)x\|^2 = \|(\pi_\lambda^u(f)(x_u))\|^2 = \sum_{u \in G^{(0)}} \|\pi_\lambda^u(f)x_u\|^2 \leq (\sup_u \|\pi_\lambda^u(f)\|)^2 \|x\|^2,$$

(observemos que a desigualdade acima está bem definida visto que já mostramos que $\sup_u \|\pi_\lambda^u(f)\|$ é finito) donde segue que

$$\|\pi_\lambda(f)\| \leq \sup_u \|\pi_\lambda^u(f)\|,$$

finalizando a demonstração.

■

O resultado acima é um caso particular do seguinte caso mais geral, cuja demonstração é análoga ao que foi apresentado.

Proposição 18. *Considere I um conjunto qualquer e representações $\phi_i : A \to \mathcal{B}(H_i)$ de uma C^*-álgebra A em espaços de Hilbert H_i, para* *qualquer $i \in I$. Então existe uma representação*

$$\phi := \oplus_i \phi_i : A \to \mathcal{B}(\overline{\oplus_i H_i}))$$

tal que para qualquer $x = (x_i) \in \oplus_i H_i$, vale que $\phi(a)x = (\phi_i(a)(x_i))$. Ademais, $\|\phi(a)\| = \sup_i \|\phi_i(a)\|$, para qualquer $a \in A$.

Naturalmente, a representação construída é nomeada por representação soma direta.

Para finalizar este capítulo, vamos mostrar que a C^*-álgebra reduzida pode ser vista como um quociente da cheia e mostrar que $C_0(G^{(0)})$ pode ser vista como sub-C^*-álgebra de $C^*(G)$.

Proposição 19. *Seja G grupóide localmente compacto, hausdorff e étale. Então existe um ideal I de $C^*(G)$ tal que*

$$\frac{C^*(G)}{I} \simeq C_r^*(G).$$

Demonstração: Denotemos por q a função identidade, ou seja,

$$q : C_c(G) \to C_r^*(G)\, f \mapsto q(f) := f$$

Segue que q é um *-homomorfismo e contínuo na norma cheia, visto que

$$\|q(f)\|_r = \|f\|_r = \sup_{u \in G^{(0)}} \|\pi_\lambda^u(f)\| \leq \|f\|_u,$$

o que garante uma extensão para $C^*(G)$, denotada também por q. É claro que tal extensão é um *-homomorfismo de C^*-álgebras. Portanto, denotando por A a imagem de q, temos que $C_c(G) \subset A$. Ademais, como A é uma C^*-álgebra e $C_c(G)$ é denso em $C_r^*(G)$, segue que

$$C_r^*(G) = \overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_r} \subset \overline{A} = A,$$

mostrando que q é sobrejetor. Assim, é claro que o ideal I que estamos procurando é dado por $I := Ker\, q$.

■

A aplicação q criada na proposição anterior é muitas vezes chamada de aplicação quociente.

Proposição 20. *Para qualquer B bisseção aberta de G, existe uma aplicação linear isométrica da C^*-álgebra $C_0(B)$ para $C_r^*(G)$.*

Demonstração: Antes de mais nada, como já foi demonstrado, temos que para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$, $\|f\|_r \leq \|f\|_\infty$. Assim, fixando B uma bisseção aberta qualquer, temos que o mapa

$$\theta : C_c(B) \to C_r^*(G),\, f \mapsto f$$

é uma aplicação linear contínua. Agora, usando a Proposição 15, temos que, para qualquer $f \in C_c(G)$ e $h \in G$,

$$|f(h)| = \left| \left\langle \pi_\lambda^{s(h)}(f)\delta_{s(h)}, \delta_h \right\rangle \right| \leq \|\pi_\lambda^{s(h)}(f)\|,$$

pois $\|\delta_u\| = 1, \forall u$.

Daí, segue que

$$\|f\|_\infty = \sup_h \|f(h)\| \leq \sup_h \|\pi_\lambda^{s(h)}(f)\| \leq \|f\|_r,$$

garantindo que θ é uma isometria, de modo que sua extensão será também linear isométrica, demonstrando o resultado.

■

De maneira análoga, o resultado acima também pode ser obtido para $C^*(G)$:

Proposição 21. *Para qualquer B bisseção aberta de G, existe uma aplicação linear isométrica de $C_0(B)$ para $C^*(G)$.*

Demonstração: Já foi demonstrado que, para qualquer $f \in \mathcal{C}(G)$, vale que $\|f\|_u \leq \|f\|_\infty$. Além disso, na proposição anterior, demonstramos que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_r$. É claro que $\|f\|_r \leq \|f\|_u$, de modo que $\|f\|_u = \|f\|_\infty$.

Assim, temos uma aplicação linear isométrica de $C_c(B)$ para $C^*(G)$, que se estende isometricamente para $C_0(B)$, demonstrando o resultado.

■

Corolário 3. $C_0(G^{(0)})$ *é sub-*C^* *álgebra de* $C^*(G)$.

Demonstração: Uma vez que $G^{(0)}$ é uma bisseção aberta de G, de acordo com a proposição anterior, temos que $C_0(G^{(0)})$ é um subespaço fechado de $C^*(G)$. Para ser uma subálgebra, devemos verificar que se $f_1, f_2 \in C_c(G)$ suportadas em $G^{(0)}$, então o produto $f_1 * f_2$ também é suportado em $G^{(0)}$ e que $f_1 * f_2 = f_1 \cdot f_2$, onde $f_1 \cdot f_2$ é o produto pontual e $f_1 * f_2$ representa o produto de convolução, ou seja,

$$f_1 * f_2(\gamma) = \sum_{\alpha\beta=\gamma} f_1(\alpha) f_2(\beta),$$

para $\gamma \in G$.

Mas, uma vez que f_1 e f_2 estejam suportadas em $G^{(0)}$, temos que α e β devem ser tomados em $G^{(0)}$. Neste caso, $\gamma = \alpha\beta$ tem única solução $\alpha = \beta = \gamma$, o que garante que $f_1 * f_2 \in C_c(G^{(0)})$ e que $f_1 * f_2(\gamma) = f_1(\gamma) f_2(\gamma)$. Para a involução, o tratamento é análogo, ficando assim demonstrado o corolário.

∎

Como observação final, ressaltamos que $C_0(G^{(0)})$ também é sub-C^*álgebra de $C_r^*(G)$ e a demonstração para tal fato é análoga ao que fizemos acima.

Capítulo 4

Teorema Principal

4.1 Um pouco mais sobre grupóides

O teorema principal deste trabalho consiste em uma caracterização da simplicidade da C^*-álgebra cheia de G. Para isso, precisamos aprofundar um pouco a teoria de grupóides construída até então. Portanto, começemos fixando G um grupóide localmente compacto, Hausdorff.

Para qualquer $u \in G^{(0)}$, já definimos o grupo $G(u)$, nomeado por "grupo de isotropia em u". Diremos que u tem isotropia trivial se $G(u) = \{u\}$. Ademais, para quaisquer $D, E \subset G^{(0)}$, definimos os conjuntos

$$G^E := \{\gamma \in G \,|\, r(\gamma) \in E\},$$

$$G_D := \{\gamma \in G \,|\, s(\gamma) \in D\}$$

e

$$G_D^E := G^E \cap G_D.$$

Um conjunto $D \subset G^{(0)}$ é dito invariante se, para qualquer $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) \in D$, então $r(\gamma) \in D$.

Obs.: A condição acima apresentada é equivalente a dizer que, para qualquer $\gamma \in G$ tal que $r(\gamma) \in D$, então $s(\gamma) \in D$. De fato, considere $\gamma \in G$ tal que $r(\gamma) \in D$. Segue que $r(\gamma) = s(\gamma^{-1}) \in D$ garante que $r(\gamma^{-1}) \in D$, ou seja, $s(\gamma) \in D$. É claro que o outro lado é análogo.

Assim, observamos que se $D \subset G^{(0)}$ é invariante, então

$$D = \{r(\gamma) \,|\, s(\gamma) \in D\} = \{s(\gamma) \,|\, r(\gamma) \in D\},$$

donde segue que $G^D = G_D$. É também fácil ver que se $D \subset G^{(0)}$ satisfaz $G^D = G_D$, então é invariante. Deixamos então registrado o fato:

Proposição 22. *Um conjunto $D \subset G^{(0)}$ é invariante se, e somente se $G_D = G^D$.*

A seguir, vejamos que a união, interseção e o complementar de conjuntos invariantes ainda é um conjunto invariante. Este resultado é básico mas vamos enunciá-lo como um lema, uma vez que será usado algumas vezes no decorrer do texto.

Lema 3. *Sejam F e F_i conjuntos invariantes de um grupóide G, para i num conjunto de índices I. Então:*

(i) A união $U := \cup_{i \in I} F_i$ é um conjunto invariante.

(ii) A interseção $V := \cap_{i \in I} F_i$ é um conjunto invariante.

(iii) $D := G^{(0)} \backslash F$ é um conjunto invariante.

Demonstração: Para provarmos (i), considere $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) \in U$. Segue que $s(\gamma) \in F_i$ para certo índice $i \in I$. Como F_i é invariante, $r(\gamma) \in F_i$, de modo que $r(\gamma) \in U$. Um tratamento análogo demonstra (ii).

No caso de (iii), seja $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) \in D$. Logo $s(\gamma) \notin F$, de modo que $r(\gamma) \notin F$, pois F é invariante. Segue que $r(\gamma) \in D$, demonstrando o resultado.

■

Ainda estudando conjuntos invariantes de um grupóide, temos a:

Proposição 23. *Seja $U \subset G^{(0)}$ um subconjunto qualquer. Defina $[U] := r(s^{-1}(U))$. Então $[U] = s(r^{-1}(U))$ e é o menor conjunto invariante contendo U.*

Demonstração: Primeiramente, para motrarmos que $[U] = s(r^{-1}(U))$, fixe $\gamma \in [U]$. Então existe $x \in G$ tal que $\gamma = r(x)$ e $s(x) \in U$. Segue que $\gamma = s(x^{-1})$ e $r(x^{-1}) = s(x) \in U$, garantindo que $\gamma \in s(r^{-1}(U))$. A outra inclusão é análoga, donde segue a igualdade desejada.

Para vermos que $U \subset [U]$, basta lembrarmos que as funções source e range atuam como identidades em $G^{(0)}$. Agora, seja V um conjunto invariante, contendo U. Dado $\gamma \in [U]$, existe $x \in G$ tal que $\gamma = s(x)$

com $r(x) \in U$, de modo que $r(x) \in V$. Mas V é invariante, logo $s(x) = \gamma \in V$, donde concluímos que $[U] \subset V$.

Denote por I a interseção de todos os conjuntos invariantes que contenham U. Uma vez que I é a interseção de conjuntos invariantes, o Lema 3 garante que I é um conjunto invariante. Ademais, claramente U está contido em I. Vamos mostrar em seguida que $[U]$ é invariante, o que garantirá a igualdade $[U] = I$, concluindo a demonstração. Portanto, seja $g \in G$ tal que $s(g) \in [U]$. Devemos mostrar que $r(g) \in [U]$. Segue que existe $h \in G$ tal que $s(g) = r(h)$ com $s(h) \in U$. Definindo $k = gh$, temos que $r(g) = r(k)$ e $s(k) = s(h) \in U$, provando que $r(g) \in [U]$. ∎

Vamos agora relembrar as três classes de grupóides que estão relacionadas com o teorema principal do trabalho e estudar algumas propriedades.

Um grupóide G é dito **topologicamente principal** se o conjunto dos elementos que possuem grupo de isotropia trivial é denso em $G^{(0)}$. Ou seja, se $G^{(0)}$ pode ser expresso por

$$G^{(0)} = \overline{\{u \in G^{(0)} \mid G(u) = \{u\}\}}.$$

Um grupóide G é dito **minimal** se $G^{(0)}$ não contém abertos invariantes não triviais, ou seja, se apenas os conjuntos $\emptyset$ e $G^{(0)}$ são abertos invariantes.

Um grupóide é dito **efetivo** se o interior de $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ é vazio. Obs.: vamos usar a notaçao D° para denotar o interior de um conjunto D.

As próximas duas proposições são caracterizações de grupóides localmente principais e efetivos. Vale ressaltar que a caracterização para grupóides efetivos será particularmente interessante ao longo deste capítulo.

Proposição 24. *Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Então G é topologicamente principal se, e somente se, cada aberto não vazio invariante de $G^{(0)}$ contém algum ponto com isotropia trivial.*

Demonstração: É claro que se G é topologicamente principal, então qualquer aberto não vazio (em particular os abertos invariantes!) de $G^{(0)}$ contém algum ponto com isotropia trivial, uma vez que $\{u \in G^{(0)} \mid G(u) = \{u\}\}$ é denso.

Agora, seja $U \subset G^{(0)}$ aberto. Segue que $s^{-1}(U) := G_U$ é aberto e portanto $r(G_U)$ também é aberto, uma vez que a função range é homeomorfismo local (G étale) e portanto uma aplicação aberta.

A Proposição 23 assegura que $r(G_U)$ é invariante. Assim, por hipótese, $r(G_U)$ possui um ponto $u \in G^{(0)}$ com isotropia trivial. Logo podemos escrever $u = r(\gamma)$, para certo $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) \in U$. Fixado um tal γ, vemos que

$$\gamma^{-1}G(u)\gamma = \gamma^{-1}\{u\}\gamma = s(\gamma),$$

uma vez que u tem isotropia trivial e que $u = r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$.

Para finalizar a demonstração, basta mostrarmos que

$$G(s(\gamma)) = \gamma^{-1}G(u)\gamma,$$

pois disso segue que $s(\gamma) \in U$ é um ponto com isotropia trivial e como U foi tomado um aberto qualquer, segue que o conjunto dos pontos de $G^{(0)}$ que possuem isotropia trivial é denso, ou seja, G é topologicamente trivial.

É claro que para qualquer $\eta \in G(u)$, temos $s(\gamma^{-1}\eta\gamma) = s(\gamma)$ e $r(\gamma^{-1}\eta\gamma) = r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$, de modo que $\gamma^{-1}G(u)\gamma \subset G(s(\gamma))$.

Por outro lado, considere dado $\eta \in G(s(\gamma))$. Daí, definindo um $\xi := \gamma\eta\gamma^{-1}$, segue que $s(\xi) = s(\gamma^{-1}) = r(\gamma) = u$ e $r(\xi) = r(\gamma) = u$, de modo que $\eta = \gamma^{-1}(\xi)\gamma \in \gamma^{-1}G(u)\gamma$, como gostaríamos.

■

Proposição 25. *Seja G grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale. Então são equivalentes:*

(1) *G é efetivo.*

(2) *o interior de $Iso(G)$ é $G^{(0)}$, ou seja, $Iso(G)^{\circ} = G^{(0)}$.*

(3) *para qualquer bisseção aberta não vazia $B \subset G \backslash G^{(0)}$, existe um*

$\gamma \in B$ *tal que* $s(\gamma) \neq r(\gamma)$.

Demonstração: Vamos começar mostrando que (1) e (2) são equivalentes. Para isso, observamos que, como G é étale, $G^{(0)}$ é aberto e fechado em G. Assim, para qualquer $S \subset G$,

$$S^{\circ} = (S \cap G^{(0)})^{\circ} \cup (S \backslash G^{(0)})^{\circ}, \tag{4.1}$$

onde a união acima é disjunta. De fato, é claro que $(S \cap G^{(0)})^{\circ} \cup (S \backslash G^{(0)})^{\circ} \subset S^{\circ}$, pela definição de interior. Agora, seja $x \in S^{\circ}$. Logo $x \in U$, para certo $U \subset S$ aberto. Podemos escrever U como união disjunta $U = (U \cap G^{(0)}) \cup (U \backslash G^{(0)})$. Portanto, temos duas possibilidades para tal $x \in U$.

Se $x \in U \cap G^{(0)}$, temos que $U \cap G^{(0)}$ é aberto (pois $G^{(0)}$ é aberto) e que $U \cap G^{(0)} \subset S \cap G^{(0)}$, o que mostra que $x \in (S \cap G^{(0)})^{\circ}$.

Agora, se $x \in U \backslash G^{(0)}$, usando que $G^{(0)}$ é fechado, segue que $U \backslash G^{(0)}$ é aberto e vale que $U \backslash G^{(0)} \subset S \backslash G^{(0)}$, mostrando que $x \in (S \backslash G^{(0)})^{\circ}$, o que demonstra a fórmula (4.1) acima.

Usando a fórmula para $S = Iso(G)$ e lembrando que $G^{(0)} \subset Iso(G)$, segue que

$$Iso(G)^{\circ} = {G^{(0)}}^{\circ} \cup (Iso(G) \backslash G^{(0)})^{\circ},$$

onde a união acima é disjunta. Com isso, é imediato ver que (1) e (2) são equivalentes.

Vamos agora mostrar que (1) e (3) são equivalentes. Suponha, portanto, que G seja efetivo e considere $B \subset G \backslash G^{(0)}$ uma bisseção aberta não vazia. Assim, se todo $\gamma \in B$ satisfaz $s(\gamma) = r(\gamma)$, então $B \subset Iso(G)$, de modo que $B \subset Iso(G) \backslash G^{(0)}$. Mas isso garante que

$$B^{\circ} = B \subset (Iso(G) \backslash G^{(0)})^{\circ} = \emptyset,$$

o que contradiz B não ser vazio. Assim fica demonstrado que (1) implica em (3).

Para mostrarmos que (3) implica em (1), lembremos que, como G é étale, temos uma base para sua topologia dada por bisseções abertas. Vamos escrever $D = Iso(G) \backslash G^{(0)}$ apenas para facilitar a notação. Devemos mostrar que D° é vazio. Assim, supondo que $D^{\circ} \neq \emptyset$, segue que existe uma bisseção aberta nao vazia B tal que $B \subset D^{\circ}$. Por hipótese, existe $\gamma \in B$ tal que $s(\gamma) \neq r(\gamma)$, ou seja, $B \not\subset Iso(G)$. Mas $B \subset D^{\circ} \subset D \subset Iso(G)$, absurdo. Fica assim demonstrada a proposição.

■

4.2 Resultados Principais

Finalmente, vamos começar a discutir os resultados principais deste trabalho. Em particular, a próxima proposição é de fundamental importância para a demonstração do teorema principal. A fim de demonstrála, vamos fazer primeiro duas observações.

Obs. 1. *Fixado um $u \in G^{(0)}$, defina $[u] = r(G_u)$. Vamos justificar que dado $v \in [u]$, segue que para qualquer $\gamma \in G_v$, temos que $r(\gamma) \in [u]$.*

De fato, temos que v pode ser escrito por $v = r(x)$, para certo $x \in G$, $s(x) = u$. Ademais, para qualquer $\gamma \in G_v$, temos $s(\gamma) = v = r(x)$, de modo que γx é multiplicável.

Daí, basta observar que $r(\gamma) = r(\gamma x)$ e que $\gamma x \in G_u$, uma vez que $s(\gamma x) = s(x) = u$.

Obs. 2. *Para qualquer $u \in G^{(0)}$, podemos criar um espaço de Hilbert da seguinte maneira: Fixado $u \in G^{(0)}$, considere $[u] = r(s^{-1}(u))$ como na observação anterior. Em seguida, para qualquer $v \in [u]$, defina $\delta_v : [u] \to \mathbb{C}$ por $\delta_v(w) = 1$ se $w = v$ e $\delta_v(w) = 0$, caso contrário. Como $[u] \subset G^{(0)}$, naturalmente podemos considerar a extensão por zeros de δ_v para $G^{(0)}$. Nesse caso, mantendo a mesma notação, temos que $\delta_v \in l^2(G^{(0)})$.*

Segue que $\{\delta_v | v \in [u]\} \subset l^2(G^{(0)})$. Uma vez que $l^2(G^{(0)})$ é um espaço de Hilbert, podemos definir o (sub)espaço de Hilbert

$$l^2([u]) = \overline{span}\{\delta_v \,|\, v \in [u]\},$$

onde o fecho é tomado na topologia de $l^2(G^{(0)})$.

Tendo feito tais observações, podemos enunciar a

Proposição 26. *Sejam G um grupóide localmente compacto, Haus-*

dorff, étale e $u \in G^{(0)}$. *Então existe uma única representação* $\pi_{[u]}$ *de* $C^*(G)$ *em* $l^2([u]) = \overline{span}\{\delta_v \,|\, v \in [u]\}$ *(definido na Observação (2) acima) tal que para qualquer* $f \in C_c(G)$ *e* $v \in [u]$,

$$\pi_{[u]}(f)\delta_v = \sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma)\delta_{r(\gamma)}.$$

Demonstração: Considere fixado $f \in C_c(G)$. Vamos usar a notação $H := \text{span}\{\delta_v \,|\, v \in [u]\}$, de modo que $l^2([u]) = \overline{H}$. Usando a observação (1) acima, temos que os $\delta_{r(\gamma)}$ na fórmula estão bem definidos. Ademais, como G_v é discreto e o $supp(f)$ é compacto, temos que a fórmula apresentada na proposição está bem definida, pois $G_v \cap supp(f)$ é finito. Para quaquer $h \in H$, escrevemos $h = \sum_{v \in [u]} h_v \delta_v$, onde tal soma é finita e definimos

$$f \cdot h := \sum_{v \in [u]} \sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma) h_v \delta_{r(\gamma)} \in H.$$

Podemos então considerar a aplicação $H \to H$, $h \mapsto f \cdot h$. É claro que tal aplicação é linear e que se tomarmos $h = \delta_v$, teremos a fórmula requerida na proposição.

Vamos mostrar que tal aplicação é contínua, de modo que terá única extensão para $l^2([u])$.

Antes disso, considerando o produto interno em $l^2([u])$ sendo linear na primeira variável e conjugado linear na segunda, observamos que para quaisquer $v, w \in [u]$, temos

$$\langle f \cdot \delta_v, \delta_w \rangle = \sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma) \langle \delta_{r(\gamma)}, \delta_w \rangle = \sum_{\gamma \in G_v^w} f(\gamma),$$

onde a igualdade da direita segue imediatamente do fato de δ_v, $v \in [u]$ ser uma base ortonormal de $l^2([u])$.

Agora, calculamos

$$\begin{aligned} \langle \delta_v, f^* \cdot \delta_w \rangle &= \left\langle \delta_v, \sum_{\gamma \in G_w} f^*(\gamma) \delta_{r(\gamma)} \right\rangle = \sum_{\gamma \in G_w} f(\gamma^{-1}) \langle \delta_v, \delta_{r(\gamma)} \rangle \\ &= \sum_{\gamma \in G_w^v} f(\gamma^{-1}) = \sum_{\eta \in G_v^w} f(\eta), \end{aligned}$$

o que mostra a igualdade

$$\langle f \cdot \delta_v, \delta_w \rangle = \langle \delta_v, f^* \cdot \delta_w \rangle. \tag{4.2}$$

Ademais, por linearidade, é claro que tal igualdade é preservada para quaisquer $h, h' \in H$. Vamos agora estudar a continuidade da aplicação $[h \mapsto f \cdot h]$. Para isso, considere h decomposto como antes. Primeiramente note que podemos supor que f está suportada em uma bisseção $U \subset G$ já que toda $f \in C_c(G)$ é uma soma finita de tais funções. Agora, se $f \in C_c(U)$ então

$$f \cdot h = \sum_{v \in [u] \cap s(U)} f({s_U}^{-1}(v)) h_v \delta_{r({s_U}^{-1}(v))},$$

onde $s_U : U \to s(U)$ denota o homeomorfismo restrição de s. Assim,

$$\|f \cdot h\|_2^2 = \sum_{v,w \in [u] \cap s(U)} \langle f({s_U}^{-1}(v)) h_v \delta_{r({s_U}^{-1}(v))}, f({s_U}^{-1}(w)) h_w \delta_{r({s_U}^{-1}(w))} \rangle.$$

Na última soma acima podemos descartar todos os $v \neq w$ pois se $r({s_U}^{-1}(v)) = r({s_U}^{-1}(w))$ então $v = w$ já que U é bisseção. Logo

$$\|f \cdot h\|_2^2 = \sum_{v \in [u] \cap s(U)} |f({s_U}^{-1}(v))|^2 |h_v|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|h\|_2^2.$$

Logo a aplicação $[h \mapsto f \cdot h]$ é limitada, com norma no máximo $\|f\|_\infty$. Segue que a função $[h \mapsto f \cdot h]$ é linear contínua, se estendendo a um operador em $\mathcal{B}(l^2([u]))$, o qual denotaremos convenientemente por $\pi_{[u]}(f)$.

Temos portanto uma aplicação linear $\pi_{[u]} : C_c(G) \to \mathcal{B}(l^2([u]))$, $f \mapsto \pi_{[u]}(f)$ e, a partir da igualdade (4.2), segue que $\pi_{[u]}(f^*) = \pi_{[u]}(f)^*$.

Vamos agora mostrar que para quaisquer $f, g \in C_c(G)$, vale que

$$\pi_{[u]}(fg) = \pi_{[u]}(f)\pi_{[u]}(g).$$

De fato, basta mostrarmos que $\pi_{[u]}(fg)\delta_v = \pi_{[u]}(f)\pi_{[u]}(g)\delta_v$, onde δ_v é um elemento qualquer da base ortonormal do Hilbert $l^2([u])$.

Portanto, calculamos

$$\begin{aligned}
\pi_{[u]}(fg)\delta_v &= \sum_{\gamma\in G_v} fg(\gamma)\delta_{r(\gamma)} = \sum_{\gamma\in G_v}\left(\sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta)\right)\delta_{r(\gamma)} \\
&= \sum_{\alpha\beta\in G_v} f(\alpha)g(\beta)\delta_{r(\alpha)},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do fato de $r(\gamma) = r(\alpha)$ se $\alpha\beta = \gamma$.

Agora, calculamos

$$\begin{aligned}
\pi_{[u]}(f)\pi_{[u]}(g)\delta_v &= \pi_{[u]}(f)\left(\sum_{\beta\in G_v} g(\beta)\delta_{r(\beta)}\right) \\
&= \sum_{\beta\in G_v} g(\beta)\big(\pi_{[u]}(f)\delta_{r(\beta)}\big) \\
&= \sum_{\beta\in G_v} g(\beta)\left(\sum_{\alpha\in G_{r(\beta)}} f(\alpha)\delta_{r(\alpha)}\right) \\
&= \sum_{\beta\in G_v}\sum_{\alpha\in G_{r(\beta)}} f(\alpha)g(\beta)\delta_{r(\alpha)},
\end{aligned}$$

o que garante a igualdade requerida, pois somar os pares multiplicáveis (α,β) tais que $s(\alpha\beta) = v$ é equivalente a somar, para cada $\beta\in G$ tal que $s(\beta) = v,\ \alpha\in G$ tais que $s(\alpha) = r(\beta)$.

Com isso, mostramos que $\pi_{[u]}$ é uma representação de $C_c(G)$. Mas daí é imediato que tal representação terá uma única (devido à unicidade das extensões já criadas) extensão contínua para $C^*(G)$, pela definição da norma na C^*-álgebra cheia. Por abuso de notação, a extensão também será denotada por $\pi_{[u]}$, concluindo a demonstração.

$\blacksquare$

A fim de provarmos a próxima proposição, vamos considerar a soma direta das representações $\pi_{[u]}$ definidas na proposição anterior. Ou seja, considere:

$$\bigoplus_{[u]} \pi_{[u]} := \mathcal{E}_G : C^*(G) \to \mathbb{B}(L),$$

onde $L := \overline{\bigoplus_{[u]}(l^2[u])}$.

Observamos que $G^{(0)}$ é particionado nos conjuntos $[u]$ para $u \in G^{(0)}$; a soma direta acima é, portanto, definida exatamente nesta partição. É óbvio que $G^{(0)}$ está contido na união dos conjuntos $[u]$ para $u \in G^{(0)}$, visto que $u \in [u]$. Ademais, se $v \notin [u]$, então vejamos que $[u] \cap [v] = \emptyset$, donde segue a observação. De fato, suponha $v \in G^{(0)}$ tal que $v \notin [u]$ e seja $x \in [u] \cap [v]$. Então existem $y, z \in G$ tais que $x = r(y) = r(z)$ com $s(y) = v$ e $s(z) = u$. Assim, $v = r(y^{-1}z)$ com $s(y^{-1}z) = u$, implicando que $v \in [u]$, um absurdo. Temos assim a boa definição da soma direta das $\pi_{[u]}$'s acima.

Já sabemos que $C_0(G^{(0)})$ é sub-C^*álgebra de $C^*(G)$. Afirmamos:

Lema 4. *A aplicação $\mathcal{E}_G$, quando restrita à $C_0(G^{(0)})$, é injetiva.*

Demonstração: De fato, considere $f \in C_c(G^{(0)})$ não nula e seja $u \in G^{(0)}$ tal que $f(u) \neq 0$. Segue que

$$\pi_{[u]}(f)\delta_u = \sum_{\gamma \in G_u} f(\gamma)\delta_{r(\gamma)} = f(u)\delta_u,$$

pois, se $\gamma \in G_u$ é tal que $f(\gamma) \neq 0$, usando que $supp(f) \subset G^{(0)}$, temos $\gamma = s(\gamma) = u = r(\gamma)$.

Agora, lembramos que $\|\mathcal{E}_G(f)\| = \sup_{[u]} \|\pi_{[u]}(f)\|$, calculamos

$$\|\mathcal{E}_G(f)\|^2 \geq \|\pi_{[u]}(f)\|^2 \geq \|\pi_{[u]}(f)\delta_u\|^2 = \langle f(u)\delta_u, f(u)\delta_u\rangle = |f(u)|^2 > 0,$$

o que mostra que $\mathcal{E}_G(f) \neq 0$ para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$ não nula. Considere agora $g \in C_0(G^{(0)})$ não nula e fixe $u \in G^{(0)}$ tal que $g(u) \neq 0$. Ademais, considere uma sequência (f_i) em $C_c(G^{(0)})$ tal que $f_i \to g$. Segue que $f_i(u) \to g(u)$ para todo $u \in G^{(0)}$.

Uma vez que $g(u) \neq 0$, existe um $\alpha > 0$ tal que $|g(u)| > \alpha$. Assim, existe um índice i_0 tal que $|f_i(u)| > \alpha/2$. Em particular, tais $f_i's$ são não nulas. A continuidade da aplicação $\mathcal{E}_G$ garante que $\mathcal{E}_G(f_i) \to \mathcal{E}_G(g)$. Daí, usando que $\|\mathcal{E}_G(f_i)\| \geq |f_i(u)|$, segue que $\|\mathcal{E}_G(g)\| > \alpha/2 > 0$, de modo que $\mathcal{E}_G(g) \neq 0$, o que mostra a injetividade de $\mathcal{E}_G$ em $C_0(G^{(0)})$.

■

Proposição 27. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale.*

(1) *Suponha que G é efetivo. Então todo ideal não nulo I de $C_r^*(G)$ satisfaz $I \cap C_c(G^{(0)}) \neq \{0\}$.*

(2) *Suponha que todo ideal não nulo I de $C^*(G)$ satifaz $I \cap C_0(G^{(0)}) \neq \{0\}$. Então G é efetivo.*

Demonstração: (1) Segue de [19], Teorema 4.4. Em [19], o autor usa o termo “essencialmante principal” para o que chamamos de efetivo.

(2) Vamos provar a contra-positiva. Ou seja, se G não é efetivo, então deve existir um ideal não nulo I de $C^*(G)$ tal que $I \cap C_0(G^{(0)}) = \{0\}$. Afirmamos que um tal ideal é $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}_G)$, núcleo da aplicação acima construída. Como já foi visto que $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}_G) \cap C_0(G^{(0)}) = \{0\}$, basta construírmos um elemento não nulo em $\mathrm{Ker}(\mathcal{E}_G)$.

Se G não é efetivo, então existe uma bisseção aberta não vazia $B \subset \mathrm{Iso}(G) \setminus G^{(0)}$. Fixada tal bisseção, para cada $u \in s(B)$, existe um único $\gamma_u \in B$ tal que $s(\gamma_u) = u$, já que a função source é homeomorfismo sobre B. Agora, usando a Proposição 12, fixe uma $f \in C_c(G)$ tal que $supp(f) \subset B$ e defina a função f_0 dada por

$$f_0 : G^{(0)} \to \mathbb{C}$$

$$f_0(u); = \begin{cases} f(\gamma_u),\ u \in s(B) \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

É claro que f_0 é contínua, pois, quando restrita ao aberto $s(B)$, temos que $f_0 = f \circ {s_B}^{-1}$ e, caso contrário, $f_0 \equiv 0$. Ademais, temos que

$$\{u \in G^{(0)} \,|\, f_0(u) \neq 0\} \subset s_B(\{\gamma \in G \,|\, f(\gamma) \neq 0\}),$$

pois para qualquer $u \in G^{(0)}$ tal que $0 \neq f_0(u) = f(\gamma_u)$, temos que $\gamma_u \in (\{\gamma \in G \,|\, f(\gamma) \neq 0\})$, e, usando que $\gamma_u = s_B^{-1}(u)$, segue que $u \in$

$s_B(\{\gamma \in G \mid f(\gamma) \neq 0\})$. Com isso, segue que $supp(f_0) \subset s_B(supp(f)) \subset s(B)$, o que garante $f_0 \in C_c(G^{(0)})$.

Uma vez que $B \cap G^{(0)} = \emptyset$ e $f \neq 0$, segue de imediato que $f - f_0 \neq 0$. Para finalizar a demonstração, vamos mostrar que $\mathcal{E}_G(f - f_0) = 0$. Para isso, basta que $\pi_{[u]}(f - f_0) \equiv 0$, para qualquer $u \in G^{(0)}$. Assim, fixando um $u \in G^{(0)}$ e um $v \in [u]$, calculamos

$$\pi_{[u]}(f - f_0)\delta_v = \sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma)\delta_{r(\gamma)} - \sum_{\alpha \in G_v} f_0(\alpha)\delta_{r(\alpha)}.$$

Primeiro, suponha que $v \notin s(B)$. Nesse caso, segue que $f(\gamma) = f_0(\alpha) = 0$, para quaisquer $\gamma, \alpha \in G_v$. De fato, se $f(\gamma) \neq 0$, então $\gamma \in supp(f) \subset B$, de modo que $s(\gamma) \in s(B)$, mas $s(\gamma) = v \notin s(B)$. No caso de f_0, observamo que, por construção, f_0 é nula fora de $s(B) \subset G^{(0)}$, logo podemos considerar que $\alpha \in G^{(0)}$. Assim, $\alpha = s(\alpha) = v \notin s(B)$, logo $f_0(\alpha) = 0$ por definição da f_0. Com isso, fica demonstrado que as somas $\sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma)\delta_{r(\gamma)}$ e $\sum_{\alpha \in G_v} f_0(\alpha)\delta_{r(\alpha)}$ serão nulas nesse caso.

Agora, se $v \in s(B)$, segue que existe único $\gamma_v \in B$ tal que $s(\gamma_v) = v$. Assim, temos que

$$\sum_{\gamma \in G_v} f(\gamma)\delta_{r(\gamma)} = f(\gamma_v)\delta_{r(\gamma_v)}$$

e que

$$\sum_{\alpha \in G_v} f_0(\alpha)\delta_{r(\alpha)} = f_0(v)\delta_{r(v)},$$

onde a última igualdade segue do fato de $supp(f_0) \subset s(B) \subset G^{(0)}$. Ou seja, nesse caso, temos

$$\pi_{[u]}(f - f_0)\delta_v = f(\gamma_v)\delta_{r(\gamma_v)} - f_0(v)\delta_{r(v)} = f(\gamma_v)\delta_{r(\gamma_v)} - f(\gamma_v)\delta_v.$$

No entanto, finalmente usamos que $B \subset \mathrm{Iso}(G)$, o que garante que $r(\gamma_v) = s(\gamma_v) = v$, donde segue que $\pi_{[u]}(f - f_0)\delta_v = 0$, concluindo a demonstração.

■

Provaremos agora dois lemas que serão úteis na próxima proposição.

Lema 5. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale. Suponha que $h \in C_c(G)$, com $supp(h) \subset B$, onde B é uma bisseção aberta e que $f \in C_c(G^{(0)})$. Então $h \cdot f \cdot h^* \in C_c(G^{(0)})$ com suporte contido em $r(B)$ e satisfazendo*

$$(h \cdot f \cdot h^*)(r(\gamma)) = |h(\gamma)|^2 f(s(\gamma)), \textit{ para todo } \gamma \in B.$$

Demonstração: Para qualquer $\alpha \in G$, temos

$$\begin{aligned}
(h \cdot f) \cdot h^*(\alpha) &= \sum_{\xi\beta=\alpha} (h \cdot f)(\xi) h^*(\beta) \\
&= \sum_{\xi\beta=\alpha} \left(\sum_{\gamma\eta=\xi} h(\gamma) f(\eta) \right) \overline{h(\beta^{-1})} \\
&= \sum_{\gamma\eta\beta=\alpha} h(\gamma) f(\eta) \overline{h(\beta^{-1})} \\
&= \sum_{\gamma\eta\beta^{-1}=\alpha} h(\gamma) f(\eta) \overline{h(\beta)},
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é apenas uma mudança de variável, usando a inversão de G.

Para facilitar a notação, vamos escrever $g := h \cdot f \cdot h^*$.

Agora, considere $\gamma\eta\beta^{-1}$ tal que $h(\gamma)f(\eta)\overline{h(\beta)} \neq 0$. Uma vez que $supp(f) \subset G^{(0)}$, segue que $\eta \in G^{(0)}$, de modo que $\eta = s(\eta) = r(\eta)$. Ademais, como os pares $\gamma\eta, \eta\beta^{-1} \in G^{(2)}$, segue que $s(\gamma) = r(\eta)$ e $s(\eta) = r(\beta^{-1}) = s(\beta)$. Em particular, temos que $s(\gamma) = s(\beta)$. Mas $\gamma, \beta \in supp(h) \subset B$ e B é uma bisseção, donde segue que $\gamma = \beta$.

Com isso, vemos que um elemento $\gamma\eta\beta^{-1}$ tal que $h(\gamma)f(\eta)\overline{h(\beta)} \neq 0$ satisfaz

$$\gamma\eta\beta^{-1} = (\gamma s(\gamma))\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1} = r(\gamma) \in r(B).$$

Ou seja, mostramos que se $g(\alpha) \neq 0$, então $\alpha \in r(B)$, de modo que $g(\alpha) = 0$ se $\alpha \notin r(B)$. Ademais, como B é bisseção, temos que existem únicos γ, η tais que $\gamma\eta\beta^{-1} = \alpha$. Portanto, temos a fórmula

$$g(\alpha) = h(\gamma)f(\eta)\overline{h(\beta)} = h(\gamma)f(s(\gamma))\overline{h(\gamma)} = |h(\gamma)|^2 f(s(\gamma)),$$

para todo $\alpha = \gamma\eta\beta^{-1} \in r(B)$.

Finalmente, observando que para tais $\alpha's$, vale $\alpha = r(\alpha) = r(\gamma)$, donde segue a fórmula do enunciado. Para concluir a demonstração, resta mostrar que $supp(g) \subset r(B)$. De fato, primeiro observamos que vale a inclusão

$$\{y \in G^{(0)} \,|\, g(y) \neq 0\} \subset r(\{x \in G \,|\, h(x) \neq 0\})$$

pois, se $g(y) \neq 0$, segue que y é escrito como $y = r(\gamma)$ para certo $\gamma \in B$ e, pela fórmula demonstrada, segue que $h(\gamma) \neq 0$, garantindo a inclusão.

Agora, para qualquer $y \in supp(g)$, existe uma net $y_i \to y$, com $g(y_i) \neq 0$. Portanto, para qualquer índice i, podemos escrever
$y_i = r(x_i)$, onde x_i satisfaz $h(x_i) \neq 0$. Ou seja, $x_i \in supp(h)$, de modo que $y_i \in r(supp(h))$. Uma vez que $supp(h)$ é compacto e a função range é contínua, segue que $r(supp(h))$ também é compacto, o que garante que $y \in r(supp(h))$. Como $supp(h) \subset B$, segue o resultado.

■

Para o próximo lema, usaremos um teorema de Álgebra de Operadores bastante conhecido, a saber:

Teorema 3. *Seja $A = C_0(X)$, onde X é um espaço topológico Hausdorff, localmente compacto. Então todo ideal (fechado) J de A é da forma*

$$C_0(U) := \{f \in C_0(X) \mid f(x) = 0, \forall x \notin U\}$$

para um único subconjunto aberto U de X, a saber,

$$U = \{x \in X \mid \exists f \in J;\ f(x) \neq 0\}.$$

Observamos que este ideal pode ser naturalmente identificado com a C^*-álgebra padrão $C_0(U)$ e por isso estamos usando esse abuso de notação.

Lema 6. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale e minimal. Então, para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$ não nula, o ideal I de $C^*(G)$ gerado por f contém $C_c(G^{(0)})$.*

Demonstração: Defina $J := I \cap C_0(G^{(0)})$. É claro que J é um ideal de $C_0(G^{(0)})$. Assim, pelo teorema anterior, existe um aberto U de $G^{(0)}$ tal que $J = C_0(U)$. Vamos mostrar que $U = G^{(0)}$, de modo que $J = C_0(G^{(0)})$, donde seguirá o resultado.

Para mostrarmos isso, basta mostrarmos que, para qualquer $u \in G^{(0)}$, existe uma função $g \in J$ tal que $g(u) \neq 0$. De fato, uma vez construída tal função, segue que não pode haver $u \in G^{(0)} \setminus U$, pois do contrário teríamos uma função $g \in J$ satisfazendo $g(u) \neq 0$ para $u \notin U$, o que contradiz $J = C_0(U)$.

Portanto, fixe $u \in G^{(0)}$ e defina $V := \{v \in G^{(0)} \mid f(v) \neq 0\}$. Como f é contínua e não nula, V é um aberto não vazio. Ademais, $r(G_V) = r(s^{-1}(V))$ é um aberto não vazio, pois a função source é contínua e função range é uma aplicação aberta, visto que é um homeomorfismo local. Observamos que $r(G_v)$ é invariante. Agora, como G é minimal e $r(G_V) \neq \emptyset$, segue que $r(G_V) = G^{(0)}$.

Em particular, da última igualdade segue que existe $\gamma \in G$ tal que $u = r(\gamma)$ e $s(\gamma) \in V$, ou seja, $f(s(\gamma)) \neq 0$. Usando a Proposição 12, podemos considerar uma função $h \in C_c(G)$ suportada em uma bisseção e tal que $h(\gamma) = 1$. De fato, como G é étale, sua topologia possui uma base dada por bisseções abertas, assim basta tomarmos uma tal vizinhança de γ e usarmos a construção da Proposição 12.

Pelo lema acima, temos

$$h \cdot f \cdot h^*(u) = |h(\gamma)|^2 f(s(\gamma)) = f(s(\gamma)) \neq 0.$$

Assim, definindo $g := h \cdot f \cdot h^*$, segue que $g(u) \neq 0$ e que $g \in J$, visto que $f \in I$. Fica, portanto, demonstrado o resultado.

■

Proposição 28. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff,* *étale. São equivalentes:*

(1) *G é minimal.*

(2) *Para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$, o ideal de $C^*(G)$ gerado por f é $C^*(G)$.*

(3) *Para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$, o ideal de $C_r^*(G)$ gerado por f é $C_r^*(G)$.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) e (1) $\Rightarrow$ (3). Seja $f \in C_c(G^{(0)})$ não nula e I o ideal de $C^*(G)$ gerado por f. Como G é minimal, o lema anterior garante que $C_c(G^{(0)}) \subset I$. Seja agora $F \in C_c(G)$ qualquer. Vamos em seguida mostrar que, para qualquer $g \in C_c(G^{(0)})$ satisfazendo $g|_{r(supp(F))} \equiv 1$, $g \cdot F = F$, o que mostra que $F \in I$, visto que $g \in C_c(G^{(0)}) \subset I$. Mas, como F foi tomada qualquer, segue que $C_c(G) \subset I$, o que garante que $I = C^*(G)$, visto que $C_c(G)$ é denso.

Primeiro, vamos justificar que existe $g \in C_c(G^{(0)})$ satisfazendo $g|_{r(supp(F))} \equiv 1$. De fato, denotando por K_F o suporte de F, temos que $r(K_F)$ é compacto pois a função range é contínua. Denotando por $K = r(K_F)$ e por $V = G \backslash G^{(0)}$, claro que o compacto K é disjunto do fechado V, de modo que, pelo Lema 1 (Lema de Urysohn) existe uma função contínua $g : G \to [0,1] \subset \mathbb{C}$ satisfazendo $g|_K \equiv 1$ e $g|_V \equiv 0$. Isso garante que $supp(g) \subset G^{(0)}$, ou seja, $g \in C_c(G^{(0)})$.

Tendo uma tal g, vejamos agora que $g \cdot F = F$. De fato, temos que

$$g \cdot F(\alpha) = \sum_{xy=\alpha} g(x)F(y),$$

para qualquer $\alpha \in G$. Fixe $\alpha \in G$. Se um par (x, y) satisfaz $xy = \alpha$ e é tal que $g(x)F(y) \neq 0$, segue que $x \in supp(g) \subset G^{(0)}$, portanto $x = s(x) = r(y)$, o que garante que $g(x)F(y) = F(y)$. Também é claro que o par $(\alpha\alpha^{-1}, \alpha)$ satisfaz $g(\alpha\alpha^{-1})F(\alpha) = F(\alpha)$. Afirmamos que existe um único par (x, y) com $xy = \alpha$ e $g(x)F(y) \neq 0$. Daí, segue o resultado.

De fato, se tivermos $x_1y_1 = \alpha = x_2y_2$ com

$$g(x_1)F(y_1), g(x_2)F(y_2) \neq 0,$$

então $r(\alpha) = r(x_1) = r(x_2)$, logo $x_1 = x_2$. Com isso, segue que

$$y_1 = {x_1}^{-1}x_1y_1 = {x_1}^{-1}x_2y_2 = {x_2}^{-1}x_2y_2 = y_2,$$

o que garante a igualdade $g \cdot F = F$, o que conclui a implicação (1) $\Rightarrow$ (2).

Agora, considerando a aplicação quociente $q : C^*(G) \to C_r^*(G)$, vamos mostrar que o ideal I_r de $C_r^*(G)$ gerado por f é $q(I)$. Daí, uma vez que $I = C^*(G)$, segue que $I_r = C_r^*(G)$, garantindo que (1) $\Rightarrow$ (3).

De fato, podemos escrever I como sendo a interseção de todos os ideais de $C^*(G)$ que contenham f e, da mesma forma, I_r como sendo a interseção de todos os ideais de $C_r^*(G)$ que contenham f, ou seja,

$$I = \bigcap_{J \lhd C^*(G); f \in J} J \quad \text{e} \quad I_r = \bigcap_{J_r \lhd C_r^*(G); f \in J_r} J_r.$$

Uma vez que q é sobrejetora, a imagem por q de qualquer ideal é ainda um ideal. Segue que

$$q(I) = \bigcap_{J \lhd C^*(G); f \in J} q(J),$$

o que mostra que $I_r \subset q(I)$.

Por outro lado,

$$q^{-1}(I_r) = \bigcap_{J_r \lhd C_r^*(G); f \in J_r} q^{-1}(J_r),$$

o que mostra que $I \subset q^{-1}(I_r)$. Portanto, segue que $q(I) \subset q(q^{-1}(I_r)) = I_r$, onde a última igualdade segue do fato de q ser sobrejetora.

(2) $\Rightarrow$ (1) e (3) $\Rightarrow$ (1). Façamos a contra-positiva. Se G não é minimal, segue que existe um aberto invariante U próprio, ou seja, U é não vazio e existe pelo menos algum $u \in G^{(0)} \setminus U$. Como U é invariante, o Lema 3 garante que seu complementar $G^{(0)} \setminus U$ também é. Ademais, $u \in G^{(0)} \setminus U$ garante que $[u] \subset G^{(0)} \setminus U$, visto que $[u]$ é o menor conjunto invariante contendo u.

Agora considere uma $f \in C_c(G)$ não nula tal que $supp(f) \subset U$ (de fato, $f \in C_c(G^{(0)})$). Temos que $f(v) = 0$, para qualquer $v \in [u]$, visto que $[u] \in G^{(0)} \setminus U$. Afirmamos que $\pi_\lambda^u(f) = 0$. Para mostrarmos isso, basta calcularmos $\pi_\lambda^u(f)$ em elementos da base ortonormal canônica de $l^2(G_u)$. De fato, para qualquer elemento δ_γ da base canônica de $l^2(G_u)$, temos

$$\pi_\lambda^u(f)\delta_\gamma = \sum_{\beta \in G_u} f(\beta\gamma^{-1})\delta_\beta,$$

logo, se $f(\beta\gamma^{-1}) \neq 0$, então $\beta\gamma^{-1} \in U \subset G^{(0)}$, donde segue que $\beta\gamma^{-1} = s(\beta\gamma^{-1}) = s(\gamma^{-1})$, de modo que $\beta = \gamma$. Daí, definindo $v := \beta\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1} = r(\gamma) \in [u]$, temos um absurdo, visto que $f(v) = 0$ para qualquer $v \in [u]$. Portanto, temos que $\pi_\lambda^u(f)\delta_\gamma = 0$, donde segue que $\pi_\lambda^u(f) = 0$.

Por outro lado, considere agora uma $g \in C_c(G^{(0)})$ não nula e tal que $g(u) = 1$. Segue que

$$\pi_\lambda^u(g)\delta_u = \sum_{\beta \in G^u} f(\beta^{-1}u)\delta_\beta = g(u)\delta_u,$$

pois se $g(\beta^{-1}u) \neq 0$, então $\beta^{-1}u \in supp(g) \subset G^{(0)}$, de modo que $\beta^{-1}u = s(\beta^{-1}u) = s(u) = u$.

Isso nos mostra que π_λ^u é uma representação de $C_c(G)$ com kernel não trivial. Naturalmente, tal representação estende-se para $C^*(G)$ e $C_r^*(G)$, de modo que o kernel em cada uma dessas aplicações será um ideal não trivial de cada uma das respectivas C^*-álgebras, concluindo a demonstração.

■

Finalmente, agora estamos em condições de demonstrar o teorema principal deste trabalho:

Teorema 4. *Seja G um grupóide localmente compacto, Hausdorff, étale. Então $C^*(G)$ é simples se, e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$;

(2) *G é efetivo;*

(3) *G é minimal.*

Demonstração: Suponha que $C^*(G)$ seja simples. Então a aplicação quociente $q : C^*(G) \to C_r^*(G)$ tem kernel trivial, de modo que as C^*-álgebras são isomorfas. Ademais, por hipótese, o único ideal não nulo de $C^*(G)$ é exatamente $C^*(G)$. É óbvio que $C^*(G) \cap C_0(G^{(0)}) \neq \{0\}$, de modo que, usando a Proposição 27, G é efetivo. Finalmente, $C^*(G)$ simples garante que, para qualquer $f \in C_c(G^{(0)})$ não nula, o ideal de $C^*(G)$ gerado por f é exatamente $C^*(G)$, o que garante que G é minimal, através da Proposição 28.

Suponha agora as três condições sendo satisfeitas e considere um ideal I de $C^*(G)$ não nulo. A condição (1) garante que I pode ser tomado como ideal de $C_r^*(G)$. Agora, como G é efetivo, usando a Proposição 27, existe $f \in I \cap C_c(G^{(0)})$ não nula. Finalmente, como G é minimal, a Proposição 28 garante que o ideal gerado por f é precisamente $C_r^*(G)$. Mas $f \in I$, de modo que I contém esse ideal, demonstrando o resultado.

■

4.3 Amenabilidade de Grupóides

Amenabilidade de grupóides é uma teoria muito interessante e ao mesmo tempo técnica. Ela dá certas condições sobre o grupóide que garantem que $C^*(G) \simeq C^*_r(G)$. Uma vez que a condição $C^*(G) \simeq C^*_r(G)$ é uma das hipóteses do teorema principal desta dissertação, é fundamental que, no mínimo, divulguemos esta teoria. A referência padrão é o artigo [4]. Neste trabalho não vamos explorar esta teoria de forma precisa, nossa intenção é apenas divulgar fatos e referências para o leitor interessado. Ademais, vamos usar alguns destes fatos para concluir certos resultados na seção seguinte.

A referência [16] estuda tal teoria para grupóides no contexto deste trabalho, ou seja, grupóides étale, localmente compacto e Hausdorff. Assim, seguindo [16], podemos definir:

Definição 12. *Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. G é* amenable *se existir uma net de funções não negativas com suporte compacto $\mu_i : G \to \mathbb{C}$ tais que*

$$\sum_{\beta \in G_{r(\gamma)}} \mu_i(\beta) \to 1$$

e

$$\sum_{\beta \in G_{r(\gamma)}} |\mu_i(\beta) - \mu_i(\beta\gamma)| \to 0,$$

para qualquer $\gamma \in G$, convergindo uniformemente em subconjuntos compactos de G.

Ademais, o Teorema 5.6.18 de [16] garante que se G é étale, localmente compacto e Hausdorff, então G é amenable se e somente se $C^*(G)$ (ou equivalentemente $C_r^*(G)$) for nuclear.

No contexto de ações de grupos, também podemos definir ações amenable: seja α uma ação de um grupo discreto H em um espaço localmente compacto e Hausdorff. Então α é ação amenable se e somente se o grupóide de transformação associado for amenable. Ademais, uma condição suficiente para a amenabilidade de um grupóide de transformação $G = X \rtimes H$ é a amenabilidade do grupo H. A classe dos grupos amenable é grande. Por exemplo, todo grupo finito é amenable. E é um fato também conhecido que todo grupo abeliano é amenable.

Não é conhecido se pode acontecer que $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$ sem que G seja amenable para grupóides de transformação. Mas isto pode acontecer para grupóides mais gerais, isto é, pode acontecer que $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$ sem que G seja amenable. Este foi um problema aberto por um bom tempo, recentemente solucionado. Veja [24] e [22] para mais detalhes.

No entanto, para grupóides minimais, as duas condições são equivalentes, ou seja, se G é um grupóide minimal, então $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$ se e somente se G é amenable. Isto segue do principal resultado de [3].

Desta forma, podemos reescrever o teorema principal deste trabalho da seguinte forma:

Teorema. (Teorema Principal) Seja G um grupóide étale, localmente compacto e Hausdorff. Então $C^*(G)$ é simples se e somente se G é amenable, minimal e efetivo.

4.4 Exemplos e aplicações do teorema principal

4.4.1 Grupóides discretos

Seja G um grupóide discreto, ou seja, um grupóide algébrico, munido da topologia discreta. É fácil ver que G é étale, localmente compacto e Hausdorff, de modo que podemos usar toda teoria discutida ao longo do trabalho. Vamos descrever completamente os grupóides discretos que se encaixam nas hipóteses do teorema principal, isto é, os grupóides minimais e efetivos.

No caso em que G é discreto, observamos que as hipóteses topologicamente principal, principal e efetivo são equivalentes:

Proposição 29. *Seja G um grupóide discreto. Então são equivalentes:*

(1) *G é topologicamente principal,*

(2) *G é principal,*

(3) *G é efetivo.*

Demonstração: Começamos mostrando que (2) e (3) são equivalentes. Primeiro, é claro que G principal implica em G efetivo. Agora, suponha G efetivo. Denotando por I o interior de $Iso(G)\backslash G^{(0)}$, sabemos que I é a união de todos os abertos contidos em $Iso(G)\backslash G^{(0)}$. Em particular, como G é discreto, $Iso(G)\backslash G^{(0)}$ é um destes conjuntos. Mas G efetivo significa que $I = \emptyset$, donde segue que $Iso(G) = G^{(0)}$, ou seja, G principal.

Agora, vamos mostrar que (1) implica em (2). Denote por $E = \{u \in G^{(0)} | G(u) = \{u\}\}$. G topologicamente principal garante que $E = G^{(0)}$, uma vez que G é discreto. Desta forma,

$$Iso(G) = \bigcup_{u \in G^{(0)}} G(u) = \bigcup_{u \in G^{(0)}} \{u\} = G^{(0)}.$$

Finalmente,suponha G principal e mantenha a notação de E como antes. Vamos mostrar que $E = G^{(0)}$, donde segue o resultado. De fato, se existir $u \in G^{(0)}$ tal que $G(u) \neq \{u\}$, então existe $\gamma \in G$ tal que $s(\gamma) = r(\gamma) = u$ e $\gamma \notin G^{(0)}$, ou seja, $\gamma \in Iso(G)\backslash G^{(0)}$, o que contradiz G ser principal. Segue que $E = G^{(0)}$, concluindo o resultado. ∎

Ou seja, no caso discreto, tais hipóteses resumem-se a termos $Iso(G) =$

$G^{(0)}$. Isto é equivalente a dizer que a função:

$$(r, s) : G \to G^{(0)} \times G^{(0)}$$

$$\gamma \mapsto (r(\gamma), s(\gamma))$$

é injetiva. De fato, suponha $Iso(G) = G^{(0)}$ e sejam $\gamma, \eta \in G$ tais que $(r, s)(\gamma) = (r, s)(\eta)$. Por definição, segue que $\eta^{-1}\gamma \in Iso(G) = G^{(0)}$, logo $\eta^{-1}\gamma = s(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma$, o que garante $\eta^{-1} = \gamma^{-1}$, de modo que $\gamma = \eta$. Agora, considere (r, s) injetiva e seja $\gamma \in Iso(G)$. Defina $v := r(\gamma) = s(\gamma)$. Segue que $(r, s)(\gamma) = (r(\gamma), s(\gamma)) = (v, v) = (r(v), s(v)) = (r, s)(v)$, o que implica $\gamma = v \in G^{(0)}$, pela injetividade da aplicação (r, s).

Agora, como G é discreto, $[u] := r(s^{-1}(u))$ é um aberto não vazio, para qualquer $u \in G^{(0)}$. Segue daí que G é minimal se e somente se $G^{(0)} = [u]$, para qualquer $u \in G^{(0)}$. Novamente usando a aplicação (r, s) definida acima, segue que G é minimal se e somente se (r, s) é sobrejetora. De fato, considere G minimal e seja $(u, v) \in G^{(0)} \times G^{(0)}$. Segue que $[u] = [v] = G^{(0)}$, de modo que $u \in [v]$, ou seja, existe $x \in G$ tal que $u = r(x)$ e $s(x) = v$, o que garante $(r, s)(x) = (u, v)$, provando que (r, s) é sobrejetora. Por outro lado, considere (r, s) sobrejetora e seja $u \in G^{(0)}$ qualquer. Vamos mostrar que $[u] = G^{(0)}$. Para isso, fixe $\gamma \in G^{(0)}$. Uma vez que (r, s) é sobrejetora e que $(\gamma, u) \in G^{(0)} \times G^{(0)}$, deve existir um $x \in G$ tal que $(r, s)(x) = (\gamma, u)$, o que garante $\gamma \in [u]$.

Definição 13. *Um grupóide G é dito transitivo se a aplicação (r, s) acima construída é sobrejetora.*

Com a definição acima, temos que se G é um grupóide discreto, G é minimal se e somente se G é transitivo. Portanto, concluímos que:

Proposição 30. *Seja G um grupóide discreto. Então são equivalentes:*

(1) *G é minimal e efetivo.*

(2) *G é principal e transitivo.*

(3) *A aplicação (r, s) é bijetiva.*

Seja agora X um conjunto qualquer. De acordo com o Exemplo 3 do Capítulo 1, podemos munir $X \times X$ com uma estrutura de grupóide. Tal grupóide é geralmente chamado de "grupóide de pares"ou "par grupóide"de X. (Pair groupoid em inglês.)

Se X é um espaço topológico, o grupóide de pares de X é um grupóide topológico se munido da topologia produto e será étale, localmente compacto e de Hausdorff caso X seja discreto.

Definição 14. *Sejam G e H grupóides e $\phi : G \to H$ uma função. Dizemos que ϕ é um homomorfismo de grupóides se para qualquer par $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$, tivermos $(\phi(\gamma), \phi(\eta)) \in H^{(2)}$ e $\phi(\gamma\eta) = \phi(\gamma)\phi(\eta)$. Dois grupóides são ditos isomorfos se existir um homomorfismo bijetivo entre eles.*

Definição 15. *Sejam G e H grupóides topológicos. Uma função $\phi : G \to H$ é um homomorfismo entre grupóides topológicos se ϕ for uma* *função contínua e satisfizer as condições da definição acima.*

Os grupóides serão ditos isomorfos caso ϕ, além de satisfazer as condições acima, seja um homeomorfismo entre os espaços.

Dado um grupóide G qualquer, considere $X := G^{(0)}$. Segue que a aplicação $(r, s) : G \to X \times X$ é um homomorfismo de grupóides. De fato, isto segue das propriedades básicas de grupóides: Seja $(\gamma, \eta) \in G^{(2)}$. Segue que

$$(r, s)(\gamma\eta) = (r(\gamma\eta), s(\gamma\eta)) = (r(\gamma), s(\eta)) =$$

$$(r(\gamma), s(\gamma))(r(\eta), s(\eta)) = (r, s)(\gamma)(r, s)(\eta).$$

Assim, a discussão acima nos leva a concluir que:

Proposição 31. *Seja G um grupóide discreto. Então G é minimal e efetivo se e somente se G é isomorfo ao grupóide de pares $G^{(0)} \times G^{(0)}$. Neste caso, o isomorfismo é dado pela aplicação (r, s).*

Vimos que se X for um espaço discreto, então o par grupóide será étale, localmente compacto e Hausdorff. Ademais, é possível mostrar que $C^*(X \times X) \simeq C_r^*(X \times X)$ e o faremos na próxima proposição.

Proposição 32. *Seja X um espaço discreto e G o grupóide de pares de X. Então $C^*(G) \simeq C_r^*(G)$.*

Demonstração: Denote por A a C^*-álgebra universal gerada por elementos $e_{x,y}$ com $x, y \in X$ satisfazendo:

$$e_{x,y}e_{z,w} = \delta_{y,z}e_{x,w}, \; e^*_{x,y} = e_{y,x}. \tag{4.3}$$

Vamos mostrar que $C^*(G) \simeq C^*_r(G) \simeq A$.

Como G é discreto, os pontos (x, y), vistos como conjuntos unitários, formam uma base de bisseções para G. Podemos, então, considerar suas respectivas funções características, denotadas por $\chi_{x,y}$. É fácil ver que as funções $\chi_{x,y}$ pertencem a $C_c(G)$ e que satisfazem as relações (4.3) acima.

Uma vez que A é a C^* universal gerada pela relação (4.3), segue que existe um único *-homomorfismo $A \to C^*(G)$ que mapeia $e_{x,y}$ em $\chi_{x,y}$, para quaisquer $x, y \in X$. Ademais, tal homomorfismo é sobrejetor, visto que $\{(x, y)|x, y \in X\}$ forma uma base para G.

Temos assim uma composição de homomorfismos sobrejetivos

$$A \to C^*(G) \to C^*_r(G),$$

onde o homomorfismo da direita é o canônico.

Consideramos um ponto arbitrário $u \in X$ e a sua representação regular correspondente: $\pi_u \colon C^*(G) \to B(\ell^2(G_u))$. Note que $G_u = X \times \{u\}$, de tal forma que temos um isomorfismo canônico de espaços de Hilbert $l^2(G_u) \simeq l^2(X)$. Sob esta identificação, mostra-se facilmente que a imagem de $\chi_{x,y}$ por π_u é o operador $e_{x,y}$. Dai segue que temos um

*-homomorfismo sobrejetor $C^*(G) \to A$ e este é essencialmente o π_u, assim se fatora a um homomorfismo também sobrejetor $C_r^*(G) \to A$.

A conclusão de tudo é a existência de uma sequência de homomorfismos sobrejetores:

$$A \to C^*(G) \to C_r^*(G) \to A$$

de tal forma que a composição de tudo é a identidade sobre A. Na sequência acima, o homomorfismo do meio é o homomorfismo canônico (identidade sobre $C_c(G)$). Como a composição dos homomorfismos é injetiva e cada um deles é sobrejetor, segue que todos os homomorfismos são injetivos e assim isomorfismos. Logo $C^*(G) \simeq C_r^*(G) \simeq A$, concluindo a proposição. ∎

É fácil ver que $X \times X$ é minimal e efetivo:

Denotando $X \times X$ por G e observando que $G^{(0)} = \{(x,x) | x \in X\}$ pode ser identificado com X, segue que

$$(r, s) : G \to X \times X$$

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

o que comprova a afirmação. A partir desta discussão, podemos então enunciar um corolário do teorema principal:

Corolário 4. *Seja X um espaço discreto. Então a C^*-álgebra cheia* *do grupóide de pares $X \times X$ é simples.*

Finalmente, na demonstração da Proposição 32, foi mostrado que A é isomorfa a $C^*(X \times X)$, onde A é a C^*-universal gerada pelas relações em (4.3). De fato, é possível mostrar que A é isomorfa a $\mathbb{K}(l^2(X))$, a álgebra de operadores compactos sobre o espaço de Hilbert $l^2(X)$. Para demonstrar este fato, citamos as referências [8] e [15], além de [2] (página 158, Example (iv)). Combinando este resultado com o corolário acima podemos concluir o seguinte fato bem conhecido:

Corolário 5. *Seja X um espaço discreto. Então $\mathbb{K}(l^2(X))$ é simples.*

4.4.2 C*-álgebras de grupos

O Exemplo 2 do Capítulo 1 mostra que todo grupo pode ser visto de forma canônica como um grupóide.

Ademais, seja H um grupo discreto. Considerando H visto como grupóide, definimos as C^*-álgebras cheia e reduzida do grupo usando as definições de $C^*(H)$ e $C_r^*(H)$ já conhecidas.

Apenas para informação, observamos que a C^*-álgebra reduzida de um grupo discreto não trivial pode ser simples. Um exemplo deste fenômeno é o grupo livre gerado por dois elementos, veja [21] para mais detalhes. No entanto, o objetivo desta seção é mostrar que se H for um grupo discreto não trivial, então sua C^*-álgebra cheia não é simples.

Considere a ação trivial de H em um espaço X com apenas um ponto, ou seja,

$$\alpha : H \times \{x\} \to \{x\}$$

$$(h, x) \mapsto x.$$

É imediato ver que a ação trivial α é minimal e não é efetiva, exceto se H for trivial. Denotando por G o grupóide de transformação associado, segue que G é um grupóide minimal e não efetivo.

É fácil ver que

$$\phi : G \to H$$

$$(h, x) \mapsto h$$

é um isomorfismo de grupóides, considerando H visto como grupóide. Assim, uma vez que grupóides isomorfos possuem C^*-álgebras isomorfas, o teorema principal deste trabalho garante que a C^*-álgebra de G não pode ser simples, garantindo o

Corolário 6. *Seja H um grupo discreto não trivial. Então $C^*(H)$ não é simples.*

Obs. 3. *Se H for o grupo trivial, então*

$$C^*(H) \simeq C_r^*(H) \simeq \mathbb{C}.$$

4.4.3 Ações de Translação

Considere H um grupo discreto agindo sobre si mesmo por translação. Ou seja, considere

$$\alpha : H \times H \to H$$

$$(x, y) \mapsto xy,$$

onde xy denota o produto do grupo. Nesta seção, vamos mostrar que a C^*-álgebra cheia do grupóide de transformação da ação acima é simples e que é, de fato, isomorfa à álgebra de operadores compactos sobre o espaço de Hilbert $l^2(H)$.

Da Seção 4.3.1, sabemos que um grupóide discreto qualquer G é minimal e efetivo se e somente se G for isomorfo ao grupóide de pares $G^{(0)} \times G^{(0)}$, e isto acontece se e somente se a aplicação $(r, s)\colon G \to G^0 \times G^0$ é bijetiva. Considerando agora G o grupóide de transformação de um grupo discreto H em um espaço discreto X, temos a

Proposição 33. *G é minimal e efetivo se e somente se para quaisquer $x, y \in X$, existe um único $h \in H$ tal que $hx = y$.*

Demonstração: Para a ida, fixe $x, y \in X$. Como G é minimal e efetivo, temos que a aplicação (r, s) é bijetiva. Ademais, podemos identificar $X = G^{(0)}$. De tal forma, existe único $\gamma \in G$ tal que $(r, s)(\gamma) = (x, y)$. Denotando $\gamma = (h, z)$, segue que $z = y$ e que $h^{-1}z = x$, o que implica

$y = hx$ para único $h \in H$.

Para mostrarmos a volta, vamos mostrar que (r, s) é bijetiva. Mais uma vez identificando $X = G^{(0)}$, considere dados $(x, y) \in G^{(0)} \times G^{(0)}$. Por hipótese, existe um único $h \in H$ tal que $hx = y$. Defina $\gamma = (h^{-1}, h^{-1}y)$. Segue que $(r, s)(\gamma) = (h^{-1}y, y) = (x, y)$, provando a sobrejetividade. Para a injetividade, sejam $\gamma = (h_1, x)$ e $\eta = (h_2, y)$ tais que $(r, s)(\gamma) = (r, s)(\eta)$. Logo $x = y$ e $h_1^{-1}x = h_2^{-1}y = h_2^{-1}x$. Assim, a unicidade na hipótese garante que $h_1 = h_2$, donde segue o resultado.

■

Com a proposição anterior demonstrada, podemos concluir o objetivo desta seção. Considerando H um grupo discreto agindo sobre si mesmo por translação e G o grupóide de transformação associado, temos que dados $x, y \in H$, existe único $h \in H$ tal que $hx = y$, pois dados $x, y \in H$, a equação $hx = y$ admite um única solução $h \in H$, a saber, $h = yx^{-1}$. Segue que G é minimal e efetivo, portanto isomorfo ao grupóide de pares $G^{(0)} \times G^{(0)}$. O Corolário 4 da Seção 4.3.1 garante que a C^*-álgebra cheia do grupóide de pares é simples e também vimos em tal seção que a C^* do grupóide de pares é isomorfa à álgebra de operadores compactos sobre o espaço de Hilbert $l^2(G^{(0)})$. Assim, segue o

Corolário 7. *Seja H um grupo discreto agindo sobre si mesmo por translação. Então a C^*-álgebra cheia do grupóide de transformação associado é simples e isomorfa à $\mathbb{K}(l^2(H))$.*

4.4.4 Ações de Rotação

Considemos H o grupo discreto dos inteiros, ou seja, $H = (\mathbb{Z}, +)$. Queremos estudar ações de rotação deste grupo em espaços quaisquer.

É fácil ver que qualquer ação dos inteiros em um espaço X fica caracterizada por um único homeomorfismo $X \to X$. De fato, seja $h : X \to X$ um homeomorfismo. Defina

$$\alpha : \mathbb{Z} \times X \to X$$

$$(n, x) \mapsto h^n(x).$$

Claro que a notação $h^n(x)$ acima significa a composição do homeomorfismo h e, caso $n < 0$, a composição da inversa de h. Ademais, se $n = 0$, então $h^0(x) = Id(x)$. Assim, é fácil ver que α define uma ação de $\mathbb{Z}$ em X. Por outro lado, considere dada uma ação $\alpha : \mathbb{Z} \times X \to X$. Defina, para qualquer $x \in X$, $h(x) = \alpha(1, x)$. É fácil ver que h é o homeomorfismo procurado, ou seja, que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, vale que $\alpha(n, x) = h^n(x)$.

A partir da discussão acima, considere uma ação α dos inteiros em um espaço X e $h : X \to X$ o homeomorfismo associado. As próximas proposições caracterizam quando a ação α é livre e quando é minimal.

Proposição 34. *A ação α é livre se e somente se para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ não nulo, vale que $h^n(x) \neq x$, para qualquer $x \in X$.*

Demonstração: Isto segue de imediato pois ação livre significa que para qualquer $x \in X$ e $n \in \mathbb{Z}$, a equação $h^n(x) = x$ implica que $n = 0$.

■

Proposição 35. *A ação α é minimal se e somente se para qualquer $x \in X$, a órbita de x, $\mathcal{O}(x)$, é um conjunto denso em X. (Define-se $\mathcal{O}(x) := \{h^n(x) | n \in \mathbb{Z}\}$.)*

Demonstração: Sabemos que, de modo geral, uma ação é minimal se e somente se o grupóide de transformação associado for minimal. Vamos provar resultados mais gerais para então concluir esta demonstração.

■

Lema 7. *Seja G um grupóide topológico. Então G é minimal se e somente se para qualquer $x \in G^{(0)}$, o conjunto $[x]$ é denso em $G^{(0)}$.*

Demonstração: O Lema 3 garante que se um conjunto $D \subset G^{(0)}$ é invariante, então seu complementar também é. Sendo assim, podemos caracterizar G minimal a partir de fechados invariantes. Em outras palavras, temos que G é minimal se e somente se os únicos fechados invariantes de G são os triviais.

Ademais, a Proposição 23 garante que para qualquer $x \in G^{(0)}$, o conjunto $[x] := r(s^{-1}(x))$ é invariante. É fácil ver que o fecho de conjuntos invariantes é ainda invariante. Assim, segue que G é minimal se e somente se o fecho de $[x]$ é $G^{(0)}$ para qualquer $x \in G^{(0)}$, donde segue o lema. ■

Lema 8. *Sejam $\alpha : H \times X \to X$ ação de um grupo discreto H em um conjunto e G o grupóide de transformação associado. Identificando $G^{(0)} = X$, para qualquer $x \in X$, tem-se $[x] = \mathcal{O}(x)$, onde $\mathcal{O}(x) = \{h \cdot x | h \in H\}$.*

Demonstração: Para um $x \in X$ fixado, escrevemos

$$[x] = \{r(y) | s(y) = x\}.$$

Dado $z \in [x]$, segue que $z = r(y)$ para certo $y \in G$ com $s(y) = x$. Escrevendo $y = (h, w)$, segue que $z = w$ e que $h^{-1}w = x$, implicando $z = w = hx$, ou seja, $z \in \mathcal{O}(x)$.

Por outro lado, seja $h \in H$ e considere $y = hx$ um elemento qualquer de $\mathcal{O}(x)$. Definindo $z := (h, hx)$, segue que $r(z) = hx = y$ e que $s(z) = h^{-1}hx = x$. Isto mostra que $y \in [x]$, concluindo o resultado. ■

Com os Lemas 7 e 8 acima, a demonstração da Proposição 35 é imediata, bastando observar que a ação dos inteiros fica caracterizada pelo homeomorfismo h em questão.

Fixemos uma ação α de $\mathbb{Z}$ sobre X com homeomorfismo associado h. Uma observação simples e importante é a seguinte: se X for infinito e α minimal, então α é livre. De fato, se α não for livre, existirão $x \in X$ e $n \neq 0$ tais que $h^n(x) = x$, o que implica que a órbita $\mathcal{O}(x)$ é finita. Desta forma $\mathcal{O}(x)$ não pode ser densa em X, visto que é infinito.

Ainda neste contexto, se X for finito e não vazio, então α não pode ser livre, pois, se α for livre, então, fixado $x \in X$, a aplicação $\mathbb{Z} \to X, [n \mapsto h^n(x)]$ é injetiva. Mas isso é um absurdo, visto que X é finito. Desta forma, podemos concluir a

Proposição 36. *Seja α uma ação dos inteiros sobre um espaço não vazio X. Então a ação é livre e minimal se e somente se X for infinito e a ação for minimal.*

Para finalizar esta seção, citamos um exemplo clássico e bastante concreto. Considere sobre $X = \mathbb{T}$ (= círculo unitário), o homeomorfismo de rotação por um ângulo θ. Ou seja, $h(z) = e^{2\pi i\theta z}$, para $z \in \mathbb{T}$. É um resultado bem conhecido que a ação induzida pelo homeomorfismo h é minimal se e somente se θ for irracional, veja, por exemplo [5]. Vamos usar este fato na próxima seção, quando abordarmos álgebras de rotação.

4.4.5 Simplicidade das Álgebras de Rotação

Fixado um ângulo θ, a C^*-álgebra de rotação por θ, denotada por A_θ, é definida sendo a C^*-álgebra universal gerada por dois unitários U e V satisfazendo $UV = e^{2\pi i\theta}VU$. O foco desta parte do trabalho é apenas mencionar exemplos e aplicações do teorema principal, desta forma vamos usar de resultados conhecidos na literatura para concluirmos que A_θ é simples se θ for irracional. Para maiores informações sobre A_θ, recomendamos a referência [15].

Antes de mais nada, considere $\alpha_\theta : \mathbb{Z} \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ a ação de rotação por θ e seja G o respectivo grupóide de transformação. A referência [15], precisamente no Exemplo VIII.1.1, nos mostra que $A_\theta \simeq C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha_\theta} \mathbb{Z}$. Novamente, citamos a referência [15] para mais detalhes sobre a teoria de produtos cruzados. Como foi citado na introdução deste trabalho, é sabido que se um grupo discreto H age sobre um espaço localmente compacto e Hausdorff X, então o produto cruzado $C(X) \rtimes H$ é isomorfo à C^*-álgebra cheia do grupóide de transformação associado.

Com os fatos acima, concluímos que $A_\theta \simeq C^*(G)$. Ademais, se θ for irracional, sabemos que G será minimal, de acordo com o final da seção anterior.

Considere, portanto, que θ seja irracional. Uma vez que $\mathbb{T}$ é infinito e que α_θ é minimal, segue que também será livre, tendo em vista a Proposição 36. Como toda ação livre é efetiva, segue que G é minimal e efetivo.

Finalmente, observamos que $C^*(G) \simeq C^*_r(G)$: Como G é o grupóide de transformação da ação pelo grupo dos inteiros, temos que $\mathbb{Z}$ é amenable, pois é abeliano. Assim, G é amenable. Usando o teorema principal na versão de grupóides amenable, segue que $C^*(G)$ é simples e, em particular, que $C^*(G) \simeq C^*_r(G)$.

Diante disto, temos outro corolário do teorema principal:

Corolário 8. *A_θ é simples se e somente se θ é irracional.*

4.4.6 Grupóide de Deaconu-Renault e Álgebras de Cuntz

O Exemplo 5 deste trabalho apresenta o grupóide de Deaconu-Renault de um par (X, σ), onde X é um espaço compacto Hausdorff e $\sigma : X \to X$ é um homeomorfismo local sobrejetor. Denotando por G tal grupóide, sabemos que G é étale, localmente compacto e Hausdorff. Ademais, observamos que, se assumirmos que X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade, então G também assumirá, de modo que, G é efetivo se e somente se G topologicamente principal, de acordo com a Proposição 11.

Podemos nos perguntar sob quais condições sobre σ o grupóide G é minimal e/ou topologicamente principal (e assim efetivo).

Através do Lema 7, sabemos que um grupóide é minimal se e somente se todas as suas órbitas $[x]$ são densas. Usando a identificação canônica de G^0 com X, observe que

$$[x] = \{y \in X : \sigma^k(x) = \sigma^l(y) \text{ para algum } k, l \geq 0\} = \bigcup_{k,l} (\sigma^l)^{-1}(\sigma^k(x)). \tag{4.4}$$

Logo G é minimal se e somente se o conjunto acima é denso em X para todo $x \in X$.

Agora vamos analisar sob quais condições G é topologicamente principal. Por definição, isto vale se e somente se os pontos $x \in X$ com isotropia trivial, isto é, com $G(x) = \{x\}$, formam um subconjunto denso de X. Observe que

$$G(x) = \{x\} \iff \big(\forall k, l \geq 0,\, \sigma^k(x) = \sigma^l(x) \Rightarrow k = l\big). \tag{4.5}$$

Vamos agora especializar esta discussão à um exemplo mais concreto. Fixe um número natural $n \in \{2, 3, 4 \ldots\}$ e considere X o espaço produto de infinitas cópias (enumeráveis) do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ visto como um espaço discreto (finito, assim compacto), ou seja, $X := \{1, 2, \ldots, n\}^\infty$. Pelo Teorema de Tychonoff, X é um espaço compacto Hausdorff (e satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade). De fato, não iremos usar isto, mas é possível mostrar que X é homeomorfo ao espaço de Cantor (em particular, X é totalmente desconexo). No entanto, vamos apelidar X de *espaço de Cantor*. Uma base para a topologica de X consiste dos "cilindros":

$$Z(\alpha) := \{\alpha y : y \in X\},$$

onde $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_l$ é uma "palavra" (ou sequência) finita no "alfabeto" $\{1, 2, \ldots, n\}$. Aqui vemos elementos de X como "palavras infinitas" e escrevemos seus elementos como $x = x_1x_2x_3 \ldots$. A notação αx usada acima significa a concatenação da palavra finita α com a palavra infinita $y \in X$, que gera assim uma palavra infinita $x = \alpha y \in X$.

Temos sobre X uma aplicação natural, a saber, o "shift" $\sigma \colon X \to X$

definida por

$$\sigma(x_1 x_2 x_3 \ldots) := x_2 x_3 x_4 \ldots.$$

Não é difícil ver que, de fato, σ é um homeomorfismo local sobrejetivo. Assim podemos considerar o grupóide de Deaconu-Renault associado $G = G(\sigma)$. Vamos mostrar que G é minimal e topologicamente principal.

Para minimalidade de G, temos que verificar que $[x]$ descrito em (4.4) é denso em X para todo $x \in X$. Para isto, basta ver que $[x]$ intersepta todos os cilindros $Z(\alpha)$ para toda palavra finita α. Mas isto é claro já que $\sigma^l(\alpha x) = x = \sigma^0(x)$, onde l é o tamanho da palavra α.

Para ver que G é topologicamente principal, vamos primeiro observar que os pontos de isotropia não-trivial, isto é, os $x \in X$ com $G(x) \neq \{x\}$, são as palavras *periódicas*, ou seja, as palavras infinitas $x \in X$ de tal forma que existem $l, p \in \mathbb{N}$ com $x_{l+p+i} = x_{l+i}$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$. Por exemplo $x = 1234545454545\ldots$ é uma palavra periódica no alfabeto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para ver que os pontos de isotropia não-trivial consistem de palavras periódicas, basta usar (4.5) para concluir que $G(x) \neq \{x\}$ se e somente se existem $k \neq l$ em $\mathbb{N}$ com $\sigma^l(x) = \sigma^k(x)$. Isto significa que $x_{k+i} = x_{l+i}$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$. Supondo, sem perda de generalidade, que $k > l$ e tomando $p := k - l$, obtemos a periodicidade desejada de x. Logo, para vermos que G é topologicamente principal, basta vermos que as palavras não-periódicas formam um subconjunto denso de X. Mas isto é claro, já que todo cilindro obviamente contém uma palavra não-periódica.

Concluímos que o grupóide G associado ao shift sobre o espaço de Cantor é um grupóide (étale localmente compacto) minimal e topologicamente principal (ou efetivo). Para concluir que $C^*(G)$ é simples, precisamos ainda verificar $C^*(G) \cong C_r^*(G)$. Infelizmente esta é uma questão um pouco mais delicada e os detalhes fogem do escopo do trabalho. No entanto, vamos dar algumas ideias de como isto pode ser demonstrado, indicando algumas referências que contém mais detalhes sobre a prova completa deste fato. Ao mesmo tempo, aproveitamos para introduzir um certo subgrupóide de G que "revela" uma boa parte da estrutura de $C^*(G)$. Este é o subgrupóide

$$R := \{(x, 0, y) : \sigma^k(x) = \sigma^k(y) \text{ para algum } k \geq 0\}.$$

É simples ver que R é, de fato, um subgrupóide de G. Escrevendo triplas $(x, 0, y)$ em R como pares (x, y), podemos também ver R como o grupóide associado a relação de equivalência $\sim$ definida por $x \sim y$ se $\sigma^k(x) = \sigma^k(y)$ para algum k. A topologia de R não é a topologia produto, mas sim a *topologia do limite indutivo* que se dá escrevendo R como união dos subgrupóides:

$$R_k := \{(x, y) \in X \times X : \sigma^k(x) = \sigma^k(y)\}.$$

Em outras palavras, um subconjunto U de R é aberto se e somente se

$U \cap R_k$ é aberto em R_k para todo k, onde munimos R_k com a topologia produto de $X \times X$. É possível mostrar que R_k e R são grupóides etále (localmente compactos e Hausdorff). Observe que todos os grupóides R_k e R são principais (assim topologicamente principais), ou seja, todas os grupos de isotropia são triviais. Nenhum dos grupóides R_k é minimal pois a órbita de $x \in X$ relativo ao grupóide R_k é

$$[x]_{R_k} = \{y : \sigma^k(x) = \sigma^k(y)\},$$

e este é um subconjunto finito (com n^k elementos), assim não pode ser denso no espaço de Cantor. Assim podemos concluir que $C^*(R_k)$ não é simples. Apenas como informação, observamos que $C^*(R_k)$ pode ser identificada com a C^*-álgebra $M_{n^k}(C(X))$ das matrizes de tamanho n^k com entradas na C^*-álgebra $C(X)$. Observe que esta álgebra possui, de fato, vários ideais não-triviais, tais como os ideais da forma $M_{n^k}(C_0(U))$ para $U \subset X$ aberto. Por outro lado, o grupóide R é minimal. De fato, a órbita de x relativo à R é

$$[x]_R = \{y : \sigma^k(x) = \sigma^k(y) \text{ para algum } k \geq 0\} = \bigcup_k (\sigma^k)^{-1}(\sigma^k(x))$$

e este é um subconjunto denso de X conforme mostra um argumento análogo ao usado acima para a minimalidade de G. Mais ainda, pode-se mostrar que todos os grupóides R_k e R são amenable. A razão para isto é que os grupóides R_k provém de *relações de equivalência próprias* e o grupóide R provém de uma *relação de equivalência approximadamente própria*, veja [20]. Tais grupóides são amenable, veja [4]. Em particular, podemos já concluir neste ponto que $C^*(R)$ é uma C^*-álgebra simples. Como informação, observamos que $C^*(R)$ pode ser identificada com a C^*-álgebra UHF (ou álgebra de Glimm) de tipo n^∞. Para $n = 2$ esta álgebra é também conhecida como CAR álgebra (de "Canonical Anticommutation Relation"), um álgebra que tem origens na física.

Finalmente, para dar uma ideia da amenabilidade do nosso grupóide original G, observamos que R e G se encaixam em uma "sequência exata" de grupóides topológicos:

$$R \hookrightarrow G \to \mathbb{Z},$$

onde a flecha da direita denota o cociclo (funtor contínuo de G para um grupo) canônico $c\colon G \to \mathbb{Z}$ que manda uma tripla $g = (x, n, y) \in G$ no número inteiro $n := c(g) \in \mathbb{Z}$. O núcleo $c^{-1}(0)$ deste cociclo é R e c possui certas propriedades especiais que permitem concluir que G é amenable usando que R e $\mathbb{Z}$ são amenable (aqui $\mathbb{Z}$ é visto como grupo aditivo; ele é abeliano e assim amenable, fato que pode ser deduzido do teorema de ponto fixo de Markov-Kakutani). Com efeito, a amenabilidade de G segue do principal teorema em [12]. De fato, por um argumento similar, este resultado implica a amenabilidade de qualquer grupóide de Deaconu-Renault (não apenas o nosso grupóide acima baseado no espaço de Cantor).

A conclusão de toda esta discussão é que a C^*-álgebra $C^*(G)$ associada ao shift sobre o espaço de Cantor é simples. Pode-se mostrar que esta C^*-álgebra é isomorfa à C^*-álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_n$, introduzida por Joachim Cuntz em 1977 em [11]; esta é, por definição, a C^*-universal unital gerada por n isometrias $S_1, \ldots, S_n$ satisfazendo $S_1 S_1^* + \ldots S_n S_n^* = 1$. Cuntz já mostrou em [11] que $\mathcal{O}_n$ é simples.

Bibliografia

[1] A. Buss, R. Meyer, Iterated crossed products for groupoid fibrations, arXiv:1604.02015v1.

[2] B. Blackadar, Operator Algebras - Theory of C*-Algebras and von Neumann Algebras, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 2006.

[3] C. Anantharaman-Delaroche, Some remarks about the weak containment property for groupoids and semigroups, arXiv:1604.01724.

[4] C. Anantharaman-Delaroche and Jean Renault, Amenable groupoids, Monographies deL'Enseignement Mathématique, vol. 36, L'Enseignement Mathématique, Geneva, 2000. MR 1799683.

[5] D. Williams, Crossed products of C*-algebras, American Mathematical Society, 2007.

[6] G. Boava, Caracterizações da C^*-álgebra Gerada por uma Compressão Aplicadas a Cristais e Quasicristais, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática. Florianópolis, 2007.

[7] G. Goehle, Groupoid Crossed Products. Ph.D. Thesis, Dartmouth College, 2009.

[8] G. J. Murphy, C*-algebras and Operator Theory, ACADEMIC PressINC, 1990.

[9] I. F. Putnam, Lecture Notes on C*-algebras, University of Victoria, 2016.

[10] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims, Simplicity of algebras associated to étale groupoids, arXiv:1204.3127.

[11] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys. 57 (1977), no. 2, 173–185, available at http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103901288. MR 0467330

[12] J. Renault, D. P. Williams, Amenability of groupoids arising from partial semigroup actions and topological higher rank graphs (2015). arXiv:arXiv:1501.03027v2.

[13] J. Renault, A Groupoid Approach to C^*-Algebras, Springer, 1980.

[14] J. Renault, Cartan Subalgebras in C*-algebras, Irish Math. Soc. Bulletin 61 (2008), 29-63.

[15] K. R. Davidson, C^*-Algebras by Example, American Mathematical Society, 1996.

[16] N. P. Brown, N. Ozawa, C^*-Algebras and Finite-Dimensional Approximations, American Mathematical Society, 2008.

[17] R. Exel, Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), 39 (2008), 191-313.

[18] R. Exel and J. Renault, Semigroups of local homeomorphisms and interaction groups, Ergodic Theory Dynam. Systems, 27 (2007), 1737-1771.

[19] R. Exel, Non-Hausdorff étale groupoids, Proc. Amer. Math. Soc., 139 (2011), 897-907.

[20] R. Exel, A. O. Lopes, C^*-algebras, approximately proper equivalence relations and thermodynamic formalism, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), no. 4, 1051–1082, DOI 10.1017/S0143385704000148. MR 2085390.

[21] R.T. Powers Simplicity of the C^*-algebra associated with the free group on two generators. Duke Math. J. 42 (1975), 151–156.

[22] R. Willett, A non-amenable groupoid whose maximal and reduced C^*-algebras are the same, arXiv:1504.05615.

[23] V. Deaconu, Groupoids associated with endomorphisms, Transactions of the American Mathematical Society 347 (1995), no. 5, 1779-1786.

[24] V. Alekseev, M. Finn-Sell, Non-amenable principal groupoids with weak containment, arXiv:1606.07499.