Bacharel

Aluno Nelson Young .... *Número* ....

Disciplina Matemática .... *Ano* ....

Professor ....

3-3-64

Prof. Hélio Prates da Silveira

5-3-64.

Teorema de Chasles.

A soma de três vetores colineares, tais que a origem de cada um dêles coincida com a extremidade do anterior, é nula.

Dados três pontos A, B, C, sôbre uma reta, temos sempre:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

10-3-64

Teorema de Moebius

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GA} = 0$$

Teorema de Carnot.

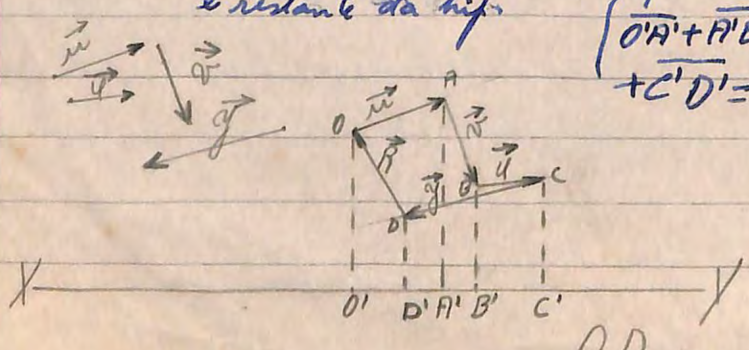
"A medida algébrica da projeção da resultante de dois ou mais vetores sôbre um eixo é igual à soma das medidas algébricas das projeções dêsses vetores sôbre êsse eixo."

HIPÓTESE
$$\begin{cases} \vec{u}, \vec{v}, \vec{q}, \vec{y} \\ \overline{XY} \\ \overline{OD} = \text{resultante} = \vec{R} \\ \overline{O'D'} = \text{Projeção}_{XY}\ \overline{OD} \\ \overline{O'A'} = \text{Proj. } \overline{OA} \\ \overline{C'D'} = \text{Proj. } \overline{CD} \end{cases}$$

Tese $\{ \overline{O'D'} = \overline{O'A'} + \overline{A'B'} + \dots + \overline{C'D'}$

Demonstr. $\{ \vec{u}, \vec{v} \dots$ e restante da hip.

P.H.
$$\begin{cases} \overline{O'A'}+\overline{A'B'}+\dots+\overline{C'D'}+\overline{D'O'}=0 \\ \text{pelo teor. Chasles.} \\ \overline{O'A'}+\overline{A'B'}+\overline{B'C'}+\overline{C'D'}=-\overline{D'O'}=\overline{O'D'} \end{cases}$$

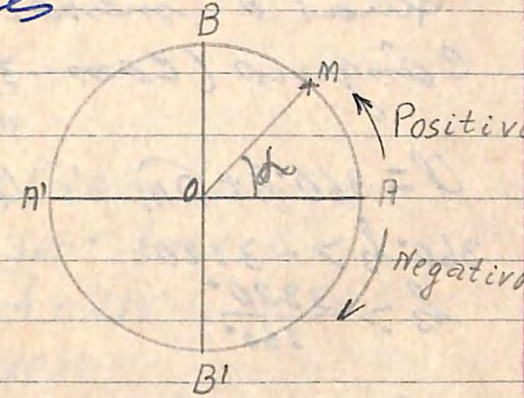


OD resultante

20-3-64.

Trigonometria.

Arcos côngruos: quando tem as mesmas origens e as mesmas extremidades



$\varphi = 360° k + \overline{AM}$

k = inteiro, positivo, negativo ou nulo.

24-3-64.

Arcos côngruos

$\varphi = 360° k + \overline{AM}$

$\varphi = 2\pi k + AM$

$C = 2\pi R$.

25-3-64.

Arcos côngruos

$\varphi = 360° k + \widehat{AM}$.

$\varphi = 2k\pi + \alpha$

Qual o menor arco positivo côngruo (com $-3320°$).

$\varphi = 360° k + \widehat{AM}$ $\therefore$ $\varphi = 360° k - 3320$

$360° k > -3320°$

$k > \frac{3320°}{360°}$

$\varphi = 360° k - 3320°$

$AM = 280°$

$0 \leq \varphi < 360°$

31-3-64.

Arcos côngruos

$360° k + \widehat{AM}$

$2580° \,\underline{|\, 360°}$
$60° \quad 7$ R: $\widehat{AM} = 60°$

$-4570° \,\underline{|\, 360}$
$-250 \quad -12$
$\underline{360}$
110 R: $\widehat{AM} = 110°$

Achar o valor geral de φ sabendo que $3\varphi - 45°$ e $2\varphi + 135°$ exprimem as medidas de duas determinações de um arco $\widehat{AM}$.

$\varphi = ?$

$\widehat{AM} \begin{cases} 3\varphi - 45° \\ 2\varphi + 135° \end{cases}$

$\varphi = 360° k + \widehat{AM}$

$3\varphi - 45° = 360° k + 2\varphi + 135°$

$3\varphi - 2\varphi - 45° = 360° k + 135$

$\varphi - 45° = 360° k + 135$

$\varphi = 360° k + 180°$

$\varphi = 180°(2k+1)°$ $\quad k = 0 \longrightarrow \varphi = 180°$

$k = 1 \longrightarrow \varphi = 540°$

Qual o menor valor positivo de φ de modo a serem $3\varphi + \pi$ e $\varphi + 40°$ duas determinações de um mesmo arco $\widehat{AM}$.

$\varphi = ?$

$0 < \varphi < \ldots$

$\widehat{AM} \begin{cases} 3\varphi + \pi \\ \varphi + 40° \end{cases}$

$y = 360°k + \alpha$

$3\varphi + \pi = 360° + \varphi + 40°$

$3\varphi - \varphi = 360°k + 40° + 180°$

$2\varphi = 360°k - 140°$

$\varphi = \frac{360k - 140°}{2} \therefore \varphi = 180°k - 70°$

$\varphi \geq 0$

$180°k - 70° > 0$

$180°k > 70°$

$k > \frac{70°}{180°} = 0{,}3\ldots \qquad k = 1$

$\varphi = 180°k - 70° = 180° \times 1 - 70° = 110°$

$\varphi = 110°$

$3\varphi + \pi \therefore 330° + 180° = 510° \qquad \begin{array}{r} 510° \\ -\ 150° \\ \hline 360° \end{array}$

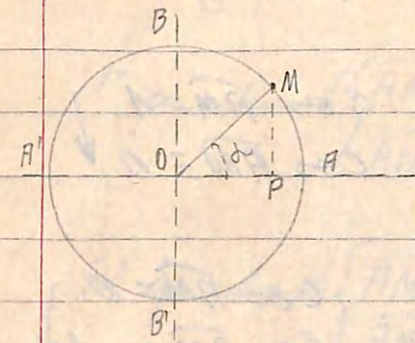
$\varphi + 40° \therefore 110° + 40° = 150°$

$\begin{array}{r} 510° \\ -\ 360° \\ \hline 150° \end{array}$

Troca de Professor

(Professor Brito)

10-4-64



$sen\ \overline{AM} = sen\ \alpha = \frac{\overline{PM}}{OA}$

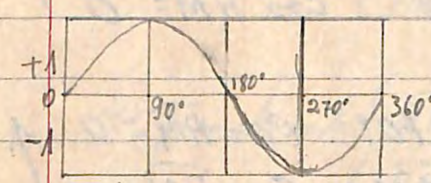
$sen\ 0° = 0$

$sen\ 90° = 1$

$sen\ 180° = 0$

$sen\ 270° = -1$

$sen\ 360° = 0$



15-4-64

Função Coseno.

$Cos\ \overline{AM} = \overline{OP}$

Coseno de um $\overline{AM}$ é a medida algébrica da projeção do raio que passa pela extremidade do $\overline{AM}$.

No 1º quadrante vai de 1 até zero

No 2º " " " zero até −1

No 3º " " " −1 até zero

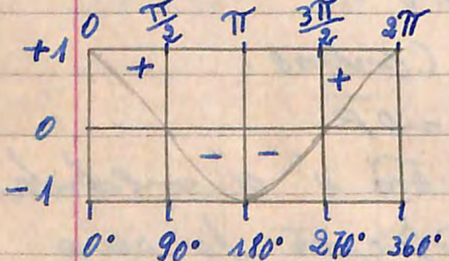
No 4º quadrante vai de zero até 1

1º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 0° & \cos \overline{AM} = 1 \\ \overline{AM} = 90° & \cos \overline{AM} = 0 \end{cases} \downarrow$

2º quadrante: $\begin{cases} \overline{AM} = 90° & \cos \overline{AM} = 0 \\ \overline{AM} = 180° & \cos \overline{AM} = -1 \end{cases} \downarrow$

3º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 180° & \cos \overline{AM} = -1 \\ \overline{AM} = 270° & \cos \overline{AM} = 0 \end{cases} \uparrow$

4º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 270° & \cos \overline{AM} = 0 \\ \overline{AM} = 360° & \cos \overline{AM} = 1 \end{cases} \uparrow$



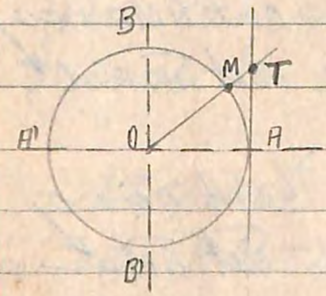
Função tangente:

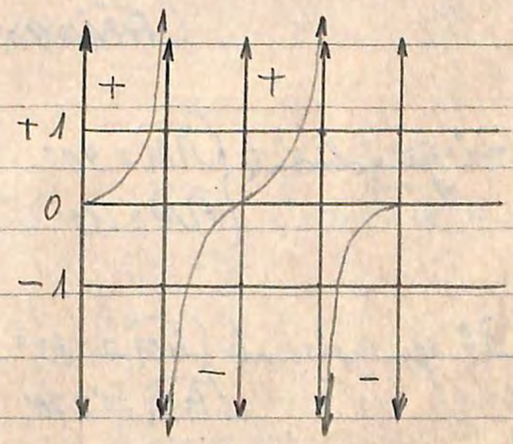
1º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 0° & tg\,\overline{AM} = 0 \nearrow \infty \\ \overline{AM} = 90° & tg\,\overline{AM} = \text{não existe: } \infty \end{cases}$

2º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 90° & tg\,\overline{AM} = \text{não existe } (-\infty) \nearrow \\ \overline{AM} = 180° & tg\,\overline{AM} = 0 \quad -\infty \nearrow 0 \end{cases}$

3º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 180° & tg\,\overline{AM} = 0 \quad 0 \nearrow +\infty \\ \overline{AM} = 270° & tg\,\overline{AM} = +\infty \text{ (não existe)} \end{cases}$

4º quadrante $\begin{cases} \overline{AM} = 270° & tg\,\overline{AM} = (-\infty) \text{ não existe} \\ \overline{AM} = 360° & tg\,AM = 0 : \; -\infty \nearrow 0 \end{cases}$





Tangente: de um $\overline{AM}$ é a medida algébrica do segmento da tangente geométrica positiva ao ponto de origem dos arcos compreendido entre êste ponto e o ponto de interseção do polongamento do raio que passa pela extremidade do arco com esta tangente geométrica.

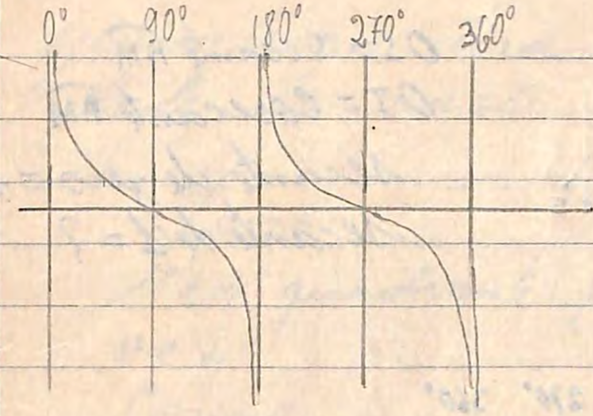
Função Cotangente

1º quadrante: $\begin{cases} \overline{AM}=0 & \cot \overline{AM}=+\infty \\ \overline{AM}=90° & \cot \overline{AM}=0 \end{cases}$

2º quadrante $\begin{cases} \overline{AM}=90° & \cot \overline{AM}=0 \\ \overline{AM}=180° & \cot \overline{AM}=-\infty \end{cases}$

3º quadrante $\begin{cases} \overline{AM}=180° & \cot \overline{AM}=+\infty \\ \overline{AM}=270° & \cot \overline{AM}=0 \end{cases}$

4º quadrante $\begin{cases} \overline{AM}=270° & \cot \overline{AM}=0 \\ \overline{AM}=360° & \cot \overline{AM}=-\infty \end{cases}$

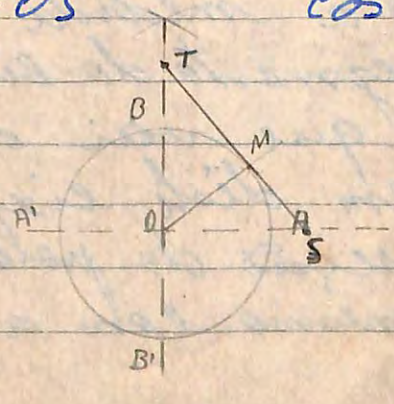


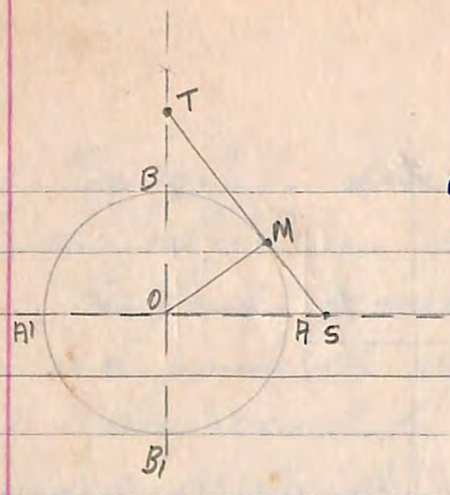
Funções diretas sen. cos. tg.
inversas das primeiras cosec. sec cotg.

Seno de $\overline{AM}$ é a medida algébrica da projeção do raio que passa pela extremidade do arco sôbre o eixo dos senos.

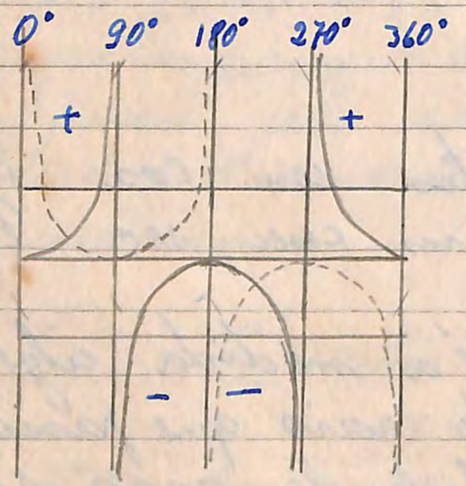
secante
$\sec \overline{AM} = OS$

cosecante
$\cos \overline{AM} = OT$





$OS =$ Secante $\overset{\frown}{AM}$
$OT =$ Cosecante $\overset{\frown}{AM}$
secante de zero $= 1$
secante de $1 = ?$



secantoide

Conceito: secante de um $\overset{\frown}{AM}$ é a medida algébrica do segmento do eixo dos cosenos que vai desde a origem dêste eixo até a interseção do prolongamento do mesmo com a tangente geométrica tirada da extremidade do arco.

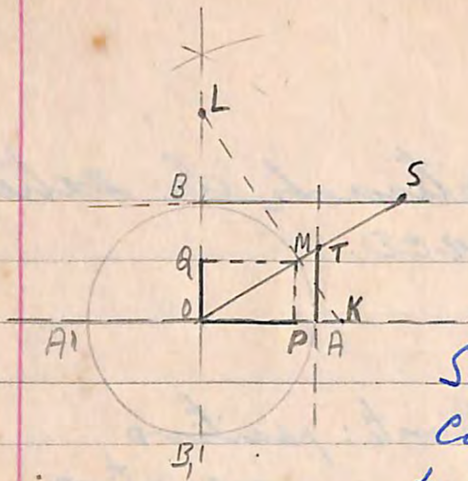
Seno:
1º e 2º quadrante: positivo
3º e 4º " negativo

Coseno:
1º e 4º quadrante: positivo
2º e 3º " negativo

Tangente:
1º e 3º quadrante: positivo
2º e 4º " negativo

Cotangente:
1º e 3º quadrante: positivo
2º e 4º " negativo

Cosecante:
1º e 2º quadrante positivo
3º e 4º " negativo.

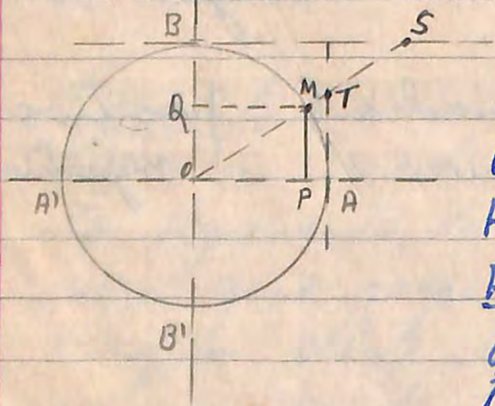


$$\Delta OMK = \Delta OAT$$

$$\text{Sen}\ \overset{\frown}{AM} = \overline{OQ}$$
$$\cos\ \overset{\frown}{AM} = \overline{OP}$$
$$\text{tg}\ \overset{\frown}{AM} = \overline{AT}$$
$$\text{cotg}\ \overset{\frown}{AM} = \overline{BS}$$
$$\text{Sec}\ \overset{\frown}{AM} = \overline{OT}$$
$$\text{cosec}\ \overset{\frown}{AM} = \overline{OS}$$

20-4-64.

Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco.



$$\overline{PM} = \overline{OQ} = \text{sen}\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{OP} = \overline{QM} = \cos\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{AT} = \text{tg}\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{BS} = \text{cotg}\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{OT} = \text{sec.}\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{OS} = \text{cosec.}\ \overset{\frown}{AM}$$
$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OA} = 1$$

$$\Delta OPM \sim \Delta OAT$$
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}}$$

$$\frac{\cos \overset{\frown}{AM}}{1} = \frac{\text{sen} \overset{\frown}{AM}}{\text{tg} \overset{\frown}{AM}} = \frac{1}{\text{Sec} \overset{\frown}{AM}}$$

$$\text{tg}\ \overset{\frown}{AM} = \frac{\text{Sen} \overset{\frown}{AM}}{\text{Cos} \overset{\frown}{AM}}$$

$$\text{Sec}\ \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{\text{Cos} \overset{\frown}{AM}}$$

$$\text{Sen} \overset{\frown}{AM} \times \text{Sec.} \overset{\frown}{AM} = \text{tg} \overset{\frown}{AM}$$

$$\Delta OQM \sim \Delta OPS$$
$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OS}}$$

$$\frac{\text{Sen} \overset{\frown}{AM}}{1} = \frac{\cos \overset{\frown}{AM}}{\text{cotg} \overset{\frown}{AM}} = \frac{1}{\text{cosec} \overset{\frown}{AM}}$$

$$\text{Cotg}\ \overset{\frown}{AM} = \frac{\text{Cos} \overset{\frown}{AM}}{\text{Sen} \overset{\frown}{AM}}$$

$$\cos \overset{\frown}{AM} = \frac{1}{\operatorname{sen} \overset{\frown}{AM}}$$

Δ ret. OPM.

$$\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{OM}^2$$

$$\cos^2 \overset{\frown}{AM} + \operatorname{sen}^2 \overset{\frown}{AM} = 1$$

	sen x	cos x	tg x	cotg x	sec x	cosec x
sen. x		$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\frac{tg\,\varphi}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\varphi}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\varphi-1}}{\sec^2\varphi}$	$\frac{1}{cosec\,\varphi}$
cos. x	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$	$\frac{cot\,\varphi}{\pm\sqrt{1+cotg^2\varphi}}$	$\frac{1}{\sec\varphi}$	$\pm\frac{cosec^2\varphi-1}{cosec\,\varphi}$
tg. x	$\pm\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$		$\frac{1}{cotg\,\varphi}$	$\pm\sqrt{\sec^2\varphi-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{cosec^2\varphi-1}}$
cotg. x	$\pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{\operatorname{sen}\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{tg\,\varphi}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\varphi-1}}$	$\pm\sqrt{cosec^2\varphi-1}$
sec. x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}$	$\frac{\pm\sqrt{1+cotg^2\varphi}}{cotg\,\varphi}$		$\frac{cosec\,\varphi}{\pm\sqrt{cosec^2\varphi-1}}$
cosec. x	$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}{tg\,\varphi}$	$\pm\sqrt{1+cotg^2\varphi}$	$\frac{\sec\varphi}{\pm\sqrt{\sec^2\varphi-1}}$	

$$\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \;\therefore\; \operatorname{sen}^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$$

$$tg\,\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \qquad tg\,\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} \;\therefore\; tg^2\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}$$

22-4-64.

$$tg\,\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \qquad tg\,\varphi = a \;\therefore\; a = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \;\therefore$$

$$\therefore\; a = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} \;\therefore\; a^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi} \;\therefore$$

$$\therefore\; a^2(1-\operatorname{sen}^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi \;\therefore$$

$$a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi \;\therefore\; a^2 = a^2\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$a^2 = \operatorname{sen}^2\varphi\,(a^2+1) \;\therefore\; \operatorname{sen}^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+1}$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{a^2}{a^2+1} \;\therefore\; \operatorname{sen}\varphi = \frac{a}{\pm\sqrt{1+a^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\pm\sqrt{1+tg^2\varphi}}}$$

3ª linha: forma-se da 1ª sôbre a 2ª

4ª linha: inverso da 3ª linha

5ª linha: inverso da 2ª linha

6ª linha: inverso da 1ª linha

$$(a)\begin{cases} sen^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \\ tg\,\varphi = \dfrac{sen\,\varphi}{\cos\varphi} \\ cotg\,\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{sen\,\varphi} \end{cases}$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{sen\,\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{sen\,\varphi}$$

<u>sec</u> em função da <u>tg</u>.

$$tg\,\varphi = \frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi}$$

$$tg\,\varphi = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

observar $\left\{ tg\,\varphi = \dfrac{\pm\sqrt{1-\frac{1}{\sec^2\varphi}}}{\frac{1}{\sec\varphi}} = \dfrac{\frac{\sqrt{\sec^2\varphi-1}}{\cancel{\sec\varphi}}}{\frac{1}{\cancel{\sec\varphi}}} \right.$

$$tg\,\varphi = \pm\sqrt{\sec^2\varphi - 1}$$

$$tg^2\varphi = \sec^2\varphi - 1$$

$$\sec^2\varphi = 1 + tg^2\varphi$$

$$\sec\varphi = \pm\sqrt{1 + tg^2\varphi}$$

sen $\rightarrow$ sec.

$$sen\,\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

$$sen\,\varphi = \pm\sqrt{1\ \frac{1}{\sec^2\varphi}}$$

$$sen\,\varphi = \pm\sqrt{\frac{\sec^2\varphi - 1}{\sec^2\varphi}}$$

$$sen\,\varphi = \frac{\pm\sqrt{\sec^2\varphi - 1}}{\sec\varphi}$$

24/4/64.

$Sen\,\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (φ do 2º quadrante). Calcular as demais funções trigonométricas

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - sen^2\varphi}$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$$

$\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$ (menos $\dfrac{1}{2}$)

$$tg\,\varphi = \frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$cotg\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{sen\,\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$tg\,\varphi = 3/4$ $\quad\varphi \rightarrow$ no 1º quadrante.

$$\frac{sen\,\varphi}{\cos\varphi} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{9}{16}$$

$$16 - 16\cos^2\varphi = 9\cos^2\varphi$$

$$16 = 25\cos^2\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{16}{25}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{4}{5}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\sec = \frac{1}{\cos}$$

$$\operatorname{cosec} = \frac{1}{\operatorname{sen}}$$

$$\operatorname{cotg} = \frac{1}{\operatorname{tg}}$$

—— // ——

Duas funções são inversas uma da outra, quando o produto delas fôr igual a (1) <u>um</u>

$$\operatorname{tg} = \frac{1}{\operatorname{cotg}} \qquad \operatorname{cotg} \times \operatorname{tg} = \operatorname{cotg} \frac{1}{\operatorname{cotg}} = 1$$

sen: + + − −

cos: + − − +

tg: + − + −

cotg: + − + −

sec: + − − +

cosec: + + − −

$\sec \alpha = \frac{5}{2}$ $\alpha \rightarrow$ no 4º quadrante.

$$\cos \alpha = \frac{2}{5}$$

—— // ——

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{1}{1} \times \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{21}} = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$$

$$-\frac{a}{-b} = \frac{a}{b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

$$-\frac{-a}{b} = \frac{a}{b} \qquad -\frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

2 grandezas são simétricas quando têm os mesmos valores absolutos; e sinais contrários

O valor absoluto de uma quantidade é o inverso do valor absoluto da outra.

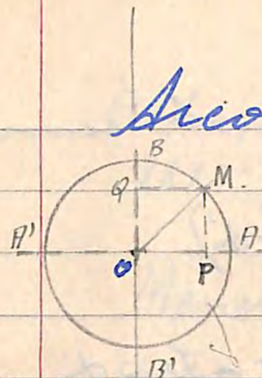
1ª sabatina:

27-4-64.

1) Arcos complementares
2) Arcos suplementares
3) Arcos que diferem de uma semi-circunferência
4) Arcos simétricos

1º) Arcos cuja soma é 90°
2º) Arcos cuja soma é 180°
3) Arcos cuja diferença é 180°
4) Arcos cuja soma é $\underline{0}$ (zero)

Arcos complementares.



$\overline{MB}$ é o complemento do $\overline{AM}$

$\overline{MP} = \text{sen}\,\overline{AM}$

$\Delta\, OQM$

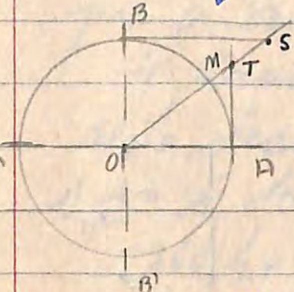
$\cos(90-\alpha) = \dfrac{\overline{OQ}}{OM} = OQ = \text{sen}\,\alpha.$

$\text{sen}(90-\alpha) = \dfrac{\overline{OP}}{OM} = \overline{OP} = \cos\alpha$

$\cos(90-\alpha) = \text{sen}\,\alpha.$

$\text{sen}(90-\alpha) = \cos\alpha.$

$\text{cotg}\,(90-\alpha = \text{tg}\,\alpha.$

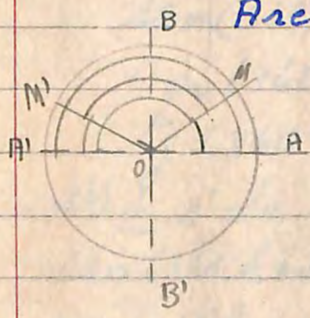


$\Delta\, OAT$

$\text{tg}\,\underline{\varphi} = \dfrac{AT}{OA}$ $\qquad \varphi = \alpha$

$\text{cotg}\,(90-\alpha) = \dfrac{\overline{OB}}{BS}$

Arcos suplementares:



α e $\pi-\alpha$

$\text{Sen}(\pi-\alpha) = \text{Sen}\,\alpha$

$\text{Cos}\,(\pi-\alpha) = -\text{Cos}\,\alpha.$

$\text{Tg}\,(\pi-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$

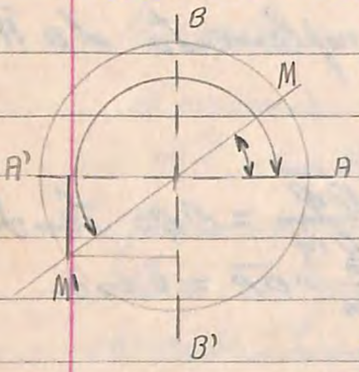
$\text{cotg}\,(\pi-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$

$\sec(\pi-\alpha) = -\sec\alpha$

$\text{cosec}(\pi-\alpha) = \text{cosec}\,\alpha.$

Arcos que diferem de uma semi-circunferência

$\alpha = (\pi + \alpha')$



$\operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$.

$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(\pi+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

$\operatorname{cosec}(\pi+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$.

4-5-64.

<u>Arcos simétricos</u>:

$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

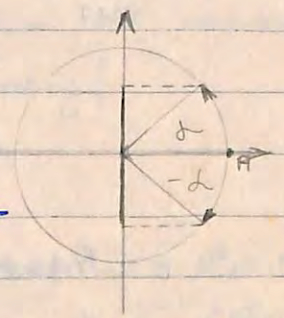
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

$\sec(-\alpha) = +\sec\alpha$

$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$



Redução ao 1º quadrante.

9872° $9872° \div 360° = 27°$
$152°$

Menor determinação positiva do arco: 152°

Para reduzir um arco ao 1º quadrante divide-se o arco por 360°, desconsiderando-se o quociente e toma-se o resto desta divisão. Êste arco que é o resto tem as mesmas linhas trigonométricas que o arco dado.

4 casos podem ocorrer com o resto desta divisão: (resto = α).

1) <u>α</u> é do primeiro quadrante.

$360°k + \alpha = \overset{\frown}{AM}$

$\operatorname{sen}(360°k+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(360°k+\alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(360°k+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

2º) <u>α</u> é do segundo quadrante: $360°k+\alpha = \overset{\frown}{AM}$

$\operatorname{sen}(360°k+\alpha) = \operatorname{sen}(180°-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(360°k+\alpha) = \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{tg}(360°k+\alpha) = \operatorname{tg}(180°-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

$sen\ 840° = sen\ 120° = sen\ (180° - 120°) = sen\ 60°$

$cos\ 840° = cos\ 120° = cos\ (180° - 120°) = - cos\ 60°$

3) $\underline{\alpha}$ é do terceiro quadrante.

$360°\,k + \alpha = \widehat{AM}$ $\qquad \alpha - 180° = \varphi$

$sen\ (360°k + \alpha) = sen(\alpha - 180°) = - sen\ \varphi$

$cos\ (360°k + \alpha) = cos\ (\alpha - 180°) = - cos\ \varphi$

$tg\ (360°k + \alpha) = tg\ (\alpha - 180°) = tg\ \varphi$

$sen\ 1300° = sen\ 220° = sen(220° - 180°) = - sen\ 40°$

$cos\ 1300° = cos\ 220° = cos\ (220° - 180°) = - cos\ 40°$

$tg\ 1300° = tg\ 220° = tg\ (220° - 180°) = tg\ 40°$

4) $\underline{\alpha}$ é do quarto quadrante.

$360°k + \alpha = \widehat{AM}$.

$sen(360°k + \alpha) = sen\ (360° - \alpha) = sen(-\alpha) = - sen\,\alpha$.

$cos(360°k + \alpha) = cos(360° - \alpha) = cos\ (-\alpha) = cos\,\alpha$.

$tg(360°k + \alpha) = tg(360° - \alpha) = tg(-\alpha) = - tg\,\alpha$.

$sen\ 2100° = sen\ 300° = sen(-60) = - sen\ 60°$

6-5-64.

$sen\ 2100° = sen\ 300° = sen(-60) = - sen\,60°$

$cos\ 2100° = cos\ 300° = cos(-60) = cos\ 60°$

$tg\ 2100° = tg\ 300° = tg(-60) = - tg\ 60°$

$\frac{17\pi}{3}$ reduzir ao 1º quadrante.

$$\frac{17\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$sen\,\frac{17\pi}{3} = sen(6\pi - \frac{\pi}{3}) = sen\,(-\frac{\pi}{3}) = - sen\,\frac{\pi}{3}$$

$$cos\,\frac{17\pi}{3} = cos(6\pi - \frac{\pi}{3}) = cos(-\frac{\pi}{3}) = cos\,\frac{\pi}{3}$$

$$tg\ \frac{17\pi}{3} = tg\,(6\pi - \frac{\pi}{3}) = tg(-\frac{\pi}{3}) = - tg\ \frac{\pi}{3}$$

$\frac{29\pi}{4}$ reduzir ao 1º quadrante.

$$\frac{29\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 7\pi + \frac{\pi}{4} = \cancel{6\pi} + \pi + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$sen\,\frac{29\pi}{4} = sen\ (\pi + \frac{\pi}{4}) = - sen\ \frac{\pi}{4}$$

$$cos\ \frac{29\pi}{4} = cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = - cos\ \frac{\pi}{4}$$

$$tg\ \frac{29\pi}{4} = tg\ (\pi + \frac{\pi}{4}) = tg\ \frac{\pi}{4}$$

$\frac{72\pi}{7}$: Reduzir ao 1º quadrante.

$$\frac{72\pi}{7} = \frac{70\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} = 10\pi + \frac{2\pi}{7}$$

$sen\frac{72\pi}{7} = sen\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

$cos\frac{72\pi}{7} = -cos\frac{2\pi}{7}$

$tg\frac{72\pi}{7} = tg\frac{2\pi}{7}$

$\frac{27\pi}{4}$: reduzir ao 1º quadrante.

$\left(\frac{27\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)$

$\frac{27\pi}{4} = \frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 7\pi - \frac{\pi}{4} = \cancel{6\pi} + \pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$

$sen\frac{27\pi}{4} = sen\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) = sen\frac{\pi}{4}$

$cos\frac{27\pi}{4} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{\pi}{4}$

$tg\frac{27\pi}{4} = tg\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4}$

Simplificar a seguinte expressão.

$$\frac{Tg\frac{27\pi}{4} \times cosec\frac{3\pi}{4} \times cotg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) \times tg\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{2\pi}{18}\right)}$$

a) $tg\frac{27\pi}{4} = tg\left(\frac{28\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4}$

b) $cosec\frac{3\pi}{4} = -cosec\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -cosec\frac{\pi}{4}$

c) $cotg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = tg\frac{\pi}{4}$

//

a') $sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -sec\frac{\pi}{4}$

b') $tg\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{2\pi}{16}\right) = tg\frac{3\pi}{8}$

//

$$\frac{-tg\frac{\pi}{4} \times -cosec\frac{\pi}{4} \times tg\frac{\pi}{4}}{sec\frac{\pi}{4} \times cotg\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{sen\frac{\pi}{4}}{cos\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{sen\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{sen\frac{\pi}{4}}{cos\frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{cos\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{cos\frac{\pi}{8}}{sen\frac{\pi}{8}}} = \frac{tg\frac{\pi}{4}}{cotg\frac{\pi}{8}} = \frac{\cancel{tg}\frac{\pi}{4} \cdot tg\frac{\pi}{8}}{1} =$$

$$\boxed{= tg\frac{\pi}{8}}$$

11-5-64.

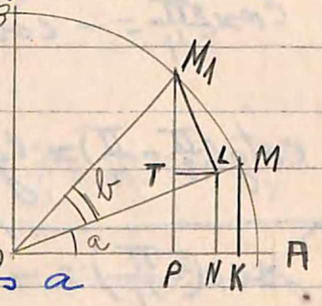
Adição de arcos.

Dados as linhas trigonométricas de dois arcos.

Calcular as linhas do:

$sen(a+b) = \overline{M_1P} = \overline{M_1T} + \overline{TP} = \overline{M_1T} + \overline{LN}$

$\overline{M_1T}$.



$\Delta M_1TL \sim \Delta OMK$

$\frac{\overline{M_1T}}{\overline{M_1L}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OM}} \quad \overline{M_1T} =$

$= \frac{\overline{M_1L} . \overline{OK}}{\overline{OM}} = sen\ b . cos\ a$

$\boxed{\overline{M_1T} = sen\ b . cos\ a}$

$\Delta OLN \sim \Delta OMK$

$\frac{\overline{LN}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{OM}} \quad \overline{LN} = \frac{\overline{OL} . \overline{MK}}{\overline{OM}} =$

$= cos\ b . sen\ a.$

$\boxed{\overline{LN} = cos\ b . sen\ a}$

$\boxed{sen(a+b) = sen\ b . cos\ a + cos\ b + sen\ a}$

$sen\ a+(-b) = sen(-b) . cos\ a + cos(-b) . sen\ a$

$sen[(a-b)] = cos\ b . sen\ a - sen\ b * cos\ a$

$sen(a \pm b) = sen\ a . cos\ b \pm sen\ b . cos\ a.$

$Cos(a+b) = \overline{OP} = \overline{ON} - \overline{PN} = \overline{ON} - TL.$

$\Delta ONL \sim \Delta OMK.$

$\frac{\overline{ON}}{\overline{OL}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OM}} \quad \overline{ON} = \frac{\overline{OL} . \overline{OK}}{\overline{OM}} = cos\ b . cos\ a.$

$\boxed{\overline{ON} = cos\ a . cos\ b}$

$\Delta M_1TL \sim \Delta OMK$

$\frac{\overline{TL}}{\overline{M_1L}} = \frac{\overline{MK}}{\overline{OM}} \quad TL = \frac{\overline{M_1L} . \overline{MK}}{\overline{OM}} = sen\ b . sen\ a$

$\boxed{\overline{TL} = sen\ a . sen\ b}$

$\boxed{cos(a+b) = cos\ a . cos\ b - sen\ a . sen\ b}$

$cos[a+(-b)] = cos\ a . cos(-b) - sen\ a . sen(-b).$

$Cos(a-b) = cos\ a . cos\ b + sen\ a\ sen\ b$

$cos(a \pm b) = cos\ a . cos\ b \mp sen\ a . sen\ b.$

$tg(a+b = \frac{sen(a+b}{cos(a+b)} = \frac{sen\ a . cos\ b + sen\ b . cos\ a}{cos\ a . cos\ b - sen\ a . sen\ b.}$

13-5-64.

$$tg(a+b)=\frac{sen(a+b)}{cos(a+b)}=\frac{sen\,a.cos\,b+sen\,b.cos\,a}{cos\,a.cos\,b-sen\,a.cos\,b}$$

$$tg(a+b)=\frac{\dfrac{sen\,a\,\cancel{cos\,b}+sen\,b.\cancel{cos\,a}}{cos\,a\,\cancel{cos\,b}+\cancel{cos\,a}.cos\,b}}{\dfrac{\cancel{cos\,a.cos\,b}}{\cancel{cos\,a.cos\,b}}-\dfrac{sen\,a.sen\,b}{cos\,a.cos\,b}}=\frac{\dfrac{sen\,a}{cos\,a}+\dfrac{sen\,b}{cos\,b}}{1-\dfrac{sen\,a.sen\,b}{cos\,a.cos\,b}}=$$

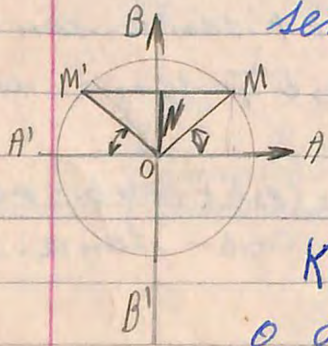
$$=\frac{tg\,a+tg\,b}{1-tg\,a.tg\,b}$$

$$tg[a+(-b)]=\frac{tg\,a+tg(-b)}{1-tg\,a.tg(-b)}=\frac{tg\,a-tg\,b}{1+tg\,a.tg\,b}$$

20-7-64

Expressões gerais das soluções das equações trigonométricas

1º caso:



$sen\,u = N \qquad N>0$

$u = 2K\pi + \overset{\frown}{AM}$

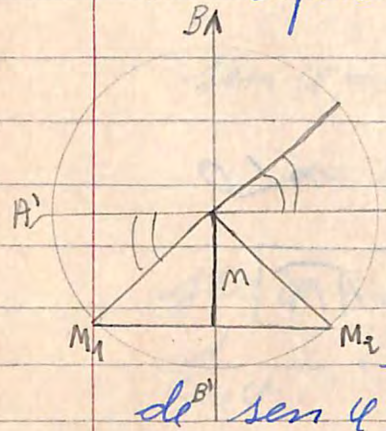
$u = (2K+1)\pi - \overset{\frown}{AM}$

número par = 2K

K= número de voltas que o arco dá na circunferência.

$$\boxed{u = (K\pi + (-1)^K.\overset{\frown}{AM}}$$

Expressão geral da solução de todos os arcos do 1º e 2º quadrante da equação.

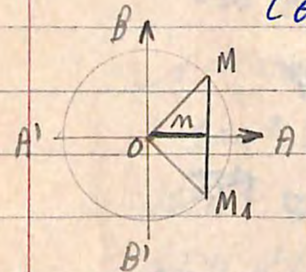


$Sen\,u = n \qquad n<0$

$$\begin{cases} u=(2K+1)\pi+\overset{\frown}{AM} \\ u=2K\pi-\overset{\frown}{AM} \end{cases}$$

$$\boxed{u = K\pi-(-1)^K.\overset{\frown}{AM}}$$

solução da equação de sen u, sen u = n, sendo n negat.

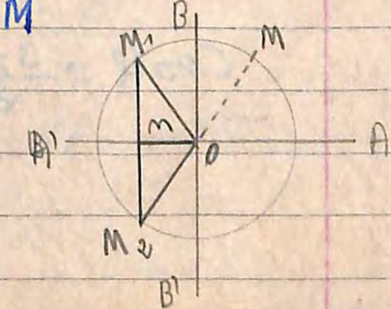


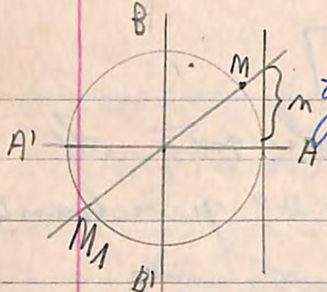
$Cos\,u = n \qquad n>0$

$u = 2K\pi \pm \overset{\frown}{AM}$

$cos\,u = n \qquad n<0$

$u=(2K+1)\pi \pm \overset{\frown}{AM}$





$tg\,\varphi = n \qquad n > 0$

$\varphi = K\pi + \overset{\frown}{AM}$

$tg\,\varphi = n \qquad n < 0$

$\boxed{\varphi = K\pi - \overset{\frown}{AM}}$

25-5-64.

$3(1-\cos\varphi) = sen^2\varphi.$

$3(\quad 3 - 3\cos\varphi = sen^2\varphi$

$3 - 3\cos\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$3 - 3\cos\varphi - 1 + \cos^2\varphi = 0$

$\cos^2\varphi - 3\cos\varphi + 2 = 0$

$\cos\varphi = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$\cos\varphi = \dfrac{3-1}{2} = 1$

$\cos\varphi = 2K\pi$

$2\cos^2\varphi + 7\,sen\,\varphi = 5$

$2(1 - sen^2\varphi) + 7\,sen\,\varphi = 5$

$2\,sen^2\varphi - 7\,sen\,\varphi + 3 = 0$

$sen\,\varphi = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4}$

$sen\,\varphi = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{2}{4} = 0,5$

$\varphi = K\pi + (-1)^K \cdot \dfrac{\pi}{6}$

—//—

$sec\,\varphi - \cos\varphi = sen\,\varphi$

$\dfrac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi = sen\,\varphi$

$\dfrac{1-\cos^2\varphi}{\cos\varphi} = sen\,\varphi$

$1 - \cos^2\varphi = sen\,\varphi \cdot \cos\varphi$

$sen^2\varphi = \cos\varphi \cdot sen\,\varphi$

$sen^2\varphi - sen\,\varphi \cdot \cos\varphi = 0$

$sen\,\varphi\,(sen\,\varphi - \cos\varphi) = 0$

$\downarrow$

$0 \qquad \underline{sen\,\varphi = 0}$

$sen\,\varphi - \cos\varphi = 0 \qquad \varphi = K\pi$

$sen\,\varphi = \cos\varphi$

$\varphi = K\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$3\,tg^2\varphi + 5 = 7\sec\varphi$

$3(\sec^2\varphi - 1) + 5 = 7\sec\varphi$

$3\sec^2\varphi - 3 + 5 - 7\sec\varphi = 0$

$3\sec^2\varphi - 7\sec\varphi + 2 = 0$

$2\cos^2\varphi - 7\cos\varphi + 3 = 0$

$\sec\varphi = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6}$

$\sec\varphi = \frac{7+5}{6} = 2$

$\cos\varphi \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$

$\varphi = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}.$

26-5-64.

$sen\,\varphi + \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\cos^2\varphi} + \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\varphi$

$1 - \cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \cos^2\varphi - \sqrt{2}\cos\varphi$

$1 - \cos^2\varphi - \frac{1}{2} - \cos^2\varphi + \sqrt{2}\cos\varphi = 0$

$-2\cos^2\varphi + \frac{1}{2} + \sqrt{2}\cos\varphi = 0 \; \cancel{(\cdot 1)}$

$-4\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi + 1 = 0 \; (-1)$

$4\cos^2\varphi - 2\sqrt{2}\cos\varphi - 1 = 0$

$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{4ac}}{2a} \quad \cos\varphi = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+16}}{8}$

$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6}}{8} \; (\div 2) \therefore$

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{4}$

$\cos\varphi = \frac{1{,}4142 \pm 2{,}45}{4}$

$\cos\varphi = \frac{-1{,}04}{4} = -0{,}251.$

$\varphi = 2K\pi \pm 5^\circ$

$\varphi = (2K+1)\pi \pm 80^\circ$

— // —

$sen\,\varphi + \cos\varphi\,\varphi = 2$

$sen\,\varphi + \frac{1}{sen\,\varphi} = 2 \therefore \; sen^2\varphi + 1 = 2\,sen\,\varphi$

$sen^2\varphi - 2\,sen\,\varphi + 1 = 0$

$\varphi = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \quad \varphi = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$

$\varphi = 2K\pi + \frac{\pi}{2}.$

— // —

$Tg\,\varphi = -\cot g\,\varphi$

$Tg\,\varphi = -\frac{1}{tg\,\varphi} \quad tg^2\varphi = -1$ (impossivel

$tg^2\varphi + 1 = 0$

$tg\,\varphi = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2}$

$$2\cos^2\varphi = 3\cos^2\varphi$$
$$2\cos^2\varphi = 3(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi)$$
$$2\cos^2\varphi - 3\cos^2\varphi + 3\operatorname{sen}^2\varphi = 0$$
$$-\cos^2\varphi + 3(1-\cos^2\varphi) = 0$$
$$-\cos^2\varphi + 3 - 3\cos^2\varphi = 0 \quad (-1)$$
$$4\cos^2\varphi - 3 = 0$$
$$\cos^2\varphi = \frac{3}{4} \qquad \cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$\varphi = K\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

— // —

$$Tg\,\varphi = 4\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = 4\operatorname{sen}^2\varphi$$
$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} - 4\operatorname{sen}^2\varphi = 0 \qquad \operatorname{sen}\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 4\operatorname{sen}\varphi\right) = 0$$
$$\operatorname{sen}\varphi = 0$$
$$\frac{1}{\cos\varphi} - 4\operatorname{sen}\varphi = 0$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}} = 4\operatorname{sen}\varphi$$
$$\frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\varphi} = 16\operatorname{sen}^2\varphi \therefore 1 = 16\operatorname{sen}^2\varphi - 16\operatorname{sen}^4\varphi$$
$$16\operatorname{sen}^4\varphi - 16\operatorname{sen}^2\varphi + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{16 \pm \sqrt{256-64}}{32}$$
$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{16 \pm \sqrt{192}}{32}$$
$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{16 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \boxed{\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}}$$
$$\operatorname{sen}\varphi = \pm\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{3}}}{4}$$
$$\varphi = K\pi + 75°$$
$$\varphi = K\pi + 15°$$

27/5/64.

Identidade:

Se verifica para todo e qualquer valor de φ.

$$\sec 2\varphi = \frac{\sec^2\varphi}{1-tg^2\varphi}$$
$$\frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}}{1-\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$
$$\frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}}{\frac{\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$
$$\frac{1}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi}$$
$$\frac{1}{\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi}$$
$$1 - 1 = 0 \qquad 0 = 0$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen} a}{1+\cos a} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{(1+\cos a)^2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

$$\frac{1-\cos^2 a}{(1+\cos a)^2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

$$(1-\cos^2 a)(1+\cos a) = (1+\cos^2 a)^2(1\cos a).$$

$$\cancel{1}-\cancel{\cos^2} a = \cancel{1}-\cos^2 a$$

$$0 = 0$$

$$\operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cotg} 2a = \operatorname{cotg} a$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 2a} + \frac{\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{1+\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{1+\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{2\,\cancel{\operatorname{sen} a}\cdot\cos a} = \frac{\cos a}{\cancel{\operatorname{sen} a}}$$

$$\frac{1+\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{2\cos a} = \cancel{\cos}\, a$$

$$1+\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a$$

$$1-\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - \cos^2 a.$$

$$1-\operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a$$

$$\cos^2 a = \cos^2 a.$$

$$\operatorname{tg}(45-a)+\operatorname{tg}(45+a) \equiv 2\sec 2a.$$

$$\frac{\operatorname{tg}45-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}45\cdot\operatorname{tg}a} + \frac{\operatorname{tg}45+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}45\times\operatorname{tg}a} = 2\sec 2a.$$

$$\frac{1-\operatorname{tg}a}{1+\operatorname{tg}a} = \frac{1+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a} = 2\sec 2a.$$

$$\frac{(1-\operatorname{tg}a)^2+(1+\operatorname{tg}a)^2}{1-\operatorname{tg}^2 a} = 2\sec 2a.$$

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 a-\cancel{2\operatorname{tg}a}+1+\operatorname{tg}^2 a+\cancel{2\operatorname{tg}a}}{1-\operatorname{tg}^2 a} = 2\operatorname{sen} 2a$$

2

$$\frac{2+2tg^2a}{1-tg^2a} = 2\sec 2a.$$

$$\frac{\cancel{2}+\cancel{2}tg^2a}{1-tg^2a} = \frac{\cancel{2}}{\cos 2a}$$

$$\frac{1+tg^2a}{1-tg^2a} = \frac{1}{\cos^2 a - sen^2 a}.$$

$$\frac{1+\frac{sen^2a}{\cos^2a}}{1-\frac{sen^2a}{\cos^2a}} = \frac{1}{\cos^2a - sen^2a}$$

$$\frac{\frac{\cos^2a+sen^2a}{\cos^2a}}{\frac{\cos^2a - sen^2a}{\cos^2a}} = \frac{1}{\cos^2a - sen^2a}$$

$$\frac{1}{\cos^2a - sen^2a} \equiv \frac{1}{\cos^2a - sen^2a}$$

2/6/64.

Identidade:

$$\cos^2 u + tg^2 u \cdot \cos^2 u = 1$$

$$\cos^2 u + \frac{sen^2 u}{\cos^2 u} \cdot \cos^2 u = 1$$

$$\cos^2 u + sen^2 u = 1$$

$$1 = 1$$

$sen\, u = \frac{1}{2}$

$u = 2K\pi + \frac{\pi}{6}$ = côngruos de $\overset{\frown}{AM}$.

$u = (2K+1)\pi - \frac{\pi}{6}$ = côngruos de $\overset{\frown}{AM_1}$

$u = K\pi + (-1)^K \cdot \frac{\pi}{6}$

$sen\, u = -\frac{1}{2} \qquad u = K\pi - (-1)^K \cdot \frac{\pi}{3}$

	Sen.	Cos.	tg.	cotg.	sec.	cosec.
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$				2
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2			2	
90°	1	0	∞	0	∞	1

$sen\, 2u = 2\, sen\, u \cdot \cos u$

$\cos 2u = \cos 2u - sen 2u$

$tg\, 2u = \frac{2tg\, u}{1-tg^2 u}$

$sen(a \pm b) = sen \pm sen\, b$

$cos(a \pm b) = cos\, a . cos\, b \mp sen\, a . sen\, b.$

$tg(a \pm b) = \frac{tg\, a \pm tg\, b}{1 \mp tg\, a . tg\, b}.$

3-6-64.

Simplificação

$sen \frac{21\pi}{2} + tg(\pi - a) . tg(\frac{3\pi}{2} + a).$

$sen(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) + tg(\pi - a) . tg(\frac{3\pi}{2} + a)$

$sen \frac{\pi}{2} + tg(\pi - a) . tg(\frac{3\pi}{2} + a)$

$1 + (-tg\, a)[-tg(\frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + a)]$

$1 + (-tg\, a) . [-tg(\frac{\pi}{2} - a)]$

$1 + (-tg\, a) . (-cotg\, a$

$1 + 1 = 2$

$(sen\, a + cos\, a)^2 = 1 + 2\, sen\, a . cos\, a$

$sen^2 a + cos^2 a \mp 2\, sen\, a . cos\, a =$

$= 1 + 2\, sen\, a . cos\, a.$

$(sen\, a + cos\, a)^2 - (sen\, a - cos\, a)^2 =$

$= 2\, sen\, 2a$

$sen^2 a + cos^2 a - (sen^2 a + cos^2 a -$

$- 2\, sen\, a\, cos\, a) = 2\, sen\, 2a$

$\cancel{sen^2 a} + \cancel{cos^2 a} - \cancel{sen^2 a} - \cancel{cos^2 a} + 2\, sen\, a$

$. cos\, a = 2\, sen\, 2a$

$4\, sen\, a . cos\, a = 2\, sen\, 2a$

$2\, sen\, a . cos\, a = sen\, 2a$

$sen\, 2a = sen\, 2a.$

— // —

$sec\, 2a = \frac{cotg^2 a + 1}{cotg^2 a - 1}$

$\frac{1}{cos\, 2a} = \frac{1}{cos^2 a - sen^2 a}$

$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{\frac{cos^2 a}{sen^2 a} + 1}{\frac{cos^2 a}{sen^2 a} - 1}$

$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{\frac{cos^2 a + sen^2 a}{\cancel{sen^2 a}}}{\frac{cos^2 a - sen^2 a}{\cancel{sen^2 a}}}$

$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{cos^2 a + sen^2 a}{cos^2 a - sen^2 a}.$

$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{1}{cos^2 a - sen^2 a}$

$$\frac{\cos 2a}{1+\operatorname{sen} 2a}=\frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}$$

$$\frac{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{1+2\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}=\frac{1-\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}{1+\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}$$

$$\frac{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{1+2\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}=\frac{\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\cancel{\cos a}}}{\frac{\cos a+\operatorname{sen} a}{\cancel{\cos a}}}$$

$$\frac{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{1+2\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a}=\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\cos a+\operatorname{sen} a}$$

$\cos^3 a-\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos a+\operatorname{sen} a\cdot\cos^2 a-$
$-\operatorname{sen}^3 a=\cos a-\operatorname{sen} a+2\operatorname{sen} a\cdot\cos^2 a-$
$-2\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 a.$

$$\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$$

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}$$

$$tg\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$$

$\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen}2a=\operatorname{sen} a\cdot\cos a+$
$+\operatorname{sen} a\cdot\cos a=2\operatorname{sen} a\cdot\cos a.$

$\cos(a+a)=\cos 2a=\cos a\cdot\cos a-$
$-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a.$

$$tg(a+a)=tg\,2a=\frac{tg\,a+tg\,a}{1-tg\,a\cdot tg\,a}=\frac{2\,tg\,a}{1-tg^2 a}$$

9-6-64.

$$\frac{\cos 2a}{1+\operatorname{sen}2a}=\frac{1-tg\,a}{1+tg\,a}=\frac{1-\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}{1+\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}}$$

$$\frac{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{1+\operatorname{sen}2a}=\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\cos a+\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a}{1+\operatorname{sen}2a}=\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\cos a+\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{(\cos a+\operatorname{sen} a)(\cos a-\operatorname{sen} a)}{1+\operatorname{sen}2a}=\frac{\cos a-\operatorname{sen} a}{\cos a+\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{\cos a+\operatorname{sen} a}{1+\operatorname{sen}2a}=\frac{1}{\cos a+\operatorname{sen} a}$$

$$(\cos a+\operatorname{sen} a)^2=1+\operatorname{sen}2a$$

$\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen} a\cdot\cos a=1+\operatorname{sen}2a$

$\cancel{1}+2\operatorname{sen} a\cdot\cos a=\cancel{1}+\operatorname{sen}2a$

$2\operatorname{sen} a\cdot\cos a=\operatorname{sen}2a.$

$$1 + tg\,a \cdot tg\,2a = sec\,2a$$

$$1 + tg\,a \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a} = \frac{1}{cos\,2a} = sec\,2a$$

$$1 + \frac{2\,tg^2 a}{1 - tg^2 a} = sec\,2a$$

$$\frac{1 - tg^2 a + 2\,tg^2 a}{1 - tg^2 a} = sec\,2a$$

$$\frac{1 + tg^2 a}{1 - tg^2 a} = sec\,2a$$

$$\frac{1 + \frac{sen^2 a}{cos^2 a}}{1 - \frac{sen^2 a}{cos^2 a}} = sec\,2a$$

$$\frac{\frac{cos^2 a + sen^2 a}{\cancel{cos^2 a}}}{\frac{cos^2 a - sen^2 a}{\cancel{cos^2 a}}} = sec\,2a$$

$$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{1}{cos\,2a}.$$

$$\frac{1}{cos^2 a - sen^2 a} = \frac{1}{cos^2 a - sen^2 a}$$

$$Tg\,(45° + a) + tg\,(45° - a) = 2\,sec\,2a$$

$$\frac{tg\,45° + tg\,a}{1 - tg\,45° \cdot tg\,a} + \frac{tg\,45 - tg\,a}{1 + tg\,45 \cdot tg\,a} = 2\,sec\,2a$$

$$\frac{1 + tg\,a}{1 - tg\,a} + \frac{1 - tg\,a}{1 + tg\,a} = 2\,sec\,2a.$$

$$\frac{(1 + tg\,a)^2 + (1 - tg\,a)^2}{(1 - tg\,a)} = 2\,sec\,2a$$

$$\frac{1 + tg^2 a + \cancel{2\,tg\,a} + 1 + tg^2 a - \cancel{2\,tg\,a}}{1 - tg^2 a} = 2\,sec\,2a$$

$$\frac{\cancel{2} + \cancel{2}\,tg^2 a}{1 - tg^2 a} = \cancel{2}\,sec\,2a$$

$$\frac{1 + tg^2 a}{1 - tg^2 a} = sec\,2a$$

$(1+tg\,a+\sec a)(1+tg\,a-\sec a)=\operatorname{sen}2a\cdot\sec^2 a$

$[(1+tg\,a)+\sec a][(1+tg\,a)-\sec a]=\operatorname{sen}2a\,\sec^2 a$

$(1+tg)^2-\sec^2 a=\operatorname{sen}2a\cdot\sec^2 a$

$(1+tg)^2-(1+tg^2 a)=\operatorname{sen}2a\cdot\sec^2 a$

$\cancel{1}+tg^2 a+2tg\,a-\cancel{1}-\cancel{tg^2 a}=\operatorname{sen}2a\cdot\sec^2 a$

$2\,tg\,a=\operatorname{sen}2a\,\sec^2 a$

$2\,tg\,a=2\operatorname{sen}a\,\dfrac{1}{\cos a}$

$2\,tg\,a=2\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}$

$2\,tg\,a=2\,tg\,a.$

10-6-64

$y=\dfrac{\sec^2\varphi-\sec\varphi\cdot\operatorname{cosec}\varphi}{1+\cot g\,\varphi}$ $\qquad\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$

$\operatorname{sen}\varphi=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\sqrt{\dfrac{15}{16}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ φ do 4º quadr.

$y=\dfrac{16-4\cdot\frac{-4}{\sqrt{15}}}{1-\frac{1}{\frac{4}{\frac{-\sqrt{15}}{4}}}}=\dfrac{16+\frac{16}{\sqrt{15}}}{1+\frac{1}{\sqrt{15}}}$

$y=\dfrac{16\sqrt{15}+16}{\sqrt{15}+1}=\dfrac{16\cancel{(\sqrt{15}+1)}}{\cancel{\sqrt{15}+1}}=16$

$\operatorname{cosec}2a-5\cot g\,2a=3\,tg\,a-2\cot g\,a.$

$\dfrac{1}{\operatorname{sen}2a}-5\dfrac{\cos 2a}{\operatorname{sen}2a}=3\,tg\,a-2\cot g\,a$

$\dfrac{1-5\cos 2a}{\operatorname{sen}2a}=3\dfrac{\operatorname{sen}a}{\cos a}-2\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen}a}$

$\dfrac{1-5\cos 2a}{\cancel{\operatorname{sen}2a}}=\dfrac{2(3\operatorname{sen}^2 a-2\cos^2 a}{\cancel{2\cos a\operatorname{sen}a}}$

$1-5(\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=6\operatorname{sen}^2 a-4\cos^2 a$

$1-5\cos^2 a+5\operatorname{sen}^2 a=6\operatorname{sen}^2 a-4\cos^2 a.$

$1-\cancel{5}\cos^2 a+\cancel{5\operatorname{sen}^2 a}-\cancel{6}\operatorname{sen}^2 a+\cancel{4\cos^2 a}=0$

$1-\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=0$

$1=\cos^2 a+\operatorname{sen}^2 a$

$1\equiv 1$

$(\sec\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{cosec}\varphi\cdot\cos\varphi)(tg\,\varphi-\cot g\,\varphi)=tg^2\varphi-\cot g^2\varphi.$

$(\sec\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{cosec}\varphi\cdot\cos\varphi)\cancel{(tg\,\varphi-\cot g\,\varphi)}=$
$=(tg\,\varphi+\cot g\,\varphi)\cancel{(tg\,\varphi-\cot g\,\varphi)}$

$\sec\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{cosec}\varphi\cdot\cos\varphi=tg\,\varphi+\cot g\,\varphi$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\cdot \operatorname{sen}\varphi+\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\cdot\cos\varphi=tg\varphi+cotg\,\varphi$$

$$tg\varphi+cotg\,\varphi=tg\varphi+cotg\,\varphi.$$

Simplificar

$$tg\,a+\frac{cotg\,a}{2}-\frac{cotg}{2}\,sec\,a=$$

$$=tg\,a+cotg\frac{a}{2}(1-sec\,a)=$$

$$=tg\,a+\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}\,(1-sec\,a)=$$

$$\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}+\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}\left(1-\frac{1}{\cos a}\right)=$$

$$=\left[\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}+\sqrt{\frac{1+\cos a}{1-\cos a}}\left(\frac{\cancel{1}\cos a-1}{\cos a}\right)\right](-1)=$$

$$=-\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}-\sqrt{\left(\frac{1+\cos a}{1-\cos a}\right)\left(1-\frac{1}{\cos a}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos a}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}-\sqrt{(1+\cos a)(1-\cos a)}\cdot\frac{1}{\cos a}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}-\operatorname{sen}a\cdot\frac{1}{\cos a}=$$

$$\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}-\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}=0$$

11-6-64.

$$\frac{1+tg\,a}{1-tg\,a}=\frac{\operatorname{sen}a+\cos a}{\cos a-\operatorname{sen}a}$$ (identidad

$$\frac{1+\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}}{1-\frac{\operatorname{sen}a}{\cos a}}=\frac{\cos a+\operatorname{sen}a}{\cos a-\operatorname{sen}a}$$

$$\frac{\frac{\cos a+\operatorname{sen}a}{\cancel{\cos a}}}{\frac{\cos a-\operatorname{sen}a}{\cancel{\cos a}}}=\frac{\cos a+\operatorname{sen}a}{\cos a-\operatorname{sen}a}$$

$$\frac{\cos a+\operatorname{sen}a}{\cos a-\operatorname{sen}a}=\frac{\cos a+\operatorname{sen}a}{\cos a-\operatorname{sen}a}$$

—— // ——

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}=1+2tg^2\varphi$$

$$\cancel{1+\operatorname{sen}^2\varphi}\quad\frac{1+\operatorname{sen}^2\varphi}{1-\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi+2\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\cos^2\varphi=\cos^2\varphi+2\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\varphi\cdot\cos^2\varphi-2\operatorname{sen}^4\varphi$$

$$2\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}^2\varphi+2\operatorname{sen}^4\varphi=0$$

$$2(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\cdot\operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}^2\varphi+2\operatorname{sen}^4\varphi=0$$

$$2\cancel{+}(2\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}^2\varphi+2\operatorname{sen}^4\varphi=0$$

$$\cancel{2\operatorname{sen}^2\varphi}-\cancel{2\operatorname{sen}^4\varphi}-\cancel{2\operatorname{sen}^2\varphi}+\cancel{2\operatorname{sen}^4\varphi}=0$$

$$\frac{\cot g\, a}{1+\cot g^2 a} = \operatorname{sen} a \cdot \cos a \qquad 1+\cot g^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$$

$$\frac{\cot g\, a}{\operatorname{cosec}^2 a} = \operatorname{sen} a \cdot \cos a.$$

$$\frac{\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 a}} = \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos a \cdot \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a \cdot \cos a.$$

—— // ——

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{1-\operatorname{sen}^2 \varphi} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec \varphi$$

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{1-\operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

18-6-64. Matemática.

$\operatorname{sen} 75°$

$$\operatorname{sen}(30°+45°) = \operatorname{sen} 30° \cdot \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cos 30°$$

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi = 1$$

$$\sqrt{1-\cos^2 \varphi} + \cos \varphi = 1$$

$$\left(\sqrt{1-\cos^2 \varphi}\right)^2 = (1-\cos \varphi)^2$$

$$1-\cos^2 \varphi = 1+\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi$$

$$2\cos^2 \varphi - 2\cos \varphi = 0$$

$$\cos \varphi (2\cos \varphi - 2) = 0$$

$$\cos \varphi = 0$$

$$2\cos \varphi - 2 = 0 \qquad \cos \varphi = 1$$

$$\varphi = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = 2 \cdot k \cdot \pi$$

$$\operatorname{sen} u + \cos u = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-\cos^2 u} + \cos u = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \cos u\right)^2$$

$$1-\cos^2 u = \frac{3+1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\cos u + \cos^2 u$$

$$1-\cos^2 u = 2 - (2\sqrt{3}+1)\cdot\cos u + \cos^2 u$$

$$2-(\sqrt{3}+1)\cos u + \cos^2 u + \cos^2 u - 1 = 0$$

$$2\cos^2 u - (\sqrt{3}+1)\cos u + 1 = 0$$

$u =$ ______

18-6-64

$$\operatorname{sen} u + \cos u = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-\cos^2 u} + \cos u = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \cos u\right)^2$$

$$1-\cos^2 u = \frac{3+1+2\sqrt{2}\cdot}{4} + \cos^2 u - \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\cancel{4}}\cos u$$

$$1-\cos^2 u = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} + \cos^2 u - (\sqrt{3}+1)\cos u$$

$$2\cos^2 u - (\sqrt{3}+1)\cos u + \frac{4+2\sqrt{3}}{4} - 1 = 0$$

$$8\cos^2 u - 4\sqrt{3}+1)\cos u + \cancel{4} + 2\sqrt{3} - \cancel{4} = 0$$

$$8\cos^2 u - 4(\sqrt{3}+1)\cos u + 2\sqrt{3} = 0$$

$$4\cos^2 u - 2(\sqrt{3}+1)\cos u + \sqrt{3} = 0$$

$$\cos u = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{4(4+2\sqrt{3}) - 16\sqrt{3}}}{8}$$

$$\cos u = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{16+8\sqrt{3}-16\sqrt{3}}}{8}$$

$$\cos u = \frac{2(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{16-8\sqrt{3}}}{8}$$

$$u\ \frac{2(\sqrt{3}+\cancel{1}) \pm 2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{8}$$

$$u = 3{,}464 + \cancel{2} \pm 2$$

$$2-\sqrt{3} = u + y + 2uy$$

8

$$\operatorname{sen}\varphi+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\operatorname{sen}\varphi$$

$$1-\operatorname{sen}^2\varphi=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\operatorname{sen}\varphi\right)^2$$

$$1-\operatorname{sen}^2\varphi=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{4}+\operatorname{sen}^2\varphi-(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\varphi$$

$$1-\operatorname{sen}^2\varphi=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}+\operatorname{sen}^2\varphi-(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\varphi.$$

$$4-4\operatorname{sen}^2\varphi=4+2\sqrt{3}+4\operatorname{sen}^2\varphi-4(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\varphi.$$

$$8\operatorname{sen}^2\varphi-4(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\varphi+2\sqrt{3}=0$$

$$4\operatorname{sen}^2\varphi-2(\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\varphi+\sqrt{3}=0$$

$$(1-\cos a)(\operatorname{cosec} a+\operatorname{cotg} a)=\operatorname{sen} a$$

$$(1-\cos a)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} a}+\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}\right)=\operatorname{sen} a$$

$$\frac{1-\cos^2 a}{\operatorname{sen} a}=\operatorname{sen} a$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}}=\operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{sen} a=\operatorname{sen} a$$

———— // ————

$$\operatorname{cotg} a \times \cos a=\operatorname{cosec} a-\operatorname{sen} a$$

$$\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}\cdot\cos a=\frac{1}{\operatorname{sen} a}-\operatorname{sen} a$$

$$\frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen} a}=\frac{1-\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen} a}$$

$$\frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen} a}=\frac{\cos^2 a}{\operatorname{sen} a}$$

$tg\, a = 3 \qquad a \to 3^{\circ}$ quadrant.

$a + b = 300^{\circ}$ Calcular $tg\, \underline{b}$

$$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \times tg\, b}$$

$$tg(300^{\circ}) = \frac{3 + tg\, b}{1 - 3\, tg\, b}$$

$$tg\,(300^{\circ}) = -tg\, 60^{\circ} = -\sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{3 + tg\, b}{1 - 3\, tg\, b}$$

$$-\sqrt{3}(1 - 3\, tg\, b) = 3 + tg\, b$$

$$-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\, tg\, b = 3 + tg\, b.$$

$$3\sqrt{3}\, tg\, b - tg\, b = 3\sqrt{3}$$

$$-tg\, b\,(3\sqrt{3} - 1) = 3 + \sqrt{3}$$

$$tg\, b = \frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 1} = \frac{3 + 1{,}732}{3 \times 1{,}732 - 1} = \frac{4{,}732}{4{,}196} = 1{,}1$$

— // —

$tg\, a = -1 \quad a + b = 180^{\circ} \quad tg\, b = ?$

$$tg\,(a+b) = \frac{+tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \,.\, tg\, b}$$

$$tg\, 180^{\circ} = \frac{-1 - tg\, b}{1 + tg\, b}$$

$$0 = \frac{-1 - tg\, b}{1 - tg\, b}$$

$$-1 - tg\, b = 0$$

$$-tg\, b = +1$$

$$\boxed{tg\, b = -1}$$

Calcular a tg de $\frac{28\pi}{3}$

$$tg\, \frac{28\pi}{3} = tg\left(\frac{30\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$tg\left(10\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = tg\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -tg\, \frac{2\pi}{3} =$$

$$= tg\, \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

Calcular a $cotg\, \frac{64\pi}{3}$

$$cotg\, \frac{64\pi}{3} = cotg\left(\frac{60\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= cotg\, \frac{4\pi}{3} = cotg\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= cotg\, \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

22-6-64.

Se $sen\, 30° = \frac{1}{2}$, calcular $sen\, 15°$:

$sen \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$ $\quad sen \frac{30°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$

$sen\, 15° = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{2}}{2}}$

$sen\, 15° = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Calcular $\cos 22°30'$

$\cos \frac{45°}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$ $\quad \cos 22°30' \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$tg\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ calcular $tg\, 60°$

$tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1-tg^2 a}$ $\quad tg\, 60° = \frac{2\, tg\, 30°}{1-tg^2\, 30°}$

$tg\, 60° = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}$ $\quad tg\, 60° = \sqrt{3}$

$a+b = 180°$ $\quad tg\, a = \sqrt{3}$, calcular $tg\, b$.

$tg(a+b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1-tg\, a . tg\, b}$

$tg\, 180° = \frac{\sqrt{3}+tg\, b}{1-\sqrt{3} . tg\, b}$

$0 = \frac{\sqrt{3}+tg\, b}{1-tg\, b . \sqrt{3}}$ $\quad tg\, b + \sqrt{3} = 0$ $\quad tg\, b = -\sqrt{3}$.

$a-b = 45°$ $\quad sen\, a = 1$

calcular $sen\, b$.

$sen(a-b) = sen\, a . \cos b - sen\, b . \cos a$

$sen\, 45° = \cos b$.

$sen\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos b$ $\quad sen\, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a+b = 105°$ $\quad sen\, a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen\, b = ?$

$sen(a+b) = sen\, a . \cos b + sen\, b . \cos a$

$sen\, 105° = \frac{\sqrt{3}}{2} . \cos b + sen\, b . \frac{1}{2}$

$sen\, 105° = sen(60+45°)$

$\frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sqrt{6}+\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\cos b + 2\, sen\, b$

$2\, sen\, b = \sqrt{6}+\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cos b$.

$2(1-\cos^2 b) = 6+2+12\cos^2 b + 2\sqrt{12} - 4\sqrt{18}\cos b - 4\sqrt{6}\cos b$.

$4(1-\cos^2 b) = 8+12\cos b + \sqrt{12}\times 2 - (4\sqrt{18}+4\sqrt{6})\cos b$.

25-6-64.

$\operatorname{sen} 2u + \operatorname{sen} u = 0$

$2 \operatorname{sen} u \cdot \cos u + \operatorname{sen} u = 0$

$\operatorname{sen} u (2 \cos u + 1) = 0$

$\operatorname{sen} u = 0 \rightarrow u = K\pi$

$2 \cos u + 1 = 0$

$2 \cos u = -1 \quad \cos u = -\frac{1}{2}$

$u = K\pi$ ou $u = K . 180$

$u = 2K\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad u = (2K+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{sen} u = \frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} u = 2K\pi + \frac{\pi}{6} \\ u = (2K+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{array}\right\} u = K\pi + (-1)^K . \frac{\pi}{6}$

$K = 2 \qquad K = 5$

$u = 2K\pi + \frac{\pi}{6} \qquad u = 5\pi - \frac{\pi}{6}$

$\operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$u = K\pi + (-1)^K . \frac{\pi}{3} \quad u = 4\pi + \frac{\pi}{3}$

$u = 720 + 60 = 780° = 60°$

$\operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad u = K\pi + (-1)^K . \frac{\pi}{4}$

Qual a solução geral dos arcos que satisfazem a seguinte equação.

1) $\operatorname{sen} u = -0,8$

2) $\operatorname{sen} u = 0,8$

sabendo-se que o arco que tem sen 0,8 no 1º quadrante é o arco de 53°

3/8/64

Análise combinatório

1) Arranjo simples

2) Permutações

3) Combinações

Arranjo simples de "m" elementos tomados "p" a "p" são agrupamentos que nós podemos formar com êstes m elementos de maneira que cada grupamento possua "p" elementos e dois grupamentos difiram entre

si pela ordem ou nature-
za de menos um elemento.

<u>Permutações</u> simples de "m" objetos distintos são os agrupamentos que nós podemos formar com êstes elementos de maneira que cada elementos possua tôdos os elementos e dois grupamentos defiram entre si pela ordem de pelo menos um elemento.

<u>Combinações</u> de "m" elementos tomados "p" a "p" são os agrupamentos que nós podemos formar com "p" elementos. Cada grupamento e dois grupamentos defiram entre si pela natureza de pelo menos um elemento.

Ex:. a b c : a b d

$\underbrace{a, b, c, d, e, f, \ldots l,}_{m \text{ elementos}}$

$A_m^1 = m$

$A_m^2 = m(m-1) = A_m^1(m-1)$

4-8-64

$A_m^1 = m$

$A_m^2 = m(m-1) = A_m^1(m-1)$

$A_m^3 = A_m^2(m-2)$

$A_m^4 = A_m^3(m-3)$

$\cancel{A_m^1} = m$

$\cancel{A_m^2} = \cancel{A_m^1}(m-1)$

$\cancel{A_m^3} = \cancel{A_m^2}(m-2)$

$\cancel{A_m^4} = \cancel{A_m^3}(m-3)$

$\ldots \quad \ldots$

$\cancel{A_m^{p-1}} = \cancel{A_m^{p-2}}[m-(p-2)]$

$A_m^p = \cancel{A_m^{p-1}}[m-(p-1)]$

$A_m^p = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-p+2)(m-p+1)$

$A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \qquad M = 8 \quad P = 4$

1 2 3 4

<u>Fatorial de um número</u> é o produto que nós obtemos tomando como fatores o nº <u>m</u> e os

seus consecutivos inferiores até chegar a um.

$$(m-p)!\; A_m^p = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-p+1)(m-p)!$$

$$(m-p)!\; A_m^p = m!$$

$$\boxed{A_m^p = \frac{m!}{(m-p)!}}$$

A_m^p

Permutações

$$P_m \longrightarrow A_m^m = m(m+1)(m-2)\cdots(m-m+1) = m!$$

$$P_m = m!$$

$$A_m^m = \frac{m!}{(m-m)!} = m!$$

25-8-64

Arranjo

Permutações

Combinações

4132 → (4 3 1) (1 4 2) (3 1 2) (2 3 4)

Combinações

413	412	132	432
431	421	123	423
341	241	213	342
314	214	231	324
143	142	321	243
134	124	312	234

arranjos.

$$C_m^p = \frac{A_m^p}{p!} \longrightarrow A_m^p = C_m^p : p!$$

4 deputados 5 senadores

Quantas comissões de 3 membros podemos formar com 4 deputados e 5 senadores de maneira que cada comissão tenha pelo menos 1 senador.

$C_5^1 \times C_4^2 = 30$

$C_5^2 \times C_4^1 = 40$

$C_5^3 = 10$

$C_5^3 = \frac{5\times4\times\cancel{3}}{1\times2\times\cancel{3}}$ $\quad C_5^2 = \frac{5\times4}{1\times2} = 10$

Numa urna existem 9 bolas, sendo 6 vermelhas 3 azuis. De quantos modos podemos tirar simultâneamente
SUCESSIVAMENTE.
5 bolas de maneira que pelo menos uma seja vermelha
Sucessivamente: arranjo
simultâneamente: combinações

9 bolas $\begin{cases} 6 \text{ Vermelhas} \\ 3 \text{ azuis} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{no mínimo} \\ 1 \text{ vermelha.} \end{cases}$

V	A	
2	3	$C_6^2 \times C_3^3 = 15$
3	2	$C_6^3 \times C_3^2 = 60$
4	1	$C_6^4 \times C_3^1 = 45$
5	0	$C_6^5 = 6$
		126

26-8-64-

Combinações de $\underline{m}$ elementos 2 a 2 = 21. Calcular o valor de $\underline{m}$.

$C_m^2 = 21$

$$\frac{m(m-1)}{2} = 21$$

$$\frac{m^2-m}{2} = 21 \therefore m^2-m = 42$$

$$m^2-m-42=0$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$\frac{1+13}{2} = 7 \qquad m = 7$$

—//—

6 livros de matemática
5 livros de português
3 livros de inglês

$\underline{\text{Mat. Port. Ing.}}$

$P_3 \times P_6 \times P_5 \times P_3$

$6 \times 720 \times 120 \times 6 =$

$$C_{35}^{25} \times 25!$$

$$\frac{35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10} \times 25!$$

$$\frac{34 \times 33 \times 31 \times 29 \times 28 \times 13}{\cancel{3}} \times 25!$$

$$\underline{11 \times 13 \times 17 \times 28 \times 29 \times 31} \times 25!$$

1º-9-64.

Numa sala existem ~~8 cadeiras~~ 8 Cadeiras e 5 pessoas. De quantas maneiras se podem sentar estas 5 pessoas nas 8 cadeiras.

$C_8^5 \times P_5 = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

$= 6.720$

Possuo 10 livros numa estante de quantos modos podemos arrumar êstes livros nesta estante se desejo que 4 dêstes livros fiquem sempre juntos.

$P_7 \times P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 =$
$= 120.960$

Numa estante possuo 4 livros de inglês iguais, 3 livros de matemática iguais, 2 de física iguais.

$P_9 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 60.480.$

IIII. MMM FF

P_4 P_3 P_2

$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_2}$

22333 32233 33223 33322.
23233 32323 33232
23323 32332
23332

$P_5^{2.3.}$

8/9/64

C = Combinações

A = arranjos

P = permutações

$$\frac{C^4_{m+2}}{A^3_{m+1}} = 4$$

$$C^4_{m+2} = \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{4!}$$

$$A^3_{m+1} = (m+1)m(m-1)$$

$$\frac{C^4_{m+2}}{A^3_{m+1}} = \frac{\frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{4!}}{(m+1)m(m-1)} = 4$$

$$\frac{(m+2)\cancel{(m+1)}\cancel{m}\cancel{(m-1)}}{24\cancel{(m+1)}\cancel{m}\cancel{(m-1)}} = 4$$

$$\frac{m+2}{24} = 4 \qquad m+2 = 96$$

$$\boxed{m = 94}$$

$$\frac{C^{m-1}_{m+3}}{A^{m+1}_{m+2}} = 5$$

$$C^{m-1}_{m+3} = \frac{(m+3)!}{(m-1)!(4)!}$$

$$A^{m+1}_{m+2} = \frac{\frac{(m+3)!}{(m-1)!24}}{(m+2)!} = 5$$

$$\frac{(m+3)!}{24!(m-1)!\cancel{(m+2)!}} = 5$$

$$\frac{(m+3)}{24(m-1)!} = 5$$

$$\frac{(m-P)!}{(m-P+1)!}$$

$$\frac{\cancel{(m-P)}\cancel{(m-P-1)}(m-P-2)\ldots\cancel{3.2.1}}{(m-P+1)\cancel{(m-P)}\cancel{(m-P-1)}\ldots\cancel{3\cdot2\cdot1}} =$$

$$= \frac{1}{(m-P+1)}$$

$$\frac{(m-P+3)!}{(m-P-1)!} = \frac{(m-P+3)(m-P+2)(m-P+1)(m-P)\cancel{(m-P-1)}}{\cancel{(m-P-1)}}$$

Análise combinatória
Fatorial é um produto dos números obtidos a partir dêle com a supressão de uma unidade.

Possuo 5 laranjas e 3 maçãs. Quantos grupos de 3 frutas podemos fazer, de modo que em cada grupo entre pelo menos uma laranja.

Combinações

L	MM
LL	M
LLL	

$C_5^1 \times C_3^2 = 15$

$C_5^2 \times C_3^1 = 30$

$C_5^3 = 10$

$\overline{55}$

Possuo 7 livros numa estante, de quantos modos posso arrumar êstes, se desejo que 3 dêles fiquem sempre juntos.

Permutações:

$P_5 \times P_3 = 360$ $\quad P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

$P_3 = 3 \times 2 \times 1$

$\left.\begin{array}{l} P_5 = 120 \\ P_3 = 6 \end{array}\right\} 360$

Possuo 7 livros; dêstes: três são de inglês, dois de física e dois de matemática, se desejo que os livros de uma mesma matéria fique sempre juntos.

$P_3 \times P_3 \times P_2 \times P_2 = 144$

$\cancel{2}(P_3) = \cancel{2!}\ \cancel{2}(3 \times 2 \times 1) = 12$

$P_2 = 2 \times 1$

$6 \times 6 \times 2 \times 2 = 144$

9-9-64

$\frac{C^p_{m+1}}{C^p_m} = 2$ Achar a relação entre m e P.

$C^p_{m+1} = \frac{(m+1)!}{P!(m+1-p)!}$

$C^p_m = \frac{m}{P!}$

$$\frac{\frac{(m+1)!}{P!(m+1-P)!}}{\frac{m!}{P!(m-P)!}} = \frac{m+1}{m+1-p} = 2$$

$m+1 = 2m+2-2P$

$m = 2P-1.$

Combinações de $\frac{C^4_{m+1}}{C^2_{m-1}} = \frac{7}{2}$

$C^4_{m+1} = \frac{(m+1)!}{4!(m+1-4)!}$

$C^2_{m-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-2)!}$

$$\frac{\frac{(m+1)!}{4!(m+1-4)!}}{\frac{(m-1)!}{(m-1-2)!}} = \frac{\frac{(m+1)!}{4!\cancel{(m-3)!}}}{\frac{(m-1)!}{\cancel{(m-3)!}}} = \frac{7}{2} =$$

$= \frac{m(m+1)2!}{4!} = \frac{7}{2}$

$\frac{m(m+1)\cancel{2}}{\cancel{24}\,12} = \frac{7}{2} = \frac{m(m+1)}{\cancel{12}\,6} = \frac{7}{\cancel{2}}$

$m(m+1) = 42$

$m^2 + m - 42 = 0$

$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+168}}{2}$ $m = \frac{-1 \pm 13}{2}$

$m = \frac{12}{2} = 6$ $\boxed{m = 6}$

Sôbre uma reta marca-se cinco ponto.
Sôbre outra paralela a 1ª marca-se 8 pontos.
Quantos triângulos podemos formar com êstes pontos.

$C^1_5 \times C^2_8 = 5 \times 28 = 140$

$C^2_5 \times C^1_8 = 10 \times 8 = \underline{80}$

220

$C_{13}^3 - (C_8^3 + C_5^3)$

$\frac{13 \times 12 \times 11}{6} - \frac{8 \times 7 \times 6}{3} - \frac{5 \times 4 \times 3}{6} =$

$286 - 56 - 10 =$ $\boxed{220}$

Sôbre uma reta marcam-se 6 pontos e êstes 6 pontos pertencem a um conjunto de 14 pontos.
Admitindo-se que dos 8 pontos que não estão sôbre esta reta não existe nenhuma reta que una mais do que dois dêles, pergunta-se quantos triângulos podemos formar unindo 3 quaisquer dêles.

$C_6^1 \times C_8^2 = 6 \times 28 = 168$

$C_6^2 \times C_8^1 = 15 \times 8 = 120$

C_8^3 $\quad 56$

344

$C_{14}^3 - C_6^3 = \frac{14 \times 13 \times 12^2}{6} - \frac{6 \times 5 \times 4}{6} =$

$14 \times 13 \times 2 - 5 \times 4 =$

$28 \times 13 - 20 = 344.$

Quantos números posso escrever com os 5 primeiros algarismos significativos sem os repetir de modo que sejam menores de 400.

1 2 3 4 5

~~$C_5^1 + C_5^2 +$~~

$A_5^1 + A_5^2 + 3A_4^2$

$5 + 20 + 36 = \underline{61}$

Quantos números de 4 algarismos podemos formar com os 4 primeiros algarismos significativos de modo que sejam menores do que 3000.

$A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + 2P_3$

$4 + 12 + 24 + 12 = 52$

15-9-64.

Binômio de Newton

$(x+a)^m$

O binômio de Newton é deduzido pelo produto de Stevim.

$$\underbrace{(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l}_{m \text{ fatôres}}$$

$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) + abc.$

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + x^3(a+b+c+d) + x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + x(abc+acd$

$x^m + x^{m-1}(a+b+c+\ldots l) + x^{m-2}(ab+ac\ldots) + x^{m-3}(abc+abd\ldots\ldots)\ldots\ldots + abc\ldots l.$

$(x+2)(x+3) = x^2 + x(2+3) + 2\times 3 = x^2+5x+6.$

$(x+2)(x+3)(x+1)(x+5) = x^4 + x^3(2+3+1+5) + x^2[(2\times 3)+(2\times 1)+(2\times 5)+(3\times 1)+(3\times 5)+(1\times 5)] + x[(2\times 3\times 1)+(2\times 3\times 5)+(2\times 1\times 5)+(3\times 1\times 5)] + 2\times 3\times 1\times 5 = x^4+11x^3+41x^2+61x+30$

$(x+3)(x+4)(x+1)(x+5) = x^4 + x^3(3+4+1+5) + x^2[(3\times 4)+(3\times 1)+(3\times 5)+(4\times 1)+(4\times 5)+(1\times 5)] + x[(3\times 4\times 1)+(3\times 1\times 5)+(3\times 4\times 5)+(4\times 1\times 5)] + 3\times 4\times 1\times 5 = x^4+13x^3+59x^2+107x+60$

$(x+2)^5 = x^5 + C_5^1 \cdot x^4 \cdot 2 + C_5^2 \cdot x^3 \cdot 2^2 + C_5^3 \cdot x^2 \cdot 2^3 + C_5^4 \cdot x \cdot 2^4 + 2^5 =$
$= x^5 + 5\times x^4 \times 2 + 10x^3\times 4 + 10x^2\times 8 + 5x\times 16 + 32. =$

16-9-64.

$(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 + C_m^3 \cdot x^{m-3} a^3 + \ldots + a^m$

Fórmula do têrmo geral do desenvolvimento do binômio de Newton.

2º têrmo → C^1_m
3º têrmo → C^2_m
4º têrmo → C^3_m
5º têrmo → C^4_m
6º têrmo → C^5_m
P têrmo → C^{P-1}_m
P+1 têrmo → $\boxed{C^P_m}$

Têrmo $P+1 = C^P_m \, x^{m-P} \cdot a^P$

5º têrmo de desenvolvimento →
→ $T_4+1 = C^4_m \, x^{m-4} \cdot a^4$.

6º têrmo → $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^9$

$T_5+1 = \cancel{1} \, C^5_9 \, (x^2)^{9-5} \times \left(-\frac{1}{x^3}\right)^5 = \frac{9.\cancel{8}^{2}.7.6}{\cancel{1\times2\times3\times4}} (x^2)^4 \times \left(-\frac{1}{x^3}\right)^5$

$T_6 = 126 . x^8 \left(-\frac{1}{x^3}\right)^5 = 126 x^8 \left(-\frac{1}{x^{15}}\right) =$
$= -\frac{126}{x^7}$

Calcular o 6º têrmo do seguinte desenvolvimento. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$

$T_5+1 = C^5_8 . (x)^{8-5} . \left(-\frac{1}{x}\right)^5 =$

$\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3} (x)^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^5 = 56 \, x^3 \left(-\frac{1}{x^5}\right) =$

$56 \times \frac{1}{x^2} = \frac{56}{x^2}$

Calcular o 8º têrmo do desenvolvimento. $(x - 3a^2)^9$

$T_7+1 = C^7_9 \, (x)^{9-7} . (-3a^2)^7 =$

$= \frac{9\times8}{2} x^2 . (-2187a^{14}) = -78.732 \, x^2 \, a^{14}$

21-9-64.

Quantos números menores que 3000 poderemos escrever com os números: 1, 2, 3, 4, 5,

$A^1_5 + A^2_5 + (A^4_5 - 3A^3_4)$

$5 + 20 + (120 - 72) = 183$

Quantos são os números que posso formar com os algarismos: 1, 2, 3, 4, 5. sem os repetir de modo que sejam menores do que 30.000

$A_5^1 + A_5^2 + A_5^3 + A_5^4 + (A_5^5 - 3P_4) =$

$5 + 20 + 60 + 120 + (120 - 72) =$

$5 + 20 + 60 + 120 + 48 = 255$ (Meu)

$5 + 20 + 60 + 120 - 48 = 157$ (da Turma).

23-9-64.

Arranjos de 3 elementos 2 a 2.

$2\, A_3^2 \cdot P_2 = 24.$

$2 \times (3 \times 2) \times 2 = 24$

Sôbre os lados de um triângulo, marcam-se respectivamente 3. 4 e 5 pontos distintos, não coincidindo com os vértices. Quantos segmentos de reta pode-se obter, unindo-se 2 a 2 os centros de tôdas as circunferências que passam por 3 quaisquer dêstes 12 pontos marcados, supondo que todos os centros sejam distintos.

$C_{12}^3 - (C_3^3 + C_4^3 + C_5^3) =$

$\frac{\overset{2}{\cancel{12}} \times \cancel{11} \times 10}{\cancel{6}} - 1 - 4 - 10 = 205$ circunf.

$C_{205}^2 = \frac{205 \times \overset{102}{\cancel{204}}}{\cancel{2}} = 20.910$

Marcam-se 5 pontos sôbre uma reta S e 8 sôbre uma outra paralela a esta S. Pergunta-se quantos triângulos podem ser formados por 3 quaisquer dêstes pontos.

$C_{13}^3 - (C_5^3 + C_8^3) =$

$\frac{13 \times 12 \times 11}{6} - 10 - 56 = 220$

Quantos quadriláteros?

$C_8^2 + C_5^2 = 280$

5-10-64

Determinantes

Matriz: um conjunto de $(m \times n)$ números dispostos em "m" filas (linhas) e "n" colunas.

$$
\begin{array}{l|cccccc|}
1^a & 1^a \text{ coluna}, & 2^a \text{ col.} & 3^a \text{ col} & & n^a \text{ col.} \\
1^a \text{ fila} & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots & a_1^n \\
2^a \text{ fila} & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots & a_2^n \\
3^a \text{ fila} & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots & a_3^n \\
= & = & = & = & \ldots & a_{\cdot\cdot} \\
m^a \text{ fila} & a_m^1 & a_m^2 & a^3 m & \ldots & a_m^n
\end{array}
$$

linha ou coluna → fila

$\Delta = \| a_i^j \|_{j=1\ldots n}^{i=1\ldots m}$ matriz = $(m \times n)$.

$m < n \quad m > n$

$m \neq n$: a matriz retangular

$m = n$ = matriz quadrada

Determinante de uma matriz quadrada.

Regra de Sarrus.

Determinante de uma matriz quadrada de 2ª ordem.

A ordem de uma matriz é qualquer um dos números que exprime as filas ou colunas da matriz

$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{Vmatrix}$ determinante Δ

$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix}$

diagonal secundária. diagonal principal

Quando for matriz: duas barras de cada lado.

Δ: Quando for determinante uma barra de cada lado.

O determinante de uma matriz quadrada de segunda ordem obtem-se subtraindo o produto dos termos da diagonal secundária, do produto dos termos da diagonal principal:

$$a_1^1 \cdot a_2^2 - a_1^2 \cdot a_2^1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 4 \times 2 = 12 - 20 = -8$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (4 \times -4) - (5 \times -3) = -16 + 15 = -1$$

$$\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-5 \times -2) - 4 \times 3 = 10 - 12 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 8 \times 2 = 36 - 16 = 20$$

Determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem: obtem-se

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

diagonal secundária diagonal principal

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

O valor do determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem obtem-se subtraindo da soma dos produtos dos têrmos da diagonal principal e das duas diagonais paralelas a ela, o produto dos têrmos da diagonal secundária e das duas diagonais paralelas a ela.

6-10-64.

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^1 & a_2^2 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

$$(D_4+D_5+D_6)-(D_1+D_2+D_3)$$

$$(a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 + a_1^2 \cdot a_2^3 \cdot a_3^1 + a_1^3 \cdot a_2^1 \cdot a_3^2) -$$

$$-(a_1^3 \cdot a_2^2 \cdot a_3^1 + a_1^1 \cdot a_2^3 \cdot a_3^2 + a_1^2 \cdot a_2^1 \cdot a_3^3) =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=(8+15+6)-(36+20+1)= 29-57=\underline{\underline{-28}}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 7 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-32-15-21)-(18+20-28) = -68-10=-78$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6$$

$$=(4+45-8)-(24-12+5)=41-17=\underline{\underline{24}}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-8+6+12)-(18-1+32)=10-49=\underline{-39}$$

Abaixamento de ordem de Determinantes: Regra de <u>CHIÓ</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-(1\times4) & 4-(2\times1) & 3-(3\times1) \\ 3-(2\times4) & 0-(2\times2) & 0-(3\times2) \\ 3-(3\times4) & 1-(2\times3) & 1-(3\times3) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -6 \\ -9 & -5 & -8 \end{vmatrix} (-1)^5$$

7-10-64.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-0 & 3-12 & 1-8 \\ 0-0 & 1-9 & 2-6 \\ 3-0 & 1-6 & 0-4 \end{vmatrix} (-1)^7 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -9 & -7 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{vmatrix} = -[(64+0+108)-(168+0+40)] =$$

$$= -172+208 = \underline{36}$$

8/10/64.

1ª Propriedade.

Um determinante não se altera quando se trocam ordenadamente as filas pelas colunas.

2ª Propriedade:

Um determinante muda de sinal quando se trocam duas filas ou duas colunas.

3ª Propriedade:

Um determinante fica multiplicado por um numero $\underline{K}$ quando multiplicamos todos os elementos de uma fila ou coluna por êste valor K.

4ª Propriedade.

Se multiplicamos todos os elementos de uma fila ou coluna de um determinante por um certo número $\underline{K}$ positivo e diferente de zero, e dividimos qualquer outra fila ou coluna por êste mesmo valor $\underline{K}$ o determinante não se altera.

5ª Propriedade:

Se um determinante tiver todos os elementos de uma fila ou coluna iguais a zero êsse determinante é nulo.

6ª Propriedade
Se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de um determinante forem nulos o determinante se reduzirá ao produto dos termos da diagonal principal.

7ª Propriedade:
O mesmo que a 6ª para a digonal secundária.

8ª Propriedade
Um determinante que tiver os elementos de duas linhas paralelas formadas de elementos iguais ou proporcionais é nulo.

9ª Propriedade
O valor de um determinante pode ser obtido efetuando-se a soma dos produtos dos elementos de uma fila ou coluna pelos seus respectivos complementos algébricos.
(menor complementar de um elemento de um determinante:
Chama-se menor complementar de um elemento de um determinante de ordem <u>m</u> ao determinante de ordem m-1 obtemos suprimindo a fila e coluna a que pertençam êste elemento.
Complemento algébrico de um elemento de um determinante.
Chama-se complemento algébrico de um elemento de um determinante ao seu menor complementar precedido do sinal + ou − conforme

seja par ou impar a soma dos números que exprimem a fila e coluna a que pertence êste elemento.

1ª Propriedade

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (28+24+45)-(40+21+36) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = (28+45+24)-(40+21+36) = 0$$

2ª Propriedade

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+15+0)-(0+12+3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3+0+12)-(15+2+0) = -2$$

3ª Propriedade

$K=2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \underline{4}$$

12-10-64

4ª Propriedade

$$2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1,5 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$\div 2$

$= 8+4-6-24 = -18$ $\quad = 8+4-6-24 = -18$

5ª Propriedade.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6ª Propriedade

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

7ª Propriedade

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -60$$

8ª Propriedade.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (4+30-9)-(30+4-9) = 25-25 = 0$$

9ª Propriedade

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \overset{(-2)}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} \quad \overset{(6)}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\overset{(3^x)}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} \quad \overset{(3^v)}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$-\overset{(3^v)}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} - \overset{(3^x)}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} + \overset{(-2)}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} - \overset{(6)}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$32+90-48-24 \qquad 32+66-48=50$

$122-72=50$

Redução dos elementos de uma fila ou coluna de um determinante a unidade.

13-10-64

Redução dos elementos de uma fila ou coluna a unidade.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} 6 & 4 & 3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 6 & 8 & 15 \\ 36 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \frac{12}{72}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 8 & 15 \\ 36 & 12 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ 20 \\ 5 \end{array}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 12 & 20 & 28 \\ 40 & 20 & 60 \\ 30 & 20 & 10 \end{vmatrix} = \frac{20}{400}\begin{vmatrix} 12 & 1 & 28 \\ 40 & 1 & 60 \\ 30 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

Resolução de sistemas "m" equações lineares a "m" incógnitas

$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-2y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-4z=3 \\ 2x-y+3z=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$x+y-3z-t=4$

$2x+3y=4$

$x-2y=3$

$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}=\dfrac{-17}{-7}=\dfrac{17}{7}$

$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} -7 \qquad y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}=\dfrac{2}{-7}=-\dfrac{2}{7}$

$\Delta x \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} -17$

$\Delta y \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} 6-4=2$

Regras de Crammer

Para resolver "m" equações lineares a "m" incógnitas.

$\Delta \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $(1-8+3)-(4+3-2)=-9$

$\Delta x \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\Delta y \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$\Delta z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Discução das soluções de um sistema de "m" equações lineares, a "n" incógnitas ($m \neq n$)

1º) Constroi-se a matriz dos coeficientes das incógnitas.

2º) Calcula-se o determinante de maior ordem ≠ de zero que se pode extrair desta matriz.

Êste determinante chama-se determinante principal do sistema.

3) Chamam-se equações principais às equações que possuem coeficientes entre os elementos de determinante principal, as demais são ditas secundárias.

4) Chamam-se incógnitas principais aquelas cujos coeficientes figuram na formação do determinante principal, as demais são ditas secundárias.

14-10-64. 5) Chama-se determinante característico de uma equação secundária ao determinante que obtemos acrescentando ao determinante principal do sistema uma coluna cujos têrmos são os termos independentes das equações principais e o têrmo independente da referida equação secundária e como fila, os coeficientes das incógnitas principais desta mesma equação secundária.

<u>Observação</u>: um sistema <u>possue</u> tantos determinantes característicos quantos forem as equações secundárias do sistema.

Teorema de <u>Rouché</u>

Dado um sistema de "m" equações lineares a "n" incógnitas em que <u>P</u> é a ordem do determinante principal, se todos os determinantes característicos das equações secundárias dêste sistema forem nulos, o sistema será possível e determinado se a ordem do determinante principal forem igual ao número de incógnitas, e será possível e indeterminado se a ordem do determinante principal for menor do que o número de incógnita.

Se um pelo menos dos determinantes característicos for diferente de zero, o sistema será impossível.

Em resumo: se Δc for igual a zero. e se <u>P</u>...

$$\Delta c = 0 \begin{cases} P = n \; \{ \text{ Possível e determinado} \\ P < n \; (\text{ Possível e indeterminado} \end{cases}$$

$\Delta c \neq 0$: Impossível.

$$\left|\begin{array}{l} 2x+3y=13 \\ x+y=5 \\ x-y=-1 \\ 3x+2y=12 \end{array}\right| \quad \Delta p = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \left\|\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right\|$$

$$\Delta c_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2-13+15) - (13-3-10) = 0$$

$$\Delta c_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix} = (24+26+40) - (39+36+20) = \; = 0$$

$$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2/1 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3/1$$

19-10-64.

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=4 \\ 5x-2y+3z=8 \end{cases}$$

$$\Delta = \left\|\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{matrix}\right\| \qquad \Delta p \left\|\begin{matrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}\right\| \neq 0$$

Possível e indeterminado

$$\begin{cases} 2x+3y=4+4z \\ 5x-2y=8-3z \end{cases}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4+4z & 3 \\ 8-3z & -2 \end{vmatrix} = -8-8z-(24-9z) = \; = -32+z$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4+4z \\ 5 & 8-3z \end{vmatrix} = 16-6z-20-20z = \; = -4-26z$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-32+z}{-19}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-4-26z}{-19}$$

Condição necessária e suficiente para que uma equação seja possível e determinada

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \qquad \left\|\begin{matrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$\Delta p. \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta p \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
$$2x - 2y = 3$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (3-10-8) - (-3-10+8) = -15+5 = -10$$

IMPOSSÍVEL

$$p \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\| \qquad \Delta p \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta C \begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = -4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -12$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$$

20-10-64.

$$\begin{cases} mx + y - 2z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 3x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\Delta p \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left\|\begin{matrix} m & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| = m - 6 + 1 - 2 + 3 - m = -5$$

$m =$ qualquer valor.

$$\Delta C \begin{vmatrix} m & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta C = -4 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m & 1 & -2 \\ 3 & -1 & +1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$-4[(-4-1+3)+(3+1+3)] + 3[(-m+2-3) -$
$-(-6-1+m)] - 2[(m+6+3)-(6-3-m)] +$
$+[(m-6+1)-(2-3+m)] = 0$

$36 + 18 - 6m - 4m - 12 - 4 = 0$

$-10m + 38 = 0 \qquad m = \frac{38}{10} \therefore m = 3{,}8$

m qualquer $\rightarrow m = \frac{38}{10}$ (Pos. determin.

m qualquer $\rightarrow m \neq \frac{38}{10}$ (impossível

$$\begin{cases} mx + 3y = -4 \\ x + y = b \end{cases} \qquad m - - \quad \begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$m - 3 \neq 0$

$m - 3 \quad$ b qualquer (sistema possível determinado

$\begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \therefore \underline{m = 3}$ Poss. determ.

$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 0 \qquad 3b + 4 = 0 \therefore b = -\frac{4}{3}$

$b \neq -\frac{4}{3}$ impossível.

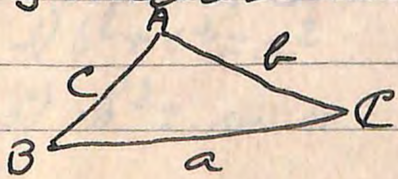
21-10-64

Resolução de triângulos retângulos.

Elementos calculáveis

3 ∡s : $\hat{A} = 90°$ $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

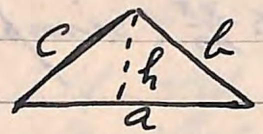
3 lados



a = hipotenusa

b e c = catetos

3 alturas b, c, h



3 medianas: é o segmento traçado do vértice ao meio do lado oposto.

Ceviana: tôda reta que passa por um vértice do triângulo e por um ponto qualquer do lado oposto a êste vértice ou do seu prolongamento

Mediatriz: é uma reta que cai perpendicular ao meio do lado oposto.

3 Medianas, 3 bicetrizes internas, 3 bicetrizes externa

3 mediatrizes (não calculável

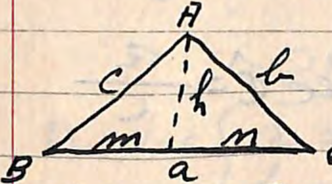
mediatriz é a perpendicular ao meio do lado de um triângulo.

Determinando o circuncentro ponto de intercessão das três mediatrizes é chamado circuncentro.

O ponto de intercecção das mediatrizes externas é chamado incentro

O ponto de intercecção das mediatrizes é chamado baricentro.

22-10-64



1) Relações métricas

2) Relações trigonométricas

1) Expressão através de elementos lineares.

2) Expressão através das combinações entre os elementos lineares e angulares.

Relações métricas

1) $a = m + n$

2) $\begin{cases} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{cases}$

3) $b^2 + c^2 = a^2$

4) $b.c = a\,h$

5) $h^2 = m \cdot n$

Relações trigonométricas

$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a}$ $\cos \hat{B} = \frac{c}{a}$

$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$ $\operatorname{cotg} \hat{B} = \frac{c}{b}$

$\sec . \hat{B} = \frac{a}{c}$ $\operatorname{cosec} \hat{B} = \frac{a}{b}$

$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a}$ $\cos \hat{C} = \frac{b}{a}$

$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b}$ $\operatorname{cotg} \hat{C} = \frac{b}{c}$

$\sec \hat{C} = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cosec} \hat{C} = \frac{a}{c}$

Dados

b, c

Calcular:

$\measuredangle B, \measuredangle C, a, S$

Cálculo do $\measuredangle B$

$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{c}$

Cálculo do $\hat{C} \rightarrow \hat{C} = 90° - \hat{B}$

Cálculo da hipotenusa: $\underline{\underline{a}}$

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

Superfície $\rightarrow \frac{1}{2} . b . c$

$\operatorname{colog} A = \log \frac{1}{A}$

$-3,334729 = -4 + (1 - 0,334729) = \bar{4} + 0,66527$

$-3 - 0,334729 + 1 - 1 = -4 + (1 - 0,334729).$

$\log \operatorname{tg} \hat{B} = \log b - \log c$

$\log a = \frac{\log(b^2 + c^2)}{2}$

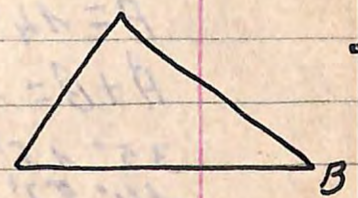
$\log S = \log b + \log c - \log 2$

$\log S = \log b + \log c + \operatorname{colog} 2$

$\operatorname{colog} 2 = \log \frac{1}{2} = \log 1 - \log 2.$

28-10-64.

Dados $\begin{cases} a = 23,4 \text{ m} \\ b = 52,3 \text{ m} \\ \hat{B} = 35° 15' \end{cases}$



Calcular: $\begin{cases} c \\ \hat{C} \\ \hat{A} \end{cases}$

$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$

$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a . \operatorname{sen} \hat{B}}{b}$

$\log \operatorname{sen} \hat{A} = \log a + \log \operatorname{sen} \hat{B} - \log b$

$\log \text{sen} \hat{A} = 1,369216 + \bar{1},761285 - 1,718502 =$

$$\begin{array}{r} 1,369216 \\ + \bar{1},761285 \\ \hline 1,130501 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,718502 \\ - 1,130501 \\ \hline -0,588001 \end{array}$$

$\log \text{sen} \hat{A} = -0,588001 = \bar{1},411999$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{1},411999 \\ \bar{1},412052 \end{array}\right\} 473$$

$473 — 60''$

$420 — \varphi \qquad \varphi = \frac{420 \times 60}{473} = 53$

$\varphi = 53''$

$\hat{A} = 14°57'53''$

$\hat{A} + \hat{B} = 14°57'53'' + 35°15' = 50°12'53''$

$$\begin{array}{l} 35°15' \\ 14°57'53'' \\ \hline 50°12'53'' \end{array}$$

$C = \frac{a \cdot \text{sen} \hat{C}}{\text{sen} \hat{A}}$

$\log c = \log a + \log \text{sen} \hat{C} - \log \text{sen} \hat{A}$

$\log c = 1,369216 +$

$\log S = \log b + \log a ~~+~~ \log ~~sen~~$

encantados; outros,
desiludidos. Mesmo
quando esses escrit.
compõem assuntos plenam.
literários não os podemos
incluir como produção
nossa: portugueses eram
de nasc. de formação
e de técnica artística,
quase sempre alheios à
realidade brasileira

6
6

$0,866 \times a = 1$

30

$\frac{\sqrt{3}}{2}x = 1$ 0,866

$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x = 1$ 1,732

2000 | 1,732
02680 1,154
09480
08200

$0,866 = \frac{1}{a}$ $\sqrt{3}x = 2$

$\frac{1}{a} = 0,866....$

$\frac{0,5}{2}$

23-10-64 H. B.

Emboabas: M. g. S. P.

MASCATE: Pernambuco

Felipe dos Santos