Sabrina Moraes Vigano

Teorema de Hahn-Banach: Forma Analítica e Formas Geométricas

Florianópolis
2017

Sabrina de Moraes Vigano

Teorema de Hahn-Banach: Forma Analítica e Formas Geométricas

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito necessário para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática

Orientador: Dr. Matheus Cheque Bortolan

Florianópolis, Novembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

SABRINA DE MORAES VIGANO

Esta Monografia foi julgada adequada para a obtenção do título de Licenciatura em Matemática, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Matheus Cheque Bortolan.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Cheque Bortolan
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof.a Dra. Melissa Weber Mendonça
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Cleverson R. da Luz

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis, 17 de novembro de 2017

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Eduardo e Samira.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, Eduardo e Samira pelo apoio que me deram durante toda minha vida, vocês são a minha maior fonte de inspiração e eu amo vocês mais que tudo nesse mundo.

As minhas avós Maria e Neusira, meu tio e padrinho Fabio, minha tia e madrinha Patricia e minha tia Guadalupe por sempre me ajudarem quando preciso.

Agradeço, também aos demais familiares, principalmente a tia Nádia, tia Patricia, Tio Vado e a minha prima Juliana.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Matheus Bortolan, pelo aprendizado nas aulas e durante o processo do TCC, pela dedicação, paciência, apoio didático e psicológico, por estar sempre disponível e presente.

Às professoras Silvia de Holanda por ser extremamente atenciosa e carinhosa, Virgínia Silva Rodrigues por ter me dado uma "segunda chance", Melissa Weber Mendonça por reconhecer a especificidade de cada aluno e ao professor Cleverson Roberto da Luz por aceitar fazer parte da banca.

Meu carinho especial ao professor José Luiz Rosas Pinho por tudo que aprendi no PET e nas aulas, pelas risadas, piadas e por ser uma pessoa maravilhosa que sempre se dispõe a um cafezinho para dar conselhos e contar suas histórias.

Agradeço as minhas amigas que estiveram do meu lado, principalmente a Rhamana Manhã, por estar comigo durante a maior parte da minha vida, a Fernanda Efe por sempre estar disposta a ouvir meus dramas, as minhas companheiras de vida, Brenda Souza e Ana Paula da Silva, a Daniella Losso e Aline Becher pelas festas, as minhas meninas, Thais Boeck e Gabriela Jacoby, por não me deixarem ser louca sozinha, a Isabele Sartor, por sempre ter as palavras certas para dizer.

Aos meus amigos Leonardo Biz pelos shows e sextas-feiras, ao meu canceriano preferido, Eduardo Pandini, aos meus companheiros de curso que fizeram praticamente todas as matérias comigo desde 2014, Ben-Hur Eidt e Carlos Eduardo Castro, aos meus queridos Jean Gengnagel, Mateus Oliveira, Gabriel Schafaschek e Paulo Palla Ferrato pelas risadas e trucos nos tempos de PET, aos meus calouros André Borges e Carlos Eduardo Caldeira por estarem sempre por perto.

Por fim, agradeço ao Douglas Manoel Guimarães por ter me tornado uma pessoa melhor e a sua família pelo carinho e acolhimento.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos um dos principais teoremas vistos nos cursos básicos de Análise Funcional: o Teorema de Hahn-Banach. Veremos sua forma analítica e suas formas geométricas, com pequenas aplicações.

Palavras-chave: Análise Funcional, Lema de Zorn, Teorema de Hahn-Banach.

Abstract

In this work, we will study one of the main theorems seen in the basic courses of Functional Analysis: the Hahn-Banach Theorem. We shall see its analytical form as well as its geometrical forms, with some small applications.

Keywords: Functional Analysis, Zorn's Lemma, Hahn-Banach Theorem.

Sumário

1 Introdução

Sabemos que a área de Álgebra Linear está presente em muitas aplicações do nosso cotidiano, como por exemplo o Google, que utiliza o algoritmo denominado *PageRank*, utilizando autovetores para classificar as páginas que aparecem como resposta de uma determinada busca. O leitor que quiser mais detalhes do como o algoritmo funciona, e sua fundamentação teórica, veja [3].

O estudo de Álgebra Linear está presente em praticamente todos os cursos de Matemática do mundo, sendo eles bacharelados ou licenciaturas, dada a sua tremenda importância para a formação básica de um matemático. Era de se esperar então, que um curso que generalize a Álgebra Linear, como a Análise Funcional, recebesse a mesma atenção e fosse apresentado como disciplina obrigatória para todos os futuros matemáticos. Infelizmente isto não ocorre, e assim, uma das intenções desse trabalho é apresentar de modo claro e detalhado alguns dos principais resultados desta área.

Deste modo, o objetivo geral deste trabalho é apresentar os principais teoremas de Análise Funcional com suas aplicações, visando a compreensão significativa desse conteúdo para os alunos da graduação. Para tanto, apresentaremos os principais conceitos de Análise Funcional, vamos expor as definições e demonstrações relacionadas com o Teorema de Hahn-Banach e escreveremos breves análises entre as demonstrações para auxiliar o leitor/aluno.

A Análise Funcional consiste basicamente do estudo de espaços normados de dimensão infinita (daí sua relação tão visível com a Álgebra Linear) e, mais especificamente, lida com espaços de funções. Muitos acreditam que teve início com o matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier no século XVII, quando o mesmo deu início ao estudo da hoje conhecida *Transformada de Fourier*. A Análise Funcional tem papel fundamental no estudo de equações diferenciais e de evolução, sendo indispensável seu profundo conhecimento para o entendimento do comportamento de soluções de tais equações.

Um dos principais, ou talvez *o* principal, teorema em Análise Funcional é o Teorema de Hahn-Banach, que é devido aos matemáticos Hans Hahn, da Áustria, e Stefan Banach, da Polônia, que provaram o resultado de maneira independente no começo dos anos vinte. Tal teorema nos permite estender *funcionais lineares* em espaços normados de dimensão infinita (sua demonstração para o caso de dimensão finita é um exercício simples de Álgebra Linear), e tem consequências importantes para o desenvolvimento da matemática. Uma destas permitiu a criação de toda a teoria do cálculo operacional de operadores lineares em espaços de dimensão finita, que é a responsável direta pela *Teoria de Semigrupos*, que vêm sendo estudada há mais de sete décadas e possibilitou o estudo e entendimento de inúmeras equações diferenciais. Outra versão desse teorema, conhecida como *Versão Geométrica do Teorema de Hahn-Banach* ou também como *Teorema de Mazur*, tem muitos usos na área de Geometria Convexa.

Nesse trabalho, desejamos enfatizar a importância do estudo de Análise Funcional para todos os estudantes de matemática, que necessitam ter uma formação completa nessa área, uma vez que a mesma apresenta resultados complexos, mas igualmente importantes e substanciais.

Sendo assim, cabe-nos apresentar os resultados de maneira clara, objetiva e detalhada, mas ao mesmo tempo, de modo didaticamente interessante, para que os leitores não se sintam desencorajados ao tentar compreendê-los na sua total complexidade.

Por fim, decidimos dividir o trabalho da seguinte forma: Contexto histórico, envolvendo os matemáticos Hans Hahn e Stefan Banach. No capítulo das preliminares, que contém definições, teoremas e lemas básicos de Álgebra Linear em dimensão infinita. Na sequência, apresentaremos conceitos básicos para o entendimento do Teorema de Hahn-Banach, como o de prolongamentos de funcionais lineares e o Lema de Zorn. Por fim, descreveremos o Teorema de Hahn-Banach na sua forma analítica e formas geométricas, terminaremos o trabalho com as principais conclusões obtidas.

Para este trabalho, seguimos o roteiro descrito em [4] para apresentar os Teoremas de Hahn-Banach. Para mais detalhes, recomendamos a leitura de [2] e também a consulta de [1, 5–7], e para conceitos necessários de Análise Matemática, recomendamos [8].

2 Contexto histórico: Hanh e Banach

Para compreender a importância do reconhecimento do Teorema de Hahn-Banach é preciso compreender como ele foi constituído historicamente, o porquê ele foi estudado, como era descrito e o seu enquadramento inicial. Para tanto, inicialmente será necessária a apresentação dos dois matemáticos que dão nome a esse teorema. Os dados trazidos aqui neste contexto histórico e na descrição teórica do Teorema de Hahn-Banach são provenientes de obras teóricas analisadas durante o processo de escrita do TCC e referenciadas nas bibliografias.

O Teorema de Hahn-Banach recebeu este nome devido à junção de conhecimentos de dois matemáticos: o austríaco Hans Hahn e o polonês Stefan Banach. Embora não tivessem feito nenhum estudo juntos, e não há histórico de que ao menos se conhecessem, seus conhecimentos avançados para a época e seus estudos na área da Matemática fizeram com que fossem reconhecidos dentro de um mesmo teorema.

Hans Hahn foi um matemático austríaco nascido em 1879 (e falecido em 1934). Hans estudou inicialmente em Estrasburgo, Munique e Göttingen e doutorou-se na Universidade de Viena em 1902 com a tese *Zur Theorie der Zweiten "Variação" Einfacher Integrale*. Interessado também por filosofia, ele integrou o Círculo de Viena. O Círculo de Viena era formado por um grupo de filósofos e surgiu por uma necessidade de fundamentar a ciência a partir das concepções da filosofia da ciência no século XIX. Até então, a filosofia era vinculada à Teoria do Conhecimento, mas, a partir de Hegel, este vínculo se desfez e começa-se a caracterizá-la como ciência. Esse Círculo era composto por cientistas de diversas áreas como física, economia, entre outras, em que objetivavam resolver problemas de fundamento da ciência e refletiam acerca da importância da lógica, da linguagem, da matemática e da física teórica na construção de teorias científicas, vinculados a um positivismo lógico. As pesquisas desenvolvidas pelos estudiosos do Círculo eram divulgadas na Revista Erkenntnis, fundada em 1930.

Depois de todos os estudos e argumentações feitas no Círculo de Viena, há uma nova concepção de ciência no mundo, sendo também um marco histórico para a filosofia do século XX, em que um dos teóricos que se encontra citados nos documentos históricos é Hans Hahn.

Em sua vida acadêmica lecionou em algumas universidades de renome da Áustria e Romênia, e desenvolveu estudos com outros colegas de docência, até sua ida para a Primeira Guerra Mundial. Após seu retorno da guerra, voltou a lecionar e recebeu o título de professor extraordinário, tendo como alunos matemáticos ilustres como: Karl Menger em 1924, Witold Hurewicz em 1926, Kurt Gödel em 1929 e Karl Popper em 1929.

Dentre os estudos considerados importantes para o conhecimento matemático, Hans contribuiu para o clássico livro Cálculo das Variações, sobre os espaços abstratos de Fréchet, e reconheceu a função essencial das hipóteses nas ciências.

As obras publicadas de autoria de Hans versavam geralmente em torno da matemática e da filosofia, sendo de sua edição o livro Paradoxos sobre o Infinito; fazendo também muitas contribuições para a análise funcional, topologia, teoria da ordem e teoria dos conjuntos. Suas principais obras foram: Entidades Superfluentes e Lógica, Matemática e Conhecimento da Natureza. Todavia, seu reconhecimento mundial deu-se pelo Teorema de Hahn-Banach.

O outro matemático que carrega o nome do teorema é Stefan Banach. Banach nasceu na Cracóvia em 1892 (e faleceu em 1945). Frequentou o ensino básico na Cracóvia, saindo de lá em 1902 para ingressar na faculdade de engenharia na Universidade Técnica da Lviv – Ucrânia, graduando-se em 1914. Em 1916 ele conheceu Hugo Steinhaus, e juntos fundaram a Sociedade Matemática. Em 1918 Banach foi citado pela primeira vez no boletim da Academia de Cracóvia juntamente com seu parceiro de estudos Steinhaus, ambos produziram trabalhos de importância matemática.

Muitos dos feitos de Banach foram devidos a sua parceria com Steinhaus, principalmente depois da fundação da Sociedade Matemática na Cracóvia. Em meados de 1920 a Sociedade Matemática de Cracóvia passou a ser chamada de Sociedade Matemática da Polônia, e Banach passou a ser assistente de Antoni Tomnicki na Universidade Técnica de Lviv, ministrando palestras de matemática, em decorrência de seus estudos conseguiu doutorar-se com a tese sobre Teoria da Medida, embora não fosse matemático, lhe foi aberta uma exceção permitindo que ele apresentasse sobre operações de conjuntos abstratos e sua aplicação às equações integrais. Durante a coleta de dados para esse processo histórico, alguns materiais citam que essa tese marca o nascimento da análise funcional. Logo após seu doutoramento ele passou a integrar a cátedra como professor titular.

Embora sendo um professor universitário conceituado no meio matemático, Banach escreveu livros didáticos de álgebra, geometria e aritmética para o ensino médio, contribuindo assim, para a divulgação e a propagação dos saberes da matemática. Em 1929 fundou o jornal Studia Mathematica ainda junto com parceiro de estudos Steinhaus, ambos tornaram-se os editores iniciais do jornal, que tinha como foco o estudo da análise funcional e suas relações. Um dos feitos como editor foi uma nova série de Monografias de Matemática, sendo que o primeiro volume da série *linéaires Théorie des opérations* foi escrito por Banach em 1932.

Desse modo, Banach iniciava os preceitos da análise funcional moderna, fazendo contribuições à teoria dos espaços vetoriais topológicos; contribuindo, também, para teoria de medida, a integração, a teoria dos conjuntos e de séries ortogonais. Em sua dissertação, ele defendeu axiomaticamente o que hoje é conhecido como espaço de Banach, sendo esse um espaço real ou vetorial normado complexo que é completo como um espaço métrico.

Devido a seus feitos na área logo lhe foi dada a presidência da Sociedade Matemática da Polônia. Devido a Segunda Guerra Mundial alguns entraves na vida de Banach foram sucessivamente ocorrendo, mas ele possuía alguns contatos importantes que contemporizavam as situações inesperadas. Mesmo com vários planos para a área da matemática, sua carreira foi interrompida devido a um câncer no pulmão.

Banach tem sua importância matemática centrada no que foi desenvolvido por ele na teoria sistemática da análise funcional, em que antes havia apenas resultados isolados. Banach provou uma série de resultados fundamentais em espaços lineares normados, sendo que a ele se deve a fundação da Escola Polonesa de Análise Funcional.

A partir desse contexto histórico da vida e dos estudos dos dois matemáticos que deram o nome para o Teorema de Hahn-Banach foi possível verificar o que eles estudavam e como suas pesquisas conectaram-se de modo a formar tal teorema.

O Teorema de Hahn-Banach

A conexão dos conhecimentos matemáticos de Hans Hahn e Stefan Banach originou o Teorema de Hahn-Banach. Embora não estudassem e nem pesquisassem juntos, ambos os matemáticos desenvolveram conceitos que iniciaram e conduziram o entendimento da análise funcional. Sendo assim, esse teorema é um dos principais constituidores da análise funcional (teorema de extensão), ocupando-se da prorrogação dos funcionais lineares contínuos ou de transformações lineares.

A primeira versão do Teorema que atualmente é chamado de Hahn-Banach, surgiu nos trabalhos de Frigyes Riesz em 1911 e de Eduard Helly em 1922, onde obtiveram os primeiros resultados de extensões funcionais em espaços de funções; todavia só começou a ganhar a formatação hoje propagada, devido aos estudos de Hans Hahn em 1927 com resultados mais reais e, de forma mais geral em 1929 com Stefan Banach (o espaço normalizado é real em Hahn - 1927 e Banach - 1929). De acordo com estudos matemáticos, Hahn utilizou ordinais para demonstrar o teorema, enquanto Banach usou a boa-ordenação e a indução transfinita como ferramenta para a demonstração. O teorema em sua versão complexa configurou-se em 1938 e foi publicada por Bohnenblust e Sobczyk (caso complexo - Bohnenblust e Sobczyk – 1938).

Assim sendo, compreender o Teorema de Hahn-Banach é entrar em uma importante área da matemática que é a análise funcional, é perceber como ele se constituiu como ferramenta para os estudos baseados em transformações. A análise funcional obteve seu marco no século XX em decorrência de problemas envolvendo equações diferenciais e integrais que requeriam o uso de espaços vetoriais de dimensão infinita. O seu desenvolvimento deve-se aos trabalhos de Banach (1892 - 1945), e de outros pesquisadores.

É interessante ressaltar que a análise funcional se propõe a estudar os espaços de funções, assim, a palavra funcional é devido ao cálculo de variações, que implicam uma função em que o argumento é uma função. Dentre os teoremas de constituição da análise funcional estão: Teorema de Hahn-Banach, Teorema da Aplicação Aberta, Teorema do Ponto Fixo de Banach, Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema de Banach-Alaoglu. Em análise funcional o teorema de extensão de Hahn-Banach é uma ferramenta que garante a existência de funcionais lineares em um espaço de Banach. O espaço de Banach é um espaço vetorial normado e completo, é normado se ele possui uma norma, uma norma é uma função, por exemplo: matrizes, polinômios são todos espaços de Banach.

O Teorema de Hahn-Banach pode também ser formulado como teorema de separação e teorema de extensão. Sendo que em análise funcional pode-se aplicá-lo nas seguintes áreas: dualidade, Teorema Integral de Cauchy e Critério de Helly. Em outras aplicações para além da análise funcional o teorema pode ser aplicável em: prova da existência de funções de Green, solução de Banach, aplicação de programações convexas, aplicações de teoria de jogos, formulações da termodinâmica, entre outras tantas áreas que ainda nem foram investigadas.

Representado a partir de resultados da análise funcional, o Teorema de Hahn-Banach pode ter duas formas: analítica ou geométrica. A forma analítica relaciona-se a estender um funcional linear contínuo definido em um subspaço vetorial do espaço considerado e preservar a norma desse funcional. No que diz respeito à forma geométrica o resultado provém da existência de um hiperplano fechado que separa certos tipos de conjuntos convexos.

O cerne do teorema tem sua versão para espaços normados, em que funcionais lineares contínuos não nulos são definidos em um subespaço de um espaço normado, podendo ser compreendidos a todo o espaço, preservando linearidade, a continuidade e até mesmo o valor da norma.

Foi por meio do resultado do Teorema de Hahn-Banach que se obtiveram diversas aplicações para Análise Funcional, e consequentemente a sua importância provém dos resultados de sua aplicação nas definições.

3 Preliminares

Neste capítulo veremos definições e teoremas primordiais para o entendimento do Teorema de Hahn-Banach. Para isto, começaremos do básico, apenas relembrando algumas das principais definições de Álgebra Linear.

Lembremos ao leitor que um conjunto E não-vazio, munido de duas operações binárias, *soma* $+\colon E \times E \to E$ e *multiplicação por escalar* $\cdot\colon \mathbb{R} \times E \to E$, é dito um **espaço vetorial sobre** $\mathbb{R}$ se valem as seguintes propriedades:

A1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todos $u, v, w \in E$;

A2) $u + v = v + u$ para todos $u, v \in E$;

A3) existe um elemento $0 \in E$ tal que $0 + u = u$ para todo $u \in E$;

A4) dado $u \in E$ existe um elemento $v \in E$ tal que $u + v = 0$;

M1) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$ para todo $u \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

M2) $1 \cdot u = u$ para todo $u \in E$;

D1) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ para todos $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$;

D2) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ para todo $u \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Um número real aqui será sempre chamado de *escalar* e os elementos de E serão chamados de *vetores*. Notemos que esta definição pode ser (e é) usada num contexto mais geral, no qual ao invés de considerarmos números reais, consideramos os escalares num *corpo* qualquer, como por exemplo, o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Entretanto, neste trabalho só utilizaremos espaços vetoriais reais (isto é, sobre $\mathbb{R}$).

Para facilitar a nossa "conversa", lembremos dos nomes mais comuns das propriedades acima:

A1) propriedade associativa da soma;

A2) propriedade comutativa da soma;

A3) propriedade do elemento neutro;

A4) propriedade do elemento oposto da soma;

M1) propriedade associativa da multiplicação por escalar;

M2) elemento neutro da multiplicação por escalar;

D1) distributiva da multiplicação por escalar com respeito à soma de vetores;

D2) distributiva da multiplicação por escalar com respeito à soma de escalares;

Recordemos ainda que estas propriedades nos dão muita informação a respeito da estrutura de um espaço vetorial. Por exemplo, num espaço vetorial, o elemento neutro 0 da soma é único, já que se 0 e $0'$ são elementos neutros da soma então

$$0 \overset{(1)}{=} 0 + 0' \overset{(2)}{=} 0',$$

onde em (1) utilizamos o fato de $0'$ ser um elemento neutro da soma e em (2) utilizamos o fato de 0 também ser elemento neutro da soma, e em ambas utilizamos (A3).

Da propriedade (A4) do elemento oposto, também podemos ver que ele é único, pois se v, v' são tais que $u + v = 0$ e $u + v' = 0$ então

$$v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = (u + v) + v' = 0 + v' = v',$$

onde utilizamos as propriedades (A1), (A2) e (A3). Sendo único, podemos denotar este tal v por $-u$, e é possível mostrar que $-u = (-1) \cdot u$.

Ao invés de escrevermos $\alpha \cdot u$ escreveremos simplesmente αu, a fim de simplificar a notação.

Alguns exemplos básicos de espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ são os seguintes:

Exemplo 3.1. *O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ das n-uplas de números reais $(x_1, \cdots, x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $i = 1, \cdots, n$, com a soma*

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n).$$

Em particular, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre si mesmo.

Exemplo 3.2. *O conjuntos das matrizes quadradas de ordem $M_n(\mathbb{R})$ com entradas em $\mathbb{R}$, com a soma*

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_1 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix},$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.3. *O conjuntos dos polinômios de uma variável com coeficientes reais de grau menor ou igual a n* $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, *com a soma*

$$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n,$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n) = (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+\cdots+(\alpha a_n)x^n.$$

Note que este último exemplo não funcionaria se o conjunto fosse dos polinômios de uma variável com coeficientes reais de grau n, já que a soma de dois polinômios de grau n pode ser um polinômio de grau estritamente menor, e não seria nesse caso um elemento do conjunto.

Exemplo 3.4. *O conjunto* $\mathcal{F}$ *formado por todas as funções* $f\colon X \to E$, *onde* X *é um conjunto qualquer e* E *é um espaço vetorial fixado, com soma*

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ para todo } x \in X,$$

e multiplicação por escalar

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Aqui vale observar que a soma e a multiplicação por escalar que aparecem no lado direito das equações são as do espaço vetorial E.

Um exemplo importante que vamos usar mais à frente é o seguinte:

Exemplo 3.5. *Se* E *e* F *são espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$, *então o conjunto* $E \times F$ *munido das operações de soma*

$$(u_1,v_1)+(u_2,v_2) = (u_1+u_2, v_1+v_2) \text{ para } u_1,u_2 \in E \text{ e } v_1,v_2 \in F,$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(u,v) = (\alpha u, \alpha v) \text{ para } u \in E \text{ e } v \in F,$$

também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Lembremos que se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ então um conjunto $\{u_1,\cdots,u_m\}$ de vetores em E é dito **linearmente independente** (ou simplesmente, LI) se dados $\alpha_1,\cdots,\alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m = 0$ então devemos ter $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$. Em outras palavras, a única maneira de escrever o vetor 0 como *combinação linear* dos vetores $\{u_1,\cdots,u_m\}$ é tomando todos os escalares nulos.

Com este conceito definido, lembramos que o maior número de vetores LI possível num dado espaço vetorial E é chamado de **dimensão** de E, e denotado por $\dim(E)$. Caso tal número não exista, diremos que E tem **dimensão infinita**, e denotaremos $\dim(E) = \infty$. Claramente $\dim\{0\} = 0$. Olhando nos exemplos acima, lembramos por exemplo que $\dim\mathbb{R}^n = n$, $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$, $\dim\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ e $\dim\mathcal{F} = \infty$.

Num espaço vetorial de dimensão finita n, qualquer conjunto com n vetores linearmente independentes recebe o nome de **base**[1]. Além disso, dada qualquer base $\mathcal{E} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de um espaço vetorial E de dimensão n, é possível escrever qualquer vetor de E como combinação linear dos vetores de $\mathcal{E}$ de maneira única, isto é, dado $u \in E$, existem únicos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Como já dito, nosso estudo é sobre o Teorema de Hahn-Banach, e aqui vale ressaltar que vamos tratar do caso de espaços de dimensão infinita, já que para dimensão finita o resultado é simples (e falaremos dele também mais a frente). Antes disso, continuaremos a ver um pouco mais de conceitos preliminares necessários para a total compreensão do teorema.

Continuamos com a definição de *subespaço vetorial*. Tal conceito possui algumas definições distintas em diferentes livros na literatura (todas equivalentes), e apresentaremos o que acreditamos ser mais simples. Um subconjunto $F \subset E$ é dito ser um **subespaço vetorial** de E se $0 \in F$ e se dados $v_1, v_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $v_1 + \alpha v_2 \in F$.

O conjunto $\{(x, y)\colon x + 3y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. O conjunto $\{A \in M_n(\mathbb{R})\colon \operatorname{tr}(A) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$, onde $\operatorname{tr}(A)$ denota o *traço* de A, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de A.

Outro exemplo de subespaço vetorial é o conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, onde $\mathcal{F}$ é dado no Exemplo 3.4, considerando $X = \mathbb{R}$.

Por outro lado, por exemplo, o conjunto das funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) = 1$ *não* é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$, já que a função nula não está neste conjunto.

Exemplo 3.6 (Soma de subespaços)**.** *Um exemplo importante também de subespaço vetorial é a **soma de subespaços**. Se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $F, G \subset E$ são subespaços vetoriais, definimos a soma de F com G por*

$$F + G = \{u + v\colon u \in F,\ v \in G\}.$$

*Quando $F \cap G = \{0\}$, dizemos que a soma de F e G é **direta** e denotamos a soma por $F \oplus G$.*

[1] É possível garantir que *todo* espaço vetorial possui uma base, usando o Lema de Zorn, que veremos mais para frente.

Outro ponto que merece atenção aqui é o seguinte: se E é um espaço vetorial de dimensão finita n, F é um subespaço de E com dimensão m (claramente $m \leqslant n$), e $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_m\}$ é uma base de F, então existem vetores $x_{m+1}, \cdots, x_n \in E$ tais que o conjunto $\mathcal{E} = \{x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n\}$ é uma base de E. Tal resultado é conhecido como o **Teorema do Completamento de Bases**.

Note então, que num espaço E de dimensão finita, dado um subespaço F, sempre é possível *chegar* em E por meio de uma soma finita de subespaços de dimensão um. Mas, infelizmente, o mesmo não é verdade para espaços de dimensão infinita. De fato, seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial formado por *todos* os polinômios em uma variável real. Seja n um inteiro positivo e considere o subespaço $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (veja o Exemplo 3.3). Então não é possível chegar em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ saindo de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ por meio de uma quantidade finita de somas com subespaços de dimensão um, já que $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$ e $\dim(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = \infty$.

Transformações e Operadores Lineares

Em praticamente todas as disciplinas de um curso de Matemática, não demora muito para entendermos que, mais importantes que os objetos que estão sendo estudados, são as *funções* entre estes objetos. Dedicamos então esta seção para uma breve revisão das funções naturais entre espaços vetoriais, que preservam as propriedades de soma e de multiplicação por escalar destes espaços, e são conhecidas como *transformações lineares.*

Definição 3.7. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que uma aplicação $T\colon E \to \mathbb{R}$ é uma **transformação linear** de E em F se:*

(i) *$T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todos $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(ii) *$T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todos $u, v \in E$.*

*No caso particular onde $F = E$, chamamos T de **operador linear**.*

Equivalentemente, pode-se ver que uma aplicação $T\colon E \to F$ é uma transformação linear se $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$ para todos $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alguns exemplos clássicos de transformações lineares são os seguintes.

Exemplo 3.8. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A função*

$$\begin{aligned} I_E\colon E &\to E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

*é um operador linear, chamado de **operador identidade** de E. De fato,* *Condição (i): Considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ quaisquer. Sabemos que $I_E(\lambda x) = \lambda x$. Como $x = I_E(x)$, temos $I_E(\lambda x) = \lambda I_E(x)$.*

Condição (ii): Considere x_1 e x_2 quaisquer em E. Sabemos que $I_E(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$. Como $x_1 = I_E(x_1)$ e $x_2 = I_E(x_2)$, temos $I_E(x_1 + x_2) = I_E(x_1) + I_E(x_2)$.

Exemplo 3.9. *Dados dois espaços vetoriais E e F sobre o mesmo corpo de escalares, definimos uma função θ da seguinte forma*

$$\begin{aligned} \theta\colon E &\to F \\ x &\longmapsto 0_F \end{aligned}$$

em que 0_F é o vetor nulo do espaço vetorial F. A função θ é chamada de ***tranformação nula*** *e é uma transformação linear. De fato*

Condição (i): Considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ quaisquer. Temos $\theta(\lambda x) = 0_F = \lambda 0_F = \lambda\theta(x)$.

Condição (ii): Considere x_1 e x_2 quaisquer em E. Temos $\theta(x_1 + x_2) = 0_F = 0_F + 0_F = \theta(x_1) + \theta(x_2)$.

Mais à frente veremos alguns outros exemplos de transformações lineares, mas antes disso, lembremos alguns resultados importantes envolvendo transformações lineares.

Proposição 3.10. *Uma transformação linear T é uma função injetora se, e somente se, $ker(T) = \{x \in E\colon T(x) = 0\} = \{0\}$.*

Demonstração: Se T é injetora, então $T(x_1) = T(x_2)$ se e só se $x_1 = x_2$. Assim, seja $x \in \ker(T)$. Como $T(x) = 0 = T(0)$ segue da injetividade de T que $x = 0$, portanto $\ker(T) = \{0\}$.

Reciprocamente, assuma que $\ker(T) = \{0\}$ e sejam $x_1, x_2 \in E$ tais que $T(x_1) = T(x_2)$. Da linearidade de T, temos

$$T(x_1) = T(x_2) \Leftrightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0 \Leftrightarrow T(x_1 - x_2) = 0,$$

o que mostra que $x_1 - x_2 \in \ker(T) = \{0\}$ e portanto $x_1 = x_2$, assim T é uma função injetora. ■

Uma propriedade útil ao se trabalhar com uma transformação linear $T\colon E \to F$ é que tanto $\ker(T)$ (chamado de **núcleo de** T) quanto $R(T) = \{v \in F\colon T(u) = v \text{ para algum } u \in E\}$ (chamado de **imagem de** T) são subespaços vetoriais de E e F, respectivamente, e quando E tem dimensão finita, vale o **Teorema do Núcleo e da Imagem** que nos diz que

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(R(T)).$$

Uma das consequências mais importantes deste resultado é que se $\dim(E) = \dim(F) < \infty$ então T é sobrejetora se, e somente se, T é injetora. Fato este facilmente verificado usando a equação acima, já que se T é sobrejetora $R(T) = F$ e obtemos $\dim(\ker(T)) = 0$, o que nos dá $\ker(T) = \{0\}$. Reciprocamente, se T é injetora, temos $\dim(\ker(T)) = 0$ e assim $\dim(R(T)) = \dim(E) = \dim(F)$, mas como $R(T) \subset F$ é um subespaço vetorial, temos $R(T) = F$.

Funcionais lineares e sublineares

Nesta seção apresentamos um caso particular de transformação linear, que são os *funcionais lineares*, que são nada menos que transformações lineares cujo contra-domínio é $\mathbb{R}$.

Definição 3.11. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f\colon E \to \mathbb{R}$ é dita ser um* ***funcional linear*** *se satisfaz:*

(i) *$f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para todos $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,*

(ii) *$f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todos $u, v \in E$.*

O exemplo mais simples de funcional é o *funcional nulo*, como vemos a seguir.

Um exemplo simples de funcional não-linear é o funcional constante $f_c(u) = c$ para todo $u \in E$. Quando $c \neq 0$, o funcional f_c não é um funcional linear. Para verificar isso, basta observar que para quaisquer x_1 e x_2 em E, temos $f_c(x_1 + x_2) = c$, enquanto $f_c(x_1) + f_c(x_2) = c + c = 2c$. Como $c \neq 0$, temos $c \neq 2c$, e com isso concluímos que $f_c(x_1 + x_2) \neq f_c(x_1) + f_c(x_2)$.

Além dos funcionais lineares, outras aplicações importantes que serão úteis mais à frente são os *funcionais sublineares*, definidos a seguir:

Definição 3.12. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f\colon E \to \mathbb{R}$ é dita ser um* ***funcional sublinear*** *se satisfaz:*

(i) *$f(\lambda u) = \lambda f(u)$ para todos $u \in E$ e $\lambda \geqslant 0$,*

(ii) *$f(u + v) \leqslant f(u) + f(v)$, para todo $u, v \in E$.*

Note que existem duas diferenças entre os funcionais lineares e sublineares. A primeira é o fato de (i) valer somente para escalares *não negativos*, enquanto em (ii) somente é válida a desigualdade. Observe aqui que todo funcional linear é em particular um funcional sublinear. Entretanto, nem todo funcional sublinear é linear, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.13. *A função f dada por*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Este um funcional sublinear que não é um funcional linear. De fato:

Condição (i): *Considere $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \geqslant 0$ e $x \in E$ quaisquer. Se $x < 0$, então $\lambda x < 0$. Nesse caso, temos $f(x) = 0$ e $f(\lambda x) = 0$. Assim, temos $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.*

Se $x \geqslant 0$, então $\lambda x \geqslant 0$. Nesse caso, temos $f(x) = x$ e $f(\lambda x) = \lambda x$. Assim, temos $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Condição (ii): *Considere x_1 e x_2 quaisquer em E.*

Se $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$, então $x_1 + x_2 < 0$. Nesse caso, temos $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ e $f(x_1 + x_2) = 0$. Concluímos que $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$.

Se $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$, então $x_1 + x_2 \geqslant 0$. Nesse caso, temos $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$ e $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$. Logo, também temos $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$.

Se $x_1 < 0$ e $x_2 \geqslant 0$, então podemos ter $x_1 + x_2 < 0$ ou $x_1 + x_2 \geqslant 0$. No caso $x_1 + x_2 < 0$, temos $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = x_2$ e $f(x_1 + x_2) = 0$. Assim, temos $f(x_1 + x_2) = 0 \leqslant x_2 = 0 + x_2 = f(x_1) + f(x_2)$. Já no caso $x_1 + x_2 \geqslant 0$, temos $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = x_2$ e $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$. Assim, temos $f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \leqslant x_2 = 0 + x_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

O caso em que temos $x_1 \geqslant 0$ e $x_2 < 0$ é análogo ao caso em que $x_1 < 0$ e $x_2 \geqslant 0$. O raciocínio pode ser repetido substituindo x_1 por x_2 e x_2 por x_1.

De qualquer forma, sempre ocorre $f(x_1 + x_2) \leqslant f(x_1) + f(x_2)$ e concluímos que f é um funcional sublinear.

Entretanto, f não é um funcional linear. Observe que para $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, temos $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$ e $f(x_1 + x_2) = f(0) = 0$. Portanto, $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.

Uma importante consideração a ser feita aqui é a seguinte: todo funcional linear não-nulo é sobrejetor. De fato, se $f\colon E \to \mathbb{R}$ é não-nulo, existe $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$. Como f é linear, claramente temos $x \neq 0$ (caso contrário $f(x) = 0$). Defina $\beta = f(x)$, e note que $\beta \neq 0$. Assim, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é qualquer, defina $u = \frac{\lambda x}{\beta}$. Temos claramente

$$f(u) = f\left(\frac{\lambda x}{\beta}\right) = \frac{\lambda}{\beta} f(x) = \frac{\lambda}{\beta}\beta = \lambda,$$

o que mostra que f é sobrejetor.

Assim, se E é um espaço vetorial de dimensão finita n e f é um funcional linear não nulo, o Teorema do Núcleo e da Imagem nos dá

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{R(f)} = \dim(\ker(f)) + 1,$$

e encontramos $\dim(\ker(f)) = n - 1$.

Mas note que nossa demonstração da sobrejetividade de funcionais não-nulos não utilizou a hipótese do espaço em questão ser de dimensão finita, e portanto é válida também para o caso de dimensão infinita. Em ambos os casos, dizemos que a *codimensão* de $\ker(f)$ é 1, ou seja, existe um subespaço vetorial F de E com $\dim(F) = 1$ e $F \oplus \ker(f) = E$.

De fato, usando a notação acima, basta definir $F = \{\alpha x \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. Temos $\dim(F) = 1$ e dado $u \in E$, seja $\lambda = \frac{f(u)}{f(x)}$. Defina $v = u - \lambda x$. Assim $f(v) = f(u) - \lambda f(x) = 0$ (ou seja, $v \in \ker(f)$) e $u = \lambda x + (u - \lambda x) \in F + \ker(f)$. Se $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ então $\lambda = 0$ e $\lambda x = 0$, ou seja $F \cap \ker(f) = \{0\}$, e portanto $F \oplus \ker(f) = E$.

Normas e distâncias

Continuamos nossas preliminares com a definição de *norma* em um espaço vetorial, que coloca uma estrutura geométrica no espaço, além da algébrica dada pelas operações de soma e multiplicação por escalar.

Definição 3.14. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, uma **norma** em E é uma função*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|, \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|u\| \geqslant 0$ *para todo* $u \in E$;

(ii) $\|u\| = 0$ *se e só se* $u = 0$;

(iii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ *para todos* $u \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *e*

(iv) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *para todos* $u, v \in E$.

A condição **(iv)** da definição de norma é conhecida como **desigualdade triangular**.

Note que qualquer norma definida sobre um espaço vetorial E não nulo é um funcional que é sublinear, mas não é linear. Para verificar que não é linear, considere um escalar $\lambda < 0$ e um vetor não nulo $x \in E$ qualquer. Nesse caso, não temos $\|\lambda \cdot x\| = \lambda \|x\|$, pois temos $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = -\lambda \|x\|$.

Definição 3.15. *Sejam E um espaço vetorial qualquer e $\|\cdot\|$ uma norma definida em E. Nesse caso, dizemos que o par ordenado $(E, \|\cdot\|)$ constitui um **espaço vetorial normado**.*

Alguns exemplos clássicos de espaços normados são:

Exemplo 3.16. *Em* $\mathbb{R}^n$ *temos as seguintes normas:*

- $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$, *conhecida como* ***norma um***.
- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, *conhecida como* ***norma euclidiana***.
- $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$, *conhecida como* ***norma*** p.
- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1| + \cdots + |x_n|\}$, *conhecida como* ***norma do máximo***.

Exemplo 3.17. *Seja* $B(\mathbb{R})$ *o espaço vetorial das funções* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *limitadas, e defina*

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Então f *é uma norma. De fato, claramente* $\|f\| \geqslant 0$ *e* $\|f\| = 0$ *se e só se* $f = 0$. *Além disso, se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos* $\|\lambda f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda f(x)| = |\lambda|\|f\|$. *Finalmente, se* $f, g \in B(\mathbb{R})$, *segue da desigualdade triangular para o módulo de um número real que*

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| = \|f\| + \|g\|,$$

e como isto é válido para todo $x \in \mathbb{R}$, *temos* $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

Usando propriedades de funções contínuas e da integral de Riemann, podemos definir o seguinte espaço normado:

Exemplo 3.18. *Seja* $C[a, b]$ *o conjunto das funções contínuas* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. *Defina*

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Então $(C[a, b], \|\cdot\|)$ *é também um espaço vetorial normado.*

Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E. Se a norma $\|\cdot\|$ de E for restrita ao subespaço F, note que ela ainda satisfaz todas as condições da definição de norma. Denotaremos $\|\cdot\|_F$ a norma restrita ao subespaço F. Assim, o par $(F, \|\cdot\|_F)$ também é um espaço normado.

Num espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$, podemos definir uma função $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \tag{3.1}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(x, y) \geqslant 0$ e $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Uma função com estas propriedades é chamada de *distância* ou *métrica*, e o espaço (E,d) é chamado de *espaço métrico*. Note que esta função satisfaz ainda duas propriedades adicionais:

(iv) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$;

(v) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Uma curiosidade interessante aqui é a seguinte: se num espaço vetorial E, existe uma métrica d que satisfaz (i)-(v) então E é na verdade normado, e a métrica é proveniente desta norma, isto é, vale (3.1). De fato, se d é uma métrica satisfazendo (i)-(v), basta definir $\|x\| = d(x,0)$. Não é difícil então verificar que de fato $\|\cdot\|$ é uma norma e vale (3.1).

Assim como funcionais lineares e sublineares, aqui apresentaremos um conceito um pouco mais fraco que normas, chamado de *seminorma*.

Definição 3.19. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Chamamos de* ***seminorma*** *ou* ***pseudonorma*** *uma função $p\colon E \to \mathbb{R}$ que satisfaz:*

(i) *$p(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;*

(ii) *$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todos $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(iii) *$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in E$.*

A diferença entre uma norma e uma seminorma é que não necessariamente o único vetor com 'seminorma' zero é o vetor nulo, o que não acontece no caso de normas. Destacamos que toda norma é também uma seminorma. Além disso, as seminormas também são exemplos de funcionais sublineares que não são lineares.

O funcional nulo pode ser visto como uma pseudonorma sobre o espaço E, chamada de **pseudonorma trivial**. Entretanto, não será uma norma, pois dado $x \in E$ qualquer, $f_0(x) = 0$ não implica $x = 0$.

Já o funcional do Exemplo 3.13 é um exemplo de funcional sublinear que não é uma seminorma.

Transformações Lineares Limitadas

Vamos relembrar um pouco mais as propriedades de transformações lineares, e mais especificamente, das transformações lineares limitadas, que têm importante papel na Álgebra Linear.

Definição 3.20. *Sejam* $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ *espaços vetoriais normados sobre* $\mathbb{R}$. *Uma transformação linear* $T\colon E \to F$ *é dita* ***limitada*** *se existe uma constante* $C \geqslant 0$ *tal que*

$$\|Tu\|_F \leqslant C\|u\|_E \text{ para todo } u \in E. \tag{3.2}$$

Quando T *é limitada, definimos a* ***norma de*** T *por*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F.$$

Note que claramente, dado $C \geqslant 0$ satisfazendo (3.2), temos $\|T\| \leqslant C$. Pode-se mostrar que quando T é limitada, sua norma pode também ser calculada por

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \inf\{C \geqslant 0 \colon C \text{ satisfaz } (3.2)\}.$$

Seja $E = \mathbb{R}^n$ com a norma um (veja Exemplo 3.16) e F um espaço normado qualquer. Considere a base canônica $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, dada por $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ onde o 1 aparece na i-ésima posição, para $i = 1, \ldots, n$.

Seja $T\colon E \to F$ uma aplicação linear. Defina $C = \max_{i=1,\cdots,n} \|Te_i\|_F$. Assim para $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, \cdots, x_n)$, temos

$$\begin{aligned} \|Tu\|_F &= \|T(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\|_F = \|x_1Te_1 + \cdots + x_nTe_n\|_F \\ &\leqslant |x_1|\|Te_1\|_F + \cdots + |x_n|\|Te_n\|_F \leqslant C\|u\|_1, \end{aligned}$$

ou seja, $T\colon E \to F$ é limitada.

Com um pouco mais de esforço, pode-se mostrar que o mesmo ocorre para qualquer espaço vetorial normado E de dimensão finita. Isto é, sempre que o domínio de uma transformação linear é um espaço vetorial de dimensão finita, ela é limitada. É então natural se perguntar se o mesmo ocorre com qualquer espaço vetorial, mesmo os de dimensão infinita. A resposta nesse caso infelizmente é *não*, como veremos no próximo exemplo.

Considere E como sendo o conjunto das funções $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ limitadas, infinitamente diferenciáveis e com todas as derivadas limitadas. Defina a transformação linear $T\colon E \to E$ por

$$(Tf)(x) = \frac{df}{dx}(x), \text{ isto é, a derivada de } f.$$

Afirmamos que T não é limitada, em *nenhuma* norma de E. De fato, considere uma norma qualquer $\|\cdot\|$ em E. A função $f(x) = e^{\alpha x}$ está em E, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, e sabemos que $Tf = \alpha f$. Assim $\|Tf\| = \|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$. Então se existisse $C \geqslant 0$ satisfazendo (3.2), deveríamos ter

$$|\alpha|\|f\| = \|Tf\| \leqslant C\|f\|,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o que é claramente um absurdo. Portanto, T não pode ser limitada.

Outro fato interessante envolvendo transformações lineares limitadas é a sua estreita relação com a *continuidade* destas aplicações. Na verdade, estes conceitos são equivalentes, como veremos a seguir. Antes disso, lembremos que uma transformação $T\colon E \to F$ entre dois espaços vetoriais normados $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ é dita **contínua em** $x \in E$ se dados $\epsilon > 0$ e $x \in E$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - y\|_E < \delta$ então $\|Tx - Ty\|_F < \epsilon$. Dizemos ainda que T é **contínua em** E se T é contínua em todos os pontos de E.

Com isto temos o seguinte resultado:

Teorema 3.21. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ dois espaços vetoriais normados e $T\colon E \to F$ uma transformação linear. São equivalentes:

(a) T é limitada;

(b) T é contínua em $x = 0$;

(c) T é contínua em E.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Seja T limitada. Então existe $C > 0$ tal que $\|Tx\|_F \leqslant C\|x\|_E$, para todo $x \in E$ (se $C = 0$ então claramente $T = 0$ e o resultado é óbvio). Como $T(0) = 0$ então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ tal que se $\|x\|_E < \delta$ então $\|Tx\|_F < \epsilon$, o que prova a continuidade de T em $x = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Assumimos que T seja contínua em $x = 0$ e consideremos $x_0 \in E$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_E < \delta$ então $\|Tx\|_F < \epsilon$. Resulta daí que se $x \in E$ é tal que $\|x - x_0\|_E < \delta$, então, da linearidade de T tem-se $\|Tx - Tx_0\|_F = \|T(x - x_0)\|_F < \epsilon$, o que prova a continuidade de T em todo o espaço E.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que T seja contínua em todo o espaço E. Em particular, T é contínua em $x = 0$ e portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_E < \delta$ temos $\|Tx\|_F < 1$ (continuidade em $x = 0$ usando $\epsilon = 1$). Assim se $u \in E$ é qualquer com $u \neq 0$, defina $x = \frac{\delta u}{2\|u\|_E}$. Temos $\|x\|_E = \frac{\delta}{2} < \delta$ e portanto $\|Tx\|_F < 1$, mas daí

$$\|Tx\|_F = \left\| T\left(\frac{\delta u}{2\|u\|_E}\right)\right\|_F = \frac{\delta}{2\|u\|_E}\|Tu\|_F,$$

o que nos dá $\|Tu\|_F < \frac{2}{\delta}\|u\|_E$ para todo $u \in E$ com $u \neq 0$. Como para $u = 0$ vale $\|T0\|_F = 0 = \frac{2}{\delta}\|0\|_E$, obtemos

$$\|Tu\|_F \leqslant \frac{2}{\delta}\|u\|_E \text{ para todo } u \in E,$$

o que mostra a limitação de T, com $C = \frac{2}{\delta} > 0$. ■

Com isto vamos ao último conceito desta seção, que é o conceito de *isomorfismos*. Se E e F são dois espaços vetoriais, dizemos que uma transformação linear $T\colon E \to F$ é um **isomorfismo** se T é limitada, bijetora, e sua inversa $T^{-1}\colon F \to E$ também é uma transformação linear.

Quando existe um isomorfismo entre E e F, dizemos que E e F são **isomorfos**, e escrevemos $E \simeq F$. Isto quer dizer, em outras palavras, que E e F não diferem em nada um do outro se olhados como espaços vetoriais.

Aqui listamos algumas das principais propriedades deste conceito, e também alguns exemplos. Primeiro, é sempre bom lembrar que se T é linear e bijetora, sua inversa *sempre* será uma transformação linear. De fato, suponha T linear e bijetora, e sejam $v_1, v_2 \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como T é bijetora, existem únicos $u_1, u_2 \in E$ tais que $Tu_1 = v_1$ e $Tu_2 = v_2$. Assim $T(u_1 + \alpha u_2) = Tu_1 + \alpha Tu_2 = v_1 + \alpha v_2$, ou seja

$$T^{-1}(v_1 + \alpha v_2) = u_1 + \alpha u_2 = T^{-1}v_1 + \alpha T^{-1}u_2,$$

e portanto $T^{-1}\colon F \to E$ é uma transformação linear.

Assim, na definição de isomorfismo, pode-se retirar o pedido de T^{-1} ser linear, já que isto é garantido. Ainda, note que se E é um espaço vetorial de dimensão finita, então do Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que T é bijetora se, e somente se, $\dim(E) = \dim(F)$.

Funcionais Lineares Limitados, Dual Topológico e Dual Algébrico

Nesta seção, aplicaremos um pouco do que foi visto na seção anterior para o caso específico de funcionais lineares, e definiremos o *dual algébrico* de um espaço vetorial.

Seja $(E, \|\cdot\|_E)$ um espaço vetorial normado e $f\colon E \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado, isto é, f é limitada como transformação linear, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$|f(x)| \leqslant C\|x\|_E \text{ para todo } x \in E.$$

Note que isto é equivalente a dizer que

$$\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| < \infty.$$

De fato, se f é limitada então $\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| < C < \infty$, e reciprocamente, se $\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| = C < \infty$ então $|f(x)| \leqslant C\|x\|_E$ para todo $x \in E$, ou seja, f é limitada.

Um fato curioso aqui é que, usando a linearidade da f, podemos mostrar que

$$\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} f(x),$$

isto é, não precisamos do módulo na definição.

De fato, note que

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Assim, se $x \in E$ temos que $|f(x)| = f(x)$ se $f(x) \geqslant 0$ e $|f(x)| = -f(x)$ se $f(x) < 0$. Mas, pela linearidade de f temos $-f(x) = f(-x)$ e portanto

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0 \\ f(-x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

e, além disso, se $\|x\|_E \leqslant 1$, como $\|x\|_E = \|-x\|_E \leqslant 1$ resulta que

$$\sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} f(x).$$

Para funcionais lineares, segue diretamente do Teorema 3.21, o seguinte resultado:

Proposição 3.22. *Sejam E um espaço vetorial sobre E e $f\colon E \to \mathbb{R}$ um funcional linear. São equivalentes:*

(a) *f é limitada;*

(b) *f é contínua no ponto $x = 0$;*

(c) *f é contínua em E.*

Introduziremos agora os conceitos de *dual algébrico* e *dual topológico* de um espaço vetorial E (normado para o caso do dual topológico).

Definição 3.23. *Seja E espaço vetorial, e considere E^* o conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em E, munido das operações de soma e multiplicação por escalar usuais do conjuntos das funções (veja Exemplo 3.4).*

Desta forma E^* é um espaço vetorial e é chamado de ***dual algébrico*** *de E.*

Caso E seja normado, definimos ainda E' como sendo o conjunto de todos os funcionais lineares limitados *definidos em E, munidos das mesmas operações usuais de soma e multiplicação por escalar de funções.*

Então E' também é um espaço vetorial e é chamado de ***dual topológico*** *de E.*

Claramente E' é um subespaço vetorial de E^*, e no caso onde E tem dimensão finita, já vimos que todos os funcionais são limitados, o que mostra que $E' = E^*$. Mas esse nem sempre é o caso em dimensão infinita, isto é, existem espaços E onde $E' \subsetneq E^*$ se E tem dimensão infinita.

Em alguns casos, podemos dar uma caracterização precisa do dual algébrico de um espaço vetorial, e um dos casos mais simples é o caso de $\mathbb{R}^*$.

Exemplo 3.24. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Defina $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f_\alpha(x) = \alpha x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Claramente, $f_\alpha \in \mathbb{R}^*$. Reciprocamente, se $f \in \mathbb{R}^*$, seja $\alpha = f(1)$. Temos então $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = \alpha x$. Logo $\mathbb{R}^*$ é composto por todas as aplicações f_α, com $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Note que definindo a aplicação $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ por $T(\alpha) = f_\alpha$, temos uma transformação linear bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^*$, isto é, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^*$ são isomorfos.

Outro conjunto que podemos caracterizar é o dual algébrico de produtos de espaços vetoriais, isto é $E \times F$, onde E e F são espaços vetoriais.

Proposição 3.25. *Se E e F são espaços vetoriais temos $(E \times F)^* \simeq E^* \times F^*$. Se, além disso, E e F são normados, $(E \times F)' \simeq E' \times F'$.*

Demonstração: Seja $\varphi \in (E \times F)^*$, isto é, $\varphi\colon E \times F \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. Defina $\varphi_E\colon E \to \mathbb{R}$ por $\varphi_E(u) = \varphi(u, 0)$ para todo $u \in E$ e $\varphi_F\colon F \to \mathbb{R}$ por $\varphi_F(v) = \varphi(0, v)$ para todo $v \in F$. Da linearidade de φ, segue que $\varphi_E \in E^*$ e $\varphi_F \in F^*$. Note que, quaisquer que sejam $u \in E$ e $v \in F$, temos $\varphi(u, v) = \varphi_E(u) + \varphi_F(v)$.

Defina $T\colon (E \times F)^* \to E^* \times F^*$ por

$$T(\varphi) = (\varphi_E, \varphi_F) \text{ para toda } \varphi \in (E \times F)^*$$

Temos T linear. Além disso, se $T\varphi = 0_{E^* \times F^*}$ então $\varphi_E = 0_{E^*}$ e $\varphi_F = 0_{F^*}$, assim $\varphi(u, v) = \varphi_E(u) + \varphi_F(v) = 0$, e portanto $\varphi = 0_{(E \times F)^*}$, o que mostra que T é injetora.

Para a sobrejetividade, note que se $f \in E^*$ e $g \in F^*$, definindo $\varphi(u, v) = f(u) + g(v)$, temos $\varphi \in (E \times F)^*$ e $T(\varphi) = (f, g)$. Portanto T é um isomorfismo e $(E \times F)^* \simeq E^* \times F^*$.

A prova é análoga (adicionando a propriedade de limitação) para os duais topológicos. ■

Observação 3.26. *Daqui para frente E' será munido da norma dual, isto é,*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)|,$$

a menos que se faça menção ao contrário. Quando não houver ambiguidade na interpretação, designaremos $\|f\|_{E'}$ simplesmente por $\|f\|$, bem como $\|x\|_E$ por $\|x\|$.

4 Teoremas de Hahn-Banach

Como já dissemos, o Teorema de Hahn-Banach trata de *prolongamentos* (ou extensões) de funcionais lineares, além de garantir que existem 'muitos' funcionais lineares distintos definido num espaço vetorial, e isto torna o estudo dos duais algébricos e topológicos bastante interessante. Antes de partir diretamente para o teorema (nas suas formas analítica e geométricas), vamos definir importantes conceitos que serão necessários.

Prolongamento de uma Forma Linear

Como dissemos acima, o Teorema de Hahn-Banach garante que podemos *prolongar* um funcional, e agora definiremos matematicamente o que queremos dizer com *prolongamento*.

Definição 4.1. *Sejam E um espaço vetorial, G um subespaço de E e g um funcional linear definido em G, isto é, $g \in G^*$. Dizemos que um funcional linear h é um* ***prolongamento*** *de g se existe um subespaço H de E com $G \subset H$ e um funcional $h \in H^*$ tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in G$, isto é, $h|_G = g$.*

Escrevemos $g \leqslant h$.

Da definição acima resulta imediatamente que g é um prolongamento de si mesmo, basta tomar $H = G$ e $h = g$. Quando h é um prolongamento de g e $G \subsetneq H$ então h é dito ser um **prolongamento próprio** de g. Se h é um prolongamento próprio de g escrevemos $g < h$.

Aqui se torna evidente a necessidade do Teorema de Hahn-Banach para espaços vetoriais de dimensão infinita. No caso de dimensão finita, o problema de prolongamento de funcionais lineares pode ser resolvido de uma maneira relativamente simples. De fato, suponha E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n finita, $F \subset E$ um subespaço vetorial, com dimensão $m \leqslant n$, e $f\colon F \to \mathbb{R}$ um funcional linear. Sabemos que existe uma base $\mathcal{E} = \{x_1, \cdots, x_m, \cdots, x_n\}$ de E com $x_i \in F$ para $i = 1, \dots, m$ (pelo Teorema do Completamento de Base). Assim, tomando α_j, $j = m+1, \dots, n$ e definindo $g\colon E \to \mathbb{R}$ por

$$g(x_k) = \begin{cases} f(x_k), & \text{se } 1 \leqslant k \leqslant m \\ \alpha_k, & \text{se } m < k \leqslant n \end{cases},$$

notamos que g é um prolongamento de f. Reciprocamente, não é difícil ver que todo prolongamento de f pode ser escrito nesta forma.

Lema de Zorn

Esta seção do trabalho é dedicado ao resultado conhecido como Lema de Max Zorn ou simplesmente Lema de Zorn, apesar de sua primeira formulação ser devida ao matemático polonês Kazimierz Kuratowski (1896-1980). Vale lembrar aqui que o Lema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha, que por sua vez garante que dada uma coleção qualquer de conjuntos não-vazios, é possível escolher um elemento de cada conjunto.

Todas as definições necessárias para a sua formulação são apresentadas aqui, contendo também exemplos destas definições. Para nossa proposta é suficiente considerar o Lema de Zorn como um axioma.

Definição 4.2. *Sejam X um conjunto e $\prec$ uma relação que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *se $a \in X$, então $a \prec a$ (reflexividade)*

(ii) *se $a, b, c \in X$, $a \prec b$ e $b \prec c$, então $a \prec c$ (transitividade)*

(iii) *se $a, b \in X$, $a \prec b$ e $b \prec a$, então $a = b$.*

Então X é dito ***parcialmente ordenado*** *sob a relação $\prec$. Se além disso, dados quaisquer dois elementos a, b de X e uma das relações $a \prec b$ ou $b \prec a$ acontece, então X é dito ser* ***totalmente ordenado*** *sob a relação $\prec$.*

Exibiremos dois exemplos clássicos de conjuntos ordenados.

Exemplo 4.3. *Seja $X = \mathbb{R}$ e $\prec$ a relação dada por $a \prec b \Leftrightarrow a \leqslant b$. Então X é um conjunto totalmente ordenado sob a relação $\mathcal{R}$, já que*

(i) $a \leqslant a$,

(ii) $a \leqslant b$ *e* $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$,

(iii) $a \leqslant b$ *e* $b \leqslant a \Rightarrow a = b$.

e também dados $a, b \in \mathbb{R}$, então

$$\text{ou } a \geqslant b \text{ ou } b \geqslant a.$$

Exemplo 4.4. *Sejam X um conjunto arbitrário e S qualquer coleção de subconjuntos de X, isto é, S é um subconjunto do conjunto 2^X das partes de X. Defina a relação $\prec$ em S por $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$, ou seja, a inclusão de conjuntos. Note que valem:*

(i) *Se $A \in S$ temos $A \subset A$,*

(ii) *Se $A, B \in S$, $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$,*

(iii) *Se $A, B \in S$, $A \subset B$ e $B \subset a$ então $A = B$.*

Mas, se por exemplo, S possui dois conjuntos disjuntos, eles não são comparáveis por meio da relação $\prec$, e portanto S é parcialmente ordenado pela relação $\prec$, mas não *é totalmente ordenado*

Se um conjunto X é parcialmente ordenado sob a relação $\prec$ é natural nos perguntarmos o seguinte: dado um conjunto X, o que é necessário para se garantir a existência de um "maior" elemento em X? Dito de outra maneira, será que existe alguma maneira de garantir a existência de um elemento $x \in X$ tal que $a \prec x$ para todo $a \in X$? É exatamente esta a pergunta que o Lema de Zorn responde.

Para isto, definimos os seguintes conceitos:

Definição 4.5. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado sob a relação $\prec$ e consideremos A um subconjunto de X. Um elemento $y \in X$ é dito ser um* ***limitante superior*** *de A se para todo $a \in A$,*

$$a \prec y.$$

Note que o elemento y em questão acima (se existe) não precisa estar em A, mas ele é obrigatoriamente comparável a todos os elementos de A.

Definição 4.6. *Seja X um conjunto parcialmente ordenado sob a relação $\prec$. Um elemento $x \in X$ é dito ser um* ***elemento maximal*** *de X se $x \prec y$ implicar que $y = x$.*

Dito de outra maneira, não existem elementos em X que sejam "maiores" de que x, segundo a relação $\prec$. Note aqui a sutil diferença entre limitante superior e elemento maximal, pois o elemento maximal de um conjunto X *obrigatoriamente* pertence ao conjunto X.

Defina, por exemplo, a relação $\prec$ usada no Exemplo 4.4 em todo 2^X e considere S uma coleção qualquer de subconjuntos de X. Defina o elemento

$$B = \bigcup_{A \in S} A.$$

Veja que se $A \in S$ temos $A \prec B$ e portanto B é um limitante superior para S. Claramente, qualquer conjunto $C \in 2^X$ com $B \subset C$ é um limitante superior para S. Entretanto, como não sabemos se B está ou não em S, não podemos garantir que B seja um elemento maximal de S.

Com todas estas definições e considerações, podemos enunciar o Lema de Zorn.

Lema 4.7 (Lema de Zorn)**.** *Seja X um conjunto não-vazio parcialmente ordenado sob uma relação $\prec$. Se todo subconjunto totalmente ordenado Y de X possui um limitante superior, então X tem um elemento maximal.*

Um fato interessante, que já foi mencionado na seção de preliminares, é que o Lema de Zorn pode ser utilizado, dentre outras coisas, para demonstrar que todo espaço vetorial possui uma base.

Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach

Vamos ver agora a versão analítica do Teorema de Hahn-Banach, que, dentre muitas, tem aplicações importantes na teoria de Análise de Operadores, na Teoria Espectral de Operadores Não-Limitados e também na Teoria de Semigrupos.

Antes de começar, vejamos uma definição.

Definição 4.8. *Seja E um espaço vetorial. Uma aplicação $p\colon E \to \mathbb{R}$ é dita*

(i) positivamente homogênea *se $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $x \in E$ e $\lambda > 0$;*

(ii) subaditiva *se $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.*

Note que toda seminorma é um caso particular de função positivamente homogênea e subaditiva. Com essa definição podemos demonstrar um lema técnico fundamental para a demonstração do Teorema de Hahn-Banach.

Lema 4.9. *Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, G um subespaço vetorial próprio de E, p uma função positivamente homogênea e subaditiva, e $g \in G^*$ tal que $g(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in G$. Então existe um prolongamento próprio h de g, com domínio H, tal que $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in H$.*

Demonstração: Como G é um subespaço próprio de E, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin G$. Definimos $H = G \oplus \langle x_0 \rangle$, onde $\langle x_0 \rangle = \{\lambda x_0 \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Note que a soma é direta pois se $\lambda x_0 \in G$ então $\lambda = 0$, pois se $\lambda \neq 0$ teríamos $x_0 \in G$, o que é um absurdo.

Assim, todo vetor $x \in H$ pode ser escrito como $x = u + \lambda x_0$, onde $u \in G$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ de maneira única. De fato, se $u_1 + \lambda_1 x_0 = u_2 + \lambda_2 x_0$ então $G \ni u_1 - u_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)x_0 \in \langle x_0 \rangle$, e como $G \cap \langle x_0 \rangle = \{0\}$ temos $u_1 = u_2$ e $\lambda_1 = \lambda_2$.

Claramente G é um subespaço próprio de H. Defina $h\colon H \to \mathbb{R}$ por

$$h(u + \lambda x_0) = g(u) + \lambda\alpha \text{ para } u \in G \text{ e } \lambda \in \mathbb{R},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ será escolhido depois convenientemente.

Provemos que h é linear. De fato, sejam $x_1 = u_1 + \lambda_1 x_0, x_2 = u_2 + \lambda_2 x_0 \in H$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Temos,

$$\begin{aligned} h(x_1 + x_2) &= h[(u_1 + \lambda_1 x_0) + (u_2 + \lambda_2 x_0)] = h[(u_1 + u_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)x_0] \\ &= g(u_1 + u_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)\alpha = g(u_1) + g(u_2) + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha \\ &= h(x_1) + h(x_2); \end{aligned}$$

e também

$$h(\beta x_1) = h(\beta u_1 + (\beta\lambda_1)x_0) = g(\beta u_1) + (\beta\lambda_1)\alpha = \beta g(u_1) + \beta(\lambda_1\alpha) = \beta h(x_1),$$

o que prova a linearidade de h. Assim, do que vimos acima, $h \in H^*$, $G \subsetneq H$ e $h(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ (basta tomar $\lambda = 0$); ou seja, h é um prolongamento próprio de g.

Agora nos resta escolher $\alpha \in \mathbb{R}$ de maneira conveniente, para que tenhamos $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in H$. Para isso, sejam $u_1, u_2 \in G$. Então

$$\begin{aligned} g(u_1) + g(u_2) &= g(u_1 + u_2) \leqslant p(u_1 + u_2) \\ &= p(u_1 - u_0 + u_0 + u_2) \leqslant p(u_1 - u_0) + p(u_0 + u_2), \end{aligned}$$

o que implica que $g(u_1) - p(u_1 - u_0) \leqslant p(u_0 + u_2) - g(u_2),$ para todo $u_1, u_2 \in G$. Logo,

$$\sup_{u_1 \in G}\{g(u_1) - p(u_1 - u_0)\} \leqslant \inf_{u_2 \in G}\{p(u_0 + u_2) - g(u_2)\}.$$

Assim, escolhemos α tal que

$$\sup_{x_1 \in G}\{g(x_1) - p(x_1 - x_0)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x_2 \in G}\{p(x_0 + x_2) - g(x_2)\}. \tag{4.1}$$

Com esta escolha de α, vamos demonstrar que $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in H$, ou equivalentemente, $h(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0)$, ou ainda,

$$g(x) + t\alpha \leqslant p(x + tx_0), \text{ para todo } x \in G \text{ e } t \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Seja $t > 0$. De (4.1) temos

$$\begin{aligned} g(x) + t\alpha &= t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right] \leqslant t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + \inf_{x_2 \in G}\{p(x_2 + x_0) - g(x_2)\}\right] \\ &\overset{(1)}{\leqslant} t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) - g\left(\frac{x}{t}\right)\right] = tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0), \end{aligned}$$

onde em (1) utilizamos $x_2 = \frac{x}{t} \in G$.

Seja $t < 0$. Defina $\tau = -t > 0$. Então,

$$\begin{aligned} g(x) + t\alpha &= \tau\left[g\left(\frac{x}{\tau}\right) - \alpha\right] \leqslant \tau[g\left(\frac{x}{\tau}\right) - \sup_{x_1 \in G}\{g(x_1) - p(x_1 - x_0)\}] \\ &\overset{(2)}{\leqslant} \tau\left[g\left(\frac{x}{\tau}\right) + p\left(\frac{x}{\tau} - x_0\right) - g\left(\frac{x}{\tau}\right)\right] = \tau p\left(\frac{x}{\tau} - x_0\right) = p(x - \tau x_0) = p(x + tx_0), \end{aligned}$$

onde em (2) utilizamos $x_1 = \frac{x}{\tau} \in G$. Como (4.2) é trivialmente satisfeita para $t = 0$, temos (4.2) satisfeita para todo $x \in G$ e $t \in \mathbb{R}$. ■

Com este lema e o Lema de Zorn, podemos enunciar e demonstrar a Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 4.10 (Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach)**.** Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e p uma função positivamente homogênea e subaditiva definida em E. Se G é um subespaço de E, $g \in G^*$ e $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um prolongamento h de g a E tal que $h(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Se $G = E$ então nada temos a provar. Suponhamos então que G é um subespaço próprio de E e defina $\mathcal{P}$ como a família de todos os prolongamentos $h\colon H \to \mathbb{R}$ de g, tais que $h(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in H$. Temos $\mathcal{P} \neq \varnothing$ pois $h \in \mathcal{P}$.

Defina a relação $\prec$ em $\mathcal{P}$ por $h_1 \prec h_2$ se e só se $h_1 \leqslant h_2$, isto é, se e só se h_2 é um prolongamento de h_1. Assim $\mathcal{P}$ é um conjunto parcialmente ordenado sob a relação $\prec$.

Suponha agora que $\mathcal{Q}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}$ totalmente ordenado sob a relação $\prec$. Mostremos que $\mathcal{Q}$ tem um limitante superior. Seja $\mathcal{Q} = \{h_i\}_{i\in I}$, onde I é um conjunto de índices e $h_i\colon H_i \to \mathbb{R}$. Defina $H = \cup_{i\in I} H_i$ e $h\colon H \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira: dado $x \in H$, existe $i \in I$ tal que $x \in H_i$, então defina $h(x) = h_i(x)$.

Nos resta mostrar que H é um subespaço de E e que h está bem definida. Primeiro, se $x, y \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então existem $i_1, i_2 \in I$ tais que $x \in H_{i_1}$ e $y \in H_{i_2}$. Sendo $\mathcal{Q}$ totalmente ordenado, devemos ter $h_1 \leqslant h_2$ ou $h_2 \leqslant h_1$. Assim $H_{i_1} \subset H_{i_2}$ ou $H_{i_2} \subset H_{i_1}$, e assim $x + \lambda y \in H_{i_1}$ ou $x + \lambda y \in H_{i_2}$, e em qualquer caso temos $x + \lambda y \in H$.

Além disso $x \in H_{i_1} \cap H_{i_2}$ temos $h_{i_1}(x) = h_{i_2}(x)$, e portanto h está bem definida. Como cada h_i é linear, temos h linear (seguindo a ideia do parágrafo anterior).

Como $h_i \leqslant p$ para todo $i \in I$, resulta que $h(x) \leqslant p(x)$. Portanto $h \in \mathcal{P}$ é um limitante superior de $\mathcal{Q}$. Portanto $\mathcal{P}$ satisfaz as condições do Lema de Zorn, e assim $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal, que chamaremos de f.

Como $f \in \mathcal{P}$, temos $f(x) \leqslant p(x)$. Resta-nos verificar que $F = E$ (lembrando que F é o domínio de f). Com efeito, suponhamos o contrário, ou seja, que F é um subespaço próprio de E. Pelo Lema 4.9 concluímos que existe um prolongamento próprio h, de f (e portanto de g), verificando $h(x) \geqslant p(x)$, o que contradiz o fato de f ser elemento maximal de $\mathcal{P}$. Logo, $F = E$, o que finaliza a demonstração. ■

A seguir, apresentaremos alguns resultados decorrentes do Teorema de Hahn-Banach quando E é um espaço vetorial normado. Para isto, se E é um espaço vetorial normado e E' o seu dual topológico, quando $f \in E'$ e $x \in E$, escrevemos $\langle f, x\rangle$ em lugar de $f(x)$. Diremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o *produto escalar na dualidade* E', E.

Corolário 4.11. *Sejam E um espaço vetorial normado, G um subespaço de E e $g \in G'$. Então existe um prolongamento f de g tal que $f \in E'$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Demonstração: Definindo $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|_E$ para $x \in E$, temos

$$g(x) \leqslant |g(x)| \leqslant \|g\|_{G'}\|x\|_E = p(x), \text{ para todo } x \in G.$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um prolongamento f de g a todo E tal que

$$f(x) \leqslant p(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Mas, temos também

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|g\|_{G'}\| - x\|_E = \|g\|_{G'}\|x\|_E = p(x), \text{ para todo } x \in E.$$

Com isso,

$$|f(x)| \leqslant p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|_E, \text{ para todo } x \in E$$

o que implica,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \|g\|_{G'},$$

ou seja,

$$\|f\|_{E'} \leqslant \|g\|_{G'}. \tag{4.3}$$

Por outro lado, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$. temos que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant \sup_{x \in G, \|x\| \leqslant 1} |g(x)| = \|g\|_{G'}. \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4) temos $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$. ∎

Corolário 4.12. *Seja E um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|$. Então, para cada $x_0 \in E$, existe um funcional $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|$ e $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2$.*

Demonstração: Se $x_0 = 0$ basta tomar $f_0 \equiv 0$. Seja então $x_0 \neq 0$ e $G = \{tx_0 \colon t \in \mathbb{R}\}$. Definimos $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim

$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|(\|tx_0\|),$$

e sabendo que g é linear, obtemos $g \in G'$ e $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Pelo Corolário 4.11 existe um prolongamento f_0 de g a E tal que $f_0 \in E'$ e $\|f_0\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x_0\|$. Ainda, como $x_0 \in G$, temos $\langle f_0, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = \|x_0\|^2$. ∎

De modo geral, sendo E um espaço normado, se designa para cada $x_0 \in E$ o conjunto

$$F(x_0) = \{f_0 \in E' \colon \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2 = \|f_0\|^2\},$$

que é comumente chamado de **conjunto dualidade** de x_0. O corolário acima nos garante então que $F(x_0) \neq \varnothing$ para cada $x_0 \in E$.

Visto de uma maneira mais simples, o corolário acima garante que dado um número real positivo α é possível encontrar um funcional f_0 em E' e um vetor x_0 em X, tal que $\langle f_0, x_0 \rangle = \alpha$.

Corolário 4.13. *Seja E um espaço vetorial normado. Então, para todo $x \in E$ se tem*

$$\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Demonstração: Se $x = 0$, o resultado segue, visto que $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $f \in E'$. Assim, seja $x \neq 0$ e vamos considerar $f \in E'$ tal que $\|f\|_{E'} \leqslant 1$. Então

$$|\langle f, x \rangle| \leqslant \|f\|_{E'} \|x\| \leqslant \|x\| \Rightarrow \sup_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle| \leqslant \|x\|. \tag{4.5}$$

Por outro lado, pelo Corolário 4.12, existe um funcional linear $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x\|$ e $\langle f, x \rangle = \|x\|^2$, ou seja, $f_0 \in F(x)$. Definimos $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|}$. Então, $\|f_1\|_{E'} = 1$ e $\langle f_1, x \rangle = \|x\|$. Portanto,

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle| \geqslant |\langle f_1, x \rangle| = \|x\|. \tag{4.6}$$

De (4.5) e (4.6) temos

$$\|x\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle|.$$

■

Notemos que no Corolário 4.13 estabelecemos que o supremo realmente é atingido e consequentemente o supremo se transforma em máximo. De fato

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leqslant 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\| = \langle f_1, x \rangle,$$

onde $f_1 \in E'$ e $\|f_1\| = 1$.

Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach

Nesta seção apresentaremos as formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach, também conhecidas como *Teoremas de Separação de Hahn-Banach*, que dentre outras coisas, são utilizadas na teoria de *Geometria Convexa*.

Definição 4.14. *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que um conjunto $C \subset E$ é **convexo** se, dados $x, y \in C$, então $tx + (1-t)y \in C$ para todo $t \in [0, 1]$.*

Observação 4.15. *Note que segue claramente da definição que todo subespaço vetorial F de E é convexo.*

A convexidade é como conhecemos: um conjunto é convexo de dados dois pontos no conjunto, o "segmento de reta" que liga estes dois pontos está inteiramente contido neste conjunto.

Num espaço vetorial E normado, todo conjunto da forma $B_r(x) = \{y \in E\colon \|y - x\|_E < r\}$ ou $\overline{B_r(x)} = \{y \in E\colon \|y - x\|_E \leqslant r\}$ para $r > 0$ é convexo.

Já o conjunto $A = B_1((0,0)) \cup B_1((5,0))$ em $\mathbb{R}^2$, com a norma $\|\cdot\|_2$, não é convexo, pois o segmento de reta que liga os pontos $(0,0)$ e $(5,0)$ contém, por exemplo, o ponto $(3,0)$, que não está em A.

Lembremos algumas definições de conceitos topológicos, feitas especificamente para o caso que precisamos, que é o de espaços vetoriais normados (para mais detalhes sobre estes conceitos em espaços métricos em geral, recomendamos que o leitor veja [8]). Para isso fixemos E um espaço vetorial normado.

Aberto. um conjunto $A \subset E$ é dito **aberto** se dado $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$;

Fecho. dado $A \subset E$ definimos o **fecho** de A, denotado por $\overline{A}$, como sendo o conjuntos dos pontos $x \in E$ tal que existe sequência $\{a_n\} \subset A$ tal que $\|a_n - x\| \to 0$ quando $n \to \infty$;

Fechado. um conjunto A é dito **fechado** se $\overline{A} = A$;

Compacto. um conjunto $B \subset E$ é dito **compacto** se qualquer sequência $\{b_n\} \subset B$ possui uma subsequência convergente para um vetor de B, isto é, existe $\{n_k\}$ subsequência dos inteiros positivos e $b \in B$ tais que $\|b_{n_k} - b\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Agora podemos continuar com a teoria geométrica de Hahn-Banach.

Definição 4.16. *Sejam E um espaço vetorial normado, $C \subset E$ um conjunto aberto e convexo tal que $0 \in C$. Para cada $x \in E$, definimos*

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0\colon \frac{x}{\alpha} \in C\right\}.$$

*O funcional $p\colon E \to \mathbb{R}$ é chamado de **funcional de Minkowski** para C.*

Precisamos aqui discutir a boa definição deste funcional. Dito de outra maneira, precisamos ser capazes de afirmar que o conjunto $P(x) = \left\{\alpha > 0\colon \dfrac{x}{\alpha} \in C\right\}$ é não-vazio, para cada $x \in E$, para que possamos tomar o seu ínfimo.

Note que, se $x = 0$, então por hipótese $x \in C$ e $\frac{x}{\alpha} = 0 \in C$ para todo α, e assim $P(x) \neq \varnothing$ (pois todo $\alpha > 0$ está em $P(x)$, e vemos neste caso que $P(x) = 0$). Agora, suponha $x \neq 0$. Então, como C é aberto e $0 \in C$, podemos escolher $r > 0$ tal que

$$B_r(0) \subset C. \tag{4.7}$$

Também, seja n inteiro positivo tal que $\frac{\|x\|}{n} < r$. Assim, se $\alpha \geqslant n$, temos $\frac{\|x\|}{\alpha} \leqslant \frac{\|x\|}{n} < r$, e portanto $\frac{x}{\alpha} \in C$, o que mostra que $\alpha \in P(x)$ se $\alpha \geqslant n$, e assim concluímos que $P(x) \neq \varnothing$.

Para explicar melhor o funcional de Minkowski, tomemos por exemplo $C = B_1(0)$, isto é, a bola aberta centrada em 0 com raio 1 em E. Sabemos que $p(0) = 0$. Se $x \neq 0$, então seja $\beta = \|x\|$. Se $\alpha > \beta$ então $\frac{\|x\|}{\alpha} < \frac{\|x\|}{\beta} = 1$, e assim $\frac{x}{\alpha} \in C$. Logo $p(x) \geqslant \beta$. Além disso, como $\frac{\|x\|}{\beta} = 1$ temos $\frac{x}{\beta} \notin C$. Portanto $p(x) = \beta = \|x\|$.

Notamos então que o funcional de Minkowski mede o menor valor necessário de α para que $\frac{x}{\alpha}$ esteja na fronteira de C.

Proposição 4.17. *O funcional de Minkowski satisfaz:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, *para todo* $\lambda \geqslant 0$ *e para todo* $x \in E$;
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$, *para todo* $x, y \in E$;
3. *Existe* $M > 0$ *tal que* $p(x) \leqslant M\|x\|$, *para todo* $x \in E$;
4. $C = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$.

Demonstração:

De 1: Se $\lambda = 0$ temos $\lambda x = 0$, e sabemos que $p(0) = 0 = \lambda p(x)$ e o resultado está demonstrado. Agora, suponha que $\lambda > 0$. Note que

$$P(\lambda x) = \left\{\alpha > 0 \colon \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\},$$

assim, se $\alpha \in P(\lambda x)$ temos $\frac{\alpha}{\lambda} \in P(x)$, e assim $\alpha \in \lambda P(x)$, e como $\lambda > 0$ temos

$$p(\lambda x) = \inf P(\lambda x) = \inf[\lambda P(x)] = \lambda \inf P(x) = \lambda p(x).$$

De 2: Fixemos $x, y \in E$. Para cada $\epsilon > 0$, segue da definição do funcional de Minkowski e da definição de ínfimo, que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta} \in C \quad \text{com} \quad \alpha < p(x) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \beta < p(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Então $0 < t < 1$ e ainda $0 < 1 - t = \frac{\beta}{\alpha+\beta} < 1$. Como $\frac{x}{\alpha}$ e $\frac{y}{\beta}$ estão em C, segue da convexidade de C que

$$t\frac{x}{\alpha} + (1-t)\frac{y}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{y}{\alpha+\beta} = \frac{x+y}{\alpha+\beta},$$

está em C, ou seja, $\alpha + \beta \in P(x+y)$. Assim

$$p(x+y) = \inf P(x+y) \leqslant \alpha + \beta < p(x) + p(y) + \epsilon,$$

ou seja $p(x+y) < p(x) + p(y) + \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$.

De 3: Seja $r > 0$ satisfazendo (4.7) e fixe $0 < k < r$. Assim, se $x \in E$ com $x \neq 0$, defina $y = \frac{kx}{\|x\|}$. Temos

$$\|y\| = \left\| \frac{kx}{\|x\|} \right\| = k\frac{\|x\|}{\|x\|} = k < r,$$

e portanto $y \in B_r(0) \subset C$, assim $\frac{\|x\|}{r} \in P(x)$, o que nos dá

$$p(x) = \inf P(x) \leqslant \frac{\|x\|}{k} \text{ para cada } x \in E,$$

e o resultado segue, tomando $M = 1/k$.

De 4: Seja $A = \{x \in E \colon p(x) < 1\}$. Para mostrar que $C \subset A$, fixemos $x \in C$.

Se $x = 0$ sabemos que $P(x) = 0 < 1$, e assim $x \in A$. Suponhamos então $x \neq 0$. Como C é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset C$. Ainda, como $\|x\| \neq 0$ e $r > 0$, podemos escolher $\eta > 0$ tal que $\eta < \frac{r}{\|x\|}$. Temos então

$$\|(1+\eta)x - x\| = \|x + \eta x - x\| = \eta\|x\| < \frac{r}{\|x\|}\|x\| = r,$$

o que mostra que $(1+\eta)x \in B_r(x) \subset C$. Definindo $\gamma = \frac{1}{1+\eta} < 1$ temos

$$\frac{x}{\gamma} = (1+\eta)x \in C,$$

o que nos dá $\gamma \in P(x)$. Assim $p(x) = \inf P(x) \leqslant \gamma < 1$, e portanto $x \in A$. Com isto concluímos que $C \subset A$.

Para a inclusão contrária, seja $x \in A$, isto é, $x \in E$ e $p(x) < 1$. Escolha $\epsilon > 0$ tal que $p(x) + \epsilon < 1$. Então, da definição de $p(x)$, para este $\epsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{e} \quad p(x) \leqslant \alpha < p(x) + \epsilon < 1.$$

Logo, para $t = \alpha \in (0,1)$, como $\frac{x}{\alpha}$ e 0 estão em C, segue da convexidade de C que

$$x = \alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 = t\frac{x}{\alpha} + (1-t)0 \in C,$$

e portanto $x \in C$, o que mostra que $A \subset C$ e conclui a demonstração. ∎

Definição 4.18. *Seja E um espaço vetorial real. Um* ***hiperplano afim*** *de E é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in E \colon f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\alpha),$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in E^*$ tal que f não é identicamente nula.

Neste caso, dizemos que H é um hiperplano de equação $[f = \alpha]$.

Exemplo 4.19. *Se $E = \mathbb{R}^2$, sabemos que todo funcional linear f definido em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito na forma $f(x, y) = ax + by$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a^2 + b^2 \neq 0$, os hiperplanos afins de $\mathbb{R}^2$ são da forma*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon ax + by = \alpha\},$$

que nada mais são do que retas no plano.

Para $E = \mathbb{R}^3$, analogamente, os hiperplanos são da forma

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon ax + by + cz = \alpha\},$$

onde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, que nada mais são do que planos no espaço.

Os hiperplanos afins são também *subespaços afins* de E. Dito de outra maneira, não é sempre verdade que um hiperplano H é um subespaço vetorial (pois 0 pode não estar em H), mas dado qualquer $h \in H$, o conjunto $G_h = H - h = \{x - h \colon x \in H\}$ é um subespaço vetorial de E. Enunciemos e provemos tal resultado.

Proposição 4.20. *Seja $H = [f = \alpha]$ um hiperplano afim de E. Então, para qualquer $h \in H$, o conjunto G_{H-h} é um subespaço vetorial de E. Na verdade $G_h = \ker(f)$, para qualquer $h \in G_h$.*

Demonstração: Como sabemos que $\ker(f)$ é um subespaço vetorial de E, então provando que $G_h = \ker(f)$ para cada $h \in H$, segue que G_h é subespaço vetorial de E.

De fato, seja $h \in H$ fixado e $y \in G_h$. Então $y = x - h$ para algum $x \in H$. Assim

$$f(y) = f(x) - f(h) = \alpha - \alpha = 0,$$

já que $f(x) = f(h) = \alpha$ pois $x, h \in H = [f, \alpha]$. Portanto $f(y) = 0$, o que nos dá $y \in \ker(f)$. Reciprocamente, se $y \in \ker(f)$, temos

$$f(y + h) = f(y) + f(h) = 0 + \alpha = \alpha,$$

ou seja, $y + h \in H$, o que nos dá $y \in G_h$. Portanto $G_h = \ker(f)$, e concluímos que G_h é um subespaço de E. ■

Corolário 4.21. *Se $h \in H$ então dado $x_0 \in E \setminus G_h$, temos $E = G_h \oplus F$, onde $F = \{tx_0 \colon t \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração: Segue do que foi feito no parágrafo final da Seção 3.2. ■

Este último resultado nos diz que todo espaço vetorial pode ser escrito como a soma direta de um hiperplano e uma reta (subespaço de dimensão 1), isto é, todo hiperplano tem codimensão 1.

Um resultado interessante a respeito de hiperplanos é o seguinte:

Proposição 4.22. *O hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é contínua.*

Demonstração: Uma das implicações é mais simples. Suponha que f seja contínua, isto é $f \in E'$. Então, como $H = [f = \alpha] = f^{-1}(\alpha)$, vemos que H é a imagem inversa de um conjunto fechado em $\mathbb{R}$ (o conjunto unitário $\{\alpha\}$) pela função contínua $f\colon E \to \mathbb{R}$, e portanto é um subconjunto fechado de E.

A recíproca não é tão simples. Antes de começar, note que podemos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha \geqslant 0$, pois se $\alpha < 0$, notamos que $H = [-f = -\alpha]$, e $-\alpha > 0$, e $-f$ é contínua se e só se f é contínua.

Assim assuma que $H = [f = \alpha]$ seja fechado, com $\alpha \geqslant 0$. Do Corolário 4.21, sabemos que H é um subespaço afim próprio de E. Ainda $E \setminus H$ é aberto em E, uma vez que H é fechado em E por hipótese. Assim, dado $x_0 \in E \setminus H$, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset E \setminus H$. Como $x_0 \in E \setminus H$ segue que $f(x_0) \neq \alpha$.

Afirmação 1: Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f(x_0) < \alpha$.

De fato, suponha que $f(x_0) > \alpha$. Como $\alpha \geqslant 0$ temos

$$f(-x_0) = -f(x_0) < -\alpha \leqslant \alpha,$$

e basta tomar $-x_0$ no lugar de x_0, notando que $-x_0 \in E \setminus H$.

Afirmação 2: $f(x) < \alpha$ para todo $x \in B_r(x_0)$.

De fato, vamos assumir, por absurdo, que existe $y \in B_r(x_0)$ tal que $f(y) \geqslant \alpha$. Como $B_r(x_0)$ é um conjunto convexo temos $ty + (1-t)x_0 \in B_r(x_0)$, para todo $t \in [0,1]$, e pelo fato de $B_r(x_0) \subset E \setminus H$ decorre que

$$f(ty + (1-t)x_0) \neq \alpha \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{4.8}$$

Como $f(y) \geqslant \alpha$, temos $f(y - x_0) = f(y) - f(x_0) \geqslant \alpha - f(x_0) > 0$, o que nos dá

$$0 < t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(y - x_0)} \leqslant 1.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f(ty + (1-t)x_0) &= f(t(y - x_0) + x_0) = tf(y - x_0) + f(x_0) \\ &= \alpha - f(x_0) + f(x_0) = \alpha, \end{aligned}$$

o que contradiz (4.8), e mostra que $f(y) < \alpha$ para todo $y \in B_r(x_0)$.

Agora, se $x \in \overline{B_{r/2}(x_0)}$ então definindo $z = \frac{2}{r}(x - x_0)$ temos $\|z\| = \frac{2}{r}\|x - x_0\| \leqslant 1$. Reciprocamente, se $\|z\| < 1$ então $x = x_0 + \frac{r}{2}z$ está em $\overline{B_{r/2}(x_0)}$. Desta maneira, para

$\|z\| \leqslant 1$, seja $x = x_0 + \frac{r}{2}z$. Como $\overline{B_{r/2}(x_0)} \subset B_r(x_0)$, pela Afirmação 2 temos $f(x) < \alpha$ e assim

$$f(x_0) + \frac{r}{2}f(z) = f\left(x_0 + \frac{r}{2}z\right) < \alpha,$$

e assim

$$f(z) < \frac{2}{r}(\alpha - f(x_0)).$$

Como isto vale para todo z com $\|z\| \leqslant 1$, temos

$$\sup_{\|z\|\leqslant 1} f(z) \leqslant \frac{2}{r}(\alpha - f(x_0)).$$

Logo f é limitada e, pelo Teorema 3.21, temos f contínua. ■

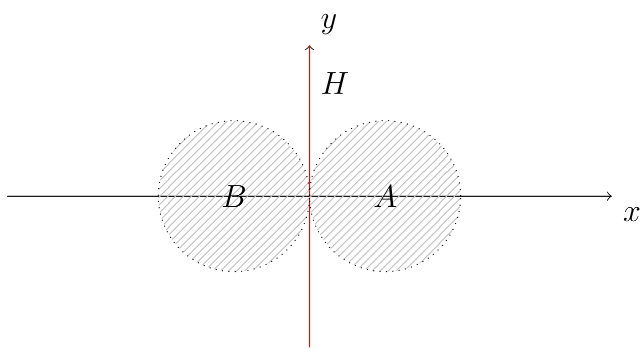
Agora vamos definir os conceitos de *separação*, que serão o ponto chave das formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

Definição 4.23. *Seja E um espaço vetorial normado e consideremos $A, B \subset E$. Dizemos que o hiperplano H da equação $[f = \alpha]$ **separa** A e B se $f(x) \leqslant \alpha$, para todo $x \in A$ e $f(y) \geqslant \alpha$, para todo $y \in B$.*

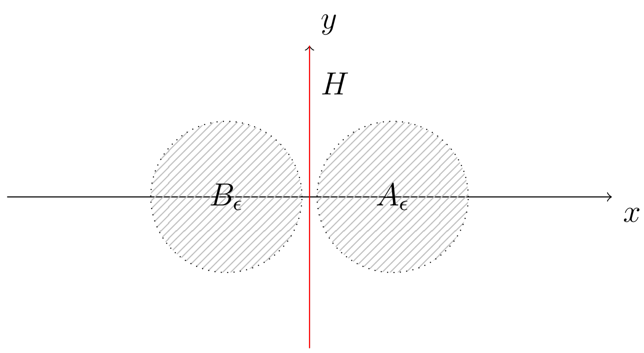
*Dizemos que o hiperplano H **separa estritamente** A e B se existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \leqslant \alpha - \epsilon$, para todo $x \in A$ e $f(y) \geqslant \alpha + \epsilon$, para todo $y \in B$.*

Exemplo 4.24. *Considere $E = \mathbb{R}^2$, e H o hiperplano $[f = 0]$, onde $f(x, y) = x$. Então:*

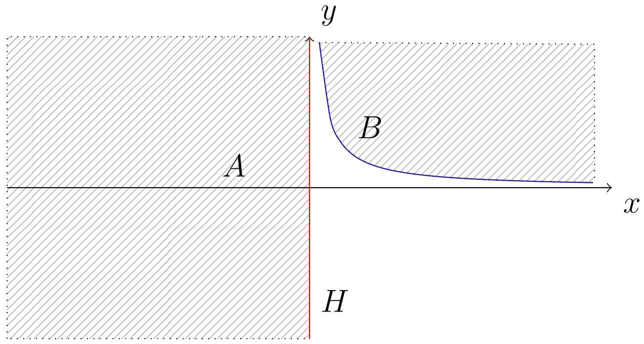
(a) *H separa os conjuntos $A = B_1((1, 0))$ e $B = B_1((-1, 0)$, mas não estritamente.*



(b) *Para cada $\epsilon > 0$, H separa estritamente os conjuntos $A_\epsilon = B_1((1 + \epsilon, 0))$ e $B_\epsilon = B_1((-1 - \epsilon, 0)$.*



(c) *H separa os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \leqslant 0\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0$ e $y \geqslant \frac{1}{x}\}$, mas não estritamente.*



Note que um hiperplano separador $H = [f, \alpha]$ divide o espaço em dois pedaços, o conjunto $H^+ = \{x \in E \colon f(x) > \alpha\}$ e $H^- = \{x \in E \colon f(x) < \alpha\}$, que podem ser vistos como o lado direito (ou de cima) e esquerdo (ou de baixo) do hiperplano H.

Vamos buscar agora condições sobre conjuntos para que possamos garantir separação (estrita ou não).

Lema 4.25. *Sejam E um espaço normado, $C \subset E$ um conjunto convexo, aberto e não vazio com $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano de equação $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C.*

Demonstração: Vamos dividir esta demonstração em dois casos.

Caso 1: $0 \in C$.

Considere o funcional de Minkowski p para C (veja Definição 4.16). Como $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$, pelo item (4) da Proposição 4.17, se $x_0 \in E$ é tal que $x_0 \notin C$ devemos ter $p(x_0) \geqslant 1$. Defina $F = \{tx_0 \colon t \in \mathbb{R}\}$ e $g \colon F \to \mathbb{R}$ por $g(tx_0) = t$. Claramente g é um funcional linear de F, isto é, $g \in F^*$. Além disso, se $t \geqslant 0$, temos

$$g(tx_0) = t \overset{(i)}{\leqslant} tp(x_0) = p(tx_0),$$

onde em (i) utilizamos que $p(x_0) \geqslant 1$. Agora, para $t < 0$ temos

$$g(tx_0) = t < 0 \leqslant p(tx_0),$$

o que mostra que $g(tx_0) \leqslant p(tx_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in F$.

Dos itens (1) e (2) da Proposição 4.17, sabemos que p é uma função positivamente homogêneoa e subaditiva definida em E. Portanto, segue da Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach (Teorema 4.10) que existe um prolongamento f de g a todo E tal que $f(x) \leqslant p(x)$, para todo $x \in E$. Assim, do item (3) da Proposição 4.17, segue que

$$f(x) \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \text{ para todo } x \in E$$

e portanto $f \in E'$. Ainda $f(x_0) = g(x_0) = 1$, pois f é prolongamento de g (logo $f|_F = g$) e também se $x \in C$ temos $f(x) \leqslant p(x) < 1 \leqslant p(x_0)$, onde usamos novamente o item (4) da Proposição 4.17. Portanto concluímos a demonstração neste caso.

Caso 2: $0 \notin C$.

Neste caso, fixemos $y \in C$, e definamos o conjunto $C_1 = C - y = \{x - y \colon x \in C\}$. Como C é não-vazio, aberto e convexo, C_1 claramente também é. Além disso $0 = y - y \in C - y = C_1$, e assim podemos usar o Caso 1 para o convexo C_1 e o ponto $y_0 = x_0 - y$. Encontramos assim um funcional $f \in E'$ com $f(y_0) = 1$ e $f(x) < 1$ para todo $x \in C_1$. Desta maneira, se $x \in C$, temos $x - y \in C_1$ e

$$f(x) - f(y) = f(x - y) < 1 = f(y_0) = f(x_0 - y) = f(x_0) - f(y),$$

o que nos dá $f(x) < f(x_0)$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema 4.26 (Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)**.** Sejam E um espaço vetorial normado e $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado $H = [f = \alpha]$ que separa A e B.

Demonstração: Como A, B são ambos não-vazios, podemos escolher $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$. Defina $x_0 = b_0 - a_0$ e $C = A - B + x_0$. Claramente C é não-vazio. Vamos a seguir mostrar que C é aberto, convexo e que $x_0 \notin C$, isto é, que estamos nas condições de aplicar o Lema 4.25.

Afirmação 1: $x_0 \notin C$.

De fato, se $x_0 \in C = A - B + x_0$, deveriam existir $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x_0 = a - b + x_0$, o que nos dá $0 = a - b$ e consequentemente $a = b$. Mas assim $a, b \in A \cap B = \varnothing$, o que nos dá uma contradição com a hipótese de A e B serem disjuntos. Portanto $x_0 \notin C$.

Afirmação 2: C é aberto.

De fato, seja $x \in C$, então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x = a - b + x_0$. Assim $x + b - x_0 = a \in A$, e como A é aberto, existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset A$. Seja $y \in B_r(x)$. Note que $y_1 = y + b - x_0$ é tal que

$$\|y_1 - a\| = \|y + b - x_0 - (x + b - x_0)\| = \|y - x\| < r,$$

e portanto $y_1 \in B_r(a) \subset A$, isto é, $y_1 \in A$ e assim $y = y_1 - b + x_0 \in A - B + x_0 = C$, e portanto $B_r(x) \subset C$, o que mostra que C é aberto.

Afirmação 3: C é convexo.

De fato, sejam $x_1 = a_1 - b_1 + x_0 \in C$, $x_2 = a_2 - b_2 + x_0 \in C$ e $t \in [0, 1]$, onde $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Temos

$$\begin{aligned} tx_1 + (1-t)x_2 &= t[a_1 - b_1 + x_0] + (1-t)[a_2 - b_2 + x_0] \\ &= [ta_1 + (1-t)a_2] - [tb_1 + (1-t)b_2] + x_0. \end{aligned}$$

Como A é convexo, temos $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$. Analogamente, como B é convexo, temos $tb_1 + (1-t)b_2] \in B$, e portanto

$$tx_1 + (1-t)x_2 = [ta_1 + (1-t)a_2] - [tb_1 + (1-t)b_2] + x_0 \in A - B + x_0 = C,$$

o que prova a convexidade de C.

Podemos então aplicar o Lema 4.25 para x_0 e C. Assim obtemos $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$, ou seja,

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f(a - b + x_0) < f(x_0) \text{ para todo } a \in A \text{ e para todo } b \in B,$$

o que implica que $f(a) < f(b)$ para todos $a \in A$ e $b \in B$. Deixando $a \in A$ fixo e tomando o ínfimo para $b \in B$, obtemos

$$f(a) \leqslant \inf_{b \in B} f(b),$$

e agora tomando o supremo para $a \in A$, temos

$$\sup_{a \in A} f(a) \leqslant \inf_{b \in B} f(b).$$

Tome $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in B} f(y)$. Então, $f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b)$, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. Como $f \in E'$ segue da Proposição 4.22 que o hiperplano $H = [f = \alpha]$ é fechado e separa A e B. ■

Antes de passar para o próximo resultado, faremos dois lemas com resultados técnicos. Para isso, se $A \subset E$ é um subconjunto não-vazio de um espaço vetorial normado e $r > 0$, definimos

$$A_r = A + B_r(0) = \{a + z \colon a \in A \text{ e } \|z\| < r\}.$$

Lema 4.27. *Temos as seguintes propriedades para A_r:*

(a) *A_r é aberto;*

(b) *se A é convexo, então A_r é convexo.*

Demonstração:

De (a): Seja $x \in A_r$ então $x = a + z$, com $a \in A$ e $\|z\| < r$. Escolha $\eta > 0$ tal que $B_\eta(z) \subset B_r(0)$, o que é possível pois $z \in B_r(0)$ e $B_r(0)$ é aberto.

Se $y \in E$ é tal que $\|y - x\| < \eta$ então definindo $z_1 = y - a$ temos $z_1 - z = y - x$ e portanto $\|z_1 - z\| < \eta$, o que nos dá $z_1 \in B_\eta(z) \subset B_r(0)$ e $y = a + z_1 \in A + B_r(0) = A_r$. Portanto $B_\eta(x) \subset A_r$ e A_r é aberto.

De (b): Sejam $x, y \in A_r$, com $x = a_1 + z_1$ e $y = a_2 + z_2$, onde $a_1, a_2 \in A$ e $z_1, z_2 \in B_r(0)$. Se $t \in [0,1]$ temos

$$tx + (1-t)y = t[a_1 + z_1] + (1-t)[a_2 + z_2] = [ta_1 + (1-t)a_2] + [tz_1 + (1-t)z_2].$$

Da convexidade de A, temos $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ e da convexidade de $B_r(0)$ temos $tz_1 + (1-t)z_2 \in B_r(0)$. Portanto

$$tx + (1-t)y = [ta_1 + (1-t)a_2] + [tz_1 + (1-t)z_2] \in A + B_r(0) = A_r \text{ para todo } t \in [0,1];$$

e conclui a prova da convexidade de A_r. ∎

Lema 4.28. *Sejam A, B subconjuntos não-vazios e disjuntos de um espaço vetorial E. Se A é fechado e B é compacto, então existe $r > 0$ tal que A_r e B_r são disjuntos.*

Demonstração: Suponha por absurdo, que a tese seja falsa, isto é, assuma que para todo $r > 0$, existe $x_r \in A_r \cap B_r$. Assim, para cada n inteiro positivo, podemos encontrar

$$x_n \in A_{1/n} \cap B_{1/n}.$$

Como $x_n \in B_{1/n}$ para cada n, existem $b_n \in B$ e $z_n \in B_{1/n}(0)$ tais que $x_n = b_n + z_n$. Como B é compacto e $\{b_n\} \subset B$, existe uma subsequência $\{n_k\}$ dos inteiros positivos e um ponto $b \in B$ tais que $\|b_{n_k} - b\| \to 0$ quando $k \to \infty$. Ainda $\|z_{n_k}\| < \frac{1}{n_k} \to 0$ quando $k \to \infty$, e portanto

$$\|x_{n_k} - b\| \leqslant \|b_{n_k} - b\| + \|z_{n_k}\| \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Como $x_{n_k} \in A_{1/n_k}$, existe $a_k \in A_{1/n_k}$ e $w_k \in B_{1/n_k}(0)$ tais que $x_{n_k} = a_k + w_k$ para cada k. Mas $x_{n_k} \to b$ e $w_k \to 0$ quando $k \to \infty$, assim

$$a_k = x_{n_k} - w_k \to b \text{ quando } k \to \infty.$$

Como $\{a_k\} \subset A$ e A é fechado, segue que $b \in A$. Assim $b \in A \cap B = \varnothing$, e chegamos em um absurdo. Portanto, deve existir $r > 0$ tal que $A_r \cap B_r = \varnothing$. ∎

No resultado acima, é claro que se $A_r \cap B_r = \varnothing$ então $A_s \cap B_s = \varnothing$ para todo $0 < s \leqslant r$, já que $A_s \subset A_r$ e $B_s \subset B_r$.

Agora sim temos as ferramentas necessárias para demonstrar a Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 4.29 (Segunda Forma Geométrica do Teorema Hahn-Banach)**.** Sejam E um espaço vetorial normado e $A, B \subset E$ subconjuntos não-vazios, convexos e disjuntos. Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado $H = [f = \alpha]$ que separa estritamente A e B.

Demonstração: Usando o Lema 4.28, existe $r > 0$ tal que $A_r \cap B_r = \varnothing$. Do Lema 4.27 sabemos que A_r, B_r são abertos e convexos. Assim, podemos utilizar a Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach para A_r e B_r, e encontrar um hiperplano fechado $H = [f = \alpha]$ que separa A_r e B_r, ou seja

$$f(a + rz) \leqslant \alpha \leqslant f(b + rw) \text{ para todos } a \in A,\ b \in B \text{ e } z, w \in B_1(0).$$

Assim, para todos $a \in A$, $b \in B$ e $z, w \in B_1(0)$ obtemos

$$f(a) + rf(z) \leqslant \alpha \leqslant f(b) + rf(w),$$

e em particular, tomando $w = -z$ temos

$$f(a) + rf(z) \leqslant \alpha \leqslant f(b) - rf(z).$$

Assim $f(a)+rf(z) \leqslant \alpha$ para todo $a \in A$ e $z \in B_1(0)$. Mantendo a fixado e tomando o supremo para $z \in B_1(0)$ obtemos

$$f(a) + r\|f\|_{E'} \leqslant \alpha,$$

o que nos dá

$$f(a) \leqslant \alpha - r\|f\|_{E'} \text{ para todo } a \in A.$$

Analogamente obtemos

$$\alpha + r\|f\|_{E'} \leqslant f(b) \text{ para todo } b \in B,$$

o que mostra que o hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa estritamente A e B, e conclui a demonstração. ∎

Notemos que a hipótese de B ser compacto não pode ser retirada. O item (c) do Exemplo 4.24 nos fornece conjuntos A e B não-vazios, convexos, fechados e disjuntos onde nenhum hiperplano separa estritamente A de B.

Duas principais consequências da Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach podem ser vistas nos resultados abaixo, mas primeiro faremos um lema técnico de Álgebra Linear.

Lema 4.30. *Sejam E um espaço vetorial e $F \subset E$ um subespaço vetorial. Então $\overline{F}$ também é subespaço vetorial de E.*

Demonstração: Como $0 \in F$ e $F \subset \overline{F}$ então $0 \in \overline{F}$. Sejam agora $x_1, x_2 \in \overline{F}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Da definição de $\overline{F}$, existem $\{a_{n,1}\}, \{a_{n,2}\} \in F$ tal que $\|a_{n,1} - x_1\| \to 0$ e $\|a_{n,2} - x_2\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim $\|(a_{n,1} + \lambda a_{n,2}) - (x_1 + \lambda x_2)\| \leqslant \|a_{n,1} - x_1\| + |\lambda|\|a_{n,2} - x_2\| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como $\{a_{n,1} + \lambda a_{n,2}\} \subset F$, pois F é subespaço vetorial, segue que $x_1 + \lambda x_2 \in \overline{F}$, o que prova que $\overline{F}$ é subespaq vetorial de E. ∎

Proposição 4.31. *Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço vetorial de E tal que $\overline{F} \neq E$, isto é, o fecho de F não é todo o espaço E. Então existe $f \in E'$, f não identicamente nula, tal que*

$$\langle f, x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in F.$$

Demonstração: Como $\overline{F} \subset E$ e $\overline{F} \neq E$, existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin \overline{F}$. Segue do Lema 4.30 que $\overline{F}$ é subespaço vetorial de E, e da Observação 4.15 sabemos que $\overline{F}$ é um conjunto convexo.

Assim temos $\{x_0\}$ claramente convexo e compacto e $\overline{F}$ convexo e fechado, ambos não-vazios (lembre-se que $0 \in \overline{F}$) e $\overline{F} \cap \{x_0\} = \varnothing$. Estamos em condições de aplicar a Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach com $A = \{x_0\}$ e $B = \overline{F}$, e obtemos um hiperplano fechado $H = [f = \alpha]$ que separa estritamente A de B, isto é, $f \in E'$ e existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leqslant \alpha - \epsilon \text{ para todo } x \in \overline{F} \text{ e } f(x_0) \geqslant \alpha + \varepsilon;$$

e em particular

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \text{ para todo } x \in \overline{F}. \tag{4.9}$$

Mas então, se g é a restrição de f a F, temos $g \in F'$ e $g(x) \leqslant \alpha - \epsilon$, para todo $x \in F$. Portanto $g\colon F \to \mathbb{R}$ é um funcional linear não-sobrejetor, e do que vimos na Seção 3.2, obtemos que g é o funcional nulo, isto é, $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim

$$\langle f, x \rangle = f(x) = g(x) = 0 \text{ para todo } x \in F,$$

e usado (4.9) para um $x \in F$ fixado, temos

$$0 = f(x) < \alpha < f(x_0),$$

o que mostra que $f(x_0) \neq 0$ e f não é identicamente nulo, o que conclui a demonstração. ■

Lida de outra maneira, esta proposição nos dá o seguinte resultado.

Corolário 4.32. *Sejam E e F como na Proposição 4.31. Suponha que a seguinte condição se verifique:*

Se $f \in E'$ é tal que $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in F$ então temos $f \equiv 0$ (isto é, f é identicamente nulo).

Então $\overline{F} = E$, o que quer dizer que F é denso em E.

Demonstração: Se este não fosse o caso, existiria $x_0 \in E \setminus \overline{F}$, e a Proposição 4.31 nos daria um funcional $f \in E'$ não identicamente nulo com $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in F$, o que contraria a condição da hipótese. ∎

Este resultado é uma recíproca a um conhecido resultado de Análise, que diz que se uma função contínua é nula num conjunto denso, então ela é nula em todo o espaço. Além disso, este resultado poderia ser interpretado da seguinte maneira: se o único hiperplano separador $H = [f = 0]$ que contém o subespaço F for todo o espaço E, então F deve ser denso.

Tal corolário é de fundamental importância em Análise Funcional, e na Teoria Espectral de Operadores Não-Limitados.

5 Conclusão

Apresentamos neste trabalho um dos principais conceitos vistos em Análise Funcional, o Teorema de Hanh-Banach e suas aplicações, visando a compreensão significativa de suas demonstrações.

A Álgebra Linear é importante para a formação básica de um matemático e a generalização da mesma deveria ser inclusa nas mesmas condições. No entanto, a Análise Funcional, não recebe a mesma atenção na graduação. Como os alunos de graduação geralmente não são apresentados aos estudos de Análise Funcional na sua formação inicial uma das intenções desse trabalho foi mostrar de modo claro e detalhado alguns dos principais resultados desta área, entendendo a necessidade do estudo.

O Teorema de Hahn-Banach, como foi visto, é a junção dos estudos de dois matemáticos, Hans Hahn e Stefan Banach que embora não tivessem feito nenhum estudo juntos, e não há histórico de que ao menos se conhecessem, seus conhecimentos avançados para a época e seus estudos na área da matemática fizeram com que fossem reconhecidos dentro de um mesmo teorema. Com estes estudos a Análise Funcional obteve um avanço significativo.

No decorrer do trabalho buscamos incluir um contexto histórico visando situar sua base inicial. Antes de enunciar os Teoremas de Hahn-Banach, forma analítica e formas geométricas, apresentamos definições, exemplos, teoremas, lemas e demonstrações necessárias para uma melhor compreensão deste. Após os Teoremas e suas demonstrações, fizemos aplicações e corolários. Toda essa estrutura do trabalho auxiliou para a efetivação dos objetivos.

Por fim, percebemos a necessidade dos estudos de Análise Funcional, mas também entendemos sua complexidade para o nível de graduação, todavia tentamos apresentar da maneira mais detalhada possível e desejamos que seja um acervo de futuros estudos matemáticos.

Referências

[1] Aguiar, T. dos S.: *Uma introdução à Análise Funcional: O Teorema de Hahn-Banach*. Monografia de Graduação, Ilhéus (2008). Citado na página 11.

[2] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*, Masson (1987). Citado na página 11.

[3] Bryan, K. e Leise, T.: The $25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google, *SIAM Review*, **48** 569-581 (2006). Citado na página 10.

[4] Cavalcanti, M.; Cavalcanti, V. e Komornik, V.: *Introdução à Análise Funcional*, Editora da UEM (2011). Citado na página 11.

[5] Coelho, F. U.; Lourenço, M. L.: *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp (2007). Citado na página 11.

[6] Filho, G.S. dos S.: *O Teorema de Hahn-Banach e aplicações em espaços separáveis*. Monografia de Graduação, Eunápolis: IFBA (2012). Citado na página 11.

[7] Francisco, R. F. de O.: *Teorema de Hahn-Banach e suas aplicações*. XXVI Congresso de Iniciação Científica. Anais de Evento. Rio Claro: UNESP. Citado na página 11.

[8] Rudin, W.: *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company (1973). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 40.