Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Atratores para semifluxos generalizados e aplicação às equações de Navier-Stokes em 3D

Oriana Castaldi Ortiz de Almeida
Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan

Florianópolis
Fevereiro de 2017

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Atratores para semifluxos generalizados e aplicação às equações de Navier-Stokes em 3D

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Análise.

Oriana Castaldi Ortiz de Almeida
Florianópolis
Fevereiro de 2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Almeida, Oriana Castaldi Ortiz de
Atratores para semifluxos generalizados e aplicação às equações de Navier-Stokes em 3D / Oriana Castaldi Ortiz de Almeida ; orientador, Matheus Cheque Bortolan - Florianópolis, SC, 2017.
115 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Inclui referências

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Atratores. 3. Semifluxos generalizados. 4. Semigrupos multivaluados. 5. Equações de Navier-Stokes. I. Bortolan, Matheus Cheque. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Atratores para semifluxos generalizados e aplicação às equações de Navier-Stokes em 3D

por

Oriana Castaldi Ortiz de Almeida[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Análise, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Jardel Morais Pereira

Prof. Dr. Jardel Morais Pereira
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Matheus Cheque Bortolan

Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
(Orientador - UFSC)

Márcia Federson

Prof.ª Drª. Márcia Cristina Anderson Braz Federson
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-ICMC-USP)

Miguel Alejo

Prof. Dr. Miguel Ángel Alejo Plana
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Cleverson R. da Luz

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Fevereiro de 2017.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

"O Grande Caminho não tem porta,
milhares de estradas lá vão dar.
Aquele que atravessa esta Porta sem porta
caminha livremente entre o céu e a Terra." - Koan Budista

Agradecimentos

A minha gratidão mais sincera a todos aqueles que passaram por minha vida e me ajudaram a me tornar quem hoje sou. Esse trabalho só foi escrito graças à imensa luz que cada um foi e é para mim, iluminando o momento da dificuldade e me fazendo brilhar mais forte no da alegria.

Diante da perfeição da matemática, do milagre que de repente é compreender essa ínfima parte dela, me ajoelho primeiro perante ao Grande Amor substancial, àquele que sustenta e nutre tudo que existe, a quem muitos chamam de Deus.

Depois, aos meus pais, através de quem esse Deus me colocou no mundo e zelou por mim todos os dias da minha vida, que me deram as melhores condições para crescer e liberdade para fazer escolhas; que constituem em mim a base sólida que necessito para pisar solos desconhecidos, como era Florianópolis antes do ingresso no programa de mestrado.

Agradeço também a essa cidade incrível e à Universidade Federal de Santa Catarina por terem me acolhido e se tornado o meu lar.

Quando jovem houveram aqueles que foram responsáveis por me apresentarem a matemática em todo o seu esplendor e me motivaram a trilhar esse caminho duro mas tão compensador. Obrigada ao Colégio Puríssimo Coração de Maria pela incrível formação que tive no Ensino Fundamental e Médio, em especial ao professor Sérgio Pedroso e à equipe de Olimpíadas de Matemática - Ricardo Turolla, Guilherme Salvador, Rodolfo Guedes, Aline e Amanda Souza, Natasha Cartolano, etc - que passava tardes estudando assuntos extra-curriculares e discutindo problemas dificílimos, combinando mentes (muitas delas brilhantes) para encontrar - às vezes - uma solução. Vocês me ensinaram a me divertir com a matemática. Agradeço ainda aos professores Eduardo Tengan e Ali Tahzibi por seu incrível trabalho com a Olimpíada São Carlense de Matemática que sempre proporcionou à nossa equipe os melhores momentos.

No ensino superior, devo agradecer imensamente cada um dos professores e monitores do ICMC-USP e da Universidade de Salamanca que são parte essencial da minha formação matemática. Em especial a Maria do Carmo Carbinatto, que foi minha muito mais que orientadora durante praticamente a graduação inteira e a grande responsável pela solidez e o rigor matemático que hoje possuo.

Pelo suporte a esse trabalho, e também pela amizade, sou muito grata a Matheus Cheque Bortolan, que foi um orientador no sentido pleno da palavra. Sentou ao meu lado sempre que houve necessidade sanando pacientemente cada uma das dúvidas, sempre compreensivo com cada dificuldade que surgiu no caminho. Agradeço também ao professor Jáuber Cavalcante, sem cujas aulas de Teoria de Distribuições eu estaria absolutamente perdida, e nos auxiliou no capítulo de aplicação.

A minha gratidão a todos que constituem meu suporte pessoal. À minha família que sempre me mostrou o quanto sou amada e vibrou com as minhas conquistas, em especial minha irmã Ágata e minha prima-irmã Raísa. Ao meu namorado Miguel Phillipi por aguentar as muitas horas de dedicação a esse trabalho e me presentear com música e companhia quando a mente já não funcionava e o coração precisava ser nutrido.

A Fernando Gasparotto - e à sua família - por ter sido meu porto seguro durante toda a minha graduação e por sempre acreditar em mim. Aos meus grandes amigos para todas as horas Julia Sciamana, Clara Campos, Ana Beatriz, Camila Antunes, Laila Somaggio, Augusto Alves, Guilherme Caes, Karolyne Bortolotti, Aline Gurgel, Paloma Brigatto, Jéssika Ribeiro, Fabio Casula e Ingrid Mathias por absolutamente todos os momentos que compartilhamos. Um agradecimento especial para o Carlos Pecorari que foi meu colega de apartamento durante o mestrado e cuja parceria foi indispensável para a conclusão deste. A Celina Mitiko pelo suporte espiritual e pelo carinho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante todo o mestrado.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de atratores para semigrupos multivaluados definidos a partir de semifluxos generalizados. Tal classe é comumente utilizada para tratarmos de equações de evolução nas quais não há unicidade de soluções. Aplicamos os resultados às equações incompressíveis de Navier-Stokes em dimensão 3.

Palavras-chave: Atratores; semigrupos multivaluados; semifluxos generalizados; equações de Navier-Stokes.

Abstract

In this work we study the existence of attractors for multivalued semigroups defined from generalized semiflows. Such class is commonly used to deal with evolutions equations in which there are no uniqueness of solutions. We apply the results to the incompressible Navier-Stokes equations in dimension 3.

Keywords: Attractors; multivalued semigroups; generalized semiflows; Navier-Stokes equations.

Sumário

Introdução

A *teoria de semigrupos* e sua aplicabilidade ao estudo das equações diferenciais é estensamente conhecida e vem sendo estudada nas últimas décadas; recebem destaque na intersecção das Matemáticas pura e aplicada por modelar fenômenos físicos e biológicos. Mais especificamente, o estudo dos *atratores globais* para semigrupos tem fundamental importância para a compreensão da dinâmica assintótica para estes sistemas. Esta área de pesquisa conta com inúmeros trabalhos, como por exemplo [1, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 22, 20, 26, 28]. Dentre as equações mais famosas deste século estão as equações de Navier-Stokes, que modelam o escoamento de fluidos, e sobre as quais importantes questões matemáticas estão em aberto. Essa é a equação à qual aplicaremos os estudos desse trabalho, realizado com base principalmente nos artigos [25] e [2, 3], e é uma excelente motivação. Para mais resultados sobre as equações de Navier-Stokes, recomendamos os trabalhos [4, 9, 23, 27].

Um problema que persiste até hoje, e acredita-se ter resposta negativa entre os matemáticos mas é tomado como verdade pelas áreas de Engenharia, é a unicidade de soluções para equações incompressíveis de Navier-Stokes em três dimensões, e portanto, para abordar este problema com a teoria clássica de semigrupos teríamos que adicionar essa hipótese. Por esse motivo se torna evidente a vantagem de conhecer uma teoria mais abrangente, que não necessite de tal hipótese para ser viável e extrairmos informações significativas a respeito da dinâmica das soluções, como faríamos no caso clássico.

Uma das formas de se abranger a teoria de semigrupos é através de semifluxos generalizados, que na verdade é uma abstração dos sistemas dinâmicos autônomos para os quais existe essa possibilidade de haver mais de uma solução para um mesmo dado inicial.

Existem outras formas de fazer essa abstração. Uma delas seria recuperar unicidade das soluções utilizando semitrajetórias $\phi : [0, \infty) \to X$, X espaço métrico, e definir o correspondente semifluxo $T(t)\phi = \phi^t$ para cada $t \geqslant 0$, $\phi^t(\tau) = \phi(t + \tau)$, como feito em [23]. Outra maneira seria considerar aplicações de $[0, \infty)$ em subconjuntos de X associando a cada tempo t um subconjunto $T(t)z$ consistente de todos os possíveis pontos atingidos pelas soluções no tempo t com dado inicial z. Contudo tais métodos possuem desvantagens; o primeiro porque perde a conexão direta com a evolução do sistema no seu sentido físico e o segundo porque não fica descrito diretamente em termos das soluções e se torna uma dificuldade recuperá-las.

Na nossa abordagem, que se relaciona com o segundo método descrito, definimos *semifluxo generalizado* como uma família $\mathcal{G}$ de funções $\phi: [0, \infty) \to X$ satisfazendo axiomas de existência, translação, concatenação e semicontinuidade para a partir daí definir *semigrupos multivaluados* como aplicações $T(t) : P(X) \to P(X)$ para as quais $T(t)E$ será o conjunto de todos os pontos atingidos pelas funções do semifluxo no tempo t que iniciam no conjunto E, isto é

$$T(t)E = \{\phi(t): \phi \in \mathcal{G} \ e \ \phi(0) \in E\}.$$

Com essa definição para os semigrupos multivaluados podemos estender muitos resultados da teoria clássica de semigrupos de forma natural. Contudo, alguns deles admitem mais de uma extensão, como quando consideramos condições satisfeitas a partir de um certo tempo τ. Isso ocorre por exemplo nos conceitos de atração, absorção e dissipatividade. Para a teoria clássica, ou há possibilidade de escolhermos esse tempo de maneira uniforme em conjuntos limitados ou não há. Para o caso multivaluado podemos escolher esse tempo ser uniforme sobre conjuntos limitados e uniforme ou não-uniforme sobre pontos. Essas possibilidades nos levam a definições que não fazem sentido no caso clássico. Chamaremos B-conceitos aqueles com uniformidade referente aos conjuntos limitados, *ponto*-conceitos os referentes a pontos e ϕ-conceitos aqueles que não possuem qualquer uniformidade.

Nosso objetivo principal neste trabalho é estudar as propriedades dos semigrupos multivaluados definidos através dos semifluxos generalizados e obter um teorema de caracterização de semifluxos que possuam atratores globais bem como do atrator em si (Teoremas 2.2.35, 2.2.36, 2.2.37 e 2.2.38). Contudo, dada a relação já citada e por considerar importante o conhecimento do caso com unicidade (teoria clássica) para o entendimento do caso mais geral, fazemos um breve estudo de semigrupos contínuos no primeiro capítulo em que definimos os conceitos básicos e provamos todos os resultados necessários para demonstrar o teorema chave de existência dos atratores globais. As demonstrações serão apresentadas para que o leitor tenha familiaridade com as técnicas utilizadas, e possa facilmente compreender o caso de semifluxos generalizados.

No segundo capítulo, que pode ser lido de forma independente, definimos semifluxos generalizados e semigrupos multivaluados conforme já descrito, fazemos uma breve associação com o primeiro capítulo, tratamos e definimos propriedades relevantes dos semifluxos generalizados, demonstramos todos os resultados necessários para provar o teorema de caracterização dos semifluxos com atratores globais bem como o teorema que caracteriza o atrator em si.

Finalmente, no terceiro capítulo, aplicamos a teoria do capítulo dois às famosas equações de Navier-Stokes em três dimensões com a qual obtemos um resultado importante que nos dá as hipóteses necessárias para que o conjunto das soluções fracas de tais equações seja um semifluxo generalizado (Proposição 3.2.1). Dentro dessas condições mostramos que é possível garantir a existência do que chamamos atrator global (Teorema 3.2.2).

Capítulo 1

Semigrupos

Este capítulo tem como objetivo tratar das noções básicas para o estudo de *semigrupos contínuos* e tem como base a referência [30]. Ao explorar a dinâmica de um semigrupo, existe um conjunto que recebe destaque, pois suas características nos dão informações diretas a respeito de seu comportamento assintótico. Este conjunto recebe o nome de *atrator global.* Provar um resultado que caracterize os semigrupos que possuem atratores será a nossa meta final (veja o Teorema 1.2.4).

Ao longo do capítulo utilizaremos as seguintes notações: denotaremos por X um espaço métrico, $d : X \times X \to [0, \infty)$ sua métrica e $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em X.

Escreveremos $\mathbb{T}$ para denotar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^+ = \{t \in \mathbb{T} : t \geqslant 0\}$, $\mathbb{T}^- = \{t \in \mathbb{T} : t \leqslant 0\}$, $\mathbb{T}_t^- = t + \mathbb{T}^-$ e $\mathbb{T}_t^+ = t + \mathbb{T}^+$.

Dados $K \subset X$ não-vazio e $r > 0$, a **r−vizinhança** de K é o conjunto definido por $\mathcal{O}_r(K) = \{x \in X : d(x, K) < r\}$, em que $d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$.

1.1 Conceitos básicos

Nesta seção temos como objetivo definir um *semigrupo*, bem como alguns conceitos adicionais importantes para o estudo de sua dinâmica.

Definição 1.1.1. *Um* **semigrupo** *é uma família a um parâmetro* $\mathcal{T} = \{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\} \subset \mathcal{C}(X)$ *tal que*

(i) $T(0)x = x$ *para todo* $x \in X$,

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todos* $t, s \in \mathbb{T}^+$,

(iii) *A aplicação* $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$ *é contínua.*

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *diremos que* $\mathcal{T}$ *é um* **semigrupo discreto**.

Notemos que no caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, a terceira condição está automaticamente satisfeita. Como $T(n) = T(1)^n$, escrevendo $T = T(1)$, o semigrupo pode ser escrito na forma $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ e será simplesmente a família de aplicações $\{T^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(X)$; isto significa que, no caso de semigrupos discretos, o semigrupo $\mathcal{T}$ é totalmente descrito pelo comportamento da aplicação T.

Definição 1.1.2. *Dados um semigrupo* $\mathcal{T}$ *e um subconjunto* B *de* X, *definimos:*

1. *para cada* $t \in \mathbb{T}$, *a* **imagem** *de* B *sob* $T(t)$,

$$T(t)B = \{T(t)x : x \in B\};$$

2. *a* **órbita positiva** *de* B,

$$\gamma^+(B) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)B;$$

3. *a* **órbita parcial** *entre dois números de* $\mathbb{T}^+$, $t < t'$,

$$\gamma^+_{[t,t']}(B) = \bigcup_{t \leqslant s \leqslant t'} T(s)B;$$

4. *para cada* $t \in \mathbb{T}$, *a* **órbita** *de* $T(t)B$,

$$\gamma^+_t(B) = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+} T(s+t)B = \bigcup_{s \in \mathbb{T}^+_t} T(s)B.$$

Agora definiremos as noções de *atração*, *absorção* e *invariância* sob a ação do semigrupo $\mathcal{T}$. Definimos também solução global e atrator global para um semigrupo e damos uma caracterização para os atratores globais. Antes disso, definimos a **semi-distância de Hausdorff** $\mathrm{dist}_H(A,B)$ entre dois subconjuntos não-vazios A e B de X por

$$\mathrm{dist}_H(A,B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x,y).$$

Observamos que $\mathrm{dist}_H(A,B) = 0$ se, e somente se, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Definição 1.1.3. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de X. Diremos que A* **atrai** *B sob a ação do semigrupo $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se*

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

Se existir um $t_0 = t_0(B) \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset A$ para todo $t \geqslant t_0$, diremos que A **absorve** *B.*

Notemos que segue diretamente da definição acima que se A absorve B então A atrai B, mas a recíproca não é verdadeira em geral. O seguinte resultado relaciona de maneira mais precisa estas duas propriedades.

Proposição 1.1.4. *Se A atrai B então a r-vizinhança de A absorve B, para cada $r > 0$.*

Prova: Fixemos $r > 0$. Como A atrai B, temos $\mathrm{dist}_H(T(t)B, A) \to 0$ quando $t \to \infty$ e existe $t_0 \geqslant 0$ tal que $\mathrm{dist}_H(T(t)B, A) < r$ para todo $t \geqslant t_0$. Se $y \in T(t)B$, então

$$d(y, A) \leqslant \sup_{z \in T(t)B} d(z, A) = \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) < r \text{ para cada } t \geqslant t_0.$$

Logo, $y \in \mathcal{O}_r(A)$, o que mostra que $T(t)B \subset \mathcal{O}_r(A)$ para cada $t \geqslant 0$ e conclui a demonstração. ∎

A noção de invariância, dada a seguir, desempenha um papel fundamental no estudo da dinâmica assintótica de semigrupos.

Definição 1.1.5. *Diremos que um subconjunto A de X é* **invariante** (*ou* **positivamente invariante**) *sob a ação de um semigrupo $\mathcal{T}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ (ou $T(t)A \subset A$).*

Um conjunto invariante unitário corresponde a um **ponto de equilíbrio** *de $\{T(t) : t \in \mathbb{T}^+\}$; isto é, um ponto $x^* \in X$ tal que $T(t)x^* = x^*$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.*

Definição 1.1.6. *Um conjunto $\mathcal{A}$ é chamado um* **atrator global** *para um semigrupo $\mathcal{T}$ se é compacto, invariante e atrai todos os subconjuntos limitados de X sob a ação de $\mathcal{T}$.*

Notemos que o atrator global para um semigrupo $\mathcal{T}$, quando existe, é único. De fato, se $\mathcal{A}$ e $\hat{\mathcal{A}}$ são atratores globais para este semigrupo,

$$\mathrm{dist}_H(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) = \mathrm{dist}_H(T(t)\mathcal{A}, \hat{\mathcal{A}}) \xrightarrow{t \to \infty} 0,$$

e assim $\mathcal{A} \subset \hat{\mathcal{A}}$. Analogamente $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, e temos o resultado.

1.1.1 O conjunto ω-limite

O conjunto onde a órbita de B se acumula é chamado *ω-limite* de B. Nesta subseção definimos rigorosamente esse conjunto que desempenha um papel fundamental no estudo do comportamento assintótico de um semigrupo.

Definição 1.1.7. *O conjunto ω-**limite** de um subconjunto B de X é definido por*

$$\omega(B) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

O seguinte resultado nos dá uma caracterização do conjunto $\omega-$limite e será frequentemente usado na demonstração dos próximos.

Proposição 1.1.8. *Se $B \subset X$, $\omega(B)$ é fechado e*

$$\omega(B) = \{y \in X : \textit{existem sequências } \{t_n\} \textit{ em } \mathbb{T}^+ \textit{ e } \{x_n\} \textit{ em } B$$
$$\textit{tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \textit{ e } y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n\}.$$

Prova: Observamos que $\omega(B)$ é claramente fechado, uma vez que é intersecção de conjuntos fechados.

Para mostrar a primeira inclusão, tome $y \in \omega(B)$. Então $y \in \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)}$, e assim $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma sequência $\{y_k^n\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, existem $\{x_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $\{q_k^n\}_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ tais que $y_k^n = T(n + q_k^n)x_k^n$. Sabemos que fixados $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, existe $k(n,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k^n, y) < \epsilon$, se $k \geqslant k(n,\epsilon)$, isto é, $d(T(n + q_k^n)x_k^n, y) < \epsilon$ se $k \geqslant k(n,\epsilon)$. Defina, então, $t_n = n + q^n_{k(n,\frac{1}{n})}$ e $x_n = x^n_{k(n,\frac{1}{n})}$, assim $d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $x_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para a recíproca, seja $y \in X$ e sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset B$, tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$ temos $\{T(t_n)x_n\}_{t_n \geqslant \tau} \subset \gamma_\tau^+(B)$ e assim $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Portanto

$$y \in \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B)$$

como queríamos. ■

Propriedades do ω-limite

Esta seção tem como objetivo provar resultados acerca do ω-limite, que usaremos como ferramentas para demonstrar o teorema que caracteriza semigrupos com atratores globais.

A próxima proposição é um resultado conhecido que utilizaremos muitas vezes na demonstração dos demais resultados.

Proposição 1.1.9. *Seja K um subconjunto compacto de X e $\{x_n\}$ uma sequência em X tal que $d(x_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\{x_n\}$ tem uma subsequência convergente em K.*

Prova: Notemos que dado $m \in \mathbb{N}$ existem $n_m \in \mathbb{N}$ e $y_{n_m} \in K$ tais que $d(x_{n_m}, y_{n_m}) < \frac{1}{m}$. Como K é compacto podemos assumir, passando a uma subsequência se necessário, que $y_{n_m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_0$ para algum $y_0 \in K$. Assim, obtemos

$$d(x_{n_m}, y_0) \leqslant d(x_{n_m}, y_{n_m}) + d(y_{n_m}, y_0) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

isto é, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente em K. ■

Proposição 1.1.10. *Sejam $\mathcal{T}$ um semigrupo, K e K_1 subconjuntos compactos de X. Se K atrai K_1, então $\gamma^+(K_1)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(K_1) \subset K$.*

Prova: Da Proposição 1.1.4, dado $\epsilon > 0$ existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)K_1 \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K)$ para todo $t \geqslant t_0$. Assim,

$$\bigcup_{t \geqslant t_0} T(t)K_1 = \gamma^+_{t_0}(K_1) \subset \mathcal{O}_{\frac{\epsilon}{2}}(K)$$

e, então, $\gamma^+_{t_0}(K_1)$ está contido em uma união finita de bolas de raio ϵ.

Temos $\gamma^+_{[0,t_0]}(K_1) = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} T(t)K_1$ é compacto, pois é imagem de $[0,t_0] \times K_1$ pela função $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \mapsto T(t)x \in X$. Assim $\gamma^+(K_1) = \gamma^+_{[0,t_0]}(K_1) \cup \gamma^+_{t_0}(K_1)$ é totalmente limitado, e, como K é compacto, $\gamma^+(K_1) \cup K$ também o é.

Segue da Proposição 1.1.9 que $\gamma^+(K_1) \cup K$ é completo e, portanto, compacto. Com efeito, seja $\{x_n\} \subset \gamma^+(K_1) \cup K$ uma sequência de Cauchy. Vamos mostrar que é convergente.

Se $\{x_n\}$ possuir infinitos termos em K, então por ser K compacto terá uma subsequência convergente e, por ser $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, será ela toda convergente. Se não, $\{x_n\}$ deve possuir infinitos termos em $\gamma^+(K_1)$ e então possuirá uma subsequência do tipo $\{T(t_{n_k})y_{n_k}; t_{n_k} \to \infty,\ y_{n_k} \in K_1\}$. Como K atrai K_1,

$$\lim_{k \to \infty} d(T(t_{n_k})y_{n_k}, K) = 0.$$

Da Proposição 1.1.9 $\{T(t_{n_k})y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em K. Mais uma vez por ser uma sequência de Cauchy, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convirgirá para o mesmo limite, o que conclui a prova da completude de $\gamma^+(K_1) \cup K$.

Segue que $\gamma^+(K_1) \subset \gamma^+(K_1) \cup K$ é relativamente compacto, concluindo a primeira parte do resultado.

Finalmente, temos $\overline{\gamma_t^+(K_1)}$ compacto e não-vazio, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e

$$\overline{\gamma_t^+(K_1)} \subset \overline{\gamma_s^+(K_1)} \text{ para } s \leqslant t,$$

ou seja, a família $\{\overline{\gamma_t^+(K_1)}\}_{t\in\mathbb{T}^+}$ possui a propriedade da interseção finita e assim

$$\omega(K_1) = \bigcap_{t\in\mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K_1)} \neq \varnothing.$$

Resta mostrar que $\omega(K_1) \subset K$. Para isso, tome $y \in \omega(K_1)$. Temos $y \in \gamma_t^+(K_1)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$y \in \overline{\gamma_{t_0}^+(K_1)} \subset \mathcal{O}_\epsilon(K).$$

Assim $d(y, K) < \epsilon$ e, como ϵ é arbitrário, o resultado segue. ∎

O seguinte lema nos dá condições necessárias para que o ω-limite de um conjunto seja invariante.

Lema 1.1.11. *Seja $\mathcal{T}$ um semigrupo em X. Se $B \subset X$, então $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Se B é tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B)$ é invariante.*

Prova: Se $\omega(B) = \varnothing$, não há o que provar. Se $\omega(B) \neq \varnothing$, fixe $t \in \mathbb{T}^+$, da Proposição 1.1.8, se $y \in \omega(B)$, existem sequências $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Segue da continuidade de $T(t)$ que $T(t)y = \lim_{n\to\infty} T(t + t_n)x_n$ e então $T(t)y \in \omega(B)$. Logo $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Resta mostrar que, se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$ para cada $t \in \mathbb{T}^+$.

Para $x \in \omega(B)$ existem sequências $t_n \to \infty$ e $\{x_n\} \subset B$ tais que $T(t_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Para $t \in \mathbb{T}^+$ fixo, uma vez que $t_n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto $T(t)T(t_n - t)x_n = T(t_n)x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Como $\omega(B)$ atrai B temos $d(T(t_n - t)x_n, \omega(B)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por ser $\omega(B)$ compacto, segue da Proposição 1.1.9 que $\{T(t_n - t)x_n\}$ tem uma subsequência convergente para algum $y \in \omega(B)$ (que denotaremos novamente por $\{T(t_n - t)x_n\}$. Devemos ter $x = T(t)y$ com $y \in \omega(B)$ o que implica $x \in T(t)\omega(B)$. Portanto $\omega(B) \subset T(t)\omega(B)$, o que conclui a demonstração. ■

Lema 1.1.12. *Se B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Prova: Para cada $t \in \mathbb{T}^+$, $t \geqslant t_0$, $\overline{\gamma^+_t(B)}$ é não-vazio e compacto. Segue do fato que a família $\{\overline{\gamma^+_t(B)} : t \geqslant t_0\}$ tem a propriedade da interseção finita que $\omega(B) = \bigcap_{t \geqslant t_0} \overline{\gamma^+_t(B)}$ é não-vazio e compacto.

Mostremos agora que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não, então existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\}$ em B, $\{t_n\}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é compacto e $\{T(t_n)x_n, n \geqslant n_1\} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ para algum $n_1 \in \mathbb{N}$, existem subsequências $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{x_{n_j}\} \subset B$ tais que $\{T(t_{n_j})x_{n_j}\}$ é convergente para algum $y \in X$. Da Proposição 1.1.8 segue que $y \in \omega(B)$. Assim,

$$0 = d(y, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$$

o que nos leva a uma contradição. Logo $\omega(B)$ atrai B.

Segue agora do Lema 1.1.11 que $\omega(B)$ é invariante e a prova está completa. ■

1.1.2 Compacidade assintótica

Esta seção trata do conceito de *compacidade assintótica* que desempenha um papel importante na caracterização dos semigrupos que possuem um atrator global.

Definição 1.1.13. *Um semigrupo $\mathcal{T}$ é dito* **assintoticamente compacto** *se, para qualquer subconjunto fechado, limitado e não-vazio $B \subset X$ para o qual $T(t)B \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ existe um conjunto compacto $J \subset B$ que atrai B.*

Lema 1.1.14. *Se $\mathcal{T}$ é um semigrupo assintoticamente compacto e B é um subconjunto não-vazio de X tal que $\gamma^+_{t_0}(B)$ é limitado para algum $t_0 \in \mathbb{T}^+$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Prova: Primeiramente observamos que $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é fechado, limitado (pois $\gamma^+_{t_0}(B)$ é limitado) e não-vazio (pois B é não-vazio). Como $T(t)\gamma^+_{t_0}(B) \subset \gamma^+_{t_0}(B)$, segue que $\overline{T(t)\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$. Como $T(t)$ é contínua, $T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{T(t)\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$. Assim

$$T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \text{ para todo } t \geqslant 0$$

e $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ é positivamente invariante. Como $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto temos que existe um compacto $J \subset \overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$ que atrai $\overline{\gamma^+_{t_0}(B)}$. Logo, existem sequências $\epsilon_n \to 0$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $T(t)\overline{\gamma^+_{t_0}(B)} \subset \mathcal{O}_{\epsilon_n}(J)$ para todo $t \geqslant t_n$. Assim, $\varnothing \neq \omega(B) \subset J$. Como $\omega(B)$ é fechado e J é compacto, temos que $\omega(B)$ é compacto.

Mostremos que $\omega(B)$ atrai B. Se não, existem $\epsilon_0 > 0$ e sequências $\{x_n\} \subset B$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \epsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da compacidade de J e da Proposição 1.1.9, existem sequências $\{x_{n_j}\} \subset B$, $t_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $z \in J$ tais que $T(t_{n_j})x_{n_j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Assim $z \in \omega(B)$ e $d(z, \omega(B)) \geqslant \epsilon_0$, o que nos dá um absurdo.

Portanto, $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, atrai B e, do Lema 1.1.11, segue a invariância, o que completa o resultado. ■

Definição 1.1.15. *Um semigrupo $\mathcal{T}$ é dito* **eventualmente limitado** *se para cada limitado $B \subset X$ existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma^+_{t_B}(B)$ é limitado.*

A seguinte proposição nos dá uma caracterização para um semigrupo assintoticamente compacto.

Proposição 1.1.16. *Seja $\mathcal{T}$ um semigrupo e suponha que $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto sempre que $\{T(t_n)x_n\}$ e $\{x_n\}$ são limitadas em X e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Então $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto.*

Reciprocamente, se $\mathcal{T}$ é um semigrupo eventualmente limitado e assintoticamente compacto então $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto sempre que $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em X e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Prova: Seja $B \subset X$ um conjunto fechado, limitado e não-vazio tal que $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Vamos mostrar que $\omega(B)$ é não-vazio. Para isso, considere uma sequência $\{x_n\} \subset B$. Como B é limitado, segue que $\{x_n\}$ é limitada em X. Seja $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$; então $T(t_n)x_n \in B$ para todo n. Assim, $\{T(t_n)x_n\}$ é limitada em X. Por hipótese, $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto. Passando a uma subsequência se necessário, temos que deve existir $z = \lim\limits_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Logo $z \in \omega(B)$ e $\omega(B) \neq \varnothing$.

Do fato que $T(t)B \subset B$, para todo $t \in \mathbb{T}^+$ segue que $\omega(B) \subset B$. Além disso, $\omega(B) \subset \gamma^+(B)$ que é compacta devido à hipótese. Resta mostrarmos que $\omega(B)$ atrai B.

Suponha que não; então existem sequências $\{x_n\} \subset B$, $\{t_n\} \subset \mathbb{T}^+$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\varepsilon \geqslant 0$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon$. Mas $\{T(t_n)x_n\}$ é relativamente compacto, por hipótese, logo, passando a uma subsequência se necessário, deve existir $z \in \omega(B)$ tal que $z = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$ o que nos leva a uma contradição. Concluímos que $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto.

Por outro lado, se $\mathcal{T}$ é um semigrupo eventualmente limitado e $\{x_n\}$ é uma sequência limitada em X, logo existe $t_0 > 0$ tal que $B = \overline{\gamma^+_{t_0}(\{x_n\})}$ é um conjunto limitado. Como B é positivamente invariante e $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto, existe um compacto $J \subset B$ que atrai B. Em particular $\{T(t_n)x_n\}$ converge para J quando n tende a infinito e portanto, pela Proposição 1.1.9, é relativamente compacto. ■

1.2 Existência do atrator global

Nesta seção, primeiramente damos algumas definições de conceitos chave para o teorema central do capítulo e demonstramos resultados auxiliares. Depois, provamos o resultado principal que caracteriza os semigrupos que possuem atratores globais utilizando fortemente todos os elementos até agora apresentados.

Definição 1.2.1. *Diremos que um semigrupo $\mathcal{T}$ é* **ponto dissipativo (limitado dissipativo/compacto dissipativo)** *se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos (subconjuntos limitados/subconjuntos compactos) de X.*

Utilizando a Proposição 1.1.4, na definição acima podemos trocar a palavra *atrai* pela palavra *absorve* sem mudar os significados dos conceitos, mas claramente alterando um pouco o conjunto B.

Lema 1.2.2. *Seja $\mathcal{T}$ um semigrupo ponto dissipativo e assintoticamente compacto. Se $\gamma^+(K)$ é limitada sempre que K é compacto, então $\mathcal{T}$ é compacto dissipativo.*

Prova: Como $\mathcal{T}$ é ponto dissipativo, existe um conjunto não-vazio e limitado B que absorve pontos de X. De fato, $\mathcal{T}$ ponto dissipativo implica que existe A limitado tal que

$$\lim_{t\to\infty} d(T(t)x, A) = 0 \text{ para todo } x \in X.$$

Fixe $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{T}^+$ tal que $t \geqslant t_x$ implica que $d(T(t)x, A) < \epsilon$ e, logo, $T(t)x \in \mathcal{O}_\epsilon(A)$ para todo $t \geqslant t_x$. O conjunto $B = \mathcal{O}_\epsilon(A)$ é um limitado que absorve pontos de X.

Defina $U = \{x \in B : \gamma^+(x) \subset B\}$. Vamos mostrar que U é não-vazio. Como B absorve pontos, dado $y \in X$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)y \in B$ para todo $t \geqslant t_0$. Tome $x = T(t_0)y \in B$. Então,

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)x = \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)T(t_0)y = \bigcup_{t\geqslant 0} T(t+t_0)y = \bigcup_{s\geqslant t_0} T(s)y,$$

mas $T(s)y \in B$ para todo $s \geqslant t_0$ o que implica que $\bigcup_{s\geqslant t_0} T(s)y \subset B$ e, então, $\gamma^+(x) \subset B$. Portanto, $x = T(t_0)y \in U$ e $U \neq \varnothing$.

Afirmamos que $\gamma^+(U) = U$. Com efeito, seja $x \in U$. Temos $x = T(0)x \in \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)U = \gamma^+(U)$. Para a outra inclusão, seja $x \in \gamma^+(U)$. Então, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $y \in U$ tal que $x = T(t_0)y$. Precisamos mostrar que $x \in B$ e $\gamma^+(x) \subset B$.

Como $y \in U$, sabemos que $y \in B$ e $\gamma^+(y) = \bigcup_{t \geqslant 0} T(t)y \subset B$. Agora, $x = T(t_0)y$ com $t_0 \geqslant 0$, portanto $x \in \bigcup_{t \geqslant 0} T(t)y$ e concluímos que $x \in B$.

Seja $z \in \gamma^+(x)$. Existe $t_1 \geqslant 0$ tal que $z = T(t_1)x = T(t_1 + t_0)y$. Segue que $z \in \bigcup_{t \geqslant 0} T(t)y = \gamma^+(y) \subset B$. Portanto $z \in B$ e consequentemente $\gamma^+(x) \subset B$, o que conclui a prova da afirmação.

Temos U limitado, uma vez que $U \subset B$ e B é limitado. Além disso, como $\gamma^+(U) = U$, temos $\overline{\gamma^+(U)}$ limitado. Sabemos também que $T(t)\overline{\gamma^+(U)} \subset \overline{\gamma^+(U)}$, $t \geqslant 0$, o que significa que $\overline{\gamma^+(U)}$ é positivamente invariante. Ademais, $\overline{\gamma^+(U)}$ é fechado e não-vazio, uma vez que U é não-vazio. Como $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto K, com $K \subset \overline{\gamma^+(U)} = \overline{U}$ que atrai U.

Vamos verificar que U absorve pontos de X e, então, como K é compacto e atrai U, concluir que K atrai pontos de X. Para isso, seja $y \in X$. Como B absorve pontos, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)y \in B$ para todo $t \geqslant t_0$. Temos

$$\gamma^+(T(t)y) = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s)T(t)y = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s+t)y = \bigcup_{r \geqslant t} T(r)y \subset \bigcup_{r \geqslant t_0} T(r)y \subset B.$$

Mostremos agora que existe uma vizinhança V de K tal que $\gamma_t^+(V)$ é limitado para algum $t \in \mathbb{T}^+$. Se este não é o caso, existem sequências $\{x_n\}$ em X, $x_n \to y \in K$ e $t_n \to \infty$ tais que $\{T(t_n)x_n\}$ não é limitada. Considere $A = \overline{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}}$. Temos $\{T(t_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \gamma^+(A)$. Portanto, $\gamma^+(A)$ não é limitada com A compacto o que contradiz a hipótese.

Sejam V a vizinhança de K e $t_V \in \mathbb{T}^+$ tais que $\gamma_{t_V}^+(V)$ é limitado. Temos que $\gamma_{t_V}^+(V)$ absorve uma vizinhança de x para cada $x \in X$. De fato, como K atrai pontos de X e $T(t)$ é contínua, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $\mathcal{O}_x$ de x e $t_{0_x} > 0$ tal que $T(t)\mathcal{O}_x \subset V$ para

$t \geqslant t_{0_x}$. Então

$$T(t_V)T(t)\mathcal{O}_x \subset T(t_V)V \subset \bigcup_{t \geqslant t_V} T(t)V = \gamma^+_{t_V}(V)$$

o que implica que $T(t+t_V)\mathcal{O}_x \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para todo $t \geqslant t_{0_x}$ e, portanto, $T(s)\mathcal{O}_x \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para todo $s \geqslant t_x = t_V + t_{0_x}$.

Finalmente, mostremos que $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve subconjuntos compactos de X. Seja J um compacto de X. Para cada $x \in J$ seja $\mathcal{O}_x$ uma vizinhança de x que é absorvida por $\gamma^+_{t_V}(V)$. Considere a coleção $\{\mathcal{O}_x, x \in J\}$. Tal coleção é uma cobertura aberta para J. Por ser J compacto existe uma subcobertura finita $\{\mathcal{O}_{x_1}, \ldots, \mathcal{O}_{x_n}\}$. Temos

$$T(t)J \subset T(t)(\cup_{i=1}^n \mathcal{O}_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^n T(t)\mathcal{O}_{x_i}.$$

Também, $T(t)\mathcal{O}_{x_i} \subset \gamma^+_{t_V}(V)$ para todo $t \geqslant t_{x_i}$. Defina $t_0 = \max_{i=1,\ldots,n}\{t_{x_i}\}$. Para $t \geqslant t_0$,

$$T(t)J \subset \bigcup_{i=1}^n T(t)\mathcal{O}_{x_i} \subset \gamma^+_{t_V}(V).$$

Logo, $\gamma^+_{t_V}(V)$ absorve compactos e $\mathcal{T}$ é compacto dissipativo como queríamos demonstrar. ■

Proposição 1.2.3. *Seja X um espaço métrico e $\mathcal{T}$ um semigrupo em X. Se K é compacto e atrai a si mesmo sob a ação de $\mathcal{T}$ então $\omega(K) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K$.*

Prova: Para mostrar que $\cap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset \omega(K)$, note que

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset T(t)K \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

Para $s \in \mathbb{T}^+$, temos

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset T(s)K \subset \bigcup_{r \geqslant s} T(r)K = \gamma_s^+(K) \subset \overline{\gamma_s^+(K)}$$

e portanto

$$\bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} T(t)K \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(K)} = \omega(K).$$

Agora, para a inclusão contrária, usamos a Proposição 1.1.9 com $K_1 = K$ para garantir que $\omega(K) \subset K$ e $\gamma^+(K)$ é relativamente compacto. Do Lema 1.1.12 temos que $\omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai K. Assim

$$\omega(K) = T(t)\omega(K) \subset T(t)K, \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+,$$

o que prova o resultado. ∎

O seguinte teorema caracteriza os semigrupos que têm atratores globais.

Teorema 1.2.4. *Um semigrupo $\mathcal{T}$ é eventualmente limitado, ponto dissipativo e assintoticamente compacto se, e somente se, $\mathcal{T}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$.*

Prova: Por ser $\mathcal{T}$ eventualmente limitado, dado K compacto temos $\gamma_{t_0}^+(K)$ limitado para algum t_0 e, assim, $\gamma^+(K)$ é limitado. Disso e do fato de que $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto, ponto dissipativo segue do Lema 1.2.2 que $\mathcal{T}$ é compacto dissipativo.

Seja C um conjunto limitado que absorve subconjuntos compactos de X. Considere $B = \{x \in C : \gamma^+(x) \subset C\}$. Temos que B absorve subconjuntos compactos de X. Com efeito, como C absorve compactos de X, dado J compacto existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que

$$T(t)J \subset C \text{ para todo } t \geqslant t_0.$$

Vamos mostrar que $T(t)J \subset B$ para todo $t \geqslant t_0$. Seja $t \geqslant t_0$ e $x \in T(t)J$. Temos $x \in C$; além disso, existe $y \in J$ tal que $x = T(t)y$.

$$\gamma^+(x) = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s)x = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s)T(t)y = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s+t)y = \bigcup_{r \geqslant t} T(r)y \subset C.$$

Portanto, $\gamma^+(x) \subset C$ e $x \in B$. Assim $T(t)J \subset B$ e B absorve compactos.

Afirmamos que $T(t)B \subset B$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. De fato, dado $x \in B$, sabemos que $x \in C$ e $\gamma^+(x) \subset C$. Para $t \in \mathbb{T}^+$ arbitrário, temos

$$T(t)x \in \bigcup_{s \geqslant 0} T(s)x = \gamma^+(x) \subset C.$$

Portanto $T(t)x \in C$ e além disso,

$$\gamma^+(T(t)x) = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s)T(t)x = \bigcup_{s \geqslant 0} T(s+t)x = \bigcup_{r \geqslant t} T(r)x = \gamma_t^+(x) \subset \gamma^+(x) \subset C.$$

Logo $T(t)x \in B$ o que conclui a prova da afirmação.

Da continuidade de $T(t)$ e da afirmação anterior segue que $T(t)\overline{B} \subset \overline{B}$. Assim, temos que $\overline{B}$ é positivamente invariante. Ademais, $\overline{B}$ é fechado, limitado (pois $B \subset C$ e C é limitado), e não-vazio (basta proceder como na demonstração do Lema 1.2.2). Como $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}$ que atrai B. Do fato de que K atrai B e B absorve compactos, segue que K atrai subconjuntos compactos de X. Portanto K é um compacto que atrai a si próprio.

Da Proposição 1.1.10 e do Lema 1.1.12, concluímos que o conjunto

$\mathcal{A} = \omega(K)$ é não-vazio, compacto, invariante e $\omega(K) \subset K$. Para concluir que $\mathcal{A}$ é atrator global falta mostrar que $\mathcal{A}$ atrai limitados de X. Mostremos, primeiramente, que $\mathcal{A}$ atrai compactos.

Se $J \subset X$ é compacto, K atrai J. Da Proposição 1.1.10, segue que $\gamma^+(J)$ é relativamente compacto e $\varnothing \neq \omega(J) \subset K$. Como $\overline{\gamma^+(J)}$ é compacto, podemos aplicar o Lema 1.1.12 para concluir que $\omega(J)$ é invariante, compacto, não-vazio e atrai J.

Da invariância e do fato de que $\omega(J) \subset K$ temos $\omega(J) = T(s)\omega(J) \subset T(s)K$ para cada $s \geqslant 0$. Então, $\omega(J) \subset \cap_{s \in \mathbb{T}^+} T(s)K = \omega(K)$ pela Proposição 1.2.3. Disso, e do fato que $\omega(J)$ atrai J, temos que $\mathcal{A} = \omega(K)$ atrai J.

Agora seja B um subconjunto limitado de X, como $\mathcal{T}$ é eventualmente limitado e assintoticamente compacto, segue do Lema 1.1.14 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B. Como $\omega(B)$ é compacto, $\omega(K)$ atrai $\omega(B)$. Segue que $\mathcal{A}$ atrai B. Assim, $\mathcal{A}$ atrai limitados e é atrator global para $\mathcal{T}$.

Suponha, agora, que $\mathcal{T}$ tem um atrator global $\mathcal{A}$. Então $\mathcal{A}$ é invariante, compacto e atrai subconjuntos limitados de X. Segue diretamente o fato de o semigrupo ser limitado dissipativo e, consequentemente, ponto dissipativo.

Mostremos que $\mathcal{T}$ é eventualmente limitado. Para isso seja B um limitado de X; sabemos da Proposição 1.1.4 que existe uma vizinhança V do atrator $\mathcal{A}$ que absorve B, isto é, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)B \subset V$ para todo $t \geqslant t_0$. Assim

$$\bigcup_{t \geqslant t_0} T(t)B \subset V$$

o que implica que $\gamma^+_{t_0}(B) \subset V$ e, como V é limitado, $\gamma^+_{t_0}(B)$ é limitado.

Finalmente, $\mathcal{T}$ é assintoticamente compacto pela Proposição 1.1.16, o que conclui a demonstração. ■

1.2.1 Caracterização do atrator global

Segue diretamente da definição de atrator global que, quando este existe, ele atrai todos os subconjuntos limitados de X, isto é, a dinâmica assintótica de um semigrupo está concentrada no atrator. Mas o atrator global tem uma propriedade muito mais importante: ele *contém* toda a dinâmica limitada do semigrupo $\mathcal{T}$. Esta afirmação ficará mais clara abaixo.

Definição 1.2.5. *Uma função $\phi : \mathbb{T} \to X$ é uma* **solução global** *de $\mathcal{T}$ se*

$$T(t)\phi(s) = \phi(t+s) \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+ \text{ e } s \in \mathbb{T}.$$

Se $\phi(0) = x$ dizemos que ϕ é uma **solução global por** *x.*

Proposição 1.2.6. *Seja $\mathcal{T}$ um semigrupo com um atrator global $\mathcal{A}$. Então:*

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{ existe uma solução global limitada por } x\}. \tag{1.1}$$

Prova: Afirmamos que, dado $x \in \mathcal{A}$, existe uma solução global limitada $\phi_x : \mathbb{T} \to X$ tal que $\phi_x(0) = x$. De fato, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto \phi(t) = T(t)x \in X$ está sempre bem definida e é limitada. Agora, seja $x \in \mathcal{A} = T(1)\mathcal{A}$; existe $x_{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $T(1)x_{-1} = x$ e procedendo indutivamente conseguimos uma sequência $\{x_{-n}\}$ tal que $x_0 = x$ e $T(1)x_{-n-1} = x_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (lembre que a sequência $\{x_{-n}\}$ não é unicamente determinada).

Defina então

$$\phi_x(t) = \begin{cases} T(t)x, \ t \in \mathbb{T}^+, \\ \\ T(j+t)x_{-j}, \ t \in [-j, -j+1) \cap \mathbb{T}, \ j = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

que é uma solução global limitada por x em $\mathcal{A}$.

Reciprocamente, cada solução global limitada $\phi : \mathbb{T} \to X$ para $\mathcal{T}$ é tal que $\phi(\mathbb{T}) \subset \mathcal{A}$, pela invariância de $\phi(\mathbb{T})$ e da atração de $\mathcal{A}$, o que conclui a demonstração. ■

Capítulo 2

Semifluxos generalizados

Neste capítulo tratamos a teoria de semigrupos para o caso em que não temos uma única órbita passando por cada ponto. À semelhança do que fizemos no estudo da teoria clássica, começamos com definições e conceitos básicos, vemos as noções de atração, absorção e invariância a fim de definirmos e caracterizarmos um atrator global para esse caso multivaluado. Ao longo do capítulo procuramos explicitar a relação que existe entre os dois casos. Nas duas últimas seções trabalhamos brevemente mensurabilidade, continuidade, conexidade e funções de Lyapunov em semifluxos generalizados com a intenção de nos munirmos de resultados que nos auxiliem na aplicação. Os enunciados dos resultados deste capítulo podem ser encontrados em [25, 2]. As demonstrações foram, em sua maioria, desenvolvidas com consultas pontuais às referências [25, 2, 10, 31, 32]; algumas constam integralmente em [25, 2].

No que segue, como no capítulo anterior, (X, d) (ou apenas X) denotará um espaço métrico completo. Daqui por diante, denotaremos por $P(X)$ a coleção de subconjuntos não-vazios de X; $B(X)$ a coleção de subconjuntos não-vazios limitados de X; $C(X)$ a coleção dos fechados não-vazios; $K(X)$ os compactos não-vazios e, finalmente, $BC(X)$ a coleção dos subconjuntos não-vazios fechados e limitados.

2.1 Conceitos básicos

Nesta seção, definimos semifluxos generalizados e semigrupos multivaluados a partir destes. Definimos também outros conceitos que serão necessários para a compreensão dos resultados desta teoria.

Definição 2.1.1. *Um* **semifluxo generalizado** *em X é uma família $\mathcal{G}$ de aplicações $\phi: [0,\infty) \to X$ satisfazendo:*

(H1) *Para cada $z \in X$ existe pelo menos uma $\phi \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(0) = z$.*

(H2) *Se $\phi \in \mathcal{G}$ e $\tau \geqslant 0$, então $\phi^\tau \in \mathcal{G}$, onde $\phi^\tau(t) = \phi(t+\tau)$ para todo $t \in [0,\infty)$.*

(H3) *Se $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ e $\psi(0) = \phi(t)$ para algum $t \geqslant 0$ então $\theta \in \mathcal{G}$, onde*

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau), & \tau \in [0,t] \\ \psi(\tau - t), & \tau \in (t,\infty). \end{cases}$$

(H4) *Se $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ e $\phi_j(0) \to z$, então existe uma subsequência $\{\phi_\mu\}$ de $\{\phi_j\}$ e $\phi \in \mathcal{G}$ com $\phi(0) = z$ tais que $\phi_\mu(t) \to \phi(t)$ para cada $t \geqslant 0$.*

Se, além das propriedades acima, cada $\phi \in \mathcal{G}$ for contínua dizemos que $\mathcal{G}$ é um **semifluxo generalizado contínuo**.

Definição 2.1.2. *O* **semigrupo multivaluado** $\mathcal{T}$ *definido por* $\mathcal{G}$ *é uma família de operadores multivaluados* $T(t) \colon P(X) \to P(X)$ *tal que, para cada* $t \geqslant 0$*,*

$$T(t)E = \{\phi(t) \colon \phi \in \mathcal{G} \text{ e } \phi(0) \in E\}.$$

Usamos aqui a mesma notação $\mathcal{T}$ para os semigrupos multivaluados, que foi utilizada para semigrupos no sentido clássico no Capítulo 1. Para não haver confusões, aos nos referirmos a semigrupos clássicos, usaremos a notação $\mathcal{T}_c$, e deixaremos claro com qual tipo de semigrupo estaremos lidando.

2.1.1 Semigrupos multivaluados vs. Semigrupos

Podemos relacionar essa definição com a teoria clássica de semigrupos tratada no Capítulo 1. Dado um semigrupo (no sentido clássico) $\mathcal{T}_c$, para $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, podemos definir

$$\mathcal{G}_c = \{\phi_x \colon x \in X\},$$

onde $\phi_x(t) = T_c(t)x$ para cada $t \geqslant 0$.

Proposição 2.1.3. *A família* $\mathcal{G}_c$ *definida acima é um semifluxo generalizado.*

Prova: Com efeito, provemos que $\mathcal{G}_c$ satisfaz (H1), (H2), (H3) e (H4).

Notemos que (H1) segue do fato de que para todo $z \in X$, $\phi_z \in \mathcal{G}_c$ e $\phi_z(0) = T_c(0)z = z$. Para ver que vale (H2), considere $\phi \in \mathcal{G}_c$ e $\tau \geqslant 0$. Temos $\phi = \phi_x$ para algum $x \in X$ e

$$\phi_x^\tau(t) = \phi_x(t+\tau) = T_c(t+\tau)x = T_c(t)T_c(\tau)x = \phi_{T_c(\tau)x}(t) \text{ para todo } t \geqslant 0,$$

o que mostra que $\phi_x^\tau = \phi_{T_c(\tau)x} \in \mathcal{G}_c$. Para mostrar (H3), tome $\phi, \psi \in \mathcal{G}_c$ tais que $\phi(t) = \psi(0)$ para algum $t \geqslant 0$ e seja θ dada por

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau), \ \tau \in [0,t] \\ \psi(\tau - t), \ \tau \in (t, \infty). \end{cases}$$

Sabemos que existem $x, y \in X$ tais que $\phi = \phi_x$ e $\psi = \phi_y$. Como $\phi(t) = \psi(0)$, segue que $T_c(t)x = \phi_x(t) = \phi(t) = \psi(0) = \phi_y(0) = y$. Além disso, $\theta(\tau) = \phi(\tau) = \phi_x(\tau)$ para $\tau \in [0,t]$ e $\theta(\tau) = \psi(\tau - t) = \phi_y(\tau - t) = T_c(\tau - t)y = T_c(\tau - t)T_c(t)x = T_c(\tau)x = \phi_x(\tau)$ para $\tau > t$. Portanto $\theta(\tau) = \phi_x(\tau)$ para todo $\tau \geqslant 0$ e $\theta = \phi_x \in \mathcal{G}_c$.

Finalmente, seja $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}_c$ tal que $\phi_j(0) \to z$ para algum $z \in X$. Existe uma sequência $\{x_j\}$ em X tal que $\phi_j = \phi_{x_j}$ para todo j, e assim $\phi_j(0) = T_c(0)x_j = x_j$. Logo $x_j \to z$ e da continuidade do semigrupo $\mathcal{T}_c$, $T_c(t)x_j \to T_c(t)z$ para cada $t \geqslant 0$, o que conclui (H4). ■

O semigrupo multivaluado $\mathcal{T}$ definido por $\mathcal{G}_c$ é simplesmente a imagem por $T_c(t)$ de cada subconjunto E de X e conicidirá com o semigrupo $\mathcal{T}$ no caso em que E é formado por um único ponto.

2.1.2 Propriedades de semigrupos multivaluados

No que segue, sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $\mathcal{T}$ o semigrupo multivaluado definido por $\mathcal{G}$.

Proposição 2.1.4. *$\mathcal{T}$ satisfaz as propriedades (i) e (ii) da Definição 1.1.1 (no sentido clássico) em $P(X)$.*

Prova: Para cada $E \subset X$ temos

$$T(0)E = \{\phi(0); \phi \in \mathcal{G} \ e \ \phi(0) \in E\} = \{x \in E; \text{ existe } \phi \in \mathcal{G} \text{ com } \phi(0) = x\} = E,$$

onde a última igualdade segue de (H1), e concluímos que $T(0) = Id$ em $P(X)$. Agora, dados $t, s \geqslant 0$, precisamos mostrar que $T(t+s) = T(t)T(s)$. Sejam $E \subset X$ e $z \in T(t)T(s)E$. Então $z = \phi(t)$ com $\phi(0) \in T(s)E$. Segue que existe $\psi \in \mathcal{G}$ tal que $\psi(s) = \phi(0)$ e $\psi(0) \in E$. Defina

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau), \ \tau \in [0, s] \\ \phi(\tau - s), \ \tau \in (s, \infty). \end{cases}$$

Então, por (H3), $\theta \in \mathcal{G}$ e $z = \phi(t) = \theta(t+s)$ com $\theta(0) = \psi(0) \in E$. Logo $z \in T(t+s)E$. Reciprocamente, se $z \in T(t+s)E$, então $z = \phi(t+s)$ para alguma $\phi \in \mathcal{G}$ com $\phi(0) \in E$. Como $s \geqslant 0$, por (H2), $\phi^s \in \mathcal{G}$. Além disso, $z = \phi^s(t) = \phi(t+s)$ e $\phi^s(0) = \phi(s) \in T(s)E$ pois $\phi(0) \in E$. Segue que $z \in T(t)T(s)E$, o que conclui a demonstração. ∎

Proposição 2.1.5. *Dados $E, F \in P(X)$ com $E \subset F$ temos $T(t)E \subset T(t)F$ para todo $t \geqslant 0$.*

Prova: Seja $z \in T(t)E$. Então $z = \phi(t)$ com ϕ em $\mathcal{G}$ e $\phi(0) \in E \subset F$, e por definição, $z \in T(t)F$. ∎

Proposição 2.1.6. *Para cada $x \in X$, $T(t)x$ é compacto.*

Prova: Fixe $x \in X$ e tome $\{z_n\}$ uma sequência em $T(t)x$. Vamos mostrar que z_n admite uma subsequência convergente. Para cada n, $z_n = \phi_n(t)$ com $\phi_n(0) = x$ e $\phi_n \in \mathcal{G}$. Logo $\phi_n(0)$ é convergente e por $(H4)$ deve existir $\{\phi_\mu\}$ subsequência de $\{\phi_n\}$ e $\phi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi(0) = x$ e $\phi_\mu(\tau) \to \phi(\tau)$ para cada $\tau \geqslant 0$. Em particular, $z_\mu = \phi_\mu(t) \to \phi(t) \in T(t)x$ pois $\phi(0) = x$, o que conclui a demonstração. ∎

Proposição 2.1.7. *Se $\{K_n\}$ é uma sequência de compactos de X e $K \in K(X)$ tais que $\operatorname{dist}_H(K_n, K) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, então $\operatorname{dist}_H(T(t)K_n, T(t)K) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $t \geqslant 0$.*

Prova: Por absurdo, suponha que existam $t \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ e uma subsequência de $\{K_n\}$ (que denotaremos pela mesma) tais que $\text{dist}_H(T(t)K_n, T(t)K) > \varepsilon$ para todo n. Logo existe $\{\phi_n\} \subset \mathcal{G}$ com $\phi_n(0) \in K_n$ tal que

$$d(\phi_n(t), T(t)K) > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Como $\phi_n(0) \in K_n$, pela hipótese e a Proposição 1.1.9 devemos ter uma subsequência - que não renomearemos - de $\phi_n(0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$ para algum $z \in K$. Por (H4), deve existir uma subsequência $\{\phi_\mu\}$ e $\psi \in \mathcal{G}$ tais que $\psi(0) = z$ e $\phi_\mu(s) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \psi(s)$. Em particular

$$\phi_\mu(t) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \psi(t) \in T(t)K. \tag{2.2}$$

Assim (2.2) contradiz (2.1), o que conclui a demonstração do resultado. ∎

Agora definiremos as noções de atração, absorção e invariância, bem como provaremos dois resultados que relacionam os tipos de invariância abordados. Antes disso, precisaremos dos conceitos de *órbitas*, análogos aos definidos no Capítulo 1.

Definição 2.1.8. *Definimos por* $\gamma^+(\phi) = \{\phi(t) : t \geqslant 0\}$ *a* **órbita positiva** *de* $\phi \in \mathcal{G}$ *e* $\gamma^+(E) = \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)E$ *a* **órbita positiva** *de* $E \subset X$. *Para* $\tau \geqslant 0$, *definimos ainda as* **órbitas positivas parciais** $\gamma^+_\tau(\phi) = \{\phi(t) : t \geqslant \tau\}$ *de* ϕ *e* $\gamma^+_\tau(E) = \bigcup_{t\geqslant\tau} T(t)E$ *de* E.

Definição 2.1.9. *Uma* **órbita completa** *por* $x \in X$ *é uma aplicação* $\psi : \mathbb{R} \to X$ *tal que, para todo* $s \in \mathbb{R}$, $\psi^s|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ *e* $\psi(0) = x$. *Também utilizamos a expressão* órbita completa de ψ por x *para*

$$\gamma(\psi) = Im(\psi) = \{\psi(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Para o caso clássico, cada solução global é uma órbita completa para $\mathcal{G}$. Com efeito, seja $\mathcal{T}_c$ um semigrupo no sentido clássico e ψ uma solução global por $x \in X$. Então $\psi(0) = x$ e $T_c(t)\psi(s) = \psi(t+s)$ para todo $t \geqslant 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Temos, para cada $s \in \mathbb{R}$, $\psi^s|_{\mathbb{R}^+}(t) = \psi(t+s) = T_c(t)\psi(s) = \phi_{\psi(s)}(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Logo $\psi^s|_{\mathbb{R}^+} = \phi_{\psi(s)} \in \mathcal{G}$ e ψ é uma órbita completa por x.

2.1.3 Atração, absorção e invariância

Os conceitos de atração e absorção são análogos aos dados no capítulo anterior.

Definição 2.1.10. *Dizemos que $A \subset X$* **atrai** *um conjunto $E \subset X$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\tau = \tau(\varepsilon, E) \geqslant 0$ tal que $T(t)E \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geqslant \tau$, isto é, se*

$$\operatorname{dist}_H(T(t)E, A) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Se existir um $t_0 \geqslant 0$ tal que $T(t)E \subset A$ para todo $t \geqslant t_0$, diremos que A **absorve** *E.*

Definição 2.1.11. *Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é* **positivamente invariante** *se $T(t)A \subset A$ para todo $t \geqslant 0$; A é* **negativamente invariante** *se $A \subset T(t)A$ para todo $t \geqslant 0$; A é dito* **invariante** *se $A = T(t)A$ para todo $t \geqslant 0$ e, finalmente, A é* **quasi-invariante** *se para cada $z \in A$ existe uma órbita completa ψ por z e $\psi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Observamos que para a teoria clássica de semigrupos, quasi-invariância como definida aqui é equivalente a invariância. Mas na teoria de semigrupos multivaludos, não temos esta equivalência. Veremos alguns resultados a seguir que relacionam estes conceitos.

Proposição 2.1.12. *Se um conjunto é invariante, então ele é quasi-invariante.*

Prova: Seja A um conjunto invariante e $z \in A$. Por (H1) sabemos que existe $\theta_0 \in \mathcal{G}$ tal que $\theta_0(0) = z$. Como $z \in A = T(1)A$, segue que existe $\phi_1 \in \mathcal{G}$ tal que $z = \phi_1(1)$ e $\phi_1(0) \in A$. Podemos definir

$$\theta_1(\tau) = \begin{cases} \phi_1(\tau), & \tau \in [0,1] \\ \theta_0(\tau - 1), & \tau \in [1, \infty). \end{cases}$$

Temos $\theta_1(0) = \phi_1(0) = z_{-1} \in A$. Por (H3), $\theta_1 \in \mathcal{G}$ e pela invariância de A, $\theta_1(\tau) \in A$ para todo $\tau \geqslant 0$. Como $z_{-1} \in A = T(1)A$, segue que existe $\phi_2 \in \mathcal{G}$ tal que $z_{-1} = \phi_2(1)$ e $\phi_2(0) \in A$. Podemos definir

$$\theta_2(\tau) = \begin{cases} \phi_2(\tau), & \tau \in [0,1] \\ \theta_1(\tau - 1), & \tau \in [1, \infty). \end{cases}$$

Temos $\theta_2(0) = \phi_2(0) = z_{-2} \in A$. Por (H3), $\theta_2 \in \mathcal{G}$ e pela invariância de A, $\theta_2(\tau) \in A$ para todo $\tau \geqslant 0$. Procedendo indutivamente, podemos encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in \mathcal{G}$ tal que $z_{-n+1} = \phi_n(1)$ e $\phi_n(0) \in A$ e

$$\theta_n(\tau) = \begin{cases} \phi_n(\tau), & \tau \in [0,1] \\ \theta_{n-1}(\tau - 1), & \tau \in [1, \infty) \end{cases}$$

com $\theta_n(0) = \phi_n(0) = z_{-n} \in A$, $\theta_n \in \mathcal{G}$ e $\theta_n(\tau) \in A$ para todo $\tau \geqslant 0$.

Defina $\psi_n : [-n, \infty) \to X$ por $\psi_n(t) = \theta_n(t + n)$. Por (H2), $\psi_n|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ para todo n. Além disso, $\psi_n(0) = \theta_n(n)$. Finalmente, podemos definir $\psi : \mathbb{R} \to X$ por $\psi(t) = \psi_m(t)$ se $t \in [-m, \infty)$. A função ψ está bem definida pois se $t \in [-m, \infty)$,

$$\psi_{m+1}(t) = \theta_{m+1}(t+m+1) = \theta_m(t+m+1-1) = \theta_m(t+m) = \psi_m(t)$$

já que $t+m+1 \geqslant 1$. Ademais, ψ é uma oŕbita completa por z. Com efeito, $\psi(0) = \psi_0(0) = z$ e, para cada $s \in \mathbb{R}$, $\psi^s|_{\mathbb{R}^+}(t) = \psi(t+s)$ para $t \geqslant 0$. Se m é o menor inteiro tal que $-m \leqslant s$ então, para $t \geqslant 0$, $t+s \in [-m, \infty)$ e

$$\psi(t+s) = \psi_m(t+s) = \theta_m(t+s+m) = \theta_m^{s+m}(t) \text{ para todo } t \geqslant 0.$$

Como $\theta_m \in \mathcal{G}$, por (H2) temos $\theta_m^{s+m} \in \mathcal{G}$ e consequentemente, $\psi^s|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$. Além disso, como $\theta_n(t) \in A$ para todo $t \geqslant 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então $\psi(t) \in A$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que conclui a demonstração. ■

Proposição 2.1.13. *Se um conjunto é quasi-invariante, então é negativamente invariante.*

Prova: Fixe $t \geqslant 0$ e A um conjunto quasi-invariante. Dado $z \in A$, sabemos que existe ψ órbita completa por z inteiramente contida em A. Em particular, $\psi^{-t}|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ e $\psi^{-t}|_{\mathbb{R}^+}(t) = z$ com $\psi^{-t}|_{\mathbb{R}^+}(0) = \psi(-t) \in A$. Logo $z \in T(t)A$ e A é negativamente invariante. ■

2.1.4 Os conjuntos α e ω-limites

O objetivo desta seção é definir ω-limite de funções $\phi \in \mathcal{G}$ e de subconjuntos de X, bem como α-limite para órbitas completas, caracterizar alguns desses conjuntos e, finalmente, definir ponto-atrator e B-atrator global.

Definição 2.1.14. *Sejam $\phi \in \mathcal{G}$, ψ uma órbita completa e $E \subset X$. Definimos*

1. *o* **ω-limite** *de ϕ por $\omega(\phi) = \{z \in X;$ existe $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z\}$;*

2. *o* **α-limite** *de ψ por $\alpha(\psi) = \{z \in X;$ existe $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ tal que $\psi(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z\}$;*

3. *$\omega_B(E) = \{z \in X;$ existe $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ tal que $\{\phi_j(0)\} \subset E$ pertence a $B(X)$ e existe $\{t_j\} \subset \mathbb{R}^+$ com $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi_j(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z\}$;*

4. *$\omega(E) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(E)}$.*

Agora veremos alguns resultados de caracterização destes objetos.

Proposição 2.1.15. *Para cada $\phi \in \mathcal{G}$ temos $\omega(\phi) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(\phi)}$.*

Prova: Seja $z \in \omega(\phi)$. Sabemos que existe $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Devemos mostrar que $z \in \overline{\phi([t,\infty))}$ para todo $t \geqslant 0$. Para isso, fixe t. Como $t_j \to \infty$ existe j_0 tal que $t_j \geqslant t$ para todo $j \geqslant j_0$, e portanto $\phi(t_j) \in \phi([t,\infty))$ para $j \geqslant j_0$. Logo $z \in \overline{\phi([t,\infty))}$.

Reciprocamente, seja $z \in \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(\phi)}$. Devemos mostrar que existe $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $z = \lim_{j\to\infty} \phi(t_j)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $z \in \overline{\phi([j,\infty))}$, logo existem sequências $\{t_k^j\}$ tais que $z = \lim_{k\to\infty} \phi(t_k^j)$. Para cada j, escolha $k(j)$ tal que $d(\phi(t_{k(j)}^j), z) < \frac{1}{j}$ Defina $t_j = t_{k(j)}^j$. Então $t_j \geqslant j$ e portanto $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Além disso, $\phi(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Assim $z \in \omega(\phi)$, como queríamos. ■

Proposição 2.1.16. *Para cada $E \subset X$ temos $\omega(E) = \{z \in X;$ existem $\{\xi_n\} \subset X$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\xi_n \in T(t_n)E$ para todo n e $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z\}$.*

Prova: Seja $z \in \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(E)} = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{s\geqslant t} T(s)E}$. Temos $z \in \overline{\bigcup_{s\geqslant t} T(s)E}$ para todo $t \geqslant 0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\{x_n^j\} \subset \bigcup_{s\geqslant j} T(s)E$ tal que $z = \lim_{n\to\infty} x_n^j$. Observamos que cada $x_n^j \in T(t_n^j)E$ para algum $t_n^j \geqslant j$. Para cada j, escolha $n(j)$ tal que $d(x_{n(j)}^j, z) < \frac{1}{j}$. Defina $x_j = x_{n(j)}^j$ e $t_j = t_{n(j)}^j$. Então $x_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$, $x_j \in T(t_j)E$ e $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Reciprocamente, se existe $\{x_j\}$ tal que $z = \lim_{j\to\infty} x_j$ com $x_j \in T(t_j)E$ e $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, para cada $s > 0$ considere $j(s)$ tal que $t_j \geqslant s$ para todo $j \geqslant j(s)$. Considere ainda as subsequências de $\{x_j\}$, $\{x_j\}_{j\geqslant j(s)}$. Por ser z limite de cada uma dessas subsequências,

$$z \in \overline{\bigcup_{j\geqslant j(s)} T(t_j)E} \subset \overline{\bigcup_{t\geqslant s} T(t)E}$$

para todo $s \geqslant 0$, o que conclui a demonstração. ■

Observe que pela Proposição 2.1.16, $\omega_B(E) \subset \omega(E)$. Claramente, se E é limitado, $\omega_B(E) = \omega(E)$.

2.2 Atratores globais para semifluxos generalizados

Nesta seção demonstramos algumas propriedades que um semifluxo generalizado pode possuir que são relevantes para o estudo de sua dinâmica. Provamos resultados acerca da relação que existe entre tais propriedades. Finalmente, provamos os resultados centrais que caracterizam semifluxos que possuem atratores globais e o próprio atrator.

Antes de começarmos, consideremos as seguintes definições de *atratores* que usaremos no contexto de semifluxos generalizados:

Definição 2.2.1. *Um subconjunto A de X que atrai todos os subconjuntos limitados de X é chamado* **B-atrator global***. Um subconjunto A que atrai todos os pontos de X é chamado* **ponto-atrator global***.*

Com as definições acima, podemos dar a definição de *atrator global.*

Definição 2.2.2. *Um subconjunto $\mathcal{A}$ de X é chamado de* **atrator global** *para $\mathcal{G}$ se A é compacto, invariante e é um B-atrator global.*

No que segue, exploraremos definições e resultados a fim de encontrar condições para garantir a existência de um atrator global - veja os Teoremas 2.2.35, 2.2.36 e 2.2.37 , que estão na próxima seção.

Definição 2.2.3. *$\mathcal{G}$ é* **eventualmente limitado** *se para $B \in B(X)$ existe $\tau = \tau(B) \geqslant 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B) \in B(X)$.*

Vamos buscar condições para encontrar tais objetos, e para isso precisaremos de algumas definições e resultados básicos.

Definição 2.2.4. *Dizemos que $\mathcal{G}$ é*

(a) **limitado dissipativo** *ou* **B-dissipativo** *se $\mathcal{G}$ possui um B-atrator global limitado,*

(b) **ponto dissipativo** *se $\mathcal{G}$ possui um ponto-atrator global,*

(c) **ϕ-dissipativo** *se existe um conjunto B_0 tal que, para toda $\phi \in \mathcal{G}$, existe t_ϕ tal que $\phi(t) \in B_0$ para todo $t \geqslant t_\phi$.*

Lema 2.2.5. *Se $\mathcal{G}$ é B-dissipativo, então é eventualmente limitado.*

Prova: Seja $\mathcal{A}$ o B-atrator global limitado de $\mathcal{G}$ e fixe $\varepsilon > 0$. Dado $B \in B(X)$ deve existir $\tau(B) \geqslant 0$ tal que $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$ para todo $t \geqslant \tau(B)$ e logo $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{A})$ é limitado, segue que $\gamma^+_{\tau(B)}(B)$ também o é. Portanto $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado. ∎

Proposição 2.2.6. *Se $\mathcal{G}$ é limitado dissipativo então $\mathcal{G}$ é ponto dissipativo. Se $\mathcal{G}$ é ponto dissipativo então $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo.*

Prova: Como para cada ponto $x \in X$ o conjunto $\{x\}$ é limitado, a primeira afirmação é satisfeita. Para provar a segunda, suponha que exista $A \subset X$ que atraia pontos de X e fixe $\varepsilon > 0$. Para $\phi \in \mathcal{G}$, considere $x = \phi(0)$. Temos, pela Proposição 1.1.4, para algum $\tau_x \geqslant 0$, $T(t)x \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geqslant \tau_x$. Como $\phi(t) \in T(t)x$, segue que $\phi(t) \in \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ para todo $t \geqslant \tau_x$. O resultado então segue tomando $B_0 = \mathcal{O}_\varepsilon(A)$. ■

Definição 2.2.7. *$\mathcal{G}$ é dito* **compacto** *se para toda sequência $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\{\phi_j(0)\} \in B(X)$ existe uma subsequência $\{\phi_\mu\}$ de $\{\phi_j\}$ tal que $\{\phi_\mu(t)\}$ é convergente para todo $t \geqslant 0$.*

Definição 2.2.8. *$\mathcal{G}$ é dito* **assintoticamente compacto** *se para toda sequência $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\{\phi_j(0)\} \in B(X)$ e toda sequência $\{t_j\}$ com $t_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty$, a sequência $\{\phi_j(t_j)\}$ possui uma subsequência convergente.*

Uma definição equivalente seria dizer que $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto se para todo $B \in B(X)$ e toda sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$ para todo n e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ existe uma subsequência convergente.

Proposição 2.2.9. *Se $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto então $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado.*

Prova: Suponha, por absurdo, que exista $B \in B(X)$ tal que para todo $\tau \geqslant 0$, $\gamma_\tau^+(B) \notin B(X)$. Defina $t_0 = 0$. Tome $\xi_0 \in T(t_0)B \subset \gamma_{t_0}^+(B)$. Uma vez que $\gamma_\tau^+(B)$ é não limitado para $\tau \geqslant t_0$, deve existir $t_1 > t_0$ tal que $T(t_1)B$ é não limitado. Tome $\xi_1 \in T(t_1)B$ tal que $d(\xi_0, \xi_1) > 1$. Analogamente, existe $t_2 > t_1$ tal que $T(t_2)B$ não é limitado. Podemos escolher ξ_2 tal que $d(\xi_2, \{\xi_0, \xi_1\}) > 1$. Assim construimos uma sequência

$\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$ para todo n com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $B \in B(X)$ que não possui uma subsequência convergente, o que é uma contradição. ■

Proposição 2.2.10. *Se $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e compacto, então $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto.*

Prova: Seja $B \in B(X)$, $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $\{\xi_n\} \subset X$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$ para todo n. Temos, para cada n, $\xi_n = \phi_n(t_n)$, $\phi_n \in \mathcal{G}$ e $\phi_n(0) \in B$. Seja $\tau_0 \geqslant 0$ tal que $\gamma^+_{\tau_0}(B)$ é limitada. Da Proposição 2.1.4, temos $T(t_n)B = T(1)T(t_n - 1)B$ sempre que $t_n > 1$. Segue que existe $\phi'_n \in \mathcal{G}$ tal que $\phi_n(t_n) = \phi'_n(1)$ com $\phi'_n(0) \in T(t_n - 1)B \subset \gamma^+_{\tau_0}(B)$ para todo n tal que $t_n - 1 \geqslant \tau_0$. Da compacidade de $\mathcal{G}$, $\{\phi'_n(1)\}$ deve possuir uma subsequência convergente e portanto $\{\phi_n(t_n)\}$ possui uma subsequência convergente, o que mostra a compacidade assintótica de $\mathcal{G}$. ■

Definição 2.2.11. *$\mathcal{G}$ é dito* **condicionalmente assintoticamente compacto** *se para todo $B \in B(X)$ tal que $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \in B(X)$ para algum $\tau(B) \geqslant 0$, toda sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$ para todo n e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ existe uma subsequência convergente.*

Proposição 2.2.12. *$\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto se, e somente se, $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e condicionalmente assintoticamente compacto.*

Prova: Suponha que $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto. Da Proposição 2.2.9 já sabemos que $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado. Além disso, é evidente das definições que $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto.

Para a outra implicação, seja $B \in B(X)$, $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ e $\{\xi_n\} \subset X$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$ para todo n. Como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado, sabemos que existe $\tau(B) \geqslant 0$ para o qual $\gamma^+_\tau(B)$ é limitada. Mas então, segue do fato de que $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto que $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente. Logo $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, como queríamos. ■

2.2.1 Principais propriedades de semifluxos generalizados

Lema 2.2.13. *Sejam $F \in C(X)$ e $A \in P(X)$.*

1. *Se F atrai A, então $\omega_B(A) \subset \omega(A) \subset F$.*

2. *Se $\omega(A)$ atrai A, então $\omega(A)$ é o fechado minimal que atrai A, isto é, se F é um fechado que atrai A então $\omega(A) \subset F$.*

3. *Para todo $\tau \geqslant 0$, $\omega(\gamma_\tau^+(A)) = \omega(A)$.*

Prova: De (1). Da Proposição 2.1.16 já temos, como observado anteriormente, $\omega_B(A) \subset \omega(A)$. Suponha que F atrai A, isto é,

$$\mathrm{dist}_H(T(t)A, F) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.3}$$

Precisamos mostrar que $\omega(A) \subset F$. Para isso, seja $x \in \omega(A)$. Existe sequência $\{\xi_n\} \subset X$ tal que $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n, $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $d(\xi_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Por (2.3), $d(\xi_n, F) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, e portanto deve existir uma sequência $\{y_n\} \subset F$ tal que $d(\xi_n, y_n) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e, como F é fechado, $x \in F$ como queríamos demonstrar.

De (2). Segue do item (1) e do fato de que $\omega(A)$ é fechado. **De (3).** Sejam $\tau \geqslant 0$ fixado e $x \in \omega(\gamma_\tau^+(A))$. Então existem $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\xi_n \in T(t_n)\gamma_\tau^+(A)$ tal que $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Logo, para cada n, $\xi_n = \phi_n(t_n)$ com $\phi_n \in \mathcal{G}$ e $\phi_n(0) \in \gamma_\tau^+(A)$. Assim $\phi_n(0) \in T(s_n)A$ para algum $s_n \geqslant \tau$ e portanto existe $\phi_n \in \mathcal{G}$ tal que $\psi_n(0) \in A$ e $\psi_n(s_n) = \phi_n(0)$.

Seja θ_n definida por

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \psi_n(\tau), \ \tau \in [0, s_n], \\ \phi_n(\tau - s_n), \ \tau \in (s_n, \infty). \end{cases}$$

Temos $\theta_n \in \mathcal{G}$, $\theta_n(0) = \psi_n(0) \in A$ e $\theta_n(t_n + s_n) = \phi_n(t_n) = \xi_n$ para todo n. Logo $\theta_n(t_n + s_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Se definirmos $r_n = t_n + s_n$, então $\theta_n(r_n) \in T(r_n)A$ para todo n, $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\theta_n(r_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Logo $x \in \omega(A)$.

Reciprocamente, seja $x \in \omega(A)$. Então existem $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\xi_n \in T(t_n)A$ tal que $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Temos $\xi_n = \phi_n(t_n)$ com $\phi_n \in \mathcal{G}$ e $\phi_n(0) \in A$. Defina $s_n = t_n - \tau$. Então $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $\phi_n^\tau \in \mathcal{G}$ por (H2), $\phi_n^\tau(s_n) = \phi_n(t_n) = \xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\phi_n^\tau(0) \in T(\tau)A \subset \gamma_\tau^+(A)$. Logo $\xi_n = \phi_n^\tau(s_n) \in T(s_n)\gamma_\tau^+(A)$ para todo n. Concluímos que $x \in \omega(\gamma_\tau^+(A))$. Portanto $\omega(\gamma_\tau^+(A)) = \omega(A)$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 2.2.14.

1. *Se $F \subset X$ é fechado e é um ponto-atrator global, então $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é um ponto-atrator global, então ele é ponto-atrator fechado minimal.*

2. *Se $\omega(x)$ atrai x para cada $x \in X$, então $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ é o ponto-atrator global fechado minimal.*

Prova: De (1). Como F atrai x para todo $x \in X$, segue do Lema 2.2.13 que $\omega(x) \subset F$ para todo $x \in X$. Logo $\bigcup_{x\in X} \omega(x) \subset F$ e, como F é fechado, temos $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \subset F$ como queríamos.

De (2). Seja $x_0 \in X$. Temos

$$\operatorname{dist}_H\Big(T(t)x_0, \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}\Big) \leqslant \operatorname{dist}_H(T(t)x_0, \omega(x_0)) + \operatorname{dist}_H\Big(\omega(x_0), \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}\Big).$$

Por hipótese, $\mathrm{dist}_H(T(t)x_0, \omega(x_0)) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ e, desde que $\omega(x_0) \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$, temos $\mathrm{dist}_H\Big(\omega(x_0), \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}\Big) = 0$. Assim

$$\mathrm{dist}_H\Big(T(t)x_0, \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}\Big) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Teorema 2.2.15.

1. *Se $F \subset X$ é fechado e é um B-atrator global, então $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)} \subset F$. Em particular, se $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$ é um B-atrator global, então ele deve ser o B-atrator fechado minimal.*

2. *Se $\omega(B)$ atrai B para todo $B \in B(X)$, então $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$ é o B-atrator global fechado minimal.*

Prova: De (1). Como F atrai B para todo $B \in B(X)$, segue do Lema 2.2.13 que $\omega(B) \subset F$ para todo $B \in B(X)$. Logo $\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B) \subset F$ e, como F é fechado, temos $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)} \subset F$.

De (2). Seja $B_0 \in B(X)$. Temos

$$\mathrm{dist}_H\Big(T(t)B_0, \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}\Big) \leqslant \mathrm{dist}_H(T(t)B_0, \omega(B_0)) + \mathrm{dist}_H\Big(\omega(B_0), \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}\Big). \quad (2.4)$$

Por hipótese, $\mathrm{dist}_H(T(t)B_0, \omega(B_0)) \xrightarrow{t\to\infty} 0$ e, desde que $\omega(B_0) \subset \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$, temos $\mathrm{dist}_H\Big(\omega(B_0), \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}\Big) = 0$. Assim

$$\mathrm{dist}_H\Big(T(t)B_0, \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}\Big) \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Observemos que se para todo $B \in B(X)$ tivermos $\omega(B) = \bigcup_{x\in B} \omega(x)$, então

$$\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} = \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}.$$

Com efeito, temos $\overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \subset \overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)}$, uma vez que $\{x\} \in B(X)$ para cada $x \in X$. Além disso $\omega(B) = \bigcup_{x\in B} \omega(x) \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$ para todo $B \in B(X)$ e logo $\overline{\bigcup_{B\in B(X)} \omega(B)} \subset \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)}$.

Lema 2.2.16. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado, $K \in K(X)$ e $A \in P(X)$ tais que K atrai A. Então para toda sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)A$ com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ existe uma subsequência $\{\xi_{n_k}\} \subset \{\xi_n\}$ convergente para algum $x \in K$.*

Prova: Seja $\{\xi_n\}$ como na hipótese. Como K atrai A temos

$$\operatorname{dist}_H(T(t_n)A, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Logo $d(\xi_n, K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e o resultado segue da Proposição 1.1.9. ■

Mostremos agora que se o ω-limite de um conjunto A é compacto e atrai A, então ele é quasi-invariante.

Proposição 2.2.17. *Sejam $\mathcal{G}$ semifluxo generalizado, $A \in P(X)$ tal que $\omega(A) \in K(X)$ atrai A. Então $\omega(A)$ é quasi-invariante.*

Prova: Seja $z \in \omega(A)$. Deve existir $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $\phi_j(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Por (H2), $\phi_j^{t_j} \in \mathcal{G}$ para todo j. Como $\phi_j^{t_j}(0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$, e por (H4) deve existir uma subsequência (que denotaremos pela mesma) e $\psi_0 \in \mathcal{G}$ tal que $\psi_0(0) = z$ e $\phi_j^{t_j}(t) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \psi_0(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Temos $\psi_0(t) \in \omega(A)$ para todo $t \geqslant 0$.

Agora considere a sequência $\{\phi_j^{t_j-1}\} \subset \mathcal{G}$. Sabemos que

$$\phi_j^{t_j-1}(0) = \phi_j(t_j - 1) \in T(t_j - 1)A$$

para todo j. Como $\omega(A)$ atrai A, devemos ter

$$\mathrm{dist}_H(\phi_j(t_j - 1), \omega(A)) \xrightarrow{j\to\infty} 0.$$

Desde que $\omega(A)$ é compacto, segue da Proposição 1.1.9 que $\{\phi_j^{t_j-1}(0)\}$ possui uma subsequência convergente. Por (H4), deve existir $\psi_1 \in G$ e uma subsequência de $\{\phi_j^{t_j-1}(t)\}$ que não renomearemos tais que $\phi_j^{t_j-1}(t) \xrightarrow{j\to\infty} \psi_1(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Temos $\psi_1^1 = \psi_0$.

Procedendo indutivamente, para cada $r = 1, 2, \ldots$ encontramos ψ_r tal que $\psi_r^1 = \psi_{r-1}$ e $\psi_r(t) \in \omega(A)$ para todo $t \geqslant 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$\psi(t) = \psi_r(t + r), \text{ para todo } r \geqslant -t.$$

Temos ψ bem definida e uma órbita completa, pois $\psi^\tau|_{\mathbb{R}^+} = \psi_r^{\tau+r} \in \mathcal{G}$ para $r + \tau \geqslant 0$. Além disso $\psi(0) = \psi_0(0) = z$ e $\psi(t) \in \omega(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que mostra que $\omega(A)$ é quasi-invariante. ■

Segue da Proposição 2.1.13 que, nas condições da Proposição 2.2.17, $\omega(A)$ é negativamente invariante.

Lema 2.2.18. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$. Se para toda sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)A$ com $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ existe uma subsequência convergente, então $\omega(A)$ é compacto, quasi-invariante e é o fechado minimal não-vazio que atrai A.*

Prova: Vamos mostrar que $\omega(A)$ é não-vazio. Para isso tome $z \in A$; por (H1), existe $\phi \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(0) = z$. Defina $\xi_n = \phi(n)$. Temos $\xi_n \in T(n)A$ para todo n e, por hipótese, $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente para algum $\xi \in X$. Claramente $\xi \in \omega(A)$ e assim $\omega(A) \neq \varnothing$.

Mostremos agora que $\omega(A)$ atrai A. Suponha, por absurdo, que não. Então deve existir $\varepsilon \geqslant 0$ e $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\mathrm{dist}_H(T(t_n)A, \omega(A)) \geqslant \varepsilon$ para todo n. Podemos então construir uma sequência $\{\xi_n\}$ com $\xi_n \in T(t_n)A$ e $d(\xi_n, \omega(A)) \geqslant \varepsilon$ para todo n. Por hipótese, $\{\xi_n\}$ deve possuir uma subsequência convergente para algum $\xi \in \omega(A)$, e temos $d(\xi, \omega(A)) \geqslant \varepsilon$, o que nos leva a uma contradição.

Vamos mostrar que $\omega(A)$ é compacto. Para isso, seja $\{z_n\} \subset \omega(A)$. Para cada z_n existem sequências $\{\xi_k^n\}$ tais que $\xi_k^n \in T(t_k^n)A$, $t_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\xi_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z_n$. Para cada n fixado podemos escolher $k(n)$ tal que $d(\xi_{k(n)}^n, z_n) < \frac{1}{n}$ e $t_{k(n)}^n > n$. Defina $t_n = t_{k(n)}^n$ e $\xi_n = \xi_{k(n)}^n$. Então $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n. Por hipótese, $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente, digamos, $\{\xi_\mu\}$. Mas então $\{z_\mu\}$ é convergente e $\omega(A)$ é relativamente compacto. Como $\omega(A)$ é fechado, temos $\omega(A)$ compacto.

Segue da Proposição 2.2.17 que $\omega(A)$ é quasi-invariante e, finalmente, do Lema 2.2.13 que $\omega(A)$ é o fechado minimal que atrai A. ∎

<u>**Teorema**</u> **2.2.19.** *Seja $A \in P(X)$. Então $\omega(A)$ é compacto, não-vazio, quasi-invariante e atrai A se, e somente se, para todas as sequências $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{\xi_n\} \subset X$ tais que $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n, existe uma subsequência convergente.*

Prova: O resultado segue do Lema 2.2.18 e do Lema 2.2.16 tomando $K = \omega(A)$. ∎

Teorema 2.2.20. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $K \in K(X)$. Se $A \in P(X)$ é tal que K atrai A, então $\omega(A)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o fechado minimal que atrai A.*

Prova: O resultado segue do Lema 2.2.16 e do Teorema 2.2.19. ∎

A seguinte proposição é análoga ao Lema 1.1.12 para semigrupos no sentido clássico.

Proposição 2.2.21. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado e $A \in P(X)$ tal que $\overline{\gamma^+(A)} \in K(X)$. Então $\omega(A)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e atrai A.*

Prova: Sejam $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{\xi_n\}$ uma sequência tal que $\xi_n \in T(t_n)A$. Temos

$$\{\xi_n\} \subset \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)A = \gamma^+(A) \subset \overline{\gamma^+(A)}.$$

Como $\overline{\gamma^+(A)}$ é compacto, $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente e o resultado segue do Teorema 2.2.19. ∎

Lema 2.2.22. *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado assintoticamente compacto.*

1. *Se $B \in B(X)$, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o fechado minimal que atrai B. Além disso, se $T(t_0)\omega(B) \subset B$ para algum $t_0 \geqslant 0$, então $\omega(B)$ é invariante.*

2. *Para toda $\phi \in \mathcal{G}$, o conjunto $\omega(\phi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e $\phi(t) \to \omega(\phi)$ quando $t \to \infty$.*

3. *Se ψ é uma órbita completa limitada, então $\alpha(\psi)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e $\psi(t) \to \alpha(\psi)$ quando $t \to -\infty$.*

Prova: De (1). Segue diretamente do fato de $\mathcal{G}$ ser assintoticamente compacto que toda sequência $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)B$, com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, possui subsequência convergente. Segue do Teorema 2.2.19 e do Lema 2.2.13 que $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o fechado minimal que atrai B.

Suponha agora que $T(t_0)\omega(B) \subset B$ para algum $t_0 \geqslant 0$. Como já sabemos que $\omega(B)$ é quasi-invariante, temos da Proposição 2.1.13 que $\omega(B)$ é negativamente invariante. Resta mostrar que $T(t)\omega(B) \subset \omega(B)$ para todo $t \geqslant 0$. Primeiramente, vamos provar que $\omega(B) \subset B$. Com efeito, seja $z \in \omega(B)$ e ψ a órbita completa por z inteiramente contida em $\omega(B)$. Defina $\phi = \psi^{-t_0}|_{\mathbb{R}^+}$. Então $\phi \in \mathcal{G}$, $\phi(t_0) = \psi(0) = z$ e $\phi(0) = \psi(-t_0) \in \omega(B)$. Portanto $z \in T(t_0)\omega(B) \subset B$.

Fixe agora $t \geqslant 0$ e seja $z \in T(t)\omega(B)$. Então existe $\phi \in \mathcal{G}$ tal que $\phi(0) \in \omega(B)$ e $z = \phi(t)$. Seja ψ órbita completa por z; para $k > t$, considere $\psi^{t-k}|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$. Temos $\psi^{t-k}(k-t) = \psi(0) = \phi(0) = z$. Defina

$$\psi_k(s) = \begin{cases} \psi^{t-k}(s), \ s \in [0, k-t] \\ \phi(s-k+t), \ s \in (k-t, \infty). \end{cases}$$

Por (H4), $\psi_k \in \mathcal{G}$ e $\psi_k(k) = \phi(k-k+t) = \phi(t)$. Além disso, $\psi_k(0) = \psi^{t-k}(0) = \psi(t-k) \in \omega(B) \subset B$. Assim, $z = \phi(t) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(k)$, com $\psi_k(k) \in T(k)B$. Logo $z \in \omega(B)$, como queríamos.

De (2). Mostremos que $\omega(\phi)$ é não-vazio. Defina $\phi_j = \phi$ e $t_j = j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Então $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$, $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{\phi_j(0)\} = \{\phi(0)\} \in B(X)$. Como $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, $\{\phi_j(t_j)\}$ possui uma subsequência convergente para algum $\xi \in X$. Mas então $\xi \in \omega(\phi)$ e $\omega(\phi) \neq \varnothing$.

Para mostrar que $\omega(\phi)$ é compacto, consideremos $\{z_n\}$ uma sequência em $\omega(\phi)$. Para cada n, temos

$$z_n = \lim_{j \to \infty} \phi(t_j^n)$$

com $t_j^n \xrightarrow{j\to\infty} \infty$. Escolha $j(n)$ tal que $d(\phi(t_{j(n)}^n), z_n) < \frac{1}{n}$. Defina $\phi_n = \phi$ e $t_n = t_{j(n)}^n$. Temos $\{\phi_n(0)\} = \{\phi(0)\} \in B(X)$ e $t_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Da compacidade assintótica de $\mathcal{G}$, $\{\phi_n(t_n)\}$ possui uma subsequência convergente (que não renomearemos) digamos para $z \in X$. Mas então

$$d(z_n, z) \leqslant d(z_n, \phi_n(t_n)) + d(\phi_n(t_n), z) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

o que implica que $\{z_n\}$ possui uma subsequência convergente e, desde que $z \in \omega(\phi)$ pela definição do ω-limite, $\omega(\phi)$ é compacto como queríamos demonstrar.

Vamos mostrar que $\omega(\phi)$ é quasi-invariante. Seja $z \in \omega(\phi)$. Sabemos que existe $t_j \xrightarrow{j\to\infty} \infty$ tal que $z = \lim_{j\to\infty} \phi(t_j)$. Temos $\phi_j = \phi^{t_j} \in \mathcal{G}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\phi_j(0) \xrightarrow{j\to\infty} z$. Por (H4), deve existir $\{\phi_\mu\} \subset \{\phi_j\}$ e $\psi_0 \in \mathcal{G}$ tais que $\psi_0(0) = z$ e $\phi^{t_\mu}(t) = \phi_\mu(t) \xrightarrow{\mu\to\infty} \psi_0(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Afirmamos que $\psi_0(t) \in \omega(\phi)$ para todo $t \geqslant 0$. De fato, $\psi_0(t) = \lim_{\mu\to\infty} \phi^{t_\mu}(t) = \lim_{\mu\to\infty} \phi(t + t_\mu)$ com $t + t_\mu \xrightarrow{\mu\to\infty} \infty$. Agora considere $\phi_{j_1} = \phi^{t_j - 1}$ para $t_j > 1$. Temos $\{\phi_{j_1}(0)\} = \{\phi(t_j - 1)\}$, que possui uma subsequência convergente, pois $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto e $\{\phi(0)\}$ é limitado. Por (H4), obtemos $\psi_1 \in \mathcal{G}$ e uma subsequência de $\{\phi_{j_1}\}$ que não renomearemos tal que $\phi_{j_1}(t) = \phi^{t_j - 1}(t) = \phi(t + t_j - 1) \xrightarrow{j\to\infty} \psi_1(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Temos $\psi_1^1 = \psi_0$ pois $\psi_1^1(t) = \psi_1(t+1) = \lim_{j\to\infty} \phi(t_j - 1 + t + 1) = \psi_0(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Prosseguindo indutivamente para $r = 1, 2, \ldots$ conseguimos ψ_r tal que $\psi_r^1 = \psi_{r-1}$ e $\psi_r(t) \in \omega(\phi)$ para todo

$t \geqslant 0$. Dado $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$\psi(t) = \psi_r(t + r), \text{ para todo } r \geqslant -t$$

ψ está bem definida e é uma órbita completa pois $\psi^{\tau}|_{\mathbb{R}^+} = \psi_r^{\tau+r} \in \mathcal{G}$ para $r + \tau \geqslant 0$; além disso, $\psi(0) = \psi_0(0) = z$ e $\psi(t) \in \omega(\phi)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue que $\omega(\phi)$ é quasi-invariante.

Finalmente, precisamos mostrar que $\lim_{t\to\infty} d(\phi(t), \omega(\phi)) = 0$. Suponha, por absurdo, que existam $\varepsilon > 0$ e uma sequência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que

$$d(\phi(t_n), \omega(\phi)) > \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, sabemos que $\{\phi(t_n)\}$ possui uma subsequência convergente para algum $z \in X$. Mas então z deveria pertencer a $\omega(\phi)$ o que resulta numa contradição.

De (3). A prova deste item é análoga à do anterior. Quando utilizamos a compacidade assintótica de $\mathcal{G}$ basta lembrar que $\psi(t_j) = \psi^{2t_j}(-t_j)$ para $-t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ se $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. A sequência $\{\psi^{2t_j}(0)\}$ é limitada, uma vez que ψ é limitada. ■

<u>**Lema**</u> **2.2.23.** *Sejam $t, \tau \geqslant 0$. Então*

$$\bigcup_{s\geqslant t} T(s)\Big(\bigcup_{r\geqslant\tau} T(r)A\Big) = \bigcup_{s\geqslant t; r\geqslant\tau} T(s+r)A.$$

Prova: Defina $B = \bigcup_{r\geqslant\tau} T(r)A$ e tome $x \in \bigcup_{s\geqslant t} T(s)B$. Logo $x \in T(s_0)B$ para algum $s_0 \geqslant t$ e então $x = \phi(s_0)$ com $\phi \in \mathcal{G}$ e $\phi(0) \in B$. Deve existir $r_0 \geqslant \tau$ para o qual $\phi(0) \in T(r_0)A$. Logo, $\phi(0) = \psi(r_0)$ com

$\psi \in \mathcal{G}$ e $\psi(0) \in A$. Defina

$$\theta(a) = \begin{cases} \psi(a), & a \in [0, r_0] \\ \phi(a - r_0), & a \in (r_0, \infty). \end{cases}$$

Temos $\theta \in \mathcal{G}$, $\theta(0) = \psi(0) \in A$ e $x = \phi(s_0) = \theta(r_0 + s_0)$. Logo $x \in T(s_0 + r_0)A \subset \bigcup_{s \geqslant t; r \geqslant \tau} T(s + r)A$.

Reciprocamente, seja $x \in \bigcup_{s \geqslant t; r \geqslant \tau} T(s + r)A = \bigcup_{s \geqslant t; r \geqslant \tau} T(s)T(r)A$. Então $x \in T(s_0)T(r_0)A$ para $s_0 \geqslant t$ e $r_0 \geqslant \tau$. Assim, $x = \phi(s_0)$ com $\phi \in \mathcal{G}$ e $\phi(0) \in T(r_0)A$. Portanto $x \in T(s_0)B$ e, consequentemente,

$$x \in \bigcup_{s \geqslant t} T(s) \Big(\bigcup_{r \geqslant \tau} T(r)A \Big).$$

■

Teorema 2.2.24. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado condicionalmente assintoticamente compacto e $A \in P(X)$ tal que existe $\tau \geqslant 0$ para o qual $\gamma_\tau^+(A) \in B(X)$. Então $\omega(A)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o fechado minimal que atrai A.*

Prova: Seja $t_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ e $\{\xi_n\}$ tais que $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n. Pelo Teorema 2.2.19 é suficiente mostrar que $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente. Considere uma subsequência de $\{t_n\}$ digamos $\{t_{n_k}\}$ tal que $t_{n_k} \geqslant \tau$ para todo k. Então

$$\xi_{n_k} \in T(t_{n_k})A = T(t_{n_k} - \tau)T(\tau)A \subset T(t_{n_k} - \tau)\gamma_\tau^+(A) \text{ para todo } k.$$

Se definirmos $B = \gamma_\tau^+(A)$ e $s_k = t_{n_k} - \tau$, temos $\xi_{n_k} \in T(s_k)B$ para todo k. Observe que, pelo Lema 2.2.23, temos

$$\begin{aligned}\gamma_t^+(B) &= \bigcup_{s\geqslant t} T(s)B = \bigcup_{s\geqslant t} T(s)\Big(\bigcup_{r\geqslant \tau} T(r)A\Big)\\ &= \bigcup_{s\geqslant t; r\geqslant \tau} T(s+r)A \subset \bigcup_{s+r\geqslant t+\tau} T(s+r)A = \gamma_{t+\tau}^+(A) \subset \gamma_\tau^+(A),\end{aligned}$$

para todo $t \geqslant 0$. Como $\gamma_\tau^+(A)$ é limitada, temos $\gamma_t^+(B)$ limitada para todo $t \geqslant 0$. Por ser $\mathcal{G}$ condicionalmente assintoticamente compacto segue que $\{\xi_{n_k}\}$ possui uma subsequência convergente, e logo $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente como queríamos. ∎

2.2.2 Propriedade B-assintoticamente compacta

Nesta subseção apresentaremos o conceito de propriedade *B-assintoticamente compacta* e alguns resultados que a relacionam com as outras formas de compacidade de um semifluxo generalizado.

Definição 2.2.25. *Dizemos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ possui a* **propriedade B-assintoticamente compacta** *ou $B-ACP$ se para todo $B \in B(X)$ tal que $\gamma_{t_1(B)}^+(B) \in B(X)$ para algum $t_1(B) \geqslant 0$ existe $t_2 = t_2(B) \geqslant t_1(B)$ tal que para todo $t \geqslant t_2$ existem $K(B,t) \subset X$ compacto e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}(K(B,t))$ e $\varepsilon(B,t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$.*

Para obtermos resultados para semifluxos generalizados com a B-ACP precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.2.26. *Sejam X um espaço métrico completo e $\{L_n\}$ uma sequência de subespaços de X tal que $L_{n+1} \subset L_n$ e existem K_n compacto, $\varepsilon_n > 0$ tais que $L_n \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(K_n)$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ com $\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Então toda sequência $\{y_n\}$ tal que $y_n \in L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ possui uma subsequência convergente.*

Prova: Seja $\{y_n\} \subset X$ tal que $y_n \in L_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja $\varepsilon > 0$. Tome $\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Temos $y_n \in \mathcal{O}_{\varepsilon_{n_0}}(K_{n_0})$ para todo $n \geqslant n_0$. Como K_{n_0} é compacto devem existir $x_1, x_2, ..., x_{N_0}$ tais que

$$K_{n_0} \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_j).$$

Mas então $\mathcal{O}_{\varepsilon_{n_0}}(K_{n_0}) \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} B_\varepsilon(x_j)$. Temos $\{y_n\} \subset \bigcup_{j=1}^{N_0} B_\varepsilon(x_j)$ o que mostra que $\{y_n\}$ é totalmente limitado e, portanto, relativamente compacto. Logo $\{y_n\}$ possui uma subsequência convergente, como queríamos. ■

<u>**Teorema**</u> **2.2.27.** *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado com $B-ACP$ e $A \in P(X)$ tal que $\gamma_\tau^+(A) \in B(X)$ para algum $\tau \geqslant 0$. Então $\omega(A)$ é não-vazio, compacto, quasi-invariante e é o minimal fechado que atrai A.*

Prova: Seja $\{\xi_n\}$ tal que $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Defina $B = \gamma_\tau^+(A)$. Considere uma subsequência de $\{\xi_n\}$ (que não renomearemos) tal que $t_n \geqslant \tau$ para todo n. Temos

$$\xi_n \in T(t_n - \tau)T(\tau)A.$$

Se chamarmos $s_n = t_n - \tau$, então $\xi_n \in T(s_n)B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando o mesmo argumento do Teorema 2.2.24 concluímos que $\gamma_t^+(B) \subset \gamma_\tau^+(A)$ para todo $t \geqslant 0$ e, portanto, é limitado para cada t. Aplicando a $B-ACP$ para B com $t_1(B) = 0$, obtemos $t_2 = t_2(B) \geqslant 0$ tal que para $t \geqslant t_2$ existem $K(B,t) \subset X$ compacto e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}(K(B,t))$ e $\varepsilon(B,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Passando novamente a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\{s_n\}$ é crescente e $s_n \geqslant t_2$ para todo n. Assim, para cada n

temos K_n compacto e $\varepsilon_n > 0$ tais que

$$T(s_n)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(K_n) \text{ com } \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\{s_n\}$ é crescente, para $m > n$ temos $s_m = s_n + \delta$ com $\delta = \delta(n,m) \geqslant 0$. Então

$$T(s_m)B = T(s_n + \delta)B \subset T(s_n)B$$

pois

$$T(s_n + \delta)B = \bigcup_{t \geqslant \tau} T(s_n + \delta + t)A \subset \bigcup_{s \geqslant \tau} T(s_n + s)A.$$

Se definirmos $L_n = T(s_n)B$, então $L_{n+1} \subset L_n$ para todo n e estamos nas condições do Lema 2.2.26. Portanto, $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente e o resultado segue do Teorema 2.2.19. ■

Teorema 2.2.28. *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado eventualmente limitado com $B - ACP$. Então*

1. *$\mathcal{G}$ possui um único ponto-atrator global $\hat{M} = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$ fechado e minimal;*

2. *$\mathcal{G}$ possui um único B-atrator global $M = \overline{\bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)}$ fechado e minimal.*

Prova: Pelos Teoremas 2.2.14 e 2.2.15 basta mostrarmos que $\omega(B)$ atrai B para cada $B \in B(X)$. Lembremos que $\{x\} \in B(X)$ para cada $x \in X$.

Seja $B \in B(X)$. Como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado deve existir $\tau \geqslant 0$ tal que $\gamma_\tau^+(B) \in B(X)$. Desde que $\mathcal{G}$ possui $B - ACP$, segue do Teorema 2.2.27 que $\omega(B)$ atrai B, como queríamos. ■

Teorema 2.2.29. *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado com $B - ACP$, então $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto.*

Prova: Seja $A \in B(X)$ tal que $\gamma_\tau^+(A) \in B(X)$ para algum $\tau \geqslant 0$ e $\{\xi_n\}$ uma sequência tal que $\xi_n \in T(t_n)A$ para todo n com $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Precisamos ver que $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente. Defina $B = \gamma_\tau^+(A)$. Considere uma subsequência de $\{\xi_n\}$ (que não renomearemos) tal que $t_n \geqslant \tau$ para todo n. Temos

$$\xi_n \in T(t_n - \tau)T(\tau)A.$$

Se chamarmos $s_n = t_n - \tau$, então $\xi_n \in T(s_n)B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando o mesmo argumento do Teorema 2.2.24 concluímos que $\gamma_t^+(B) \subset \gamma_\tau^+(A)$ para todo $t \geqslant 0$ e, portanto, é limitado para cada t. Aplicando a $B - ACP$ para B com $t_1(B) = 0$, obtemos $t_2(B) \geqslant 0$ tal que para $t \geqslant t_2$ existem $K(B,t) \subset X$ compacto e $\varepsilon(B,t) > 0$ satisfazendo $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon(B,t)}(K(B,t))$ e $\varepsilon(B,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Passando novamente a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\{s_n\}$ é crescente e $s_n \geqslant t_2$ para todo n. Assim, para cada n temos K_n compacto e $\varepsilon_n > 0$ tais que

$$T(s_n)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_n}(K_n) \text{ com } \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\{s_n\}$ é crescente, para $m > n$ temos $s_m = s_n + \delta$ com $\delta > 0$. Então

$$T(s_m)B = T(s_n + \delta)B \subset T(s_n)B$$

pois

$$T(s_n + \delta)B = \bigcup_{t \geqslant \tau} T(s_n + \delta + t)A \subset \bigcup_{s \geqslant \tau} T(s_n + s)A.$$

Se definirmos $L_n = T(s_n)B$, então $L_{n+1} \subset L_n$ para todo n e estamos nas condições do Lema 2.2.26. Portanto, $\{\xi_n\}$ possui uma subsequência convergente e o resultado segue. ■

Lema 2.2.30. *Se um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto e eventualmente limitado, então $\mathcal{G}$ possui $B-ACP$.*

Prova: Sejam $B \in B(X)$ tal que $\gamma^+_{t_1(B)}(B) \in B(X)$ para algum $t_1(B) \geqslant 0$. Seja $K = \omega(B)$. Como pela Proposição 2.2.12 $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto podemos aplicar o Lema 2.2.22 para concluir que K é compacto e atrai B. Defina $\varepsilon_j = \frac{1}{j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Como K atrai B sabemos que para cada ε_j existirá t_j tal que $\mathrm{dist}_H(T(t)B, K) < \varepsilon_j$ para todo $t \geqslant t_j$. Fixe $t \geqslant 0$. Tome $j(t) = \max_{t_j \leqslant t} j$ e defina $\varepsilon(B,t) = \varepsilon_{j(t)}$. Então $\mathrm{dist}_H(T(t)B, K) < \varepsilon_{j(t)}$ e logo $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\varepsilon_{j(t)}}(K)$. Além disso, $\varepsilon_{j(t)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Assim $\mathcal{G}$ possui $B-ACP$ como queríamos demonstrar. ■

Lema 2.2.31. *Se $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo e eventualmente limitado, então existe B_1 limitado tal que para todo K compacto existem $\varepsilon(K) > 0$ e $t_1(K) > 0$ para os quais $T(t)\mathcal{O}_\varepsilon(K) \subset B_1$ para todo $t \geqslant t_1$.*

Prova: De $\mathcal{G}$ ser ϕ-dissipativo sabemos que existe $B_0 \in B(X)$ tal que para toda $\phi \in \mathcal{G}$ existe t_ϕ para o qual $\phi(t) \in B_0$ sempre que $t \geqslant t_\phi$. Como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado, para cada $\delta > 0$ deve existir $\tau(B_0, \delta)$ tal que $B_1^\delta = \gamma^+_\tau(\mathcal{O}_\delta(B_0)) \in B(X)$.

Fixe $\delta > 0$. Defina τ e B_1 como acima. Suponha, por absurdo, que exista K compacto e sequências $\varepsilon_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $T(t_j)\mathcal{O}_{\varepsilon_j}(K) \notin B_1$, isto, é, existem $\phi_j \in \mathcal{G}$ com $\phi_j(0) \in \mathcal{O}_{\varepsilon_j}(K)$ tal que $\phi_j(t_j) \notin B_1$. Afirmamos que $\phi_j^t(0) \notin \mathcal{O}_\delta(B_0)$ para $0 \leqslant t \leqslant t_j - \tau$. Com efeito, se $\phi_j^t(0) \in \mathcal{O}_\delta(B_0)$ então $\phi_j^t(t_j - t) \in T(t_j - t)\mathcal{O}_\delta(B_0)$ com $t_j - t \geqslant \tau$ e, logo, $\phi_j^t(t_j - t) \in B_1$ o que é uma contradição.

Podemos assumir, passando a uma subsequência, que $\phi_j(0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z \in$

K desde que $d(\phi_j(0), K) < \varepsilon_j$ para todo j; temos $d(\phi_j(0), K) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e o fato segue da Proposição 1.1.9.

Temos $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\phi_j(0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z$. Por (H4), deve existir uma subsequência $\{\phi_\mu\}$ e $\phi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi(0) = z$ e $\phi_\mu(t) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Para cada $t \geqslant 0$ fixado, se tomarmos μ_0 grande o suficiente para que $0 \leqslant t \leqslant t_{\mu_0} - \tau$, então $\phi_\mu(t) \notin \mathcal{O}_\delta(B_0)$ para todo $\mu \geqslant \mu_0$ e, logo, $\phi(t) \notin B_0$. Isso contradiz o fato de $\mathcal{G}$ ser ϕ-dissipativo o que conclui a demonstração. ■

Proposição 2.2.32. *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado eventualmente limitado e ϕ -dissipativo com $B - ACP$, então $\mathcal{G}$ posssui um conjunto limitado que absorve limitados. Em particular, $\mathcal{G}$ é B-dissipativo.*

Prova: Seja B_1 como no Lema 2.2.31. Vamos mostrar que B_1 absorve limitados. Para isso, considere $B \in B(X)$. Como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado, então $\gamma^+_{\tau(B)}(B) \in B(X)$ para algum $\tau(B) \geqslant 0$. Como $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e possui $B - ACP$, do Teorema 2.2.27, temos $\omega(B)$ é não-vazio, compacto e atrai B. Devem existir $\varepsilon > 0$ e $t_1 \geqslant 0$ tais que

$$T(t)\mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B)) \subset B_1 \text{ para todo } t \geqslant t_1.$$

Como $\omega(B)$ atrai B existe $t_2 \geqslant 0$ tal que, para $t \geqslant t_2$, temos $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B))$. Para $t \geqslant t_1 + t_2$

$$T(t)B \subset T(t-t_2)T(t_2)B \subset T(t-t_2)\mathcal{O}_\varepsilon(\omega(B)) \subset B_1.$$

Portanto B_1 absorve limitados e a demonstração está concluída. ■

Lema 2.2.33. *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado com B-atrator global compacto. Então $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo e assintoticamente compacto.*

Prova: Seja $\mathcal{A}$ o B-atrator global compacto de $\mathcal{G}$. Fixe $\delta > 0$ e defina $B_0 = \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$. Dada $\phi \in \mathcal{G}$, temos $\{\phi(0)\}$ é limitado e, portato, é atraído por $\mathcal{A}$. Para t suficientemente grande $\phi(t) \in B_0$ e logo $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo.

Seja $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ tal que $\{\phi_j(0)\} \in B(X)$. Então $\{\phi_j(0)\}$ é atraído por $\mathcal{A}$. Se $\{t_j\}$ é tal que $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ temos

$$d(\phi_j(t_j), \mathcal{A}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\mathcal{A}$ é compacto, segue da Proposição 1.1.9 que $\{\phi_j(t_j)\}$ possui uma subsequência convergente, o que conclui a demonstração. ∎

2.2.3 Existência de atratores globais

Nesta seção vamos finalmente mostrar resultados que caracterizam semifluxos generalizados que possuem atrator global.

$\star$ Primeira caracterização.

Lema 2.2.34. *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado ϕ-dissipativo e assintoticamente compacto. Então $\mathcal{G}$ possui um atrator global. Além disso, $\mathcal{A} = \omega(B_1)$ em que B_1 é dado no Lema 2.2.31.*

Prova: Se $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo e assintoticamente compacto, pela Proposição 2.2.9 $\mathcal{G}$ é eventualmente limitado e estamos sob as hipóteses do Lema 2.2.31. Seja B_1 como neste definido e $\mathcal{A} = \omega_B(B_1)$. Desde que B_1 é limitado, podemos escrever apenas $\mathcal{A} = \omega(B_1)$. Vamos mostrar que $\mathcal{A}$ é atrator global. Pelo Lema 2.2.22, temos que $\mathcal{A}$ compacto e atrai B_1. Afirmamos que $\mathcal{A}$ atrai limitados.

Seja $B \in B(X)$ e $K = \omega(B)$. Novamente pelo Lema 2.2.22, K é compacto e atrai B. Pelo Lema 2.2.31, existem $\varepsilon(K)$ e $t_1(K)$ tais que

$$T(t)\mathcal{O}_{\varepsilon(K)}(K) \subset B_1 \text{ para todo } t \geqslant t_1.$$

Seja $0 < \varepsilon < \varepsilon(K)$. Como K atrai B, existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(K)$. Então

$$T(t_0 + t_1)B = T(t_1)T(t_0)B \subset T(t_1)\mathcal{O}_\varepsilon(K) \subset B_1$$

e logo

$$T(t + t_0 + t_1)B \subset T(t)B_1 \text{ para todo } t \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Assim, como $\mathcal{A}$ atrai B_1, segue que $\mathcal{A}$ atrai B, como queríamos. Finalmente, pelo Lema 2.2.31,

$$T(t_2)\omega(B_1) \subset B_1 \text{ para algum } t_2 \geqslant 0.$$

Segue do Lema 2.2.22 que $\mathcal{A} = \omega(B_1)$ é invariante. Assim, $\mathcal{A}$ é atrator global, como queríamos. ■

Dos lemas 2.2.33 e 2.2.34, concluímos o primeiro resultado de caracterização de semifluxos generelizados que possuem atrator global.

Teorema 2.2.35. *Um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ possui um atrator global se, e somente se, $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo e assintoticamente compacto.*

Temos ainda o seguinte resultado:

Teorema 2.2.36. *Nas condições do Teorema 2.2.35, o atrator global $\mathcal{A}$ é dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \omega_B(B_1) = \omega_B(X),$$

onde B_1 é como no Lema 2.2.31. Além disso, $\mathcal{A}$ é o compacto invariante maximal de X e o B-atrator global fechado minimal. Em particular, $\mathcal{A}$ é único.

Prova: Pelo Lema 2.2.34 $\mathcal{A} = \omega(B_1)$. De (2.5) temos

$$\gamma^+_{\tau+t_0+t_1}(B) = \bigcup_{s \geqslant \tau+t_0+t_1} T(s)B = \bigcup_{t \geqslant \tau} T(t+t_0+t_1)B \subset \bigcup_{t \geqslant \tau} T(t)B_1 = \gamma^+_\tau(B_1)$$

para todo $\tau \geqslant 0$. Logo

$$\omega(B) = \bigcap_{\alpha \geqslant 0} \overline{\gamma^+_\alpha(B)} = \bigcap_{\beta \geqslant t_0+t_1} \overline{\gamma^+_\beta(B)} \subset \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\gamma^+_\tau(B)} = \omega(B_1) = \mathcal{A}.$$

Portanto

$$\omega(B) \subset \mathcal{A} \text{ para todo } B \in B(X) \tag{2.6}$$

e então $\bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) \subset \mathcal{A}$, e como a inclusão contrária é evidente temos a igualdade. Observamos que $\omega_B(X) = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A}$.

Do Lema 2.2.22 e do Teorema 2.2.15, segue que $\mathcal{A}$ é o B-atrator global fechado minimal. Resta mostrar que $\mathcal{A}$ é o maximal compacto invariante. Para isso, considere $\mathcal{A}_1$ compacto e invariante. Então $\omega(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1$. Como $\mathcal{A}_1$ é limitado, segue que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ e a demonstração está concluída. ■

$\star$ Segunda caracterização.

Veremos agora que, unindo os resultados provados até o momento, conseguimos o seguinte teorema, que nos dá condições equivalentes para a existência do atrator global.

Teorema 2.2.37. *Seja $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto e B-dissipativo;*

2. *$\mathcal{G}$ possui $B-ACP$ e é B-dissipativo;*

3. *$\mathcal{G}$ é condicionalmente assintoticamente compacto, eventualmente limitado e ponto dissipativo;*

4. *$\mathcal{G}$ possui $B-ACP$, é eventualmente limitado e ponto dissipativo;*

5. *$\mathcal{G}$ possui $B-ACP$, é eventualmente limitado e ϕ-dissipativo;*

6. *$\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto e ϕ-dissipativo;*

7. *$\mathcal{G}$ possui um atrator global que é minimal entre os B-atratores fechados não-vazios e maximal entre os subconjuntos compactos invariantes de X;*

8. *$\mathcal{G}$ possui um B-atrator global compacto não-vazio.*

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2) segue do Teorema 2.2.29. (2) $\Rightarrow$ (3) segue do Lema 2.2.5, do Teorema 2.2.29 e da Proposição 2.2.6. Do Teorema 2.2.29 e do Lema 2.2.30, temos (3) $\Leftrightarrow$ (4). Da Proposição 2.2.6 temos (4) $\Rightarrow$ (5). (5) $\Rightarrow$ (6) segue do Teorema 2.2.29 juntamente com a Proposição 2.2.12. Pelos Teorema 2.2.35 e 2.2.36 temos que (6) $\Leftrightarrow$ (7). A implicação (7) $\Rightarrow$ (8) é evidente. Finalmente, (8) $\Rightarrow$ (1) pelo Lema 2.2.33. ∎

2.2.4 Caracterizações do atrator global

Agora mostraremos um resultado que nos dá diversas caracterizações do atrator global de um semifluxo generalizado.

Teorema 2.2.38. *Se $\mathcal{G}$ satisfaz qualquer das condições dadas pelo Teorema 2.2.37, então seu atrator global $\mathcal{A}$ é dado por*

1. $\mathcal{A} = \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B)$;

2. $\mathcal{A} = \omega_B(X)$;

3. $\mathcal{A} = \omega_B(B_1)$ *em que* B_1 *é dado no Lema 2.2.31;*

4. $\mathcal{A} = \bigcup_{K \in K(X)} \omega(K)$;

5. $\mathcal{A}$ *é união das órbitas completas limitadas de* X;

6. $\mathcal{A}$ *é união das órbitas pré-compactas de* X;

7. $\mathcal{A}$ *é o subconjunto invariante maximal de* X.

Prova: (1), (2) e (3) são dados pelo Teorema 2.2.36. Para provar (4) lembremos que, do fato de $\mathcal{A}$ ser compacto e invariante, temos que $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Então

$$\bigcup_{K \in K(X)} \omega(K) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A} = \omega(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{K \in K(X)} \omega(K).$$

Para provar (5) e (6), seja $x \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ é invariante e, portanto, quasi-invariante, segue que existe uma órbita completa ψ tal que $\psi(0) = x$ e $Im(\psi) \subset \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \in B(X)$, então $Im(\psi) \in B(X)$. Mais que isso, ψ é pré-compacta pois $\overline{Im(\psi)} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é compacto. Assim, cada ponto de $\mathcal{A}$ pertence à imagem de uma órbita completa limitada e pré-compacta de X. Reciprocamente, seja $x \in X$ e ψ_x uma órbita completa limitada por x. Afirmamos que $Im(\psi_x)$ é negativamente invariante. De fato, fixe $t \geqslant 0$ e seja $y \in Im(\psi_x)$. Então $y = \psi_x(s)$ para algum $s \in \mathbb{R}$. Temos $\psi_x(s) = \psi_x^{s-t}|_{\mathbb{R}^+}(t)$ e $\psi_x^{s-t}|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ com $\psi_x^{s-t}|_{\mathbb{R}^+}(0) = \psi_x(s-t) \in Im(\psi_x)$. Logo $y = \psi_x(s) \in T(t)Im(\psi_x)$ e $Im(\psi_x) \subset T(t)Im(\psi_x)$ para todo $t \geqslant 0$.

Também, $Im(\psi_x) \subset \gamma_\tau^+(Im(\psi_x))$ para todo $\tau \geqslant 0$. Temos $\overline{Im(\psi_x)} \subset \overline{\gamma_\tau^+(Im(\psi_x))}$ para todo $\tau \geqslant 0$ e logo

$$Im(\psi_x) \subset \overline{Im(\psi_x)} \subset \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\gamma_\tau^+(Im(\psi_x))} = \omega(Im(\psi_x)) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A}.$$

Portanto, a união das órbitas completas limitadas está contida em $\mathcal{A}$. Em particular, união das órbitas pré-compactas está contida em $\mathcal{A}$.

Finalmente provemos (7). Seja $D \subset X$ limitado e invariante. Então

$$D \subset \bigcup_{t \geqslant 0} \overline{\gamma_t^+(D)} = \omega(D) \subset \bigcup_{B \in B(X)} \omega(B) = \mathcal{A},$$

e portanto $\mathcal{A}$ é o subconjunto invariante limitado maximal de X o que conclui a demonstração. ∎

2.3 Funções de Lyapunov para semifluxos generalizados

Nesta seção definiremos *órbita completa estacionária* e *função de Lyapunov* para um semifluxo generalizado. Também provaremos um resultado que caracteriza o comportamento das órbitas completas limitadas nos semifluxos generalizados que admitem esse tipo de função.

Definição 2.3.1. *Dizemos que uma órbita completa $\psi : \mathbb{R} \to X$ é* **estacionária** *se existe $z \in X$ tal que $\psi(t) = z$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Definimos $Z(\mathcal{G})$ o conjunto dos pontos de X pelos quais passa uma órbita completa estacionária. Chamaremos $z \in Z(\mathcal{G})$ de* **solução estacionária** *ou* **ponto de equilíbrio**.

Proposição 2.3.2. *Se $\mathcal{G}$ é um semifluxo generalizado, então $Z(\mathcal{G})$ é fechado.*

Prova: Se $Z(\mathcal{G})$ é vazio nada temos a provar. Caso contrário, seja $z \in X$ tal que existe $\{z_n\} \subset Z(\mathcal{G})$ com $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja ψ_n a órbita completa por z_n. Temos $\psi_n^s|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ para todo $s \geqslant 0$ e $\psi_n(t) = z_n$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se definirmos $\phi_n = \psi_n^t|_{\mathbb{R}^+}$, então $\{\phi_n\} \subset \mathcal{G}$ e $\phi_n(0) = z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$. Por (H4) devem existir $\{\phi_\mu\}$ subsequência de $\{\phi_n\}$ e $\phi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi(0) = z$ e $\phi_\mu(t) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Mas $\phi_\mu(t) = z_\mu \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} z$ para todo $t \geqslant 0$. Logo $\phi(t) = z$ para todo $t \geqslant 0$.

Podemos definir $\Phi(t) = z$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, $\Phi^s|_{\mathbb{R}^+} = \phi$ que pertence a $\mathcal{G}$. Assim Φ é uma órbita completa que passa por z, e portanto $z \in Z(\mathcal{G})$, como queríamos demonstrar. ∎

Definição 2.3.3. *Dizemos que uma função $V : X \to \mathbb{R}$ é uma* **função de Lyapunov** *para um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ se*

(a) *V é contínua;*

(b) *$V(\phi(t)) \leqslant V(\phi(s))$ para toda $\phi \in \mathcal{G}$ e $t \geqslant s \geqslant 0$;*

(c) *Se ψ é uma órbita completa tal que $V(\psi(t))$ é constante para todo $t \in \mathbb{R}$, então ψ é estacionária.*

Com um simples resultado, podemos ver que V também é decrescente ao longo de órbitas completas.

Lema 2.3.4. *Seja $V : X \to \mathbb{R}$ uma função de Lyapunov para um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ e ψ uma órbita completa. Então $V(\psi(t)) \leqslant V(\psi(s))$ para todo $t \geqslant s \in \mathbb{R}$.*

Prova: Sejam $t \geqslant s \in \mathbb{R}$. Considere $\phi = \psi^s|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$. Então, como $t - s \geqslant 0$, $V(\psi(s)) = V(\phi(0)) \geqslant V(\phi(t-s)) = V(\psi(t))$. ∎

Pelo Teorema 2.2.38, por cada ponto do atrator global $\mathcal{A}$ passa uma órbita completa limitada. Na presença de uma função de Lyapunov podemos caracterizar o comportamento de tais órbitas. Para isso, precisamos do seguinte resultado de conexidade:

Proposição 2.3.5. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado assintoticamente compacto e $\phi \in \mathcal{G}$ contínua de $(0, \infty)$ em X. Então $\omega(\phi)$ é conexo. Se ψ é uma órbita completa limitada contínua, então $\alpha(\psi)$ é conexo.*

Prova: Para começarmos, lembremos que, do Lema 2.2.22, temos $\omega(\phi)$ e $\alpha(\psi)$ compactos.

Suponha $\omega(\phi)$ que não é conexo. Devem existir A_1 e A_2 não-vazios, compactos e disjuntos tais que $\omega(\phi) = A_1 \cup A_2$. Como X é normal, sabemos que existem U_1 e U_2 abertos disjuntos com $A_1 \subset U_1$ e $A_2 \subset U_2$. Devem existir $t_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $s_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\phi(t_j) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} z_1 \in A_1$ e $\phi(s_j) \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} z_2 \in A_2$. Sem perda de generalidade podemos supor que $t_j < s_j < t_{j+1}$, $\phi(t_j) \in U_1$ e $\phi(s_j) \in U_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como ϕ é contínua de $(0, \infty)$ em X, então $\phi(0, \infty)$ é conexo. Como para cada j, $\phi(t_j) \in U_1$ e $\phi(s_j) \in U_2$, deve existir $t_j < k_j < s_j$ tal que $\phi(k_j) \notin U_1 \cup U_2$. Por ser $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto, $\{\phi(k_j)\}$ deve possuir uma subsequência convergente, digamos, para $z \in \omega(\phi)$. Mas $z \notin A_1 \cup A_2$ o que nos dá uma contradição.

De forma similar, suponha $\alpha(\psi)$ não conexo. Devem existir A_1 e A_2 não-vazios, compactos e disjuntos tais que $\alpha(\psi) = A_1 \cup A_2$. Como X é normal, sabemos que existem U_1 e U_2 abertos disjuntos com $A_1 \subset U_1$ e $A_2 \subset U_2$. Devem existir $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $s_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\psi(-t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_1 \in A_1$ e $\psi(-s_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_2 \in A_2$. Sem perda de generalidade podemos supor que $t_j < s_j < t_{j+1}$, $\psi(-t_j) \in U_1$ e $\psi(-s_j) \in U_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Considere, para cada j, $\phi_j = \psi^{-s_j}|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$. Como por hipótese ϕ_j é contínua de $(0,\infty)$ em X, então $\phi_j(0,\infty)$ é conexo. Como $\phi_j(0) = \psi(-s_j) \in U_2$ e $\phi_j(s_j - t_j) = \psi(-t_j) \in U_1$ então deve existir $m_j \in (0, s_j - t_j)$ tal que $\psi_j(m_j - s_j) = \phi_j(m_j) \notin U_1 \cup U_2$ e $-s_j \leqslant m_j - s_j \leqslant -t_j$ e logo $-k_j = m_j - s_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Temos $\psi(-k_j) \in T(k_j)\psi(-2k_j) \subset T(k_j)Im(\psi)$ para todo j e $Im(\psi)$ limitada. Por ser $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto, $\{\psi(-k_j)\}$ deve possuir uma subsequência convergente, digamos, para $z \in \alpha(\psi)$. Mas $z \notin A_1 \cup A_2$ o que nos dá uma contradição. ∎

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado.

Teorema 2.3.6. *Seja $\mathcal{G}$ assintoticamente compacto tal que toda $\phi \in \mathcal{G}$ é contínua de $(0,\infty)$ em X. Suponha, ainda, que exista uma função V de Lyapunov para $\mathcal{G}$ e que $Z(\mathcal{G})$ seja limitado. Então vale:*

(i) *$\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo e, consequentemente, possui um B-atrator global $\mathcal{A}$.*

(ii) *Para cada órbita completa $\psi \in \mathcal{A}$, $\alpha(\psi)$ e $\omega(\psi)$ são subconjuntos conexos de $Z(\mathcal{G})$ nos quais V é constante.*

(iii) *Se $Z(\mathcal{G})$ é totalmente desconexo (em particular se $Z(\mathcal{G})$ é enumerável), existem*

$$z_- = \lim_{t\to-\infty} \psi(t) \text{ e } z_+ = \lim_{t\to\infty} \psi(t),$$

onde z_- e z_+ pertencem a $Z(\mathcal{G})$.

(iv) *Toda $\phi \in \mathcal{G}$ tende a um ponto de equilíbrio quando t tende a infinito.*

Prova: De (i). Seja $\varepsilon > 0$, defina $B_0 = \mathcal{O}_\varepsilon(Z(\mathcal{G}))$ e tome $\phi \in \mathcal{G}$. Afirmamos que $V(z) = \lim_{t\to\infty} V(\phi(t))$ para todo $z \in \omega(\phi)$. Com efeito, sejam z_0 e $z_1 \in \omega(\phi)$ e considere $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $s_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $\phi(t_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ e $\phi(s_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} z_1$. Passando a subsequências se necessário podemos supor $t_j < s_j < t_{j+1} < s_{j+1}$ para todo j. Como V é contínua $V(\phi(t_j)) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} V(z_0)$ e $V(\phi(s_j)) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} V(z_1)$. Temos

$$V(\phi(s_{j+1})) \leqslant V(\phi(t_{j+1})) \leqslant V(\phi(s_j)) \leqslant V(\phi(t_j)).$$

Passando o limite quando $j \to \infty$, obtemos

$$V(z_1) \leqslant V(z_0) \leqslant V(z_1) \leqslant V(z_0),$$

e logo $V(\omega(\phi))$ é constante igual a $\lim_{t\to\infty} V(\phi(t))$. Como $\mathcal{G}$ é assintoticamente compacto, pelo Lema 2.2.22 temos que $\omega(\phi)$ é quasi-invariante. Vamos mostrar que $\omega(\phi) \subset Z(\mathcal{G})$. Para isso, seja $x \in \omega(\phi)$. Então existe órbita completa por x, digamos ψ_x tal que $Im(\psi_x) \subset \omega(\phi)$. Pelo que já provamos,

$$V(\psi_x(s)) = \lim_{t\to\infty} V(\phi(t)) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}$$

e como V é função de Lyapunov segue que ψ_x é estacionária o que implica $x \in Z(\mathcal{G})$.

Novamente pelo Lema 2.2.22,

$$d(\phi(t), \omega(\phi)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e logo $d(\phi(t), Z(\mathcal{G})) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto, para t suficientemente grande $\phi(t) \in B_0$ e $\mathcal{G}$ é ϕ-dissipativo. Do Teorema 2.2.37 segue que $\mathcal{G}$ possui um atrator global $\mathcal{A}$ o que conclui a demonstração do primeiro item.

De (ii). Para provar o segundo, considere ψ uma órbita completa com $Im(\psi) \subset \mathcal{A}$. Temos $\psi|_{\mathbb{R}^+} \in \mathcal{G}$ e $\omega(\psi) = \omega(\psi|_{\mathbb{R}^+}) \subset Z(\mathcal{G})$. Pelo que fizemos acima, temos V constante em $\omega(\psi)$ e da Proposição 2.3.5 temos $\omega(\psi)$ conexo. De forma análoga ao que fizemos para $\omega(\phi)$ podemos mostrar que $V(z) = \lim_{t\to-\infty} \psi(t)$ para todo $z \in \alpha(\psi)$ e novamente pelo Lema 2.2.22 temos $\alpha(\psi) \subset \mathcal{G}$. Além disso, da Proposição 2.3.5 segue que $\alpha(\psi)$ é conexo e o segundo item está demonstrado.

De (iii). Se $Z(\mathcal{G})$ é totalmente desconexo, por definição seus únicos subconjuntos conexos são pontos. Assim, como $\alpha(\psi)$ e $\omega(\psi)$ são conexos, temos $\alpha(\psi) = z_-$ e $\omega(\psi) = z^+$ com z_- e $z^+ \in Z(\mathcal{G})$. Assim segue diretamente que

$$z_- = \lim_{t\to-\infty} \psi(t) \text{ e } z_+ = \lim_{t\to\infty} \psi(t),$$

o que conclui a demonstração do terceiro item.

De (iv). Analogamente ao item (iii), $\omega(\phi)$ é conexo e está contido em $Z(\mathcal{G})$; $\omega(\phi) = \{z\}$ com $z \in Z(\mathcal{G})$ e da definição do conjunto segue que z é o limite de $\phi(t)$ quando $t \to \infty$. ■

2.4 Mensurabilidade e continuidade

Esta seção tem como objetivo tratar as condições de mensurabilidade e continuidade que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ pode assumir. Provaremos então dois resultados que relacionam tais condições.

No que segue, denotaremos por $m(E)$ a medida de Lebesgue de E

para cada subconjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.4.1. *Uma função* $f\colon (0,\infty) \to X$ *é dita* **fortemente mensurável** *se existe uma sequência* f_j *de funções mensuráveis tais que* $Im(f_j)$ *é um conjunto mensurável para todo* j *e* $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ *quase sempre em* $(0,\infty)$.

Diremos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ satisfaz:

(C0) se cada $\phi \in \mathcal{G}$ é fortemente mensurável de $(0,\infty)$ em X;

(C1) se ϕ é contínua de $(0,\infty)$ em X para toda $\phi \in \mathcal{G}$;

(C2) se para cada sequência $\{\phi_j\} \subset \mathcal{G}$ com $\phi_j(0) \xrightarrow{j\to\infty} z$ para algum $z \in X$ existe uma subsequência $\{\phi_\mu\}$ de $\{\phi_j\}$ e $\phi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi(0) = z$ e $\phi_\mu(t) \xrightarrow{\mu\to\infty} \phi(t)$ uniformemente para t em compactos de $(0,\infty)$.

Além disso, dizemos que um semifluxo generalizado $\mathcal{G}$ tem **representantes únicos** se para todas ϕ e $\psi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi(t) = \psi(t)$ para quase todo $t > 0$ temos $\phi(t) = \psi(t)$ para todo $t > 0$.

Teorema 2.4.2. *Seja* $\mathcal{G}$ *um semifluxo generalizado com representantes únicos que satisfaz* (C0). *Então* $\mathcal{G}$ *satisfaz* (C1).

Prova: Seja $\phi \in \mathcal{G}$. Fixe $\delta > 0$ e $0 < a < a+\delta < \infty$ e denote por $I = (a, a+\delta)$ e $J = (a+\frac{\delta}{3}, a+\frac{2\delta}{3})$. É suficiente mostrar que ϕ é contínua em J. Usando uma versão do Teorema de Lusin (veja [21]) existe um conjunto fechado $F_j \subset I$ com medida maior que $\delta - \frac{1}{j^2}$ tal que $\phi|_{F_j}$ é contínua. Como F_j é compacto a continuidade é uniforme e logo existe $\eta_j \in (0, \frac{\delta}{3})$ tal que $d(\phi(t+h), \phi(t)) < \frac{1}{j}$ sempre que $|h| < \eta_j$ e $t, t+h \in F_j$.

Suponha, por absurdo, que existe $t_0 \in J$ e uma sequência $h_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ tal que $\phi(t_0+h) \not\to \phi(t_0)$ quando $j \to \infty$. Passando a uma subsequência se necessário podemos assumir que existe $\varepsilon > 0$ para o qual

$$d(\phi(t_0 + h_j), \phi(t_0)) > \varepsilon \text{ para todo } j \tag{2.7}$$

e que $|h_j| < \eta_j$ para todo j. Defina $E_j = \{t \in J; t, t + h_j \in F_j\} = F_j \cap (F_j - h_j) \cap J$ em que $F_j - h_j = \{t - h_j; t \in F_j\}$.

Temos

$$m(J - F_j) = m(J) - m(F_j) = \frac{\delta}{3} - \delta + \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{j^2}.$$

Também, $m(J - (F_j - h_j)) \leqslant \frac{1}{j^2}$. Como $J - E_j = J - F_j \cup J - (F_j - h_j)$, temos

$$m(J - Ej) = m(J - F_j) + m(J - (F_j - h_j)) \leqslant \frac{2}{j^2}.$$

Observe que

$$J \setminus \liminf_{j\to\infty} E_j = J \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} E_k \Big)^c = J \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k^c \Big) =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{\infty} \Big(J \cap \Big(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k^c \Big) \Big) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} J \cap E_k^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} J \setminus E_k,$$

e então

$$m(J \setminus \liminf_{j\to\infty} E_j) \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} m(J - E_k) \leqslant 2 \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

para todo j. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ é convergente temos $\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow{j\to\infty} 0$ e portanto $m(J \setminus \liminf_{j\to\infty} E_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Logo quase todos os pontos de J estão em E_j exceto por uma quantidade finita de índices j. Temos $\phi(t + h_j) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(t)$ para quase todo $t \in J$. Em particular existem t_1 e $t_2 \in J$ com $t_1 < t_0 < t_2$ tais que $\phi(t_1 + h_j) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(t_1)$ e $\phi(t_2 + h_j) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(t_2)$.

Por (H2), $\phi^{t_1+h_j} \in \mathcal{G}$ e como $\phi^{t_1+h_j}(0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t_1)$, já por (H4) existe uma subsequência $\{\phi^{t_1+h_\mu}\}$ e $\psi \in \mathcal{G}$ com $\phi^{t_1+h_\mu}(t) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \psi(t)$ para todo $t \geqslant 0$. Mas então $\psi(t) = \phi(t+t_1)$ para quase todo $t \in (0, a + \frac{2\delta}{3} - t_1)$. Definimos

$$\hat{\psi}(t) = \begin{cases} \phi(t+t_1), & t \in [0, t_2 + t_1] \\ \psi(t), & t \in (t_2 - t_1, \infty). \end{cases}$$

Por (H2) e (H3), $\hat{\psi} \in \mathcal{G}$ e $\hat{\psi}(t) = \psi(t)$ quase sempre em $(0, \infty)$. Como $\mathcal{G}$ possui representantes únicos segue que $\hat{\psi}(t) = \psi(t)$ para todo $t > 0$. Em particular, $\hat{\psi}(t_0 - t_1) = \psi(t_0 - t_1)$. Uma vez que $t_0 - t_1 < t_2 - t_1$, temos

$$\phi^{t_1+h_\mu}(t_0 - t_1) \overset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} \psi(t_0 - t_1) = \hat{\psi}(t_0 - t_1) = \phi(t_0)$$

o que contradiz (2.7) e a demonstração está concluída. ■

Teorema 2.4.3. *Sejam $\mathcal{G}$ um semifluxo generalizado satisfazendo* (C1) *e $\phi_j, \phi \in \mathcal{G}$ tais que $\phi_j(t) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t)$ para todo $t > 0$. Então $\phi_j(t) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \phi(t)$ uniformemente sobre compactos de* $(0, \infty)$. *Em particular $\mathcal{G}$ satisfaz* (C2).

Prova: Seja $0 < a < b < \infty$. Para cada $\varepsilon > 0$ e $n = 1, 2, ...$ defina

$$S_{n,\varepsilon} = \{t \in [a, b]; \text{para todo } j \geqslant n,\ \mathrm{d}(\phi_j(t), \phi(t)) \leqslant \varepsilon\}.$$

Por (C1), $S_{n,\varepsilon}$ é fechado e pela definição do conjunto temos $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{n,\varepsilon}$. Pelo Teorema da Categoria de Baire[1], algum dos $S_{n,\varepsilon}$ contém um intervalo aberto. Como podemos aplicar o mesmo argumento para qualquer $[a, b] \subset (0, \infty)$ obtemos um subconjunto denso de $(0, \infty)$, que denotaremos por S_ε, igual à união de todos esses intervalos tal que

[1]Veja [16], por exemplo.

para todo $t_0 \in S_\varepsilon$ existe uma vizinhança aberta $N_\varepsilon(t_0)$ de t_0 e $r_\varepsilon(t_0)$ tais que $d(\phi(t_j), \phi(t)) \leqslant \varepsilon$ sempre que $j \geqslant r_\varepsilon(t_0)$ e $t \in N_\varepsilon(t_0)$.

Seja $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_{\frac{1}{i}}$. Se $t \in K$ temos $t \in S_{\frac{1}{i}}$ para todo i. Para cada i fixado, existe $r_{\frac{1}{i}}(t)$ e $N_{\frac{1}{i}}(t)$ tais que se $j \geqslant r_{\frac{1}{i}}(t)$ e $s \in N_{\frac{1}{i}}(t)$, $d(\phi_j(s), \phi(s)) < \frac{1}{i}$. Além disso, como $t_j \xrightarrow{j\to\infty} t$ sabemos que existe $j(t)$ tal que $j \geqslant j(t)$ implica $t_j \in N_{\frac{1}{i}}(t)$. Ainda, por ser ϕ contínua temos $\phi(t_j) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(t)$ e logo existe $j_1(t)$ para o qual $j \geqslant j_1(t)$ implica $d(\phi(t_j), \phi(t)) \leqslant \frac{1}{i}$. Se $j \geqslant \max\{r_{\frac{1}{i}}(t), j(t), j_1(t)\}$ então $d(\phi_j(t_j), \phi(t)) \leqslant \frac{2}{i}$. Assim, para $t \in K$, temos $\phi_j(t_j) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(t)$. Novamente pelo Teorema da Categoria de Baire temos K denso em $(0, \infty)$.

Agora, seja $t > 0$ arbitrário e $t_j \xrightarrow{j\to\infty} t$. Suponha, por absurdo, que $\phi_j(t_j) \not\to \phi(t)$ quando $j \to \infty$. Sem perda de generalidade, podemos supor também que

$$d(\phi_j(t_j), \phi(t)) > \delta \tag{2.8}$$

para algum $\delta > 0$. Seja $s \in K$ com $s < t$ e considere $\psi_j = \phi_j^{t_j+s-t} \in \mathcal{G}$ pata todo j suficientemente grande. Como $s \in K$, $\psi_j(0) = \phi_j(t_j + s - t) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(s)$ uma vez que $t_j + s - t \xrightarrow{j\to\infty} s$. Por $(H4)$ deve existir uma subsequência $\{\psi_\mu\}$ e $\psi \in \mathcal{G}$ tais que $\psi_\mu(\tau) \xrightarrow{\mu\to\infty} \psi(\tau)$ para todo $\tau \geqslant 0$. Mas se $s + \tau \in K$, então

$$\psi_j(\tau) = \phi_j(t_j + s - t + \tau) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(s + \tau).$$

Como K é denso e ϕ, ψ são contínuas em $(0, \infty)$ segue que $\psi(\tau) = \phi(s+\tau)$ para todo $\tau \geqslant 0$. Portanto $\phi_\mu(t_\mu) = \psi_\mu(t-s) \xrightarrow{\mu\to\infty} \psi(t-s) = \phi(t)$, o que contradiz (2.8) e conclui a demonstração. ∎

Capítulo 3

Aplicação às equações incompressíveis de Navier-Stokes em 3D

Neste capítulo iremos aplicar a teoria abstrata de semifluxos generalizados às equações de Navier-Stokes imcompressíveis em 3D. Vamos mostrar que, sob certas condições, tais equações geram um semifluxo generalizado que possui um atrator global. Para uma discussão mais detalhada sobre a teoria de equações de Navier-Stokes, recomendamos a consulta de [13, 9, 27]. Alguns resultados técnicos foram retirados de [5, 8, 14, 16, 21, 29]. Os resultados principais apresentados neste capítulo são retirados dos trabalhos [2, 3].

Para começar a nossa discussão, vamos colocar as definições básicas que serão utilizadas. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto, conexo e limitado com sua fronteira $\partial\Omega$ suave (pelo menos de classe C^2). Sejam

$f \in L^2(\Omega)^3$ - isto é, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ com $f_i \in L^2(\Omega)$ para i=1,2,3 - e $\nu > 0$ uma constante. As **equações incompressíveis de Navier-Stokes** são dadas por:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + (u(t,x)\cdot\nabla)u(t,x) = \nu\Delta u(t,x) - \nabla p(x) + f(x), \quad t>0,\ x\in\Omega, \\ \text{div } u(t,x) = 0,\ t>0,\ x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

com condição de fronteira de Dirichlet homogênea, dada por

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ para } t > 0, \tag{3.2}$$

onde $u(t,x) = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$, $x \in \Omega$; $(u(t,x)\cdot\nabla)u(t,x) = ((u_1(t,x)\cdot\nabla)u_1(t,x), (u_2(t,x)\cdot\nabla)u_2(t,x), (u_3(t,x)\cdot\nabla)u_3(t,x))$ e ∇ é o operador gradiente.

No que segue, como feito na literatura padrão da teoria de equações de Navier-Stokes (veja [13, 27]), utilizaremos os seguintes espaços

$$\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \text{div } u = 0\}, \quad H = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } L^2(\Omega)^3;$$

$$V = \{u \in H_0^1(\Omega)^3 : \text{div } u = 0\} \text{ e } H_w = H \text{ com sua topologia fraca.}$$

Denotaremos por $(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$ o produto interno e a norma em $L^2(\Omega)^3$, respectivamente. Também, para $u, v, w \in V$, definimos o produto interno em V por

$$(u,v)_V = (Du, Dv) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx,$$

a norma em V por

$$\|u\|_V = \|Du\| = (Du, Du)^{1/2} = (u,u)_V^{1/2}$$

e uma forma trilinear $b: V \times V \times V \to \mathbb{R}$ por

$$b(u,v,w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx.$$

O espaço V é um espaço de Hilbert com o produto interno definido acima, já que Ω é limitado. Além disso, temos

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

onde V' denota o dual de V, e as inclusões são contínuas e densas. Como uma consequência destas identificações, para cada $u \in V$ e $h \in H$, o produto escalar (h,u) em H coincide com a aplicação dualidade $\langle h,u \rangle$ de V' em V, quando identificamos h com seu representante em V', isto é

$$\langle h,u \rangle = (h,u) \text{ para todos } h \in H \text{ e } u \in V.$$

Sabemos também que, para cada $u \in V$ fixado, o funcional $V \ni v \mapsto (u,v)_V \in \mathbb{R}$ é linear e contínuo em V, e portanto, existe um elemento em V', que denotaremos por Au tal que

$$\langle Au, v \rangle = (u,v)_V, \text{ para cada } v \in V.$$

Usando ainda [27, Teorema I.2.2] e [27, Observação I.2.2], concluímos que A é um isomorfismo entre V e V'. Este operador A é chamado de **operador de Stokes**, e além disso, se $u \in C^2(\Omega)^3 \cap V$ temos $Au = -\Delta u$ (veja [13]). Claramente $\langle Au, u \rangle = (Du, Du) = \|u\|_V^2$ para cada $u \in V$.

Seja $u: [0,\infty) \to V$ definimos o **funcional de energia** associado à

u por

$$V(u)(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^t (f, u(\tau))d\tau. \tag{3.3}$$

Definição 3.0.4. *Dizemos que* $u\colon [0,\infty) \to H$ *é uma* **solução fraca** *para* (3.1)-(3.2) *se ela satisfaz as seguintes condições:*

(i) $u \in C([0,T]; H_w) \cap L^2(0,T;V)$ *para cada* $T > 0$*,*

(ii) $\dfrac{du}{dt} \in L^1(0,T;V')$ *para cada* $T > 0$*,*

(iii) *para toda* $v \in V$ *e quase todo* $t > 0$*,*

$$\left(\frac{du}{dt}(t), v\right) + \nu(Du(t), Dv) + b(u(t), u(t), v) = (f, v); \tag{3.4}$$

(iv) *u satisfaz a* **desigualdade de energia**

$$V(u)(t) \leqslant V(u)(s) \tag{3.5}$$

para todo $t \geqslant s$*, para quase todo* $s \in (0,\infty)$ *e para* $s = 0$*.*

No que segue definiremos a seguinte família de funções:

$$\mathcal{G}_{NS} = \{\text{soluções fracas de (3.1)-(3.2)}\}. \tag{3.6}$$

Pelo método clássico de Faedo-Galerkin aplicado às equações de Navier-Stokes, que pode ser encontrado em [27], sabemos que para cada $u_0 \in H$ existe pelo menos uma solução fraca $u \in \mathcal{G}_{NS}$ tal que $u(0) = u_0$. Isso nos diz que $\mathcal{G}_{NS}$ satisfaz (H1). Também, G_{NS} satisfaz (H3). Contudo, não sabemos se $\mathcal{G}_{NS}$ satisfaz (H2) e (H4). Nosso objetivo será provar que $\mathcal{G}_{NS}$ é um semifluxo generalizado se, e somente se, cada solução fraca é contínua de $(0,\infty)$ em H e que, sob tais condições, $\mathcal{G}_{NS}$ possui um atrator global.

3.1 Resultados preliminares

A fim de conseguir provar os resultados principais necessitaremos de uma desigualdade que se sabe ser satisfeita pelas soluções fracas construídas através do método de Faedo-Galerkin. Como não assumiremos tal fato como hipótese devemos primeiramente provar dois lemas técnicos. Necessitaremos também alguns resultados auxiliares, que descreveremos no que segue.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço métrico. Dizemos que uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ é* **semicontínua inferiormente** *num ponto x_0 se*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geqslant f(x_0).$$

Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é **semicontínua superiormente** *num ponto x_0 se*

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

No que segue $\mathcal{D}'(0,\infty)$ é o espaço das **distribuições**, o dual de $\mathcal{D}(0,\infty) = C_0^\infty(0,\infty)$ munido da convergência uniforme sobre compactos. Denotaremos também por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a dualidade[1] entre $\mathcal{D}'(0,\infty)$ e $\mathcal{D}(0,\infty)$.

Lema 3.1.2. *Seja $\rho \in L^1_{loc}(0,\infty)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

[1]Note que a notação é a mesma da dualidade entre V' e V. Como as notações não serão utilizadas simultaneamente, acreditamos que não haverá risco de confusão.

(i) *existe* $\bar{\rho}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *não-crescente tal que* $\rho = \bar{\rho}$ *quase sempre em* $(0,\infty)$*,*

(ii) $\dot{\rho} \leqslant 0$ *em* $\mathcal{D}'(0,\infty)$*.*

Se, além disso, $\rho\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente e contínua em zero, então* (i) *e* (ii) *são equivalentes a*

(iii) *para quase todo* $s \in (0,\infty)$ *e para* $s = 0$ *temos* $\rho(t) \leqslant \rho(s)$ *para todo* $t \geqslant s$*.*

Prova: Para ver que $(i) \Rightarrow (ii)$ tome $\phi \in \mathcal{D}(0,\infty)$. Temos, para $h > 0$ suficientemente pequeno

$$\langle \dot{\rho}, \phi \rangle = -\langle \rho, \dot{\phi} \rangle = -\int_0^\infty \rho(t) \frac{d\phi}{dt}(t) dt = -\int_0^\infty \rho(t) \lim_{h \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(t-h)}{h} dt.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\langle \dot{\rho}, \phi \rangle = -\lim_{h \to 0} \int_0^\infty \rho(t) \frac{\phi(t) - \phi(t-h)}{h} dt. \tag{3.7}$$

Por outro lado

$$\int_0^\infty \phi(t) \frac{\rho(t) - \rho(t+h)}{h} dt = \int_0^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{h} dt - \int_0^\infty \frac{\rho(t+h)\phi(t)}{h} dt,$$

e fazendo $t = s - h$ temos

$$\int_0^\infty \phi(t) \frac{\rho(t) - \rho(t+h)}{h} dt = \int_0^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{h} dt - \int_h^\infty \frac{\rho(s)\phi(s-h)}{h} ds =$$

$$= \int_0^h \frac{\rho(t)\phi(t)}{h} dt + \int_h^\infty \rho(t) \frac{\phi(t) - \phi(t-h)}{h} dt.$$

Além disso, por (3.7), obtemos

$$\langle \dot{\rho}, \phi \rangle = -\lim_{h\to 0} \int_0^\infty \phi(t) \frac{\rho(t) - \rho(t+h)}{h} dt. \tag{3.8}$$

Se $\bar{\rho}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ é a representante não-crescente de ρ então

$$\frac{\bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t+h)}{h} \geqslant 0 \text{ para todo } t \in (0,\infty),$$

e se $\phi \geqslant 0$ obtemos

$$\int_0^\infty \phi(t) \frac{\rho(t) - \rho(t+h)}{h} dt = \int_0^\infty \phi(t) \frac{\bar{\rho}(t) - \bar{\rho}(t+h)}{h} dt \geqslant 0,$$

o que, juntamente com (3.8), mostra que $\langle \dot{\rho}, \phi \rangle \leqslant 0$.

Para a implicação contrária, considere a extensão de ρ por zero em $(-\infty, 0)$, que está definida para todo $\mathbb{R}$ e que não renomearemos. Para cada $\varepsilon > 0$, seja uma função molificadora $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(0,\infty)$ tal que $\text{supp}(\psi_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$, $\int_0^\infty \psi_\varepsilon(t)dt = 1$ e $\psi_\varepsilon \geqslant 0$. Sabemos que $\psi_\varepsilon * \rho \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \overline{\rho}$ em $L^1_{loc}(0,\infty)$ com $\overline{\rho} = \rho$ quase sempre. Temos

$$\begin{aligned} (\psi_\varepsilon * \rho)'(t) &= (\psi_\varepsilon' * \rho)(t) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \psi_\varepsilon'(t-\tau)\rho(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\infty \psi_\varepsilon'(t-\tau)\rho(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como $\dot{\rho} \leqslant 0$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ com $\phi \geqslant 0$, temos

$$\langle \dot{\rho}, \phi \rangle = -\int_0^\infty \rho(t)\phi'(t)dt \leqslant 0. \tag{3.10}$$

Agora defina $\phi^t(\tau) = \psi_\varepsilon(t-\tau)$. Temos $\phi^t \geqslant 0$ e $(\phi^t)'(\tau) = -\psi_\varepsilon'(t-\tau)$.

Por (3.9) e (3.10) temos

$$\begin{aligned}(\psi_\varepsilon * \rho)'(t) &= \int_0^\infty \psi_\varepsilon'(t-\tau)\rho(\tau)d\tau \\ &= -\int_0^\infty (\phi^t)'(\tau)\rho(\tau)d\tau \leqslant 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $t \geqslant 0$. Assim $\psi_\varepsilon * \rho$ é não-crescente, isto é,

$$(\psi_\varepsilon * \rho)(t) \leqslant (\psi_\varepsilon * \rho)(s) \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ e } t \geqslant s.$$

Passando o limite quando $\varepsilon \to 0$, obtemos $\overline{\rho}(t) \leqslant \overline{\rho}(s)$ para todo $t \geqslant s$. Logo $\overline{\rho}$ é um representante não-crescente para ρ.

Finalmente, assuma $\rho\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente e contínua em zero. Suponha que (i) é satisfeito. Temos $\rho(\tau) = \bar{\rho}(\tau)$ para $\tau \notin N$, onde N é um conjunto de medida nula. Seja $s > 0 \notin N$, $t > s$ e $\{t_j\} \subset N$ tal que $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} t$. Sem perda de generalidade podemos supor $t_j > s$ para todo j. Como $\bar{\rho}$ é não-crescente segue que $\bar{\rho}(t_j) \leqslant \bar{\rho}(s)$. Consequentemente

$$\liminf_{j\to\infty} \bar{\rho}(t_j) \leqslant \bar{\rho}(s)$$

e então

$$\rho(t) \leqslant \liminf_{j\to\infty} \rho(t_j) = \liminf_{j\to\infty} \bar{\rho}(t_j) \leqslant \bar{\rho}(s) = \rho(s) \tag{3.12}$$

e o resultado segue para quase todo $s > 0$. Para $s = 0$ considere uma sequência $\{s_k\} \subset N$ com $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Suponha sem perda de generalidade que $s_k < t_j$ para todo k e todo j. De (3.12) temos

$$\rho(t) \leqslant \rho(s_k) \text{ para todo } k,$$

e passando o limite quando $k \to \infty$ concluímos a prova de (iii). Reciprocamente, se vale (iii), podemos definir

$$\bar{\rho}(t) = \sup_{\tau \geqslant t} \rho(\tau)$$

que é um representante não-crescente para ρ. ■

Precisaremos agora de um lema 'tipo-Gronwall' para obter uma limitação para as funções em $\mathcal{G}_{NS}$.

Lema 3.1.3. *Seja $\theta: [0, \infty) \to \mathbb{R} \in L^1(0, T)$ para cada $T > 0$. Suponha θ semicontínua inferiormente, contínua em zero e tal que, para algum $c \geqslant 0$, temos*

$$\theta(t) + c \int_0^t \theta(\tau) d\tau \leqslant \theta(s) + c \int_0^s \theta(\tau) d\tau \tag{3.13}$$

para todo $t \geqslant s$, para quase todo $s > 0$ e $s = 0$. Então

$$\theta(t) e^{ct} \leqslant \theta(s) e^{cs} \tag{3.14}$$

para todo $t \geqslant s$, para quase todo $s > 0$ e $s = 0$. Em particular,

$$\theta(t) \leqslant \theta(0) e^{-ct} \text{ para todo } t \geqslant 0.$$

Prova: Defina $\rho: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\rho(t) = \theta(t) + c \int_0^t \theta(\tau) d\tau.$$

Afirmação 1: $\rho \in L^1_{loc}(0, \infty)$.

Com efeito, se $K \subset (0, \infty)$ é um subconjunto compacto, $K \subset [0, T]$ para algum $T > 0$ e basta mostrarmos que ρ é módulo integrável sobre

$[0,T]$. Vamos denotar por $\|\theta\|_1$ a norma de θ em $L^1(0,T)$. Temos

$$\begin{aligned}\int_0^T |\rho(t)|dt &\leqslant \int_0^T |\theta(t)|dt + c\int_0^T \int_0^t |\theta(\tau)|d\tau \, dt \\ &\leqslant \|\theta\|_1 + c\|\theta\|_1 \int_0^T dt = \|\theta\|_1(1+cT) < \infty.\end{aligned}$$

<u>Afirmação 2</u>: ρ é semicontínua inferiormente e contínua em 0.

De fato

$$\lim_{t\to 0}\rho(t) = \lim_{t\to 0}\theta(t) + c\lim_{t\to 0}\int_0^t \theta(\tau)d\tau = \theta(0) + c.0 = \theta(0),$$

pois θ é contínua em 0. Também, para $s \in (0,\infty)$,

$$\liminf_{t\to s}\rho(t) \geqslant \liminf_{t\to s}\theta(t) + c\lim_{t\to s}\int_0^t \theta(\tau)d\tau \geqslant \theta(s) + c\int_0^s \theta(\tau)d\tau = \rho(s),$$

pois θ é semicontínua inferiormente.

Assim, por (3.13) e pelo Lema 3.1.2 segue que $\dot\rho \leqslant 0$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

<u>Afirmação 3</u>: $\dot\rho = \dot\theta + c\theta$.

De fato, se $\phi \in \mathcal{D}(0,\infty)$, então

$$\langle\dot\rho,\phi\rangle = -\langle\rho,\dot\phi\rangle = -\int_0^\infty \rho(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt = -\int_0^\infty \theta(t)\frac{d\phi}{dt}(t)dt - c\int_0^\infty \bar\theta(t)\frac{d\phi}{dt}(t),$$

onde $\bar\theta(t) = \int_0^t \theta(\tau)d\tau$. Note que $\bar\theta$ é derivável e $\frac{d\bar\theta}{dt}(t) = \theta(t)$ no sentido clássico, logo

$$\langle\dot\rho,\phi\rangle = -\langle\theta,\dot\phi\rangle - c\langle\bar\theta,\dot\phi\rangle = \langle\dot\theta,\phi\rangle + c\langle\dot{\bar\theta},\phi\rangle = \langle\dot\theta,\phi\rangle + c\langle\theta,\phi\rangle,$$

o que conclui a afirmação.

Portanto $\dot\theta + c\theta \leqslant 0$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$. Agora, a derivada distribucional de θe^{ct}, que denotaremos por $(\theta e^{ct})'$ coincide com $e^{ct}(\dot\theta + c\theta)$, pois se

$\phi \in \mathcal{D}'(0,\infty)$ temos

$$\langle(\theta e^{ct})', \phi\rangle = -\langle\theta e^{ct}, \dot{\phi}\rangle = -\int_0^\infty \theta(t)e^{ct}\frac{d\phi}{dt}(t)dt,$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
\langle e^{ct}(\dot{\theta}+c\theta), \phi\rangle &= \langle\dot{\theta}+c\theta, e^{ct}\phi\rangle \\
&= \langle\dot{\theta}, e^{ct}\phi\rangle + c\langle\theta, e^{ct}\phi\rangle \\
&= -\langle\theta, (e^{ct}\phi)'\rangle + c\langle\theta, e^{ct}\phi\rangle \\
&= -\int_0^\infty \theta(t)(ce^{ct}\phi(t) + e^{ct}\frac{d\phi}{dt}(t))dt + c\int_0^\infty \theta(t)e^{ct}\phi(t)dt \\
&= -\int_0^\infty \theta(t)e^{ct}\frac{d\phi}{dt}(t)dt, \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

o que mostra que $(\theta e^{ct})' = e^{ct}(\dot{\theta}+c\theta)$.

Temos assim $(\theta e^{ct})' \leqslant 0$ em $\mathcal{D}'(0,\infty)$. Uma vez que $\theta e^{ct} \in L^1_{loc}(0,\infty)$ é semicontínua inferiormente e contínua em 0, podemos aplicar novamente o Lema 3.1.2 para concluir que

$$\theta(t)e^{ct} \leqslant \theta(s)e^{cs}$$

para todo $t \geqslant s$, para quase todo $s > 0$ e $s = 0$, como queríamos demonstrar. ■

Sabemos de [27] que, já que Ω é limitado, vale a **Desigualdade de Poincaré**, isto é, se $\lambda_1 > 0$ é o menor autovalor do operador de Stokes, temos

$$\|Dv\|^2 \geqslant \lambda_1\|v\|^2 \text{ para todo } v \in V. \qquad (3.16)$$

Precisaremos também do seguinte resultado de aritmética básica:

Com estes resultados, somos capazes de mostrar uma limitação importante para as funções em $\mathcal{G}_{NS}$.

Proposição 3.1.4. *Seja $u \in \mathcal{G}_{NS}$. Então*

$$\|u(t)\|^2 - \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2 \leqslant e^{-\nu\lambda_1 t}\Big(\|u(0)\|^2 - \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2\Big), \tag{3.17}$$

para todo $t \geqslant 0$.

Prova: De (3.5), para todo $t \geqslant s$, para quase todo $s \in (0,\infty)$ e $s = 0$, temos

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^t (f, u(\tau))d\tau \leqslant \\ \frac{1}{2}\|u(s)\|^2 + \nu\int_0^s \|Du(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^s (f, u(\tau))d\tau,$$

e então

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_s^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|u(s)\|^2 + \int_s^t (f, u(\tau))d\tau.$$

Como $(f, u(\tau)) \leqslant \|f\|\|u(\tau)\|$ temos

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_s^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|u(s)\|^2 + \int_s^t \|f\|\|u(\tau)\|d\tau. \tag{3.18}$$

Do fato de que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ quaisquer que sejam a e b reais,temos

$$\|f\|\|u(\tau)\| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\nu\lambda_1\|u(\tau)\|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|^2\Big). \tag{3.19}$$

Basta fazer $a = \sqrt{\nu\lambda_1}\|u(\tau)\|$ e $b = \frac{1}{\sqrt{\nu\lambda_1}}\|f\|$.

Defina

$$\theta(t) = \|u(t)\|^2 - \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2.$$

Afirmamos que θ satisfaz (3.13) com $c = \nu\lambda_1$. Com efeito, de (3.18), (3.19) e da Desigualdade de Poincaré obtemos

$$\|u(t)\|^2+2\int_s^t \nu\lambda_1\|u(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \|u(s)\|^2+\int_s^t \frac{1}{\nu\lambda_1}\|f\|^2 d\tau+\int_s^t \nu\lambda_1\|u(\tau)\|^2 d\tau$$

o que implica que

$$\begin{aligned}\theta(t)+c\int_0^t \theta(\tau)d\tau &= \|u(t)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2+\nu\lambda_1\int_0^t \|u(\tau)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2 d\tau\\ &\leqslant \|u(s)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2+\nu\lambda_1\int_0^s \|u(\tau)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2 d\tau\\ &= \theta(s)+c\int_0^s \theta(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Além disso, θ é semicontínua inferiormente pois $u\colon[0,\infty)\to H_w$ é contínua. Também, de (3.13) para $s=0$,

$$\limsup_{t\to 0^+}\theta(t)\leqslant \limsup_{t\to 0^+}\Big[\theta(0)+c\int_0^t \theta(\tau)d\tau=\theta(0)\Big],$$

e logo θ é contínua em 0. Temos $\theta\in L^1(0,T)$ para cada $T>0$ uma vez que $u\in L^2(0,T;H)$ para cada $T>0$ e então, pelo Lema 3.1.3, para todo $t\geqslant s$, para quase todo $s>0$ e $s=0$, segue que

$$\theta(t)\leqslant \theta(0)e^{-ct}.$$

Portanto

$$\|u(t)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2\leqslant e^{-\nu\lambda_1 t}\Big(\|u(0)\|^2-\frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2\Big),$$

como queríamos demonstrar. ∎

Antes de continuarmos, e seguir para os resultados principais deste trabalho, precisaremos de mais alguns resultados técnicos. A demonstração da seguinte proposição pode ser encontrada em [14].

Proposição 3.1.5. *Seja X um espaço métrico separável. Então uma função é fortemente mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável.*

As próximas duas proposições são bem conhecidas na Análise Funcional, e podem ser encontradas em [5].

Proposição 3.1.6. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ e $\{u_n\}$ uma sequência em X. Se $\{u_n\}$ converge fracamente para algum $u \in X$, então $\{u_n\}$ é limitada em X e*

$$\|u\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Proposição 3.1.7. *Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ uniformemente convexo e $\{u_n\}$ uma sequência em X. Se $\{u_n\}$ converge fracamente para algum $u \in X$, e $\|u_n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|$, então $u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ fortemente em X.*

A seguinte proposição será também necessária adiante, e é dada pelo resultado [4, Proposição II.2.12].

Proposição 3.1.8. *Sejam E, F, G espaços de Banach e B uma função contínua bilinear de $E \times F$ em G. Seja $\{x_j\}$ uma sequência em E que converge fortemente para algum $x \in E$ e $\{y_n\}$ uma sequência em F que converge fracamente para algum $y \in F$. Então a sequência $\{B(x_j, y_j)\}$ converge fracamente para $B(x, y)$ em G.*

3.2 Resultados principais

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos os resultados principais deste trabalho, que garantem que, sob determinadas condições, a família $\mathcal{G}_{NS}$ é um semifluxo generalizado que possui um atrator global. Para isso utilizaremos o Teorema 2.2.37; provaremos que $\mathcal{G}_{NS}$ é ϕ-dissipativo e assintoticamente compacto.

Proposição 3.2.1. *São equivalentes:*

(i) $\mathcal{G}_{NS}$ *é um semifluxo generalizado.*

(ii) *Cada solução fraca é contínua de* $(0,\infty)$ *em* H*.*

(iii) *Cada solução fraca é contínua de* $[0,\infty)$ *em* H*.*

Prova:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Suponha que $\mathcal{G}_{NS}$ é um semifluxo generalizado. Como toda $u \in \mathcal{G}_{NS}$ pertence a $C([0,T];H_w)$ segue que $\mathcal{G}_{NS}$ possui representantes únicos. Pelo Teorema 2.4.2 apenas precisamos mostrar que cada solução fraca é fortemente mensurável. Dada $u \in \mathcal{G}_{NS}$, u é contínua de $(0,\infty)$ em H_w, isto é, u é fracamente contínua, o que implica que u é fracamente mensurável. Mas então, como H é separável, pela Proposição 3.1.5 temos u fortemente mensurável.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Seja u uma solução fraca contínua de $(0,\infty)$ em H. Precisamos mostrar que u é contínua em 0. Seja $t_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0^+$ e T tal que $t_j < T$ para todo j. Como $u \in C([0,T];H_w)$ temos $u(t_j) \rightharpoonup u(0)$ e pela Proposição 3.1.6,

$$\|u(0)\| \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|u(t_j)\|.$$

Além disso, de (3.5) para $s = 0$, temos

$$\|u(t_j)\|^2 - 2\int_0^{t_j} (f, u(\tau))d\tau \leqslant \|u(0)\|^2$$

e então

$$\limsup_{j\to\infty} \|u(t_j)\|^2 \leqslant \|u(0)\|^2.$$

Portanto $\|u(t_j)\| \xrightarrow{j\to\infty} \|u(0)\|$ e como H é uniformemente convexo, pela Proposição 3.1.7 segue que $u(t_j) \xrightarrow{j\to\infty} u(0)$ como queríamos.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seja u uma solução fraca contínua de $[0,\infty)$ em H por hipótese. Afirmamos que $V(u)(t)$ é contínua. Com efeito, se $t_j \xrightarrow{j\to\infty} t$ para $t \in [0,\infty)$, então da continuidade de u temos $u(t_j) \xrightarrow{j\to\infty} u(t)$ e consequentemente $\|u(t_j)\| \xrightarrow{j\to\infty} \|u(t)\|$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(t_j)\|^2 + \nu\int_0^{t_j} \|Du(\tau)\|d\tau - \int_0^{t_j}(f, u(\tau))d\tau \xrightarrow{j\to\infty} \\ \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_0^{t} \|Du(\tau)\|d\tau - \int_0^{t}(f, u(\tau))d\tau\end{aligned}$$

e logo $V(u)(t_j)$ converge para $V(u)(t)$ quando $j \to \infty$. Como $V(u)(\cdot)$ é não-crescente quase sempre em $[0,\infty)$, da continuidade temos $V(u)(\cdot)$ não-crescente.

Fixemos $\tau \geqslant 0$. Para provar que $u^\tau \in \mathcal{G}_{NS}$ basta mostrarmos que u^τ satisfaz a desigualdade da energia, isto é, que

$$V(u^\tau)(t) \leqslant V(u^\tau)(s) \text{ para todo } t \geqslant s$$

para quase todo $s \in (0,\infty)$ e em $s = 0$. Note que

$$
\begin{aligned}
V(u^\tau)(t) &= \frac{1}{2}\|u^\tau(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|Du^\tau(x)\|dx - \int_0^t (f, u^\tau(x))dx \\
&= \frac{1}{2}\|u(\tau+t)\|^2 + \nu\int_0^t \|Du(\tau+x)\|dx - \int_0^t (f, u(\tau+x))dx.
\end{aligned}
$$

Se fizermos $y = \tau + x$, obtemos

$$
V(u^\tau)(t) = \frac{1}{2}\|u(\tau+t)\|^2 + \nu\int_\tau^{t+\tau} \|Du(y)\|dy - \int_\tau^{t+\tau} (f, u(y))dy.
$$

Por outro lado,

$$
V(u)(t+\tau) = \frac{1}{2}\|u(\tau+t)\|^2 + \nu\int_0^{t+\tau} \|Du(y)\|dy - \int_0^{t+\tau} (f, u(y))dy,
$$

e portanto

$$
V(u^\tau)(t) = V(u)(t+\tau) - \nu\int_0^\tau \|Du(y)\|dy + \int_0^\tau (f, u(y))dy.
$$

Seja $s \in [0, \infty)$ e $t \geqslant s$. Por ser $V(u)(\cdot)$ não-crescente

$$
\begin{aligned}
V(u^\tau)(t) = V(u)(t+\tau) - \nu\int_0^\tau \|Du(y)\|dy + \int_0^\tau (f, u(y))dy \leqslant \\
V(u)(s+\tau) - \nu\int_0^\tau \|Du(y)\|dy + \int_0^\tau (f, u(y))dy = V(u^\tau)(s).
\end{aligned}
$$

Logo $u^\tau \in \mathcal{G}_{NS}$ e $\mathcal{G}_{NS}$ satisfaz (H2). Resta mostrarmos que satisfaz (H4). Para isso, seja $\{u^j\}$ uma sequência de soluções fracas com $u^j(0) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \in H$. Da Proposição 3.1.4 temos, para cada j,

$$
\|u^j\|_{L^\infty(0,\infty;H)} \leqslant \|u^j(0)\|
$$

e como $\{u^j(0)\}$ é convergente e portanto limitada, segue que $\{u^j\}$ é limitada em $L^\infty(0,\infty;H)$. Afirmamos que $\{u^j\}$ é limitada em $L^2(0,\infty,V)$. De fato, pela desigualdade da energia para $s=0$ obtemos

$$\frac{1}{2}\|u^j(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau - \int_0^t (f,u^j(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|u^j(0)\|^2$$

para todo $t \geqslant 0$. Temos

$$\|u^j\|^2_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T \|u^j(t)\|_V^2 dt = \int_0^T \|Du^j(t)\|^2 dt \leqslant$$
$$\frac{1}{2}(\|u^j(0)\|^2 - \|u^j(t)\|^2) + \int_0^T (f,^j u(t))dt \leqslant \|u^j\|^2_{L^\infty(0,\infty,H)} + T\|f\|\|u^j\|_{L^\infty(0,\infty,H)}$$

e a limitação segue do fato de $\{u^j\}$ ser limitada em $L^\infty(0,\infty;H)$.

Por [27, Teorema 3.3], temos $\{\frac{du^j}{dt}\}$ limitada em $L^{4/3}(0,T;V')$ para cada $T>0$. Utilizando [27, Teorema 2.2] obtemos uma subsequência (que não renomearemos) e uma função $u \in C([0,T];H_w) \cap L^2(0,T;V)$ para cada $T>0$ tais que

$$u^j \to u \text{ em } L^2(0,T;H) \text{ para todo } T>0 \tag{3.20}$$

e, consequentemente,

$$u^j(t) \to u(t) \text{ em } H\text{, para quase todo } t>0 \tag{3.21}$$

$$u^j(t) \rightharpoonup u(t) \text{ em } H \text{ para todo } t \geqslant 0. \tag{3.22}$$

Por ser V reflexivo, das limitações obtidas temos ainda

$$u^j \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;V) \text{ para todo } T>0; \tag{3.23}$$

$$\frac{du^j}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ em } L^{4/3}(0,T;V') \text{ para todo } T>0. \tag{3.24}$$

Vamos mostrar que u satisfaz (3.4). Para cada j, temos para quase todo $t > 0$

$$\Big(\frac{du^j(t)}{dt}, v\Big) + \nu(Du^j(t), Dv) + b(u^j(t), u^j(t), v) = (f, v), \tag{3.25}$$

para todo $v \in V$.

Por (3.24) temos

$$\Big(\frac{du^j(t)}{dt} - \frac{du(t)}{dt}, v\Big) \to 0$$

pois cada $v \in V$ pode ser vista como uma função constante de $L^4(0,T;V) = (L^{4/3}(0,T;V'))'$. Analogamente, por (3.23), obtemos

$$(Du^j(t), Dv) = (u^j(t), Av) \to (u(t), Av) = (Du(t), Dv)$$

pois Av pode ser vista como função contante em $L^2(0,T;V') = (L^2(0,T;V))'$.

Finalmente, de [27, Lema 3.1] e da Proposição 3.1.8 obtemos

$$b(u^j(t), u^j(t), v) \to b(u(t), u(t), v) \text{ quando } j \to \infty.$$

Passando o limite em (3.25) quando $j \to \infty$ obtemos

$$\Big(\frac{du(t)}{dt}, v\Big) + \nu(Du(t), Dv) + b(u(t), u(t), v) = (f, v),$$

para quase todo $t > 0$ e toda $v \in V$. Além disso, como $u^j(0) \xrightarrow{j\to\infty} u_0 \in H$ e $u^j(0) \rightharpoonup u(0)$ em H temos $u(0) = u_0$.

Definamos agora, para $\phi \in L^2(0,T;V)$ para cada $T > 0$, uma função auxiliar $\tilde{V}(\phi)$ por

$$\tilde{V}(\phi)(t) = \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 - \int_0^t (f, \phi(\tau))d\tau, \text{ para todo } t \geqslant 0,$$

e notamos que $V(\phi)(t) = \tilde{V}(\phi)(t) + \nu \int_0^t \|D\phi(\tau)\|^2 d\tau$.

De (3.21) e (3.22) temos $\tilde{V}(u^j)(t) \to \tilde{V}(u)(t)$ para quase todo $t > 0$ e para $t = 0$. Além disso, $\tilde{V}(u^j)(t)$ é não-crescente, pois $V(u^j)(t)$ é não-crescente. Para quase todo $s > 0$ e para $s = 0$ temos

$$V(u^j)(t) \leqslant V(u^j)(s) \text{ para todo } t \geqslant s,$$

o que implica que

$$\tilde{V}(u^j)(t) + \nu \int_s^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau \leqslant \tilde{V}(u^j)(s) \text{ para todo } t \geqslant s.$$

Então

$$\liminf_{j\to\infty} \left[\tilde{V}(u^j)(t) + \nu \int_s^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau\right] \leqslant \liminf_{j\to\infty} \tilde{V}(u^j)(s).$$

De (3.22) e da Proposição 3.1.6 temos

$$\int_s^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau = \|u\|^2_{L^2(s,t;V)} \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|u^j\|^2_{L^2(s,t;V)} = \liminf_{j\to\infty} \int_s^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau.$$

Logo, como $\tilde{V}(u^j)(t) \to \tilde{V}(u)(t)$ quase sempre para $s > 0$ e para

$s = 0$,

$$\begin{aligned}\tilde{V}(u)(t) + \nu \int_s^t \|Du(\tau)\|^2 d\tau &\leqslant \tilde{V}(u)(t) + \nu \liminf_{j\to\infty} \int_s^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \{\tilde{V}(u^j)(t) + \nu \int_s^t \|Du^j(\tau)\|^2 d\tau\} \\ &\leqslant \liminf_{j\to\infty} \tilde{V}(u^j)(s) \\ &= \tilde{V}(u)(s)\end{aligned}$$

e portanto $V(u)(t) \leqslant V(u)(s)$ para quase todo $t \geqslant s$, para quase todo $s > 0$ e para $s = 0$. Para $t \geqslant s$ tome $t_k \to t$ uma sequência tal que $t_k \geqslant s$ e $V(u)(t_k) \leqslant V(u)(s)$ para todo k. Como $u \in C([0,T], H_w)$ para todo $T > 0$, $u(t_k) \rightharpoonup u(t)$ e então utilizando a Proposição 3.1.6 obtemos

$$V(u)(t) \leqslant \liminf_{k\to\infty} V(u)(t_k) \leqslant V(u)(s),$$

o que mostra que u satisfaz a desigualdade da energia e, portanto, é uma solução fraca. Note que de forma análoga ao que fizemos para V, obtemos $\tilde{V}(u^j)(t)$ e $\tilde{V}(u)(t)$ contínuas. Logo $\tilde{V}(u)(t)$ é não-crescente e $\tilde{V}(u^j)(t) \to \tilde{V}(u)(t)$ para todo $t \geqslant 0$. De (3.22) e da Proposição 3.1.6 temos

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \liminf_{j\to\infty} \|u^j(t)\|$$

para todo $t \geqslant 0$. Também de, (3.22) seque que

$$(f, u^j(\tau)) \to (f, u(\tau)) \text{ para todo } \tau \geqslant 0$$

e logo

$$\int_0^t (f, u^j(\tau)) d\tau \to \int_0^t (f, u(\tau)) d\tau.$$

Como $\tilde{V}(u^j)(t) \to \tilde{V}(u)(t)$ temos

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{2}\|u^j(t)\|^2 - \int_0^t (f, u^j(\tau))d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 - \int_0^t (f, u(\tau))d\tau,$$

e portanto

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{2}\|u^j(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|u(t)\|^2,$$

o que implica que $\|u^j(t)\| \to \|u(t)\|$ quando $j \to \infty$. Da Proposição 3.1.7 segue que $u^j(t) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} u(t)$ em H para todo $t \geqslant 0$. Concluímos que $\mathcal{G}_{NS}$ satisfaz (H4) e é portanto um semifluxo generalizado, o que conclui a demonstração. $\blacksquare$

Teorema 3.2.2. *Se $\mathcal{G}_{NS}$ é um semifluxo generalizado então ele possui um atrator global.*

Prova: Pela Proposição 3.2.1, $\mathcal{G}_{NS}$ é um semifluxo generalizado se, e somente se, cada solução fraca é contínua de $[0,\infty)$ em H. Afirmamos que $\mathcal{G}_{NS}$ é ϕ-dissipativo. Com efeito, defina $r = \sqrt{1 + \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2}$ e $B_0 = B_r(0) = \{\psi \in H: \|\psi\| \leqslant r\}$. Tome $u \in \mathcal{G}_{NS}$ e t_u grande o suficiente para que

$$e^{-\nu\lambda_1 t} < \frac{1}{\|u(0)\|^2 - \dfrac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2}$$

para todo $t \geqslant t_u$. Pela Proposição 3.1.4 temos, para $t \geqslant t_u$,

$$\|u(t)\|^2 \leqslant 1 + \frac{1}{(\nu\lambda_1)^2}\|f\|^2 \Rightarrow \|u(t)\| \leqslant r$$

e então $u(t) \in B_0$.

Também utilizando a Proposição 3.1.4 concluímos que $\mathcal{G}_{NS}$ é eventualmente limitado. De fato, como $e^{-\nu\lambda_1 t}$ é decrescente, segue que para toda $u \in \mathcal{G}_{NS}$

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\|$$

para todo $t \geqslant 0$. Seja $B \subset H$ limitado. Então existe $M > 0$ tal que $\|\phi\| \leqslant M$ para toda $\phi \in B$. Observe que

$$\begin{aligned}\gamma^+(B) &= \bigcup_{t\geqslant 0} T(t)B = \bigcup_{t\geqslant 0} \Big\{ u(t) \colon u \in \mathcal{G}_{NS} \text{ e } u(0) \in B \Big\} \\ &\subset \bigcup_{t\geqslant 0} \Big\{ u(t) \colon u \in \mathcal{G}_{NS} \text{ e } \|u(0)\| \leqslant M \Big\},\end{aligned}$$

logo para toda $\phi \in \gamma^+(B)$ temos $\|\phi\| \leqslant M$ e assim $\gamma^+(B) \subset B_M(0)$.

Temos que $\mathcal{G}_{NS}$ é compacto, pois se tomarmos $\{u_j\} \subset \mathcal{G}_{NS}$ tal que $\{u_j(0)\}$ é limitada em H podemos repetir o argumento da Proposição 3.2.1 para concluir que existe uma subsequência $\{u_\mu\}$ de $\{u_j\}$ tal que $u_\mu(t)$ é convergente para todo $t \geqslant 0$.

Da Proposição 2.2.10 concluímos que $\mathcal{G}_{NS}$ é assintoticamente compacto e portanto, pelo Teorema 2.2.37, temos que $\mathcal{G}_{NS}$ possui um atrator global que é minimal entre os B-atratores fechados não-vazios e maximal entre os subconjuntos compactos invariantes de H. ■

Concluímos então que sob a condição de que $\mathcal{G}_{NS}$ seja um semifluxo generalizado, isto é, assumindo que cada solução fraca seja contínua de $(0, \infty)$ em H, $\mathcal{G}_{NS}$ possui um atrator global.

Referências Bibliográficas

[1] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors in Evolutionary Equations*, Studies in Mathematics and its Applications **25**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1992).

[2] J. M. Ball, Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations, J. Nonlinear Sci. **7**, 475-502 (1997).

[3] J. M. Ball, Erratum: Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations, J. Nonlinear Sci. **8**, 233 (1998).

[4] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag (2013).

[5] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, **2** (1987).

[6] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics.* Colloquium Publications **49**, American Mathematical Society (2002).

[7] J. W. Cholewa and T. Dlotko, *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[8] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons (1984).

[9] G. P. Galdi, *Notes: An Introduction to the Navier-Stokes Initial-Boundary Value Problem*, Department of Mechanical Engineering University of Pittsburgh, USA.

[10] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs **25** (American Mathematical Society, Providence, RI) (1988).

[11] J. K. Hale, L. Magalhães and W. M. Oliva, *Dynamics in Infinite Dimensions*, Applice Mathematical Sciences **47**, Second Edition, Springer Verlag (2002).

[12] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications.* Masson, Paris (1991).

[13] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Lecture Notes in Mathematics Vol. **840**. Springer-Verlag (1981).

[14] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups* **31**, Colloq. Publ. Col., Amer. Math. Soc., Providence (1957).

[15] O. A. Ladyzhenskaya, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Leizioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1991).

[16] J. R. Munkres, *Topology*, Second Edition, Pearson Education (2000).

[17] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York (1983).

[18] G. Raugel, Global Attractors in Partial Differential Equations, in Handbook of Dynamical Systems **2**, Elsevier Sciences, 885-982 (2002).

[19] G. Raugel, Global attractors in partial differential equations; in: Handbook of dynamical systems **2** 885–982, North-Holland, Amsterdam (2002).

[20] G. R. Sell and Y. You, *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer, New York (2000).

[21] J. C. Oxtoby, *Measure and Category.* Springer-Verlag, New York, (1971).

[22] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, England (2001).

[23] G. R. Sell, Global attractors for the three-dimensional Navier-Stokes equations, J. Dyn. Differential Eqns **8**, 1-33 (1996).

[24] G. R. Sell and Y. You, *Dynamics of evolutionary equations.* Applied Mathematical Sciences Vol. 143. Springer-Verlag, New York (2002).

[25] J. Simsen and C. B. Gentile, On Attractors for Multivalued Semigroups Defined by Generalized Semiflows, Set-Valued Anal **16**, 105-124 (2008).

[26] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, Berlin (1967).

[27] R. Temam, *Navier-Stokes Equations - Theory and Numerical Analysis*, Studies in Mathematics and its Applications (1979).

[28] M. I. Vishik, *Asymptotic behaviour of solutions of evolutionary equations*. Cambridge University Press, Cambridge, England (1992).

[29] E. Zeidler and L. F. Boron, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications: IIA*, Springer My Copy UK (1989).

[30] A. N. Carvalho, *Notas de aula: Sistemas Dinâmicos não lineares*,ICMC-USP São Carlos (2012) **http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf**.

[31] De. Liu, *The critical forms of the attractors for semigroups and the existence of critical attractors*, Proc. Roy Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **454**, 2157-2171 (1998).

[32] V. S. Melnik and J. Valero, *On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions*, Set Valued Anal. **6**(1), 83-111 (1998).