APOSTILLAS

DE

Arithmetica Elementar

POR

Antonio José Duarte

Pharmaceutico formado pela Imperial Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro, Lente de Geometria do Lyceu da Provincia das Alagoas, Lente de Arithmetica do Lyceu de Artes e Officios na mesma Provincia, e Membro fundador da Sociedade "Instrucção Popular" &c,

MACEIÓ.

TYP. DE T. DE MENEZES

[illegible]
do Geographico Alagoano.
Offerta de
Antonio Candido
[illegible] 25 Outubro de 1890

APOSTILLAS DE ARITHMETICA

APOSTILLAS

DE

ARITHMETICA ELEMENTAR

[CURSO COMPLETO]

POR

Antonio José Duarte

PHARMACEUTICO FORMADO PELA IMPERIAL FACULDADE DE MEDICINA DO RIO DE JANEIRO, LENTE DE GEOMETRIA DO LYCEU DA PROVINCIA DE ALAGOAS, LENTE DE ARITHMETICA DO LYCEU DE ARTES E OFFICIOS NA MESMA PROVINCIA E MEMBRO FUNDADOR DA SOCIEDADE — INSTRUCÇÃO POPULAR, ETC

MACEIO

TYP. DE T. DE MENEZES

1884

A MEUS FILHOS

O. L. C.

Em prova de respeito e profunda amisade

AO PUBLICO

No empenho de concorrer com o meu contingente para a construcção do grande monumento de sciencia no Brasil resolvi dar publicidade a estes apontamentos de ARITHMETICA ELEMENTAR, que, se não formam um livro perfeito, representam o fructo de longas vigilias e dão a medida do ardor com que exerço o encargo de professor de Mathematicas no Lyceu d'esta Provincia.

Não innovei cousa alguma; procurei porém, guiado pela pratica do Magisterio, dar ao meu trabalho a clareza indispensavel á comprehensão das theorias e á demonstração dos principios, pelo que nutro a convicção de que offereço á mocidade estudiosa um bom auxiliar, um livro em que facilmente poderá aprender.

ANTONIO JOSÉ DUARTE.

ARITHMETICA

LIVRO I

PARTE PRIMEIRA

NOÇÕES PRELIMINARES

MATHEMATICAS são sciencias que têm por objecto o movimento, a luz, a extensão, os numeros, etc., ou ainda sciencias que têm por fim as avaliações indirectas das quantidades.

Por esse meio vê-se o quanto é vasto o campo das mathematicas; se o estudo de cada um dos ramos desta sciencia por si só é assumpto de magna importancia, podemos crêr com fundamento que a sciencia Mathematica seja em sua totalidade — sciencia por excellencia.

A sciencia que estuda o movimento é a *Mechanica*.

Optica é a sciencia que trata da luz.

A sciencia que trata da extensão, denomina-se *Geometria*.

por fim o descobrimento das composições e decomposições que entre os numeros se effectuam.

Quando atiramos nossas vistas aos quatro angulos do universo, vemos que por todos os pontos se nos apresentam corpos e que estes gozam de propriedades mui variadas, não só entre si, mas tambem em relação aos outros.

Todo o corpo, gozando da propriedade da attracção universal, tem um peso, proporcional á qualidade do corpo.

A qualidade do corpo mostra que elle se compõe de certo numero de partes, susceptiveis de augmentar pelo accrescimo e d'uma diminuição pelo decrescimo de outras partes.

E' d'ahi que vem a idéa de Quantidade.

Quantidade ou grandeza é tudo o que é susceptivel de augmento ou de diminuição.

Unidade é uma quantidade de valor conhecido que serve para termo de comparação ás outras quantidades da mesma especie.

A differença que existe entre a unidade e a quantidade, é que a primeira tem valor conhecido e a segunda não.

Compor é reunir as partes de um todo. Ex.: 8 mais 2 é igual a 10.

Os signaes que indicam composição são os seguintes:

$+$ Que quer dizer — mais.
$\times$ ou $\cdot$ Que quer dizer — multiplicado.
$(\cdot)^n$ Que quer dizer — potencia.

Decompor é separar as partes de um todo. Ex.: 3 mais 3 (que são as partes) é igual a 6, isto é, do todo 6 tiram-se as partes 3 mais 3.

Os signaes que indicam decomposição ...

$-$	Que quer dizer — menos.
$\div$ ou $:$	Que quer dizer — dividido.
$\sqrt{}$	Que quer dizer — raiz.

Além destes signaes existem outros :

$=$	Que quer dizer — igual.
$>$	Que quer dizer — maior.
$<$	Que quer dizer — menor.
$\therefore$	Que quer dizer — logo.
$::$	Que quer dizer — assim como.
$:$	Que quer dizer — está para.
etc.	Que quer dizer — continuidade.

As quantidades dividem-se em continuas ou concretas e discontinuas ou discretas.

Quantidade concreta é aquella em que se considera um todo sem partes distinctas. Ex.: Um átomo.

Quantidade discreta é aquella em que se considera um todo com partes distinctas. Ex.: A molecula.

A quantidade discreta é representada por numeros, e é por isso que a arithmetica se occupa das quantidades discontinuas ou discretas.

As quantidades divergem quanto á sua natureza, e é d'ahi que nasce a sua divisão em homogeneas e heterogeneas.

As primeiras são as que têm naturezas communs. Ex.: Um livro, dous livros.

As segundas são aquellas que pertencem a differentes especies. Ex.: 1 livro, 1 compaço, 1 polyedro.

O parallelo estabelecido entre duas quantidades, uma de valor conhecido e outra de valor incognito, chama-se *numero*.

Os numeros dividem-se em inteiros, quebrados e mixtos.

Os primeiros são aquelles que constam unicamente de unidades. Ex.: 4; 6; 5; 3; 15; 439, etc.

Os segundos são formados de partes da unidade.

Ex.: $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{7}$; etc.

Os terceiros são aquelles que constam de unidades e de partes da unidade.

Ex.: $3\frac{4}{5}$; $5\frac{3}{8}$; etc.

O numero é considerado debaixo de tres pontos de vista importantes:

1.º Quanto á especie.
2.º Quanto aos algarismos.
3.º Quanto á divisibilidade elementar.

Quanto á especie os numeros dividem-se em abstractos e concretos.

Numero abstracto é aquelle que não determina a especie de unidade a que pertence. Ex.: 2; 48; 35, etc.

Numero concreto é aquelle que determina a especie da unidade a que pertence. Ex.: 3 kilometros; 5 homens; 3 livros.

Quanto aos algarismos, os numeros dividem-se em simples e compostos.

Numero simples é aquelle que consta de um só algarismo. Ex: 2; 4; 9.

Numero composto é aquelle que é formado por dous ou mais algarismos. Ex.: 12; 15; 3007.

Quanto á divisibilidade elementar os numeros dividem-se em pares e impares.

Numero par é aquelle que é divisivel exactamente por 2. Ex.: 12; 104; 200.

Numero impar é o que não é divisivel por 2 exactamente. Ex.: 11; 25; 31.

Numeração em geral e especialmente a decimal

Numeração é a parte da arithmetica que incumbe-se de representar os numeros, quer por palavras, quer por algarismos.

A numeração divide-se em *fallada* e *escripta*.

Numeração fallada ou *nomenclatura dos numeros* é a arte de exprimil-os por meio de palavras.

Numeração escripta é a arte de representar os numeros por meio de algarismos.

Algarismos são os caracteres convencionaes que servem para representar os numeros. Os algarismos são — 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

A numeração escripta é mais vantajosa que a fallada pelos motivos seguintes:

1.° Com um numero muito limitado de algarismos representam-se todos os numeros possiveis.

2.° Seus calculos gastam menos tempo do que se os resolvessemos pela numeração fallada.

3.° Sua escripta é menos prolixa que a da numeração fallada.

4.° Fatiga menos o calculista.

5.° E' universal.

DA NUMERAÇÃO FALLADA

A numeração fallada representa todos os numeros possiveis, empregando doze palavras e duas terminações, a saber: *um, dous, tres, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, dezena, centena* e as terminações *enta* e *lhão*.

A palavra *dezena* significa a reunião de *dez* uninas ou de cem unidades.

As differentes classes foram designadas do modo seguinte: *unidades*, *milhares*, *milhões*, *bilhões*, *trilhões*, *quatrilhões*, *quintilhões*, *sextilhões*, etc. até *nonilhões*. Por esse meio chegamos a exprimir todos os numeros comprehendidos em todas as ordens e em todas as classes.

Escreve-se um numero por meio da numeração fallada começando-se da esquerda para a direita o numero proveniente da combinação dessas palavras com as suas respectivas terminações.

Lê-se o numero começando da esquerda para a direita, segundo os preceitos de nossa lingua. Ex.: *Vinte e cinco mil seis centos e trinta e nove unidades.*

Torna-se pois muito enfadonho escrever um numero qualquer por meio da numeração fallada.

DA NUMERAÇÃO ESCRIPTA

A numeração escripta é a parte mais importante da numeração, como se vio na confrontação feita entre as duas numerações.

Esta numeração tem por base muitos systemas.

Systema de numeração é o conjuncto de algarismos, sugeitos a certas leis de numeração que têm por fim representar os numeros.

Os elementos constituintes de um systema de numeração são quatro:

1.º Os algarismos.
2.º As unidades.
3.º Lei relativa aos algarismos.
4.º Lei relativa ás unidades.

Base de um systema de numeração é o numero formado de tantas unidades, quantos são os al-

... duas unida-des; que tiver para base tres algarismos terá para base tres unidades; o que tiver, finalmente, para base dez algarismos terá para base dez unidades, e é a este ultimo que chamamos *systema decimal*.

A variedade de um systema depende da variedade de sua base; a denominação de um systema depende tambem de sua base; assim chama-se *binario* o que tem para base duas unidades, *ternario* o que tem tres e finalmente *decimal* o que tem para base dez unidades.

SYSTEMA DECIMAL

Particularidades do systema decimal

1.ª Dez unidades de qualquer ordem constituem uma de ordem immediatamente superior e vice-versa; isto é, uma unidade de qualquer ordem constitue dez de ordem immediatamente inferior.

2.ª Todo o algarismo escripto á esquerda de outro toma um valor dez vezes maior do que se estivesse a direita desse outro, e vice-versa.

Essas leis applicam-se simultaneamente aos outros systemas de numeração.

CONSEQUENCIAS DA NUMERAÇÃO

1.ª *Consequencia*. — Solução dos dous problemas seguintes:

Escripto um numero, enuncial-o.

Enunciado um numero, escrevêl-o.

Regra para resolver o 1.º *problema*. — Divide-se o numero em classes de tres algarismos, successio de milhões e assim por diante.

Lê-se da esquerda para a direita, dando a cada classe o seu nome respectivo. Ex.:

B	M	m	u
7	425	009	358

Regra para resolver o 2.º problema. — Escrevem-se successivamente da esquerda para a direita os differentes algarismos que representam as diversas classes de que se compõe o numero. Ex.: Trinta e quatro milhões e oito unidades, que se escrevem:

34	000	008
M	m	u

As classes são lidas pelos diversos algarismos referidos ás classes mais fracas; assim o numero de 25 unidades enuncia-se—*vinte e cinco*, porque esse numero compõe-se de duas dezenas e equivale a vinte unidades e cinco unidades; para não repetirmos o nome de unidades consecutivamente guardamos para dar como ultima terminação.

Semelhantemente enunciando-se vinte e cinco unidades, escreve-se vinte e cinco, porque dizer vinte e cinco unidades é dizer vinte unidades e cinco unidades formam duas dezenas e cinco unidades, escrevendo-se em seus lugares respectivos, vem o numero 25.

2.ª *Consequencia.* — Todo o numero tem dous valores: absoluto e local ou relativo.

Valor absoluto de um numero é a somma dos valores absolutos de seus algarismos. Ex.: O numero 428 tem para valor absoluto 4+2+8, que é igual a 14.

Valor local ou relativo de um

quatrocentos mais vinte, mais sete, isto é, $400 + 20 + 7$ ou 427.

Semelhantemente todo o algarismo tem dous valores: absoluto e local ou relativo.

Valor absoluto de um algarismo é o que elle tem pela sua fórma. Ex.: 9 igual a 9.

Valor relativo de um algarismo é o que elle tem conforme o lugar em que se acha collocado. Ex.: 527.

O valor relativo do algarismo 2 é vinte unidades.

3.ª *Consequencia.*—Multiplica-se um numero tantas vezes por 10, quantos são os zeros que accrescentamos á sua direita e vice-versa; divide-se um numero tantas vezes por 10, quantos são os zeros que abstrahimos á sua direita.

Não damos a demonstração desta consequencia nesta occasião por pertencer ella á theoria da multiplicação e divisão.

O zero não tem valor algum e sim duas serventias:

1.ª Mostrar que no lugar onde elle está não ha unidades d'aquella ordem.

2.ª Conservar os valores relativos dos outros algarismos.

TABELLA DAS ORDENS E CLASSES

1.ª *Classe*	1.ª ordem — unidades 2.ª ordem — dezenas 3.ª ordem — centenas	Unidades
2.ª *Classe*	4.ª ordem — unidades 5.ª ordem — dezenas 6.ª ordem — centenas	Milhares

3.ª Classe { 8.ª ordem — dezen[as]
9.ª ordem — centenas }

4.ª Classe { 10.ª ordem — unidades
11.ª ordem — dezenas
12.ª ordem — centenas } Bilhões

5.ª Classe { 13.ª ordem — unidades
14.ª ordem — dezenas
15.ª ordem — centenas } Trilhões

. . . .

. . . .

8.ª Classe { 22.ª ordem — unidades
23.ª ordem — dezenas
24.ª ordem — centenas } Sextilhões

etc.

PARTE SEGUNDA

Operações sobre os numeros inteiros

Operação é toda a composição ou decomposição para effectuar ou effectuada sobre as quantidades.

Quando a operação está para se effectuar chama-se — operação indicada.

As operações dividem-se em operações da composição e operações da decomposição.

As operações da composição são: — addição, multiplicação e potencias. As da decomposição são: — subtracção, divisão e raizes.

Em qualquer operação notam-se 5 partes, que são: problema, definição, regra, demonstração da regra e prova.

Problema — é a questão que tem por fim achar o valor de certas quantidades por meio de outras dadas, com as quaes conservam relações estabelecidas pelo proprio enunciado.

Em um problema consideram-se os elementos seguintes: quantidades dadas, que se chamam dados do problema; quantidades pedidas, que se chamam incognitas, e as relações que ligam as quantidades dadas ás pedidas, que se chamam condições do problema.

A definição tem por fim fazer conhecer a operação de que se trata, quando é dado o seu problema. A regra tem por fim estabelecer o meio de chegarmos ao resultado da operação. A demonstração da regra tem por fim estabelecer raciocinios que mostrem a certeza da regra. A prova é uma operação que tem por fim verificar o resultado da primeira.

Addição é a primeira operação da composição e tem por fim reunir dois ou mais numeros em um só que contenha tantas unidades quantas ha nos numeros dados.

Problema. — Dadas as partes de um todo, que se denominam *parcellas*, formar o todo chamado *total*.

Diz-se indifferentemente *addicionar*, *sommar* ou *ajuntar* dois ou mais numeros.

Convém advertir que as parcellas devem ser todas da mesma especie, e da mesma é a somma.

Para sommar dois numeros de um só algarismo, ajunta-se ao primeiro cada uma das unidades que contém o segundo, uma por uma. Se, por exemplo, tivermos de sommar os numeros 8 e 5, diremos: 8 mais 1=9; 9 mais 1=10; 10 mais 1=11; 11 mais 1=12; 12 mais 1=13.

A somma pedida é o numero 13.

Addição dos numeros compostos

Regra. — Escrevem-se as parcellas umas por baixo das outras, de modo que as quantidades homogeneas correspondam-se em linhas verticaes. Sommam-se os algarismos que compõem a primeira columna á direita; se o resultado não exceder a 9, escreve-se tal qual; se for maior que 9, isto é, se for um numero composto de unidades e dezenas, decompõe-se em unidades da ordem de que se trata e da ordem immediatamente superior; escrevem-se as da mesma ordem abaixo da columna respectiva, e as da ordem imme[...]

mentalmente para juntar á columna a que pertencem, e assim procede-se até a ultima columna, cujo resultado se escreve tal qual.

Ex.:

$$\begin{array}{r} 5957 \\ 3026 \\ 563 \\ 741 \\ \hline 10287 \end{array} \qquad \text{ou assim} \qquad \begin{array}{r} 5957 \\ 3026 \\ 563 \\ 741 \\ \hline 8 \\ 21 \\ 17 \\ 17 \\ \hline 10287 \end{array}$$

Demonstração. — Escrevem-se as parcellas de modo que as quantidades homogeneas fiquem dispostas em columnas verticaes, porque só podemos sommar quantidades homogeneas ou da mesma especie. Sublinha-se para separar as parcellas do total.

Somma-se successivamente da direita para a esquerda, porque as unidades se formam nesse sentido, e assim podemos contar logo com as reservas e praticar uma só operação, ao passo que sommando da esquerda para a direita vamos ter o inconveniente de praticar mais de uma operação.

Se a somma de cada columna não exceder de nove escreve-se tal qual, porque temos algarismos proprios para represental-a.

Prova. — A prova da addição se pratica effectuando de novo a operação da parte inferior para a superior; se der o mesmo resultado conclue-se que a operação está certa, porque a ordem das parcellas não altera a somma.

A primeira operação da decomposição denomina-se — *subtracção.*

Problema. — Dado um todo que se chama *minuendo* e uma parte chamada *subtrahendo*, achar a outra denominada *resto, excesso* ou *differença.*

O minuendo e o subtrahendo chamam-se termos da subtracção.

Definição. — Subtracção é a operação que tem por fim, dada a somma de dois numeros e um delles, achar o outro; ou é a operação que tem por fim achar o excesso de um numero sobre outro menor.

Se os termos da subtracção constarem de um só algarismo, obtem-se a differença addicionando ao menor as unidades precisas para igualar o maior, uma por uma, e contando quantas ajuntaram-se. Se pretendermos subtrahir 3 de 5, diremos: 3 mais 1=4; 4 mais 1=5; ajuntamos 2 unidades, 2 é o excesso de 5 sobre 3.

Acha-se o mesmo resultado subtrahindo do maior as unidades do menor, uma por uma: 5 menos 1=4; 4 menos 1=3; 3 menos 1=2; tiramos 3 justamente, ficando o numero 2, differença pedida.

Subtracção dos numeros compostos

Regra. — Escreve-se o minuendo e por baixo d'elle o subtrahendo, ficando as quantidades homogeneas dispostas em columnas verticaes.

Sublinha-se; subtrahe-se successivamente da direita para a esquerda cada algarismo do subtrahendo do seu correspondente do minuendo.

Ex.:

$$\begin{array}{r} 87534 \\ 53423 \\ \hline 34111 \end{array}$$

Demonstração. — Escreve-se o minuendo e por baixo delle o subtrahendo, ficando as unidades da mesma ordem em columnas verticaes, porque só podemos subtrahir quantidades homogeneas, isto é, da mesma especie.

Sublinha-se para separar o resto dos termos da subtracção.

Subtrahe-se successivamente da direita para a esquerda, como manda a regra, porque assim podemos contar logo com as reservas que vêm da direita.

Dão-se tres factos na subtracção:

1.° Podem os algarismos do subtrahendo ser menores que os correspondentes do minuendo; nesse caso não ha difficuldade, porque do maior podemos tirar o menor.

2.° Póde acontecer que haja algum algarismo do subtrahendo igual ao correspondente do minuendo; então não ha differença, porque quantidades iguaes não differem e o resto (*zero*) se escreve abaixo da columna respectiva.

3.° Póde acontecer que haja algum algarismo do subtrahendo maior que o correspondente do minuendo; neste caso usaremos de um dos dous artificios seguintes:

1.° *Artificio.* — Juntar 10 unidades ao algarismo do minuendo e desfalcar uma ao algarismo seguinte do mesmo minuendo.

2.º *Artificio.* — Juntar 10 [...] do minuendo e uma ao immediato á esquerda do subtrahendo.

Do 1.º artificio. Ex.:

$$\begin{array}{cccc}
7 & 15 & 12 & 15 \\
8 & 6 & 3 & 5 \\
4 & 7 & 5 & 6 \\
\hline
3 & 8 & 7 & 9
\end{array}$$

Demonstração. — Quando juntamos 10 unidades ao algarismo do minuendo, o resto torna-se augmentado de 10 unidades, porque a relação entre elles é directa; quando tiramos uma unidade ao algarismo seguinte do mesmo minuendo á esquerda, tornamos esse minuendo desfalcado de 10 unidades, pois uma unidade da esquerda vale 10 da direita; veio portanto o resto desfalcado de 10 unidades pela parte do minuendo e augmentado de 10 unidades pela parte do mesmo minuendo, não soffreu alteração.

Do 2.º artificio. Ex.:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 16 & & 13 & & 15 \\
8 & & 6 & & 3 & & 5 \\
4 & {\scriptstyle 5} & 7 & {\scriptstyle 8} & 5 & {\scriptstyle 6} & 6 \\
\hline
3 & & 8 & & 7 & & 9
\end{array}$$

Demonstração. — Este artificio não altera o resultado, porque quando juntamos 10 unidades ao algarismo do minuendo, augmentamos o resto de 10 unidades, pois a relação é directa; quando juntamos uma unidade ao algarismo seguinte do subtra... de 10 unidades esse subtrahendo, pois uma unidade da esquerda vale 10 da direita, porém o resto vem diminuido de 10 unidades, por ser inversa a relação entre elles. Ora, se pela parte do minuendo o resto vem augmentado de 10 unidades e pela do subtrahendo diminuido de 10 unidades, houve perfeita compensação e o resto é verdadeiro.

Prova. — Prova-se a subtracção sommando o subtrahendo com o resto, cujo total deve reproduzir o minuendo para certeza da operação; e isto porque a somma das parcellas é necessariamente igual ao todo.

DA MULTIPLICAÇÃO

A segunda operação da composição toma esse nome.

Problema. — Dados os factores de um producto achar o producto.

Definição. — Multiplicação é a operação que tem por fim, dados dous numeros, achar um terceiro que se derive do primeiro, do mesmo modo que o segundo se deriva da unidade.—O primeiro chama-se *multiplicando*, o segundo — *multiplicador*, e o terceiro — *producto*. Os dous primeiros denominam-se *factores do producto*.

A addição, que tem parcellas identicas, transforma-se n'uma multiplicação; neste caso um dos factores é uma parcella e o outro é o numero dellas. Eis, pois, a origem da multiplicação.

Ex.:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ 25 \\ \hline \end{array}$$

1.ª *Propriedade.* — A ordem de factores abstractos não altera o producto. $2\times3=3\times2$. Multiplicar 2 por 3 é formar uma addição em que 2 entra tres vezes como parcella :

$$2\times3=2+2+2$$

Tambem multiplicar 3 por 2 é formar uma addição em que 3 entra duas vezes como parcella :

$$3\times2=3+3$$

Decompondo as parcellas tanto da primeira como da segunda addição, obtemos o resultado seguinte :

$$\left.\begin{array}{c}1+1\\1+1\\1+1\end{array}\right\}1.^a \qquad \left.\begin{array}{c}1+1+1\\1+1+1\end{array}\right\}2.^a$$

$$\overline{2\times3} \qquad\qquad \overline{3\times2}$$

Comparando estas duas addições ver-se-ha que que não differem, por serem constituidas do mesmo numero de elementos, e por isso tambem não differem as addições d'onde isso proveio ; deste modo virão iguaes os productos de 2×3 e de 3×2.

2.ª *Propriedade.* — Multiplicar um numero por um producto é o mesmo que multiplical-o por um factor, e o producto assim formado multiplicar pelo outro factor ; vejamos :

O nosso fim é provar que multiplicar 3×35 é o mesmo que multiplicar 3 por 7, que é um dos factores de 35, e o producto assim formado por 5, que é o outro factor.

dessa igualdade por 3, vem o seguinte;
$3 \times 35 = 3 \times 5 \times 7$; invertendo a ordem dos factores no segundo membro da igualdade presente, temos: $3 \times 35 = 3 \times 7 \times 5$.

3.ª *Propriedade.* — Multiplica-se um numero tantas vezes por 10 quantos forem os zeros que á sua direita accrescentarem-se. Ex.: $25 \times 10 = 250$.

Demonstração. — Comparando o numero 25 com 250 observamos que o 5 que no primeiro caso occupava o lugar das unidades, passa no segundo a occupar o das dezenas; se uma dezena é dez vezes mais do que uma unidade, duas serão duas vezes dez, tres serão tres vezes dez vezes mais, e finalmente cinco dezenas serão cinco vezes dez vezes mais, logo cinco acha-se com um valor dez vezes maior.

Applicando-se um raciocinio identico, quanto ao que diz respeito a duas dezenas e duas centenas, chegariamos a provar que o algarismo 2 do numero 250 recebeu um valor dez vezes maior que o 2 do numero 25.

Ora, se as partes integrantes do numero 250 receberam um valor dez vezes mais, é claro que o numero 250 tambem recebesse um valor dez vezes maior.

Distinguem-se 3 casos na multiplicação:

1.° Um numero simples por digito.
2.° Um numero simples por composto.
3.° Um numero composto por composto.

Para o primeiro caso não existe regra alguma, e os productos são obtidos por meio da tabella de Pythagoras.

Tabella de Pythagoras é uma taboada que contém os productos dos numeros digitos pelos numeros simples dispostos em linhas horisontaes, das quaes a primeira representa o producto dos numeros simples por 1, a segunda por 2, a terceira por formar-se-ha a 2ª linha sommando a p... sigo mesmo ; a 3ª sommando a primeira com a segunda ; a 4ª sommando a primeira com 3.ª Em geral obtem-se qualquer linha sommando a primeira com a penultima.

TABELLA DE PYTHAGORAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para multiplicar um numero simples por outro simples, toma-se na 1ª linha horisontal um dos factores e na primeira vertical o outro factor, no encontro dessas linhas achar-se-ha o producto pedido. Ex. : $5 \times 8 = 40$.

Regra do 2.º caso. — Escreve-se o multiplicando e por baixo delle o multiplic...

querda o multipli-cador por cada algarismo do multiplicando ; se o producto não exceder a nove, escreve-se tal qual se acha, porém se exceder decompõe-se o producto em unidades da ordem de que se trata e da ordem immediatamente superior; escrevem-se as primeiras por baixo da columna respectiva e guardam-se mentalmente as segundas para addicionar ao producto seguinte, e assim por diante até a formação do ultimo producto.

Demonstração. — Multiplica-se o multiplicador por cada algarismo do multiplicando, porque, seja por ex.: 252×3, que dispondo-se, segundo a regra, temos :

$$\begin{array}{r} 252 \\ 3 \\ \hline 756 \end{array}$$

Multiplicando 252 por 3 é fazer uma somma em que 252 entra tres vezes como parcella, isto é :

$$3 \times 252 = \left\{\begin{array}{r} 252 \\ 252 \\ 252 \\ \hline 756 \end{array}\right.$$

Sommando a columna das unidades forma-se uma addição em que 2 entra 3 vezes como parcella, o que equivale a formar o producto de 2 por 3; sommar a columna das dezenas é formar um producto em que 5 entra tres vezes como parcella; applicando-se um raciocinio identico seriamos obrigados a multiplicar 3 por duas centenas, como queri

homogeneas se corresp
caes ; sublinha-se e multiplica-se cada algarismo do multiplicador por todo o multiplicando, a partir da direita, e escrevem-se os productos parciaes um por baixo dos outros, de modo que o primeiro algarismo da direita de cada um se ache defronte do algarismo do multiplicador que servio a formal-o ; sommam-se os productos parciaes, a somma é o producto total.

Ex. :

$$
\begin{array}{r}
26534 \\
463 \\
\hline
79602 \\
159204 \\
106136 \\
\hline
12285242
\end{array}
$$

Demonstração. — A demonstração da regra do 3° caso é a mesma que a do 2°, defferindo só na parte que manda multiplicar *cada algarismo do multiplicador por todo o multiplicando*, em vez de multiplicar o *multiplicador* pelo multiplicando.

Multiplica-se cada algarismo do multiplicador pelo multiplicando, porque não temos uma tabella que forneça productos de numeros compostos ; e por isso somos obrigados a decompor o 3° caso em diversos do 2° e estes em diversos do 1.°

DA DIVISÃO

Chama-se divisão a segunda operação da decomposição.

Divisão é a operação que tem por fim dado o tro. O producto dos dous numeros chama-se *dividendo*, o factor dado — *divisor*, e o factor pedido — *quociente*.

Problema. — Dado um producto que é o dividendo — e um factor que denomina-se — divisor, formar o outro factor que é o quociente.

São tres os casos da divisão:

1.° De um numero simples por outro ou de um composto de dous algarismos por simples, caso em que o primeiro algarismo do dividendo á esquerda seja menor que o divisor.

2.° De um numero de dous algarismos por um simples, caso em que seja o primeiro algarismo do dividendo á esquerda pelo menos igual ao divisor, ou de um numero de tres ou mais algarismos por simples.

3.° De um numero composto por outro.

Tambem se encontram os quocientes dos numeros incluidos no primeiro caso, na tabella de Pythagoras.

Toma-se na primeira linha horisontal o divisor, desce-se por ella até encontrar o dividendo e no extremo da linha vertical que corresponder a esta estará o quociente.

Ex.: $45 \div 9 = 5$; $8 \div 4 = 2$; $15 \div 5 = 3$.

Regra do 2.° caso. — Escreve-se o dividendo e em seguida o divisor, separados por um traço vertical, e por baixo do divisor passa-se um traço horisontal.

Divide-se successivamente da esquerda para a direita o primeiro ou os dous primeiros algarismos do dividendo pelo divisor; o quociente achado escreve-se por baixo do divisor e por elle se o multiplica; obtido o producto subtrahe-se-o do dividendo parcial á esquerda, baixa-se o algarismo se-formando um n... como com o primeiro, e assim até o ultimo algarismo do dividendo.

Ex.:

```
8 5 6 3 2 5 0 | 5
5             |---------------
------------- | 1 7 1 2 6 5 0
3 5           |
3 5           |
------------- |
  . 6         |
    5         |
------------- |
    1 3       |
    1 0       |
------------- |
    . 3 2     |
      3 0     |
------------- |
      . 2 5   |
        2 5   |
------------- |
          . 0 |
```

Demonstração. — Escreve-se o dividendo e em seguida o divisor, porque o uso tem admittido. São separados por um traço vertical para não constituirem um só numero; passa-se uma linha horisontal por baixo do divisor para separal-o do quociente; começamos a divisão da esquerda para a direita, porque o dividendo é um todo, e como tal contém as reservas que formam-se da direita para a esquerda e vão se accumular á parte esquerda do dividendo, e ainda porque é á parte esquerda do dividendo que se acham completos os dividendos parciaes.

Divide-se da esquerda para a direita, porque á esquerda do dividendo acham-se os productos completos, e ainda porque lá estão as reservas que vieram da direita e assim podem ser desenglobadas.

Divide-se o primeiro ou os dous primeiros algaquocientes aos do primeiro caso.

O quociente obtido multiplica-se pelo divisor e o producto subtrahe-se do dividendo, porque esse dividendo é um todo composto de duas partes: 1ª, producto do divisor pelo quociente; 2ª, reservas que vêm da direita.

Ora, para determinar uma parte — que são as reservas — dado um todo que é o dividendo — é necessaria a outra parte — que é o quociente — e para isso multiplica-se o divisor pelo quociente, cujo producto é uma parte do dividendo, e esta parte sendo subtrahida do todo, vem a outra parte — que são as reservas — segundo o problema da subtracção.

Baixa-se á direita do resto o algarismo seguinte do dividendo, porque este resto representa reservas e temos de addicionar a ellas o algarismo da direita do dividendo d'onde provieram para formar um novo dividendo e com elle proceder como fica explicado.

Regra do 2.º caso. — Escreve-se o dividendo e em seguida o divisor, separados por um traço vertical, e por baixo do divisor passa-se um traço horisontal.

Divide-se successivamente da esquerda para a direita o primeiro ou os dous primeiros algarismos do dividendo *pelo primeiro á esquerda do divisor*; o quociente multiplica-se pelo divisor e o producto subtrahe-se da esquerda do dividendo.

Baixa-se, á direita do resto, o algarismo seguinte do dividendo, formando um novo dividendo, com o qual se procede da mesma maneira, e assim até findarem-se os algarismos do dividendo.

```
6 9
1 7 7
1 6 1
. 1 6 3
  1 6 1
  . . 2 5
    . 2 3
    . . 2 6
        2 3
        . 3
```

A demonstração deste terceiro caso é a mesma do segundo, pois a regra tambem é quasi a mesma; differindo apenas no ponto em que diz: *divide-se o primeiro ou os dous primeiros algarismos do dividendo á esquerda pelo primeiro á esquerda do divisor.*

A razão d'isso é porque não conhecemos os quocientes de numeros do terceiro caso, pelo que fazemos como manda a regra, afim de reduzil-os aos do segundo caso e ainda aos do primeiro.

Prova. — Multiplica-se o quociente pelo divisor, cujo producto addicionado ao resto, se houver, deve reproduzir o dividendo para exactidão da operação.

A divisão diz-se esgotada quando o ultimo resto fôr menor que o divisor; e diz-se exacta quando se obtem zero para ultimo resto.

O dividendo e o divisor chamam-se *termos da divisão.*

Complemento das quatro operações

SUBTRACÇÃO

Subtrahir uma somma de um numero é o mesmo que subtrahir desse numero successivamente cada parcella da somma.

Subtrahir de um numero uma differença é o mesmo que subtrahir d'esse numero o primeiro termo da differença e addicionar o segundo ao resultado.

Ex. 1º: $a-(m+n)=a-m-n$, pois é claro que tirando *m* e *n* de *a*, fica este diminuido de $m+n$.

Ex. 2º: $a-(m-n)=a-m+n$. Se de *a* tirar-se *m*, o resultado será $a-m$; mas, se em vez de subtrahir *m*, subtrahir-se $m-n$, é claro que, se o diminuidor fica desfalcado de *n*, o resto ficará augmentado de *n*, logo será $a-m+n$.

Quando o parenthese fôr precedido do signal — *menos*, os termos podem passar para o exterior tomando o signal contrario.

MULTIPLICAÇÃO

1.º *Tres factores sendo dados, póde inverter-se a ordem dos dous ultimos sem que se altere o producto.*

Ex.: $8\times5\times3=8\times3\times5$.

Escrevendo-se o numero 8 cinco vezes em uma linha e repetindo-se esta linha 3 vezes, vem:

$$\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
8+8+8+8+8\\
8+8+8+8+8\\
8+8+8+8+8
\end{array}\right\}=8.5.3\\
\hline
8.3+8.3+8.3+8.3+8.3=8.3.5
\end{array}$$

$8.5+8.5+8.5$ ou simplesmente $8.5.3$ é a somma das linhas horisontaes; $8.3+8.3+8.3+8.3+8.3$ ou $8.3.5$ representa a somma das linhas verticaes; estes productos são iguaes, pois representam a somma dos mesmos elementos.

2.º *Quatro ou mais factores sendo dados póde-se mudar a ordem sem o producto alterar o seu valor.*

Tomemos a, b, c, d; vamos provar exuberantemente que no producto $a\times b\times c\times d$, o factor que passar para todos os outros.

Supponha-se que $a \times b$ seja um producto effectuado, e conseguintemente um factor unico, e então teremos :

$$a.b.c.d=(a.b).c.d=(a.b).d.c=a.b.d.c$$

Vê-se assim que o factor d passou a occupar o lugar do precedente sem alterar o valor do producto.

Ora, em virtude do principio anterior, temos :

$$a.b.d=a.d.b;$$

multiplicando-se ambos os membros desta igualdade por c, vem :

$$a.b.d.c=a.d.b.c$$

Por esse meio ainda se vê o factor d occupar o lugar do factor antecedente sem alteração do producto.

Attendendo que a ordem de dous factores abstractos não altera o producto, vem :

$$a.d=d.a;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por $b.c$, vem :

$$a.d.b.c=d.a.b.c$$

Finalmente, vê-se que o factor d póde occupar todos os lugares ; um raciocinio identico provaria que qualquer outro factor gozaria da mesma propriedade que o factor d.

3.° *O producto de dous ou mais numeros contém todos os factores* que $21=7\times3$ e que $18=3\times6$, vem:

$$21\times18=(7\times3)\times(3\times6)=7\times3\times3\times6=378$$

4.° *Quando um dos factores ou ambos terminarem em zeros, despresão-se estes na multiplicação e ajuntam-se depois ao producto total.*

Ex.:

$$\begin{aligned}6400\times25000&=64\times100\times25\times1000\\&=64\times25\times100\times1000\\&=64\times25\times100000\\&=1600(00000\end{aligned}$$

5.° *Multiplicar uma somma ou uma differença por um numero é o mesmo que multiplicar cada termo do multiplicando por esse numero, e addicionar os resultados, ou subtrahir o 2.° do 1.°*

1.° Seja $(m+n)$ d.

Com effeito

$$(m+n)d=m+n+m+n+m+n+\ldots+m+n;$$

a ordem das parcellas não alterando a somma, vem:

$$(m+n)d=m+m+m+\ldots+n+n+\ldots+n;$$

quando *m* e *n* entrarem nesta somma *d* vezes, vem:

$$=md+nd$$

2.° $$\begin{aligned}(m-n)d&=m-n+m-n+\ldots+m-n\\&=m+m+m+\ldots+m-n-n-n\ldots-n\\&=md-nd\end{aligned}$$

Pôr o factor commum em evidencia é transformar uma multiplicação indicada em uma multiplicação effectuada.

6.° *Multiplicar uma somma por uma somma é o mesmo que multiplicar cada termo do multiplicador pelo multiplicando e addicionar os resultados.*

1° Ex.: seja $(a+b)(c+d)$.

Supponhamos que a somma $a+b$ seja igual a h, teremos:

$$(a+b)(c+d)=h(c+d)=hc+hd$$

Substituindo-se em vez de h o seu valor $a+b$, vem:

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d\ ;$$

praticando as operações indicadas, vem:

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

2° Ex.: seja $(a-b)(c+d)$.

Representando h a differença $a-b$, temos:

$$(a-b)(c+d)=h(c+d)\ ;$$

effectuando as operações indicadas no 2° membro, vem:

$$(a-b)(c+d)=hc+hd$$

Substituindo n'essa igualdade em vez de h o seu valor e em acto consecutivo effectuando as operações indicadas, teremos:

$$\begin{aligned}(a-b)(c+d)&=(a-b)c+(a-b)d \text{ ou}\\ &=ac-bc+ad-bd\end{aligned}$$

7.° *Multiplicar uma differença por uma somma ou uma differença por outra differença é o mesmo*

1° Ex. : seja $(a+b)(c-d)$.

Suppondo $a+b=h$, teremos :

$$(a+b)(c-d)=h(c-d)=hc-hd=(a+b)c-(a+b)d\,;$$

praticando as operações indicadas no 2° membro, vem :

$$(a+b)(c-d)=ac+bc-(ad+bd)=ac+bc-ad-bd$$

2° Ex. : seja $(a-b)(c-d)$.

Suppondo tambem que h seja igual a $a-b$ e praticando as operações indicadas, teremos :

$$(a-b)(c-d)=h(c-d)=hc-hd=(a-b)c-(a-b)d \text{ ou}$$

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-(ad-bd)=ac-bc-ad-bd$$

DIVISÃO

1.° *Se na divisão exacta, multiplicarmos ou dividirmos o dividendo por um certo numero, sem que se altere o divisor, o quociente fica multiplicado ou dividido por esse mesmo numero.*

Seja D o dividendo, d o divisor, q o quociente ; pela hypothese, temos :

$$D=dq\,;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por m, vem :

$$Dm=dqm=d\times qm$$

O dividendo Dm é m vezes maior que D; o quo-

ciente é *qm*, e p
ciprocamente.

2.° *Si multiplicarmos ou dividirmos o divisor, sem que se altere o dividendo, o quociente fica dividido ou multiplicado pelo mesmo numero.*

Figure-se a mesma igualdade

$$D=dq$$

Multiplicando o divisor d pela quantidade m e dividindo o quociente q pela mesma quantidade, vem:

$$D=dm\times\frac{q}{m}$$

Esta igualdade indica que sendo o divisor dm, m vezes maior que d, o quociente $\frac{q}{m}$ é m numero de vezes menor que o quociente q; e reciprocamente.

3.° *O quociente não se altera quando n'uma divisão exacta multiplicamos ou dividimos ambos os termos pelo mesmo numero.*

Supponhamos ainda

$$D=dq$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade pela quantidade m, vem:

$$Dm=dqm=dm.q$$

Si a divisão é esgotada, chamando r o resto, temos:

$$D=dq+r$$

$$Dm=dqm+rm=dm$$

$$rm < dm;$$

logo a divisão de Dm por dm dá para quociente q, e o resto rm, numero de m vezes maior que r.

O resto da divisão de D por d, é m vezes menor que o resto da divisão de Dm por dm.

4.º *Quando a divisão é exacta, o dividendo, sendo o producto do divisor pelo quociente, deve conter em si não só todos os factores do divisor, mas ainda todos os factores do quociente; basta portanto supprimir no dividendo todos os factores do divisor, para obter o quociente.*

Ex.:

$$\frac{150}{15} = \frac{2\times5\times3\times5}{3\times5} = 2\times5 = 10$$

5.º *Quando os termos de uma divisão terminam em zeros, supprime-se na divisão o mesmo numero de zeros em ambos os termos; mas se houver resto juntam-se-lhes á direita os zeros desprezados no dividendo.*

Ex.:

$$\frac{4320000}{7200} = \frac{43200}{72} = 600$$

6.º *Dividir um numero por um producto é o mesmo que dividil-o successivamente pelos factores d'esse producto.*

1º *Caso:* supponhamos que a divisão seja exacta; supponha-se tambem N o numero, a, b e c os factores do producto abc, e que a quantidade q seja o quociente nesta divisão.

Ex.:

$$N \div abc = q$$

logo $$N = abc \times q;$$

a, vem :

$$N \div a = bc \times q \, ;$$

dividindo ainda ambos os membros por b, teremos:

$$(N \div a) \div b = c \times q$$

e continuando a divisão chegamos ao resultado seguinte :

$$(N \div a \div b) \div c = q$$

2º *Caso :* figure-se a divisão esgotada ; sendo r o resto, teremes :

$$N = aq + r$$
$$q = bq' + r'$$
$$q' = cq'' + r''$$

Substituindo-se na 1ª igualdade em vez de q o seu valor, vem :

$$N = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r \, ;$$

substituindo-se nesta igualdade q' pelo seu valor, teremos :

$$N = ab(cq'' + r'') + ar' + r = abcq'' + abr'' + ar' + r$$

logo, dividindo-se ambos os membros desta igualdade por *abc*, vem :

$$\frac{N}{abc} = q'' + \frac{abr'' + ar' + r}{abc}$$

Ora, a—1, b—1, c—1, são os maiores valores de r, r', r'' e portanto a somma abr'' + ar' + r não excede a $ab(c-1) + a(b-1) + a-1 = abc - ab + ab - a + a - 1 = abc - 1$, logo *numero é o mesmo que dividir por esse numero cada termo da somma ou da differença, e addicionar os restos ou subtrahir o segundo do primeiro.*

Seja

$$\frac{a+b}{d} \quad e \quad \frac{a-b}{d}$$

$$\frac{a+b}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d};$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por d, vem:

$$\frac{a+b}{d} \times d = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) \times d$$

logo

$$a+b = \frac{a}{d} \times d + \frac{b}{d} \times d \text{ ou}$$

$$a+b = a+b$$

O mesmo raciocinio se emprega á expressão $\frac{a-b}{d}$

QUADRADOS

Potencia é um producto de factores iguaes.

Raiz é uma quantidade que multiplicada por si uma ou mais vezes, produz a potencia.

As potencias e raizes dividem-se, quanto ao gráo, em potencias e raizes do 1º, 2º, 3º, 4º, 5º gráo, etc.

dos ; as do ...

As raizes do 2º grão denominam-se *raizes qua-dradas* ; as do 3º, *raizes cubicas*.

A arithmetica elementar só trata das potencias e raizes do 2º e 3º grãos.

Problema. — Dado um factor que se denomina *raiz quadrada*, formar o producto chamado *quadrado*.

Definição. — Quadrado é um producto de dous factores iguaes.

Casos. — O quadrado offerece tres casos.

1.º Quando a raiz quadrada for representada por um numero simples.

2.º Quando a raiz quadrada for representada por um numero simples seguido de zeros.

3.º Quando a raiz quadrada for um numero composto de algarismos significativos.

Regra. — Para o 1º caso não temos regra alguma e os quadrados se obtém pela tabella seguinte, que se chama — *tabella dos quadrados*.

Raizes	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Regra do 2º caso. — Quadra-se o numero simples e accrescenta-se á direita do producto o dobro do numero de zeros que tiver a raiz.

Ex. : $(400)^2 = 160000$.

Demonstração. — Attendendo-se que 400 representa o producto de 4 por 100, segue-se que o seu quadrado encerra os seguintes factores :

$$(400)^2=160000$$

Regra do 3º caso. — Formam-se os quadrados de todas as ordens e tomam-se os duplos productos d'ellas todas, dous a dous, sem que entre producto repetido. Ex. :

$$(836)^2=(800)^2+(30)^2+(6)^2+2\times800\times30+2\times800\times6+$$
$$+2\times30\times6$$

Demonstração. — O quadrado sendo uma multiplicação em que os dous factores são iguaes, segue-se que na multiplicação do 1º algarismo do multiplicador por todo o multiplicando, tem-se de formar o quadrado d'esse primeiro algarismo, porque no multiplicando existe o seu igual e correspondente ; do mesmo modo na multiplicação do 2º algarismo do multiplicador por todo o multiplicando tem-se de formar o quadrado do 2º pela mesma razão, e procedendo-se semelhantemente teremos de formar o quadrado do 3º, do 4º, e bem assim de todos os outros ; e de mais na multiplicação de cada algarismo do multiplicador por todo o multiplicando formam-se productos iguaes 2 a 2 obtidos do seguinte modo : o 1º algarismo do multiplicando pelo 2º do multiplicador, o 2º do multiplicando pelo 1º do multiplicador, o que dá lugar a tomar-se o dobro do 1º algarismo da 1ª ordem pela 2ª, visto que os productos teem de ser sommados ; o 1º do multiplicador pelo 3º do multiplicando, o 3º do multiplicador pelo 1º do multiplicando, o que dá lugar a tomar-se o dobro da 1ª ordem pela 3ª ; empregando-se um raciocinio analogo seremos obrigados a tomar o dobro da 1ª pela 4ª, se acaso producto repetido, porque não ... dous productos iguaes.

O quadrado de um numero composto de dezenas e unidades consta de 3 partes :

1.ª Quadrado das dezenas.

2.ª Dobro das dezenas pelas unidades.

3.ª Quadrado das unidades.

Ex. : Sendo *a* as dezenas e *b* as unidades, vem :

$$(a+b)^2=(a)^2+2ab+b^2$$

$$(53)^2=(50)^2+2\times50\times3+(3)^2$$

Observações

1.ª *Todo o numero terminado em numero impar de zeros, não é quadrado perfeito.* Ex. : 4000.

Demonstração. — Quando um quadrado termina em zeros, é porque a sua raiz termina ; elevando-se esta raiz 4000 ao quadrado, dá 16000000, que termina em numero par de zeros.

2.ª *Todo o numero par não divisivel por 4 não é quadrado perfeito.*

Demonstração. — A formula geral dos numeros pares é (2n) que elevada ao quadrado, dá :

$(2n)^2=4n^2$, que é divisivel por 4.

3.ª *Todo o numero impar que, tirada uma unidade não for divisivel por 4, não é quadrado perfeito.*

Demonstração. — A formula geral dos numeros impares é — „2n + 1„ —, que elevando-se ao quadrado, vem : $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$; tirando uma unidade, vem : $4n^2$ ...

vel por 4 não é quadrado perfeito.

4.º *Todo numero terminado nos algarismos 2, 3, 7 e 8 não é quadrado perfeito.*

Demonstração. — O que influe na formação do quadrado á direita do numero é o quadrado das unidades, e como nenhum delles terminam nos algarismos 2, 3, 7 e 8, não são quadrados perfeitos.

5.º *A relação que existe entre o quadrado e a raiz quadrada é directa e de „100„ para „10„.*

Demonstração. — O quadrado sendo um producto de 2 factores iguaes e como a relação que existe entre o quadrado (*que é um producto*) e o factor (*que é a raiz quadrada*) é directa, segue-se que o producto tornando-se 10 vezes maior pela parte de um, o factor torna-se tambem 10 vezes maior, e ainda o producto pela parte de ambos os factores, torna-se 10×10 ou 100 vezes maior.

6.º *Duas raizes deffirindo de uma unidade, os seus quadrados deffirirão do dobro da menor raiz augmentada de uma unidade.*

Demonstração. — Supponhamos que *a* seja um numero inteiro e que $a+1$ seja outro consecutivo á *a*; affirma-se que os seus quadrados deffirirão do dobro da menor raiz augmentada de uma unidade.

Ora, $(a)^2$, $(a+1)^2$; a^2, $2a+1+a^2$, reduzindo os termos, vem: $2a+1$.

CUBOS

Origem. — A elevação ao cubo é uma operação derivada de um producto de tres factores iguaes.

Definição. — A elevação ao c
ção que tem por fim formar um producto de tres factores iguaes.

Consideram-se tres casos na elevação ao cubo.

1.º Quando a raiz cubica é representada por numero simples.

2.º Quando a raiz é representada por numero simples seguido de zeros.

3.º Quando a raiz é representada por numero composto não comprehendido no segundo caso.

Para o 1º caso não existe regra alguma, e os cubos são obtidos por meio de duas multiplicações consecutivas, por isso que o cubo é um producto de tres factores iguaes.

Tabella dos cubos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Raizes.
1	8	27	64	125	216	343	512	729	Cubos.

Regra do 2º caso. — Cuba-se o numero simples e accrescenta-se á sua direita o triplo do numero de zeros que tem a raiz. Ex.: $(40)^3 = 64000$.

Demonstração. — Attendendo-se que 40 representa o producto de 4×10, segue-se que o seu cubo tambem conterá os mesmos factores, que são: $4 \times 10 \times 4 \times 10 \times 4 \times 10$; e segundo o principio que — *a ordem dos factores não altera o producto*, vem: $4 \times 4 \times 4 \times 10 \times 10 \times 10 = 64000$; ora, comparando-se este numero com o resultado obtido pela regra, observaremos que 64 representa o cubo do numero simples, e que tendo este de ser multiplicado por 1000 accrescentaremos 3 zeros á sua direita, que é o triplo dos zeros que tem a raiz.

productos do quadrado de todas ellas tres a tres sem entrar producto repetido, mais o sextuplo do producto de todas as ordens.

$$\text{Ex.: } (546)^3 = (500)^3 + (40)^3 + (6)^3 + 3\times(500)^2\times 40 + 3\times(500)^2\times 6 + 3\times(40)^2\times 500 + 3\times(40)^2\times 6 + 3\times(6)^2\times 500 + 3\times(6)^2\times 40 + 6\times 500\times 40\times 6.$$

Demonstração. — O cubo, sendo um producto de 3 factores iguaes, vem:

$$(546)^3 = 546\times 546\times 546 = (546)^2\times 546$$

Na multiplicação de $546\times(546)^2$ não só se obtêm os cubos de 6, 4 e 5, porque no multiplicando já se acham elles elevados ao quadrado, como tambem tomamos os triplos de todas as ordens tres a tres. —Quando se multiplica o primeiro algarismo do multiplicador pelo primeiro do multiplicando, tomamos o triplo das unidades, quando multiplicamos semelhantemente o 2º do multiplicando pelo 2º do multiplicador, tomamos o triplo das dezenas, quando multiplicamos o 3º do multiplicando pelo 3º do multiplicador, tomamos o triplo das centenas; vemos por esse meio que os productos dos quadrados de todas as ordens são tomados tres a tres sem entrar producto repetido, mais ainda o producto de $(500\times 40\times 6)6$.

Observações

1.ª *Todo numero par não divisivel por 8 não é cubo* numeros p...

$(2n)^3 = 8n^3$ que é divisivel por 8; logo todo numero par não divisivel por 8 não é cubo perfeito.

2.º *Todo o numero terminado em numero de zeros não multiplo de 3, não é cubo perfeito.*

Demonstração. — Pelo desenvolvimento do 2º caso desta operação, se vê que não póde um cubo terminar em zeros sem que acabe tambem a raiz, e então o numero de zeros do cubo deve ser tres vezes os da raiz cubica e portanto multiplo.

3.º *A relação que existe entre o cubo e a raiz cubica é directa de 1000 para 10, isto é, quando o cubo torna-se 1000 vezes maior, a sua raiz torna-se 10 vezes maior.*

Demonstração. — O cubo sendo um producto de 3 factores iguaes, e, a relação entre o producto e os factores directa, segue-se que o producto tornando-se 10 vezes maior por um factor, torna-se tambem 10 vezes maior pela parte do 2º, e 10 vezes maior pela parte do 3º, a raiz tambem 10 vezes maior. Ex.: $(10)^3 = 1000$.

4.º *O cubo de um numero composto de dezenas e unidades consta de quatro partes:*

1ª o cubo das dezenas; 2ª o triplo do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades; 3ª triplo das dezenas multiplicado pelo quadrado das unidades; 4ª o cubo das unidades.

Ex.: $a + b$; *a*, dezenas, *b*, unidades.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 \times b + 3a \times b^2 + b^3.$$

RAIZ QUADRADA

multiplicada p... vez produz o quadrado.

Consideram-se dous casos na extracção da raiz quadrada.

1.º Quando o quadrado é um numero simples ou um numero composto de dous algarismos.

2.º Quando o quadrado é um numero composto de tres ou mais algarismos.

Para o 1º caso não existe regra alguma e as raizes são obtidas por meio da tabella dos quadrados dos numeros simples.

Regra do 2º caso. — *Divide-se o numero em classes de dous algarismos da direita para a esquerda (a ultima póde ter um sómente). Extrahe-se a raiz do maior quadrado contido á esquerda na primeira classe, e tem-se o primeiro algarismo da raiz pedida.*

Subtrahe-se da primeira classe o quadrado do algarismo achado ; á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo e divide-se a parte á esquerda pelo dobro da raiz achada ; o quociente é o segundo algarismo da raiz, ou é maior. Para o verificar, escreve-se este quociente á direita do dobro da raiz e por elle se multiplica o numero assim formado. Si o producto for menor que o dividendo seguido do algarismo separado, o experimentado é o pedido, e subtrahe-se o producto do numero com que foi comparado. Si for maior, diminue-se o quociente achado de uma unidade, e torna-se a verificar. A' direita do novo resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo, divide-se a parte á esquerda pelo dobro de toda a raiz achada, e assim se continua até ter empregado todas as classes do numero proposto. Quando, tendo escripto á direita de um resto a classe seguinte e separado o ultimo algarismo, a parte á esquerda é menor que o dobro da raiz até então achada, a raiz pedida não tem unidades da or- ...*reve-se um zero, bai-*

$$\sqrt[2]{465325} = 682$$

46.5 3.2 5	682	
36	$6 \times 2 = 12$	$68 \times 2 = 136$
10 5.3	128	1362
10 2 4	8	2
00 2 9 2.5	1024	2724
2 7 2 4		
0 2 0 1		

Explicação e demonstração. — O numero proposto representa o quadrado de um numero composto e por isso encerra o quadrado das dezenas da raiz, que dando pelo menos centenas não influirá nas unidades nem nas dezenas, por isso separamos por meio de um ponto os dous ultimos algarismos a direita; applicando ao numero resultante o mesmo raciocinio, separamos outros dous algarismos e assim por diante até dividirmos todo o numero em classes de dous algarismos.

Extrahe-se a raiz da ultima classe á esquerda, porque sendo o numero dado composto dos quadrados das diversas ordens da raiz, seguir-se-ha que as classes da direita não representam os quadrados perfeitos d'essas ordens, por isso que faltam-lhes as reservas que affluiram para a esquerda, d'onde concluimos que a ultima classe á esquerda contém o quadrado da ordem mais elevada da raiz, e por essa razão extrahe-se a raiz da esquerda para a direita, encerrando ainda mais as reservas da direita que temos de desenglobar.

A raiz achada escreve-se como se fosse divisor, porque o uso tem assim admittido, como tambem escrevem-se os dobros no lugar proprio do quociente. Eleva-se essa raiz ao quadrado e subtrahe-se da classe considerada, porque esta classe representa um todo, formado de duas partes

1.ª O producto da ordem mais elevada da raiz.
2.ª As reservas que affluem da direita.

Determinando estas reservas é necessario subtrahir do todo a parte conhecida, que no caso presente é o quadrado da raiz achada.

Baixa-se e escreve-se a classe seguinte á direita do resto, porque este resto representa as reservas que provieram da direita, e tendo nós de completar as outras partes de que é formado o quadrado, necessitamos de addicionar suas reservas e por isso escrevemos a seguinte classe á sua direita.

Attendendo que a segunda parte do desenvolvimento do quadrado, representa o dobro da ordem mais elevada pela immediata superior, segue-se que a 2ª parte exprimirá pelo menos o dobro das dezenas, e por isso será um producto de dous factores, um dos quaes é o dobro da ordem mais elevada e o outro é a ordem immediata.

Dividimos o restante da esquerda, que representa o producto pelo seu factor, que é o dobro da raiz achada, porque neste caso o quociente é o outro factor e exprimirá o outro algarismo da raiz.

Observações

1.ª *Os algarismos da raiz são tantos quantas são as classes em que se dividir o numero.*

2.ª *A raiz póde ser fraca ou forte; no 1º caso o quadrado será menor que o verdadeiro e então a differença entre o numero dado e o quadrado ou quadrados será igual ou maior que o dobro da raiz achada augmentada de uma unidade; no 2º o quadrado será maior que o verdadeiro e não poderá subtrahir-se do numero dado.*

Problema. — Dado um producto que se chama *cubo*, achar o factor denominado *raiz cubica.*

Definição. — Raiz cubica é a quantidade que multiplicada duas vezes por si produz o cubo.

Consideram-se dous casos na extracção da raiz cubica.

1.° Quando o cubo é representado por numero simples ou composto de dous ou tres algarismos,

2.° Quando o cubo é representado por numero composto de quatro ou mais algarismos.

Para o 1° caso não existe regra alguma e as raizes são obtidas por meio da tabella dos cubos;

Regra do 3° caso. — Divide-se o numero dado em classes de tres algarismos da direita para a esquerda (*a ultima póde ter um ou dous algarismos*).

Procura-se a raiz do maior cubo contido na primeira classe á esquerda, e della subtrahe-se o cubo do algarismo achado.

A' direita do resto colloca-se o primeiro algarismo da classe seguinte; divide-se o numero resultante pelo triplo do quadrado da raiz achada, o quociente é o segundo algarismo da raiz ou um numero maior. Para se o verificar escreve-se o quociente á direita do algarismo da raiz já determinado, eleva-se ao cubo o numero assim formado, e compara-se o resultado com as duas primeiras classes á esquerda do numero proposto.

Si o numero formado por estas não for menor que aquelle cubo, o quociente é o segundo algarismo da raiz; si for menor, diminue-se o quociente de uma unidade e torna-se a verificar. Das duas primeiras classes á esquerda do numero dado subtrahe-se o cubo da raiz achada; escreve-se á direita do resto o primeiro algarismo da classe seguinte; divide-se o numero resultante pelo triplo do quadrado de toda a raiz achada, o quociente é o 3° algarismo da raiz ou um numero maior.

Para o verificar escreve-se o quociente á direita da parte achada da raiz, eleva-se ao cubo o numero assim formado e compara-se com as tres primeiras classes á esquerda do numero proposto. Si o numero formado por estas não for menor que aquelle cubo, o quociente é o 3º algarismo da raiz; se for menor diminue-se o quociente de uma unidade e torna-se a verificar. Das tres primeiras classes á esquerda do numero dado subtrahe-se o cubo de toda a raiz achada; escreve-se á direita do resto o primeiro algarismo da seguinte classe; divide-se o numero resultante pelo triplo do quadrado de toda a raiz achada, e continua-se do mesmo modo até ter considerado todas as classes.

Si depois de escripto á direita de um numero o primeiro algarismo da seguinte classe do numero proposto resultar um numero menor que o triplo do quadrado da raiz achada, a raiz pedida não contém unidades da ordem que se procura e nella escreve-se zero, collocam-se á direita do resto os dous outros algarismos da classe considerada e o primeiro da seguinte, e continua-se a operação. Ex.:

258.7 35.642	636	
216	$3\times(6)^2=108$	$3\times(63)^2=3969$
.42 7.35		
250 0 47	63	636
..8 6 856.42	63	636
257 2 593 56	189	3816
..1 4 762 86	378	1908
	3969	3816
	63	404496
	11907	636
	23814	2426976
	250047	1213488
		2426976
		257259356

Demonstra...
ultima classe á esquerda, porque é
a parte mais importante, que é o cubo da ordem
mais elevada e acham-se agglomeradas as reservas
que affluem da direita para a esquerda.

Escreve-se a raiz como se fosse o divisor por uma mera convenção. Eleva-se a raiz achada ao cubo e subtrahe-se da classe considerada, porque essa classe é representada por um todo formado de duas partes:

1.ª Cubo da ordem mais elevada da raiz.

2.ª Reservas pertencentes ás outras partes do cubo que affluiram da direita para a esquerda.

Como nós queremos determinar as reservas conhecidas do todo, é necessario tambem conhecer a outra parte, isto é, o cubo da raiz achada, e subtrahir ao mesmo tempo d'essa classe, em virtude do problema da subtracção, isto é: quem de um todo tira uma parte, o resto representa a outra—*reservas*...

Baixa-se e escreve-se á direita do resto a classe seguinte, porque esse resto representando reservas da direita deve ser addicionado á ordem immediata, afim de que as outras partes de que consta o cubo fiquem completas; separa-se com um ponto os dous ultimos algarismos a direita e divide-se o restante da esquerda pelo triplo do quadrado da raiz achada, porque a segunda parte do desenvolvimento de um cubo é representada por um producto que tem os seguintes factores:

1.º Triplo do quadrado da ordem mais elevada.

2.º Ordem immediata.

Sendo a raiz composta, segue-se que a ordem elevada é pelo menos dezenas, que elevando-se ao cubo produz pelo menos centenas, e por isso não influe não só nas unidades, como tambem nas dezenas.

Já determinamos a ordem mais elevada da raiz e cumpre...

que essa ordem representa um dos factores do producto acima mencionado, que é expresso pelos restantes algarismos da esquerda, segue-se que dividindo-o pelo outro factor (triplo do quadrado da raiz achada), o quociente será o outro algarismo da raiz e assim successivamente.

As razões d'ahi em diante succedem-se.

Observações

1.ª *Os algarismos da raiz são tantos quantas forem as classes em que o numero se dividir.*

2.ª *Determinar a raiz quando é forte e quando é fraca.*

No 1° caso facilmente se reconhece, porque o seu cubo é maior que o verdadeiro e não se poderá subtrahir das classes consideradas.

No 2° caso compara-se o resto com o triplo do quadrado da raiz achada (que é menor), mais o triplo dessa raiz augmentada de uma unidade; si esse resto fôr menor que a raiz achada será ella verdadeira; no caso contrario será fraca.

PARTE TERCEIRA

Propriedades geraes dos numeros

Divisibilidade

A theoria da divisibilidade dos numeros tem por fim estabelecer um certo numero de principios com os quaes se possa conhecer quando um numero é divisivel por outro, e, quando não, determinar o resto sem effectuar a divisão.

Divisibilidade é a propriedade que certos numeros têm de ser divisiveis exactamente uns pelos outros.

Um numero divisivel por outro contém exactamente esse outro. Ex.: 6 é divisivel por 2; 15 é divisivel por 5.

Um numero é *divisor* ou *submultiplo* de outro quando se contém exactamente n'esse outro.

Ex.: 8 é divisor ou submultiplo de 32; 6 é divisor ou submultiplo de 54.

Esta theoria tem por base os principios seguintes:

1º *Principio. — Todo o numero que divide as partes de um todo, divide necessariamente ao todo.*

Demonstração. — Tomemos dous numeros *A* e *B*, divisiveis por um terceiro *C*; seja por hypothese *S* a somma delles e *Q* o quociente.

Pela propriedade do dividendo, vem:

$$\frac{A}{C} = Q \text{ ou } A = CQ; \quad \frac{B}{C} = Q' \text{ ou } B = CQ';$$

sommando as duas igualdades ordenadamente, vem :

$$A + B = CQ + CQ' ;$$

pondo em evidencia o factor (*C*) e substituindo em vez de *A* + *B* o seu valor, temos :

$$S = C (Q + Q') ;$$

dividindo ambos os membros d'esta igualdade por *C*, vem :

$$\frac{S}{C} = Q + Q'$$

Se *Q* e *Q'* são numeros inteiros, a somma tambem o é ; ora, se a somma destes dous numeros representa o quociente da divisão de *S* por *C*, é porque *C* divide exactamente a *S*.

2º *Principio. — Todo o numero que divide a um todo e a uma de suas partes, divide necessariamente a outra parte.*

Demonstração.—Seja *S* o todo, *A* uma parte e *B* a outra ; representando o quociente por *Q* e o divisor por *C*, e applicando a propriedade do dividendo, teremos :

$$\frac{S}{C} = Q \text{ ou } S = CQ ; \frac{A}{C} = Q' \text{ ou } A = CQ' ;$$

subtrahindo ordenadamente a segunda igualdade da primeira, vem :

$$S - A = CQ - CQ' ;$$

em evidencia o fa

$$B = C(Q - Q');$$

dividindo ambos os membros d'esta igualdade por *C*, vem a seguinte que demonstra o principio :

$$\frac{B}{C} = Q - Q'$$

Ora, sendo *Q* e *Q'* numeros inteiros (*Q* > *Q' por que o 1º dividendo é maior que o 2º*), a differença entre elles tambem é ; logo *C* tambem divide a *B*.

3º *Principio. — Todo numero que divide a outro, divide a qualquer multiplo d'esse outro.*

Demonstração. — Seja *A* um numero, *AM* um multiplo, *C* o divisor e *Q* o quociente.

Pela hypothese :

$$\frac{A}{C} = Q \text{ ou } A = CQ$$

Multiplicando por *M* ambos os membros d'esta igualdade, *AM*=*CMQ* ; dividindo ambos os membros por *C*, vem :

$$\frac{AM}{C} = MQ$$

O producto *MQ* é inteiro por serem inteiros os seus factores ; este producto representa o quociente de *AM* dividido por *C* e é porisso que *C* divide exactamente ao multi

4º Principio. — Sendo uma de duas parcellas divisivel por um certo numero e a outra não, a somma não é divisivel por esse numero, e dá o mesmo resto que a parcella não divisivel.

Demonstração. — Supponhamos a divisivel por c, e b não; affirma-se que S não póde ser divisivel por c.

Ora,
$$a = cq$$
$$b = cq' + r \text{ (resto)};$$

sommando ordenadamente as duas igualdades, vem:

$$a + b = cq + cq' + r$$

O resto (r) é menor que o divisor (c), por que a somma S dividida por c dá para quociente $q + q' + r$, o mesmo que se dá na divisão de b por c; substituindo na igualdade ultima $a + b$ pelo seu valor, vem:

$$S = cq + cq' + r$$

5º Principio. — Quando a somma de dous numeros é divisivel por um numero e uma parcella não, a outra tambem não o é: dá para resto o que falta ao resto da primeira parcella para igualar o divisor.

Demonstração. — Seja S a somma, a a primeira parcella e b a segunda; representem-se os quocientes por q e q'.

Pelas propriedades dos dividendos

$$S = cq\ ;\ a = cq' + r$$

Subtrahindo a segunda igualdade da primeira, vem:

$$S - a = cq - cq' - r$$

Por ser o resto (r) [illegible] e representando-se por (r') um novo resto, teremos:

$$r = c - r'$$

Ora, (r') é o que falta a (r) para ser igual ao divisor (c) e porisso vem:

$$S - a = cq - cq' - (c - r') \text{ ou}$$
$$S - a = cq - cq' - c + r'$$

Substituindo nesta ultima igualdade $S - a$ por seu valor e pondo o factor c em evidencia, dá o seguinte:

$$b = c(q - q' - 1) + r';$$

o resto (r') é menor do que c; conseguintemente a parcella b dividida por c dá para quociente $q - q' - 1$ deixando para resto (r'), isto é, o que falta ao primeiro resto (r) para completar o divisor c.

6° *Principio.—Quando os factores de um producto não forem divisiveis por um certo numero, o producto dividido por esse numero dá o mesmo resto que o producto dos restos dos factores.*

Demonstração. — Sejam os factores a e b, c o divisor de ambos, q o quociente da primeira divisão e q' o da segunda, r o resto da primeira e r' o da segunda.

Pela propriedade dos dividendos

$$a = cq + r$$
$$b = cq' + r'$$

Multiplicando ambos os membros destas igualdades ordenadamente, vem :

$$ab = c^2qq' + cq'r + cqr' + rr' \;;$$

pondo o factor commum (c) em evidencia, temos :

$$ab = c\,(cqq' + q'r + qr') + rr' \;;$$

logo o resto (rr') da divisão de ab por c é igual ao producto de $r \times r'$ da divisão dos factores a e b por c.

Caracteres de divisibilidade

1° POR 2 E 5 E SUAS POTENCIAS

A potencia do gráo m *de* 10 *é um multiplo de* 2^m *e* 5^m

Demonstração. — Tomemos 10^m, que em virtude da definição de potencias, vem :

$$10^m = 10 \times 10 \times 10 \times \ldots\ldots \times 10$$

Attendendo que $10 = 2 \times 5$ e substituindo na igualdade ácima os seus valores, teremos :

$$10^m = 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times \ldots\ldots \times 2 \times 5$$

Attendendo ainda que a ordem dos factores não altera o producto :

$$10^m = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times \ldots\ldots \times 5$$

ou $10^m = 2^m \times 5^m$

a um multiplo d'uma pot... ro formado por tantos algarismos á direita quantas forem as unidades do expoente da potencia.

Demonstração.—Figure-se um numero composto qualquer ; seja o numero 5846 por exemplo.

Decomponha-se este numero em dezenas e unidades :

$$5846 = 5840 + 6 = 584 \times 10 + 6 = 584 \times 2 \times 5 + 6$$

Decomponha-se o mesmo numero 5846 em centenas e unidades, e ainda mais em milhares e unidades.

$$5846 = 5800 + 46 = 58 \times 100 + 46 = 58 \times 2^2 \times 5^2 + 46.$$

$$5846 = 5000 + 846 = 5 \times 1000 + 846 = 5 \times 2^3 \times 5^3 + 846.$$

Para que um numero seja divisivel por 2 ou por 5 ou pelas suas potencias, é necessario que seja o numero formado por tantos algarismos da direita quantas forem as unidades do expoente da potencia.

D'ahi conclue-se que os numeros são divisiveis por 2 quando terminarem nos algarismos 0, 2, 4, 6 ou 8 ; são divisiveis por 5 os numeros acabados em 0 ou 5.

2° POR 9, POR 6 E POR 3

Toda a potencia de 10 é um numero multiplo de 9 mais 1.

que $10 = 9 + 1$

e desdobrando os valores de 10^2, 10^3 e etc., vem:

$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 9 \times 11 + 1$$
$$10^3 = 1000 = 999 + 1 = 9 \times 111 + 1$$
$$10^4 = 10000 = 9999 + 1 = 9 \times 1111 + 1$$

e etc.

Todo o numero composto é igual a um multiplo de 3, mais a somma do valor absoluto d'esse numero.

Demonstração. — Tomemos o numero 5864 e decomponhamol-o em seus valores relativos; vem:

$$\begin{aligned} 5864 &= 5000 + 800 + 60 + 4 \\ &= 5.1000 + 8.100 + 6.10 + 4 \end{aligned}$$

Attendendo que $1000 = 999 + 1$ e etc., vem:

$$= 5(999 + 1) + 8(99 + 1) + 6(9 + 1)4 + ;$$

praticando as operações indicadas

$$= 5.999 + 5 + 8.99 + 8 + 6.9 + 6 + 4$$

ou $= 5.111.9 + 8.11.9 + 6 + 5 + 8 + 6 + 4$

Pondo o factor commum (9) em evidencia, dá:

$$5864 = 9(5.111 + 8.11 + 6) + 5 + 8 + 6 + 4.$$

Para que um numero seja divisivel por 9 é bastante que a somma de seu valor absoluto de 9 ou multiplo de 9.

Todo o numero é divisivel por 3, quando a somma dos seus algarismos é divisivel por 3.

3º DIVISIBILIDADE POR 11

Uma potencia de gráu par de 10 (ou uma unidade de ordem impar) é um multiplo de 11 mais 1.

Uma potencia de gráu impar de 10 (ou uma unidade de ordem par) é um multiplo de 11 menos 1.

Demonstração.—Dividindo uma unidade de qualquer ordem por 11 obtem-se successivamente para restos 1, 10, 100, 1000, etc., e para quocientes 9, 90, 909, 9090, 90909, etc.

Figurando diversas potencias de 10 (pares) e desdobrando os seus valores, vem :

$$100 = 10^{2} = 11.9 + 1 = m.11 + 1$$

$$10000 = 10^{4} = 11.909 + 1 = m.11 + 1$$

$$1000000 = 10^{6} = 11.90909 + 1 = m.11 + 1$$

e etc.

Para as potencias de gráus impares :

$$10 = 11 - 1$$

$$1000 = 10^{3} = 11.90 + 10 = 11.90 + \\ + 11 - 1 = 11.91 - 1 = m.11 - 1$$

Qualquer numero composto é um multiplo de 11 augmentado da somma dos algarismos da ordem impar, e diminuido da somma dos algarismos da ordem par.

Demonstração. — Tome-se um numero qualquer

$$6538 = 6000 + 500 + 30 + 8. =$$
$$= 6 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 8$$
$$= 6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10 + 8$$

Attendendo que 10^3 é uma potencia de gráu impar e que 10^2 é outra de gráu par, vem :

$$= 6(m.11 - 1) + 5(m.11 + 1) + 3(11 - 1) + 8$$

Multiplicando, teremos :

$$= 6.m.11 - 6 + 5.m.11 + 5 + 3.11 - 3 + 8$$

Pondo o factor (11) em evidencia vem :

$$= 11(6.m + 5.m + 3) + (8 + 5) - (6 + 3),$$

ou simplesmente :

$$= m.11 + (8 + 5) - (6 + 3)$$

Todo o numero em que a somma dos algarismos das casas pares, menos a somma dos algarismos das casas impares, a contar da direita, for 0, 11 *ou multiplo de* 11 *é divisivel por* 11.

Theoria dos numeros primos

Numero primo é o que só é divisivel por si e pela unidade. *Numeros primos entre si* são os que não admittem por divisor commum senão a *unidade*.

Do exposto tiram-se as seguintes conclusões :

1ª Dous ou
entre si.

2ª Um numero primo que não divide a outro é primo com elle.

PROPRIEDADES DOS NUMEROS PRIMOS

1ª *Todo o numero que divide um producto de dous factores e é primo com um delles, divide necessariamente ao outro factor.*

Demonstração. — Seja AB um producto de dous factores A e B; represente-se por D o divisor do producto sendo primo com o factor A.

Dividindo A por D, a divisão deixa resto :

$$\frac{A}{D} = Q + R \quad \text{ou} \quad A = DQ + R$$

Dividindo o divisor pelo resto, a divisão tambem deixa resto :

$$\frac{D}{R} = Q' + R' \quad \text{ou} \quad D = RQ' + R' ;$$

continuando as divisões n'esta mesma proporção, vêm as seguintes igualdades :

$$R = R'Q'' + R''$$
$$R' = R''Q''' + R''',$$

e assim por diante até que o resto iguale a unidade.

Suppondo que o resto da divisão de R'' por R''' seja igual á unidade, temos :

$$R'' = R'''Q'''' + 1$$

igualdades por B, vem as seguintes:

$$AB = BDQ + BR$$
$$BD = BRQ' + BR'$$
$$BR = BR'Q'' + BR''$$
$$BR' = BR''Q''' + BR'''$$
$$BR'' = BR'''Q'''' + B \qquad (1 \times B = B)$$

Ora, D divide a AB pela hypothese, divide a BDQ porque é seu multiplo, logo divide a BR; D divide a BD porque é seu multiplo,—divide a BRQ' por ser multiplo de BR, logo divide a BR'; e assim até chegar-se a provar que D divide a BR'' e a BR''' e a B finalmente.

D'este principio conclue-se a segunda propriedade.

2ª *Um numero dividindo a um producto de muitos factores e sendo primo com todos, excepto um, divide a este ultimo.*

Demonstração. — Seja N o numero que divide ao producto $ABCD$ e é primo com os factores A, B, C.

Ora, se N divide ao producto $ABCD$ e é primo com o factor A, divide ao producto BCD; se divide a este e é primo com B, divide a CD; se divide a este é primo com o factor C, divide a D, que é o ultimo.

3ª *Todo numero primo que dividir a um producto, dividirá a algum dos factores d'esse producto.*

Demonstração. — Seja ABC um producto divisivel pelo numero D.

Supponha-se que D não divide ao factor A, logo A e D são primos entre si e pelo principio 1º, D divide ao factor BC; suppondo ainda que D não divide a B, é porque D é primo com elle, e conse-
... divide a C.

4ª *O numero primo que dividir uma potencia qual quer, divide tambem a raiz d'esta potencia.*

Demonstração.—Supponhamos o numero primo A, divisor da potencia B^m; pela definição de potencia

$$B^m = B \times B \times B \times \ldots \times B$$

O numero primo A divide a B^m; em virtude da propriedade n. 3 o numero primo que dividir a um producto, dividirá a algum dos factores seus, que no presente caso é o factor B ou raiz de B^m.

5ª *O numero divisivel por outros primos entre si dous a dous é divisivel pelo producto d'elles.*

Demonstração. — Supponhamos A um numero divisivel pelos numeros primos a, b, c, (*primos entre si dous a dous*).

Por hypothese vem:

$$\frac{A}{a} = q \quad \text{ou} \quad A = aq\ ;$$

b dividindo A e sendo primo com o factor a, é por que divide ao factor q (1ª *propriedade*) e porisso vem:

$$\frac{q}{b} = q' \quad \text{ou} \quad q = bq'\ ;$$

finalmente c sendo divisor de A e primo com b, divide a q; se q é um producto dos factores b e q', c sendo primo com b, divide impreterivelmente ao outro factor q', isto é:

$$\frac{q'}{c} = q'' \quad \text{ou} \quad q' = cq''\ ;$$

multiplicando as igualdades ordenadamente, teremos :

$$Aqq' = abcqq'q''$$

Eliminando os factores communs aos dous membros (*qq'*), vem :

$$A = abcq'' ;$$

dividindo ambos os membros por *abc*, vem a igualdade que demonstra o principio :

$$\frac{A}{abc} = q''$$

Conclusão. — Os caracteres de divisibilidade por productos de numeros primos entre si, têm origem n'esta propriedade ; um numero é divisivel por 6, por exemplo, quando for divisivel por 2 e por 3 ; quando um numero for divisivel por 3 e por 4, é divisivel por 12 ; é divisivel por 15 quando o for por 3 e por 5.

6ª *A condição de um numero qualquer ser divisivel por outro, é conter todos os factores primos que esse outro, e que nenhum d'elles tenha expoente menor no dividendo que no divisor.*

Demonstração.— Seja *A* um numero e *b* o outro por elle divisivel exactamente, d'onde temos :

$$\frac{A}{b} = q \quad \text{ou} \quad A = bq$$

Esta condição é necessaria, porque o dividendo sendo o producto do divisor pelo quociente, precisamente contém todos os factores do divisor ou multiplicando e todos os factores do multiplicador ou quociente.

Ora, se A [...] numero b, é divisivel por elles separadamente e portanto divisivel por b, que representa o producto.

7ª *Sendo determinada uma serie de numeros primos, cujo producto seja igual a um numero proposto, não póde este ser igual ao producto de outros factores primos; quer isto dizer que um numero não póde ser decomposto em mais de um systema de factores primos.*

Demonstração.— Supponhamos A um numero e a, b, c os numeros primos de uma serie determinada

$$A = a \times b \times c$$

Na realidade o numero A não póde ser decomposto em mais de um systema de factores primos, porque o numero que dividir ao numero proposto A, dividirá a algum dos factores a, b, c, e como o numero primo que divide outro é impreterivelmente igual a elle, é claro que A só póde ter divisores primos iguaes a a, b, c.

8ª *O numero que não é quadrado e não é divisivel por nenhum numero menor que a parte inteira da sua raiz quadrada, é primo.*

Demonstração. — Represente-se o numero não quadrado que não admitte divisor inferior á parte inteira da sua raiz pela quantidade N; quer-se demonstrar que este numero não admitte divisor superior a ella. Sabe-se que

$$N = \sqrt{N} \times \sqrt{N};$$

dado o caso de N ter algum divisor superior á parte inteira da sua raiz, representando esse divisor por D e o quociente por Q, vem:

$$N = D \times Q;$$

ra da raiz de N pelo menos em uma unidade; excede portanto á raiz exacta de N, que por sua vez differe da parte inteira em menos de uma unidade.

Logo, sendo $D > \sqrt{N}$, será $Q < \sqrt{N}$; Q sendo numero inteiro, é igual ou inferior á parte inteira da raiz; portanto existindo a relação $N = D \times Q$, N terá um divisor menor que a parte inteira da sua raiz, o que não tem cabimento, por ser contra a hypothese.

— D'esta propriedade tira-se a conclusão seguinte:

Para conhecer-se quando um numero é primo, basta experimentar a divisão d'esse numero por todos os numeros primos successivamente até achar um quociente igual ou inferior ao divisor respectivo.

Se o quociente for igual ao divisor respectivo, elle será a raiz quadrada do numero proposto; se não for, é claro que a raiz quadrada seja menor que o divisor; em qualquer hypothese continuar as tentativas é perder tempo.

9ª *O numero que não é primo admitte pelo menos um divisor primo.*

Demonstração. — Seja N um numero qualquer não primo.

Se este numero não é primo tem um ou mais divisores primos, necessariamente o menor d'elles a, é primo; se não o fosse teria um divisor b menor que elle; b dividindo a dividiria N (multiplo de a); então a não seria o menor multiplo de N, o que é contra a hypothese.

10ª *O numero que não é primo é igual a um producto de factores primos.*

Demonstração. — Supponhamos A um numero não primo; este numero admitte pelo menos um

divisor primo *a*,
da divisão de *A* por *a*, vem :

$$A = aq$$

Se *q* for um numero primo, o principio está provado, mas se não o for, admitte um divisor primo *b*, e então virá :

$$q = bq' ;$$

substituindo *q* pelo seu valor na primeira igualdade, vem :

$$A = abq'$$

Se *q'* for numero primo, o principio está provado, mas se o não for tem um divisor primo *c*, e então teremos :

$$q' = cq'' ;$$

substituindo *q'* pelo seu valor na igualdade precedente, virá :

$$A = abcq''$$

e assim successivamente.

Os quocientes diminuindo á proporção que se effectuam as divisões, não podemos deixar de chegar a um quociente que seja numero primo, e por conseguinte o numero proposto será igual a um producto de factores primos.

MODO DE OBTER A SERIE NATURAL DOS NUMEROS PRIMOS

Para conhecer os numeros primos existentes desde 1 átè 100, é necessario determinar quaes

99, os numeros divisiveis por si mesmos e pela unidade.

Os numeros primos inferiores a 10 são 2, 3, 5, 7 ; basta supprimir da serie 11, 12, 13, 14, 15 . . . 99, todos os numeros que não tiverem por divisores 2, 3, 5 e 7 para descobrir os numeros primos comprehendidos entre 10 e 100 ; porque se 2, 3, 5 e 7 são os unicos numeros primos inferiores a 10, todo o numero inferior a 100 que não for divisivel por 2, 3, 5 ou 7, é numero primo.

Para chegar a este fim supprime-se da serie natural 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . . 99.

1° Todos os numeros que ficam de dous em dous principiando pelo numero 2 exclusivamente ; 4, 6, 8, 10, 12, etc., que sao multiplos de 2.

2° Todos os numeros que ficam de tres em tres, principiando pelo numero 3 exclusivamente ; 3, 6, 9, 12, 15, etc. (alguns já excluidos) ; são estes os multiplos de 3.

3° Todos os numeros que ficam de cinco em cinco, principiando por 5 ; 10, 15, 20, 25, 30, 35 (tambem alguns já excluidos) ; todos multiplos de 5.

4ª Todos os que distarem de sete em sete, principiando do numero 7 ; 14, 28, 35, 42, 49, 56, etc. (multiplos de 7).

Os numeros primos inferiores a 100 são os seguintes :

2 (o unico par), 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Formação dos divisores de um numero

Para determinar os factores primos de um numero applica-se a regra seguinte :

Regra.—*Divide-se o numero dado pelos numeros primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., de modo que não excedam a sua raiz quadrada, até achar um numero primo que o divida; effectua-se então a divisão.*

Pratica-se com o quociente do mesmo modo que o numero dado, attendendo que o quociente não póde admittir divisor menor que o divisor precedente.

Continua-se a operação até chegar a um quociente que seja numero primo.

Explicação.—Seja *A* um numero qualquer e *a* o menor numero primo que o divide. Representando por *Q* o quociente da divisão, vem:

$$\frac{A}{a} = Q \quad \text{ou} \quad A = aQ$$

Decomponha-se o quociente *Q* em factores primos; seja *b* o menor numero primo que divide *A* (nunca menor que *a*), e representando por *Q'* o quociente, vem:

$$\frac{Q}{b} = Q' \quad \text{ou} \quad Q = bQ' \;;$$

substituindo na primeira igualdade o valor de *Q*, temos:

$$A = a \times b \times Q' \;;$$

continuando a decompor *Q'* em factores primos e assim por diante.

Concluir-se-ha esta decomposição quando se obtiver para quociente um numero primo.

Para maior clareza tome-se o numero 7350

... numero por 2, tem-se para quociente 3675, isto é,

$$7350 = 2 \times 3675$$

Decompondo 3675 em factores primos e attendendo ser elle divisivel por 3, dá para quociente 1225, de modo que

$$3675 = 3 \times 1225$$

Decompondo 1225, que é divisivel por 5, vem :

$$1225 = 5 \times 245 \quad ;$$

245 é divisivel por 5, logo :

$$245 = 5 \times 49 \ ;$$

Decompondo 49, que é divisivel por 7, temos :

$$49 = 7 \times 7$$

Conclusão :

$$7350 = 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2.$$

Seguindo a disposição vulgar, vem :

$$\begin{array}{r|l}
7350 & 2 \\
3675 & 3 \\
1225 & 5 \\
245 & 5 \\
49 & 7 \times 7
\end{array}$$

Para determinar o numero total dos divisores d'um numero sem os formar, applica-se a seguinte propriedade :

ao producto dos expoentes dos seus factores primos, augmentando cada um de cada uma unidade.

Demonstração. — Seja :

$$A = a^n \, b^m \, c^s$$

Formando os divisores de *A*, vem :

$$1 \, , \, a \, , \, a^2 \, , \, a^3 \, \ldots\ldots\ldots\ldots a^n \, ;$$

esta serie é composta de ($n + 1$) divisores ; multiplicando cada um dos termos d'esta serie por

$$b \, , \, b^2 \, , \, b^3 \, , \ldots\ldots\ldots\ldots b^m \, ,$$

produzem-se m novas linhas contendo cada uma ($n + 1$) divisores.

Uma vez concluidas estas multiplicações, vê-se que m ($n + 1$) é o numero dos divisores novamente formados, formula esta que addicionada a esta outra ($n + 1$) da 1ª serie, vem :

$$(n + 1) + m(n + 1) = (n + 1)(m + 1)$$

Multiplicando por

$$c \, , \, c^2 \, , \, c^3 \, \ldots\ldots\ldots\ldots c^s$$

todos estes divisores, tem-se a origem de novas series, cada uma contendo ($n + 1$) ($m + 1$) divisores ; s ($n + 1$) ($m + 1$) representa o numero dos divisores novos ; addicionando esta ultima formula ás outras já obtidas, a somma representa o numero total dos divisores.

$$(n+1)(m+1) + s(n+1)(m+1) = (n+1)(m+1)(s+1),$$

Theoria do maximo commum divisor e formação de todos os divisores communs a dous ou mais numeros

O numero que se contém exactamente em dous ou mais numeros dados, denomina-se — *Divisor commum*.

Ex.: O divisor commum dos numeros 15 e 24 é o numero 3.

Entre dous ou mais numeros existem necessariamente muitos divisores communs desiguaes, isto é, um maior que os outros. — A determinação d'esse maior commum divisor e o estudo de suas propriedades é assumpto de muita importancia.

MAXIMO COMMUM DIVISOR A DOUS NUMEROS

PROPRIEDADES

1ª *Propriedade. — O maximo commum divisor a dous numeros é igual ao maximo divisor commum do menor e do resto da divisão do maior pelo menor.*

Demonstração. — Sejam os numeros a e b; supponha-se $a > b$; represente-se o quociente por q e o resto por r da divisão de a por b:

$$\frac{a}{b} = q + r \quad \text{ou} \quad a = bq + r$$

Todo o divisor commum a a e b divide a bq; dividindo a somma a e a uma das parcellas bq, divide a outra r, portanto é commum a b e r.

Todo o divisor commum a r e b divide bq; ora, dividindo r e bq divide a somma d'estas parcellas a, logo é commum a a e b

Os divisores communs a a e b são portanto os mesmos que os divisores communs a b e r; logo o maximo commum divisor a a e b é tambem o maximo commum divisor a b e r.

Regra geral para achar o maximo commum divisor de dous numeros dados. — *Divide-se o numero maior pelo menor, o menor pelo resto, e cada resto pelo seguinte até chegar a uma divisão exacta; o ultimo divisor é o maximo commum divisor pedido.*

Os numeros dados serão primos entre si, se o ultimo divisor for a unidade.

Ex.: Sejam dados dous numeros A e B, o primeiro maior que o segundo; representem-se os quocientes por Q, Q', Q''; sejam os restos R, R' R''. Dispondo segundo a regra, vem:

	Q	Q'	Q''
A	B	R	R'
R	R'	0	

$$A = B \times Q + R$$

$$B = R \times Q' + R'$$

Demonstração e explicação.—Sendo (R') o maior divisor de si mesmo, tambem o é de (R), por ter sido exacta a divisão; logo, é de ($R \times Q'$) por ser seu multiplo; (R') tambem é divisor de (B), por que o numero que divide as partes de um todo divide ao todo, e porisso o maior commum divisor entre (R) e (R') é o mesmo que entre (B) e (R).

Sendo (R') divisor de (R) e de (B) como já se vio tambem o de ($B \times Q$) que é o seu multiplo; (R') tambem é divisor de (A), porque a quantidade que divide as partes de um todo divide o todo.

Outro exemplo para melhor facilitar a questão : figuremos os dous numeros 754 e 435 para procurar o *m. c. d* entre elles.

Dispondo segundo a regra, vem :

	1	1	2	1	3
754	435	319	116	87	29
319	116	.87	.29	0	

$$\left\{\begin{array}{l} 754 = 435 \times 1 + 319 \\ 435 = 319 \times 1 + 116 \\ 319 = 116 \times 2 + 87 \\ 116 = 87 \times 1 + 29 \\ 87 = 29 \times 3. \end{array}\right.$$

Applicando a estas igualdades o mesmo raciocinio applicado ás igualdades do primeiro exemplo, facilmente chegaremos ao mesmo resultado.

2ª *Propriedade. — O* m. c. d. *a muitos numeros não se altera substituindo dous d'entre elles pelo seu* m. c. d.

Demonstração. — Tomem-se tres numeros *A*, *B*, *C* ; figure-se *M* o *m. c. d.* a *A* e *B*. O *m. c. d.* entre *A*, *B*, *C* é o mesmo que *M* e *C*.

Na realidade todo o numero que dividir *A* ,*B*, *C* divide tambem a *M*, *m. c. d.* entre *A* e *B* ; portanto todos os divisores communs a *A*, *B*, *C* são divisores communs a *M* e *C*.

O numero que dividir a *M* dividirá aos seus multiplos *A* e *B* ; logo todos os divisores communs a *M* e *C* são tambem divisores communs a *A*, *B*, *C*.

3ª *Propriedade. — O numero que divide dous outros, tambem divide o seu maior divisor commum.*

Demonstração. — Tomemos os numeros *a* e *b* ; supponha-se que o seu *m. c. d.* seja obtido na quarta divisão :

	q	q'	q''	q'''
a	b	r	r'	r''
	r'	r''	0	

$$\left\{\begin{array}{l} a = bq + r \\ b = rq' + r' \\ r = r'q'' + r'' \end{array}\right.$$

vide tambem a r ; m divide a rq' porque é multiplo de r e dividindo a b e rq', tambem divide a r' ; m dividindo a r' divide ao seu multiplo $r'q'$, e dividindo a r e $r'q''$ tambem divide a r''.

Por esse meio m divide todos os restos e o *m. c. d.* que é ultimo de todos elles.

4ª *Propriedade. — Multiplicando ou dividindo dous ou mais numeros por outro, o* m. c. d. *fica multiplicado ou dividido por esse numero.*

Demonstração. — 1ª hypothese. — Sejam dados dous numeros a e b ; r'' o seu *m. c. d.*

Dispondo o calculo, vem :

	q	q'	q''	q'''
a	b	r	r'	r''
r	r'	r''	0	

Multiplicando a e b por n, temos necessidade de procurar o *m. c. d.* a an e bn.

Dispondo o calculo, teremos :

	q	q'	q''	q'''
an	bn	rn	r'n	r''n
rn	r'n	r''n	0	

Ora, o dividendo e o divisor sendo multiplicados pelo mesmo numero, o quociente não se altera, mas o resto fica multipli e finalmente o resto ... $r'n$ por $r''n$ o resto é $r''n$, seguinte que na primeira operação era 0, é 0 ainda na segunda, porque qualquer quantidade multiplicada por zero dá sempre zero.

Logo, o *m. c. d.* a *an* e *bn* é $r''n$.

2ª hypothese. — Tomem-se os numeros *a*, *b*, *c*, *d*. Determinar o *m. c. d.* a estes numeros é procurar o *m. c. d*

entre a e b ... m
« m e c ... m'
« m' e d ... m''

Multiplicando *a*, *b*, *c*, *d* por *n* e procurando o *m. c. d.* vem :

entre an e bn ... mn
« mn e cn ... m'n
« m'n e dn ... m''n ;

logo, *m''n* é o *m. c. d.* a *an*, *bn*, *cn*, *dn*.

5ª *Propriedade. — Quando se dividem dous ou mais numeros pelo seu* m. c. d., *tem-se para quocientes numeros primos entre si.*

Demonstração. — Sejam os numeros *a*, *b*, *c*, e *m* o seu *m. c. d*.

Dividindo estes numeros pelo seu *m. c. d.*, vem :

$$\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m} \text{ ; quando}$$

tivermos $\frac{m}{m}$, o quociente d'esta divisão é a unidanumeros primos entre si.

D'esta propriedade se origina a seguinte :

6ª *Propriedade. — Dividindo dous ou mais numeros por outro, de tal modo que os quocientes sejão numeros primos entre si, o divisor empregado é o* m. c. d. *aos numeros dados.*

Demonstração. — Supponhamos que sejam numeros primos entre si q e q' ; pela propriedade do dividendo vem :

$$
\begin{aligned}
a &= dq \\
b &= dq'
\end{aligned}
$$

Ora, se q e q' são primos entre si por hypothese, o seu *m. c. d.* é a unidade (1), logo, o *m. c. d.* entre dq e dq' ou entre a e b é $1 \times d = d$, que é o divisor empregado.

7ª *Propriedade — O* m. c. d. *a dous ou mais numeros é igual ao producto de todos os factores primos communs a esses numeros affectados do menor expoente existente entre elles.*

Demonstração. — Tomem-se os numeros A e B ; supponha-se que elles decompostos em seus factores primos apresentem o seguinte resultado :

$$
\begin{aligned}
A &= a^4 \times b^3 \times c \\
B &= a^3 \times b^2 \times g
\end{aligned}
$$

Seja o numero $D = a^3 \times b^2$; é necessario demonstrar que este numero seja o *m. c. d.* aos numeros dados. Ora, D é divisor de A, por não conter factores primos dif é divisor de B por motivo identico.

Logo, D é divisor commum aos dous numeros A e B.

Na realidade assim é, porque o quociente obtido da divisão de A por D, é:

$$\frac{A}{D} = \frac{a^4 \times b^3 \times c}{a^3 \times b^2} = a \times b \times c \, ;$$

o da divisão de B por D é:

$$\frac{B}{D} = \frac{a^3 \times b^2 \times g}{a^3 \times b^2} = g$$

Ora, se estes quocientes são numeros primos entre si, conclue-se ser D o *m. c. d.* aos numeros A e B. Em virtude d'esta propriedade, obtem-se um processo importante e recente para a obtenção do *m. c. d* a dous ou mais numeros:

Regra. — *Decompostos os numeros em factores primos, effectua-se o producto de todos os factores primos communs a todos os numeros, dando a cada um o menor expoente que n'elles se acha.*

8ª *Propriedade.* — *Multiplicar ou dividir algum dos numeros propostos por um outro que não tenha factores communs a todos, o* m. c. d. *não se altera.*

Demonstração.—Sendo o *m. c. d.* a dous ou mais numeros formado unicamente dos factores communs a todos elles, torna-se evidente que a intro- ducção ou suppressão de factores não communs a todos não influe no *m. c. d.*

Menor multiplo commum a dous ou mais numeros é o menor dos numeros divisiveis por cada um d'elles.

Exemplos. — 1º O menor multiplo commum aos numeros 12, 24, 36 é o numero (36) por ser divisivel por todos os outros, (12) e (24).

2º O menor multiplo commum aos numeros 3 e 4 é o numero (12).

O numero que contém dous ou mais numeros dados exactamente, chama-se multiplo commum.

Exemplo. — Os numeros 12, 18, 24, &c., contêm exactamente os numeros 3 e 6, e portanto são multiplos communs d'esses dous numeros 3 e 6.

Quando o maior d'entre os numeros dados não for divisivel por todos os outros, multiplica-se-o por 2, 3, 4, &c., até obter-se um numero divisivel; por esse meio obtem-se o *menor multiplo commum* entre dous ou mais numeros dados.

Este processo sendo o natural, tem o grave inconveniente de ser muito longo; motivo este que nos obriga a abandonal-o, preferindo o que se segue.

DETERMINAÇÃO DO MENOR MULTIPLO COMMUM A DOUS OU MAIS NUMEROS DADOS

A primeira parte do processo só tem referencia a dous numeros.

numeros goza da propriedade de ser igual ao producto d'elles dividido pelo seu maximo commum divisor.

Demonstração. — Sejam a e b os dous numeros e seja D o seu maximo commum divisor.

$$\frac{a}{D} = q \quad \text{ou} \quad a = Dq$$

$$\frac{b}{D} = q' \quad \text{ou} \quad b = Dq'$$

O menor multiplo commum a a e b deve conter necessariamente todos os factores de D e q, e bem assim os factores de D e q'; portanto conterá todos os factores de D, q, q', e por consequencia não poderá ser menor que $D \times q \times q'$.

Se $D \times q \times q'$ é divisivel por Dq ou por a, e por Dq' ou b, é portanto o menor multiplo commum a estes numeros.

Representando este menor multiplo commum por M, vem :

$$M = D \times q \times q'$$

Ora, se $Dq = a$ e $q' = b \div D$, substituindo na igualdade ácima $D \times q$ e q' por seus valores, teremos :

$$M = (a \times b) \div D$$

isto é, o p
pelo seu maximo commum divisor.

Exemplo. — Os numeros 120 e 96 têm por maximo commum divisor o numero 24.

Praticando a divisão, vem :

$$\frac{120 \times 96}{24} = 480$$

Ao effectuar as operações é conveniente dividir primeiro um dos numeros pelo maximo commum divisor e mutiplicar o quociente pelo outro.

Se os numeros dados forem primos entre si é claro que o producto delles seja o menor multiplo commum.

D'esta propriedade collige-se o seguinte :

Todos os multiplos communs a diversos numeros são divisiveis pelo seu menor multiplo commum.

DETERMINAÇÃO DO MENOR MULTIPLO COMMUM A MAIS DE DOUS NUMEROS

Esta segunda parte consta de duas propriedades importantes.

1ª *Propriedade.* — *O menor multiplo commum a muitos numeros não se altera quando se substitue dous d'esses numeros pelo seu menor multiplo commum.*

Demonstração. — Tomem-se os numeros a, b, c, d ; represente-se o maximo commum divisor entre a e b por M.

Se todos os multiplos communs

logo todos os multiplos communs a a, b, c, d são multiplos communs a M, c, d.

Os multiplos communs a M, c, d sendo divisiveis por M, são tambem divisiveis por a e b, factores de M, e por conseguinte são multiplos communs a a, b, c, d.

D'onde se conclue que os multiplos communs a a, b, c, d são os mesmos de M, c, d; logo o menor multiplo commum a a, b, c, d é justamente o menor multiplo commum a M, c, d.

Applicação. — Qual o menor multiplo commum aos numeros 30, 70, 25 e 15?

Substituindo 30 e 70 pelo seu menor multiplo commum, vem:

$$\frac{30 \times 70}{10} = 210.$$

substituindo 210 e 25 pelo seu menor multiplo, teremos:

$$\frac{210 \times 25}{5} = 1050,$$

substituindo ainda em vez de 1050 e 15 o seu menor multiplo. vem:

$$\frac{1050 \times 15}{15} = 1050;$$

o menor multiplo commum aos numeros 30, 70, 25 e 15 é pois o numero 1050.

Para resolvermos questões semelhantes a esta applicaremos a seguinte regra:

Regra geral. — Para obter-se o menor multiplo commum a muitos numeros procura-se o menor

menor multiplo commum do numero achado e a um dos numeros restantes e assim successivamente até ter incluido todos os numeros dados; o menor multiplo commum é o ultimo numero obtido.

Do exposto se conclue o seguinte:

Todos os multiplos communs a muitos numeros são divisiveis pelo seu menor multiplo commum.

2ª *Propriedade. — O menor multiplo commum a dous ou mais numeros é igual ao producto de todos os factores primos differentes que entram nesses numeros affectados do maior expoente que n'elles se acha respectivamente.*

Demonstração. — Tomemos os numeros 336, 396 e 2673.

Decompondo estes numeros em seus factores primos, teremos:

$$336 = 2^4 \times 3 \times 7$$
$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$
$$2673 = 3^3 \times 3^2 \times 11$$

Faça-se $M = 2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11$; falta demonstrar que M seja o menor multiplo commum.

M encerra em si todos os factores que entram em qualquer dos numeros dados, e cada um desses factores tem um expoente pelo menos igual ao expoente que tem no numero considerado, portanto o numero M é divisivel por esses numeros todos porque qualquer multiplo dos numeros dados é impreterivelmente divisivel por todos os factores que entram nesses numeros, portanto divisivel por 2^4, 3^3, 7 e 11; por serem estes numeros primos entre si, M é divisivel pelo producto de todos elles $2^4 \times 3^3 \times 7 \times 11$.

E' este um meio facil e breve para a determinação do menor multiplo commum a dous ou mais numeros.

Dos numeros quebrados e mixtos

PARTE PRIMEIRA

FRACÇÕES ORDINARIAS

—

Origem, propriedades e definições

Origem. — Quando applicamos a unidade na quantidade, aquella ou se contém exactamente na quantidade um certo numero de vezes, ou não.

Da primeira applicação se originam os numeros inteiros, isto é, se a unidade contiver-se duas vezes na quantidade teremos o numero 2, se se contiver tres, teremos o numero 3, etc.

Da segunda applicação se vê que a medida da grandeza não póde ser determinada por um numero inteiro.

Explicação. — Se tomarmos uma unidade auxiliar, que além de fazer parte da unidade primitiva, seja um sub-multiplo não só da unidade mas tambem da quantidade, obteremos a medida que se procura ; assim como concebe-se, por exemplo, a arroba composta de 32 partes, ou unidades que se denominam libras.

Cada uma d'estas partes ou mesmo muitas, em que está a unidade dividida, denominam-se *fracções* da unidade ; cada uma d'ellas por si mesma é inteira e absoluta, mas é uma fracção em relação plo, a *vara* a unidade escolhida, e supponhamos que não se contenha exactamente na linha dada.

Dividindo a vara em partes iguaes até que uma d'ellas contenha-se na linha um certo numero de vezes exactamente, admitta-se que dividindo a vara em 12 partes iguaes, uma d'ellas contenha-se 15 vezes na linha: cada uma dessas partes denomina-se um doze avos, e a linha é igual a 15 doze avos, que se escreve assim: $\left(\frac{15}{12}\right)$

Fracção em geral é a expressão de um quociente ou, por outra, é qualquer parte da unidade.

Representa-se uma fracção por meio de uma linha horisontal e dous numeros, um da parte superior, chamado—*numerador*, e outro da parte inferior que se chama—*denominador*. O numerador e o denominador denominam-se collectivamente termos da fracção. O numerador representa em geral um dividendo, o denominador um divisor.

Em particular o numerador representa quantas partes tomamos da unidade, e o denominador em quantas d'essas partes está a unidade dividida.

Por isso tambem se diz que o numerador representa grandeza e o denominador especie.

Duas ou mais fracções são homogeneas quando têm iguaes denominadores, caso este em que se pódem sommar e subtrahir. Ex. $\frac{3}{5}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{127}{5}$..

As fracções dividem-se em proprias e improprias ou apparentes.

Fracções proprias são aquellas que não contêm inteiros, e o seu caracter é terem os numeradores menores que os denomina[dores]

Ex. $\frac{4}{7}$; $\frac{38}{52}$; $\frac{405}{932}$ etc.

Fracção impropria é aquella que contém inteiro, e o seu caracter é ter o numerador maior ou igual ao denominador ; isto é, o dividendo maior ou igual ao divisor, e por essa razão o quociente contém inteiros.

Ex. $\frac{8}{5}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{45}{9}$; $\frac{327}{15}$ etc.

PROPRIEDADES

1ª *De duas fracções que têm o mesmo denominador a maior é a que tem maior numerador.*

Ex. $\frac{12}{9} < \frac{5}{9}$; a unidade fraccionaria sendo a mesma, é maior a que contiver maior numero dessas unidades.

2ª *De duas fracções que têm o mesmo numerador a maior é a que tem menor denominador.*

Ex. $\frac{8}{5} > \frac{8}{7}$; a unidade sendo dividida em 5 partes iguaes, obtêm-se partes maiores do que se dividirmos a mesma unidade em 7 partes ; se cada uma parte da primeira divisão é maior que cada parte da segunda, é porque um determinado numero de partes da primeira é maior que o mesmo numero de partes da segunda.

fracção por um certo numero, sem que se altere o denominador, a fracção torna-se maior ou menor esse numero de vezes.

Ex. $\frac{7}{5}$; se multiplicarmos o numerador por 4, teremos a fracção $\frac{28}{5}$ que é 4 vezes maior que $\frac{7}{5}$; a unidade fraccionaria $(\frac{1}{5})$ é commum ás duas por serem homogeneas; a primeira contém 4 vezes menos unidades que a segunda, e por isso é 4 vezes menor que ella.

Reciprocamente a fracção $\frac{7}{5}$ virá 4 vezes menor se dividirmos o numerador 7 por 4.

4ª *Multiplicando ou dividindo o denominador de uma fracção por certa quantidade, sem que se altere o numerador, a fracção vem menor ou maior esse mesmo numero de vezes.*

Ex. $\frac{9}{4}$; se multiplicarmos o denominador por 5 a fracção $\frac{9}{20}$, que é o resultado d'essa multiplicação, torna-se 5 vezes menor que a primeira; na fracção $\frac{9}{4}$ a unidade está dividida em 4 partes, e na segunda em 20; evidentemente cada uma das partes obtidas pela primeira divisão ... maior que ...

$\frac{\ }{20}$ unidade é 5 vezes menor que cada um quarto ($\frac{1}{4}$) da primeira, é porque $\frac{9}{4}$ é 5 vezes maior que $\frac{9}{20}$

5ª *Multiplicando ou dividindo a ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não se altera.*

Ex. $\frac{6}{5}$; multiplicando ambos os termos por 4, vem: $\frac{24}{20}$; cada parte da unidade na fracção $\frac{24}{20}$ é 4 vezes menor que cada parte da unidade na primeira, isto é, $\frac{1}{20}$ é 4 vezes menor que $\frac{1}{5}$; pela outra parte a fracção $\frac{24}{20}$ contém 4 vezes mais partes que a primeira $\frac{6}{5}$; ora, se a fracção segunda tornou-se 4 vezes maior pela primeira e 4 vezes menor pela segunda é porque não soffreu alteração.

6ª *Addicionar ou subtrahir o mesmo numero a ambos os termos d'uma fracção propria, ella augmenta ou diminue.*

Addicionar ou subtrahir o mesmo numero a ambos os termos d'uma fracção impropria, ella diminue ou augmenta.

1º Tome-se a fracção propria ($\frac{8}{9}$) e addicione-se a ambos os termos o numero 5; tem-se $\frac{13}{14}$.

Estas duas fracções são cada uma de per si menores que a unidade, e a que mais se aproximar d'ella será a maior.

O que falta a $\left(\frac{8}{9}\right)$ para ser igual á unidade é $\left(\frac{1}{9}\right)$, e o que falta a $\left(\frac{13}{14}\right)$ é $\left(\frac{1}{14}\right)$.

Comparando as duas fracções $\left(\frac{1}{9}\right)$ e $\left(\frac{1}{14}\right)$ se vê que a segunda é menor e por isso a primeira esta mais proxima da unidade.

Ora, se $\left(\frac{8}{9}\right)$ mais $\left(\frac{1}{9}\right)$ é igual á unidade, sendo $\left(\frac{1}{14}\right)$ menor que $\left(\frac{1}{9}\right)$ é porque $\left(\frac{13}{14}\right)$ é maior que $\left(\frac{8}{9}\right)$.

2º Figure-se a fracção impropria $\frac{5}{3}$ e addicione-se a ambos os termos o numero 4, e virá $\frac{9}{7}$

Estas duas fracções são maiores que a unidade; o excesso de $\frac{5}{3}$ sobre a unidade é a fracção $\frac{2}{3}$ e o de $\frac{9}{7}$ é $\frac{2}{7}$; ora, se $\frac{2}{7}$ é menor que $\frac{2}{3}$, é porque $\frac{5}{3}$ é maior que $\frac{9}{7}$

SIMPLIFICAÇÃO DAS FRACÇÕES

Tanto mais clara é a idéa que se faz do valor de uma fracção, quanto menores forem os termos dessa mesma fracção, e mais simples e breve o calculo se torna quando se tenha de effectuar sobre ella.

E' pois de grande utilidade, dada uma fracção, procurar outra que tenha menores termos e seja igual á primeira.

A transformação que tem por fim passar fracções de fórmas complicadas á fracções de fórmas mais simples, denomina-se SIMPLIFICAÇÃO DE FRACÇÕES.

A simplificação basêa-se no seguinte principio:

Dividir ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não muda de valor.

A fracção que não póde ser expressa por termos menores, denomina-se irreduzivel.

A theoria da reducção das fracções á expressão mais simples tem por fim transformar as fracções em outras iguaes e que sejam irreduziveis.

Regra. — Dividem-se ambos os termos da fracção dada pelo maximo commum divisor a esses termos.

Ex.: Seja a fracção $\left(\frac{3760}{9024}\right)$ para reduzir-se á expressão mais simples.

Procurando o maximo commum divisor entre os ... numero 752; divi-esse numero, vem:

$$\frac{3760 \div 752}{9024 \div 752} = \frac{5}{102}$$

Demonstração. — A fracção $\left(\frac{3760}{9024}\right)$ é igual a fracção $\left(\frac{5}{102}\right)$, porque dividimos ambos os termos da primeira fracção pelo mesmo numero (752); a fracção $\left(\frac{5}{102}\right)$ é irreductivel porque não póde ser expressa em termos menores.

Os termos de uma fracção irreduzivel são primos entre si.

Demonstração. — Tome-se a fracção $\left(\frac{25}{7}\right)$ cujos termos são *primos entre si.*

Vai-se demonstrar que esta fracção não póde ser representada por termos menores, o que importa provar que qualquer outra fracção a ella igual tem termos maiores.

Supponha-se que $\frac{a}{b}$ seja igual a fracção dada.

a 25

$$a = \frac{25 \times b}{7}$$

Se a é numero inteiro, o segundo membro $\left(\frac{25 \times b}{7}\right)$ tambem o é, portanto 7 divide ao producto de $25 \times b$, e por ser primo com 25 divide tambem a b, logo $b = 7\ m$.

Substituindo na segunda igualdade em vez de b o seu valor, teremos :

$$a = \frac{25 \times 7\ m}{7} = 25\ m$$

A fracção $\frac{a}{b}$ tem portanto termos maiores que os termos da fracção $\frac{25}{7}$.

D'este principio collige-se que uma fracção irreduzivel é igual a outra quando os termos da primeira forem equimultiplos dos da segunda, e que duas fracções irreduziveis são iguaes quando forem identicas.

OBSERVAÇÃO

Na theoria da simplificação das fracções pudemos usar os dous processos seguintes :

1° *Dividir ambos os termos da fracção pelo seu maximo commum divisor.*

caso em que sejam ambos divisiveis por esses numeros, até obter uma fracção, cujos termos não tenham divisor commum.

O primeiro processo divide ambos os termos da fracção pelo maximo commum divisor, e o segundo divide ambos os termos pelos factores do maximo commum divisor.

Reducção das fracções ao mesmo denominador

E' a transformação que tem por fim passar fracções de fórmas heterogeneas a fracções de fórmas homogeneas, isto é, que se refiram á mesma subdivisão da unidade.

O principio que dá lugar a esta transformação é que uma fracção não soffre alteração multiplicando ambos os termos pelo mesmo numero.

Regra geral.—Multiplicam-se ambos os termos de cada fracção pelo producto dos denominadores de todas as outras. Ex. :

$$\frac{4}{3};\ \frac{5}{8};\ \frac{6}{7} = \frac{4\times 8\times 7}{3\times 8\times 7};\ \frac{5\times 3\times 7}{8\times 3\times 7};\ \frac{6\times 3\times 8}{7\times 3\times 8}$$

Explicação e demonstração. — Multiplicamos ambos os termos da fracção $\frac{4}{3}$ por 8 e por 7, que constituem os denominadores das outras, e do mesmo modo ambos os termos das fracções $\frac{5}{8}$ e $\frac{6}{7}$

que tem todas para denominador o producto de seus proprios denominadores e não soffreram alteração alguma em seus valores, porque multiplicamos pela mesma quantidade ambos os termos de cada fracção.

1ª *Regra particular* (*). — *Se o maior dos denominadores for divisivel por todos os outros, divide-se o maior por cada um d'elles e multiplicam-se ambos os termos de cada fracção pelos quocientes obtidos das respectivas divisões.* Ex.:

$$\frac{9}{4};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{24} = \frac{9 \times 6}{4 \times 6};\ \frac{2 \times 8}{3 \times 8};\ \frac{3 \times 3}{8 \times 3};\ \frac{5}{24}$$

Demonstração — Multiplicam-se ambos os termos da fracção $\left(\frac{9}{4}\right)$ por 6 (quociente de 24 por 4), porque quer-se reduzir a fracção $\frac{9}{4}$ a ter um denominador igual ao denominador multiplo (24); este denominador (4) sendo factor do denominador multiplo segue-se que dividindo este por aquelle o quociente será o outro factor, e porisso multiplicando-o pelo denominador da fracção em questão, vem o denominador igual ao multiplo, e a fracção não muda de valor porque tambem se multiplica o numerador pelo mesmo numero; ap-

(*) Regra particular é a que se basêa na divisão; regra geral é a que tem por base a multiplicação.

Sempre que se puder applicar a regra particular não se deve applicar a geral, pois a particular simplifica os calculos.

fracções chegamos ao mesmo resultado.

Convem notar que a fracção que tem o denominador multiplo não soffreu alteração; este denominador é o commum a todas as fracções.

2ª *Regra particular.—Procura-se um numero de fóra que seja multiplo de cada um dos denominadores e procede-se com elle como se fosse o denominador multiplo.* Ex.:

$$\frac{2}{3};\frac{1}{4};\frac{5}{6};=\frac{2\times4}{3\times4};\frac{1\times3}{4\times3};\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{8}{12};\frac{3}{12};\frac{10}{12}$$

Demonstração.—O maior denominador (6) não é multiplo de todos os outros denominadores, porém ha (12) que, apezar de ser numero de fóra, satisfaz a esta condição, e por isso podemos praticar com elle como praticámos com o denominador multiplo.

Para se conhecer este numero toma-se o denominador maior e multiplica-se successivamente por 2, 3, 4, 5 etc., até que se obtenha um numero multiplo de todos os denominadores.

Obtido isto applica-se o raciocinio da regra anterior.

3ª *Regra particular.—Decompõe-se cada um dos denominadores em potencia dos mais altos gráos de sua raiz; será o denominador commum representado pelo producto das mais elevadas potencias de raizes diversas.*

Este processo é inapplicavel no caso de serem os denominadores calculos mui complicados e laboriosos. Ex. :

$$\frac{5}{10} - \frac{1}{4} + \frac{11}{7} = \frac{5}{(2)^4} - \frac{1}{2(3)^3} + \frac{11}{(2)^3 \times (3)^2} =$$

$$= \frac{5 \times 27}{16 \times 27} - \frac{1 \times 8}{54 \times 8} + \frac{11 \times 6}{72 \times 6} = \frac{135}{432} - \frac{8}{432} +$$

$$+ \frac{66}{432} = \frac{135 - 8 + 66}{432} = \frac{193}{432}$$

O denominador commum n'este caso é $(2)^4 \times 2(3)^3 \times (2)^3 \times (3)^2$ e procede-se com este como procedemos com o denominador multiplo.

Esta regra só tem applicação quando os denominadores consistirem em diversos gráos de raizes iguaes.

Operações sobre as fracções ordinarias

ADDIÇÃO DAS FRACÇÕES

A addição das fracções tem por fim reunir os valores de duas ou mais fracções em uma só.

Para sommar duas ou mais fracções devemos indagar se ellas são homogeneas ou não.

Se forem homogeneas, tem applicação a seguinte regra :

Sommam-se os numeradores e dá-se para denominador d'esta somma o denominador commum. Ex. :

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3 + 2 + 4}{5} = \frac{9}{5}$$

ção representa a grandeza d'esta mesma fracção e o denominador a especie; desde que tenhamos sommado as grandezas e conservado a especie temos sommado as fracções.

Se as fracções forem heterogeneas a regra é a seguinte:

Reduzem-se ao mesmo denominador e applica-se ás fracções resultantes a regra precedente. Ex.:

$$\frac{4}{5}+\frac{3}{4}+\frac{6}{7}=\frac{4\times4\times7}{5\times4\times7}+\frac{3\times5\times7}{4\times5\times7}+$$

$$+\frac{6\times5\times4}{7\times5\times4}=\frac{112}{140}+\frac{105}{140}+\frac{120}{140}=\frac{337}{140}$$

As fracções dadas para sommar podem vir acompanhadas de inteiros; n'este caso é preciso reduzir os inteiros ás denominações dos quebrados que os acompanham.

Regra. — Multiplica-se o inteiro pelo denominador da fracção, ajunta-se ao producto o numerador, e dá-se por denominador ao resultado o denominador da fracção. Ex.:

$$5\frac{3}{8}+4\frac{6}{5}=\frac{5\times8+3}{8}+\frac{4\times5+6}{5}=\frac{43}{8}+$$

$$+\frac{26}{5}=\frac{43\times5}{8\times5}+\frac{26\times8}{5\times8}=\frac{215}{40}+\frac{208}{40}=\frac{423}{40}$$

Regra para extrahir o inteiro...

fracção que tem por numerador o resto e por denominador o divisor. Ex. :

$$\frac{24}{5} = 24 \div 5 = 4\frac{4}{5}$$

Ora, se uma unidade é igual a 5 quintos, a fracção $\frac{24}{5}$ contém tantas unidades quantas vezes 5 contém-se em 24.

O methodo mais abreviado e conveniente que temos para sommar numeros mixtos é este :

Sommam-se separadamente as fracções e depois os inteiros ; quando a somma das fracções é maior que a unidade, extrahe-se-lhe o inteiro, que junta-se á somma dos inteiros. Ex. :

$$3 + \frac{6}{5} + 12 + \frac{3}{4} + 5\frac{2}{3} ;$$

a somma dos inteiros é : $3 + 12 + 5 = 20$; a das fracções é :

$$\frac{6}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{72}{60} + \frac{45}{60} + \frac{40}{60} = \frac{157}{60}$$

Extrahindo os inteiros da fracção $\frac{157}{60}$, vem :

$$2 + \frac{37}{}.$$

$$20 + 2 + \frac{37}{60} = 22\,\frac{37}{60},$$

que é a somma das quantidades dadas.

SUBTRACÇÃO

Para praticar a subtracção devemos tambem attender se as fracções são homogeneas ou não.

Para subtrahir fracções homogeneas temos a seguinte regra :

Subtrahe-se o numerador menor do maior e dá-se por denominador ao resto o denominador commum. Ex. :

$$\frac{4}{5} - \frac{9}{5} = \frac{9-4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Demonstração. — Quando subtrahimos o menor numerador do maior, subtrahimos as grandezas, e desde que temos subtrahido as grandezas, conservando a especie, temos subtrahido as fracções.

Se as fracções forem heterogeneas, reduzem-se ao mesmo denominador e applica-se a regra precedente ás fracções resultantes. Ex. :

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} - \frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{20}{35} - \frac{21}{35} =$$

$$= \frac{21 - 20}{35} = \frac{1}{35}$$

quantidades
homogeneas.

Regra para subtrahir de um inteiro uma fracção.—*Multiplica-se o inteiro pelo denominador, subtrahe-se do producto o numerador e dá-se o denominador da fracção dada por denominador ao resultado.* Ex. :

$$9 - \frac{3}{5} = \frac{9 \times 5 - 3}{5} = \frac{42}{5}$$

Ora, se uma unidade é igual a 5 quintos, 9 unidades sao iguaes a 9 vezes 5 quintos ou 45 quintos, e
$\frac{45}{5} - \frac{3}{5} = \frac{42}{5}$

Vice-versa : $\frac{39}{4} - 5 = \frac{39 - 5 \times 4}{4} = \frac{19}{4}$

Ora, se $5 = \frac{20}{4}$, tirando de $\frac{39}{4}$ o valor de 5, vem :

$$\frac{39}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4}$$

Regra para subtrahir numeros mixtos. — *Subtrahem-se as fracções em separado e depois os inteiros ; se a fracção do diminuendo fôr menor que a do diminuidor, junta-se áquella uma unidade que se toma do inteiro respectivo.* Ex. :

$$3 + \frac{4}{5} - 6 + \frac{3}{7}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} - \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{28}{35} - \frac{15}{35} = \frac{28 - 15}{35} = \frac{13}{35}$$

logo o resto é $3 + \dfrac{13}{35}$.

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicação é a operação que tem por fim, sendo dados dous numeros repetir o multiplicando ou uma parte do multiplicando tantas vezes quantas forem as unidades ou as partes da unidade existentes no multiplicador.

Consideram-se tres casos :

1º *Caso.*—Multiplicação de um numero inteiro por uma fracção e vice-versa.

Regra.—Multiplica-se o numerador pelo inteiro e conserva-se o denominador. Ex. :

$$3 \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

Demonstração. — Attendendo que o numerador representa um dividendo, segue-se que, quando multiplicamos o numerador por (3) tomamos esse numerador (3) vezes maior. Ora, se a relação entre o dividendo (numerador) e o quociente é directa, o quociente está tres vezes maior, e como o quociente é a fra...

multiplicando fracção, tem applicação a mesma regra e o mesmo raciocinio. Ex.:

$$\frac{8}{7} \times 3 = \frac{8 \times 3}{7} = \frac{24}{7}$$

Para multiplicar um inteiro por uma fracção e vice-versa, além do processo exposto temos outro que se deve applicar de preferencia, quando o denominador da fracção dada for multiplo do inteiro.

Regra particular. — Divide-se o denominador pelo inteiro e conserva-se o mesmo numerador. Ex.:

$$\frac{7}{15} \times 5 = \frac{7}{15 \div 5} = \frac{7}{3}$$

Demonstração. — O denominador de uma fracção representando um divisor, conclue-se que, achando-se elle dividido por (5) a fracção $\frac{7}{15 \div 5}$ acha-se multiplicada por (5), porque a relação entre o divisor e o quociente é inversa.

2º *Caso.* — Multiplicação de uma fracção por outra.

Regra. — Multiplicam-se os numeradores um pelo outro, e do mesmo modo os denominadores, e dá-se o segundo producto por denominador ao primeiro. Ex.:

$$\frac{9}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{9 \times 7}{5 \times 8} = \frac{63}{40}$$

$(\frac{9}{5} \times \frac{7}{8})$, tivessemos de multiplicar $\frac{9}{5}$ por 7, o resultado seria $\frac{9}{5} \times 7 = \frac{9 \times 7}{5}$

Quando consideramos para multiplicador (7) e não $\frac{7}{8}$ tornamos o multiplicador (8) vezes maior (porque o numerador de uma fracção é tantas vezes maior que a propria fracção quantas são as unidades do denominador).

Logo, a relação entre o factor e o producto sendo directa, vem o producto $(\frac{9 \times 7}{5})$ oito vezes maior. e para que se o torne verdadeiro é necessario dividil-o por 8, o que se consegue multiplicando o denominador por 8, como se vê :

$$\frac{9 \times 7}{5} \div 8 = \frac{9 \times 7}{5 \times 8}$$

Póde ser que se apresentem tres ou mais fracções para se multiplicar ; nenhuma difficuldade existe, pois a regra é a mesma que acabamos de ver. Ex. :

$$\frac{8}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{9}{3} = \frac{8 \times 3 \times 5 \times 9}{5 \times 7 \times 4 \times 3} = \frac{1080}{420} =$$

$$\frac{108}{} \quad \frac{24}{}$$

Regra. — *Transformam-se em fracções improprias, e procede-se como nos casos precedentes.* Ex. :

$$2\frac{4}{7} \times 5\frac{8}{3} = \frac{2 \times 7 + 4}{7} \times \frac{5 \times 3 + 8}{3} =$$

$$= \frac{18}{7} \times \frac{23}{3} = \frac{18 \times 23}{7 \times 3} = \frac{414}{21}$$

Tambem se póde applicar a regra da multiplicação de uma somma por outra :

$$\left(2 + \frac{4}{7}\right)\left(5 + \frac{8}{3}\right) = 2 \times 5 + \frac{4}{7} \times 5 + 2 \times \frac{8}{3} +$$

$$+ \frac{4}{7} \times \frac{8}{3}$$

Só convém este processo na pratica quando um dos factores fôr um numero inteiro :

$$\left(5 + \frac{8}{3}\right) \times 4 = 5 \times 4 + \frac{8}{3} \times 4 =$$

$$= 20 + \frac{32}{3} = 3 + \frac{2}{3}$$

Consideram-se quatro casos.

1º *Caso.* — Dividir uma fracção por um numero inteiro.

Regra. — Multiplica-se o denominador da fracção pelo inteiro e conserva-se o numerador. Ex.:

$$\frac{5}{7} \div 3 = \frac{5}{7 \times 3} = \frac{5}{21}$$

Demonstração. — Attendendo que o denominador de uma fracção representa um divisor, segue-se que multiplicando este denominador por 3 tornamos o quociente (*que é a fracção*) 3 vezes menor, porque a relação que existe entre o divisor (*que é o denominador*) e o quociente, é inversa. Ora, se o quociente é a fracção, esta está dividida por 3.

Se o numerador da fracção dada, for um numero multiplo do numero inteiro, applicaremos de preferencia a seguinte regra:

Regra particular. — Divide-se o numerador da fracção pelo inteiro e conserva-se o denominador. Ex.:

$$\frac{15}{9} \div 3 = \frac{15 \div 3}{9} = \frac{5}{9}$$

Demonstração. — Dividindo o numerador (15 por 3), a fracção $\frac{15}{9}$ vem tambem dividida por 3.

2º *Caso*. --- Dividir um numero inteiro por uma fracção.

Regra. --- *Multiplica-se o numero inteiro pela fracção divisora invertida*. Ex.:

$$5 \div \frac{8}{3} = 5 \times \frac{3}{8} = \frac{5 \times 3}{8} = \frac{15}{8}$$

Demonstração. --- O divisor ou multiplicador $\frac{8}{3}$ é igual a 8 vezes a tersa parte da unidade, logo o dividendo *(producto do divisor pelo quociente)* é igual a 8 vezes a terça parte do quociente.

Ora, se a terça parte do quociente é contida no dividendo 8 vezes, é claro que dividindo o dividendo por 8, obtem-se a terça parte a qual é por conseguinte $\frac{3}{8}$; e repetindo-a 5 vezes acha-se o quociente $\frac{15}{8}$.

3º *Caso*. — Dividir uma fracção por outra.

Regra.—*Invertem-se os termos da fracção divisora e applica-se a regra para multiplicar uma fracção por outra*. Ex.:

$$\frac{8}{5} \div \frac{6}{9} = \frac{8}{5} \times \frac{9}{6} = \frac{8 \times 9}{5 \times 6} = \frac{72}{30}$$

Demonstração.—Supponha-se que em vez de dividir $(\frac{8}{5})$ por $(\frac{6}{9})$ divide-se $(\frac{8}{5})$ por 6, o resultado é

$\frac{8}{5} \div 6 = \frac{8}{5 \times 6}$; mas quando considera-se para divisor 6 e não $\frac{6}{9}$, considera-se um divisor 9 vezes maior.

Em virtude da relação que existe entre o divisor e o quociente, o quociente está 9 vezes menor que o verdadeiro, e por tanto tornando-o 9 vezes maior ou multiplicando-o por 9, vem o que se quer demonstrar :

$$\frac{8}{5 \times 6} \times 9 = \frac{8 \times 9}{5 \times 6} = \frac{72}{30}$$

4º *Caso*—Dividir um numero mixto por outro mixto.

Regra. — *Transformam-se os numeros mixtos em fracções improprias e procede-se como nos casos anteriores.* Ex. :

$$8\frac{3}{5} \div 5\frac{4}{9} = \frac{43}{5} \div \frac{49}{9} = \frac{43 \times 9}{5 \times 49} = \frac{387}{245}$$

Se o divisor fôr um numero inteiro, *applica-se a regra da divisão de uma somma por um numero inteiro.* Ex. :

$$\left(10 + \frac{4}{9}\right) \div 5 = 10 \div 5 + \frac{4}{9} \div 5 = 2 + \frac{4}{45}$$

Este processo só tem applicação vantajosa quando o inteiro do dividendo [illegible]

Regra para elevar uma fracção ao quadrado.— Quadra-se o numerador e do mesmo modo o denominador, sendo o primeiro quadro dividendo do segundo. Ex.:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{(3)^2}{(4)^2} = \frac{9}{16}$$

Demonstração — Segundo a definição de expoente (*isto é, o symbolo que mostra quantas vezes a quantidade que elle affecta entra como factor*), vem:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{(3)^2}{(4)^2} = \frac{9}{16};$$

comparando este resultado com o primeiro, se vê que não differem.

CUBO DAS FRACÇÕES ORDINARIAS

Regra para elevar uma fracção ao cubo.—Eleva-se ao cubo o numerador e da mesma sorte o denominador, sendo o primeiro cubo dividendo do segundo. Ex.:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(2)^3}{(5)^3} = \frac{8}{125}.$$

Demonstração — Attendendo á definição de expoente, virá :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{(2)^3}{(5)^3} = \frac{8}{125}$$; comparando

este resultado com o obtido pela regra se vê que são identicos, logo a regra é verdadeira.

RAIZ QUADRADA DAS FRACÇÕES

Consideram-se dous casos :

1º Quando o denominador da fracção é quadrado perfeito.

2º Quando o denominador da fracção não é quadrado perfeito.

Regra do 1º caso. — Extrahe-se a raiz quadrada do numerador e da mesma sorte a do denominador. Ex. :

$$\sqrt[2]{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt[2]{9}}{\sqrt[2]{25}} = \frac{3}{5}$$

Demonstração. — Attendendo que o numerador e o denominador representam os quadrados dos termos da fracção raiz, é claro que a obteremos extrahindo a raiz de ambos os termos da fracção proposta como manda a regra.

Regra do 2º caso. — Quadra-se o denominador, o que se faz multiplicando [...]

se quadrado perfeito, e applica-se a regra do 1º caso. Ex.:

$$\sqrt[2]{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt[2]{5 \times 9}}{\sqrt[2]{9 \times 9}} = \frac{\sqrt[2]{45}}{\sqrt[2]{81}} = \frac{6}{9}$$

Demonstração. — Torna-se o denominador quadrado perfeito afim de que essa raiz seja expressa em quantidade commensuravel, que conservando uma relação exacta com a unidade, dará lugar a que se faça uma ideia mais clara a respeito da fracção.

Observação. — As raizes quadradas assim obtidas só são verdadeiras quando ambos os termos da fracção forem quadrados perfeitos, quando não, são approximativas.

O exemplo do 2º caso é frisante:

$$6 < \sqrt[2]{45} > 7$$

$$\text{logo } \frac{6}{9} < \frac{\sqrt[2]{45}}{9} > \frac{7}{9}$$

$$\text{ou } \frac{6}{9} < \sqrt[2]{\frac{45}{81}} > \frac{7}{9};$$

a raiz pedida está comprehendida entre duas quantidades que differem entre si em $\frac{1}{9}$, conseguintemente differem d'esta raiz em menos de $\left(\frac{1}{9}\right)$; $\left(\frac{6}{9}\right)$ é a raiz approximada com erro para menos, e $\frac{7}{9}$ é a raiz approximada com erro para mais.

A raiz do denominador da fracção é que determina o gráo de approximação.

RAIZ CUBICA DAS FRACÇÕES

Consideram-se 2 casos :

1° Quando o denominador da fracção é cubo perfeito.

2° Quando o denominador da fracção não é cubo perfeito.

Regra do 1° caso — Extrahe-se a raiz cubica do numerador e da mesma sorte a do denominador. Ex. :

$$\sqrt[3]{\frac{2}{125}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

Demonstração.—Attendendo que o numerador e o denominador da fracção representam os cubos dos termos da fracção raiz, é claro que obteremos o resultado extrahindo a raiz de ambos os termos da fracção proposta como ordena a regra.

Regra do 2° caso.—Transforma-se o denominador em um numero que seja cubo perfeito, o que se faz multiplicando ambos os termos da fracção dada pelo quadrado do seu denominador, ou ...

numero que sendo menor que esse denominador torne-o cubo perfeito, e applica-se a regra do 1° caso. Ex.:

$$\sqrt[3]{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 3}}{\sqrt[3]{9 \times 3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

Demonstração.—Torna-se o denominador cubo perfeito afim de que sua raiz seja expressa em quantidade commensuravel, que conservando uma relação exacta com a unidade dará lugar a que se faça uma ideia mais clara a respeito da fracção.

Observação.—As raizes cubicas assim determinadas tambem serão verdadeiras quando ambos os termos da fracção forem cubos perfeitos, quando não, serão approximativas.

Os dous exemplos—o do 1° e o do 2° caso, dão raizes approximativas.

PARTE SEGUNDA

FRACÇÕES DECIMAES

Definições, origem e propriedades

Fracção decimal é qualquer parte da unidade dividida na razão decupla ; isto quer dizer que qualquer fracção que tiver por denominador uma potencia de 10 é uma *fracção decimal.* Ex. :

$$\frac{3}{10} ; \frac{4}{100} , \frac{2}{1000} ; \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

As fracções decimaes são um caso particular das fracções ordinarias. — Se não fossem as simplificações a que dão lugar os calculos d'ellas, quando os denominadores são a unidade seguida de zeros, em cousa alguma estranhariamos o seu estudo.

O assumpto d'esta theoria é justamente a simplificação das fracções decimaes.

Origem.—As fracções decimaes originam-se da divisão feita na unidade na razão decupla.

Explicação.—A unidade dividida em 10 partes, a fracção que exprime uma destas denomina-se *um dez avos* $(\frac{1}{10})$.

Ainda dividida em 100 partes a fracção que representa uma d'ellas é *um cem avos* $(\frac{1}{—})$; dividipartes, a que representa uma d'ellas é *um mil avos* $\left(\frac{1}{1000}\right)$ etc.

Observamos que estas fracções estão sugeitas, como os numeros inteiros, ás mesmas leis da numeração.

Ora, estando ellas n'essas condições são susceptiveis de representar ordens differentes, e por isso serão expressas por um numero.

NOMENCLATURA DAS FRACÇÕES DECIMAES

A primeira fracção que exprime um numero dez vezes menor que a unidade—chama-se—*decimo*.

A segunda que exprime um numero 10 vezes menor que o decimo, ou cem vezes menor que a unidade, chama-se—*centesimo*.

A terceira que exprime um numero mil vezes menor que a unidade chama-se—*millesimo*.

Conhecidos estes tres nomes que, na nomenclatura dos numeros inteiros, correspondem a dezena, centena e milhar, todos os mais serão obtidos mediante combinações identicas ás destas palavras.

Assim a 4ª ordem é dezena de milhar, isto é, a combinação da 2ª ordem com a 4.ª

Tambem nas decimaes será proveniente da mesma combinação da 2ª com a 4ª ordem, e por isso temos *decimo-millesimo*.

Agora tratemos da numeração escripta.

Se quizessemos representar em fracção decimal a fracção $\frac{1}{10}$ diriamos: esta fracção representa um numero dez vezes menor que a unidade, por isso deve se achar escripta á direita das unidades, cuja ordem será representada por um zero e virá: (01).

podia se confundir com ... dido de zeros, tratou-se de remover essa difficuldade, separando as unidades dos decimos por meio de uma virgula.

Feito isto virá a fracção decimal 0,1 (*um decimo.*)

Se quizessemos representar a fracção $\left(\frac{1}{100}\right)$ diriamos: esta fracção representa um numero cem vezes menor que a unidade e dez vezes menor que o decimo, e por esta razão deve achar-se escripta á sua direita, e como a casa dos decimos não tem algarismo significativo, será occupada por um zero.

Procedendo assim temos: 0,01 (que exprime um *centesimo.*)

Praticando de um modo inteiramente semelhante, exprimiremos todas as mais fracções decimaes, que vão combinadas na seguinte tabella:

UNIDADES

Dezenas	Decimos
Centenas	Centesimos
Milhares	Millesimos
Dezenas de milhares . .	Decimos millesimos
Centenas de milhares. .	Centesimos millesimos
Milhões.	Millionesimos
Dezenas de milhões . .	Decimos millionesimos

etc.

A *virgula* é o caracter das fracções decimaes, e serve para separar a parte inteira da parte decimal.

decimaes, bem como as ordinarias, dividem-se em proprias e improprias.

Proprias, quando não tem inteiro, e seu caracter é ter a parte inteira representada por um zero succedido d'uma virgula. Ex.: 0,53.

Improprias, quando contém inteiros; e seu caracter é ter a parte inteira representada por um numero inteiro. Ex.: 2,53.

Problemas: 1° Escripta uma fracção decimal enuncial-a.

2.° Enunciada uma fracção decimal escrevel-a.

Regra para o 1° caso.—Lê-se a fracção decimal como se fosse numero inteiro, trocando no fim o nome de unidades pelo nome da casa decimal que se lhe dá.

Regra para o 2.°—Escreve-se a fracção decimal, como se fosse numero inteiro, e depois separam-se tantas casas para decimal, quantas forem enunciadas.

Consequencias. — 1.ª As fracções decimaes são mais vantajosas que as ordinarias, porque, não só estão sugeitas ás mesmas leis da numeração dos numeros inteiros, por consequencia suas operações praticam-se como as d'elles, como tambem por serem representadas como os numeros inteiros, tornando-se assim faceis os calculos sobre ellas.

2ª Multiplica-se uma fracção decimal tantas vezes por dez (10) quantas forem as casas decimaes a que virgula avançar para a direita; e vice-versa, isto é: divide-se uma fracção decimal tantas vezes por dez (10) quantas forem as casas decimaes que a virgula passar para a esquerda.

3ª Accrescentar qualquer numero de zeros a direita de uma fracção decimal ella não muda de valor.

ADDICÇÃO

Regra.(*)—*Reduzem-se as fracções á mesma denominação, sommam-se como se fossem inteiros, e separam-se com a virgula á direita da somma tantos algarismos quantas forem as casas decimaes de uma parcella.* Ex.:

$$35,2 + 0,73 + 4,3973 + 5,3$$

Effectuando :

$$\begin{array}{r} 35,2000 \\ 0,7300 \\ 4,3973 \\ 5,3000 \\ \hline 45,6273 \end{array}$$

Demonstração.—Pela reducção á mesma denominação as fracções não se alteraram, porque os seus valores absolutos e relativos não soffreram alteração.

Vimos que pela collocação da virgula as ordens de unidades não se confundiram, isto é, as unidades não passaram a representar dezenas e vice-versa, e por conseguinte o total não acha-se alterado.

(*) Reduzir numeros decimaes á mesma denominação,—é igualar o numero das casas decimaes, escrevendo-lhes á direita os zeros que sejam necessarios.

Regra.—Reduzem-se os termos á mesma denominação, subtrahem-se como se fossem inteiros, e separam-se com a virgula á direita do resto tantos algarismos quantas forem as casas de um dos termos.

Ex. :

$$8976{,}439 - 572{,}4993$$

Effectuando :

$$\begin{array}{r} 8976{,}4390 \\ 572{,}4993 \\ \hline 8403{,}9397 \end{array}$$

Demonstração.—Quando reduzimos o minuendo á mesma denominação que o subtrahendo este minuendo não se alterou, porque alterado não foi o seu valor absoluto e relativo.

Pela collocação da virgula se vê que as ordens de unidades não se confundem, isto é, as unidades não passaram a representar dezenas e vice-versa, logo o resto é verdadeiro.

MULTIPLICAÇÃO

Consideram-se dous casos :

1.º Fracção por inteiro e vice-versa.
2.º Fracção decimal por fracção decimal.

Regra para o 1º caso.—Faz-se abstracção da virgula no factor decimal, procede-se á multiplicação *dos numeros inteiros, separando no producto tantas casas para decimaes quantas contiver o factor decimal.* Ex. :

$$3,7896 \times 42$$

Effectuando :

$$\begin{array}{r} 3,7896 \\ 42 \\ \hline 7\,5792 \\ 151\,584 \\ \hline 159,1632 \end{array}$$

Demonstração.—Quando se fez abstracção da virgula no multiplicando 3,7896, transformou-se este factor no numero 37896, isto é, em um numero 10000 vezes maior que o primitivo, logo o producto vem 10000 maior, e para que este se torne verdadeiro separam-se com a virgula quatro casas para decimaes.

Regra para o 2º caso.—Abstrahem-se as virgulas em ambos os factores, pratica-se a multiplicação dos numeros como se fossem inteiros, e no producto separam-se com a virgula para a direita tantas casas decimaes quantas contiverem ambos os factores. Ex. :

$$43,73 \times 4,2$$

Effectuando :

$$\begin{array}{r} 43,73 \\ 42 \\ \hline 8\,746 \\ 174\,92 \\ \hline 183,666 \end{array}$$

no multiplicando tornamos este 100 vezes maior, pois quando se faz abstracção da virgula anda-se com ella tantas casas para a direita, quantas existem no factor a abstrahir, e como existem duas casas decimaes no multiplicando elle tornou-se 100 vezes maior; quando fizemos abstraccão da virgula no multiplicador tornamos este multiplicador 10 vezes maior, pois só uma casa n'elle existe; o producto vem portanto 1000 vezes maior, sendo 100 por parte do multiplicando e 10 por parte do multiplicador, e para que o tornemos verdadeiro (*isto é, correspondente aos factores decimaes*) é preciso dividil-o por 1000 (*mil*), o que se faz separando no producto á direita tres casas decimaes.

DIVISÃO

Consideram-se dous casos na divisão das fracções decimaes.

1.º Fracção decimal por um numero inteiro.

2.º Fracção decimal por fracção decimal.

Regra para o 1º caso.—Faz-se abstracção da virgula no termo decimal (dividendo), effectua-se a operação como se fossem inteiros, e no quociente separam-se com a virgula para a direita tantas casas decimaes quantas existir no factor decimal. Ex.:

$$44,748 \div 6$$

Effectuando:

$$\begin{array}{r|l} 44,748 & 6 \\ \cline{2-2} 02\,7 & 7,458 \\ 0\,34 & \\ 048 & \\ 0 & \end{array}$$

la no dividendo, este vem 1000 vezes maior e por isso torna-se o quociente tambem 1000 vezes maior por ser directa a relação entre o dividendo e o quociente; para que torne-se verdadeiro o quociente é preciso dividi-lo por mil, o que se faz separando com a virgula para a direita no quociente tres casas decimaes.

Regra para o 2º caso. (*) —*Faz-se o dividendo avançar com a virgula tantas casas para a direita, quantas forem as casas decimaes do divisor e pratica-se a operação como se o divisor fosse numero inteiro.* Ex.:

$$58{,}396 \div 6{,}73 = 5839{,}6 \div 673$$

Effectuando as operações indicadas n'este segundo membro, vem:

$$\begin{array}{r|l} 5839{,}6 & \underline{673} \\ 0455\,6 & 8{,}6 + \dfrac{518}{673} \\ 051\,8 & \end{array}$$

Demonstração.—Quando fez-se a virgula no dividendo avançar duas casas para a direita, este dividendo tornou-se 100 vezes maior, porque feita a abstracção da virgula no divisor, esta avançou para a direita duas casas.

Ora, se o quociente pela parte do dividendo vem 100 vezes maior, se pela do divisor vem 100 vezes menor, não soffreu alteração.

Separa-se no quociente uma casa para decimal, em virtude da regra do 1º caso da divisão de fracções decimaes.

(*) Esta regra é de grand...

OBSERVAÇÃO

E' sempre preferivel tratar sobre as fracções decimaes do que sobre as fracções ordinarias, pois existe grande aproximação entre as fracções decimaes e os numeros inteiros e ainda mais pela grande conveniencia da simplificação nos calculos.

D'ahi origina-se a necessidade da conversão das fracções *ordinarias* em fracções *decimaes*.

Conversão das fracções ordinarias em decimaes

A conversão de uma fracção ordinaria em fracção decimal consiste em procurar na fracção ordinaria o maior numero de unidades, de decimos, de centesimos, etc., contidos nessa mesma fracção ordinaria.

Consideram-se dous casos :

1.° Quando o denominador da fracção ordinaria é uma potencia de 10.

2.° Quando o denominador da fracção ordinaria não é uma potencia de 10.

Regra para o 1° caso.—Faz-se abstracção do denominador e separa-se por meio de uma virgula no numerador á direita tantos algarismos para decimaes, quantas unidades no expoente da potencia existir. Ex. :

$$\frac{639}{10^2} = \frac{639}{100} = 6,39$$

... A fracção $\frac{639}{\;}$ não se alterou paramos com uma virgula duas casas para decimaes á direita do numerador, porque se de um lado a fracção proposta vem 100 veses maior pela abstracção feita do denominador, por outro lado vem 100 vezes menor pela separação das duas casas para decimees; logo 6,39 é a fracção decimal correspondente á fracção dada.

Se quizermos avaliar o numero de unidades, de decimos, de centesimos de que se compõe a fracção $\frac{639}{100}$, faremos o seguinte:

Decompondo o numerador da fracção em seus valores relativos e dando a cada um desses algarismos relativos o mesmo denominador da fracção $\frac{639}{100}$ vem:

$$\frac{639}{100} = \frac{600}{100} + \frac{30}{100} + \frac{9}{100}$$

Dividindo ambos os termos de cada uma das fracções do segundo membro d'esta igualdade, a primeira por 100, a segunda por 10, teremos:

$$\frac{639}{100} = 6 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100}$$

Conseguintemente a fracção $\left(\frac{639}{100}\right)$ é igual a 6 unidades, 3 decimos e 9 centesimos.

Regra para o 2° caso. — Se a fracção ordinaria for impropria, divide-se o numerador pelo denominador e o quociente representará a parte inteira da

... direita, divide-se o numero assim formado pelo denominador, o que dá os decimos da fracção pedida; escreve-se outro zero á direita do novo resto, divide-se pelo denominador e assim successivamente; se porém a fracção dada for propria, escreve-se zero á direita do numerador, divide-se pelo denominador, o que dá os decimos da fracção pedida e assim por diante procedendo sempre de modo identico.*

1.° Ex.: $$\frac{45}{4} = 11,25$$

Effectuando:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 4 \\ \cline{2-2} 05 & 11,25 \\ 10 & \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

2.° Ex.: $$\frac{2}{8} = 0,25.$$

Effectuando:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 0,25 \\ 0 & \end{array}$$

Explicação e demonstração. — Para determinar o maior numero de unidades, de decimos, de centesimos etc., contidos na fracção ordinaria $\left(\frac{45}{4}\right)$, divide-se o numerador 45 pelo denominador 4, por que a fracção ordinaria em geral representa o quociente da divisão entre o numerador e o denominador; o quociente d'essa divisão é o inteiro 11 que está a esquerda da virgula e o resto 1 que vamos dividir por 4; ora, dividir uma unidade por 4 é o mesmo que dividir um decimo por 4,—pois uma unidade é igual a dez decimos $\left(\frac{10}{10} = 1\right)$; o quociente da divisão de um decimo por 4 é 2 decimos e o resto é o numero 2 que fica abaixo de 10; dividindo este resto 2 por 4, é o mesmo que dividir 20 decimos por 4, e o quociente d'essa divisão é o numero 5 (*centesimos*) e o resto é zero.

A conclusão disto é que a fracção dada $\left(\frac{45}{4}\right)$ encerra em si 11 unidades, 2 decimos e 5 centesimos.

Logo $\frac{45}{4} = 11,25$

O mesmo raciocinio se applica ao 2º exemplo.

Nem sempre as fracções ordinarias podem-se converter exactamente em decimaes; acontece muitas vezes que por muito grande que seja o numero dos algarismos do quociente, a divisão não se esgota.

Ex.: $\frac{2}{11}$

Effectuando:

$$
\begin{array}{r|l}
2(0 & 11 \\
\cline{2-2}
90 & 0,1818\ldots\ldots \text{etc.} \\
20 & \\
90 & \\
20 & \\
\& &
\end{array}
$$

Está patente que esta divisão nunca se esgotará, pois a reproducção do resto 9 traz a reproducção

1 e assim successivamente; o quociente é composto dos algarismos 1, 8, 1, 8, 1, 8 reproduzidos n'esta ordem constante até o infinito.

Conclusão.—Logo que reproduzir-se um dos restos não se deve continuar a operação, porque o quociente é infinito.

A estas fracções damos o nome de *periodicas*.

Fracções decimaes periodicas são fracções decimaes em que de certos em certos intervallos os mesmos algarismos se reproduzem indefinidamente em uma ordem constante.

Esses algarismos que assim se reproduzem chamam-se *periodos*.

As fracções decimaes periodicas dividem-se em simples e compostas ou mixtas.

Periodicas simples são aquellas em que os periodos começam logo depois da virgula. Ex.: 0,5555 etc.

Periodicas compostas são aquellas em que os periodos não começam logo depois da virgula. Ex.: 0,43555 etc.

Na periodica simples consideram-se duas partes distinctas: parte intima e parte decimal periodica.

Na composta consideram-se tres, a saber: parte inteira, parte decimal periodica e parte decimal não periodica.

Conversão das fracções decimaes em fracções ordinarias

Consideramos dous casos:

1.º Converter uma *decimal finida* ou não periodica em fracção ordinaria.

2.ª *Converter uma decimal periodica* ou infinita em fracção ordinaria.

não periodica igual a uma fracção ordinaria que tem por numerador o numero decimal sem a virgula, e por denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos da parte decimal. Depois simplifica-se a fracção assim abtida. Ex.:

$$54,329 = \frac{54329}{1000}$$

Demonstração. — A fracção ordinaria $\left(\frac{54329}{1000}\right)$ é igual á fracção decimal (54,329), porque quando fez-se abstracção da virgula na decimal, esta tornou-se (1000) vezes maior, pois a virgula avançou para a direita tres casas; quando se deu para denominador d'essa fracção a unidade seguida de tres zeros, a fracção tornou-se (1000) menor; houve portanto equilibrio perfeito e a fracção não mudou de valor. Logo $54,329 = \frac{54329}{1000}$

O segundo caso compõe-se de duas partes:

1.ª Quando a periodica for simples.
2.ª Quando a periodica for composta.

Regra para a 1ª parte do caso 2.º — Faz-se a fracção decimal periodica simples, equivalente a uma fracção ordinaria que tem por numerador um dos periodos, e por denominador o algarismo 9 escripto successivamente tantas vezes quantos são os algarismos do periodo. Ex.:

$$0,252525\ldots\ldots \text{ etc.} = \frac{25}{99} = F$$

$$F = 0{,}252525\ldots \text{ etc.}$$

multiplicando ambos os membros d'esta igualdade por 100, teremos :

$$100\ F = 25{,}2525\ldots \text{ etc};$$

subtrahindo a primeira igualdade da segunda ordenadamente, virá :

$$100\ F - F = 25 - 0 \text{ ou}$$
$$99\ F = 25$$

Tirando o valor de F :

$$F = \frac{25}{99}$$

Logo, sendo por supposição $F = 0{,}252525\ldots$ etc. substituindo em vez de F o seu valor, virá :

$$0{,}\ 252525\ldots \text{ etc.} = \frac{25}{99}$$

Regra para a 2ª parte do 2º caso.—Faz-se a fracção decimal periodica composta equivalente a uma fracção ordinaria que tem por numerador a differença entre o numero formado pela parte não periodica seguida de um periodo e a parte não periodica, e por denominador tantos noves escriptos successivamente quantos são os algarismos do periodo, seguido de tantos zeros quantos são os algarismos não periodicos. Ex. :

$$0{,}473333\ldots \text{ etc.} = \frac{473 - 47}{900} = F$$

Demonstração.—Seja F o valor da fracção decimal composta:

$$F = 0{,}473333\ldots \text{ etc};$$

multiplicando ambos os membros d'esta igualdade—primeiro por 1000 e ao depois por 100, virá:

$$1000\,F = 473{,}333\ldots \text{ etc.}$$
$$100\,F = 47{,}3333\ldots \text{ etc};$$

subtrahindo estas duas igualdades ordenadamente, teremos:

$$1000\,F - 100\,F = 473 - 47,$$
$$\text{ou } 900\,F = 473 - 47;$$

tire-se o valor de F e faça-se a conveniente substituição:

$$F = \frac{473 - 47}{900} = 0{,}47333\ldots \text{ etc.}$$

OBSERVAÇÕES

1.ª *O numerador da fracção ordinaria que provém da transformação de uma periodica composta, não póde terminar em zero, e conseguintemente não é divisivel por 2 e por 5 simultaneamente.*

Para que uma differença termine em zero é imprescindivel que o ultimo algarismo do primeiro termo seja igual ao ultimo algarismo do segundo; não é possivel pois que o ultimo algarismo do periodo seja igual ao ultimo da parte não periodica.

Se substituirmos na decimal periodica composta 0,39878787 etc. o ultimo algarismo (7) do periodo por pri[illegible] (87), e no segundo é (89).

2.ª *Se uma fracção decimal periodica, quer simples ou composta, tiver parte inteira, a fracção ordinaria a ella equivalente é determinada de conformidade com as regras estabelecidas, tendo-se porém o cuidado de considerar essa parte inteira como parte decimal não periodica e supprimir tantos zeros no denominador da fracção ordinaria obtida, quantos forem os algarismos da parte inteira da periodica.* Ex. :

$$8{,}64444\ldots\ldots \text{ etc.} = \frac{864 - 86}{90}$$

$$\begin{aligned} F &= 8{,}6444 \ldots\ldots \text{ etc.} \\ 100\ F &= 864{,}444 \ldots\ldots \text{ etc.} \\ 10\ F &= 86{,}4444 \ldots\ldots \text{ etc.} \\ \hline \text{ou } 90\ F &= 864 - 86 \end{aligned}$$

$$\text{Logo } F = \frac{864 - 86}{90}$$

Para abreviar a questão se resolve praticamente assim :

Divide-se a dizima periodica por 10, converte-se-a em ordinaria e no final multiplica-se esta por dez. Ex. :

$$8{,}64444\ldots\ldots \text{ etc.}$$

Dividindo esta fracção por (10) e convertendo-a em fracção ordinaria, vem :

$$0{,}86444\ldots \text{ etc.} = \frac{864 - 86}{900};$$

le a supprimir um zero no denominador, teremos:

$$\left(\frac{864 - 86}{90}\right)$$

3.ª *Os numeros 2 e 5 não podem ser factores do denominador de uma fracção ordinaria equivalente a uma decimal periodica simples.*

Explicação.—Os denominadores das fracções ordinarias, provenientes da decimal periodica simples, terminam sempre no algarismo (9), e como os numeros que terminam n'esse algarismo não são divisiveis por (2) ou (5), os denominadores não contêm nenhum d'estes factores.

4.ª *A fracção ordinaria, que provém d'uma periodica composta, encerra em seu denominador, além de outros factores, os factores 2 ou 5 ou ambos, com expoente igual ao numero dos algarismos decimaes não periodicos.*

Explicação.—Seja a dizima periodica composta:

$$0{,}476666\ldots \text{ etc.} = \frac{476 - 47}{900} = \frac{429}{900}$$

O denominador da fracção ordinaria, assim obtida, termina em tantos *zeros* quantos são os algarismos (47) não periodicos; contém pois, os factores, $(2 \times 5)^2 = 100$, com o expoente (2), igual ao numero dos algarismos não periodicos.

Um dos factores 2 ou 5 continúa sempre a ser factor do denominador, mesmo no caso em que seja simplificad...

mal periodica composta, nunca termina em *zero* (*)
e por isso, não contém os factores 2 e 5 simultaneamente.

PRINCIPIOS

Primeiro.—Toda a fracção irreduzivel cujo denominador não contém factores primos differentes de 2 e 5, dá origem a uma dizima, cujo numero de algarismos é limitado e igual ao maior dos expoentes que os factores 2 e 5 tèm no denominador.

Demonstração—E' sempre possivel n'estas circumstancias igualar no denominador os expoentes de 2 e 5.

Para este fim basta multiplicar ambos os termos da fracção por uma potencia conveniente de 2 ou de 5.

Por este meio fica a fracção transformada em outra cujo denominador é uma potencia de (10), porque já tinha os factores 2 e 5; o numero dos algarismos decimaes da fracção assim obtida, ou o expoente d'esta potencia, é igual ao maior dos expoentes que tem 2 e 5 no denominador da fracção dada.

Ex. Seja dada a fracção irreduzivel $\dfrac{A}{2^{m} \times 5^{m+n}}$

(*) O numerador desta fracção não termina em zero, porque o ultimo algarismo da parte decimal não periodica á esquerda não póde ser igual ao ultimo algarismo á esquerda do periodo; se assim fosse, o periodo começava no ultimo algarismo não periodico.

Multiplicando por 2^n ambos os seus termos, vem :

$$\frac{A}{2^m \times 5^{m+n}} = \frac{A \times 2^n}{2^m \times 5^{m+n} \times 2^n} = \frac{A \times 2^n}{2^{m+n} \times 5^{m+n}} =$$

$$= \frac{A^n \times 2^n}{10^{m+n}}$$

Calculado o producto $(A \times 2n)$ teremos de separar-lhe $(m + n)$ algarismos decimaes.

Segundo.—Toda fracção irreduzivel cujo denominador contém algum factor primo differente de 2 e 5 dá origem a uma decimal periodica.

Demonstração. — Supponhamos que uma fracção irreduzivel qualquer $\left(\frac{a}{b}\right)$ produzisse uma decimal limitada, n'este caso teriamos :

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^m};$$

a fracção ordinaria $\left(\frac{a}{b}\right)$ sendo irreduzivel N e 10^m seriam equi-multiplos de a e b, e b seria divisor de 10^m o que é absolutamente impossivel, porque b contém um factor primo que não entra em 10^m.

Accresce que qualquer que seja o numero de *zeros* escriptos á direita do numerador da fracção ordinaria, o producto nunca contém todos os factores do denominador, porque os zeros á direita de um numero não lhe introduzem senão os factores primos 2 e 5 ; o producto não póde ser divisivel pelo denominador, e sendo assim o resto da divisão não póde ser *zero* (0) e o numero dos algarismos do quociente é infinito, pelo que não póde deixar de ser periodica.

Terceiro.—Toda a fracção ordinaria irreduzivel, cujo denominador contém factores primos differentes de 2 e 5, e juntamente um destes factores ou ambos, dá origem a uma dizima periodica composta ; e o numero dos algarismos não periodicos é igual ao maior dos expoentes que tem os factores 2 e 5 no denominador.

Demonstração.—Em virtude da *segunda propriedade*, a fracção proveniente da conversão não póde ser limitada ; não póde tambem ser periodica simples, porque convertida em fracção ordinaria, achariamos por denominador um numero composto unicamente de noves ; por exemplo teriamos :

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{9} = \frac{H}{k} \text{ (simplificada)}$$

Logo, $a = H$; $b = k$,

o que é impossivel, visto como k não contém nem 2 nem 5, e b contém um destes factores ou ambos por hypothese.

A fracção decimal resultante não podendo ser limitada ou finita, nem periodica, será impreterivelmente periodica composta.

Para concluir que o numero dos algarismos não periodicos seja igual ao maior dos expoentes que os factores 2 e 5 tem no denominador, basta tão sómente observar que o denominador de uma fracção ordinaria equivalente a uma dizima periodica composta, sendo formado de *noves* seguidos de tantos *zeros* quantos os algarismos da parte não expoente igual ao numero desses algarismos; ainda mais, diminuindo um dos expoentes desses factores pela simplificação, o expoente do outro factor será igual ao numero dos algarismos não periodicos e sempre o mesmo.

Quarta. — *Toda a fracção ordinaria irreduzivel cujo denominador não contém os factores 2 e 5 dá origem a uma dizima periodica simples.*

Demonstração. — A fracção resultante da conversão da fracção ordinaria dada não póde ser nem limitada (*Propriedade* 2ª) nem periodica composta, porque convertendo essa decimal em fracção ordinaria achariamos para denominador um numero composto de *noves seguidos de zeros*, por exemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{N}{90};$$

simplificando a fracção do 2º membro, e se dos factores 2 e 5 desapparecesse um, ficaria o outro; suppondo por exemplo o desapparecimento do factor 5, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{H}{k \times 2}$$

se estas duas fracções ordinarias são irreduziveis, as condições de igualdade são

$$a = H\,;\; b = k \times 2\,;$$

por tanto o denominador b contém o factor 2, o que é contra a hypothese.

Logo, se a fracção decimal resultante não póde ser limitada, nem periodica composta, é periodica simples.

Potencias e raizes das fracções decimaes

QUADRADO E CUBO

A formação dos quadrados e dos cubos das fracções decimaes não exige regras differentes das dos quadrados e cubos das fracções ordinarias; obtem-se as potencias formando productos de factores iguaes e d'ahi concluiremos que os quadrados e cubos são obtidos das regras da multiplicação dos decimaes.

Exemplos:

1.º— $(0,8)^2 = 0,8 \times 0,8 = 0,64$

2.º— $(0,5)^3 = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,125$

RAIZ QUADRADA

Consideram-se dous casos:

1.º Quando a fracção decimal tiver numero par de casas decimaes.

2.ª Quando o numero de casas decimaes for impar.

Regra do 1º caso.—Faz-se abstracção da virgula, extrahe-se a raiz quadrada como se o numero fosse inteiro e dá-se para raiz a metade das casas decimaes que tem o quadrado. Ex.:

$$\sqrt{0,64} = 0,8 ; \sqrt{64} = 8$$

Demonstração. — Quando se fez abstracção da ... no quadrado (0,64) esse quadrado tornou-se 100 vezes maior que o verdadeiro, e para que elle se torne verdadeiro é necessario tornal-o 100 vezes menor ou dividil-o por 100, o que se consegue fazendo a virgula andar *duas casas* para a esquerda ; a relação entre o quadrado e a raiz quadrada sendo directa e de 100 para 10, o quadrado (64) sendo 100 vezes maior que o quadrado (0,64), a raiz quadrada (8) é 10 vezes maior que a raiz quadrada (0,8).

Logo a raiz quadrada de (0,64) é (0,8).

Regra do 2° caso.—Torna-se par o numero de casas decimaes (o que se consegue escrevendo um zero á direita da parte decimal), faz-se abstracção da virgula e applica-se a regra do 1° caso. Ex. :

$\sqrt{0,2} = \sqrt{0,20} = 0,4$; $\sqrt{20} = 4$ (approximadamente)

Demonstração.—Torna-se par o numero de casas decimaes, porque a unica relação que existe entre o quadro e a raiz quadrada é directa, (como já vimos na demonstração do 1° caso), de 100 para 10 e deste modo tendo o quadrado numero impar de casas decimaes, não poderiamos compensar essa relação por não haver relação alguma entre o quadrado e a raiz correspondente.

Logo a raiz quadrada de (0,20) ou (0,2) é (0,4).

RAIZ CUBICA

Consideram-se dous casos :

1.° Quando o numero de casas decimaes for 3 ou multiplo de 3.

2.° Quando o numero de casas decimaes não for representado nem por 3 nem por seus multiplos.

Regra do 1º caso.—Faz-se abstracção da virgula, extrahe-se a raiz do numero inteiro resultante e separa-se para decimaes — o terço de casas decimaes que tem o cubo. Ex. :

$$\sqrt[3]{0,216} = 0,6 \, ; \sqrt[3]{216} = 6$$

Demonstração.—Quando faz-se abstracção da virgula torna-se o cubo (0,216) mil vezes maior que o verdadeiro, logo a sua raiz cubica (6) está dez (10) vezes maior e para que se torne verdadeira é necessario dividil-a por (10), o que se consegue separando um algarismo para decimal ; vem pois a raiz (0,6).

Ora, se (216) é mil vezes maior que (0,216), e a raiz (6) dez vezes maior que a raiz (0,6), a raiz de 0,216 = 0,6.

Regra para o 2º caso.—Triplica-se o numero das casas decimaes escrevendo zeros á direita, extrahe-se a raiz do resultado como se fosse um numero inteiro, e na raiz achada separa-se um numero de casas decimaes igual ao terço. Ex. :

$$\sqrt[3]{0,45} = \sqrt[3]{0,450} = 0,7 \text{(app:)}$$

Demonstração.—Quando se fez o numero de casas decimaes triplo—a fracção decimal não mudou de valor ; quando extrahimos a raiz cubica do numero 450 e não de 0,450, extrahimos a raiz cubica de um numero 1000 vezes maior e por isso a raiz 7 (approximada) veio 10 vezes maior que a verdadeira e para que ella se torne verdadeira é necessario dividil-a por 10, o que faz separando uma casa para decimal.

Logo—0,7 é a raiz cubica da fracção 0,45.

PARTE TERCEIRA

THEORIA DOS LIMITES

Limite — é uma quantidade incommensuravel fixa da qual uma quantidade variante commensuravel se approxima constantemente que nunca a póde igualar, mas que tanto se approxima, que a differença póde ser menor que qualquer quantidade, por menor que seja.

Grandeza commensuravel — é a quantidade que tem com a unidade uma medida commum.

Grandeza incommensuravel é a quantidade que não tem medida commum com a unidade.

Esta theoria consta dos seguintes principios :

Primeiro.— Qualquer grandeza commensuravel sendo comparada com a unidade respectiva, dá para resultado um numero inteiro ou um numero fraccionario.

Demonstração. — A unidade ou qualquer parte d'ella é a medida que qualquer grandeza póde ter. Se a quantidade tem por medida a unidade, o resultado da comparação é um numero inteiro ; se a medida da quantidade for, não a unidade, mas sim uma parte d'esta, o resultado será um numero fraccionario.

Segundo.—Qualquer grandeza incommensuravel não póde ser representada por numero inteiro e por numero fraccionario.

Demonstração.—Se qualquer grandeza incommensuravel podesse ser representada por um nu-

..., de certo teria com a unidade uma medida homogenea e commum ; se por outro lado podessemos comparar essa grandeza incommensu-vel com qualquer parte da unidade o resultado seria um numero fraccionario.

Ora, se as grandezas incommensuraveis não pódem ser comparadas com a unidade e com qualquer parte d'esta, é porque não podem ser representadas por numeros inteiros ou fraccionarios.

Terceiro. — Se uma grandeza incommensuravel achar-se comprehendida entre duas outras commensuraveis, cujas expressões numericas diffirão em uma quantidade tão pequena quanto se queira, é possivel sempre obter os valores das quantidades commensuraveis.

Demonstração.—Supponha-se que a unidade seja dividida em n partes iguaes e que a grandeza incommensuravel (1) contenha a vezes uma d'estas partes, e que sóbre uma parte da grandeza menor que o quociente da divisão de (1) por (n), isto é, menor que $\frac{1}{n}$; pelo que, teremos :

$$\frac{a}{n} < 1 < \frac{a+1}{n}$$

A grandeza incommensuravel (1) está comprehendida entre duas grandezas commensuraveis, que têm as seguintes expressões numericas :

$$\left(\frac{a}{n}\right) \text{ e } \left(\frac{a+1}{n}\right)$$

Se a differença entre estes dous numeros é $\left(\frac{1}{n}\right)$, e como é possivel tornar n tão grande quanto se queira, é claro que $\left(\frac{1}{n}\right)$ póde tambem ser tão pequeno quanto se queira; $\left(\frac{1}{n}\right)$ é menor que a differença entre qualquer dos numeros $\left(\frac{a}{n}\right)$, $\left(\frac{a+1}{n}\right)$ e o numero incommensuravel 1.

Logo, a differença $\left(\frac{1}{n}\right)$ podendo tornar-se menor que qualquer quantidade, tomando (n) sufficientemente grande, por menor que $\left(\frac{1}{n}\right)$ se torne, o mesmo se dá com maior força de razão á differença entre (1) e um dos dous numeros (*) $\left(\frac{a}{n}\right)$ e $\left(\frac{a+1}{n}\right)$.

Quarto. — Quando forem constantemente iguaes duas variaveis que se approximarem dos seus limites, os limites serão tambem iguaes.

Demonstração. — Representem-se as duas varia-

(*) O numero $\frac{a}{n}$ é a variavel inferior — vai crescendo e approximando-se de 1 cada vez mais, porém sempre inferior a 1.

O numero $\frac{a+1}{n}$ é a variavel superior — vai constantemente diminuindo, porém fica sempre superior a (1).

O numero (1) é o limite das quantidades $\frac{a}{n}$ e $\frac{a+1}{n}$; estas duas ultimas quantidades denominam-se *variaveis*

... e A' ; sejam os limites L e L' ; as differenças entre as variaveis e os seus limites D e D'; vem :

$$A + D = L$$

$$A' + D' = L'$$

Logo : $(A - A') + (D - D') = L - L'$

Tornando-se D e D' infinitamente pequenos, quando A e A' approximam-se infinitamente dos seus limites, o mesmo succede a $D - D'$, quantidade esta que poderemos considerar nulla.

Ora, se $A = A'$ (constantemente), conclue-se que $A - A' = O$.

Logo substituindo na igualdade acima o valor de $A - A'$, vem :

$$O = L - L', \text{ ou } L = L'$$

Quinto.—O limite da somma ou differença de duas variaveis, é igual á somma ou differença dos limites das variaveis.

Demonstração.—Por hypothese os limites L e L' são iguaes cada um de per si á somma das variantes com as differenças respectivas, pelo que teremos :

$$L = A + D$$

$$L' = A' + D'$$

Sommando estas duas igualdades ordenadamente, vem :

$$L + L' = A + A' + D + D' ;$$

á medida que A e A' approximam-se dos seus limites L e L', as differenças D e D' diminuem tornando-se infinitamente pequenas ; o mesmo dá-se com a somma $D + D'$.

seguinte:

$$\text{Lim: } (A + A') = L + L'$$

$$\text{Lim: } (A + A') = \text{Lim: } A + \text{Lim: } A'$$

Para o caso da differença o raciocinio é o mesmo.

Sexto.—O limite do producto de duas ou mais variaveis, é igual ao producto dos limites das variaveis.

Demonstração.—Por hypothese, vêm as seguintes igualdades:

$$L = A + D$$

$$L' = A' + D'$$

Multiplicando ambos os membros d'estas duas igualdades ordenadamente, teremos:

$$LL' = AA' + AD' + A'D + DD';$$

D e *D'* tornando-se infinitamente pequenos, o mesmo se dá aos termos em que entrão estes factores, logo:

$$\text{Lim: } (AA') = \text{Lim: } A \times \text{Lim: } A'$$

O mesmo raciocinio tem applicação havendo tres ou mais factores; isto é:

$$\text{Lim: } (A\ A'\ A'') = \text{Lim: } (A \times A'\ A'') = \text{Lim: } A \times \\ \times \text{Lim: } A' \times \text{Lim: } A'' \text{ etc.}$$

Setimo.—O limite do quociente de duas variaveis é igual ao quociente dos limites das variaveis.

Demonstração.—Por hypothese, vem :

$$\frac{A}{A'} = Q$$

Applicando a propriedade do dividendo, teremos :

$$A = A' Q \quad \text{ou}$$

$$\text{Lim: } A = \text{Lim: } A' \times \text{Lim: } Q$$

Dividindo ambos os membros pelo Lim: A, vem o que se quer demonstrar :

$$\frac{\text{Lim: } A}{\text{Lim: } A'} = \text{Lim: } Q.$$

Oitavo.—O limite da potencia m *de uma variavel, é igual á potencia* m *do limite da variavel.*

Demonstração. — Pela definição de potencia, vem :

$$A^m = A \times A \times A \times \ldots\ldots \times A$$

Pelo principio sexto, temos :

$$\text{Lim: } A^m = \text{Lim: } A \times \text{Lim: } A \times \ldots\ldots \times \text{Lim: } A$$

$$\text{ou Lim: } A^m = (\text{Lim: } A)^m$$

Nono. — O limite da raiz m *d'uma variavel, é igual á raiz* m *do limite da variavel.*

Demonstração.—Supponha-se que a

$$\sqrt[m]{A} = R$$

Tirando n'esta igualdade o valor de A, vem:

$$A = R^m$$

Logo—Lim: $A = (\text{Lim: } R)^m$ ou

$$\sqrt[m]{\text{Lim: } A} = \text{Lim: } R$$

Da propriedade sexta, conclue-se o que se segue:

Em um producto de factores incommensuraveis a ordem dos factores não altera o producto.

Demonstração. — Representem-se as variaveis por A, A', A'', e os limites por L, L', L''.

Ora, $A \times A' \times A'' = A' \times A \times A''$

Logo —Lim: $(A \times A' \times A'') =$ Lim: $(A' \times A \times A'')$, ou Lim: $A \times$ Lim: $A' \times$ Lim: $A'' =$ Lim: $A' \times$ $\times$ Lim: $A \times$ Lim: A''

Finalmente

$$L \times L' \times L'' = L' \times L \times L''$$

Fracções continuas

Definição.—Fracções continuas são as expressões formadas de fracções ordinarias que têm para numerador a unidade e para denominador um inteiro mais uma fracção, a qual tem para numerador a unidade e para denominador um inteiro mais uma fracção, etc.

Origem.—Sempre que se trata de ... proxim...

quantidades incommensuraveis, de modo que o erro commettido seja menor que a unidade, obtem-se um variado numero de expressões, ao qual damos o nome de *fracções continuas*.

Explicação. — Supponhamos que x representa uma quantidade que não póde ser representada por numero inteiro.

Representemos por a o numero inteiro que mais se approxima do valor de x; seja $\left(\frac{1}{y}\right)$ a fracção que representa a differença entre x e a:

$$x - a = \frac{1}{y}$$

Procurando de um modo analogo o numero inteiro b que mais se approxima de y, $\frac{1}{z}$ representará a differença $y - b$;

$$y - b = \frac{1}{z}$$

Se continuarmos a procurar do mesmo modo, teremos:

$$x - c = \frac{1}{u},\ u - d = \frac{1}{v} \text{ etc.};$$

Tirando os valores de x, y, z, u, etc. n'estas igualdades, vem:

$$x = a + \frac{1}{y};\ y = b + \frac{1}{z};\ z = c + \frac{1}{u};\ u = d + \frac{1}{v}$$

Logo $x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v + \text{etc.}}}}}$

São estas as fracções continuas.

Quando entre as quantidades y, z, u, v, etc, achar-se uma outra expressa por numero inteiro, *a fracção continua é limitada* ; no caso contrario *é indefinida*.

Os numeros a, b, c, d, etc., denominam-se *quocientes incompletos*.

Um quociente incompleto e tudo o que se lhe segue fórma *um quociente completo*.

Integrantes são as fracções que integram ou completam as continuas que tem para numerador a unidade. Ex. :

$$\frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{d},\ \frac{1}{v} \text{ etc.}$$

Reduzida ou fracção convergente é a reunião de todos os termos, desde o primeiro até uma fracção integrante qualquer. Ex. :

$$\frac{a}{1};\ a + \frac{1}{b};\ a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}};\ a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}}$$

A primeira reduzida obtem-se tomando a primeira integrante.

A segunda, tomando as duas primeiras.

A terceira, as tres primeiras.

Calculando os valores de cada uma, vem :

1ª reduzida $$a = \frac{a}{1}$$

2ª reduzida $$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$$

3ª reduzida $$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{c(ab + 1) + a}{bc + 1}$$

4ª reduzida $$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{d(abc + ca) + ab + 1}{d(bc + 1) + b}$$

As reduzidas dividem-se em *pares* e *impares*.

Reduzidas pares são aquellas formadas de numeros pares integrantes.

Reduzidas impares são aquellas formadas de numeros impares de integrantes.

Regra.—Formada uma reduzida, obtem-se a seguinte multiplicando ambos os termos d'aquella pelo seguinte quociente incompleto, e juntando aos productos respectivamente os termos da reduzida precedente.

1.º As reduzidas de ordem impar são maiores do que a fracção dada, ou do que o verdadeiro valor.

2.º As reduzidas de ordem par são menores do que a fracção dada.

3.º Qualquer reduzida de ordem par é maior do que a sua antecedente mais proxima, isto é, a 6.ª $>$ 4.ª, a 4.ª $>$ 2ª, etc.

4.º Qualquer reduzida de ordem impar é menor do que a sua antecedente mais proxima, isto é, a 5.ª $<$ 3.ª, a 3.ª $>$ 1.ª etc.

5.º A reduzida approxima-se tanto mais da fracção proposta quanto maior for o numero de integrantes que a contiver.

6.º A fracção proposta ou o seu verdadeiro valor está sempre comprehendido entre duas quaesquer das reduzidas consecutivas.

7.º O erro commettido tomando uma reduzida como valor approximado da fracção é menor que a unidade dividida pelo producto dos denominadores d'esta reduzida e da seguinte.

PROBLEMAS

Consideram-se dous problemas:

1.º Converter uma fracção ordinaria em fracção continua.

2.º Converter uma fracção continua em ordinaria.

Regra do 1º caso.—Procura-se o maximo commum divisor aos termos da fracção proposta dá-se *para numerador das integrantes a unidade, e para denominador os quocientes incompletos.* Ex. :

$$\frac{159}{493} = \cfrac{1}{3 \cfrac{1}{9 \cfrac{1}{1 \cfrac{1}{15}}}}$$

Procurando o maximo commum divisor entre os numeros 493 e 159, vem .

	3	9	1	15
493	159	16	15	1
016	015	01	0	

Os numeros 3, 9, 1 e 15 representam os denominadores das integrantes, cujo numerador é constante á unidade.

Por esse meio se vê o quanto é veridica a definição de fracção continua.

Regra do 2º caso.—Para este caso não se tem até hoje descoberto regra alguma, mas as questões são resolvidas pela reducção do inteiro á denominação do quebrado, e divisão de fracções.

Comparação dos Numeros

Razões, Progressões, Logarithmos

PARTE PRIMEIRA

THEORIA DAS RAZÕES E PROPORÇÕES

Razão ou relação — é o resultado da comparação de duas quantidades, quando se tem em vista saber quanto uma excede a outra ou quantas vezes uma contém a outra.

Divide-se em *razão por differença e por quociente*.

As primeiras tambem se denominam *razões arithmeticas* ou *differenças*; as segundas *razões geometricas* ou *razões* simplesmente.

Razão por differença — é o resultado da comparação effectuada entre dous numeros por meio da subtracção.

A razão por differença entre 8 e 3 é $8-3$, e exprime-se $8 . 3$; lê-se 8 para 3.

Razão por quociente ou geometrica — é o resultado da comparação effectuada entre dous numeros por meio da divisão.

A razão por quociente entre 8 e 3 é $\left(\frac{8}{3}\right)$, exprime-se $8 : 3$; lê-se 8 para 3.

A razão de duas grandezas sendo o numero que indica quantas vezes uma contém a outra, é manifesto ser ella a *medida da primeira quando a segunda se toma por unidade*.

Proporção—é a expressão da igualdade entre duas razões.

Divide-se em proporção por differença ou equidifferença, e em proporção por quociente ou simplesmente *proporção*.

Proporção por differença—é a igualdade entre duas razões por differença.

A equidifferença entre as razões 8 . 3 e 10 . 5, exprime-se 8 . 3 : 10 . 5, e lê-se 8 para 3 assim como 10 para 5.

Em geral diz-se *a . b : c . d*.

Proporção por quociente ou geometrica — é a igualdade entre duas razões por quociente.

A proporção entre as razões 3 : 12 e 24 : 96, exprime-se 3 : 12 : : 24 : 96, e lê-se 3 para 12 assim como 24 para 96.

Diz-se em geral *a* : *b* : : *c* : *d*.

Avalia-se a equidifferença *a . b : c . d*, assim :

$$a - b = c - d.$$

Avalia-se a proporção *a : b : : c : de*, assim :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Invertendo a ordem dos termos de uma razão a nova razão denomina-se *inversa* da primeira.

O producto de duas razões inversas é igual á unidade.

Tomem-se os numeros *A* e *B* ; a razão do primeiro para o segundo é $\frac{A}{B}$; a razão inversa é $\frac{B}{A}$;

Logo : $$\frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = \frac{A \times B}{B \times A} = 1$$

A razão de duas grandezas é igual á razão dos numeros que as representam quando são medidas com a mesma unidade.

Tomem-se as grandezas *A* e *B*, e seja *C* a unidade commum; representemos por *a* o numero de vezes que *C* é contido em *A*, e por *b* o numero de vezes que *C* é contido em *B*; virá:

$$\frac{A}{C} = a\,; \frac{B}{C} = b\,;$$

d'onde $A = C \times a\,;\ B = C \times b\,;$

logo: $$\frac{A}{B} = \frac{C \times a}{C \times b} = \frac{a}{b}$$

Em um grande numero de questões a relação existente entre duas grandezas d'especies heterogenias é tal, que se a primeira tornar-se um certo numero de vezes maior ou menor, o mesmo acontece á segunda.

Em outros casos a relação existente entre as duas grandezas consideradas é tal, que tornando uma d'ellas 2, 3, 4, etc. vezes maior, a outra fica 2, 3, 4, etc. vezes menor e reciprocamente.

Então diz-se que as grandezas variam em razão inversa, ou são inversamente proporcionaes.

O divisor e o quociente, por exemplo, são inversamente proporcionaes.

DA EQUIDIFERENÇA

Propriedade fundamental.—Em toda a equidifferença a somma dos extremos é igual á somma

Demonstração.—Seja $a \,.\, b : c \,.\, d$; avaliando esta equidifferença, vem :

$$a - b = c - d\,;$$

addicionando $b + d$ a ambos os membros, temos :

$$a - b + b + d = c - d + b + d\,;$$

attendendo que quantidades iguaes com desiguaes signaes em um mesmo membro destroem-se, vem :

$$a + d = c + b$$

Reciprocamente.—Se a somma de dous numeros for igual á somma de outros dous, os quatros numeros formarão uma equidifferença, collocando nos extremos as parcellas d'uma somma e nos meios as parcellas da outra.

Demonstração.—Supponhamos $a + d = c + d$; subtrahindo $b + d$ de ambos os membros da igualdade, temos :

$$a + d - (b + d) = c + b - (b + d),$$

effectuando as operações indicadas, vem :

$$a + d - b - d = c + b - b - d$$

$$\text{ou} \quad a - b = c - d\,;$$

esta ultima igualdade corresponde á proporção por differença :

$$a \,.\, b : c \,.\, d$$

Primeiro corollario.—Tres mudanças pódem-se fazer na ordem dos termos de uma equidifferença, sem a perturbar : 1ª *inverter os meios* ; 2ª *inverter* *tremos e vice-versa.*

Demonstração.---Seja a equidifferença $a \,.\, b : c \,.\, d$ ou $a - b = c - d$.

1.° invertendo os meios:

$$a \,.\, c : b \,.\, d \text{ ou } a - c = b - d$$

2.° invertendo os extremos:

$$d \,.\, b : c \,.\, a \text{ ou } d - b = c - a$$

3.° collocando os meios no lugar dos extremos e vice-versa, virá:

$$b \,.\, a : d \,.\, c \text{ ou } b - a = d - c$$

A equidifferença nunca se perturba por meio d'estas mudanças, porque a propriedade fundamental tem sempre applicação.

Segundo corollario.---Uma equidifferença não se perturba: 1°, *juntando ou tirando o mesmo numero aos dous primeiros termos ou aos dous ultimos*; 2°, *aos antecedentes ou aos consequentes*; 3°, *aos quatro termos juntamente*; 4°, *multiplicando ou dividindo os termos todos pelo mesmo numero.*

Demonstração.---Seja a equidifferença $a \,.\, b : c \,.\, d$ ou $a + d = b + c$.

Juntando (m) aos dous primeiros termos, vem:

$$a + m \,.\, b + m : c \,.\, d;$$

applicando a propriedade fundamental, teremos:

dividindo por m ambos os membros, vem :

$$a + d = b + c$$

O mesmo raciocinio applicado nos demais casos dá sempre o mesmo resultado.

Terceiro corollario.---Tres termos de uma equidifferença determinam o quanto : *se este é um extremo, é igual á somma dos meios menos o extremo conhecido ; se é um meio, é igual á somma dos extremos menos o meio conhecido.*

Demonstração.—Seja a equidifferença $a \,.\, b : c \,.\, x$.

Applicando a propriedade fundamental, vem :

$$a + x = b + c\,;$$

subtrahindo de ambos os membros a quantidade a, teremos :

$$x = b + c - a.$$

Quando x occupar um dos meios como na equidifferença,

$$a \,.\, b : x \,.\, d$$

o raciocinio é o mesmo :

Ora, $$a + d = b + x$$

Logo $$a + d - b = x$$

Quarto corollario.---Quando a equidifferença for continua, (isto é, quando os meios ou os extremos forem iguaes) *a somma dos extremos é igual ao dobro do meio, e o meio é igual á metade da somma dos extremos.*

Demonstração.---1.ª Tome-se uma equidifferença continua:

$$a \,.\, y : y \,.\, b$$

Pela propriedade fundamental:

$$a + b = y + y = 2\,y$$

Logo:

$$y = \frac{a + b}{2}$$

2.ª

$$z \,.\, b : c \,.\, z$$

$$z + z = b + c = 2\,z$$

Logo:

$$z = \frac{b + c}{2}$$

Chama-se *meio differencial* o meio d'uma equidifferença continua.

PROPORÇÕES

Propriedade fundamental. --- Em qualquer proporção o producto dos extremos é igual ao producto dos meios.

Demonstração.---Seja a proporção $a : b :: c : d$; avaliando-a, vem:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

pelo producto dos denominadores (bd), temos :

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd \text{ ou } \frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d};$$

praticando as operações indicadas, vem a igualdade que demonstra o principio :

$$ad = bc$$

Reciprocamente.---Se o producto de dous numeros for igual ao producto de outros dous, os quatro formarão uma proporção, collocando nos extremos os factores de um producto, e nos meios os factores do outro.

Demonstração.---Seja o producto ad igual ao producto bc, isto é : $ad = bc$.

Dividindo ambos os membro da igualdade por db, temos :

$$\frac{ad}{db} = \frac{bc}{db} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

mas esta ultima igualdade significa a proporção $a : b :: c : d$.

Primeiro corollario.---Na ordem dos termos de uma proporção pódem-se fazer tres mudanças sem a perturbar : 1ª *inverter os meios* ; 2ª *inverter os extremos* ; 3ª *collocar os meios no lugar dos extremos e vice-versa.*

Demonstração.---Tome-se a proporção

$$a : b :: c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

1.º invertendo os meios :

$$a : c :: b : d \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{b}{d};$$

2.º invertendo os extremos :

$$d : b :: c : a \text{ ou } \frac{d}{b} = \frac{c}{a};$$

3.º collocando os meios no lugar dos extremos e vice-versa :

$$b : a :: d : c \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Estas transformações que acabamos de praticar não alteram a lei da proporção, porque applicando em cada uma d'estas proporções a propriedade fundamental, verifica-se ser o resultado sempre o mesmo.

$$1.^a\ ad = bc;\ 2.^a\ ad = cb;\ 3.^a\ da = bc;$$

$$4.^a\ bc = da$$

Segundo corollario.---Não se perturba a lei de uma proporção : 1º, *multiplicando ou dividindo pelo mesmo numero os dous primeiros termos ou os dous ultimos ;* 2º, *os antecedentes ou os consequentes ;* 3º, *os quatro termos juntamente.*

Demonstração.—Figure-se a proporção :

$$a : b :: c : d \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

mos, vem :

$$am : bm :: c : d \text{ ou } \frac{am}{bm} = \frac{c}{d}$$

Dividindo por *m* os dous primeiros termos, vem :

$$a \div m : b \div m :: c : d \text{ ou } \frac{a \div m}{b \div m} = \frac{c}{d}$$

Comparando as tres igualdades notamos que os segundos membros são iguaes entre si, logo :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a \div m}{b \div m}$$

2.° Multiplicando por *m* os antecedentes, vem :

$$am : b :: cm : d \text{ ou } \frac{am}{b} = \frac{cm}{d}$$

Dividindo por *m* os antecedentes, vem :

$$a \div m : b :: c \div m : d \text{ ou } \frac{a \div m}{b} = \frac{c \div m}{d}$$

Sommando as duas igualdades ordenadamente, teremos :

$$\frac{am + a \div m}{b} = \frac{cm + c \div m}{d} \text{ ou } \frac{2\,a}{b} = \frac{2\,c}{d}$$

Logo : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou $a : b :: c : d$

por m, vem :

$$am : bm :: cm : dm \text{ ou } \frac{am}{bm} = \frac{cm}{dm}$$

Dividindo os quatro termos por m, temos :

$$a \div m : b \div m :: c \div m : d \div m \text{ ou } \frac{a \div m}{b \div m} = \frac{c \div m}{d \div m}$$

Ora, multiplicar ou dividir ambos os termos de uma fracção pelo mesmo numero, a fracção não se altera, logo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é o resultado effectuado não só das operações indicadas em ambos os membros da primeira igualdade, mais ainda em ambos os membros da segunda.

Terceiro corollario. — Não se perturba a lei da proporção : 1° *elevando todos os termos a potencias do mesmo grão ; 2° extrahindo a raiz do mesmo indice.*

Demonstração.—Tome-se a proporção $a : b :: c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 1° elevando a potencia m todos os termos desta proporção, vem :

$$a^m : b^m :: c^m : d^m \text{ ou } \frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m};$$

extrahindo a raiz *m* de todos os termos da proporção proposta, vem :

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} :: \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d} \text{ ou } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}};$$

Ora, elevar ambos os termos de uma fracção a uma potencia do mesmo gráo, ou extrahir a raiz do mesmo indice a ambos os termos de uma fracção, ella não se altera ; logo, $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$, é o resultado effectuado não só das operações indicadas na primeira igualdade, mais ainda em ambos os membros da segunda.

Quarto corollario.—Determinar quartas proporcionaes : *se o termo incognito é um extremo, é igual ao producto dos meios dividido pelo extremo conhecido ; se é um meio é igual ao producto dos extremos dividido pelo meio conhecido.*

Demonstração. — Seja a proporção $a : b :: c : x$; applicando a propriedade fundamental, vem :

$$ax = bc ;$$

tirando o valor de x, ou dividindo ambos os membros da igualdade por a, teremos o que se quer demonstrar :

$$x = \frac{bc}{a};$$

quanto á segunda parte figure-se a proporção $a : b : : x : d$;

Ora, $$bx = ad$$

Logo : $$x = \frac{ad}{b}$$

Quinto corollario.—Determinar meias proporcionaes; *se os meios são iguaes, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio, e o meio é igual á raiz quadrada do producto dos extremos.*

Demonstração. — Seja a proporção continua $a : x : : x : d$; applicando a propriedade fundamental, vem :

$$ad = xx \quad \text{ou} \quad ad = x^2;$$

extrahindo a raiz quadrada a ambos os membros d'esta ultima igualdade, teremos :

$$\sqrt[2]{ad} = x$$

OBSERVAÇÃO

Não se póde igualar o producto dos extremos ao producto dos meios quando se trata de numeros concretos, porque a palavra *producto* não teria sentido algum. Mas, como quando quatro quantidades estão em proporção, os numeros que as medem tambem são proporcionaes, substituem-se as quantidades pelos numeros ... suas

…os : : 6 dias : x ou

$$\frac{24 \text{ metros}}{16 \text{ metros}} = \frac{6 \text{ dias}}{x \text{ dias}}$$

ou ainda $\dfrac{24}{16} = \dfrac{6}{x}$;

$$\text{logo} \quad x = \frac{6 \times 16}{24} = 4$$

Invertendo os termos da proporção continua proposta, vem :

x *dias* : 6 *dias* : : 16 *metros* : 24 *metros* :

$$\text{ou} \quad \frac{x \text{ dias}}{6 \text{ dias}} = \frac{16 \text{ metros}}{24 \text{ metros}} ;$$

tirando o valor da quarta proporcional, teremos :

$$x \text{ dias} = 6 \text{ dias} \times \frac{16 \text{ metros}}{24 \text{ metros}} ,$$

e attendendo que a razão de 16 metros para 24 metros é igual a razão de 16 para 24, vem :

$$x \text{ dias} = 6 \text{ dias} \times \frac{16}{24} = 4 \text{ dias}$$

O meio mais simples e conveniente consiste em fazer abstracção da natureza das grandezas e con-

Primeira. — Se duas proporções tiverem dous termos communs, os outros restantes formarão uma proporção.

Demonstração. — 1.ª Figuremos as duas proporções seguintes :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a' : b' :: c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d}$$

Duas quantidades $\left(\frac{a}{b}\text{ uma, }\frac{a'}{b'}\text{ duas}\right)$ iguaes a a uma terceira $\left(\frac{c}{d}\text{ commum}\right)$, são entre si iguaes, logo :

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{ou} \quad a : b :: a' : b'$$

2.ª Se os termos communs não forem os antecedentes ou os consequentes, os termos não communs serão directamente proporcionaes.
Assim :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a' : b :: c' : d \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{} = \frac{c'}{}$$

Invertendo a ordem dos meios em ambas as proporções, vem :

$$a : c :: b : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$a' : c' :: b : d \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{c'} = \frac{b}{d}$$

Ora, duas quantidades iguaes a uma terceira são entre si iguaes, logo :

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \text{ o que significa } a : c :: a' : c'$$

3.ª Supponhamos finalmente que os extremos ou os meios sejam os termos communs ; n'este caso os termos restantes são inversamente proporcionaes.

Assim :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a : b' :: c' : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b'} = \frac{c'}{d}$$

Applicando a propriedade fundamental a estas duas proporções, teremos : $ad = bc$, $ad = b'c'$, logo : $bc = b'c'$.

Em virtude da *reciproca da propriedade fundamental*, vem :

$$b : b' :: c' : c$$

Segunda. — A somma ou a differença dos dous primeiros termos está para o segundo, assim como a somma ou a differença dos dous ultimos está para o quarto.

Demonstração. — Seja a proporção $a : b :: c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; addicionando e subtrahindo ao mesmo tempo (1) a ambos os membros da igualdade, temos :

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1 \text{ ou } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};$$

esta ultima igualdade representa a seguinte proporção que demonstra o principio :

$$a \pm b : b :: c \pm d : d$$

Terceira. — A somma ou a differença dos dous primeiros termos está para o primeiro assim como a somma ou a differença dos dous ultimos está para o terceiro.

Demonstração. — Seja a proporção $a : b :: c : d$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; invertendo esta proporção, vem :

$$b : a :: d : c \text{ ou } \frac{b}{a} = \frac{d}{c};$$

addicionando e subtrahindo ao mesmo tempo (1) a ambos os membros d'esta ultima igualdade, temos :

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \text{ ou } a \pm b : a :: c \pm d : c$$

... ou a differença dos antece-
dentes está para a somma ou a differença dos consequentes como um antecedente para o seu consequente.

Demonstração.—Seja a proporção a : b : : c : d; invertendo-a, temos : *a : c : : b : d*.

Applicando a esta ultima proporção a propriedade segunda, vem :

$$a \pm c : c :: b \pm d : d$$

alternando esta ultima e comparando o resultado com a proposta, teremos :

$$a \pm c : b \pm d :: c : d$$

$$a : b :: c : d$$

Logo.— $a \pm c : b \pm d :: a : b$

Se em lugar de tomar o primeiro antecedente para o primeiro consequente (*a : b*), tomar-mos o segundo antecedente para o segundo consequente (*c : d*), applicaremos a *terceira propriedade de preferencia á primeira*.

Assim :

Applicando a propriedade terceira a proporção *a : c : : b : d*, vem :

$$a \pm c : a :: b \pm d : b;$$

alternando e comparando o resultado com a proposta, temos :

$$a \pm c : b \pm d :: a : b$$

$$a : b :: c : d$$

mos de duas ou mais proporções, os productos resultantes estão ainda em proporção.

Demonstração.—Sejam as proporções :

$$a : b :: c : d \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$a' : b' :: c' : d' \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

$$a'' : b'' :: c'' : d'' \quad \text{ou} \quad \frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}$$

etc. ; etc. ;

multiplicando ordenadamente estas igualdades, virá : $\frac{aa'a''}{bb'b''} = \frac{cc'c''}{dd'd''}$, igualdade esta que significa a proporção

$$aa'a'' : bb'b'' :: cc'c'' : dd'd''$$

Sexta.—A somma dos antecedentes está para a sua differença assim como a somma dos consequentes para sua differença.

Demonstração. — Tome-se a proporção $a : b :: c : d$; applicando a *quarta propriedade* parcialmente, temos :

$$a + c : b + d :: c : d \; ; \; a - c : b - d :: c : d \; ;$$

em virtude *da primeira propriedade*, vem :

proporção que demonstra o principio :

$$a + c : a - c :: b + d : b - d$$

Setima. — As potencias e raizes de um gráo qualquer dos termos de uma proporção tambem estão em proporção.

Demonstração. — Seja a proporção $a : b :: c : d$ ou $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$; elevando á potencia m ambos os termos das duas fracções d'esta igualdade, vem :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m \quad \text{ou} \quad a^m : b^m :: c^m : d^m$$

Extrahindo a raiz n de ambos os membros da primeira igualdade, teremos :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}};$$

esta ultima igualdade significa a proporção :

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{b}$$

OBSERVAÇÕES

Da quarta propriedade conclue-se que :

N'uma serie de razões iguaes a somma de todos ... numero de antecedentes está para a somma de todos ou de um mesmo numero de consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente.

Demonstração---Seja tomada a serie :

$$a : b : : c : d : : m : n : : \text{etc.}$$

Representando por r o valor de cada razão, vem :

$$a : b = r \; ; \; c : d = r \; ; \; m : n = r \; ; \text{ etc.}$$

tirando o valor de cada um dos primeiros termos n'estas igualdades, vem :

$$a = br \; ; \; c = dr \; ; \; m = nr \; ; \text{ etc.}$$

sommando estas igualdades ordenadamente e pondo r em evidencia, teremos :

$$a + c + m + \ldots \text{etc.}, = r\,(b + d + n + \ldots \text{etc}) \; ;$$

tirando o valor de *r* n'esta igualdade, e substituindo em vez de *r* os seus valores, vem :

$$r = a + c + m : b + d + n$$
$$a : b = a + c + m : b + d + n$$
$$c : d = a + c + m : b + d + n$$
$$m : n = a + c + m : b + d + n$$
$$\text{etc.}$$

Progressões

A infinita successão de numeros taes que qualquer um d'elles se derive do precedente ou de al-da, denomina-se *serie.*

Termos---são os numeros da serie.

Exemplos :

1.º — $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$, etc.

2.º — $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$, etc.

3.º — $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$, etc.

4.º — $3, 8, 18, 38, 78, 158, 218$, etc.

5.º — $1, 4, 14, 50, 178, 634, 2260$, etc.

Explicação.---Cada termo da primeira serie deriva-se do precedente addicionando a este o numero (3); assim : $(3 + 3 = 6)$;

Cada termo da segunda serie obtem-se multiplicando o precedente por $\left(\frac{1}{3}\right)$; assim : $\left(1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}\right)$; etc.

Cada termo da serie terceira se obtem addicionando (1) ao denominador do precedente ; assim : $\left(\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}\right)$ etc ;

Cada termo da quarta serie obtem-se multiplicando o precedente por (2) e addicionando (2) ao producto ; assim : $(3 \times 2 = 6 ; \ 6 + 2 = 8)$;

$36 + 2 = 38$); etc.

Cada termo da quinta serie se obtem de cada um dos dous que o precedem multiplicando o 1º d'elles por (2), o 2º por (3), e sommando os productos; assim tomados 1 e 4, multiplica-se o 1º por 2 e o segundo por 3, isto é, $1 \times 2 = 2$; $4 \times 3 = 12$ e sommam-se os productos $2 + 12 = 14$; continuando — multiplica-se $4 \times 2 = 8$; $14 \times 3 = 42$, e sommam-se os productos $8 + 42 = 50$, e assim successivamente.

Lei da serie é o processo para a obtenção de um termo qualquer que deriva-se do precedente ou de alguns dos precedentes.

Pela explicação dada na construcção das cinco series apontadas, comprehende-se que as series são infinitas; quando isto não fosse sufficiente bastaria lembrarmo-nos que *infinitos são os processos imaginaveis para formar um numero por meio de dous ou mais numeros dados.*

A Arithmetica elementar só estuda as series elementares, isto é, aquellas em que um termo qualquer deriva-se do precedente de conformidade com a explicação dada nas series que figuramos, isto é ainda, augmentando ou diminuindo de um numero constante de unidades esse termo precedente ou multiplicando o dito termo precedente por um mesmo numero.

Progressão—é uma serie de numeros que crescem ou decrescem n'uma razão constante.

Razão—é o numero constante que com um termo qualquer dá origem ao seguinte.

A progressão é *crescente* quando os termos vão augmentando, *decrescente* quando vão diminuindo.

As progressões dividem-se em *progressões por differença* e *progressões por quociente.*

Progressões por differença

DEFINIÇÕES, VALOR DE QUALQUER TERMO

Progressão por differença—é uma serie de numeros taes que cada um é igual ao precedente mais ou menos uma quantidade constante.

Razão de uma progressão por differença—é o numero constante que exprime a differença entre dous termos consecutivos quaesquer.

A progressão *é crescente* quando cada termo é igual ao precedente mais a razão. Ex.:

$$\div\, 2 \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.\, 23 \ldots \text{etc.}$$

N'esta progressão a razão é o numero 3 ou 5—2.

A progressão é *decrescente* quando cada termo é igual ao precedente menos a razão. Ex.:

$$\div\, 55 \,.\, 50 \,.\, 45 \,.\, 40 \,.\, 35 \,.\, 30 \,.\, 25 \ldots$$

N'esta progressão a razão é 5 ou 55—50.

As progressões decrescentes são consideradas como progressões crescentes na ordem inversa.

O caracter das progressões por differença crescentes é ter a razão representada por uma quantidade positiva.

Na primeira progressão, a razão é + 3, e na segunda a razão é — 5.

CONSEQUENCIAS DA DEFINIÇÃO

Primeira.—Qualquer termo da progressão por differença é meio differencial entre os dous termos adjacentes, de sorte que uma progressão por differença é uma serie de equidifferenças continuas em que cada termo é ao mesmo tempo consequente de uma razão e antecedente da razão seguinte.

Demonstração. — Supponhamos a progressão crescente :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, h \,.\, i \ldots \text{etc.}$$

Pela definição, chamando *r* a razão, temos :

$$\begin{aligned} b &= a + r \\ c &= b + r \end{aligned}$$

Subtrahindo estas duas igualdades ordenadamente, vem :

$$c - b = b - a \quad \text{ou} \quad b = \frac{c + a}{2};$$

e assim successivamente.

Logo $\qquad d - c = c - b = b - a,$

o que significa :

$$\div a \,.\, b : b \,.\, c : c \,.\, d : \ldots \text{etc.}$$

O mesmo raciocinio se applica á progressão decrescente.

Segunda.—Dous termos consecutivos de uma progressão por differença formam com outros dous termos consecutivos quaesquer uma equidifferença.

Demonstração.—Supponhamos a progressão :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f$$

cedente mais ou menos a razão, segundo a progressão é crescente ou decrescente, e chamando r a razão, vem para a crescente :

$$d = c + r \quad \text{ou} \quad r = d - c$$

$$h = g + r \quad \text{ou} \quad r = h - g$$

Comparando as duas ultimas igualdades notamos terem ambas um membro commum (r), e como duas quantidades iguaes a uma terceira são entre si iguaes, vem :

$$d - c = h - g \quad \text{ou} \quad d \,.\, c : h \,.\, g$$

Terceira.—Tres termos consecutivos quaesquer formam uma equidifferença continua.

Demonstração.—Seja dada a progressão por differença :

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, h \,.\, i \ldots \text{etc.}$$

Tomemos tres termos f, g, h, consecutivos ; chame-se (r) a razão, teremos :

$$g = f \pm r \;;\;\; h = g \pm r \;;$$

subtrahindo de ambos os membros da primeira igualdade a quantidade (f), e de ambos os membros da segunda a quantidade (g), vem :

$$g - f = \pm r \;;\;\; h - g = \pm r \;;$$

Ora duas quantidades $(g - f$, $h - g$, iguaes a

$$g - f = h - g \quad \text{ou} \quad g \,.\, f : h \,.\, g$$

$$\text{ou} \quad f - g = g - h \quad \text{ou} \quad f \,.\, g : g \,.\, h$$

Por esse mechanismo se vê que qualquer termo de uma progressão por differença é meio differencial entre o termo precedente e o seguinte; só o primeiro e o ultimo é que não gozam desta propriedade.

PROPRIEDADES

Primeira.—Qualquer termo de uma progressão por differença é igual ao primeiro augmentado ou diminuido de tantas vezes a razão quantos são os termos que precedem o termo considerado.

Demonstração.—Supponhamos a progressão por differença

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \ldots\ldots k \,.\, l\,;$$

represente-se por (r) a razão e por (n) o numero dos termos; teremos:

$$b = a \pm r$$

$$c = b \pm r$$

$$d = c \pm r$$

$$e = d \pm r$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l = k \pm$$

sommando estas igualdades ordenadamente, vem:

$$b + c + d + e + \ldots + l = a + b + c + d + \ldots$$
$$\ldots + k \pm (n - 1) r\ (*);$$

subtrahindo as quantidades communs de ambos os membros, teremos:

$$l = a \pm (n - 1) r$$

Concluimos d'esta propriedade ser esta a fórma das progressões por differença:

$$\div a \,.\, a \pm r \,.\, a \pm 2 r \,.\, a \pm 3 r \ldots . a \pm (n - 1) r$$

Convem notar que o coefficiente da razão é igual ao indice do termo menos um.

Quando for *zero* o primeiro termo da progressão, a formula

$$l = a \pm (n - 1) r,$$

transforma-se na seguinte:

$$l = (n - 1) r.$$

N'este caso a progressão por differença tem a seguinte fórma:

$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, 5r \ldots . (n - 1) r.$$

Uma vez conhecida a formula $l = a \pm (n - 1) r$,

(*) (n—1) quer dizer o numero de vezes em que (r) entrou como parcella; pela origem da multiplicação (r) é um factor e (n—1) é o des, quando forem conhecidas tres :

1.º Formulas para determinar o valor de *l* :

$$l = a + (n - 1)\,r \;;\; l = a - (n - 1)\,r.$$

2.º Formulas para a determinação de *a* ;

$$a = l - (n - 1)\,r \;;\; a = l + (n - 1)\,r.$$

3.º Formulas para a determinação de *r* :

$$r = \frac{l - a}{n - 1} \;;\quad r = \frac{a - l}{n - 1}$$

4.º Formulas para a determinação de *n* :

$$n = \frac{l - a}{r} + 1 \;;\quad n = \frac{a - l}{r} + 1$$

E' bastante conhecer dous termos quaesquer d'uma progressão por differença e os indices respectivos para determinar a *razão*.

Explicação.—Supponhamos dous termos de uma progressão por differença a_m e a_n sendo os indices respectivos m e n.

E' sabido que o coefficiente da razão é igual ao indice do termo menos um, logo :

$$a_m = a_1 + (m - 1)\,r,$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r$$

primeira, vem :

$$a_m - a_n = (m-1)r - (n-1)r = (m-n)r \text{ ou}$$

$$a_m - a_n = (m-n)r,$$

logo :

$$r = \frac{a_m - a_n}{m-n};$$

quer isto dizer que *a razão vem ser igual ao quociente da differença de dous termos quaesquer dividida pela differença dos seus indices.*

A formula $r = \dfrac{l-a}{n-1}$ é um caso particular da relação $r = \dfrac{a_m - a_n}{m-n}$; n'esta fórmula n representa o indice de l, e 1 o indice de a.

Segunda.---Os termos de uma progressão crescente vão sempre augmentando de modo que, se escolhermos um indice conveniente, póde um termo ser maior que um numero dado qualquer.

Demonstração. --- Seja N o numero dado e $a + (n-1)r$ um termo da progressão.

A condição para que o termo $a + (n-1)r$, seja maior que o numero dado N é que seja :

$$(n-1)r > N - a,$$

$$\text{ou} \quad n-1 > \frac{N-a}{r}, \text{ ou ainda, } n > \frac{N-a}{r} + 1;$$

esta condição é sempre possivel satisfazer.

Inserir meios differenciaes é a questão que tem por fim formar a progressão quando forem dados o primeiro e ultimo termo e um numero determinado de meios.

Explicação.—Supponhamos a e b os numeros dados, entre os quaes quer-se inserir m meios differenciaes. O numero dos termos da progressao será $m + 2$ e o numero dos termos antes de b será $m + 1$; chamando r a razão desconhecida da progressão, teremos :

$$b = a \pm (m + 1)\,r\,;$$

d'esta fórmula originam-se as duas seguintes :

$$r = \frac{b - a}{m + 1}\,; \quad r = \frac{a - b}{m + 1}\,;$$

estas formulas significam que para obter a razão da progressão pedida — *divide-se a differença dos extremos dados* (o primeiro e ultimo) pelo numero dos meios que se quer inserir, mais um.

Uma vez conhecida a razão se póde considerar a questão resolvida, pois torna-se mui simples addicionar ou subtrahir esta razão ao termo que precede, conforme a progressão é crescente ou decrescente e por esse meio formam-se os termos successivos.

Exemplos.—Inserir 7 meios differenciaes entre 5 e 37.

por r, vem :

$$r = \frac{37 - 5}{7 + 1} = \frac{32}{8} = 4$$

Logo $\div\, 5 \,.\, 9 \,.\, 13 \,.\, 17 \,.\, 21 \,.\, 25 \,.\, 29 \,.\, 33 \,.\, 37$

Outro exemplo.---Inserir 9 meios differenciaes entre 98 e 8.

Chamando r a razão, temos :

$$r = \frac{98 - 8}{9 + 1} = \frac{90}{10} = 9$$

Logo 98. 89. 80. 71. 62. 53. 44. 35. 26. 17. 8.

No estudo da inserção dos meios differenciaes notam-se os seguintes *principios* de grande importancia :

Primeiro. --- Se inserirmos entre todos os termos de uma progressão por differença o mesmo numero de meios differenciaes, as progressões resultantes parciaes constituem uma só progressão, cuja razão é a mesma da progressão dada, dividida pelo numero dos meios inseridos mais um.

Demonstração.---Supponhamos a progressão por differença $\div\, a\,.\, b\,.\, c\,.\, d\,.\, e\,.\, f\,.\, g\ldots\ldots$ &.

Inserindo m meios entre a e b forma-se uma progressão por differença, cuja razão é a seguinte :

$$r' = \frac{b - a}{\;} ;$$

inserindo *m* meios entre *b* e *c* obtem-se outra progressão que tem a seguinte razão :

$$r'' = \frac{c - b}{m + 1} ;$$

continuando a inserir *m* meios entre *c* e *d*, vem :

$$r''' = \frac{d - c}{m + 1} ;$$

e assim successivamente.

Ora, $b - a = c - b = d - c = \ldots\ldots = r$

Logo, $\frac{b - a}{m + 1} = \frac{c - b}{m + 1} = \frac{d - c}{m + 1} \ldots\ldots = \frac{r}{m + 1}$;

substituindo n'esta serie de igualdades em vez de cada um dos membros os respectivos valores, vem :

$$r' = r'' = r''' = \ldots\ldots = \frac{r}{m + 1}$$

Se a razão de todas as progressões é sempre a mesma e ainda mais sendo o ultimo termo de cada uma o primeiro da seguinte, é porque formam uma só progressão.

Segundo. — Póde-se sempre inserir entre dous termos um numero de meios tal que a differença entre dous termos consecutivos da progressão resultante seja menor que qualquer quantidade dada, e para isso torna-se necessario que o numero dos meios não seja menor que o quociente da differença dos extremos dividido por essa quantidade.

...consecutivos da progressão resultante é $\frac{b - a}{m + 1}$, suppondo-se a e b os extremos e m o numero dos meios.

Figure-se uma quantidade tão pequena quanto se queira, representada pela lettra y, e estabeleça-se a desigualdade :

$$\frac{b - a}{m + 1} < y ;$$

tirando o valor de m, vem :

$$\frac{b - a}{y} - 1 < m ;$$

logo m não deve ser menor que $\frac{b - a}{y}$

Exemplo.---Quantos meios tornam-se precisos inserir entre 2 e 3 para que a razão seja menor que 0,001 ?

$$\frac{3 - 2}{0,001} = 1000$$

Terceiro.---A condição para que tres quantidades façam parte de uma progressão por differença é que os numeros dos meios que devem separar essas quantidades, sendo augmentados de uma unidade, sejam proporcionaes ás differenças entre essas quantidades.

... c as tres

existentes entre a e b e entre b e c; figure-se $a<b<c$. Procurando os valores de b e c vem:

$$b = a + (m + 1) r \text{ ou } b - a = (m + 1) r,$$

$$c = b + (m' + 1) r \text{ ou } c - b = (m' + 1) r',$$

logo $$\frac{b - a}{c - b} = \frac{m + 1}{m' + 1}$$

ou $$b - a \,.\, c - b : m + 1 \,.\, m' + 1$$

Simplificando a fracção $\frac{b - a}{c - b}$ e representando

o resultado por $\left(\frac{i}{k}\right)$, vem:

$$\frac{i}{k} = \frac{m + 1}{m' + 1},$$

logo $m + 1 = i \times q$, $m' + 1 = k \times q$; vê-se pois que os numeros a, b, c podem fazer parte de infinitas progressões, porque tomando $q = 1, 2, 3, 4, 5, \&$, teremos:

$$m + 1 = i,\ 2\,i,\ 3\,i,\ 4\,i,\ 5\,i, \ldots\ldots$$

$$m' + 1 = k,\ 2\,k,\ 3\,k,\ 4\,k,\ 5\,k$$

Exemplo. — Os numeros 12, 21, 33 de qual progressão fazem parte ?

$$\frac{21-12}{33-21}=\frac{m+1}{m'+1} \text{ ou } \frac{9}{12}=\frac{3}{4}=\frac{m+1}{m'+1}$$

logo $\quad m+1=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\ldots\ldots$

$$m'+1=4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20\ldots\ldots$$

conseguintemente os numeros 12, 21, 33 fazem parte das progressões por differença, cujas razões são as seguintes :

$$r=\frac{21-12}{3}=\frac{33-21}{4}=3\ ;\ \frac{21-12}{9}=\frac{33-21}{12}=1.$$

$$\div\, 3\,.\ 6\,.\ 9\,.\ 12\,.\ 15\,.\ 18\,.\ 21\,.\ 24\,.\ 27\,.\ 30\,.\ 33,\ \&$$

SOMMA DOS TERMOS

Para se obter a somma de todos os termos de uma progressão por differença empregamos os seguintes principios :

Primeiro. --- Em uma progressão por differença a somma dos extremos é igual á somma de dous meios d'elles equidistantes.

Demonstração.---Seja tomada a progressão

$$\div\, a\ldots\ldots x\ldots\ldots\ldots y\ldots\ldots\ldots l.$$

... se que entre a e x existem n termos, e outros tantos entre y e l, tirando os valores de x e l teremos :

$$x = a \pm (n-1)r, \quad l = y \pm (n-1)r;$$

addicionando a ambos os membros da ultima igualdade a quantidade $\pm (n-1) r$, vem :

$$l \pm (n-1)r = y \pm (n-1)r \pm (n-1)r$$

ou simplesmente

$$y = l \pm (n-1)r;$$

sommando a primeira igualdade com esta ultima, teremos :

$$x + y = a \pm (n-1)r + l \pm (n-1)r \text{ ou } x + y = a + l$$

Segundo. --- A somma dos termos de uma progressão por differença é igual ao numero de seus termos multiplicado pela semi-somma dos extremos.

Demonstração. --- Seja a progressão por differença

$$\div a . b . c . d \ldots\ldots h . i . k . l;$$

supponhamos que S representa a somma, e n o numero dos termos, logo

$$S = a + b + c + d + \ldots\ldots + h + i + k + l;$$

attendendo que a ordem das parcellas não altera a somma, vem :

$$S = l + k + i + h + \ldots\ldots + d + c + b + a;$$

$$S + S = (a + l) + (b + k) + (c + i) + (d + h) + \ldots +$$

$$+ (h + b) + (i + c) + (k + b) + (l + a)\,;$$

attendendo que o primeiro membro d'essa igualdade é formado de duas parcellas iguaes ($S + S$), e o segundo tambem, porque cada uma d'ellas se compõe dos termos das progressões invertidas, conclue-se que transformar-se-ha em um producto, que tem para factores o numero de parcellas (n) e a parcella ($a + l$), isto é :

$$2\,S = (a + l)\,n \quad \text{ou} \quad S = \frac{a + l}{2} \times n$$

Exemplos.---1º Qual a somma dos termos de uma progressão por differença em que 2 é o primeiro termo, 67 é o ultimo, e o numero dos termos é 14 ?

Solução :

$$\left.\begin{aligned} a &= 2 \\ l &= 67 \\ n &= 14 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} S &= \frac{a + l}{2} \times n \\ S &= \frac{2 + 67}{2} \times 14 \end{aligned}$$

Logo

$$S = 483.$$

2.º Qual a somma dos termos de uma progressão por differença em que o primeiro termo é 62, [illegible] 7, sendo o numero dos termos 12 ?

$$\left.\begin{array}{l} a = 62 \\ l = 7 \\ n = 12 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} S = \dfrac{a + l}{2} \times n \\ S = \dfrac{62 + 7}{2} \times 12 \end{array}$$

Logo $\qquad S = 414$

3.º Qual a somma dos termos de uma progressão por differença em que o primeiro termo é 3, o ultimo é 15,6, sendo o numero dos termos 10 ?

Solução :

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ l = 15,6 \\ n = 10 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} S = \dfrac{3 + 15,6}{2} \times 10 = \\ = \dfrac{18,6 \times 10}{2} = 18,6 \times 5 \\ = 93,0 = 93 \end{array}$$

A fórmula que traduz o valor da somma dos termos de uma progressão por differença encerra quatro quantidades : conhecidas tres, póde-se determinar a quarta :

1.ª $$S = \frac{(a + l)n}{2};$$

2.ª $$n = \frac{2S}{}.$$

3.ª

$$a = \frac{2S}{n} - l;$$

4.ª

$$l = \frac{2S}{n} - a;$$

Casos particulares.—1.º Sendo $r = a$, a progressão é

$$\div\ a \,.\, 2a \,.\, 3a \,.\, 4a \,.\, 5a \ldots\ldots\ na$$

$$S = \frac{(a + na)n}{2} = \frac{n(n + 1)a}{2}$$

Sendo $r = a = 1$, a progressão é a serie natural dos numeros inteiros

$$\div\ 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \ldots\ldots\ n.$$

$$S = \frac{(n - 1)n}{2}$$

2.º Sendo $r = 2\,a$, a progressão é

$$\div\ a \,.\, 3a \,.\, 5a \,.\, 8a \,.\, 11a \ldots\ldots\ (2n - 1)\,a,$$

$$S = \frac{(a + (2n - 1)a)n}{2} = \frac{2na \times n}{2} = a \times n^2$$

Sendo $r = 2$, e $a = 1$, a progressão é a serie dos numeros impares.

$$\div\ 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \ldots\ldots\ (2n - 1),$$

$$S = n^2.$$

logo

5. Sendo a razão um numero par e o primeiro termo igual a elle, isto é, sendo $r = a = 2\,m$, a progressão é

$$\div\ 2m\ .\ 4m\ .\ 6m\ .\ 8m\ .\ 10m\ \ldots\ldots\ n \times 2m,$$

$$S = \frac{(2m + n2m)n}{2} = \frac{n(n+1)2m}{2} = n(n+1)m$$

Finalmente sendo $m = 1$, será $r = a = 2$, e a progressão é a serie dos numeros pares

$$\div\ 1\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10\ .\ 12\ .\ 16\ .\ 18\ .\ 20\ \ldots.\ 2n$$

$$S = n\,(n+1)$$

Progressões por quociente

DEFINIÇÕES, VALOR DE QUALQUER TERMO

Progressões por quociente é uma serie de numeros em que cada um é igual ao precedente multiplicado por uma quantidade constante.

Razão de uma progressão por quociente é o quociente de qualquer termo dividido pelo precedente.

As progressões por quociente dividem-se em crescentes e decrescentes.

Progressão crescente é aquella cujos termos vão sempre augmentando, e o seu caracter é ter a razão expressa por quantidade inteira (numero inteiro ou fracção impropria) e positiva.

Progressão decrescente é aquella cujos termos vão diminuindo, e o seu caracter é ter a razão representada por fracção propria.

Progressões por quociente crescentes

∺ 4 : 8 : 16 : 72 : 144 : 288 : 576 : etc.

∺ 5 : 15 : 45 : 135 : 405 : 1215 : 3645 : etc.

A razão da primeira progressão é 2 ou $\left(\frac{8}{4}\right)$, e a da segunda é 3 ou $\left(\frac{15}{5}\right)$.

Progressões por quociente descrescentes

∺ 156250 : 31250 : 6250 : 1250 : 250 : 50 : 10 : etc.

∺ 12288 : 3072 : 768 : 192 : 48 : 12 : etc.

A razao da primeira progressão é $\left(\frac{31250}{156250}\right)$, e a da segunda é $\left(\frac{3072}{12288}\right)$.

CONSEQUENCIAS DA DEFINIÇÃO

Primeira.—Qualquer termo da progressão por quociente é meio proporcional entre os termos adjacentes; de sorte que uma progressão por quociente é uma serie de proporções continuas em que cada termo é ao mesmo tempo consequente de uma razão e antecedente da seguinte.

quociente

$$\because\!\!\because a : b : c : d : e : f : g : h : i \ldots\ldots k : l,$$

Pela definição,

$$b = ar$$

$$c = br$$

Logo $$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \text{ ou } b = \sqrt{ac}.$$

Ainda pela definição, temos :

$$c = br$$

$$d = cr$$

Logo $$\frac{d}{c} = \frac{c}{b} \text{ ou } c = \sqrt{bd}\ ;$$

e assim successivamente.

Ora, $$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Esta serie de igualdades significa que

$$a : b :: b : c :: c : d :: \ldots\ldots\ldots \text{ etc.}$$

Segunda.—Dous termos consecuti...

Demonstração.—Figure-se a mesma progressão do principio anterior; pela definição, teremos :

$$d = cr \quad \text{ou} \; r = \frac{d}{c},$$

$$h = gr \quad \text{ou} \quad r = \frac{h}{g}:$$

Logo $\frac{d}{c} = \frac{h}{g}$, o que quer dizer

$$d : c :: h : g$$

Terceira. — Tres termos consecutivos formam uma proporção continua.

Demonstração. — Seja a progressão por quociente

$$\div\!\div\; a : b : c : d : e : f : g : h : \ldots\ldots \text{etc.};$$

tomemos tres termos consecutivos *c*, *d*, *e* ; seja *r* a razão.

Pela definição.

$$d = cr \quad \text{ou} \quad r = \frac{d}{c}$$

$$e = dr \quad \text{ou} \quad r = \frac{e}{d}$$

Logo $\frac{d}{c} = \frac{e}{d}$;

esta ultima igualdade significa :

$$\div\!\div\; c : d \quad \text{ou} \quad c : d :: d : e$$

Primeira. — Um termo qualquer da progressão por quociente é igual ao primeiro multiplicado pela razão elevada ao expoente marcado pelo numero de termos da progressão menos um.

Demonstração. — Supponhamos a seguinte progressão :

$$\div\div\ a : b : c : d : e : f : \ldots\ldots\ldots k : l.$$

Seja *r* a razão ; pela definição, vem :

$$b = a \times r$$
$$c = b \times r$$
$$d = c \times r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l = k \times r$$

Multiplicando estas igualdades ordenadamente, teremos :

$$b \times c \times d \times \ldots \times l = a \times b \times c \times \ldots \times k \times r^{n-1} \quad (\star)$$

supprimindo em ambos os membros os factores communs, teremos

$$l = ar^{n-1}$$

---

gressão por quociente tem a seguinte fórma :

$$\div\div\ a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 : \ldots\ldots ar^{n-1}.$$

Convem notar que o expoente da razão é igual ao indice do termo menos um.

Quando a unidade fôr o primeiro termo da progressão, a formula $l = ar^{n-1}$, transforma-se nesta outra

$$l = r^{n-1},$$

e a progressão por quociente tem a fórma seguinte :

$$\div\ 1 : r : r^2 : r^3 : r^4 : r^5 : \ldots\ldots r^{n-1}$$

A formula que traduz o valor de um termo qualquer em uma progressão por quociente encerra quatro quantidades, das quaes podemos determinar a quarta quando forem conhecidas tres.

1.° $$l = ar^{n-1}$$

2.° $$a = \frac{l}{r^{n-1}}$$

3.° $$r = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

4.° $$n = \sqrt[r]{\frac{l}{a}} + 1$$

É bastante conhecer dous termos quaesquer d'uma progressão por quociente e os indices respectivos para determinar a *razão*.

Segunda.—A razão de uma progressão por quociente é igual á raiz do gráo marcado pelo numero de termos menos um, do ultimo termo dividido pelo primeiro.

Demonstração. — Supponhamos a_m e a_n dous termos de uma progresão ; sejam m e n os indices.

Pela primeira propriedade, temos :

$$a_m = a_1 \times r^{m-1}$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

dividindo estas igualdades ordenadamente, vem :

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{r^{m-1}}{r^{n-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{a_m}{a_n} = r^{m-n} ;$$

extrahindo a raiz $(m-n)$ a ambos os membros d'esta ultima igualdade, vem o que se quer demonstrar :

$$\sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}} = r$$

A formula $r = \sqrt[n-1]{l}$,

é o indice de *a*.

—Os termos de uma progressão por quociente crescente, crescem constantemente e pódem exceder a todo limite ; os de uma progressão decrescente, decrescem constantemente e tem por limite *zero*.

O termo geral de uma progressão por quociente crescente é $(a \times r^{n-1})$, sendo r maior que a unidade ; é sabido que (r^{n-1}) torna-se maior que qualquer grandeza dada por maior que ella seja ; o mesmo se dá com mais forte razão a $(a \times r^{n-1})$.

O termo geral de uma progressão por quociente em que suppõe-se ser r menor que 1, é $(a \times r^{n-1})$; sabe-se que :

$$\text{Lim}: r^{n-1} = 0 \;\therefore\; \text{Lim}: a \times r^{n-1} = a \times 0 = 0$$

INSERÇÃO DE MEIOS

Inserir meios proporcionaes entre dous numeros é formar uma progressão por quociente que tenha por extremos os numeros dados e um numero determinado de meios.

Explicação. — Supponhamos a e l os numeros dados, entre os quaes se quer inserir m numero de meios proporcionaes.

O numero dos termos da progressão pedida será $m + 2$, e o numero dos termos antes de l, será $m + 1$; chamando r a razão desconhecida, teremos :

$$l = ar^{n-1} \;\therefore\; r = \sqrt[m+1]{\frac{l}{a}};$$

quer isto dizer que para determinar-se a razão, divide-se um extremo pelo outro e extrahe-se do quociente a raiz do gráu indicado pelo numero que se quer inserir mais um.

Uma vez conhecida a razão, torna-se facil a formação dos meios proporcionaes successivos, multiplicando-se por ella o termo precedente, isto é, multiplicando o primeiro termo pela razão acharemos o *segundo* ; multiplicando o segundo pela razão, acharemos o *terceiro* e assim successivamente.

1.º *Exemplo.* — Inserir 5 meios proporcionaes entre os numeros 64 e 4096.

Solução :

$$\left.\begin{array}{l} a = 64 \\ l = 4096 \\ m = 5 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} r = \sqrt[5+1]{\dfrac{4096}{64}} \\ r = \sqrt[6]{64} \end{array}$$

Attendendo que $6 = 3 \times 2$, extrahe-se a raiz sexta de 64 extrahindo a raiz cubica da raiz quadrada de 64.

Assim : $$r = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8}$$

ou $$r = 2$$

$$\div\div\ 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096.$$

2.º *Exemplo.* — Inserir 8

$$
\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ l = 78732 \\ m = 8 \end{array}\right\} \quad r = \sqrt[8+1]{\frac{78732}{4}} = \sqrt[9]{19683}
$$

Attendendo que $9 = 3 \times 3$, extrahe-se a raiz nona de 19683 extrahindo a raiz cubica da raiz cubica do mesmo numero.

$$
r = \sqrt[3]{\sqrt[3]{19683}} = \sqrt[3]{27}
$$

Ora, a raiz cubica de 27 é 3 ; multiplicando o primeiro termo (4) por tres, e este producto assim formado por tres e assim successivamente, teremos a progressão pedida :

$$
\div\!\!\div\, 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : 2916 : 8748 : 26244 :
$$

$$
: 78732
$$

Só podemos extrahir raizes cujos indices contenham factores 3 e 2, como se vê nos exemplos dados ; ao depois do conhecimento da *theoria dos logarithmos* é que poderemos extrahir raizes cujos indices contenham factores differentes d'estes.

No estudo da inserção dos meios proporcionaes nota-se o principio seguinte :

Principio.—Se inserir-mos entre todos os termos de uma progressão por quociente, o mesmo numero de meios proporcionaes, as progressões recuja razão é igual a raiz da razão da progressão dada, que tem por indice o numero de meios mais um.

Demonstração.—Supponhamos a progressão por quociente $\div\!\div$ a : b : c : d : e : f :....etc.

Se inserir-mos entre *a* e *b*, *m* meios proporcionaes, forma-se um progressão que tem a seguinte razão :

$$r' = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}};$$

inserindo-se entre *b* e *c* o mesmo numero de meios forma-se outra progressão cuja razão é

$$r'' = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}};$$

inserindo-se entre *c* e *d* o mesmo numero de meios forma-se outra progresssão com a seguinte razão :

$$r''' = \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}$$

Ora, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \dots\dots\dots = r$

Logo, $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}} = \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}} = \dots\dots \sqrt[m+1]{r}$

$\therefore r' = r'' = r''' =$

da immediata, é claro que se forme uma só progressão, que é

$$\div\div\ a : \sqrt[m+1]{a^m b} : \dots\dots\dots : b : \sqrt[m+1]{b^m c} : \dots\dots l$$

SOMMA DOS TERMOS

Para se obter a somma de todos os termos de de uma progressão por quociente, empregam-se os principios seguintes :

Primeiro.—Em uma progressão por quociente *crescente*, a somma dos termos é igual á differença entre o *ultimo termo* multiplicado pela razão e o primeiro termo, dividido pela differença entre a *razão e a unidade.*

Demonstração. — Supponhamos a progressão crescente.

$$\div\div\ a : b : c : d : e : f : \dots\dots\dots i : k : l;$$

seja r a razão e n o numero de termos ; tirando o valor de cada um dos termos, temos :

$$\left.\begin{array}{l} b = ar \\ c = br \\ d = cr \\ e = dr \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ k = ir \\ l = kr \end{array}\right\}$$

Sommando estas igualdades ordenadamente e designando por S a somma, vem :

$$b + c + d + e + \dots + k + l =$$

$$(a + b + c + d + \dots + i + k)r$$

O primeiro membro d'esta igualdade se com-segundo de todos menos o ultimo, e por isso vem:

$$S - a = (S - l)r = Sr - lr \quad \text{ou}$$

$$S - a = Sr - lr \;\therefore\; Sr - S = lr - a\,;$$

pondo o factor commum *S* em evidencia, teremos:

$$S(r - 1) = lr - a \quad \text{ou} \quad S = \frac{lr - a}{r - 1}$$

Tambem se póde obter a somma dos termos de uma progressão crescente multiplicando o primeiro termo pela razão elevada ao expoente marcado pelo numero de termos menos a unidade, dividido o resultado pela differença entre a razão e a mesma unidade.

Para esse fim basta substituir na formula precedente *l* pelo seu valor, isto é,

$$S = \frac{lr - a}{r - 1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Segundo. — Em uma progressão por quociente *decrescente* a somma dos termos é igual á differença entre o *primeiro termo e o ultimo* multiplicado pela razão, dividida pela differença entre a *unidade e a razão*

Demonstração.—Supponhamos a progressão decrescente.

$$\div\; a : b : c : d : e : f : \ldots\ldots\ldots : i : k : l\,;$$

na progressão decrescente a razão *(r)* é menor que a unidade e o termo *(l)* é menor que o primeiro termo (a

Designando por *S* a somma, teremos :

$$S - a = (S - l)r = Sr - lr$$

$$\therefore\ S - a = Sr - lr$$

ou

$$S - Sr = a - lr;$$

pondo em evidencia o factor commum *S*, teremos :

$$S(1 - r) = a - lr \quad \text{ou} \quad S = \frac{a - lr}{1 - r}$$

Se substituirmos n'esta fórmula *l* pelo seu valor, obteremos uma outra fórmula para a determinação da somma dos termos de uma progressão decrescente :

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

Conclusão.--- *n* augmentando infinitamente r^n diminueinfinitamente e tem por limite zero, e conseguintemente o mesmo se dá com $\left(\frac{ar^n}{1 - r}\right)$.

$$\therefore\ \text{Lim: } S = \frac{a}{1 - r}$$

O limite da somma dos termos de uma progressão por quociente decrescente illimitada é igual ao quociente do primeiro termo dividido pela differença entre a unidade e a razão.

1.º Qual a somma dos termos da progressão por quociente sendo 5 o primeiro termo, o ultimo 3645 e a razão 3?

$$S = \frac{3645 \times 3 - 5}{3 - 1} = 5465$$

2.º Qual a somma dos 9 primeiros termos da progressão ÷÷ 3 : 24 : . . . .?

$$a = 3 \; ; \; r = 8 \; ; \; n = 9 \; ;$$

$$S = \frac{3(\overset{9}{8} - 1)}{8 - 1} = 57521883$$

3.º Qual a somma dos termos da progressão sendo $\frac{1}{2}$ o primeiro termo, $\frac{1}{486}$ o ultimo e a razão $\frac{1}{3}$?

$$S = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{486} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1452}{5832} = \frac{121}{486}$$

4.º Qual a somma dos 5 primeiros termos da progressão

$$\div\div \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \ldots\ldots\ldots\ldots ?$$

$$a = \frac{1}{4}\ ;\ r = \frac{1}{2}\ ;\ n = 5\ ;$$

$$S = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{62}{128} = \frac{31}{64}$$

5.º Qual o limite da somma dos termos da progressão

$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \ldots\ldots\ldots\ldots ?$$

$$a = 1\ ;\ r = \frac{1}{3}\ ;$$

$$\text{Lim: } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1\frac{1}{2}$$

6.º Achar-se o limite da somma dos termos da progressão

$$\div\!\div\ \frac{12}{10^2} : \frac{12}{10^4} : \frac{12}{10^6} : \frac{12}{10^8} : \ldots\ldots\ldots ?$$

$$a = 0,12\ ;\ r = 0,01\ ;$$

$$\text{Lim: } S = \frac{0,12}{1 - 0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99}$$

a fracção decimal periodica simples

$$0{,}121212121212\ldots\ldots\ \text{etc.}$$

3.º Determinar o limite da somma dos termos da progressão

$$\div\div \frac{9}{10^2} : \frac{9}{10^4} : \frac{9}{10^6} : \frac{9}{10^8} : \ldots\ldots, \text{ ou por}$$

outra, o limite da decimal periodica simples 0, 99999......... etc.

$$a = 0,9\ ;\ r = 0,1\ ;$$

$$\text{Lim: } S = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Para que a somma dos termos tenha por limite a unidade (1) é bastante que a somma do primeiro termo e da razão seja igual a um.

Sendo $$\frac{a}{1-r} = 1$$

será $$a = 1 - r \quad \text{ou} \quad a + r = 1$$

Vê-se por esse meio que as progressoes que gosam d'esta propriedade são infinitas.

Ex :— $$\div\div \frac{1}{3} : \frac{2}{9} : \frac{4}{27} : \frac{8}{81} : \ldots\ldots \text{etc.}$$

$$a = \frac{1}{3}\ ;\ r = \frac{2}{3},\quad a + r = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

PRODUCTO DOS TERMOS

1.º *O producto dos termos de uma progressão por quociente é igual ao producto de dous meios equidistantes d'elles.*

Demonstração.---Sejam x e y dous meios equidistantes dos extremos a e l, de modo que sendo n o numero dos termos de a até x é tambem de y até l, vem :

$$\div\div a : \ldots\ldots\ldots : x : \ldots\ldots\ldots : y : \ldots\ldots\ldots : l ;$$

tirando os valores x e l, teremos :

$$x = ar^{n-1}\ ;\ l = yr^{n-1}$$

Dividindo estas duas igualdades ordenadamente, vem :

$$\frac{x}{l} = \frac{a}{y} \quad \text{ou} \quad xy = la$$

2.º *Se for impar o numero dos termos, o que oc-*

cupar o meio é meio proporcional dos extremos.

Demonstração.---Supponhamos

$$\div\div a : \ldots\ldots\ldots : m : \ldots\ldots\ldots l ;$$

tirando os valores de *m* e *l*, vem :

$$m = ar^{n-1} ; l = mr^{n-1}$$

Dividindo estas duas igualdades ordenadamente, teremos :

$$\frac{m}{l} = \frac{a}{m} \text{ ou } m : l :: a : m, \text{ ou } l : m :: m : a$$

3.º *O producto dos termos de uma progressão por quociente é igual á raiz quadrada do producto dos extremos elevada a potencia indicada pelo numero dos termos da progressão.*

Demonstração.---Supponhamos a progressão geral

$$\div\div a : b : c \ldots\ldots\ldots : h : k : l$$

Em virtude da parte primeira, que mostra o valor do producto dos termos, vem ;

$$P = a \times b \times c \times \ldots\ldots \times h \times k \times l$$

ou $$P = l \times k \times h \times \ldots\ldots \times c \times b \times a$$

Multiplicando estas igualdades ordenadamente, teremos :

$$P^2 = al \times bk \times ch \times \ldots\ldots\ldots hc \times kb \times la$$

Se compararmos duas progressões illimitadas, uma por quociente e que comece pela *unidade*, outra por differença e que comece por *zero*, cada termo da progressão por differença denomina-se *logarithmo* do termo correspondente da progressão por quociente.

Logarithmos são os termos de uma progressão por differença, que o primeiro termo é zero correspondentes aos de uma por quociente, que o primeiro termo é a unidade.

Systema de logarithmos é o complexo de duas progressões, uma por quociente principiando pela *unidade* e outra por differença começando por *zero* correspondendo-se termo a termo.

Base de um systema de logarithmos é o numero que tem por logarithmo a *unidade*.

No systema

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8 \ldots\ldots,$$

a base é o numero 2, e n'este systema o logarithmo de 16 é 4; o de 128 é 7.

Escreve-se Log. 16 = 4 ; Log. 128 = 7.

Pela definição de logarithmos parece que os numeros que se acham na progressão por quociente são os unicos que têm logarithmos ; para provar o inverso vamos demonstrar o seguinte principio :

Todo numero maior que a unidade tem um logarithmo, e só um em cada systema.

Para provar este principio cumpre demontrar que :

1.º *Inserindo um certo numero de meios entre todos os termos de ambas as progressões, obtem-se os* *dade.*

2.° *Si se introduzir na progressão por quociente um numero por duas inserções differentes, se lhe achará sempre o mesmo logarithmo.*

Demonstração da primeira parte.—Se inserirmos entre todos os termos de uma progressão por quociente o mesmo numero de meios proporcionaes, as progressões parciaes resultantes formarão uma só progressão; este numero de meios póde ser tal que a differença entre dous termos consecutivos seja menor que qualquer numero dado, por menor que elle seja, e por esse meio obteremos uma serie de numeros que vão crescendo por gráus insensiveis sem deixarem de formar uma progressão por quociente.

Póde-se considerar estas progressões como contendo todos os numeros maiores que a *unidade* até o limite que se desejar, pois o numero que n'ella não se achar estará comprehendido entre dous dos seus termos que differem um do outro em uma quantidade tão pequena quanto se queira, e qualquer d'elles poderá ser tomado pelo numero de que se trata sem erro sensivel.

Se ao depois inserirmos o mesmo numero de meios entre todos os termos da progressão por differença, formaremos uma progressão por differença cujos termos corresponderão um a um aos termos da progressão por quociente e que serão os seus *logarithmos* respectivamente.

Tomem-se as progressões

$$\because 1 : r : r^2 : r^3 : r^4 : r^5 : \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\div\ 0 \,.\, s \,.\, 2s \,.\, 3s \,.\, 4s \,.\, 5s \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se inserirmos *m* meios entre os termos consecugressão por quociente será, se a representarmos por $1 + a$,

$$1 + a = \sqrt[m+1]{r}$$

e a da nova progressão por differença

$$d = \frac{s}{m+1};$$

as duas progressões resultantes são :

$$\div\!\div 1 : (1+a) : (1+a)^2 : (1+a)^3 : \ldots\ldots : r : \ldots\ldots$$

$$\div\ 0\ .\ d\ .\ 2d\ .\ 3d \ldots\ldots\ \ldots\ldots s\ldots$$

Supponhamos que um numero N não faz parte da progressão por quociente : estará elle necessariamente comprehendido entre, duas potencias de $(1 + a)$, sejam $(1+a)^n$ e $(1+a)^{n+1}$; temos :

$$(1+a)^n < N < (1+a)^{n+1};$$

sendo possivel sempre dar a n um valor que satisfaça a desigualdade

$$(1+a)^{n+1} - (1+a)^n < B,$$

por menor que seja B ; logo N é limite commum das quantidades $(1+a)^n$ e $(1+a)^{n+1}$.

O logarithmo de $(1+a)^n$ é nd, e o de $(1+a)^{n+1}$ é $(n+1)d$.

Ora, $(n+1)d - nd = d = \dfrac{s}{m+1}$

rença ser tão pequena quanto se queira, logo o Log. N é o limite commum dos logarithmos dos termos consecutivos da progressão por quociente que comprehendem o numero N.

Demonstração da segunda parte.---Supponhamos o systema

$$\div\div\ 1 : r : r^2 : r^3 : \ldots\ldots\ldots : \text{etc.}$$

$$\div\ 0 \,.\, s \,.\, 2s \,.\, 3s \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.}$$

Se inserirmos m meios entre os termos consecutivos destas duas progressões, teremos :

$$\div\div\ 1 : \sqrt[m+1]{r} : \left(\sqrt[m+1]{r}\right)^2 : \left(\sqrt[m+1]{r}\right)^3 : \ldots : \left(\sqrt[m+1]{r}\right)^l : \ldots\ldots$$

$$\div\ 0 \,.\, \frac{s}{m+1} \,.\, \frac{2s}{m+1} \,.\, \frac{3s}{m+1} \ldots\ldots \frac{ls}{m+1} \ldots\ldots$$

Inserindo m' meios entre os termos consecutivos das progressões primitivas, vem :

$$\div\div\ 1 : \sqrt[m'+1]{r} : \left(\sqrt[m'+1]{r}\right)^2 : \left(\sqrt[m'+1]{r}\right)^3 : \ldots\ldots \left(\sqrt[m'+1]{r}\right)^{l'} : \ldots$$

$$\div\ 0 \,.\, \frac{s}{m'+1} \,.\, \frac{2s}{m'+1} \,.\, \frac{3s}{m'+1} \ldots\ldots \frac{l's}{m'+1} \ldots\ldots$$

Queremos demonstrar que, se tivermos introduzido um numero N pelas duas inserções, na progressão por quociente os termos correspondentes das duas progressões por differença são iguaes.

$$\sqrt{r} = \left(\sqrt{r}\right)$$

Elevando ambos os membros d'esta ultima igualdade á potencia $(m+1)$, e em seguida a potencia $(m'+1)$, teremos :

$$r^{l(m'+1)} = r^{l'(m+1)}$$

$$\therefore\ l(m'+1) = l'(m+1) \text{ ou } \frac{l}{m'+1} = \frac{l'}{m+1};$$

multiplicando ambos os membros d'esta igualdade por s, vem a seguinte que demonstra o principio :

$$\frac{ls}{m'+1} = \frac{l's}{m+1}.$$

PROPRIEDADES DOS LOGARITHMOS

Primeira. — O logarithmo de um producto é igual á somma dos logarithmos dos seus factores.

Demonstração.—Supponhamos o systema

$$\div\div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots q^m : \ldots\ldots : q^n : \ldots\ldots$$

$$\div\ 0 \ .\ s \ .\ 2s \ .\ 3s \ldots\ldots ms \ldots\ldots\ldots ns \ldots\ldots$$

Prestando attenção a estas duas progressões, vemos :

1.° Que o producto de dous termos quaesquer da progressão por quociente é um termo d'esta progressão por differença é um termo d'esta progressão.

3.º Que se os termos multiplicados correspondem aos termos sommados respectivamente — o producto corresponde tambem a somma.

$$\text{Ora,}\quad q^{m} \times q^{n} = q^{m+n}\ ;\ ms + ns = (m+n)s$$

Logo o logarithmo do producto (q^{m+n}) de dous numeros $(q^{m} \times q^{n})$ tomados na progressão por quociente é igual a somma $(ms + ns)$ dos logarithmos d'esses numeros.

Com effeito o producto q^{m+n} corresponde a somma $(ms + ns)$.

Esta propriedade tem applicação a qualquer numero de factores.

Supponhamos o producto *abcd*.

$$\begin{aligned}
\text{Log.}(abcd) &= \log.\ (abc \times d) \\
&= \log.\ (abc) + \log.\ d. \\
&= \log.\ (ab \times c) + \log.\ d \\
&= \log.\ (ab) + \log.\ c + \log.\ d \\
&= \log.\ (a) + \log.\ b + \log.\ c + \log.\ d
\end{aligned}$$

Segunda.—O logarithmo de um quociente da divisão de dous numeros é igual ao logarithmo do dividendo menos o logarithmo do divisor.

Demonstração.—Supponhamos dous numeros N e D; seja o primeiro *dividendo*, e o segundo *divisor*, teremos:

$$\text{Log. N} = \text{log. D} + \text{log. Q} \text{ ou log. Q} =$$
$$= \text{log. N} - \text{log D}$$

Terceira.—O logarithmo de uma potencia é igual ao seu expoente multiplicado pelo logarithmo da quantidade.

Demonstração. — Supponhamos uma potencia qualquer de a, e seja a^m, que segundo a definição de potencia, teremos :

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a\,;$$

applicando os logarithmos a ambos os membros d'esta igualdade, vem :

$$\text{log. } a^m = \text{log. } a + \text{log. } a + \text{log. } a + \ldots\ldots + \text{log. } a;$$

attendendo que o segundo membro d'esta igualdade é uma addicção de parcellas iguaes, teremos :

$$\text{log. } a^m = m \times \text{log. } a$$

Quarta.—O logarithmo de uma *raiz* ou *radical* de qualquer gráu de um numero é igual ao logarithmo d'esse numero dividido pelo indice da raiz.

Demonstração.—Supponhamos $s = \sqrt[m]{a}$; elevando ambos os membros d'esta igualdade a potencia (m), vem $s^m = a$.

Applicando os logarithmos a ambos os membros d'esta igualdade, teremos :

$$m \times \text{log. } s = \text{log. } a \quad \text{ou} \quad \text{log. } s = \frac{\text{log. } a}{m} = \text{log. } \sqrt[m]{a}$$

Multiplicação a Addição.

Divisão a Subtracção.

Elevação a potencia a Multiplicação.

Extracção de raiz a Divisão.

Estas reducções provam á luz da evidencia a magna importancia da presente theoria.

Principio.—Multiplicar ou dividir um numero por qualquer potencia da base, o logarithmo d'esse numero fica augmentado ou diminuido do expoente d'essa potencia, porém a parte fraccionaria não soffre alteração.

Demonstração.—1.ª Supponhamos a um numero e b^n uma potencia da base.

$$\text{Ora, } \log.(a \times b^n) = \log.a + \log.b^n = \log.a + n \times \log.b$$

Quando b for a base.

$$\log.\, b = 1 \text{ e } n \times \log.\, b = n \times 1 = n\,;$$

$$\therefore \log.\,(a \times b^n) = \log.\, a + n$$

$$2.^a \; \log.(a \div b^n) = \log.a - \log.b^n = \log.a - n \times \log.b =$$

$$= \log.a - n \times 1 = \log.a - n$$

Conseguintemente a parte fraccionaria conserva-se a mesma

Os logarithmos vulgares (*) têm por base o numero 10, e são definidos pelo seguinte systema:

$$\div\div \; 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots\ldots$$

$$\div \; 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots\ldots$$

1.ª *Propriedade.—O logarithmo de uma potencia de 10 é igual ao expoente d'essa potencia.*

Demonstração.—Figure-se uma potencia qualquer de 10 e seja 10^m; applicando a esta potencia a propriedade terceira dos log. geraes, teremos:

$$\log.\ 10^m = m \times \log.\ 10\ ;$$

no systema decimal o log. 10=1, o log. 100=2, etc.

$$\therefore\ \log.\ 10^m = m \times 1 = m$$

2.ª *Propriedade.—Só as potencias de 10 têm por logarithmos numeros inteiros; todos os outros numeros têm por logarithmos numeros fraccionarios.*

Demonstração.—Chamando *N* qualquer numero dado comprehendido entre duas potencias de 10, e *m* o expoente da potencia mais baixa, teremos por hypothese:

$$10^m < N < 10^{m+1}\ ;$$

(*) Os logarithmos vulgares são tambem chamados logarithmos de vem :

$$\log. 10^{m} < \log. N < \log. 10^{m+1} ,$$

ou
$$m < \log. N < m+1$$

Conseguintemente o log. N é um numero fraccionario—pois está comprehendido entre dous numeros inteiros consecutivos m e $m+1$.

A parte inteira desses logarithmos denomina-se *caracteristica*, e a parte decimal *mantissa*.

3.ª *Propriedade.—A caracteristica do logarithmo de um numero consta de tantas unidades quantos são os algarismos d'esse numero menos um.*

Demonstração.—Seja N um numero de m algarismos :

$$10^{m-1} < N < 10^{m}$$

$$\therefore \quad \log. 10^{m-1} < \log. N < \log. 10^{m}$$

ou
$$m-1 < \log. N < m ;$$

conseguintemente o log. N é um numero fraccionario, cuja parte inteira é $m-1$.

4.ª *Propriedade.—Quando se conhece o logarithmo de um numero, para achar o logarithmo de outro 10, 100, 1000, 10000,.........vezes maior ou menor, basta augmentar ou diminuir o logarithmo dado de 1, 2, 3, 4,.......unidades.*

Demonstração. — Supponhamos A um numero qualquer.

... e applicando ao producto os logarithmos, vem :

$$\log.(A \times 10^m) = \log.A + \log.10^m = \log.A + m \times \log.10 =$$
$$= \log.A + m$$

Dividindo A por 10^m e applicando os logarithmos, teremos :

$$\log.(A \div 10^m) = \log.A - \log.10^m = \log.A - m \times \log.10 =$$
$$= \log.A - m.$$

Construcção das taboas de Logarithmos

Taboa de logarithmos é uma tabella que contém em uma columna os numeros inteiros em serie natural desde 1 *até o numero que se quizer, e em uma ou mais columnas á direita os logarithmos correspondentes.*

Para a construcção de uma taboa de logarithmos basta calcular os logarithmos dos numeros inteiros, porque um numero fraccionario sendo o quociente da divisão do numerador pelo denominador, o seu logarithmo é pois a differença entre os logarithmos dos termos.

Apezar de não pertencer ao dominio da Arithmetica elementar a construcção de uma taboa de logarithmos, daremos no entretanto, por um methodo elementar, idéa do calculo dos logarithmos dos numeros inteiros com uma approximação dada.

Sejam as progressões

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots\ldots$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots$$

Quer-se determinar os logarithmos de outros numeros inteiros sem erro de $\left(\frac{1}{10^n}\right)$

Para esse fim inserem-se *m* meios proporcionaes successivamente entre os termos consecutivos da primeira progressão, e *m* meios differenciaes entre os termos consecutivos da segunda.

Nas progressões assim obtidas os termos da segunda serão os logarithmos dos termos correspondentes da primeira.

Ora, se a razão da nova progressão por quociente é $\sqrt[m+1]{10}$, e a da nova progressão por differença é $\frac{1}{m+1}$, teremos as seguintes progressões:

$$\div\!\div 1 : \sqrt[m+1]{10} : \sqrt[m+1]{10^2} : \sqrt[m+1]{10^3} : \ldots\ldots 10 : \ldots\ldots$$

$$\div 0 \,.\, \frac{1}{m+1} \,.\, \frac{2}{m+1} \,.\, \frac{3}{m+1} \ldots\ldots\ldots 1 \ldots\ldots$$

Façamos $(m+1) = 10^n$; conseguintemente $m = 10^n - 1$.

Agora supponhamos que *N* seja o numero, cujo logarithmo se deve calcular sem erro de $\frac{1}{10^n}$.

Forme-se a potencia $m+1$ de *N* e tomem-se entre os numeros 10 ...

N ; supponha-se

$$10^{l} < N^{m+1} < 10^{l+1} \quad ;$$

resulta destas desigualdades o seguinte :

$$\sqrt[m+1]{10^{l}} < N < \sqrt[m+1]{10^{l+1}}$$

Applicando os logarithmos, teremos :

$$\log.\ \sqrt[m+1]{10^{l}} < \log.\ N < \log.\ \sqrt[m+1]{10^{l+1}} ,$$

ou $$\frac{l}{m+1} < \log.\ N < \frac{l+1}{m+1}$$

Ora, o log. N está comprehendido entre dous numeros que differem entre si em $\frac{1}{10^n}$, porque

$$\frac{l+1}{m+1} - \frac{l}{m+1} = \frac{1}{m+1} = \frac{1}{10^n} ;$$

logo cada um d'estes numeros differe do *log. N.* em menos de $\frac{1}{10^n}$.

Applicação.—Dado o numero 3, calcular o seu logarithmo com erro menor que $\frac{1}{10}$ da unidade.

Temos no presente caso as igualdades seguintes: $n = 1$; $m = 10 - 1 = 9$.

Inserindo successivamente (10) meios proporcionaes entre os termos consecutivos da primeira progressão das que definem o systema decimal,—e 10 meios differenciaes entre os termos consecutivos da segunda,—attendendo que a razão da primeira $\sqrt[10]{10}$, e que a da segunda é $\left(\frac{1}{10}\right)$, virá:

$$\div\!\div\ 1 : \sqrt[10]{10} : \sqrt[10]{10^2} : \sqrt[10]{10^3} : \sqrt[10]{10^4} : \sqrt[10]{10^5} : \ldots 10 : \ldots$$

$$\div\ 0 \,.\, \frac{1}{10} \,.\, \frac{2}{10} \,.\, \frac{3}{10} \,.\, \frac{4}{10} \,.\, \frac{5}{10} \ldots\ldots 1 \ldots\ldots$$

Ora— $3^{10} = 59049.$

O segundo membro d'esta igualdade está comprehendido entre a 5ª e 6ª potencia de 10, isto é,

$$10^5 < 3^{10} < 10^6 \quad \therefore \sqrt[10]{10^5} < 3 < \sqrt[10]{10^6};$$

applicando os log. a estas desigualdades, vem:

$$\log. \sqrt[10]{10^5} < \log. 3 < \log. \sqrt[10]{10^6}$$

$$\text{ou} \quad \frac{5}{10} < \log. 3 < \frac{6}{10};$$

vê-se pois, que o log...

D' entre as differentes taboas de logarithmos a mais usada é a do *Dr. Francisco Callet*.

Taboa de Callet

Esta taboa abrange os logarithmos dos numeros desde 1 até 108.000, pelo que é a mais extensa que se conhece até a presente data.

Além d'esta vantagem accresce ter ella applicação universal.

N'estas taboas notam-se duas partes: *Chiliade* 1ª que comprehende *cinco* paginas, e *taboa segunda* logo em seguida que se compõe de muitas folhas.

Nas primeiras cinco paginas acham-se os numeros naturaes desde 1 até 1.200 dispostos em columnas marcadas pela lettra *N* inicial da palavra numero; á direita de cada um d'estes numeros existem outros que são os seus logarithmos, tendo na parte superior de cada uma d'estas columnas a lettra *L*. inicial da palavra logarithmo.

Os logarithmos d'esta primeira parte são avaliados com oito algarismos decimaes.

A segunda parte ou *taboas segundas* tomam outra disposição; ellas acham-se divididas em 12 columnas (não incluindo as duas da esquerda).

Na primeira columna de cada folha á esquerda designada por *N* vêm os numeros inteiros desde 1.020 até 10.800.

Na segunda columna marcada com a lettra *O* estão os logarithmos d'estes numeros; estas duas columnas representam a continuação da Chiliade 1ª, e os logarithmos dos numeros que vão de 1.020 a 10.800 são obtidos immediatamente.

... da pagina (*columna*

de tres algarismos, que são considerados como se estivessem escriptos uns abaixo dos outros de modo a completar todas as linhas.

Os quatro ultimos algarismos de cada *mantissa* encontram-se na mesma linha horisontal em que vem o numero; á esquerda e, em geral um pouco acima d'estes quatros ultimos algarismos, acham-se os tres primeiros.

Os logarithmos dos numeros *decuplos* dos incluidos nos casos anteriores, isto é, de 10.200, 10.210, 10.220,.....até 108.000 e seus decuplos são tambem fornecidos pela *parte segunda*;—para a boa comprehensão convém lembrar as propriedades dos logarithmos decimaes.

Os logarithmos dos numeros comprehendidos entre os numeros 10.200, 10.210, 10.220,....... 108.000, são obtidos do seguinte modo:

Procuram-se os quatro ultimos algarismos da mantissa na columna que tiver o algarismo em que terminar o numero, e na linha horisontal onde acham-se os outros algarismos deste numero.

Do exposto se vê que esta segunda parte differe da Chiliade 1ª,—pois não podemos prescindir das columnas iniciadas pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5,....9.

A ultima columna contém as differenças (Diff:) dos logarithmos e as partes d'estas differenças escriptas logo abaixo d'aquellas.

Differença dos Logarithmos

PROPRIEDADES

1.ª *A differença entre os logarithmos de dous nu-*

differença, temos :

$$D = \log.(a + d) - \log.a = \log.\frac{a + d}{a} = \log.\left(1 + \frac{d}{a}\right);$$

portanto o log. $\left(1 + \frac{d}{a}\right)$ é tanto menor quanto maior é *a* e quanto menor é *d*.

Quando *d* for igual a 1 ($d = 1$), *a differença entre os logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos diminuirá quando esses numeros augmentarem, e terá por limite zero.*

Demonstração.—Tomem-se os numeros inteiros consecutivos *a* e $(a + 1)$; seja *d* a differença entre os seus logarithmos :

$$d = \log.(a + 1) - \log.a = \log.\frac{a + 1}{a} = \log.\left(1 + \frac{1}{a}\right);$$ ora,

se *a* de um lado augmenta, se $\left(\frac{1}{a}\right)$ de lado outro diminue, é porque diminue tambem o *log*. $\left(1 + \frac{1}{a}\right)$; e de mais, sendo *a* infinitamente grande, $\left(\frac{1}{a}\right)$ torna-se infinitamente pequeno, d'onde concluimos que o

$$\text{Lim: } d = \text{Lim: } \log.\left(1 + \frac{1}{d}\right) = \log.\ 1 = 0$$

Do exposto tiramos a conclusão seguinte :

... razão de dous numeros approxima-se tanto

são os numeros e quanto menos differem um do outro.

Demonstração.—A razão $\left(\frac{a+d}{a}\right)$ tanto mais se approxima da unidade (1) quanto menor é (d); ora, se a differença entre os logarithmos de ($a+d$) e (a) diminue à proporção que (a) cresce e que (d) diminue, é evidente que a razão $\left(\frac{\log.(a+d)}{\log.a}\right)$ vae tambem approximando-se da unidade, e conseguintemente a razão $\left(\frac{a+d}{a}\right)$; o limite commum das duas razões é pois a *unidade.*

3.ª *As differenças entre os logarithmos dos numeros inteiros consecutivos maiores que* 10000 *differem entre si em menos de uma unidade de oitava ordem decimal.*

Demonstração.—Supponhamos os numeros inteiros consecutivos ($n+1$) e (n); seja D a differença entre elles:

$$D = \log.(n+1) - \log. n = \log.\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

supponhamos ainda mais os dous numeros inteiros consecutivos ($n+2$) e ($n+1$) e seja D' a differença entre elles.

$D' = \log.(n+2) \ldots$

$$D - D' = \log.\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log.\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \log. \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \log. \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} =$$

$$= \log.\left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)$$

Ora, se $D - D'$ é menor que o $\log.\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, sendo por hypothese $n = 10000$, vem:

$$D - D' < \log.\left(1 + \frac{1}{10000^2}\right)$$

ou

$$D - D' < \log. 1{,}00000001 \, ;$$

o log. 1,00000001 sendo impreterivelmente menor que 0,00000001, é porque

$$D - D' < 0{,}00000001.$$

4.ª *As differenças entre os logarithmos dos numeros superiores a 10000 são proporcionaes ás differenças desses numeros.*

ro inteiro qualquer maior que 10000, tomem-se dous numeros inteiros n e n' que sejam mui pequenos relativamente a S e seja d a differença constante entre os logarithmos de dous numeros inteiros consecutivos.

Ora, se juntarmos a unidade a um numero, o seu logarithmo vem augmentado da quantidade d, addicionando ao numero n unidades, o seu logarithmo fica augmentado de n vezes d; logo

$$\text{Log.}\,(S+n) = \text{log.}\,S + n \times d,$$

$$\text{Log.}\,(S+n') = \text{log.}\,S + n' \times d;$$

ou

$$\text{Log.}\,(S+n) - \text{log.}\,S = n \times d,$$

$$\text{Log.}\,(S+n') - \text{log.}\,S = n' \times d;$$

Dividindo as duas ultimas igualdades ordenadamente, teremos:

$$\frac{\text{Log.}\,(S+n) - \text{log.}\,S}{\text{Log.}\,(S+n') - \text{log.}\,S} = \frac{n}{n'}$$

USO DAS TABOAS DE CALLET

Problema 1.º—*Dado um numero, achar o seu logarithmo.*

Problema 2.º—*Dado o logarithmo de um numero, determinar esse numero.*

O primeiro problema offerece-nos quatro casos para os numeros inteiros.

1.º Ca

é composto de quatro algarismos significativos.

3.º *Caso.*—O numero dado é composto de cinco algarismos, sendo o ultimo á direita sempre significativo.

4.º *Caso.*—O numero dado é composto de 6 ou mais algarismos.

Regra para o 1º caso.—Escreve-se em primeiro lugar a caracteristica e ao depois procura-se o numero dado na Chiliade 1ª, columna N; á direita na columna representada por log. e no mesmo alinhamento encontrar-se-ha a parte decimal do logarithmo pedido.

Exemplos

1.º Qual o logarithmo do numero 639 ?

Se o numero 639 é composto de 3 algarismos, a caracteristica consta de 2 unidades; procurando o numero 639 na primeira parte das taboas, columna *N*, encontra-se á direita, na columna Log., o numero 80550086 que é a parte decimal.

Logo o log. 639=2,80550086.

2.º Qual o logarithmo do numero 1198 ?

Log. 1198 = 3,07845682.

Regra para o 2º caso.---Obtida a caracteristica—procura-se o numero dado na 2ª parte das taboas, columna N e a direita na columna O no mesmo alinhamento encontra-se toda a parte decimal ou sómente quatro algarismos; quando encontra-se toda a parte decimal (7 algarismos), tem-se promptamente o logarithmo pedido; mas se si encontrar unica-

primeiros algarismos subindo o espaço em branco.

Exemplos

1.º Qual o logarithmo do numero 1358?

O numero proposto tendo quatro algarismos, tem para caracteristica 3 unidades.

Procurando o numero 1353 na 2ª parte das taboas na columna *N* encontra-se na columna *O* á direita os quatro ultimos algarismos decimaes (8998); subindo o espaço em branco n'esta mesma columna encontram-se os tres primeiros algarismos decimaes (132) que sendo escriptos á esquerda dos quatros já obtidos formam a decimal 0,1328998.

O logarithmo do numero 1358 é 3,1328998.

2.º Qual o logarithmo do numero 6934 ?

$$\text{Log. } 6934 = 3{,}8409838$$

3.º Qual o logarithmo do numero 7047 ?

$$\text{Log. } 7047 = 3{,}8480043$$

Regra para o 3.º caso.---Faz-se mentalmente abstracção do ultimo algarismo á direita, procura-se na 2.ª parte das taboas o numero restante á esquerda e na columna O no mesmo alinhamento ou um pouco ácima encontram-se os tres primeiros algarismos decimaes. Isto feito, procura-se na 1.ª linha horisontal (0, 1, 2, 3, 4, 5 etc.) o ultimo algarismo desprezado mentalmente, desce-se pela columna correspondente a este numero e no mesmo alinhamento em que estiver o numero formado pelos quatro algaris-

mos á esqu

Exemplos

1.º Qual o logarithmo de 26937 ?

Este numero constando de cinco algarismos tem para caracteristica 4 unidades.

Despresando o algarismo (7), resta o numero (2693) que sendo encontrado na 2ª parte das taboas na columna *N* corresponde ao numero (430) da columna *O* (*um pouco acima*).

Procura-se na linha horisontal (0, 1, 2, 3, 4 etc.) o numero (7), desce-se por esta linha até encontrar o numero (3492) que está no mesmo alinhamento que o numero (2693).

Conseguintemente o logarithmo do numero..... 26937 é 4,4303492.

2.º Qual o logarithmo de 87654 ?

$$\text{Log. } 87654 = 4{,}9427717.$$

3.º Qual o logarithmo de 18779 ?

$$\text{Log. } 18779 = 4{,}2736725.$$

Regra para o 4.º caso.---Separam-se os cinco algarismos á esquerda, procura-se o logarithmo do numero formado por esses cinco algarismos, multiplica-se a parte decimal resultante da separação dos cinco primeiros algarismos, pela differença tabular, junta-se a parte inteira desse producto ao logarithmo achado.

Qual o logarithmo do numero 3924537 ?

Figure-se $N = 3924537$.

Dividindo ambos os membros d'esta igualdade por 100 (*para que sejam separados cinco algarismos á esquerda*), teremos : $\frac{N}{100} = 39245{,}37$; a mesma que a do numero N.

Procurando nas taboas o logarithmo de 39245, teremos :

$$\log. 39245 = 4{,}5937843\ ;$$

falta agora calcular a differença x entre este logarithmo e o de 39245,37.

Para esse fim temos a proporção seguinte :

$$\frac{39246 - 39245}{39245{,}37 - 39245} = \frac{\log. 39246 - \log. 39245}{\log. 39245{,}37 - \log. 39245}$$

$$\text{ou } \frac{1}{0{,}37} = \frac{d}{x} \quad \text{ou} \quad 1 : 0{,}37 :: d : x\ ;$$

tirando o valor de x e fazendo a conveniente substituição de d nas taboas, vem :

$$x = d \times 0{,}37 = 111 \times 0{,}37 = 41 \text{ approx :}$$

Nas taboas já se acham calculados os productos da differença tabular (d) por (0,1,) (0,2,) (0,3) etc., expressos em unidades da 7.ª ordem decimal.

$$x = 111(0,3 + 0,07) = 111 \times 0,3 + 111 \times 0,7 \div 10 =$$

$$= 33,3 + 7,77 = 41 \quad \text{approximadamente.}$$

Addicionando 41 unidades da 7.ª ordem ao logarithmo de 39245 para ter o de 39245,37, teremos :

$$\log. 39245{,}37 = 4{,}5937884$$

Na pratica o calculo toma esta disposição:

$$\begin{array}{llr} \text{log.} & 39245 & = 4{,}5937843 \\ \textit{por} & 0{,}3 & 33 \\ \textit{por} & 0{,}07 & 8, \\ \text{log.} & 39245{,}37 & = 4{,}5937884 \\ \text{log.} & 3924537 & = 6{,}5937884 \end{array}$$

Até aqui temos determinado os logarithmos dos numeros inteiros; convém saber agora determinar o logarithmo correspondente a uma fracção, quer ordinaria quer decimal.

LOGARITHMOS DAS QUANTIDADES FRACCIONARIAS

Caso 1.º---Dada uma fracção ordinaria impropria achar o logarithmo correspondente.

Caso 2.º---Dada uma fracção decimal finita achar o seu logarithmo.

Regra para o 1.º *caso.---Procuram-se os logarithmos correspondentes aos termos da fracção dada e subtrahe-se o segundo do primeiro.*

Ex. $\text{log.} \dfrac{52793}{4395} = \text{log.}\ 52793 - \text{log.}\ 4395.$

$$\text{log.}\ 52793 = 4{,}7225763$$

$$\text{log.}\ 4395 = 3{,}6429589$$

ou $\text{log.}\left(\dfrac{52793}{4395}\right) = 1{,}0796174$

rithmo de uma fracção propria será negativo.

Ex. Qual o logarithmo da fracção $\frac{28}{5943}$

Dispondo o calculo, vem:

$$
\begin{array}{rrcr}
 & \text{Log.} \quad 28 & = & 1,44715803 \\
 & \text{Log.} \quad 5943 & = & 3,77400570 \\
\hline
\text{Log. } 28 - \text{log.} & 5943 & = & -2,32684767.
\end{array}
$$

Regra para o 2.° caso.—Faz-se a virgula da fracção decimal avançar para a direita tantas casas quantas sejam necessarias para que a parte inteira conste no maximo de cinco algarismos, e pratica-se como nos casos anteriores.

Exemplo.—Qual o logarithmo da fracção decimal 3547,296?

Dispondo o calculo, teremos:

$$3547,296 = 35472,96 \div 10.$$

Applicando os logarithmos em ambos os membros d'esta igualdade, vem:

$$\text{log. } 3547,296 = \text{log. } 35472,96 - 1$$

$$
\begin{array}{lrr}
\text{log.} & 35472 & = 4,5498857 \\
\textit{por} & 0,9 & 110 \\
\textit{por} & 0,06 & 7, \\
\hline
\end{array}
$$

log. 35472,96

Problema 2.º — Dado um logarithmo, achar o numero correspondente.

Consideram-se dous casos :

1.º *Caso.*— O logarithmo encontra-se nas taboas.

2.º *Caso.*—O logarithmo não se acha nas taboas.

Regra para o 1.º caso.—Se o logarithmo dado for encontrado na 1.ª Chiliade, promptamente teremos o numero pedido, que será encontrado na columna N e no mesmo alinhamento que o logarithmo dado ; se porém este logarithmo não estiver na 1.ª parte das taboas praticaremos assim :—percorre-se a columna O e ahi tomam-se os tres primeiros algarismos decimaes do logarithmo em questão ; isto feito procuram-se os quatro ultimos algarismos na mesma columna á direita (descendo) e o numero da columna N que estiver no alinhamento correspondente aos quatro algarismos encontrados será o numero pedido ; se estes quatro algarismos não forem encontrados n'esta columna, para-se no que exprimir um numero proximamente menor, segue-se para á direita sempre no mesmo alinhamento até encontrar-se os algarismos procurados ; isto feito escreve-se á direita do numero que foi encontrado na columna N e no mesmo alinhamento, o algarismo da linha horisontal superior (0,1,2,3,4,5 etc..) correspondente a columna em que estiver os quatro ultimos algarismos decimaes e assim teremos o numero pedido.

Exemplos

$$2,64147441 = \log.\ 438$$

$$3,6707096 = \log.\ 4685$$

$$4,5769630 = \log.\ 37754$$

etc.

Regra para o 2.º caso.—Reduz-se a caracteristica do logarithmo dado ao limite das taboas, isto quer dizer que diminue-se a caracteristica de tantas unidades quantas forem necessarias para que o numero procurado ache-se nas taboas, depois vê-se nas mesmas taboas que este logarithmo está comprehendido entre um logarithmo menor e outro maior, entre os quaes acharemos a differença e estabeleceremos a proporção seguinte : a differença entre o maior e o menor logarithmo está para a differença entre os numeros correspondentes, assim como a differença entre o logarithmo dado e o proximamente menor está para a differença dos numeros correspondentes ; *esta differença representa a parte decimal que escreveremos á direita do n. proximamente menor separando-os por uma virgula, e para obtermos o n. correspondente ao logarithmo dado andaremos com a virgula tantas casas para á direita quantas forem as que subtrahimos á caracteristica do logarithmo dado para reduzir ao limite das taboas ; só mudaremos o lugar da virgula se for necessario reduzir o logarithmo dado ao limite das taboas.*

Ex.—Qual o numero correspondente ao logarithmo 5,6774237 ?

Despondo segundo a regra, temos :

$$\begin{array}{llll} 4,6774244 & = \text{log. } 47580 & & \\ 4,6774153 & = \text{log. } 47579 & & \\ \hline \text{Diff.} & 91 & \text{Diff.} & 1 \end{array}$$

$$91 : 1 :: 84 : x \quad \text{ou} \quad x = \frac{84}{91} = 0,92$$

Logo, $4,6774153 = \text{log. } 47579,92$

e finalmente $5,6774237 = \text{log. } 475799,2.$

cimal.

Explicação.---Percorrendo a columna das differenças, se lê (9) em frente de (82); logo x contém (0,9).

Agora procurando a differença (84—82=2), colloca-se um zero á sua direita, de modo que temos (20). Não encontramos este numero na taboa das differenças, mas toma-se o producto mais approximado (18), que corresponde ao producto da differença tabular por (0,2); conseguintemente (2) corresponderá approximativamente ao factor (0,02).

Logo $$x = 0,9 + 0,02 = 0,92.$$

Dos complementos arithmeticos

Complemento arithmetico de um numero é a differença entre elle e a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos do numero, ou o que falta ajuntar a esse numero para ser igual a 10 unidades.

Indica-se o complemento antepondo ao numero as lettras *Cl*.

Exepmlos

$$\text{Cl. } 543 = 1000 - 543 = 457$$

$$\text{Cl. } 243925 = 1000000 - 243925 = 756075$$

... 62,49=37,51

converter as subtracções em simples addições.

Achar-se o complemento de um numero.—Subtrahe-se de nove cada algarismo do numero em questão, excepto o ultimo á direita, que se subtrahe de 10.

Complemento do logarithmo de um numero é o logarithmo do reciproco d'esse numero.

Numeros reciprocos são dous numeros que multiplicados entre si dão para producto a *unidade*.

Os numeros 4 e $\frac{1}{4}$, são *reciprocos*, porque

$$4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Complemento arithmetico de um logarithmo—é o que falta a esse logarithmo para completar *dez unidades*, ou é a differença desse logarithmo para 10.

Ex. Cl. log. $5732 = 10 - 3{,}7583062 = 6{,}2416938$

Ao depois de termos tratado dos complementos arithmeticos com referencia a um só numero, convém saber applica-los quando dous ou mais numeros acharem-se ligados pelos signaes propriamente ditos ; é justamente n'este caso que os complementos arithmeticos têm applicação vantajosa.

Se nos fôr dada uma expressão cujos termos tiverem signaes desiguaes applicaremos a regra seguinte :

Tomam-se os complementos arithmeticos de todos os numeros negativos e somam-se com os numeros positivos ; d'esta somma tiraremos tantas dezenas quantos forem os complementos, e o resto exprimirá a differença entre as duas sommas.

para achar o resultado final.

Supponde D a differença e praticando de conformidade com a regra, teremos :

$$D = A + A' + A'' + A''' - B - B' - B'' - B''' = A + A' +$$

$$+ A'' + A''' + 10 - B + 10 - B' + 10 - B'' + 10 - B''' - 40$$

Logo $A + A' + A' + A''' + Cl.B + Cl.B' + Cl.B'' +$
$+ Cl.B''' - 40$

Outro exemplo.—Qual o resultado final da expressão

$$\log.\ x = \log.\ \frac{23 \times 35 \times 507}{43 \times 28}\ ?$$

$$\log.\ x = \log.\ (23 \times 35 \times 507) - \log.\ (43 \times 28)$$

$$\begin{array}{rrl} \log. & 23 & = 1,36172784 \\ \log. & 35 & = 1,54406804 \\ \log. & 507 & = 2,70500796 \\ Cl.\ \log. & 43 & = 8,36653154 \\ Cl.\ \log. & 28 & = 8,55284196 \\ \hline & & 2)2,53017734 \end{array}$$

O resto 2,53017734 representa o valor do log. x.

OBSERVAÇÃO

O logarithmo da *unidade* sendo igual a zero, a ... o logarithmo de uma seja menor do que zero.

Um logarithmo qualquer affectado do signal *menos* póde-se representar pela differença entre zero e o logarithmo $(0-L)$; se juntarmos ao minuendo 10 unidades, teremos : $(10-L)$ que é uma expressão equivalente a $(0-L)$ ou $(-L)$ augmentado de 10 unidades.

Ora, subtrahindo o logarithmo L de 10 unidades augmenta-se a differença de 10 unidades e esta differença representa sempre um logarithmo negativo.

Para haver equilibrio perfeito faremos o seguinte :

Por cada complemento arithmetico que juntarmos à um certo numero, subtrahiremos uma dezena ao mesmo resultado.

Dado o caso de apresentar-se uma expressão cujos termos sejam fracções proprias, como na expressão

$$P = \frac{3}{5} \times \frac{25}{76} \times \frac{12}{19},$$

transformaremos estas fracções proprias em fracções improprias—multiplicando ambos os membros da igualdade por uma potencia conveniente de 10, assim :

$$1000\ P = 1000 \left(\frac{3}{5} \times \frac{25}{76} \times \frac{12}{19}\right) = \frac{30}{5} \times \frac{250}{76} \times \frac{120}{19}$$

$$\log. 1000\,P = \log. 30 - \log. 5 + \log. 250 - \log. 76 +$$
$$+ \log. 120 - \log. 19$$

ou

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log. \;\; 30 & = & 1{,}4771212 \\
 & \log. \; 250 & = & 2{,}3979400 \\
 & \log. \; 120 & = & 2{,}0791812 \\
\text{Cl.} & \log. \;\;\; 5 & = & 8{,}3010300 \\
\text{Cl.} & \log. \;\; 76 & = & 8{,}1191865 \\
\text{Cl.} & \log. \;\; 19 & = & 8{,}7212464 \\
\hline
 & \log. \; 1000\,P & = & 3\,1{,}0957053
\end{array}$$

Entrando nas taboas com o numero 1,0957053, vem:

$$1000\,P = 12{,}465$$

$$\therefore \; P = 0{,}012465 \;\; \text{(approximativamente)}.$$

REGRAS COMMERCIAES

PARTE PRIMEIRA

Systema metrico-decimal

A grande necessidade da creação de um systema uniforme de pesos e medidas fez com que a *França* mimoseasse o mundo civilisado com um systema *racional*, *uniforme e facil* denominado *systema metrico-decimal*.

A Assembléa nacional franceza decretou no anno de 1790 a creação d'este systema.

A commissão encarregada pela *Academia de Sciencias de Paris* para apresentar o fundamento do novo systema avaliou o comprimento do *quadrante terrestre* tomando para unidade a *toeza* e achou 5130740 toezas.

Obtida esta avaliação Delambre e Mechain dividiram 5130740 por 10000000 e ao quociente d'esta divisão denominaram *metro*.

E' d'ahi que vem o nome de systema metrico.

Muitas nações reconhecendo a perfeição e uniformidade d'este systema adoptaram-n'o e prohibiram por lei os systemas antigos.

Os diversos systemas de pesos e medidas em uso nos paizes em que ainda não foi adoptado o systema metrico decimal têm graves inconvenientes :

1.º Não sendo as medidas sugeitas a uma lei de subdivisão constante signadas pelo mesmo nome mudar de uma para outra provincia, e muitas vezes de uma para outra cidade da mesma provincia !

Systema metrico decimal ou systema legal, ou ainda systema francez de pesos e medidas é a parte da arithmetica que tem por fim o conhecimento de pesos e medidas referidos a uma certa unidade denominada metro.

Os instrumentos que servem para avaliar as quantidades e medir os comprimentos chamam-se *pesos e medidas.*

Medir — é achar quantas vezes uma quantidade contém outra da mesma especie denominada unidade.

Em qualquer systema de pesos e medidas consideram-se as seguintes especies de unidades :

COMPRIMENTO, SUPERFICIE, VOLUME, CAPACIDADE, PESO, MOEDA

No systema metrico decimal essas medidas receberam as seguintes denominações :

METRO, AREO, STEREO, LITRO, GRAMMO, FRANCO.

Estas especies de unidades dividem-se e subdividem-se, notando-se que essas divisões e subdivisões são effectuadas de dez em dez, pelo que podemos considerar diversas ordens superiores ou inferiores.

As differentes ordens a que me refiro receberam as seguintes denominações :

SUPERIORES

Deca — que quer dizer — Dezena
Hecto — « « « — Centena
Myria — « « « — Dezena de milhar

Deci — que quer dizer — Decimo
Centi — « « « — Centesimo
Milli — « « « — Millesimo

Da combinação de todas estas ordens com as differentes especies de unidades, resultam as differentes denominações para as unidades metricas decimaes, que vão representadas na tabella seguinte :

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Itinerarias	Myriametro	10000	metros
	Kilometro	1000	«
De comprimento ordinario	Hectometro	100	«
	Decametro	10	«
	Metro	**Unidade**	
	Decimetro	$0^{m},1$	
	Centimetro	$0^{m},01$	
	Milimetro	$0^{m},001$	

MEDIDAS DE SUPERFICIE

erficies ordinarias	Myriametro quadrado . . .	100000000	$metros^2$
	Kilometro quadrado . . .	1000000	«
	Hectometro quadrado . . .	10000	«
	Decametro quadrado . . .	100	«
	Metro quadrado	**Unidade**	
	Decimetro quadrado . . .	$0,^{m2}\,01$	

Super agr	Centiareo 0,01	. . =	1 metro 2	= 1 decam²

Os outros multiplos e sub-multiplos do *areo* não são usados.

MEDIDAS DE VOLUME

Solidez	**Metro cubico**	**Unidade**
	Decimetro cubico	$0,^{m3}\ 001$
	Centimetro cubico	$0,^{m3}\ 000001$
	Milimetro cubico	$0,^{m3}\ 000000001$

Para os multiplos do metro cubico não ha nomes systematicos : não se usa dizer myriametro cubico, kilometro cubico, etc.

Lenha e madeiras	Decastereo	10 stereos. =		= 10 metros³
	Stereo	= unidade		= 1 metro³
	Decistereo	= 0st,1		= 100 decimet³

Capacidade para seccos e liquidos	Kilolitro	1000	litro	= 1 metro³
	Hectolitro	100	«	= 100 decim³
	Decalitro	10	«	= 10 decim³
	Litro	**unidade**		= 1 decim³
	Decilitro	0*l*,1		= 100 centim³
	Centilitro	0*l*,01		= 10 milim.³

MEDIDAS DE PESOS

T...	1000	kilogrammas	= 1000000 gram.
			= 100000 gram.
			= 10000 gram.

	1000 gram.
Hectogrammo	100 gram.
Decagrammo	10 gram.

Grammo **Unidade**

Decigrammo	0g,1
Centigrammo	0g,01
Milligrammo	0g,001

E' de notar que as unidades de superficies formam-se de cem em cem e as de volume de mil em mil.

UNIDADE DE MOEDA

A unidade empregada é o *franco* que não admitte multiplos nem submultiplos.

Poder-se-hia objectar a razão porque as unidades de ordem superior a— *Myria* e inferior a — *Milli* não receberam nomes particulares, porém é facil de explicar, attendendo que qualquer unidade da ordem — *Milli* é extremamente pequena, assim como qualquer da ordem —*Myria* é excessivamente grande, e quantidades n'essas condições raras vezes apparecem em transacções commerciaes para o que são destinados os systemas de pesos e medidas.

Formação das unidades metricas decimaes

O metro—é representado pela decima millionesima parte da distancia do pólo ao equador.

O areo—é representado por um quadrado que tem de lado um ta é do comprimento de um metro, por isso chama-se tambem um metro cubico.

O litro—é representado por um cubo, cuja aresta é do comprimento de um decimetro, por isso tambem chama-se decimetro cubico.

O grammo—é representado por um volume de agua pura, equivalente a um centimetro cubico.

O franco—é representado por uma peça de prata em fórma de *moeda*, pesando cinco grammos, dos quaes *um decimo* é liga e o restante é prata pura.

ABREVIATURAS

As lettras *m*, *l*, *g*, significam as unidades principaes que são *metros*, *litros* e *grammos*.

As letras *K*, *H* e *D* escriptas á esquerda das primeiras, indicam os seus multiplos; as palavras *deci*, *centi* e *milli*, prefixas ás letras *m*, *l*, *g*, significam os seus sub-multiplos.

As lettras *c* e *q* escriptas a direita dos symbolos *m*, *l* e *g*, a primeira significa *cubos* e a segunda *quadrados*.

Assim:

Kg.	significa	kilogrammo	decim.	significa	decimetro
Hl.	«	hectolitro	decig.	«	decigrammo
Km.	»	kilometro	decil.	«	decilitro
Hm.	«	hectometro	centig.	«	centigrammo
Dm	«	decametro	centim.	«	centimetro
Km. q.	«	kilometro quadrado	m. q.	«	metro quadrado
			m. c.	«	metro cubico

No estudo do systema metrologico decimal convém resolver as questões seguintes:

1.ª *Escripto um numero metrico decimal, enun-*

crevel-o.

Primeira questão.—Lè-se o numero todo como se fosse inteiro ajuntando no fim o nome da ultima subdivisão da unidade principal ; ou então a parte inteira com o nome da unidade principal e depois a parte decimal como se fosse inteira com o nome da ultima subdivisão da unidade. Tambem póde-se enunciar separadamente cada algarismo da parte fraccionaria ou mesmo todo o numero com o nome do multiplo ou submultiplo respectivo da unidade.

Ex. $846^{m},257$; podemos lêr 846257 millimetros ; ou 846 metros e 257 millimetros ; ou 846 metros, 2 decimetros, 5 centimetros e 7 millimetros ; ou finalmente 8 hectometros, 4 decametros, 6 metros, 2 decimetros, 5 centimetros e 7 millimetros.

Se os numeros exprimirem metros quadrados ou metros cubicos, serão lidos de outro modo :

Tomemos o numero $569^{m2},432798$.

Em um numero qualquer de metros quadrados cada unidade vale 100 da ordem immediatamente inferior ; conseguintemente uma unidade de cada ordem é um centesimo da unidade precedente ; logo 1, 2, 3,..... 99 centesimos de qualquer unidade fórmam 1, 2, 3,..... 99 unidades da ordem seguinte. Temos portanto 569 metros quadrados, 43 decimetros quadrados, 27 centimetros quadrados e 98 millimetros quadrados ; ou simplesmente 569 metros quadrados, 432798 millimetros quadrados ; ou mais abreviadamente 569432798 millimetros quadrados.

Assim como decompozemos a parte fraccionaria tambem podemos decompor a parte inteira : 5 decametros quadrados, 69 metros quadrados, 432798 millimetros quadrados.

Quando o numero dos alg...

metro quadrado são 10 centimetros quadrados é por esse motivo que escrevemos um zero á direita da parte fraccionaria e então teremos: 84 metros quadrados e 3450 centimetros quadrados.

Regra.—*Para enunciar um numero de metros quadrados lè-se a parte inteira com o nome da unidade principal, e dividindo a parte fraccionaria em classes de dous algarismos da esquerda para a direita, lè-se cada classe em separado dando-lhes successivamente a denominação de decimetros quadrados, centimetros quadrados, millimetros quadrados, etc; se a ultima classe tiver um só algarismo ajunta-se-lhe á direita um zero.*

Figuremos agora um numero de metros cubicos, o numero 531^{m3}, 432573142, por exemplo.

Cada unidade de um numero de metros cubicos vale 1000 da ordem immediatamente inferior, de onde se vê que uma unidade de cada ordem é um millesimo da unidade precedente; logo 1, 2, 3,... 999 millesimos de qualquer unidade formam 1, 2, 3, ...999 unidades da ordem seguinte:

Conseguintemente temos 531 metros cubicos, 432 decimetros cubicos, 573 centimetros cubicos e 142 millimetros cubicos; ou simplesmente 531432573142 millimetros cubicos.

Juntaremos á direita da parte fraccionaria um ou dous zeros se o numero dos algarismos desta parte não for multiplo de tres.

Tomemos o numero 89^{m3},6; 1 metro cubico é igual a 1000 decimetros cubicos,—1 decimo do metro cubico é igual a 100 decimetros cubicos; logo, 6 decimos são iguaes a 600 decimetros cubicos.

classe de tres algarismos da esquerda para a direita, lê-se cada uma em separado dando-lhes successivamente a denominação de decimetros cubicos, centimetros cubicos, etc ; se a ultima classe tiver um ou dous algarismos escreve-se-lhe á direita um ou dous zeros.

Segunda questão.—*Escreve-se um numero metrico-decimal como se fosse abstracto, collocando a virgula de modo que a cada multiplo e sub-multiplo da unidade corresponda um algarismo se fôr um numero de metros lineares, dous se for um numero de metros quadrados, tres se for um numero de metros cubicos ; os lugares das unidades que faltarem preencheremos com zeros. A' direita e um pouco ácima do numero que representar a parte inteira escreveremos a denominação competente.*

Exemplo 1.º—Enunciado o numero trinta e nove mil quatrocentos e setenta e seis millimetros, escrevel-o em *algarismos* :

$$39^{m},476$$

Exemplo 2.º—Escrever em algarismos o numero de metros — duzentos e cincoenta mil trezentos e quarenta e nove millimetros quadrados :

	decm. q.	centm. q.	milm. q.
0^{m2} ,	2 5	0 3	4 9

Exemplo. 3.º—Cento e trinta metros cubicos—doze milhões quatrocentos e trinta e cinco mil e quatro millimetros cubicos :

	dec. m. c.	cent. m. c.	mil. m. c.
1 3 0^{m3} ,	0 1 2	4 3 5	0 0 4

VANTAGENS DO SYSTEMA METRICO DECIMAL

1.ª As divisões e subdivisões das unidades que constituem o systema metrico estão sugeitas ás leis decimaes que actuam, não só sobre os numeros inteiros, como tambem sobre as unidades que formam os antigos systemas de pesos e medidas, que estão sugeitos a divisões irregulares.

2.ª Os numeros metricos decimaes se representam do mesmo modo que os numeros inteiros, tendo o cuidado de collocar (*como expoente das unidades*) a inicial do nome da especie das unidades metricas decimaes a que pertencer o numero.

3.ª As operações que se praticam sobre os numeros metricos decimaes são effectuadas do mesmo modo que sobre os numeros inteiros e as fracções decimaes, o que não acontece com as que se praticam sobre os numeros dos antigos systemas de pesos e medidas, que exigem operações complicadas, como as que se effectuam sobre os numeros complexos.

4.ª A nomenclatura das unidades metricas decimaes é simples, euphonica e limitada.

5.ª Esse systema tem sua base na natureza, isto é, no globo em que habitamos.

OPERAÇÕES

Addição e subtracção. — *Se os numeros não se referirem todos a mesma unidade cumpre convertel-os* ...*idades da mesma ordem ; procede-se depois* ...*eros decimaes abstractos.*

ADDIÇÃO

$$\begin{array}{r}
0^{m},150 \\
0^{m},432 \\
3^{m},200 \\
4^{m},709 \\
0^{m},664 \\
8^{m},750 \\
\hline
17^{m},905
\end{array}$$

SUBTRACÇÃO

$$\begin{array}{r}
735^{l},429 \\
48^{l},387 \\
\hline
687^{l},042
\end{array}$$

As unidades do resultado são da especie dos numeros dados.

Multiplicação.—Pratica-se a operação como se os numeros fossem abstractos.

Exemplo.—Multiplicar $48^{m},93$ por 25.

Dispondo o calculo, vem:

$$\begin{array}{r}
48,93 \\
25 \\
\hline
244\ 65 \\
978\ 6 \\
\hline
1223,25
\end{array}
\quad \therefore\ 48^{m},93 \times 25 = 1223^{m},25.$$

N'este exemplo applicamos a regra para multiplicar uma fracção decimal por um numero inteiro.

Divisão.—Consideram-se dous casos:

1.º *Se os numeros dados forem heterogeneos opera-se como se fossem abstractos, e o quociente é da especie do dividendo.*

2.º *Se forem homogeneos, ou se referem á mesma unidade ou não; quando se referirem á mesma uni-*

dade consideram-se como abstractos ; quando não, reduzem-se á mesma unidade e pratica-se de modo identico.

Ex.—Dividir $24^m,354$ por 9.

Dispondo o calculo, teremos :

$$\begin{array}{r|l} 24,354 & 9 \\ \cline{2-2} 06\ 3 & 2,706 \\ 054 & \\ 0 & \end{array} \quad \therefore \quad 24^m,354 \div 9 = 2^m,706$$

O quociente é 2 metros, 7 decimetros e 6 millimetros.

PARTE SEGUNDA

Numeros complexos, conversão das medidas

Numero metrologico complexo—*é aquelle que é representado por diversas especies de unidades subordinadas todas a uma unidade principal.*

N'este systema as unidades de medidas não guardam a mesma relação decimal entre si.

Para poder-se avaliar com exactidão as quantidades, ha n'este systema muitas unidades de tamanhos differentes, e de denominações variadas.

As unidades consideradas no systema metrologico complexo, são as seguintes :

COMPRIMENTO, SUPERFICIE, VOLUME, CAPACIDADE, PESO, MOEDA E TEMPO

N'este systema essas unidades receberam as seguintes denominações :

VARA VARA-QUADRADA, VARA-CUBICA, ALQUEIRE E CANADA, MARCO, GRÃO, REAL E DIA

O comprimento da vara é $\frac{1}{9090909}$ do quadrante terrestre.

D'entre as differentes unidades de comprimento, a vara figúra como unidade principal.

Para bem facilitar o estudo damos em seguida a tabella constante das unidades metricas complexas.

MEDIDAS DE COMPRIMENTO

Itinerarias	Legua (20 ao gráu)	3 milhas
	Milha	841 3/4 braças
De comprimento ordinario	Braça	2 varas
	Vara	Unidade (comprimento do pendulo que bate um segundo na lattitude do Rio de Janeiro)=5 palmos.
	Palmo.	8 polegadas
	Polegada	12 linhas
	Covado (medida especial para certas fazendas)	3 palmos, chamados avantajados, porque valem 24 3/4 polegadas.
	Pé (medida empregada nas construcções)	12 polegadas

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Superficies ordinarias	Legua quadrada	9 milhas quadradas
	Milha quadrada	708543 1/16 br. «
	Braça quadrada	4 varas «
	Vara quadrada	25 palmos «
	Palmo quadrado	64 polegadas «
	Polegada quadrada	144 linhas «
das as	Geira	400 braças «

Solidez		Vara cubica	125 palmos cubicos
		Palmo cubico	512 polegadas «
		Polegada cubica	1728 linhas «
Capacidade	Seccos	Moio	15 fangas
		Fanga	4 alqueires
		Alqueire	Unidade, 27 1/4$\left(\frac{1v}{10}\right)^3$ ou 1744 polegadas cubicas = 4 quartas.
		Quarta	4 selamins
	Liquidos	Pipa	15 almudes
		Almude	12 canadas
		Canada	Unidade, 128 pol. cubicas = 4 quartilhos.

MEDIDAS DE PESOS

Pesos ordinarios	Tonelada	13 1/2 quintaes
	Quintal	4 arrobas
	Arroba	32 libras
	Libra	2 marcos
	Marco	Unidade, peso de $11\frac{11}{32}$ poleg.^{3} d'agua ao nivel do mar, a 28° centig. e $31\frac{1}{10}$ polleg. inglezas do barom. = 8 onças.
	Onça	8 oitavas
	Oitava	72 grãos
aes, pedras reciosas	Onça	8 oitavas
	Oitava	3 escropulos
	Escropulo	6 quilates

podemos comprehender a definição de numeros complexos; se tomar-mos 5 *braças*, 2 *varas* e 6 *palmos* figuramos um numero complexo, porque este numero é representado por diversas especies das unidades *braças*, *varas* e *palmos*, subordinadas todas á unidade principal *palmos*.

Numero incomplexo—é aquelle que designa uma só especie de unidade. Ex.: 5 *libras*.

Dous problemas se propõem ácerca dos numeros complexos.

O 1.º tem por fim reduzir um numero complexo á infima especie ou reduzil-o a numero incomplexo.

O 2.º tem por fim reduzir numeros incomplexos a complexos, (quando for possivel).

Regra para o 1.º caso.—*Multiplica-se o numero que indica a mais alta especie de unidade, pela relação existente entre ella e a immediata; juntam-se as existentes d'ahi, e assim se procede até chegar á ultima especie.*

onç.	oit.	esc.	grãos
5	8	3	12

Exemplo.—Converter o numero 5 onç. 8 oit. 3 esc. 12 grãos a numero incomplexo.

Uma onça é igual a *oito oitavas*, por conseguinte 5 *onças* são iguaes a 5×8 ou 40 *oitavas*; addicionando a estas as 8 *oitavas* que o numero tem, virão 48 *oitavas*.

Uma oitava é igual a 3 *escropulos*, conseguintemente 48 *oitavas* são iguaes a 48×3 ou 144 *escropulos*, que com os 3 *escropulos* do numero dado fazem 147 *escropulos*.

Um escropulo é igual a 6 *quilates*: 147 *escropulos* são iguaes a 6×147=882 *quilates*.

Um quilate é igual a 12 *grãos*: 882 *quilates* são iguaes a 12×882=10584 *grãos*, que com os 12 do numero dado fazem 10596 *grãos*.

Logo, o numero complexo dado é igual a 10596 *grãos*.

Regra para o 2.º caso.— *Divi...*
pela relação entre as unidades d'essa especie, e da especie immediata; procede-se com o quociente obtido do mesmo modo até que a divisão não tenha mais lugar; o quociente da ultima divisão e os restantes anteriores representarão o numero complexo pedido.

Ex.—Reduzir o numero incomplexo 397 linhas a numero complexo.

Dispondo o calculo teremos:

$$
\begin{array}{r|l}
397^{l} & 12^{p} \\
\cline{2-2}
037 & \begin{array}{r|l} 33 & 8^{P.} \\ \cline{2-2} 01^{p} & 4^{P.} \end{array} \\
01^{l} &
\end{array}
$$

Logo $\overset{l}{397} = \overset{P}{4} - \overset{p}{1} - \overset{l}{1}.$

Explicação.—Divide-se o numero 397 por 12, porque uma polegada tendo 12 linhas o numero 397 conterá tantas polegadas quantas vezes contiver 12 linhas; tem-se para quociente 33 polegadas e para resto 1 linha.

Divide-se 33 por 8, porque um palmo tendo 8 polegadas o numero 33 conterá tantos palmos quantas vezes contiver 8 polegadas.

E' este o motivo porque o numero 397 linhas é igual a 4 palmos, uma polegada e uma linha.

Outros dous problemas ainda se apresentam na *theoria* dos numeros *metrico-complexos*.

1.º Converter um numero complexo em fracção ordinaria da unidade principal.

2.º Converter uma expressão fraccionaria em um numero complexo equivalente.

Regra para o 1.º caso.—*Reduz-se o numero complexo a infima especie e o resultado exprimirá o numerador; o denominador será representado por uma unidade da mais alta especie reduzida tambem a infima especie.*

alq. quart. sel. ... numero complexo

8 — 3 — 5 para reduzir a fracção ordinaria.

Em virtude do principio que, *qualquer quantidade dividida pela unidade é igual a si mesma*, teremos:

$$\overset{\text{alq.}}{8} - \overset{\text{quart.}}{3} - \overset{\text{sel.}}{5} = \frac{\overset{\text{alq.}}{8} - \overset{\text{quart.}}{3} - \overset{\text{sel.}}{5}}{1} = \frac{\overset{\text{alq.}}{8} - \overset{\text{quart.}}{3} - \overset{\text{sel.}}{5}}{1 - 0 - 0};$$

reduzindo ambos os termos d'esta ultima fracção a numeros imcomplexos, teremos o que se pretende:

$$\overset{\text{alq.}}{8} - \overset{\text{quart.}}{3} - \overset{\text{sel.}}{5} = \frac{\overset{\text{sel.}}{145}}{16}$$

Regra para o 2.º caso.—*Divide-se o numerador pelo denominador, o quociente exprime unidades, da primeira especie; converte-se o resto em unidades da segunda especie, divide-se o resultado pelo denominador, o quociente é d'esta segunda especie; continua-se do mesmo modo até chegar á ultima subdivisão da unidade principal ou até esgotar a divisão.*

Ex.—Converter a fracção $\frac{458}{72}$ lb. em numero complexo.

Esta fracção exprime o quociente de 458 lb. divididas por 72; effectuando a divisão, vem:

$$\frac{\overset{\text{lb}}{458}}{72} = \overset{\text{lb.}}{6} + \frac{26}{72}\text{ lb.}$$

$26 \times 16 = 416$ onças e portanto $\frac{26}{72}$ lb. $= \frac{\overset{\text{onç.}}{416}}{72}$; dividindo $\overset{\text{onç.}}{416}$ por 72, vem : $\frac{\overset{\text{onç.}}{416}}{72} = \overset{\text{onç.}}{5} + \frac{\overset{\text{onç.}}{56}}{72}$.

Se 1 onça é igual a oito oitavas, 56 onças valem $8 \times 56 = 448$ oitavas, e $\frac{\overset{\text{onç.}}{56}}{72} = \frac{\overset{\text{oit.}}{448}}{72}$; dividindo 448 oitavas por 72, vem : $\frac{\overset{\text{oit.}}{448}}{72} = \overset{\text{oit.}}{6} + \frac{16}{72}$ oitavas; uma oitava é igual a 72 grãos, portanto 16 oitavas são iguaes a $72 \times 16 = 1152$ grãos e $\frac{\overset{\text{oit.}}{16}}{72} = \frac{\overset{\text{gr.}}{1152}}{72}$; dividindo 1152 graos por 72, vem : $\frac{\overset{\text{oit.}}{16}}{72} = 16$ grãos.

Do exposto se conclue por substituições successivas que $\frac{\overset{\text{lb.}}{458}}{72} = \overset{\text{lb.}}{6} - \overset{\text{onç.}}{5} - \overset{\text{oit.}}{6} - \overset{\text{grãos}}{16}$.

O conhecimento da theoria dos numeros *metrico-decimaes*, dispensa-nos do estudo das operações dos *numeros complexos*; a multiplicidade de regras especiaes, enfadonhas e de nenhuma applicação na pratica da vida, gracias ao apparecimento do importante systema metrico-francez, e sobre tudo em cumprimento a legislação d'este paiz — mandando adoptar o systema *metrico-decimal*, de nos, uma idéa do que fosse um numero complexo e incomplexo para que mais tarde podessem com facilidade comprehender as conversões das unidades de um systema em unidades do outro.

Conversão das medidas

Comparando as quantidades expressas em varas e em metros, obtem-se a relação

$$10 \textit{ varas} = 11 \textit{ metros}$$

D'esta relação concluem-se as seguintes :

$$1 \text{ vara} = \frac{11^{m}}{10} = 1^{m},1$$

$$1 \text{ metro} = \frac{10^{v}}{11} = 0,^{v}\ 90\ 90\ 90 \ldots\ldots$$

Estas duas ultimas relações servem para converter as medidas lineares e por isso denominam-se *coefficientes de reducção.*

A primeira serve para converter as medidas lineares complexas em decimaes ; a segunda para converter medidas lineares decimaes em complexas.

Coefficientes de reducção são os numeros que exprimem essas relações.

Uma vez conhecido o valor da vara em relação ao metro, torna-se facil calcular o valor de qual- multiplo e submultiplo da vara.

Ora, se 1 vara = $1,^{m}1$, 1 br. sendo igual a 2 varas, temos :

$$1 \text{ br.} = 2^{v} = 1^{m},1 \times 2 = 2^{m},2$$

Um palmo sendo a quinta parte da braça, tem-se:

$$1 \; \textit{palmo} = \frac{1^{v}}{5} = \frac{1^{m},1}{5} = 0^{m},22$$

Conhecido o valor d'um palmo ($0,^{m}22$) tem-se o valor d'uma polegada :

$$1 \text{ pol.} = \frac{1^{\text{pal.}}}{8} = \frac{0,^{m}22}{8} = 0^{m},0275$$

Convertendo a fracção $\left(\frac{10^{v}}{11}\right)$ em numero complexo, vem :

$$\frac{10^{v}}{11} = 1 \; \textit{metro} = 4^{\text{pal.}} + 4^{\text{pol.}},36$$

Por meio d'esta igualdade podemos calcular o valor de qualquer multiplo e sub-multiplo do metro.

Assim :

$$1 \; \textit{decametro} = 45^{\text{p.}} + 3^{\text{p}},6$$

1 *decimetro*

1.° Converter 5 varas, 4 palmos e 3 pollegadas em metros.

Solução.—Conhecido o valor de 1 *vara*, o de 1 *palmo* e o de 1 *pollegada* relativamente ao *metro*, basta multiplicar por 5 o valor de 1 *vara*, por 4 o de 1 *palmo*, e por 3 o de 1 pollegada, e no final sommar os productos.

Assim :

$$\begin{array}{rl}
5^{v} = 1,^{m}1 \times 5 = & 5,^{m}5 \\
4^{p.} = 0,^{m}22 \times 4 = & 0,^{m}88 \\
3p = 0,^{m}0275 \times 3 = & 0,^{m}0825 \\
\hline
5^{v} + 4^{p.} + 3p = & = 6,^{m}4625
\end{array}$$

2.° Dado o numero $6,^{m}4625$, convertel-o em numero complexo.

Solução.—Um metro sendo igual a $\frac{10^{v}}{11}$, o valor de $6,^{m}4625$ será $\frac{10^{v}}{11} \times 6,^{m}4625.$

$$\text{Ora } \left(\frac{10^{v}}{11}\right) 6,^{m}4624 \times = \frac{64,{}^{v}625}{11} = 5^{v} + 875 =$$

$$= 5^{v} \times 4^{p.} \times 0,375 = 5^{v} + 4^{p.} + 3p$$

O numero dos palmos se obtem multiplicando a fracção da vara por 5, e o das pollegadas multiplicando a fracção do palmo por 8.

Se 10 *varas* são iguaes a 11 metros ($10^{v} = 11^{m}$), elevando ambos os membros d'esta igualdade a 2.ª potencia, teremos :

$$(10^{v})^{2} = (11^{m})^{2} \quad \text{ou} \quad 100^{v2} = 121^{m2}$$

D'esta ultima igualdade colligimos as seguintes :

$$1^{v2} = \frac{121^{m2}}{100} = 1,^{m2}21 \;;\; 1^{m2} = \frac{100}{121} v^{2} = 0^{v2},83$$

O primeiro coefficiente serve para converter um numero complexo em decimal, e o segundo para converter um numero decimal em complexo.

Exemplo 1.º—Quantos hectaros e aros tem uma superficie de 450 geiras de extenção ?

Solução.

$$450 \textit{ geiras} = 400 \text{ br.}^{2} \times 450 = 180000 \text{ br.}^{2}$$

Se $\qquad 1 \text{ br}^{2} = 4^{v2} = 1,^{m2}21 \times 4 = 4,^{m2}84$

$$\therefore\ 450 \textit{ geiras} = 4,^{m2}84 \times 180000 = 871200^{m2} \;;$$

attendendo que 1 *hectaro*, $= 10000^{m2}$, e que 1 *areo* $= 100^{m2}$, vem :

$$450 \textit{ geiras} = 87 \textit{ hect.} + 12 \textit{ areos}$$

Exemplo 2.º—Uma superficie tendo 87 *hect.* e 12 *aros*, quantas *gueiras* poderá ter ?

$$87\ \textit{hect.} + 12\ \textit{areos} = 8712\ \textit{areos} = 871200^{m2}$$

$$\text{ora, } 4^{m2},84 = 1\ \text{br.}^2 \quad \text{ou} \quad 484^{m2} = 100\ \text{br}^2$$

conseguintemente $1\ m^2 = \dfrac{100^{br.2}}{484}$, logo $871200^{m2} =$

$= \dfrac{100^{br.2}}{484} \times 871200 = \dfrac{87120000^{br.2}}{484}$; attendendo que

$1\ \text{br.}^2 = \dfrac{1}{400}$ da geira, teremos :

$$180000\ \text{br.}^2 = \frac{180000}{400} \text{ da geira,}$$

$$\text{logo} \quad 87\ \textit{hect.} + 12\ \textit{areos} = \frac{180000}{400} = 450 \text{ geiras.}$$

MEDIDAS DE VOLUMES

Se elevarmos ao cubo ambos os membros da igualdade $(10^{V} = 11^{m})$ teremos : $(10^{V})^3 = (11^{m})^3$ ou $1000^{V3} = 11^{m3} = 1,^{m3}\ 331$, donde se deduzem os coefficientes seguintes :

1.º $$1^{V3} = \frac{1331^{m3}}{1000} = 1,^{m3}\ 331$$

$$1^{m3} = \frac{1000^{V3}}{1331} = 0,^{V3}\ 751.$$

Se 1 *pollegada* = $0,^{m}\,0275$, elevando ambos os membros d'esta igualdade ao cubo, vem :

$$1 \text{ polleg.}^3 = 0,^{m^3}000020796875\ ;$$

$$\text{Se } 1 \textit{ alqueire} = 1744 \text{ polleg.}^3\ ,$$

$$1 \text{ alq.} = 0,^{m^3}000020796875 \times 1744 = 0,^{m^3}\,03626975 =$$
$$= 36,^{\text{litros}}\,26975,$$

ou $\quad 1 \text{ alq.} = 36,^{\text{litros}}\,27$ (*approximadamente*)

$$\text{Se } 1 \textit{ canada} = 128 \text{ polegadas}^3$$

$$1 \textit{ canada} = 0,^{m^3}\,000020796875 \times 128 = 0,^{m^3}\,002662 =$$
$$= 2,^{\text{lit.}}\,662,$$

ou $\quad 1 \textit{ canada} = 2,^{\text{lit.}}\,662.$ (*coefficiente*)

Por meio d'estes coefficientes podemos fazer as conversões de *alqueires* e *canadas* em *litros* ; convém agora saber-mos resolver os problemas inversos a estes.

Coefficientes inversos :

1.º— $\quad 1 \textit{ litro} = \dfrac{1 \text{ alq.}}{36,27} = 0,^{\text{alq.}}\,0275,$

2.º— $\quad 1 \textit{ litro} = \dfrac{1 \text{canada}}{\ldots}$ $\quad$ can.

Comparando o *marco* com os pesos do systema decimal francez, resulta o seguinte :

$$1 \ \textit{marco} = 229\overset{\text{gram.}}{,}\ 525$$

$$1 \ \textit{grammo} = 0\overset{\text{marco}}{,}\ 0043568 = 20\overset{\text{gr.}}{,}\ 076\ ;$$

são estes os coefficientes apropriados para convertermos os pesos do antigo systema em pesos do systema metrico decimal, e vice-versa.

PARTE TERCEIRA

Regras que se apoiam na theoria das proporções e progressões

REGRA DE TRES

Regra de tres—é o methodo de achar o valor de uma quantidade, dependente de uma ou mais proporções.

A unica difficuldade da regra de tres consiste em [sa]ber armar a proporção e esta difficuldade des-[illegible] [illegible] da explicação que segue :

a outra torna-se o mesmo numero de vezes maior.

Duas quantidades variam em razão inversa quando uma dellas tornando-se 2, 3, 4, etc. vezes maior, a outra torna-se 2, 3, 4, etc. vezes menor.

A regra de tres divide-se em *simples* e *composta.*

Regra de tres simples—é a questão na qual figuram sómente 4 quantidades das quaes uma é a incognita.

Regra de tres composta—é a questão que tem por fim achar o valor de uma quantidade, dependente de duas ou mais proporções.

A regra de tres simples divide-se em *directa* e *inversa.*

Regra de tres simples directa—é aquella em que as quantidades variam em razão directa.

Regra de tres simples inversa—é aquella em que as quantidades variam em razão inversa.

Explicação.—Na regra de tres simples directa á medida que augmenta ou diminue um principal, tambem augmenta ou diminue o relativo correspondente; na inversa— á medida que augmenta ou diminue um principal, diminue ou augmenta o relativo correspondente.

Os termos homogeneos conhecidos denominam-se *principaes*; os termos homogeneos em que um é desconhecido chamam-se *relativos.*

REGRA DE TRES SIMPLES DIRECTA

Para resolver qualquer questão de regra de tres directa applica-se a seguinte regra:

Forma-se a primeira razão da proporção com os dous termos conhecidos homogeneos, e a segunda com os seus correspondentes escriptos na mesma ordem.

de uma certa mer-
cadoria custam 36$000, quanto devem custar 19 kilogrammas ?

Solução.—Se 12 kilogrammas custam 36$000, o dobro de 12 deve custar o dobro de 36$000 ; ora, se a medida que augmenta o principal, augmenta o relativo correspondente, é porque o exemplo em questão representa uma regra de tres simples directa ; applicando a regra, vem :

$$\begin{array}{l} \text{Kg.} \\ 12 \text{———} 36\$000 \\ 19 \text{———} x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 12 : 19 :: 36\$000 : x \\ \text{ou } x = \dfrac{19 \times 36\$000}{12} = \end{array} \right.$$

$$= \frac{684000}{12} = 57\$000.$$

Outro exemplo.—Se 35 metros de arame custaram 25$650, quanto custarão 49 metros ?

Dispondo segundo a regra, teremos :

$$\begin{array}{l} 35^{m} \text{———} 25\$650 \\ 49^{m} \text{———} x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 35^{m} : 49 :: 25\$650 : x \\ x = \dfrac{49 \times 25650}{35} = \dfrac{1:256\$850}{35} = \end{array} \right.$$

$$= 35\$910.$$

REGRA DE TRES SIMPLES INVERSA

Para obter-se a proporção correspondente á regra de tres inversa, applica-se seguinte regra :

Forma-se a primeira razão com os dous termos *correspondentes escriptos na ordem inversa.*

Exemplo.—Se 10 homens fizeram uma certa obra em 180 dias—pergunta-se 18 homens nas mesmas circumstancias dos 10 primeiros quantos dias gastarão para fazer a mesma obra?

Solução.—Se 10 homens fizeram uma certa obra em 180 dias, o dobro d'esses homens (20) farão na metade do tempo, pois é claro que quanto maior fôr o numero de homens, tanto menor será o tempo empregado. Ora, se a medida que augmenta o principal diminue o relativo correspondente, é porque a regra de tres é inversa; applicando a regra, teremos:

$$\begin{array}{l} \quad\text{H.} \qquad\qquad \text{d} \\ 10 \text{———} 180 \\ 18 \text{———} x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 10 : 18 :: x : 180 \\ \text{ou } x = \dfrac{10 \times 180}{18} = \dfrac{1800}{18} = 100. \end{array} \right.$$

Outro exemplo.—Se 30 operarios fizeram um tunel em 80 dias, 45 operarios em quantos dias o farão?

Dispondo da regra, vem:

$$\begin{array}{l} \quad\text{Op.} \qquad\qquad \text{d.} \\ 30 \text{———} 80 \\ 45 \text{———} x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 30 : 45 :: x : 80 \\ \text{ou } x = \dfrac{30 \times 80}{45} = \dfrac{2400}{45} = 53\dfrac{15}{45} \end{array} \right.$$

Simplificando a fracção $\dfrac{15}{45}$ tem-se a fracção $\dfrac{1}{3}$;

mas $\frac{2}{3}$ do dia são 8 horas, logo os 45 operarios fazem o tunel em 53 dias e 8 horas.

REGRA DE TRES COMPOSTA

Antigamente a regra de tres composta denominava-se *regra de tres dobrada*.

A regra de tres composta é sempre formada por tres ou mais razões. Ex. :

$$\left.\begin{matrix} 4 : 12 \\ 8 : 16 \end{matrix}\right\} :: 14 : x\ ;$$

esta expressão significa que

$$4 \times 8 : 12 \times 16 :: 14 : x.$$

Se 4 operarios fizeram em 8 dias 14 metros de uma certa obra, quantos metros farão 12 operarios em 16 dias ?

$$\left.\begin{matrix} 4\ \textit{operarios} : & 12\ \textit{operarios} \\ 8\ \textit{dias} : & 16\ \textit{dias} \end{matrix}\right\} :: 14\ \textit{metros} : x.$$

$$4 \times 8 : 12 \times 16 :: 14 : x$$

$$\therefore \quad x = \frac{2688}{32} = 84.$$

A difficuldade na resolução da regra de tres composta consiste em saber decompol-a em regras de

Decompõe-se a regra de tres composta em regras de tres simples do modo seguinte: forma-se a primeira de quaesquer dos principaes da regra de tres composta e tambem dos seus relativos; a segunda é formada com os outros dous principaes, e os relativos um representado pela incognita da primeira regra de tres simples e o outro por uma nova incognita; a terceira é formada de um modo analogo, isto é, de dous dos principaes da regra de tres composta e de dous relativos, um é a incognita da segunda regra de tres simples e o outro é uma nova incognita e assim successivamente até formar tantas regras de tres simples quantos forem os principaes da regra de tres composta.—Isto feito armam-se as proporções correspondentes a cada uma das regras de tres simples, e procura-se transformal-as de modo tal que as incognitas a simplificar occupem os termos de uma das razões da proporção resultante da multiplicação praticada em todas ellas; tira-se o valor da quarta proporcional e tem-se a questão resolvida.

Exemplo.—Se 5 *homens* gastaram 15 dias em fabricar 130 *litros* de vinho, quantos dias gastarão 8 *homens* para fabricar 450 *litros?*

Solução.—Indicando a regra enunciada, vem:

H.	d.	lit.
5 ——	15 ——	130
8 ——	x ——	450;

decompondo esta regra em regras de tres simples, teremos:

1.ª Se 5 *homens* gastaram 15 dias em fazer um certo trabalho, 8 *homens* em quantos dias farão a mesma obra?

H.	d.	
5 ——	15	5 : 8 :: x 15
8 ——	x	

... em x dias, 450 *litros* em quantos dias serão feitos pelo mesmo numero de trabalhadores?

$$\left.\begin{array}{l} \quad\text{lit.} \qquad\qquad \text{d.} \\ 130 \text{------} x \\ 450 \text{------} x' \end{array}\right\} 130 : 450 :: x : x'$$

(regra directa).

Invertendo esta ultima proporção para ao depois multiplical-a ordenadamente com a primeira, teremos:

$$\left.\begin{array}{r} 5 : 8 :: x : 15 \\ 450 : 130 :: x' : x \end{array}\right\} \begin{array}{r} 5 \times 450 : 8 \times 130 :: x \times x' : \\ : 15 \times x.\ ; \end{array}$$

praticando as operações indicadas e simplificando os termos da segunda razão, virá:

$$2250 : 1040 :: x' : 15$$

ou $$x' = \frac{2250 \times 15}{1040} = \frac{33750}{1040} = \frac{3375}{104} = 32^{\text{d}} \frac{47}{104}.$$

Juros simples e compostos

Juro—é o aluguel do dinheiro por um tempo determinado. E' o lucro que tira o dono de uma quantia por emprestal-a á outrem.

Capital—é a quantia emprestada.

Taxa—é o juro de uma quantia determinada, que é 100, em um tempo igualmente determinado, ... *anno*.

Em qualquer questão de juros, ha quatro quantidades a considerar: *capital*, *taxa*, *juros* e *tempo*.

Os juros dividem-se em *juros simples* e *juros compostos*.

Juro simples—é aquelle em que o capital é sempre o mesmo durante todo o tempo do emprestimo.

Juro composto—é aquelle em que o capital é unido aos juros vencidos em um tempo determinado, para d'ahi em diante vencer novos juros.

Regra de juros - é a questão que tem por fim achar o valor de uma das quatro quantidades—*capital*, *taxa*, *juros* e *tempo*—quando forem conhecidas tres.

Juro simples

Pela definição da *regra de juros* conclue-se que quatro questões distinctas tem-se de resolver.

1.ª Determinar o juro—sendo conhecidos o *capital, a taxa e o tempo.*

2.ª Determinar o *capital*—sendo conhecidos a *taxa, o tempo e o juro.*

3.ª Determinar a *taxa*—quando forem conhecidos o *capital, o tempo e o juro.*

4.ª determinar o *tempo*—quando forem conhecidos o *capital, o juro e a taxa.*

Regra da 1.ª questão.—*Para avaliar o juro de um capital em um tempo determinado, multiplica-se o capital pela taxa e pelo tempo, e divide-se o producto por* 100.

Exemplo.—Qual o juro de um capital *c*, em certo tempo *t*, sendo a taxa *i* por cento (°/₀) ao anno?

Solução.—Representando por *j* o juro, vem:

$$j = \frac{c \times i \times t}{\quad} \text{ ou } j = \frac{cit}{\quad}$$

composta toma a seguinte disposição :

$$\begin{array}{l} c \text{———} t \text{———} x \\ 100 \text{———} 1 \text{———} i \,; \end{array}$$

decompondo esta regra de tres composta em regras de tres simples, vem para a primeira :

Se o capital (100) vence de juro *(i)*, o capital *(c)* quanto poderá vencer ?

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{———} i \\ c \text{———} x \end{array}\right\} \therefore 100 : c :: i : x$$

Para a segunda.---Se um certo capital em (1) anno vence de juro *(x)*, quanto deverá ter de juro o mesmo capital no tempo *(t)* ?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{———} x \\ t \text{———} j \end{array}\right\} \therefore 1 : t :: x : j.$$

Multiplicando esta ultima proporção com a primeira ordenadamente, teremos :

$$\begin{array}{c} 100 : c :: i : x \\ 1 \ : t :: x : j \\ \hline 100 \times 1 : c \times t :: i \times x : x \times j \end{array}$$

Praticando as operações indicadas e tirando o valor de *(j)*, vem :

$$100 : ct :: i : j \therefore j = \frac{cit}{100}$$

da 2.ª questão.—*Para determinar o capi-*

tal, multiplica-se o juro por (100), dividindo o resultado pelo producto da taxa pelo tempo.

Exemplo.---Qual o capital que emprestado segundo a taxa (i), produzio no tempo (t) um juro denominado (j) ?

Solução.----Uma vez conhecida a formula que traduz o valor do juro $\left(j = \frac{cit}{100}\right)$ e applicando a propriedade do dividendo, vem : $cit = 100 \times j$; tirando-se o valor de (c) vem outra formula que resolve a questão : $c = \frac{100\,j}{it}$.

Regra da 3.ª questão.---*Para determinar a taxa ---multiplica-se o juro por* (100), *e divide-se o resultado pelo producto do capital pelo tempo.*

Exemplo.---Qual a taxa em virtude da qual o capital (c) foi emprestado no tempo (t) e produzio um juro (j) ?

Solução.---Tomando para ponto de partida a formula do juro e applicando-lhe a propriedade do dividendo, vem : $100\,j = cit$; tirando o valor de (i), teremos :

$$i = \frac{100\,j}{ct}.$$

Regra da 4.ª questão---*Para determinar o tempo ---multiplica-se o juro por* (100), *e divide-se o resultado pelo producto do capital pela taxa.*

Exemplo—Qual o tempo durante o qual emprestou-se o capital (c) para produzir o juro (j) segundo a taxa (i) ?

Solução.—Tomando-se a formula já conhecida mos : $t = \frac{100 \times j}{c \times i} = \frac{100\,j}{ci}$.

Uma vez conhecidas estas quatro formulas torna-se facil resolver as questões seguintes :

1.ª *Qual o juro de* 150$000 *em* 5 *annos, segundo a taxa de* 4 °/o *ao anno ?*

2.ª *Qual o capital que emprestado á taxa de* 3 °/o *ao anno produzio em* 2 *annos* 24$000 ?

3.ª *Qual a taxa segundo a qual* 53$000 *foi emprestado durante dous annos para produzir* 5$300 ?

4.ª *Qual o tempo durante o qual emprestou-se* 425$300 *para produzir de juro* 68$048, *segundo a taxa de* 2 °/o *ao anno ?*

Juro composto

Muitas vezes o emprestimo do capital é feito com a condição do capitalista, no fim de cada anno, deixar ficar na mão do devedor o juro vencido, tornando-se por esse meio augmentado o capital primitivo, de modo que esse novo capital produza novo juro e assim successivamente.

Um capital corre juros compostos quando os juros que vence em cada unidade de tempo, accrescentam-se a esse capital para com elle vencerem juros na seguinte unidade de tempo.

Em qualquer regra de juros compostos consideram-se os elementos seguintes :

1.º *Capital primitivo*, isto é, a quantia que o capitalista emprestou ao devedor.

...*al accumulado*, quantia que o capitalista ...ando terminada a divida.

ou quanto 100 *réis* produzio em cada anno.

4.º *Tempo*, o que vai entre o dia do emprestimo e o do pagamento.

Semelhantemente na regra de juros compostos como na de juros simples consideramos quatro questões importantes :

1.ª Determinar o *capital accumulado*, proveniente de um *capital primitivo* emprestado segundo uma *taxa* determinada, no fim de um tempo tambem determinado.

2.ª Determinar o *capital primitivo*, sendo dado o capital accumulado durante um certo numero de annos com uma taxa dada.

3.ª Determinar qual a *taxa* precisa para que um capital dado, durante um certo tempo, converta-se em uma quantia dada.

4.ª Determinar o *tempo* para que um capital se converta com uma taxa dada em uma certa quantia.

Regra da 1.ª questão.—*Para determinar o capital accumulado---multiplica-se o capital primitivo por* (100) *mais a taxa dividido por* (100) *elevado a potencia do gráo marcado pelo tempo.*

Exemplo.---Qual é o capital accumulado (C) produzido no fim de (t) annos por um capital primitivo (c) posto a juros compostos, sendo a taxa i por % ao anno ?

Solução.—Sendo (i) o juro de (100) em 1 anno, o juro de 1 é $\left(\frac{i}{100}\right)$ que representaremos por r, e o juro de c é cr.

O capital c' no fim do primeiro anno será igual ao capital c, mais o seu juro cr, ou mente no fim do segundo anno o capital vem a ser

$$c'' = c' + c'r = c'(1 + r) = c(1 + r)(1 + r) = \\ = c(1 + r).^2$$

Os juros de c'' em um anno são $c''r$, portanto o capital no fim do terceiro anno é

$$c''' = c'' + c''r = c''(1 + r) = c(1 + r)^2(1 + r) = \\ = c(1 + r)^3$$

Os juros de c''' em um anno são $c'''r$, portanto o capital no fim do quarto anno é

$$c'''' = c''' + c'''r = c'''(1 + r) = c(1 + r)^3(1 + r) = \\ = c(1 + r)^4;$$

e assim successivamente.

Em geral no fim de (t) annos, teremos:

$$C = c(1 + r).^t$$

Esta formula de capital accumulado não differe d'esta outra

$$C = c\left(\frac{100 + i}{100}\right)^t, \text{ porque}$$

$$\left(\frac{100 + i}{100}\right) = \left(1 + \frac{i}{100}\right) = 1 + r.$$

O calculo directo d'estas quantidades sendo muito enfadonho pela sua longanimidade, e muitas [vezes im]possivel, recorremos ao emprego dos logaaccumulado, teremos :

$$\log. C = \log. c + t \times \log. (1 + r).$$

Na formula do capital accumulado notam-se 4 quantidades *C*, *c*, *t*, *r*, das quaes sendo conhecidas tres é facil determinar a quarta.

Dahi quatro questões :

1.ª Determinação de (*C*), *questão já resolvida.*

2.ª Determinação de (*c*), ou do valor actual d'um capital (*C*) pagavel no fim de (*t*) annos :

$$c = \frac{C}{(1 + r)^t}, \text{ ou } \log. c = \log. C - t \times \log. (1 + r).$$

3.ª Determinação de (*t*), ou do tempo em que o capital (*c*) posto a juros compostos valerá (*C*) :

$$t = \frac{\log. C - \log. c}{\log. (1 + r)}$$

4.ª Determinação de (*r*), isto é, da taxa a que se deve emprestar um capital (*c*) para que no fim de (*t*) annos produza (*C*) :

$$\log. (1 + r) = \frac{\log. C - \log. c}{t}.$$

Estas tres ultimas formulas assim obtidas importam as soluções da 2.ª, 3.ª e 4.ª questões.

Exemplo.—*Qual o capital produzido no fim de 4 annos pelo emprego de 900$000 a juros compostos, sendo a taxa 5 °/ₒ ao anno ?*

Solução.—Tomando para ponto de partida a formula generica que traduz o valor do capital accumulado e n'ella substituindo em vez de *C*, *c*, *t* e *r* os seus valores e applicando os logarithmos, teremos :

$$c = 900\$000\ ;\ t = 4 \text{ annos}\ ;\ r = \frac{5}{100}$$

log. C = log. 900$000 + 4 × log. 1,05, ou effectuando :

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 900000 = & = 5{,}9542420 \\ 4 \times \text{log. } 1{,}05 = 4 \times 0{,}0211893 & = 0{,}0847572 \\ \hline \text{log. C} = & = 6{,}0389992 \end{array}$$

Entrando nas taboas com este logarithmo, e procurando o numero correspondente, teremos :

$$C = 1 : 093\$950.$$

Regra de Companhia

Regra de companhia—é a questão que tem por fim dividir os lucros ou as perdas de uma sociedade ou companhia pelos seus associados.

Em uma regra de companhia consideram-se os elementos seguintes : 1.º *entradas de cada um dos associados* ; 2.º *tempo correspondente a cada uma dessas entradas* ; 3.º *capital resultante da associação.* ...mittem-se geralmente na pratica commercial ...cipios que servem de base á divi-iguaes, os lucros ou perdas são proporcionaes aos tempos.

2.º *Os tempos sendo iguaes e as entradas desiguaes, os lucros ou perdas são proporcionaes ás entradas.*

3.º *Os tempos e as entradas sendo desiguaes, os lucros ou perdas são proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos.*

A regra de companhia divide-se em simples e composta.

Regra de companhia simples — é aquella em que os tempos sendo iguaes, as entradas são differentes, ou sendo as entradas iguaes, os tempos são differentes.

Regra de companhia composta — é aquella em que as entradas e os tempos são differentes.

Regra de companhia simples

1.ª Questão. — *Tempos iguaes e entradas differentes.*

Exemplo. — *Tres negociantes associaram-se para comprar certa porção de fazenda, entrando o 1.º com o capital c, o 2.º com o capital c' e o 3.º com o capital c''; no fim de um tempo (t) estas fazendas foram vendidas por um capital (C): calcular o quanto toca a cada negociante.*

Solução. — Chamando s, s', s'' as partes em que o capital (C) se dividio, com o fim de ter-se os lucros ou perdas proporcionaes ás entradas de cada socio, teremos :

proporcionaes ás entradas, teremos a seguinte serie de razões iguaes : $c : s :: c' : s' :: c'' : s''$; attendendo que em uma serie de razões iguaes *a somma dos antecedentes está para a dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente*, e applicando separadamente este principio a cada uma das razões, virá :

$$c + c' + c'' : s + s' + s'' :: c : s$$

$$c + c' + c'' : s + s' + s'' :: c' : s'$$

$$c + c' + c'' : s + s' + s'' :: c'' : s'';$$

attendendo que $(C = s + s' + s'')$, vem :

$$c + c' + c'' : C :: c : s$$

$$c + c' + c'' : C :: c' : s'$$

$$c + c' + c'' : C :: c'' : s'';$$

tirando os valores de s, s' e s'', teremos :

$$s = \frac{C \times c}{c + c' + c''} \Big\} \text{1.º } \textit{negociante.}$$

$$\frac{C \times c'}{\quad} \Big\} \text{2.º } \textit{negociante.}$$

$c + c' + c''$

Traduzindo os valores de s, s' e s'', conclue-se que o lucro ou perda que toca a cada negociante ou socio—*é igual ao capital resultante da associação multiplicado pela sua entrada e dividido o resultado pela somma de todas as entradas*.

Se dermos a c, c', c'', valores numericos, isto é, sendo $c = 1:200\$000$, $c' = 3:600\$000$, $c'' = 2:400\$000$ e suppuzermos $t = 4$ *annos*, e que as fazendas foram vendidas por 18:000$000, teremos :

$$s = \frac{18:000\$000 \times 1:200\$000}{7:200\$000} = 3:000\$000$$

$$s' = \frac{18:000\$000 \times 3:600\$000}{7:200\$000} = 9:000\$000$$

$$s'' = \frac{18:000\$000 \times 2:400\$000}{7:200\$000} = 6:000\$000$$

2.ª Questão.—*Entradas iguaes e tempos differentes*.

Exemplo.—Tres negociantes formaram um sociedade, entrando cada um com igual capital em tempos differentes ; supponhamos que o capital do primeiro demora-se *(n)* annos n'essa sociedade, o do segundo *(n')* e o do terceiro *(n'')* ... no fim do

...ciedade—quer-se saber quanto tocará a cada um, sendo (*C*) o capital resultante d'esta sociedade.

Solução.—Esta questão reduz-se a achar as partes em que se deve dividir o capital (*C*), para que os lucros ou perdas correspondentes a cada socio sejam proporcionaes aos tempos.

Supponhamos que x, x' e x'', sejam as partes em que se dividio o capital (*C*), isto é, $C = x + x' + x''$; applicando o principio que—*as entradas* sendo iguaes e os tempos não, os lucros ou perdas são proporcionaes aos tempos, vem: $n : x :: n' : x' :: n'' : x''$ attendendo que em uma serie de razões iguaes—*a somma dos antecedentes está para a dos consequentes como qualquer antecedente para o seu consequente, teremos :*

$$n + n' + n'' : x + x' + x'' :: n : x$$

$$n + n' + n'' : x + x' + x'' :: n' : x'$$

$$n + n' + n'' : x + x' + x' :: n'' : x'' ;$$

sendo $(C = x + x' + x')$ e substituido nestas proporções em vez de $(x + x' + x'')$ o seu valor vem :

$$n + n' + n'' : C :: n : x$$

$$n + n' + n'' : C :: n' : x'$$

$$n + n' + n'' : C :: n'' : x''$$

$$x = \frac{C \times n}{n + n' + n''} \quad (1.^{o}\ \textit{negociante})$$

$$x' = \frac{\qquad}{n + n' + n'} \text{ (2.º \textit{negociante})}$$

$$x'' = \frac{C \times n''}{n + n' + n'} \text{ (3.º \textit{negociante})}$$

Traduzindo os valores de x, x' e x'', conclue-se que o lucro ou perda que toca a cada socio—*é igual ao capital resultante da sociedade multiplicado pelo tempo correspondente e dividido o resultado pela somma de todos os tempos.*

Regra de companhia composta

3.ª Questão.—*Entradas e tempos desiguaes.*

Exemplo.—Tres negociantes associaram-se n'uma certa empreza—entrando o primeiro com o capital (a) no tempo (n), o segundo com o capital (a') no tempo (n') e o terceiro com o capital (a'') no tempo (n''), no final da sociedade obtiveram o capital (C)—quer-se saber quanto toca a cada um.

Solução.—Chamando x, x', x'' as partes em que se dividio o capital (C) e attendendo que as entradas e os tempos são desiguaes—os lucros ou perdas são proporcionaes aos productos das entradas pelos tempos, isto é :

$$a \times n : x :: a' \times n' : x' :: a'' \times n'' : x''$$

$$\therefore\ an + a'n' + a''n'' : x + x' + x'' :: an : x$$

$$an + a'n' + a''n'' : x + x' + x'' :: a'n' : x'$$

teremos :

$$an + a'n' + a''n'' : C :: an : x$$

$$an + a'n' + a''n'' : C :: a'n' : x'$$

$$an + a'n' + a''n'' : C :: a''n'' : x''$$

Tirando os valores de x, x', x'', virá :

$$x = \frac{C \times an}{an + a'n' + a''n''} \quad \text{(1.º \textit{negociante})}$$

$$x' = \frac{C \times a'n'}{an + a'n' + a''n''} \quad \text{(2.º \textit{negociante})}$$

$$x'' = \frac{C \times a''n''}{an + a'n' + a''n''} \quad \text{(3.º \textit{negociante})}$$

Traduzindo os valores de x, x' e x'', concluiremos que o lucro ou perda correspondente a cada socio—*é igual ao capital multiplicado pelo producto da sua entrada pelo tempo e dividido o resultado pela somma dos productos das entradas pelos tempos correspondentes.*

FIM

LIVRO I

PARTE PRIMEIRA

PARTE SEGUNDA

PARTE TERCEIRA

LIVRO II

PARTE PRIMEIRA

PARTE SEGUNDA

PARTE TERCEIRA

LIVRO III

PARTE PRIMEIRA

LIVRO IV

PARTE PRIMEIRA

PARTE SEGUNDA

PARTE TERCEIRA