Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein

Jadina Amaro
Orientador: Prof.° Dr. Eliezer Batista

Florianópolis
Junho de 2017

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática
Pura e Aplicada

Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Jadina Amaro
Florianópolis
Junho de 2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Amaro, Jadina
Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein / Jadina Amaro ; orientador, Eliezer Batista, 2017.
140 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de Hopf. 3. Representações de Grupos. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein

por

Jadina Amaro[1]

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de "Mestre", Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Eliezer Batista
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves
(Universidade Federal do Paraná - UFPR)

Prof. Dr. Mykola Khrypchenko
(Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC)

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
(Universidade Federal de Santa Catarina- UFSC)

Florianópolis, Junho de 2017.

[1]Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

Resumo

Neste trabalho exploraremos alguns conceitos e resultados relativos a representações de grupos e álgebras de Hopf. Como resultado principal, apresentaremos a demonstração do Teorema de Dualidade de Tannaka-Krein. Tal resultado trata do isomorfismo entre uma álgebra de Hopf comutativa real H, munida de uma integral não degenerada e a álgebra das funções representativas do grupo compacto $\mathcal{G}(H)$, dos morfismos de álgebra de H, no corpo dos reais.

Abstract

In this work, we will explore some concepts and results related to representations of groups and Hopf algebras. As main result, we will present the proof of the Tannaka-Krein Duality Theorem. This theorem deals with the isomorphism between a real commutative Hopf algebra H, provided with a non-degenerate integral and algebra of representative functions of the compact group $\mathcal{G}(H)$ of the algebra morphisms from H, on the field of real numbers.

Índice

Introdução

O teorema da Dualidade de Tannaka-Krein foi provado pelos matemáticos Tadao Tannaka e Mark Grigorievich Krein, no século passado. Para entendê-lo, iniciamos fixando um grupo G e estudando duas maneira de representá-lo: através de sua ação em conjuntos e representações lineares. Olhando para a categoria de ações de G em conjuntos e de representações lineares de G, podemos definir os respectivos funtores esquecimento (ambos denotados por U), no primeiro caso tomando valores na categoria dos conjuntos e no segundo caso, tomando valores na categoria dos espaços vetoriais.

Para este estudo os conhecimentos sobre teoria de categorias foram fundamentais. A teoria de categorias é muito rica e aqui são apresentados resultados importantes que nos proporcionarão a compreensão de alguns fatos.

Considerando a categoria das ações de grupo em conjuntos, conseguimos mostrar que o conjunto dos endomorfismos naturais de U em U é isomorfo ao grupo G, ou seja, mesmo sem saber qual é o grupo em questão, vemos como é sua operação a partir da operação de composição vertical dos endomorfismos de U, denotado por $\mathrm{End}(U)$.

Para construir a categoria das representações lineares de G, fixamos um corpo $\Bbbk$, e conseguimos um isomorfismo de álgebras entre os endomorfismos de U e a álgebra de grupo $\Bbbk G$. Assim, conhecendo apenas a álgebra $\mathrm{End}(U)$ temos informação sobre a álgebra de grupo $\Bbbk G$.

Outro caso, num ambiente diferente, é o Dual de Pontrjagin. Dado um grupo abeliano G o seu dual de Pontrjagin, denotado por $\widehat{G}$ é o grupo dos homomorfismos de grupos de G no círculo unitário complexo $\mathbb{T}$. Para grupos abelianos localmente compactos temos o isomorfismo $G \cong \widehat{\widehat{G}}$. Neste trabalho veremos apenas o caso finito. Aqui também há uma recuperação da estrutura do grupo conhecendo apenas o seu bidual.

Um tipo de função importante para a continuação do estudo são as funções representativas de um grupo G. São funções de G em $\mathbb{R}$ (podendo ser em $\mathbb{C}$) associada às representações lineares de dimensão finita do grupo, pois são geradas por entradas de matrizes da representação em questão. Quando o grupo é topológico ainda exigimos que elas sejam contínuas. Os matemáticos Fritz Peter e Hermann Weyl provaram um dos teoremas básicos em análise harmônica que diz que o conjunto das funções representativas de G, denotado por $R(G)$, é denso no conjunto das funções contínuas de G em $\mathbb{R}$, esse resultado pode ser visto em [18]. Essas funções nos ajudarão a unir informações topológicas e algébricas do grupo.

Veremos que o conjunto das funções representativas de um grupo é uma álgebra de Hopf. Sabendo disso, fez-se necessário um estudo sobre as álgebras de Hopf e alguns resultados mais importantes, como o Teorema Fundamental de Biálgebras e o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf.

No teorema de Tannaka-Krein temos uma álgebra de Hopf comutativa real H e recuperamos sua estrutura olhando para as funções representativas do grupo de homomorfismos de álgebra de H em $\mathbb{R}$. A outra parte do teorema considera um grupo topológico compacto Hausdorff G e mostra que ele é isomorfo ao grupo dos homomorfismos de álgebra de $R(G)$ em $\mathbb{R}$.

O propósito do trabalho é estudar a demonstração do Teorema da Dualidade de Tannaka-Krein e outros teoremas de dualidade como os que foram apresentados inicialmente. Uma versão mais geral e com uma abordagem categórica é o Teorema da Reconstrução de Tannaka que não trataremos aqui.

No primeiro capítulo apresentaremos resultados sobre dois tipos de representações de grupos: as ações de grupos em um conjunto e as representações lineares. Primeiramente exploramos os resultados conhecidos e depois chegamos à uma abordagem categórica.

No segundo capítulo teremos uma apresentação da teoria de álgebras, coálgebras, biálgebras, álgebras de Hopf, módulos e comódulos. Tais resultados serão de extrema importância para o teorema principal do trabalho. Aqui também abordaremos algumas propriedades da álgebra de funções representativas de um grupo.

No terceiro capítulo trataremos dos resultados necessários para a demonstração dos dois teoremas intitulados como Dualidade de Tannaka-Krein. Ainda veremos o Teorema de Dualidade de Pontrjagin.

Por último temos dois apêndices que contém resultados topológicos importantes, como o teorema de Stone-Weierstrass e o Teorema de Peter-Weyl, que serão usados no último capítulo. No outro apêndice, teremos uma apresentação de resultados importantes sobre teoria de categorias.

Capítulo 1

Representações de Grupos

Neste capítulo, veremos alguns resultados e exemplos sobre representações de grupos e a categoria das representações de um grupo. As formas de representar um grupo aqui exploradas serão as ações de grupos e as representações lineares. Os resultados sobre teoria de categorias que serão utilizados neste capítulo (e ao longo do trabalho) estão no apêndice.

1.1 Ações de Grupos

A ação de um grupo em um conjunto é uma maneira de interpretar os elementos do grupo como bijeções em certo conjunto. Esta é uma importante ferramenta para conhecer um grupo e também para obter resultados em diversas áreas da matemática, grupos de isometrias de um espaço métrico por exemplo. Existem algumas formas diferentes de definir a ação de um grupo em um conjunto, e vamos apresentá-las, bem como seus exemplos e resultados.

Dado X um conjunto, denotamos o conjunto das bijeções de X em X por $\mathrm{Bij}(X)$. Este conjunto tem estrutura de grupo com relação à composição e tem como elemento neutro a função identidade de X, denotada por Id_X.

Definição 1.1. Sejam G um grupo e X um conjunto. Dizemos que G age em X, se existe um homomorfismo de grupos $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X)$. Denotaremos a bijeção $\alpha(g) : X \longrightarrow X$ por $\alpha_g : X \longrightarrow X$.

Com base na definição acima, podemos definir a seguinte aplicação:

$$
\begin{array}{rccl}
\alpha: & G \times X & \longrightarrow & X \\
 & (g,x) & \longmapsto & \alpha_g(x).
\end{array}
$$

Como α é homomorfismo de grupos, dados $g, h \in G$, segue:

$$
\begin{aligned}
\alpha(gh, x) &= \alpha_{gh}(x) \\
&= \alpha_g(\alpha_h(x)) \\
&= \alpha(g, \alpha_h(x)) \\
&= \alpha(g, \alpha(h, x))
\end{aligned}
$$

além disso,

$$
\begin{aligned}
\alpha(e, x) &= \alpha_e(x) \\
&= \mathrm{Id}_X(x) \\
&= x
\end{aligned}
$$

Proposição 1.2. *Sejam G um grupo, X um conjunto não vazio e $\phi : G \times X \longrightarrow X$ uma função que satisfaz:*

(i) $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$

(ii) $\phi(e, x) = x$.

Então a aplicação

$$
\begin{array}{rccl}
\phi: & G & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(X) \\
 & g & \longmapsto & \phi_g
\end{array},
$$

onde $\phi_g(x) = \phi(g, x)$, é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Primeiramente, vejamos que ϕ está bem definida. Seja $g \in G$. Então, dado $x \in X$ temos:

$$
\begin{aligned}
\phi_g \circ \phi_{g^{-1}}(x) &= \phi_g(\phi(g^{-1}, x)) \\
&= \phi(g, \phi(g^{-1}, x)) \\
&= \phi(gg^{-1}, x) \\
&= \phi(e, x) \\
&= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g(x) &= \phi_{g^{-1}}(\phi(g, x)) \\
&= \phi(g^{-1}, \phi(g, x))
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \phi(g^{-1}g, x) \\ &= \phi(e, x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Isso significa que ϕ_g é bijetora para qualquer $g \in G$. Logo a aplicação ϕ está bem definida. Vejamos que é homomorfismo de grupos.

Sejam $g, h \in G$, então:

$$\begin{aligned} \phi_{gh}(x) &= \phi(gh, x) \\ &= \phi(g, \phi(h, x)) \\ &= \phi_g(\phi(h, x)) \\ &= \phi_g(\phi_h(x)) \\ &= \phi_g \circ \phi_h(x). \end{aligned}$$

Portanto $\phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h$ e, com isso, ϕ é homomorfismo de grupos. $\square$

Com o exposto anteriormente e com esta última proposição, podemos concluir que a definição de ação de um grupo em um conjunto é equivalente a seguinte definição:

Definição 1.3. Sejam G um grupo e X um conjunto. Dizemos que G age em X se existe uma função $\phi : G \times X \longrightarrow \mathrm{X}$ que satisfaz:

(i) $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$;

(ii) $\phi(e, x) = x$.

Exemplo 1.4 (Açaõ Trivial)**.** Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio. Então G age em X trivialmente pela ação:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(X) \\ & g & \longmapsto & \mathrm{Id}_X \end{array}.$$

Dados $g, h \in G$ temos que

$$\alpha_{gh} = \mathrm{Id}_X = \mathrm{Id}_X \circ \mathrm{Id}_X = \alpha_g \circ \alpha_h.$$

logo α é um homomorfismo de grupos.

Exemplo 1.5 (Ação por Conjugação)**.** Seja G um grupo e considere $X = G$. Defina, para cada $g \in G$ a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi_g : & G & \longrightarrow & G \\ & h & \longmapsto & ghg^{-1}. \end{array}$$

Sejam $g_1, g_2, h \in G$. Então

$$\begin{array}{rcl} \phi_{g_1 g_2}(h) & = & (g_1 g_2)h(g_1 g_2)^{-1} \\ & = & g_1(g_2 h g_2^{-1})g_1^{-1} \\ & = & g_1(\phi_{g_2}(h))g_1^{-1} \\ & = & \phi_{g_1}(\phi_{g_2}(h)) \\ & = & \phi_{g_1} \circ \phi_{g_2}(h). \end{array}$$

Assim, a função $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(G)$ que associa a cada $g \in G$ o homomorfismo de grupos ϕ_g é um homomorfismo de grupos, sendo portanto, uma ação de grupos.

Exemplo 1.6. Considere G o grupo das matrizes invertíveis de determinante 1 denotado por SO_3, o grupo de isometrias de $\mathbb{R}^3$, e $X = \mathbb{R}^3$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathrm{SO}_3 & \longleftrightarrow & \mathrm{Bij}(\mathbb{R}^3) \\ & [A] & \longmapsto & T_{[A]}, \end{array}$$

onde $T_{[A]}$ é a transformação linear associada à matriz $[A]$. Dos resultados de álgebra linear sabemos que, dadas duas matrizes $[A]$ e $[B]$, $T_{[A][B]} = T_{[A]} \circ T_{[B]}$, e isso mostra que ϕ é um homomorfismo de grupos, provando que SO_3 age em $\mathbb{R}^3$.

Observe que nos exemplos anteriores onde o conjunto que recebia a ação tinha alguma estrutura (grupo, espaço vetorial), as aplicações que davam origem à ação, poderiam ser restritas aos isomorfismos de grupos do grupo nele mesmo, ou às transformações lineares bijetoras do espaço nele mesmo, no caso do conjunto ser um espaço vetorial.

Exemplo 1.7 (Ação Regular à Esquerda)**.** Seja G um grupo e considere $X = G$. Defina

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & G & \longrightarrow & \mathrm{Bij}(G) \\ & g & \longrightarrow & \lambda_g, \end{array}$$

onde $\lambda_g(h) = gh$.

Seja $g \in G$. Temos que mostrar que λ_g é uma bijeção de G.

De fato, sejam h_1, h_2, tais que

$$\lambda_g(h_1) = \lambda_g(h_2)$$

então

$$gh_1 = gh_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2,$$

e isso mostra que λ_g é injetora.

Seja $h \in G$, então

$$\lambda_g(g^{-1}h) = g(g^{-1}h) = h,$$

e isso mostra que λ_g é sobrejetora.

Sejam $g_1, g_2, h \in G$. Então

$$\begin{aligned}\lambda_{g_1 g_2}(h) &= (g_1 g_2)h \\ &= g_1(g_2 h) \\ &= \lambda_{g_1}(g_2 h) \\ &= \lambda_{g_2}(\lambda_{g_2}(h)) \\ &= \lambda_{g_1} \circ \lambda_{g_2}(h).\end{aligned}$$

Como $h \in G$ é qualquer, temos que $\lambda_{g_1 g_2} = \lambda_{g_1} \circ \lambda_{g_2}$.

Assim, λ é um homomorfismo de grupos, e portanto G age em G por λ.

Além disso,

$$(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}.$$

Esta tambpem é chamada de *ação regular a esquerda.*

Teorema 1.8 (Teorema de Cayley)**.** *Seja G um grupo. Então G é isomorfo a um subgrupo de* $\mathrm{Bij}(G)$. *Se G tem ordem n então G é isomorfo à um subgrupo de S_n.*

Demonstração. Para demonstrar este teorema usaremos o homomorfismo de grupos que define a ação por multiplicação a esquerda, vista no Exemplo 1.7.

Vejamos que a aplicação λ é um homomorfismo de grupos injetor.

Seja $g \in G$ tal que $\lambda_g = \mathrm{Id}_G$ (a função identidade de G). Então

$$\lambda_g(h) = h, \text{ para todo } h \in H.$$

Tomando $h = e$ temos

$$g = ge = \lambda_g(e) = e.$$

Portanto λ é injetora. Assim, G é isomorfo a imagem de λ que é um subgrupo de $\mathrm{Bij}(G)$.

Se G tem ordem n então uma bijeção de G em G é uma permutação de n elementos, ou seja, $\mathrm{Bij}(G) = S_n$. Usando o que foi provado acima temos que G é isomorfo a um subgrupo de S_n. □

1.2 A Categoria $G - Set$

Seja G um grupo. Considere a classe dos pares (X, α), em que X é um conjunto e $\alpha : G \longrightarrow Bij(X)$ é um homomorfismo de grupos que define uma ação de G em X, (estes serão os objetos de nossa categoria) e um morfismos entre dois pares (X, α) e (Y, β), é uma função $f : X \longrightarrow Y$ tais que, para todo $g \in G$:

$$f \circ \alpha_g = \beta_g \circ f.$$

O conjunto dos morfismos entre dois objetos (X, α) e (Y, β) será denotado por

$${}_G\mathrm{Hom}((X, \alpha), (Y, \beta)).$$

Proposição 1.9. *A classe dos objetos e morfismos descritos acima forma uma categoria. Esta categoria será denominada G-Set.*

Demonstração. Sejam $(X, \alpha), (Y, \beta)$ e (Z, γ) objetos. A função Id_X identidade de X é um morfismo, pois

$$\mathrm{Id}_X \circ \alpha_g = \alpha_g \circ \mathrm{Id}_X.$$

Sejam $f_1 : X \longrightarrow Y$ e $f_2 : Y \longrightarrow Z$ morfismos e $g \in G$. Como a composição de funções é associativa temos:

$$\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1) \circ \alpha_g &= f_2 \circ (f_1 \circ \alpha_g) \\
&= f_2 \circ (\beta_g \circ f_1) \\
&= (f_2 \circ \beta_g) \circ f_1 \\
&= (\gamma_g \circ f_2) \circ f_1 \\
&= \gamma_g \circ (f_2 \circ f_1).
\end{aligned}$$

Logo $f_2 \circ f_1$ é um morfismo entre (X, α) e (Z, γ).

Assim esta classe de objetos e morfismos é uma categoria. □

Exemplo 1.10. Sejam (X, ϕ), (Y, ψ) objetos de G-Set. Então $(X \times Y, \phi \times \psi)$, em que $(\phi \times \psi)_g(x, y) = (\phi_g(x), \psi_g(y))$, também é um objeto de G-Set.

Sejam $g, h \in G$, $(x, y) \in X \times Y$. Então,

$$\begin{aligned}
(\phi \times \psi)_{gh}(x, y) &= (\phi_{gh}(x), \psi_{gh}(y)) \\
&= (\phi_g(\phi_h(x)), \psi_g(\psi_h(y))) \\
&= (\phi \times \psi)_g((\phi \times \psi)_h(x, y))
\end{aligned}$$

$$= (\phi \times \psi)_g \circ (\phi \times \psi)_h(x, y).$$

Assim, $\phi \times \psi$ é um homomorfismo de grupos e, portanto, define uma ação de G em $X \times Y$. Com isso, o par $(X \times Y, \phi \times \psi)$ é um objeto de G-Set.

Considere agora um conjunto unitário qualquer, digamos $X = \{*\}$. Então G age em X pela ação trivial que chamaremos de ϕ. Seja (Y, ψ) um objeto de G-Set. Afirmamos que $(\{*\} \times Y, \phi \times \psi)$ é isomorfo a (Y, ψ).

Defina,

$$\begin{array}{rccc} f: & \{*\} \times Y & \longrightarrow & Y \\ & (*, y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Verificaremos que f é um morfismo em G-Set. Sejam $g \in G$ e $y \in Y$. Então

$$\begin{aligned} f \circ (\phi \times \psi)_g(*, y) &= f(*, \psi_g(y)) \\ &= \psi_g(y) \\ &= \psi_g(f(*, y)) \\ &= \psi_g \circ f(*, y), \end{aligned}$$

isso mostra que f é um morfismo de G-Set.

Como f é claramente uma bijeção, temos que f é um isomorfismo.

Proposição 1.11. *A categoria G-Set possui objeto final.*

Demonstração. Afirmamos que o par $(\{*\}, \phi)$, em que ϕ é a ação trivial de G neste conjunto unitário, é o objeto final de G-Set. Seja (Y, β) objeto de G-Set. Uma vez que que no contra-domínio temos um conjunto unitário, a única função possível é a seguinte:

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \longrightarrow & \{*\} \\ & y & \longmapsto & * \end{array}.$$

Mais ainda, f é um morfismo em G-Set pois:

$$\begin{aligned} f \circ \beta_g(y) &= * \\ &= \phi_g(*) \\ &= \phi_g(f(y)) \\ &= \phi_g \circ f(y). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto unitário é objeto final.

□

Proposição 1.12. *A categoria G-Set possui objeto inicial.*

Demonstração. Considere o conjunto vazio. Como $G \times \emptyset = \emptyset$ podemos definir a função vazia $\emptyset_G : G \times \emptyset \longrightarrow \emptyset$, que na verdade é uma função de $\emptyset$ para $\emptyset$. Esta função define uma ação de G em $\emptyset$.

Além disso, dado qualquer (X, α) objeto de G-Set, a única função possível entre $\emptyset$ e X é a também a função vazia $\emptyset_X$, que é morfismo na categoria por vacuidade.

Assim, $(\emptyset, \emptyset_G)$ é o objeto inicial de G-Set. $\square$

Corolário 1.13. *A categoria G-Set não possui objeto nulo.*

Demonstração. Para que houvesse objeto nulo em G-Set, deveríamos ter a igualdade entre o conjunto vazio e um conjunto unitário, o que não ocorre. $\square$

1.2.1 Funtor Esquecimento

Nesta seção, mostraremos que o funtor esquecimento partindo da categoria G-Set e chegando na categoria Set é representável. E ainda, utilizando o Lema de Yoneda, conseguiremos recuperar a estrutura do grupo G a partir dos endomorfismos do funtor esquecimento.

Considerando as categorias G-Set e Set, definimos o funtor que associa a cada objeto de G-Set (X, α) o conjunto X, e a cada morfismo $f \in_G \mathrm{Hom}((X, \alpha), (Y, \beta))$ a função $f : X \longrightarrow Y$. Este é o chamado *funtor esquecimento*, e será denotado neste trabalho por U.

Definição 1.14. Um funtor covariante $U : \mathscr{C} \longrightarrow Set$ é dito *representável* se existem, um objeto C em $\mathscr{C}$ e um isomorfismo natural

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, \_) \Longrightarrow U.$$

Agora temos a seguinte proposição:

Proposição 1.15. *O funtor esquecimento* $U : G - \mathrm{Set} \longrightarrow \mathrm{Set}$ *é representável.*

Observação 1.16. Dado um morfismo f na categoria $\mathscr{C}$ denotaremos a função $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, f)$ por f_*.

Demonstração. Lembramos aqui que o funtor esquecimento U associa a cada objeto (X, α) o conjunto X e a cada morfismo f, ele mesmo visto como função.

Temos que mostrar que existem (X, α) objeto de G-Set e ψ isomorfismo natural entre os funtores $\mathrm{Hom}_{G-\mathrm{Set}}((X, \alpha), \_)$ e U.

O objeto escolhido será o (G, λ), do Exemplo 1.7.

Defina, para cada (X, α) em G-Set, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \psi_{(X,\alpha)}: & {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(X,\alpha)) & \longrightarrow & U(X,\alpha) \\ & f & \longmapsto & f(e), \end{array}$$

onde e é o elemento neutro de G.

Afirmação 1: ψ é uma transformação natural.

Temos que mostrar que, para quaisquer objetos (X,α), (Y,β) e morfismo $f:(X,\alpha) \longrightarrow (Y,\beta)$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(X,\alpha)) \arrow[r, "\psi_{(X,\alpha)}"] \arrow[d, "f_*"'] & X \arrow[d, "f"] \\ {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(Y,\beta)) \arrow[r, "\psi_{(Y,\beta)}"'] & Y \end{tikzcd}.$$

De fato, dado $f' \in_G \mathrm{Hom}((G,\lambda),(X,\alpha))$

$$\begin{aligned} f \circ \psi_{(X,\alpha)}(f') &= f \circ f'(e) \\ &= \psi_{(Y,\beta)}(f \circ f') \\ &= \psi_{(Y,\beta)} \circ f_*(f'), \end{aligned}$$

logo ψ é natural.

Afirmação 2: ψ é um isomorfismo natural.

Para mostrar isso, basta ver que $\psi_{(X,\alpha)}$ é uma bijeção, para qualquer (X,α).

Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}((G,\lambda),(X,\alpha))$ tais que $\psi_{(X,\alpha)}(f_1) = \psi_{(X,\alpha)}(f_2)$, ou seja, $f_1(e) = f_2(e)$. Como f_1 e f_2 são morfismos em G-Set, para todos $g,h \in G$ as duas equações abaixo são verdadeiras:

$$f_1 \circ \lambda_g(h) = f_1(gh) = \alpha_g \circ f_1(h); \tag{1.1}$$

$$f_2 \circ \lambda_g(h) = f_2(gh) = \alpha_g \circ f_2(h). \tag{1.2}$$

fazendo $h = e$ temos da equação (1.1)

$$f_1(g) = \alpha_g \circ f_1(e)$$

e temos da equação (1.2) que

$$f_2(g) = \alpha_g \circ f_2(e).$$

Como $f_1(e) = f_2(e)$ segue que

$$f_1(g) = f_2(g),$$

para todo $g \in G$ e logo $f_1 = f_2$.

Vejamos agora que $\psi_{(X,\alpha)}$ é sobrejetora. Seja $x \in X$. Defina

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \longrightarrow & X \\ & g & \longmapsto & \alpha_g(x) \end{array}.$$

Note que f é morfismo em G-Set, pois dados $g, h \in G$ tem-se:

$$\begin{aligned} f \circ \lambda_g(h) &= f(gh) \\ &= \alpha_{gh}(x) \\ &= \alpha_g \circ \alpha_h(x) \\ &= \alpha_g(f(h)) \\ &= \alpha_g \circ f(h). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \psi_{(X,\alpha)}(f) &= f(e) \\ &= \alpha_e(x) \\ &= x, \end{aligned}$$

logo $\psi_{(X,\alpha)}$ é sobrejetora.

Concluímos assim que ψ é um isomorfismo natural e, consequentemente, o funtor esquecimento U é representável. $\square$

Relembremos agora o Lema de Yoneda:

Lema 1.17 (Yoneda). *Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria localmente pequena e $F : \mathscr{C} \longrightarrow Set$ um funtor covariante e C um objeto de $\mathscr{C}$. Então existe bijeção y*

$$y: \quad \mathrm{Nat}(\mathscr{C}(C, \_), F) \quad \longrightarrow \quad F(C)$$

que associa a cada transformação natural η, de $\mathscr{C}(C, \_)$ para F, o objeto $\eta_C(\mathrm{Id}_C)$.

Proposição 1.18. *Sejam $\mathrm{End}(U)$ o conjunto das transformações naturais de U em U, sendo U o funtor esquecimento, e*

$${}_G\mathrm{Hom}((G, \lambda), \_) : G - \mathrm{Set} \longrightarrow G - \mathrm{Set}$$

o funtor que o representa. Então, vistos como monoides,

$$\mathrm{End}(U) \cong \mathrm{End}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)).$$

Demonstração. Para cada $(X,\alpha) \in G-\mathrm{Set}$ considere a aplicação $\psi_{(X,\alpha)}$ da Proposição 1.15.

Vamos mostrar que sua inversa é a transformação natural ϕ, que aplicada em (X,α) é:

$$\begin{array}{rccl} \phi_{(X,\alpha)}: & X & \longrightarrow & {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(X,\alpha)) \\ & x & \longmapsto & f_x \end{array}$$

onde

$$f_x(g) = \alpha_g(x), \text{ para todo } g \in G.$$

Seja $x \in X$. Então,

$$\begin{aligned} (\psi_{(X,\alpha)} \circ \phi_{(X,\alpha)}(x)) &= \psi_{(X,\alpha)}(f_x) \\ &= f_x(e) \\ &= \alpha_e(x) \\ &= x \\ &= \mathrm{Id}_X(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\phi_{(X,\alpha)} \circ \psi_{(X,\alpha)})(f)(g) &= \psi_{(X,\alpha)}(f(e))(g) \\ &= \alpha_g(f(e)) \\ &= f(\lambda_g(e)) \\ &= f(g), \end{aligned}$$

logo

$$(\phi_{(X,\alpha)} \circ \psi_{(X,\alpha)})(f) = f.$$

Defina a função

$$\nu : \mathrm{End}(U) \longrightarrow \mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_),{}_G \mathrm{Hom}((G,\lambda), \_))$$

dada por

$$\nu(\eta)_{(X,\alpha)} = \phi_{(X,\alpha)} \circ \eta_{(X,\alpha)} \circ \psi_{(X,\alpha)}$$

Assim, ν está bem definida, uma vez que é dada por uma composição de transformações naturais, e além disso é bijetora, pois

$$\nu^{-1}(\eta)_{(X,\alpha)} = \psi_{(X,\alpha)} \circ \eta_{(X,\alpha)} \circ \phi_{(X,\alpha)}.$$

Resta mostrar que ν preserva a composição de transformações naturais.

Sejam $\eta, \xi \in \mathrm{End}(U)$ e (X, α) objeto de G-Set. Então

$$\begin{aligned}
\nu(\eta \circ \xi)_{(X,\alpha)} &= (\phi \circ (\eta \circ \xi) \circ \psi)_{(X,\alpha)} \\
&= (\phi \circ (\eta \circ \mathrm{Id}_X \circ \xi) \circ \psi)_{(X,\alpha)} \\
&= (\phi \circ (\eta \circ \psi \circ \phi \circ \xi) \circ \psi)_{(X,\alpha)} \\
&= (\phi \circ \eta \circ \psi) \circ (\phi \circ \xi \circ \psi)_{(X,\alpha)} \\
&= (\nu(\eta) \circ \nu(\xi))_{(X,\alpha)}.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.19. Seja G um monoide. Denotamos por G^{op} o monoide com a operação dada por

$$g \cdot^{\mathrm{op}} h = hg, \text{ para todo } g, h \in G.$$

Proposição 1.20. *Considerando a operação de composição existe o isomorfismo:*

$$\mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)), {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_) \cong {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda))^{\mathrm{op}}.$$

Demonstração. Aplicando o Lema de Yoneda para o caso em que

$$\mathscr{C} = G\text{−Set e } F = {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_) \text{ e } C = (G,\lambda),$$

temos que y do Lema 1.17 é uma bijeção. Vejamos que é um antimorfismo de monoides.

Sejam $\eta, \xi \in \mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_), {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_))$.

Considere o morfismo

$$\xi_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G) \in {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda)).$$

Pela naturalidade de η, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
{}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda)) \arrow[r, "\eta_{(G,\lambda)}"] \arrow[d, "\xi_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G)_*"'] & {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda)) \arrow[d, "\xi_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G)_*"] \\
{}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda)) \arrow[r, "\eta_{(G,\lambda)}"'] & {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda))
\end{tikzcd}.$$

Isso quer dizer que, considerando o morfismo $\mathrm{Id}_G \in {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda))$ tem-se

$$\xi_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G) \circ \eta_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G) = \eta_{(G,\lambda)} \circ \xi_{(G,\lambda)}(\mathrm{Id}_G),$$

ou seja,

$$y(\xi) \circ y(\eta) = y(\eta \circ \xi).$$

Com isso concluímos que y é um anti-isomorfismo. $\square$

Proposição 1.21. *Seja (G, λ) objeto de G-Set que corresponde a ação regular a esquerda. Então*

$${}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda)) \cong G^{\mathrm{op}}$$

Demonstração. Usando o fato de U ser representável aplicado ao objeto (G, λ), temos a bijeção da proposição Proposição 1.15 entre os conjuntos ${}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda),(G,\lambda))$ e G.

Vamos mostrar que esta bijeção é um antimorfismo.

$$\begin{aligned} \psi_{(G,\lambda)}(f \circ g) &= f(g(e)) \\ &= f(\lambda_{g(e)} e) \\ &= \lambda_{g(e)}(f(e)) \\ &= g(e) f(e) \\ &= \psi_{(G,\lambda)}(g)\psi_{(G,\lambda)}(f), \end{aligned}$$

isso mostra que $\psi_{G,\lambda}$ é um antimorfismo bijetor. $\square$

Proposição 1.22. $\mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)),_G \mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)$ *e G são isomorfos como monoides. Consequentemente*

$$\mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)), {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)$$

é um grupo.

Demonstração. Afirmamos que a composição

$$\psi_{(G,\lambda)} \circ y : \mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_)), {}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_) \longrightarrow G$$

é um isomorfismo de monoides.

Como $\psi_{(G,\lambda)}$ e y são anti-isomorfismos, a composição deles é um isomomorfismo de monoides. Como G é um grupo temos que $\mathrm{Nat}({}_G\mathrm{Hom}((G,\lambda), \_))$, é um grupo também. $\square$

Teorema 1.23. *Seja $U : G - \mathrm{Set} \longrightarrow Set$ o funtor esquecimento. Então o conjunto* $\mathrm{End}(U)$*, das transformações naturais de U em U é um grupo isomorfo a G.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.20, Proposição 1.21 e Proposição 1.22. $\square$

1.3 Representações Lineares

Veremos nesta seção as representações lineares de um grupo, que estão associadas aos espaços vetoriais. Fixamos aqui um corpo $\Bbbk$.

Definição 1.24. Uma representação $\Bbbk$-linear de um grupo G é um par (V, Φ), onde $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ é um homomorfismo de grupos e V é um espaço $\Bbbk$-vetorial, e $GL(V)$ é o grupo das transformações lineares bijetoras de V em V. (Escreveremos Φ_g para denotar $\Phi(g)$). Se V tem dimensão finita igual a n, então este é denominado o grau da representação.

Exemplo 1.25 (Representação Trivial)**.** Seja G um grupo, e considere $\Bbbk$ um corpo. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \longrightarrow & GL(\Bbbk) \\ & g & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\Bbbk} \end{array}.$$

Então Φ é um homomorfismo de grupos, pois

$$\begin{array}{rcl} \Phi(gh) & = & \mathrm{Id}_{\Bbbk} \\ & = & \mathrm{Id}_{\Bbbk} \circ \mathrm{Id}_{\Bbbk} \\ & = & \Phi(g) \circ \Phi(h). \end{array}$$

Exemplo 1.26. Seja $\Bbbk$ um corpo visto como um espaço vetorial sobre si próprio. Então uma transformação linear $T : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk$ deve ser dada por $T(x) = \alpha x$, para algum $\alpha \in \Bbbk$, uma vez que ela pode ser representada por uma matriz 1×1 já que $\Bbbk$ é um espaço vetorial unidimensional. Assim, para que T seja inversível, basta que α seja inversível e dessa forma conseguimos uma bijeção entre $GL(\Bbbk)$ e os elementos inversíveis de $\Bbbk$, denotado por $\Bbbk^*$.

Seguindo essa abordagem, o homomorfismo de grupos da representação do exemplo anterior pode ser vista como o seguinte homomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & G & \longrightarrow & \Bbbk^* \\ & g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Definição 1.27. Seja G um grupo. Um caracter de G é uma representação unidimensional $\chi : G \longrightarrow \Bbbk^*$.

Exemplo 1.28 (Representação de $\mathbb{Z}_n$)**.** Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & [m] & \longmapsto & e^{\frac{2\pi i m}{n}} \end{array}.$$

Como Φ é um homomorfismo de grupos temos que $(\mathbb{C}, \Phi)$ é uma representação para $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 1.29. Considere o grupo S_3 de todas as permutações entre 3 elementos. De uma maneira explícita,

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

Além disso S_3 é gerado pelos elementos $\alpha = (12)$ e $\beta = (123)$. Em termos de geradores e relações, podemos descrever S_3 como:

$$S_3 = \langle \alpha, \beta : \alpha^2 = e = \beta^3, \alpha\beta = \beta^2\alpha \rangle.$$

Defina a aplicação $\Phi : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ dada por

$$\Phi_{(123)} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$
$$\Phi_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ e^{\frac{-2\pi i}{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos verificar que $(\mathbb{C}^2, \Phi)$ é uma representação de S_3. Como $\det \Phi_{(123)} = 1$ e $\det \Phi_{(12)} = -1$ temos que a aplicação está bem definida. Para ver que é homomorfismo de grupos, note que

$$\Phi_\beta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi_\alpha^2$$
$$\Phi_\alpha\Phi_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Phi_\beta^2\Phi_\alpha$$

Logo, Φ preserva as relações entre os geradores do grupo, o que mostra que Φ é homomorfismo de grupos. Portanto $(\mathbb{C}^2, \Phi)$ é uma representação de S_3.

Exemplo 1.30. Para S_3 novamente, defina a aplicação $\Gamma : S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ por:

$$\Gamma_{(12)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Gamma_{(123)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para verificar que $(\Gamma, \mathbb{C}^2)$ é uma representação de S_3, basta observar que

$$\Gamma_\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_\beta^3$$
$$\Gamma_\alpha\Gamma_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_\beta^2\Gamma_\alpha$$

Assim, Γ preserva as relações entre os geradores de S_3 o que mostra que é homomorfismo de grupos. Portanto $(\mathbb{C}^2, \Gamma)$ é uma representação de S_3.

Exemplo 1.31. Considere novamente o grupo S_3, mas agora com outra representação, $(\mathbb{C}^3, \Psi)$, onde Ψ é dada por

$$\Psi_{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Psi_{(123)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificando que Ψ preserva as relações entre os geradores, obtemos que $(\mathbb{C}^3, \Psi)$ é outra representação de S_3.

Como visto nos dois últimos exemplos, podem existir mais de uma representação não-trivial para um mesmo grupo. A seguir, discutimos sobre quando duas representações de um mesmo grupo, mesmo sendo diferentes, nos trazem as mesmas informações sobre o grupo.

Seja (V, Φ) uma representação de G, em que $\dim V = n$. Podemos associar, a uma base B de V, um isomorfismo de espaços vetoriais $T : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ identificando as coordenadas. Assim defina

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ & g & \longmapsto & \Psi_g \end{array},$$

em que $\Psi_g = T\Phi_g T^{-1}$. Então $(\Psi, \mathbb{C}^n)$ é uma representação para G. Se B' é outra base para V, temos outro isomorfismo, $S : V \longrightarrow \mathbb{C}^n$ e, como anteriormente

$$\begin{array}{rccc} \Psi' : & G & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ & g & \longmapsto & \Psi'_g \end{array},$$

onde $\Psi'_g = S\Phi_g S^{-1}$, também é uma representação para G. Assim, as representações Ψ e Ψ' estão relacionadas pela expressão

$$\Psi'_g = ST^{-1}\Psi_g TS^{-1} = (ST^{-1})\Psi_g(ST^{-1})^{-1}.$$

Queremos pensar que, na verdade, Φ, Ψ, Ψ' são a mesma representação.

Definição 1.32. Seja G um grupo. Duas representações (V, Φ) e (W, Ψ) são ditas equivalentes, se existe um isomorfismo $T : V \longrightarrow W$ tal que $\Psi_g = T\Phi_g T^{-1}$ para todo $g \in G$. Neste caso escrevemos $\Phi \sim \Psi$. Em outras palavras, para todo $g \in G$ o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Phi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\
W \arrow[r, "\Psi_g"'] & W
\end{tikzcd} .$$

Exemplo 1.33. Considere as representações de $\mathbb{Z}_n$, $(\mathbb{C}^2, \Phi)$ e $(\mathbb{C}^2, \Psi)$ onde Φ e Ψ são dadas por:

$$\Phi_{[m]} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi i m}{n}) & -\operatorname{sen}(\frac{2\pi i m}{n}) \\ \operatorname{sen}(\frac{2\pi i m}{n}) & \cos(\frac{2\pi i m}{n}) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{[m]} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{pmatrix}.$$

Seja $A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Então,

$$A^{-1}\Phi_{[m]}A = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{pmatrix} = \Psi[m].$$

Como A define um isomorfismo de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ e $A^{-1}\Phi_{[m]}A = \Psi_{[m]}$, para todo $[m] \in \mathbb{Z}_n$, temos que $\Phi \sim \Psi$.

Exemplo 1.34 (Álgebra de Grupo)**.** Dado um grupo G, podemos fazer a soma direta $\bigoplus_{g \in G} \Bbbk$. Como $\Bbbk$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial, $\bigoplus_{g \in G} \Bbbk$ também o é. Denotamos este espaço por $\Bbbk G$. Um elemento de $\Bbbk G$ é uma soma finita

$$\sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g$$

onde $\alpha_g \in \Bbbk$, $\forall g \in G$ e $\{\delta_g\}_{g \in G}$ é a base de $\Bbbk G$.

Além de ser um espaço vetorial, $\Bbbk G$ tem estrutura de álgebra, coálgebra, biálgebra e álgebra de Hopf, mas isso veremos mais adiante.

Defina

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & G & \longrightarrow & GL(\Bbbk G) \\ & g & \longrightarrow & \lambda_g \end{array}$$

em que

$$\lambda_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\right)=\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{gh}.$$

Então Λ define uma representação de G. Seja $g\in G$. Então,

$$\begin{aligned}\lambda_g\circ\lambda_{g^{-1}}\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\right)&=\lambda_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{g^{-1}h}\right)\\&=\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{gg^{-1}h}\\&=\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{g^{-1}}\circ\lambda_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h\right)&=\lambda_{g^{-1}}\left(\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{gh}\right)\\&=\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_{g^{-1}gh}\\&=\sum_{h\in G}\alpha_h\delta_h.\end{aligned}$$

Assim, Λ está bem definida, pois λ_g é linear por construção e é inversível, para todo $g\in G$.

Sejam $g,h,k\in G$. Então,

$$\begin{aligned}\lambda_{gh}(\delta_k)&=\delta_{(gh)k}\\&=\delta_{g(hk)}\\&=\lambda_g(\delta_{hk})\\&=\lambda_g\circ\lambda_h(\delta_k),\end{aligned}$$

logo Λ é homomorfismo de grupos. Portanto $(\Bbbk G,\Lambda)$ é uma representação de G.

Exemplo 1.35. Seja (V,Φ) uma representação de G. Defina

$$\begin{array}{rccc}\Phi^*: & G & \longrightarrow & GL(V^*)\\ & g & \longmapsto & \Phi_g^*\end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} \Phi_g^*: & V^* & \longrightarrow & V^* \\ & f & \longrightarrow & f \circ \Phi_{g^{-1}}. \end{array}$$

Temos que Φ^* está bem definida, pois dado $g \in G$, Φ_g^* é linear e inversível, pois

$$\begin{aligned} \Phi_g^* \circ \Phi_{g^{-1}}^*(f) &= \Phi_g^*(f \circ \Phi_g) \\ &= (f \circ \Phi_g) \circ \Phi_{g^{-1}} \\ &= f \circ (\Phi_{gg^{-1}}) \\ &= f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{g^{-1}}^* \circ \Phi_g^*(f) &= \Phi_{g^{-1}}^*(f \circ \Phi_{g^{-1}}) \\ &= (f \circ \Phi_{g^{-1}}) \circ \Phi_g \\ &= f \circ (\Phi_{g^{-1}g}) \\ &= f. \end{aligned}$$

Afirmamos que (V^*, Φ^*) é uma representação.

De fato, sejam $g, h \in G$ e $f \in V^*$. Então

$$\begin{aligned} \Phi_{gh}^*(f) &= f \circ \Phi_{(gh)^{-1}} \\ &= f \circ (\Phi_{h^{-1}} \circ \Phi_{g^{-1}}) \\ &= (f \circ \Phi_{h^{-1}}) \circ \Phi_{g^{-1}} \\ &= (\Phi_h^*(f)) \circ \Phi_{g^{-1}} \\ &= \Phi_g^*((\Phi_h^*(f))) \\ &= (\Phi_g^* \circ \Phi_h^*)(f). \end{aligned}$$

logo,

$$\Phi_{gh}^* = \Phi_g^* \circ \Phi_h^*$$

e, com isso Φ^* é um homomorfismo de grupos. Concluímos que (V, Φ^*) é uma representação de G.

Definição 1.36. Sejam G um grupo e (V, Φ) uma representação. Um subespaço vetorial W de V é G-invariante se, para todo $g \in G$ tem-se que $\Phi_g(W) \subseteq W$.

Definição 1.37. Sejam $(V_1, \Phi^{(1)})$ e $(V_2, \Phi^{(2)})$ representações de um grupo G. Definimos a soma direta entre elas por

$$\Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)} : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$$

onde

$$(\Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)})_g(v_1, v_2) = (\Phi_g^{(1)}(v_1), \Phi_g^{(2)}(v_2)).$$

Fixadas as bases para V_1 e V_2, em que $\dim V_1 = n$ e $\dim V_2 = m$, podemos compreender somas diretas por meio de matrizes. Escrevendo $\Phi^{(1)} : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ e $\Phi^{(2)} : G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$ então

$$[(\Phi^{(1)} \oplus \Phi^{(2)})_g] = \begin{pmatrix} [\Phi_g^{(1)}] & 0 \\ 0 & [\Phi_g^{(2)}] \end{pmatrix}$$

Seja (V, Φ) uma representação. Se W é um subespaço vetorial de V G-invariante, podemos restringir Φ a W e obter uma representação $(W, \Phi_{|_W})$ em que $(\Phi_{|_W})_g(w) = \Phi_g(w)$. Diremos que $(W, \Phi_{|_W})$ é uma sub-representação de Φ. Se V_1 e V_2 são subespaços vetoriais G-invariantes e $V = V_1 \oplus V_2$ então Φ é equivalente a soma direta $\Phi_{|_{V_1}} \oplus \Phi_{|_{V_2}}$, como para cada $v \in V$ existem únicos $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ tais que $v = v_1 + v_2$. Então ganhamos o isomorfismo abaixo

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \longrightarrow & V_1 \oplus V_2 \\ & v & \longmapsto & (v_1, v_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} T^{-1}: & V_1 \oplus V_2 & \longrightarrow & V \\ & (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 + v_2 \end{array}$$

Assim, para todo $g \in G$ tem-se:

$$\begin{aligned} T^{-1}(\Phi_{|_{V_1}} \oplus \Phi_{|_{V_2}})_g T(v) =& T^{-1}(\Phi_{|_{V_1}} \oplus \Phi_{|_{V_2}})_g(v_1, v_2) \\ =& T^{-1}(\Phi_{g_{|_{V_1}}}(v_1), \Phi_{g_{|_{V_2}}}(v_2)) \\ =& \Phi_g(v_1) + \Phi_g(v_2) \\ =& \Phi_g(v_1 + v_2) \\ =& \Phi_g(v). \end{aligned}$$

Matricialmente, escolhendo B_1 base de V_1 e B_2 base de V_2 sabemos que $B_1 \cup B_2$ é base de V. Renomeando $\Phi_{|_{V_1}} = \Phi^{(1)}$ e $\Phi_{|_{V_2}} = \Phi^{(2)}$ temos que $[\Phi_g] = \begin{pmatrix} [\Phi^{(1)}]_{B_1} & 0 \\ 0 & [\Phi^{(2)}]_{B_2} \end{pmatrix}$.

Definição 1.38. Uma representação (V, Φ) é dita irredutível se os únicos subespaços G-invariantes de V são $\{0\}$ e V.

Exemplo 1.39. A representação do Exemplo 1.33 anterior não é irredutível, pois $\mathbb{C}e_1$ e $\mathbb{C}e_2$ são subespaços $\mathbb{Z}_n$-invariantes por ψ e $\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 = \mathbb{C}^2$:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda e^{\frac{2\pi i m}{n}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}e_1, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

e

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i m}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda e^{\frac{-2\pi i m}{n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}e_2, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemplo 1.40. A representação $(\mathbb{C}^2, \Gamma)$ de S_3 do Exemplo 1.30 é irredutível.

Seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$ não nulo e próprio, e suponha que W é S_3-invariante. Como $\dim \mathbb{C}^2 = 2$, logo qualquer subespaço vetorial W não-nulo deve ter dimensão igual a 1 e sendo $v \in W$ um vetor não-nulo, temos $W = \mathbb{C}v$. Assim, dado $\sigma \in S_3$, existe $\lambda \in C$ tal que $\Gamma_\sigma(v) = \lambda v$. Isso significa que v é autovetor de Γ_σ para todo $\sigma \in S_3$.

Ou seja, W ser subespaço S_3-invariante implica que v é autovetor de Γ_σ, para todo $\sigma \in S_3$.

Escrevendo $(12) = \alpha$ e $(123) = \beta$, afirmamos que Γ_α e Γ_β não possuem autovetores em comum e, com isso, concluir que W não é S_3-invariante.

De fato, veja que os autovalores de Γ_α são 1 e -1 e os autoespaços associados são os gerados pelos vetores $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Agora veja que

$$\Gamma_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\Gamma_\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

o que mostra que $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ não são autovetores de Γ_β.

Concluímos que tal W não existe. Portanto $(\mathbb{C}^2, \Gamma)$ é irredutível.

Proposição 1.41. *Se (V, Φ) é uma representação de grau 2, então Φ é irredutível se, e somente se, não existe autovetor $v \in V$ comum a Φ_g, $\forall g \in G$.*

Demonstração. Suponha que (Φ, V) é irredutível. Então os únicos espaços G-invariantes são o subespaço nulo e o V. Sejam $g \in G$ e $v \in V$ autovetor de Φ_g. Assim, o auto-espaço W gerado por v é Φ_g-invariante e de dimensão 1. Como $\dim V = 2$, W é diferente de 0 e de V. O fato de Φ ser irredutível implica que existe $h \in G$ tal que $\Phi_h(W) \nsubseteq W$. E assim, v não pode ser autovetor de Φ_h.

Provaremos a implicação recíproca utilizando a contra-positiva. Suponha que Φ é redutível. Como V tem dimensão 2, existe um subespaço W de dimensão 1,, G-invariante. Seja $v \in W$ gerador deste subespaço. Então para todo $g \in G$, existe $\lambda_g \in \Bbbk$ tal que

$$\Phi_g(v) = \lambda_g v.$$

Isso significa que v é auto-vetor de Φ_g para todo $g \in G$, concluindo a implicação. $\square$

Definição 1.42. Uma representação (V, Φ) é dita ser completamente redutível se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$ em que V_i é G-invariante $(V_i, \Phi_{|_{V_i}})$ é irredutível $\forall i \in 1, \ldots, n$.

Definição 1.43. Uma representação não nula (V, Φ) de um grupo G é decomponível se $V = V_1 \oplus V_2$, com V_1, V_2 subespaços vetoriais G-invariantes e não nulos. Caso contrário, (V, Φ) é dita indecomponível.

1.4 A Categoria Rep_G

Nesta seção estudaremos a categoria das representações de um determinado grupo G.

Fixemos um grupo G e um corpo $\Bbbk$, nosso objetivo é construir a categoria de todas as representações de G, denotaremos esta categoria por Rep_G, ou seja, uma categoria onde objetos são representações deste grupo e os morfismos devem "preservar" as informações de uma representação para outra.

Com base nos resultados da seção anterior sobre representações de grupos, podemos construir uma categoria onde os objetos sendo pares (V, Φ) em que V é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$ é um homomorfismo de grupos.

Dados dois objetos de Rep_G, (V, Φ) e (W, Ψ) um morfismo entre eles será uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ tal que $\Psi_g T = T\Phi_g$, para todo $g \in G$, ou seja, o diagrama abaixo comuta para todo $g \in G$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\Phi_g"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ W \arrow[r, "\Psi_g"'] & W \end{tikzcd}.$$

Denotaremos o conjunto de todos os morfismos entre as representações (V, Φ) e (W, Ψ) por

$$\mathrm{Rep}_G((V, \Phi), (W, \Psi)).$$

Proposição 1.44. *Seja G um grupo. Então a classe das representações deste grupo e os morfismos entre elas, como descrito acima, formam uma categoria.*

Demonstração. Note que a transformação linear identidade de um espaço vetorial V, Id_V é sempre morfismo entre (V, Φ) e (V, Φ), isto é, $\mathrm{Id}_V \in \mathrm{Rep}_G((V, \Phi), (V, \Phi))$.

A composição entre morfismos nesta categoria é dada pela própria composição entre transformações lineares.

Assim, se $T \in \mathrm{Rep}_G((V_1, \Phi^{(1)}), (V_2, \Phi^{(2)}))$ e $S \in \mathrm{Rep}_G((V_2, \Phi^{(2)}), (V_3, \Phi^{(3)}))$ então diagrama abaixo comuta para todo $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_g^{(1)}"'] & V_2 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Phi_g^{(2)}"'] & V_3 \arrow[d, "\Phi_g^{(3)}"] \\ V_1 \arrow[r, "T"'] & V_2 \arrow[r, "S"'] & V_3 \end{tikzcd}$$

e, portanto $S \circ T \in \mathrm{Rep}_G((V_1, \Phi^{(1)}), (V_3, \Phi^{(3)}))$.

Como a composição de transformações lineares é associativa, esta composição também será.

$\square$

Sejam (V, Φ) e (W, Ψ) representações de G. Assim como temos o produto tensorial de espaços vetoriais, nós podemos definir um produto tensorial de representações.

Para cada $g \in G$ defina

$$\begin{array}{rccc} (\Phi \times \Psi)_g : & V \times W & \longrightarrow & V \otimes W \\ & (v, w) & \longmapsto & \Phi_g(v) \otimes \Psi_g(w). \end{array}$$

Claramente $(\Phi \times \Psi)_g$ é bilinear, portanto existe uma única transformação linear

$$\begin{array}{rccc} (\Phi \otimes \Psi)_g : & V \otimes W & \longrightarrow & V \otimes W \\ & v \otimes w & \longrightarrow & \Phi_g(v) \otimes \Psi_g(w). \end{array}$$

Além disso,

$$\begin{array}{rcl} (\Phi \otimes \Psi)_g \circ (\Phi \otimes \Psi)_{g^{-1}}(v \otimes w) & = & (\Phi \otimes \Psi)_g(\Phi_g(v) \otimes \Psi_g(w)) \\ & = & (\Phi_g(\Phi_{g^{-1}}(v)) \otimes \Psi_g(\Psi_{g^{-1}}(w))) \\ & = & v \otimes w, \end{array}$$

logo, $(\Phi \otimes \Psi)_g \in GL(V \otimes W)$.

Assim, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \Phi \otimes \Psi : & G & \longrightarrow & GL(V \otimes W) \\ & g & \longmapsto & (\Phi \otimes \Psi)_g. \end{array}$$

Proposição 1.45. *Sejam (V, Φ) e (W, Ψ) representações de G. Então $(V \otimes W, \Phi \otimes \Psi)$ é uma representação de G.*

Demonstração. Fixe $g \in G$. Pelas propriedades do produto tensorial, sabemos que $\Phi_g \otimes \Psi_g$ é linear.

Sejam $g, h \in G$, então

$$\begin{array}{rcl} (\Phi \otimes \Psi)_g \circ (\Phi \otimes \Psi)_h & = & (\Phi_g \otimes \Psi_g) \circ (\Phi_h \otimes \Psi_h) \\ & = & (\Phi_g \circ \Phi_h) \otimes (\Psi_g \circ \Psi_h) \\ & = & \Phi_{gh} \otimes \Psi_{gh} \\ & = & (\Phi \otimes \Psi)_{gh}, \end{array}$$

logo $\Phi \otimes \Psi$ é homomorfismo de grupos. □

1.4.1 Estrutura $\Bbbk$-linear

Nosso objetivo agora é verificar que Rep_G é uma categoria $\Bbbk$-linear, ou seja, é uma categoria abeliana tal que, para todos (V, Φ), (W, Ψ) representações lineares de G, o conjunto $\mathrm{Rep}_G((V, \Phi), (W, \Psi))$ é um $\Bbbk$-espaços vetorial.

Proposição 1.46. *Seja G um grupo. Então a categoria Rep_G possui objeto nulo.*

Demonstração. Considere agora a representação formada pelo espaço vetorial nulo $\{0\}$ e o homomorfismo de grupos

$$
\begin{array}{rccl}
0: & G & \longrightarrow & GL(\{0\}) \\
 & g & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\{0\}} = 0
\end{array}.
$$

Sejam $(W, \Psi) \in \mathrm{Rep}_G$ e T morfismo entre $\{0\}$ e (W, Ψ). Então T é uma transformação linear entre $\{0\}$ e W, sendo assim, necessariamente, a transformação linear nula. Se T é um morfismo entre W e $\{0\}$, pelo mesmo argumento anterior, T é a transformação linear nula. Assim temos que
$\mathrm{Hom}((W, \Psi), (\{0\}, 0)$ e $\mathrm{Hom}((\{0\}, 0), (W, \Psi))$ são conjuntos unitários e concluímos que $(\{0\}, 0)$ é objeto nulo da categoria. □

Fazendo uma analogia com espaços vetoriais, após definir objeto nulo de uma categoria, é natural se perguntar se ela possui kernel e cokernel para cada morfismo.

Proposição 1.47. *Sejam (V, Φ) e (W, Ψ) representações de G, e $T : V \longrightarrow W$ um morfismo entre elas. Então $(\ker T, \widehat{\Phi})$ também é uma representação, onde $\widehat{\Phi}_g = \Phi_g|_{\ker T}$.*

Demonstração. Afirmamos que $\ker T$ é G-invariante. De fato, sejam $v \in \ker T$ e $g \in G$. Então

$$
\begin{aligned}
T \circ \Phi_g(v) &= \Psi_g \circ T(v) \\
&= \Psi(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo $\Phi_g(v) \in \ker T$. Como $v \in \ker T$, temos que $\Phi_g(\ker T) \subseteq \ker T$. □

Proposição 1.48. *Seja T um morfismo em Rep_G. Então T possui kernel.*

Demonstração. Sejam $(V, \Phi), (W, \Psi)$ representações, $T : V \longrightarrow W$ morfismo. Vejamos que $\ker T$ e ι (onde $\iota : \ker T \longrightarrow V$ é a inclusão) são o kernel de T em Rep_G, conforme definição de kernel de um morfismo na categoria (apêndice). Claramente ι é morfismo de representações.

Para ver isso, vamos considerar (U, ψ) representação e $u : U \longrightarrow V$ morfismo tal que $0 \circ u = T \circ u$. Temos que mostrar que existe único $g : U \longrightarrow \ker T$ tal que $u = \iota \circ g$.

$$
\begin{tikzcd}
\ker T \arrow[r, "\iota"] & V \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, shift right, "0"'] & W \\
U \arrow[u, "\exists ! g"] \arrow[ru, "u"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Como $T \circ u = 0$, $u(x) \in \ker T$, $\forall x \in U$. Defina

$$\begin{array}{rccc} g: & U & \longrightarrow & \ker T \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Então,

$$\iota \circ g(x) = \iota(u(x)) = u(x)$$

para todo $x \in U$, logo $\iota \circ g = u$.
Suponha que exista g' tal que $\iota \circ g' = u$. Assim,

$$g(x) = u(x) = \iota \circ g'(x) = g'(x),$$

para todo $x \in U$, logo $g = g'$ e, com isso, g é único.
Resta somente mostrar que g é morfismo em Rep_G.
Sejam $h \in G$ e $x \in U$, então

$$\begin{aligned} g \circ \Psi_h(x) &= u(\Psi_h(x)) \\ &= \Phi_h \circ u(x) \\ &= \Phi_h \circ g(x) \end{aligned}$$

Isso mostra que $(\ker T, \iota)$ é o kernel do homomorfismo T nessa categoria. $\square$

Proposição 1.49. *Sejam* (V, Φ), (W, Ψ) *representações de* G *e* $T : V \longrightarrow W$ *morfismo entre representações. Então o* $(\mathrm{coker}(T), \widetilde{\Psi})$ *é uma representação de* G*, onde* $\widetilde{\Psi}_g$ *é dada por* $\widetilde{\Psi}_g(\overline{w}) = \overline{\Psi_g(w)}$*, para todo* $g \in G$*.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \overline{\Psi}: & G & \longrightarrow & GL(\mathrm{coker}(T)) \\ & g & \longmapsto & \widetilde{\Psi}_g \end{array}$$

é um homomorfismo de grupos. Primeiramente, vamos mostrar que para cada $g \in G$ a aplicação $\widetilde{\Psi}_g$ está bem definida e é linear bijetora.

Fixe $g \in G$. Sejam $\overline{w_1}, \overline{w_2} \in \mathrm{coker}T$ tais que $\overline{w_1} = \overline{w_2}$. Isso significa que $\overline{w_1 - w_2} = 0$, ou seja, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w_1 - w_2$. Então,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}_g(\overline{w_1}) - \widetilde{\Psi}_g(\overline{w_2}) &= \overline{\Psi_g(w_1)} - \overline{\Psi_g(w_2)} \\ &= \overline{\Psi_g(w_1 - w_2)} \\ &= \overline{\Psi_g(T(v))} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{T(\Phi_g(v))} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

logo $\widetilde{\Psi}_g$ está bem definida.

Note que $\widetilde{\Psi}_g$ é linear, pois dados $\alpha \in \Bbbk, \overline{w_1}, \overline{w_2} \in \operatorname{coker}(T)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_g(\alpha\overline{w_1} + \overline{w_2}) &= \widetilde{\Psi}_g(\overline{\alpha w_1 + w_2}) \\
&= \overline{\Psi_g(\alpha w_1 + w_2)} \\
&= \overline{\alpha\Psi_g(w_1) + \Psi_g(w_2)} \\
&= \alpha\overline{\Psi_g(w_1)} + \overline{\Psi_g(w_2)} \\
&= \alpha\widetilde{\Psi}_g(\overline{w_1}) + \widetilde{\Psi}_g(\overline{w_2}).
\end{aligned}
$$

Sejam $g, h \in G$ e $\overline{w} \in \operatorname{coker}(T)$, então

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_g \circ \widetilde{\Psi}_h(\overline{w}) &= \widetilde{\Psi}_g(\overline{\Psi_g(w)}) \\
&= \overline{\Psi_g \circ \Psi_h(w)} \\
&= \overline{\Psi_{gh}(w)} \\
&= \widetilde{\Psi}_{gh}(\overline{w}),
\end{aligned}
$$

isso mostra que $\widetilde{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos.

Seja $\overline{w} \in \operatorname{coker}(T)$. Então

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_g \circ \widetilde{\Psi}_{g^{-1}}(\overline{w}) &= \widetilde{\Psi}_g(\overline{\Psi_{g^{-1}}(w)}) \\
&= \overline{\Psi_g(\Psi_{g^{-1}}(w))} \\
&= \overline{w},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Psi}_{g^{-1}} \circ \widetilde{\Psi}_g(\overline{w}) &= \widetilde{\Psi}_{g^{-1}}(\overline{\Psi_g(w)}) \\
&= \overline{\Psi_{g^{-1}}(\Psi_g(w))} \\
&= \overline{w}.
\end{aligned}
$$

Logo $\widetilde{\Psi}_g \in GL(\operatorname{coker}(T))$ e assim, $\widetilde{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos entre G e $GL(\operatorname{coker}(T))$, provando que $(\operatorname{coker}(T), \widetilde{\Psi})$ é uma representação de G. $\square$

Proposição 1.50. *Seja T um morfismo em Rep_G. Então T possui cokernel.*

Demonstração. Seja $T : V \longrightarrow W$ morfismo entre (V, Φ) e (W, Ψ). Considere a representação $(\mathrm{coker}(T), \widetilde{\Psi})$ (vista na Proposição 1.49) e a transformação linear $p : W \longrightarrow \mathrm{coker}(T)$ dada por $p(w) = \overline{w}$.

Mostraremos que $(\mathrm{coker}(T), p)$ é coequalizador do par $(T, 0)$, ou seja, temos que mostrar que $p \circ T = p \circ 0$ e, para todo par de morfismos $f : W \longrightarrow Z$, em que (Z, Γ) é uma representação e $f \circ T = 0$, existe um único morfismo $\overline{f} : \mathrm{coker}(T)$ que satisfaz $\overline{f} \circ p = f$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, shift left, "T"] \arrow[r, shift right, "0"'] & W \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{coker}(T) \arrow[d, "\exists! \overline{f}"] \\ & & Z \end{tikzcd} .$$

Note que, dado $v \in V$ qualquer,

$$p \circ T(v) = \overline{T(v)} = 0 = p \circ 0(v),$$

logo, $p \circ T = p \circ 0$.

Sejam (Z, Γ) representação e $g : W \longrightarrow Z$ morfismo de representações, tal que, $g \circ f = 0$. Defina

$$\begin{array}{cccc} \overline{f} & \mathrm{coker}(T) & \longrightarrow & Z \\ & \overline{w} & \longmapsto & f(w) \end{array} .$$

Vejamos que $\overline{f}$ está bem definida. Sejam $\overline{w_1} = \overline{w_2} \in \mathrm{coker}(T)$. Então $w_1 - w_2 \in \mathrm{Im}T$, o que significa que existe $v \in V$ tal que $T(v) = w_1 - w_2$. Então

$$\begin{aligned} \overline{f}(\overline{w_1}) - \overline{f}(\overline{w_2}) &= f(w_1) - f(w_2) \\ &= f(w_1 - w_2) \\ &= f(T(v)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo, $\overline{f}(w_1) = \overline{f}(\overline{w_2})$ e, portanto, $\overline{f}$ está bem definida.

Claramente $\overline{f}$ é linear. Resta mostrar a unicidade de $\overline{f}$.

Suponha que exista $g : Z \longrightarrow \mathrm{coker}(T)$ tal que $g \circ p = f$. Então

$$g(\overline{w}) = g(p(w)) = f(w) = \overline{f}(\overline{w})$$

e, com isso, $g = \overline{f}$.

Por último, vamos $\overline{f}$ é morfismo de representações. Para isso, considere $g \in G$ e $\overline{w} \in \operatorname{coker}(T)$. Então

$$\begin{aligned} \Gamma_g \circ \overline{f}(\overline{w}) &= \Gamma_g(f(w)) \\ &= f \circ \Psi_g(w) \\ &= \overline{f} \circ p(\Psi_g(w)) \\ &= \overline{f}(\overline{\Psi_g(w)}) \\ &= \overline{f} \circ \widetilde{\Psi_g}(\overline{w}) \end{aligned}$$

Concluímos que $(\operatorname{coker}(T), p)$ é cokernel de T. □

Observe que em Rep_G os morfismos são, em particular, funções. Assim, os epimorfismos são os morfismos sobrejetores e os monomorfismos são os morfismos injetores.

Proposição 1.51. *Sejam $(U, \Phi), (V, \Psi)$ representações de G e $f : U \longrightarrow V$ um monomorfismo. Então (U, f) é o kernel de algum morfismo em Rep_G.*

Demonstração. Considere a representação $(\operatorname{coker}(f), \widetilde{\Psi})$ e o morfismo $p : V \longrightarrow \operatorname{coker}(f)$ dado por $p(v) = \overline{v}$.

Então

$$p(f(u)) = \overline{f(u)} = 0 = 0(f(u)), \text{ para todo } u \in U.$$

Sejam (W, Γ) uma representação e $g : W \longrightarrow V$ um morfismo, tais que $p \circ g = 0$. Temos que mostrar que existe um único morfismo $g' : W \longrightarrow U$ tal que $f \circ g' = g$. Em diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "0"'] & \operatorname{coker}(f) . \\ W \arrow[u, "\exists! g'"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Como $p \circ g = 0$, para todo $w \in W$ temos que $g(w) \in \operatorname{Im}(f)$. Pelo fato de f ser injetora, sabemos que dado $w \in W$, existe um único $u_w \in U$ tal que $f(u_w) = g(w)$. Com isso, conseguimos definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} g' : & W & \longrightarrow & U \\ & w & \longmapsto & u_w \end{array} .$$

Note que g' é linear, pois $\alpha g'(w) + g'(w') = \alpha u_w + u_{w'}$, como $\alpha f(u_w) + f(u_{w'}) = f(\alpha u_w + u_{w'})$ então $g'(\alpha u_w + u_{w'}) = \alpha g'(u_w) + g(u_{w'})$.

Veja que g' também é morfismo de representações, pois dado $h \in G$ temos:

$$\begin{aligned} f \circ g' \circ \Gamma_h(w) &= f(u_{\Gamma_h(w)}) \\ &= g(\Gamma_h(w)) \\ &= \Psi_h \circ g(w) \\ &= \Psi_h(f(u_w)) \\ &= f \circ \Phi_h(u_w) \\ &= f \circ \Phi_h \circ g'(w), \end{aligned}$$

como f é injetora, $g' \circ \Gamma_h = \Phi_h \circ g'$. Portanto é morfismo entre representações. Além disso, para todo $w \in W$ tem-se

$$f \circ g'(w) = f(u_w) = g(w),$$

logo $f \circ g' = g$.

Por último, resta mostrar a unicidade de g'. Seja $h : W \longrightarrow U$ morfismo entre representações tal que $f \circ h = g$. Então, dado $w \in W$ temos:

$$f \circ h(w) = g(w) = f \circ g'(w)$$

como f é injetora,

$$h(w) = g'(w).$$

Logo $h = g$ e, desta forma, fica provado que o par (U, f) é kernel do morfismo p. $\square$

Proposição 1.52. *Sejam $(U, \Phi), (V, \Psi)$ representações de G e $f : U \longrightarrow V$ um epimorfismo. Então o par (V, f) é cokernel de algum morfismo.*

Demonstração. Considere a representação $(\ker f, \widetilde{\Phi})$ e o morfismo $\iota : \ker f \longrightarrow U$ que é a inclusão. Afirmamos que o par (V, f) é cokernel de ι.

Primeiramente veja que, dado $u \in \ker(f)$ temos:

$$f \circ \iota(u) = f(u) = 0 = f \circ 0(u).$$

Sejam (W, Γ) representação de G e $g : U \longrightarrow W$ morfismo entre representações tal que, $g \circ \iota = 0$. Queremos mostrar que existe um único morfismo de representações $g' : V \longrightarrow W$ tal que $g' \circ f = g$, em diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, shift left, "\iota"] \arrow[r, shift right, "0"'] & U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & V \arrow[d, "\exists! g'"] \\
 & & W
\end{tikzcd}.$$

Como f é sobrejetora, para cada $v \in V$ existe $u_v \in U$ tal que $f(u_v) = v$. Defina a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{cccc} g' : & V & \longrightarrow & W \\ & v & \longmapsto & g(u_v) \end{array}.$$

Vamos mostrar que esta aplicação está bem definida. Observe que

$$g \circ \iota = 0 \Leftrightarrow g(\ker f) = 0 \Rightarrow \ker(f) \subseteq \ker(g).$$

Sejam $u_v, u'_v \in U$ tais que $f(u_v) = f(u'_v)$. Então

$$0 = f(u_v) - f(u'_v) = f(u_v - u'_v),$$

logo

$$u_v - u'_v \in \ker(f) \subseteq \ker(g).$$

Assim, $0 = g(u_v - u'_v) = g(u_v) - g(u'_v)$ e, portanto,

$$g(u_v) = g(u'_v).$$

Com isso mostramos que g' está bem definida.

Seja $u \in U$. Então

$$\begin{array}{rcl} g' \circ f(u) & = & g(u_{f(u)}) \\ & = & g(u). \end{array}$$

Vamos à linearidade de g'. Sejam $\alpha \in \Bbbk, v, v_1, v_2 \in V$. Note que

$$f(u_{\alpha v} - \alpha u_v) = f(u_{\alpha_v}) - \alpha f(u_v) = \alpha v - \alpha v = 0$$

Logo obtemos que

$$u_{\alpha v} - \alpha u_v \in \ker(f).$$

Então

$$g(u_{\alpha v} - \alpha u_v) = g(\iota(u_{\alpha v} - \alpha u_v)) = 0$$

E então

$$g(u_{\alpha v}) = \alpha g(u_v).$$

Analogamente,

$$g(u_{v_1+v_2}) = g(u_{v_1}) + g(u_{v_2})$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} g'(\alpha v_1 + v_2) & = & g(u_{\alpha v_1 + v_2}) \\ & = & g(u_{\alpha v_1}) + g(u_{v_2}) \\ & = & \alpha g(u_{v_1}) + g(u_{v_2}) \\ & = & \alpha g'(v_1) + g'(v_2). \end{array}$$

Vejamos que g' é morfismo de representações. Sejam $h \in G$ e $u \in U$, então

$$\begin{array}{rcl} g' \circ \Psi_h \circ f(u) & = & g(u_{\Psi_h \circ f(u)}) \\ & = & g(u_{f \circ \Phi_h(u)}) \\ & = & g \circ \Phi_h(u) \\ & = & \Gamma_h \circ g(u) \\ & = & \Gamma \circ g' \circ f(u), \end{array}$$

como f é epimorfismo, temos que $g' \circ \Psi_h = \Gamma_h \circ g'$. Seja $h : V \longrightarrow W$ morfismo de representações tal que $h \circ f = g$. Então dado $v \in V$,

$$h(v) = h(f(u_v)) = g(u_v) = g'(v).$$

Portanto $h = g'$.

Feito isso, concluímos que (V, f) é cokernel de ι. $\square$

Considere agora uma família arbitrária de representações $\{V_i, \Phi^i\}_{i \in I}$. Defina

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & G & \longrightarrow & GL(\bigoplus_{i \in I} V_i) \\ & g & \longmapsto & \Phi_g \end{array}$$

onde

$$\Phi_g((v_i)_{i\in I}) = (\Phi_g^i(v_i)_{i\in I}).$$

Lembremos que a sequência $(\Phi_g^i(v_i)_{i\in I})$ tem um número finito de elementos não nulos, pois estamos em uma soma direta de espaços vetoriais.

Na próxima proposição veremos que o par $(\bigoplus_{i\in I} V_i, \Phi)$ é uma representação de G e também que satisfaz a propriedade universal da soma direta, sendo um co-produto para a família de representações.

Proposição 1.53. *Seja $\{V_i, \Phi^i\}_{i\in I}$ uma família de representações de G. Então a soma direta $(\bigoplus_{i\in I} V_i, \Phi)$, em que $\Phi = \bigoplus_{i\in I} \Phi^i$, também é uma representação de G, sendo o co-produto da família em Rep_G.*

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ e $(v_i)_{i\in I}$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi_{gh}((v_i)_{i\in I}) &= (\Phi_{gh}^i(v_i))_{i\in I} \\
&= (\Phi_g^i \circ \Phi_h^i(v_i))_{i\in I} \\
&= \Phi_g \circ \Phi_h((v_i)_{i\in I}).
\end{aligned}$$

Como Φ é homomorfismo de grupos $(\bigoplus_{i\in I} V_i, \Phi)$ é representação.

Resta agora mostrar que esta representação é um co-produto da família $\{V_i, \Phi^i\}_{i\in I}$.

Considere a família de morfismos $\{\iota_i\}_{i\in I}$, tal que, para cada $j \in I$ a aplicação ι_j é definida da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rccc}
\iota_j : & V_j & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} V_i \\
& v_j & \longmapsto & (v_j\delta_{ij})_{i\in I}
\end{array}$$

onde δ_{ij} é a função Delta de Kronecker.

Sejam (W, Ψ) uma representação de G qualquer e $\{f_i\}_{i\in I}$ uma família de morfismos $f_i : V_i \longrightarrow W$.

Queremos mostrar que existe um único morfismo $T : \bigoplus_{i\in I} V_i \longrightarrow W$ tal que o diagrama abaixo comuta para todo $j \in I$:

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\iota_j"'] & W \\ \bigoplus_{i\in I} V_i \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd} \quad . \tag{1.3}$$

Defina

$$\begin{array}{rccc} T: & \bigoplus_{i\in I} V_i & \longrightarrow & W \\ & (v_i)_{i\in I} & \longmapsto & \sum_{i\in I} f_i(v_i) \end{array}$$

Como o espaço vetorial $\bigoplus_{i\in I} V_i$ é uma soma direta, o elemento $(v_i)_{i\in I}$ tem uma quantidade finita de entradas não nulas, fazendo com que a soma $\sum_{i\in I} f_i(v_i)$ seja finita, e assim a aplicação T está bem definida.

Afirmação 1: T é morfismo de representações.

Sejam $\alpha \in \Bbbk, (v_i)_{i\in I}, (w_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$.

$$\begin{aligned} T(\alpha(w_i)_{i\in I} + (v_i)_{i\in I}) &= T((\alpha w_i + v_i)_{i\in I}) \\ &= \sum_{i\in I} f_i(\alpha w_i + v_i) \\ &= \alpha \sum_{i\in I} f_i(w_i) + \sum_{i\in I} f_i(v_i) \\ &= \alpha T((v_i)_{i\in I}) + T((w_i)_{i\in I}), \end{aligned}$$

isso mostra que T é linear.

Agora fixe $g \in G$. Então

$$\begin{aligned} T \circ \Phi_g((v_i)_{i\in I}) &= T((\Phi_g^i(v_i))) \\ &= \sum_{i\in I} f_i(\Phi^i(v_i)) \\ &= \sum_{i\in I} \Psi \circ f_i(v_i) \\ &= \Psi\left(\sum_{i\in I} f_i(v_i)\right) \\ &= \Psi \circ T((v_i)_{i\in I}). \end{aligned}$$

Afirmação 2: O diagrama acima comuta para todo $i \in I$.

Fixe $j \in I$ e seja $v_j \in V_j$. Então

$$\begin{aligned} T \circ \iota_j(v_j) &= T((\delta_{ij}v_j)_{i\in I}) \\ &= \sum_{i\in I} f_i((\delta_{ij}v_j)_{i\in I}) \\ &= f_j(v_j), \end{aligned}$$

logo o diagrama comuta.

Afirmação 3: T é único.

Suponha que exista outro morfismo de representações T' que faça o diagrama 1.3 comutar. Seja $\{v_i\}_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} V_i$, então:

$$\begin{aligned} T'(\{v_i\}_{i\in I}) &= T'\left(\sum_i \iota_i(v_i)\right) \\ &= \sum_i T' \circ \iota_i(v_i) \\ &= \sum_i f_i(v_i) \\ &= T((v_i)_{i\in I}). \end{aligned}$$

Portanto T é único. □

Proposição 1.54. *A categoria* Rep_G *é abeliana.*

Demonstração. Nesta demonstração usaremos a Definição B.14 de categoria abeliana.

Sejam $(V,\Phi),(W,\Psi)$ representações. Então o conjunto $\mathrm{Rep}_G((V,\Phi),(W,\Psi))$ é um grupo abeliano com a adição pontual das transformações lineares.

O restante segue da Proposição 1.48, Proposição 1.50, Proposição 1.51, Proposição 1.52 e Proposição 1.53. □

Proposição 1.55. Rep_G *é uma categoria* $\Bbbk$*-linear.*

Demonstração. Como Rep_G é categoria abeliana, resta mostrar que dados $(U,\Phi),(V,\Psi)$ representações, o conjunto $\mathrm{Rep}_G((U,\Phi),(V,\Psi))$ é um espaço vetorial. Este conjunto é, em particular, um subconjunto do espaço vetorial das transformações lineares de U em V, assim só precisamos mostrar que se trata de um subespaço vetorial.

Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{Rep}_G((U,\Phi),(V,\Psi))$, $\lambda \in \Bbbk$, $g \in G$. Então

$$(\lambda f_1 + f_2) \circ \Phi_g = \lambda f_1 \circ \Phi_g + f_2 \circ \Phi_g$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda\Psi_g \circ f_1 + \Psi_g \circ f_2 \\
&= \Psi_g \circ (\lambda f_1) + \Psi_g \circ f_2 \\
&= \Psi_g(\lambda f_1 + f_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathrm{Rep}_G((U,\Phi),(V,\Psi))$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial e também Rep_G é uma categoria $\Bbbk$-linear. $\square$

1.4.2 Funtor Esquecimento

Definimos agora o funtor $U : \mathrm{Rep}_G \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ que associa a cada objeto (V,Φ) o espaço vetorial V e a cada morfismo $f : (V,\Phi) \longrightarrow (W,\Psi)$ a própria transformação linear f.

Provaremos que este funtor é representável.

Teorema 1.56. *O funtor esquecimento* $U : \mathrm{Rep}_G \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ *é representável.*

Demonstração. Defina, para cada $(V,\Phi) \in \mathrm{Rep}_G$ a aplicação

$$
\begin{array}{rccl}
\alpha_{(V,\Phi)} : & \mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda),(V,\Phi)) & \longrightarrow & V \\
& f & \longmapsto & f(\delta_e).
\end{array}
$$

Queremos mostrar que $\alpha : \mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda), \_) \Longrightarrow U$ é um isomorfismo natural.

Afirmação 1: $\alpha_{(V,\Phi)}$ é transformação linear.

Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda),(V,\Phi))$ e $k \in \Bbbk$. Então

$$
\begin{aligned}
\alpha_{(V,\Phi)}(kf_1 + f_2) &= (kf_1 + f_2)(\delta_e) \\
&= kf_1(\delta_e) + f_2(\delta_e) \\
&= k\alpha_{(V,\Phi)}(f_1) + \alpha_{(V,\Phi)}(f_2).
\end{aligned}
$$

Afirmação 2: α é natural.

Sejam (V,Φ) e (W,Ψ) representações e $f \in \mathrm{Rep}_G((V,\Phi),(W,\Psi))$. Queremos mostra que o diagrama abaixo comuta. Aqui denotaremos o morfismo $\mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda), f)$ por f_*.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda),(V,\Phi)) \arrow[r, "\alpha_{(V,\Phi)}"] \arrow[d, "f_*"'] & V \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Rep}_G((\Bbbk G,\Lambda),(W,\Psi)) \arrow[r, "\alpha_{(W,\Psi)}"'] & W
\end{tikzcd}
.
$$

Seja $T \in \mathrm{Rep}_G((\Bbbk G, \Lambda), (V, \Phi))$. Então,

$$f \circ \alpha_{(V,\Phi)}(T) = f \circ T(\delta_e),$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \alpha_{(W,\Psi)} \circ f_*(T) &= \alpha_{(W,\Psi)}(f \circ T) \\ &= f \circ T(\delta_e), \end{aligned}$$

logo o diagrama comuta, e com isso α é natural.

Afirmação 3: $\alpha_{(V,\Phi)}$ é injetora.

Sejam $f_1, f_2 \in \mathrm{Rep}_G((\Bbbk G, \Lambda), (V, \Phi))$, tais que

$$\begin{gathered} \alpha_{(V,\Phi)}(f_1) = \alpha_{(V,\Phi)}(f_2) \\ \Leftrightarrow \\ f_1(\delta_e) = f_2(\delta_e) \\ \Rightarrow f_1 = f_2. \end{gathered}$$

Sejam $g, h \in G$. Então

$$f_1 \circ \Lambda_g(\delta_h) = f_1(\delta_{gh}) = \Phi_g \circ f_1(\delta_h)$$

$$f_2 \circ \Lambda_g(\delta_h) = f_2(\delta_{gh}) = \Phi_g \circ f_2(\delta_h)$$

Em particular, tomando $h = e$ temos que

$$f_1(\delta_g) = \Phi_g \circ f_1(\delta_e)$$

e

$$f_2(\delta_g) = \Phi_g \circ f_2(\delta_e).$$

Como $f_1(\delta_e) = f_2(\delta_e)$, temos que, para todo $g \in G$,

$$f_1(\delta_g) = f_2(\delta_g)$$

e, portanto, $\alpha_{(V,\Phi)}$ é injetora.

Afirmação 4: $\alpha_{(V,\Phi)}$ é sobrejetora.

Seja $v \in V$. Defina

$$\begin{array}{rccc} f_v : & \Bbbk G & \longrightarrow & V \\ & \sum\limits_{g \in G} \alpha_g \delta_g & \longmapsto & \sum\limits_{g \in G} \alpha_g \Phi_g(v). \end{array}$$

Claramente f_v é linear. Vejamos que f_v é morfismo de representações. Sejam $g \in G$ e $\sum\limits_{h \in G} \alpha_h \delta_h \in \Bbbk G$, então,

$$\begin{aligned} f_v \circ \Lambda_g \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \delta_h \right) &= f_v \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \delta_{gh} \right) \\ &= \sum_{h \in G} \alpha_h \Phi_{gh}(v) \\ &= \sum_{h \in G} \alpha_h \Phi_g \circ \Phi_h(v) \\ &= \Phi_g \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \Phi_h(v) \right) \\ &= \Phi_g \circ f_v \left(\sum_{h \in G} \alpha_h \delta_h \right). \end{aligned}$$

Com isso concluímos que α é um isomorfismo natural e, portanto, o funtor esquecimento é representável. $\square$

Teorema 1.57. *Seja* $\mathrm{End}(U)$ *o conjunto das transformações naturais de* U *para* U*. Então* $\mathrm{End}(U)$ *é uma álgebra e*

$$\mathrm{End}(U) \cong \Bbbk G.$$

Demonstração. Defina as aplicações

$$u : End(U) \longrightarrow \Bbbk G,$$

dada por $u(\eta) = \eta_{(\Bbbk G, \Lambda)}(\delta_e)$, e

$$v : \Bbbk G \longrightarrow End(U),$$

que associa a cada $\sum\limits_{g\in G} \alpha_g\delta_g \in \Bbbk G$ a transformação natural $\eta : U \Longrightarrow U$, onde $\eta_{(V,\Phi)}(w) = \sum\limits_{g\in G} \alpha_g \Phi_g(w)$, para todos os objetos $(V,\Phi) \in \mathrm{Rep}_G$ e $w \in V$.

Afirmação 1: $u \circ v = \mathrm{Id}_{\Bbbk G}$.

Seja $\delta_g \in \Bbbk G$. Então

$$\begin{aligned}(u \circ v)(\delta_g) &= (v(\delta_g))_{(\Bbbk G,\Lambda)}(\delta_e)\\ &= \Lambda_g(\delta_e)\\ &= \delta_g.\end{aligned}$$

Afirmação 2: $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{End}(U)}$.

Sejam $\eta \in \mathrm{End}(U), (V,\Phi)$ representação de G e $w \in V$. Então,

$$\begin{aligned}((v \circ u)(\eta))_{(V,\Phi)}(w) &= v(\eta_{(\Bbbk G,\Lambda)}(\delta_e))_{(V,\Phi)}(w)\\ &= \Phi_{\eta_{(\Bbbk G,\Lambda)}(\delta_e)}(w)\end{aligned}$$

Para cada $w \in V$ defina:

$$\begin{array}{rccc} T_w : & \Bbbk G & \longrightarrow & V\\ & \sum\limits_{g\in G} \alpha_g\delta_g & \longmapsto & \sum\limits_{g\in G} \alpha_g\Phi_g(w). \end{array}$$

Claramente T_w é linear. Vejamos que é morfismo de representações. Sejam $g, h \in G$. Então,

$$\begin{aligned}T_w \circ \Lambda_g(\delta_h) &= T_w(\delta_{gh})\\ &= \Phi_{gh}(w)\\ &= \Phi_g \circ \Phi_h(w)\\ &= \Phi_g(T_w(\delta_h))\\ &= \Phi_g \circ T_w(\delta_h)\end{aligned}$$

Usando a naturalidade de η temos:

$$\begin{aligned}\eta_{(V,\Phi)}(w) &= \eta_{(V,\Phi)}(\Phi_e(w))\\ &= \eta_{(V,\Phi)}(T_w(\delta_e))\\ &= T_w \circ \eta_{(\Bbbk G,\Lambda)}(\delta_e)\\ &= \Phi_{\eta_{(\Bbbk G,\Phi)}(\delta_e)}(w)\end{aligned}$$

$$= ((v \circ u)(\eta))_{(V,\Phi)}(w),$$

logo $v \circ u = \mathrm{Id}_{End(U)}$ e como v é linear, temos que v é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Afirmação 3: v é um isomorfismo de álgebras.

Sejam $\delta_g, \delta_h \in \Bbbk G$. Então

$$\begin{array}{rcl} (v(\delta_{gh}))_{(V,\Phi)} & = & \Phi_{gh} \\ & = & \Phi_g \circ \Phi_h \\ & = & (v(\delta_g))_{(V,\Phi)} \circ (v(\delta_h))_{(V,\Phi)} \\ & = & (v(\delta_g) \circ v(\delta_h))_{(V,\Phi)} \end{array}.$$

Assim v preserva a multiplicação de $\Bbbk G$ e, por ser um isomorfismo de espaços vetoriais, faz com que $\mathrm{End}(U)$ também seja uma álgebra. É fácil ver que $v(\delta_e) = \mathrm{Id}$. Além disso $\mathrm{End}(U) \simeq \Bbbk G$.

$\square$

Capítulo 2

Álgebras, Coálgebras e Biálgebras

2.1 Álgebras e Coálgebras

Definição 2.1. Seja A um $\Bbbk$-espaço vetorial (onde $\Bbbk$ é um corpo). Dizemos que a tripla (A, μ, η), onde $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ e $\eta : \Bbbk \longrightarrow A$ são transformações lineares, é uma $\Bbbk$-álgebra se os diagramas abaixo comutarem

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu\otimes \mathrm{Id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_A\otimes\mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes \mathrm{Id}_A"] \arrow[r, "\varphi"'] & A & A \otimes \Bbbk. \arrow[ul, "\mathrm{Id}_A\otimes\eta"'] \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

As aplicações φ e ψ são os isomorfismos canônicos. O primeiro diagrama é chamado de *diagrama da associatividade* e o segundo é chamado de *diagrama da unidade*.

Exemplo 2.2. Seja $\Bbbk$ um corpo. Então $\Bbbk$ é uma álgebra com $\mu(a\otimes b) = ab$ e $\eta = \mathrm{Id}_{\Bbbk}$, pois

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \mu)(a \otimes b \otimes c) &= a(bc) \\
&= (ab)c \\
&= \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c) \\
&= \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk})(a \otimes b \otimes c)
\end{aligned}$$

Veja que neste caso, os morfismos canônicos ϕ e ψ são iguais. Assim,

$$\begin{aligned}\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk})(a \otimes b) &= \mu(a \otimes b)\\ &= ab\\ &= \varphi(a \otimes b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu \circ (\mathrm{Id}_{\Bbbk} \otimes \eta)(a \otimes b) &= \mu(a \otimes b)\\ &= ab\\ &= \psi(a \otimes b).\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Sejam $\Bbbk$ um corpo e G um grupo. Então a álgebra de grupo $\Bbbk G$ é uma álgebra com a multiplicação definida por

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g\right)\left(\sum_{h \in G} \beta_h \delta_h\right) = \sum_{g,h \in G} \alpha_g \beta_h \delta_{gh}.$$

Definição 2.4. Sejam (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra e $B \subseteq A$ um subespaço vetorial. Dizemos que B é uma subálgebra de A se $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.

Definição 2.5. Sejam A uma álgebra. Um subespaço vetorial I de A é:

(i) um ideal à esquerda se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$.

(ii) um ideal à direita se $\mu(I \otimes A) \subseteq I$.

(iii) um ideal se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ e $\mu(I \otimes A) \subseteq I$.

Exemplo 2.6. Sejam $(A, \mu_A, \eta_A), (B, \mu_B, \eta_B)$ $\Bbbk$-álgebras. Então $A \otimes B$ é uma $\Bbbk$-álgebra com

$$\mu_{A \otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}_B)$$

$$\eta_{A \otimes B} = (\eta_A \otimes \eta_B) \circ \varphi_{\Bbbk}^{-1}$$

onde $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ e $\varphi_{\Bbbk}^{-1} : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk \otimes \Bbbk$ é o isomorfismo canônico.

Definição 2.7. Seja C um $\Bbbk$-espaço vetorial. Dizemos que a tripla (C, Δ, ϵ) onde $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ e $\epsilon : C \longrightarrow \Bbbk$ são transformações lineares, tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{Id}_C"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{Id}_C \otimes \Delta"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\psi^{-1}"] & \\
\Bbbk \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes \mathrm{Id}_C"] \arrow[r, "\mathrm{Id}_C \otimes \epsilon"'] & C \otimes \Bbbk.
\end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama é chamado de *diagrama da coassociatividade* e o segundo é chamado de *diagrama da counidade.*

Definição 2.8. Sejam (C, Δ, ϵ) uma $\Bbbk$-coálgebra, e $X \subseteq C$ um subespaço vetorial. Dizemos que X é uma subcoálgebra de C se $\Delta(X) \subseteq X \otimes X$.

Sejam C uma coálgebra e $c \in C$. Então $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$, em que a soma é finita. Assim, podemos aplicar Δ em $c_{(1)}$ e teremos

$$\Delta(c_{(1)}) = \sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)}.$$

Escreva $\Delta = \Delta_1$, $\Delta_n : C \longrightarrow C \otimes C \otimes \cdots \otimes C$ ($n+1$ vezes), $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$. Pela notação de Sweedler, que pode ser vista em [1] capítulo 1, página 5 podemos escrever:

$$\Delta_2(c) = \sum \Delta(c_1) \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes \Delta(c_{(2)}) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.$$

Usando a comutatividade do diagrama da counidade e o isomorfismo $\Bbbk \otimes \Bbbk \cong \Bbbk$, temos a seguinte igualdade:

$$\sum \epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \sum c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}) = c.$$

Para $n = 3$:

$$\sum \epsilon(c_{(1)})\epsilon(c_{(2)})c_{(3)} = c.$$

Em geral neste trabalho ocultaremos o símbolo de somatório, a menos que seja necessário.

Um resultado interessante sobre as coálgebras é sua relação com a dimensão do espaço. O próximo resultado nos falará disso.

Teorema 2.9 (Teorema Fundamental das Coálgebras)**.** *Todo elemento de uma coálgebra está contido em uma subcoálgebra de dimensão finita.*

Demonstração. Sejam (C, Δ, ϵ) uma $\Bbbk$-coálgebra e $c \in C$. Nomeie $\Delta_2 = (\Delta \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta$.

Então podemos escrever:

$$\Delta_2(c) = \sum_{ij} c_i \otimes x_{ij} \otimes d_j$$

Com $\{c_i\}_i$ e $\{d_j\}_j$ linearmente independentes.

Seja X o subespaço vetorial de C gerado por $\{x_{ij}\}_{ij}$, que é de dimensão finita.

Como

$$c = (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \epsilon) \circ \Delta_2(c)$$

então

$$c = \sum_{ij} \epsilon(c_i)\epsilon(d_j)x_{ij}$$

e isso mostra que $c \in X$.

Resta mostrar que X é uma subcoálgebra de C. Sabemos que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}_C \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_2 = (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \Delta_2.$$

Então

$$\sum_{ij} \Delta(c_i) \otimes x_{ij} \otimes d_j = \sum_{ij} c_i \otimes \Delta(x_{ij}) \otimes d_j$$

Como $\{d_j\}_j$ é linearmente independente, temos que

$$\sum_i c_i \otimes \Delta(x_{ij}) = \sum_i \Delta(c_i) \otimes x_{ij} \in C \otimes C \otimes X.$$

Como $\{c_i\}_i$ é linearmente independente, temos que

$$\Delta(x_{ij}) \in C \otimes X$$

e, analogamente, temos que

$$\Delta(x_{ij}) \in X \otimes C,$$

para todo i, j.

Então

$$\Delta(x_{ij}) \in C \otimes X \cap X \otimes C = X \otimes X,$$

e portanto é uma subcoálgebra de C. $\square$

Exemplo 2.10. Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C), (D, \Delta_D, \epsilon_D)$ coálgebras. Então $C \otimes D$ é uma coálgebra com

$$\Delta_{C\otimes D} = (\Delta_C \otimes \Delta_D) \circ (\mathrm{Id}_C \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}_D)$$
$$\epsilon_{C\otimes D} = \varphi \circ (\epsilon_C \otimes \epsilon_D)$$

onde $\tau(c \otimes d) = d \otimes c$ e φ é o isomorfismo canônico entre $\Bbbk$ e $\Bbbk \otimes \Bbbk$.

Definição 2.11. Sejam A e B duas $\Bbbk$-álgebras e $f : A \longrightarrow B$ uma transformação linear. Dizemos que f é um homomorfismo de álgebras se os diagramas abaixo comutarem:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \Bbbk \arrow[ul, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd} .$$

Definição 2.12. Sejam C e D $\Bbbk$-coálgebras e $f : C \longrightarrow D$ uma transformação linear. Dizemos que f é um homomorfismo de coálgebras de os diagramas abaixo comutarem:

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"] & B \otimes B \\ C \arrow[r, "f"'] \arrow[u, "\Delta_C"] & D \arrow[u, "\Delta_D"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\epsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\ & \Bbbk & \end{tikzcd} .$$

Seja $c \in C$. Então

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C(c) = f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}),$$

$$\Delta_D \circ f(c) = f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)},$$

e pela comutatividade do primeiro diagrama temos

$$f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = f(c)_{(1)} \otimes f(c)_{(2)}.$$

Definição 2.13. Seja H um $\Bbbk$-espaço vetorial tal que (H, μ, η) é uma álgebra e (H, Δ, ϵ) é uma coálgebra. Dizemos que $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ é uma biálgebra se Δ e ϵ são homomorfismos de álgebra.

Observação 2.14. Na definição acima é equivalente a dizer que μ e η são homomorfismos de coálgebras.

Definição 2.15. Sejam A e B duas biálgebras, $f : A \longrightarrow B$ uma transformação linear. Então f é um morfismo de biálgebras se é morfismo de álgebras e de coálgebras.

2.2 Duais de Álgebras e Coálgebras

Dado V um $\Bbbk$-espaço vetorial, definimos o dual de V, denotado por V^*, como o conjunto $\mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$ de todas as aplicações lineares de V para $\Bbbk$. Nesta seção vamos estudar os casos em que o espaço vetorial em questão é uma álgebra ou uma coálgebra e ver em quais condições as suas estruturas são preservadas.

Da teoria de álgebra linear, relembramos que dada uma aplicação linear $f : U \longrightarrow V$, a *transposta* de f é aplicação $f^* : V^* \longrightarrow U^*$ dada por $f^*(\phi) = \phi \circ f$.

Quando definimos álgebra e coálgebra utilizamos algumas aplicações lineares que descrevem estas estruturas. Vejamos o que acontece quando tomamos a transposta de cada uma dessas aplicações.

Sejam (A, μ, η) uma álgebra e (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Então

$$\begin{array}{rl} \mu^* : & A^* \longrightarrow (A \otimes A)^* \\ \eta * : & A^* \longrightarrow \Bbbk^* \\ \epsilon^* : & \Bbbk^* \longrightarrow C^* \\ \Delta^* : & (C \otimes C)^* \longrightarrow C^*. \end{array}$$

Veja que as aplicações acima nos lembram das aplicações que dão estrutura de álgebra para C^* e de coálgebra para A^*. Mas para isso precisaríamos ter isomorfismos $\Bbbk \cong \Bbbk^*$ e $A^* \otimes A^* \cong (A \otimes A)^*$.

O primeiro isomorfismo pode ser dado pela seguinte função

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \Bbbk & \longrightarrow & \Bbbk^* \\ & \lambda & \longmapsto & \gamma_\lambda \end{array}$$

onde $\gamma_\lambda(k) = \lambda k$.

Já a identificação entre $(A \otimes A)^*$ e $A^* \otimes A^*$ nem sempre é verdadeira.

Lema 2.16. *Sejam $\Bbbk$ um corpo, U, V e W $\Bbbk$-espaços vetoriais, e transformações lineares $\phi : U^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W), \phi' : \mathrm{Hom}(U, V^*) \longrightarrow (U \otimes V)^*$ e $\rho : U^* \otimes V^* \longrightarrow (U \otimes V)^*$, dadas por:*

$$\begin{gathered} \phi(f \otimes w)(u) = f(u)w, \text{ para } f \in U^*, w \in W \text{ e } u \in U; \\ \phi'(g)(u \otimes v) = (g(u))(v), \text{ para } g \in \mathrm{Hom}(U, V^*), u \in U \text{ e } v \in V; \\ \rho(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)g(v), \text{ para } f \in U^*, g \in V^*, u \in U \text{ e } v \in V. \end{gathered}$$

Então são válidas as seguintes afirmações:

(i) ϕ é sempre injetora. Se W tem dimensão finita então ϕ é isomorfismo.

(ii) ϕ' *é isomorfismo;*

(iii) ρ *é sempre injetora. Se* W *tem dimensão finita então* ρ *é isomorfismo.*

Demonstração. (i) Seja $\sum_j f_j \otimes w_j \in \ker \phi$. Podemos escolher w_j's linearmente independentes. Então

$$\phi\left(\sum_j f_j \otimes w_j\right)(u) = \sum_j f_j(u) w_j = 0$$

para todo $u \in U$.

Como $\{w_j\}_j$ é linearmente independente temos que $f_j(u) = 0$ para todo $u \in U$. Logo $f_j = 0$ e assim $\sum_j f_j \otimes w_j = 0$, o que significa que ϕ é injetora e claramente se W tem dimensão finita então ϕ é isomorfismo.

(ii) Seja $g \in \ker \phi'$. Então $\phi'(g)(u \otimes v) = g(u)(v) = 0$ para todo $u \in U$ e $v \in V$, o que implica que $g(u) = 0$ para todo $u \in U$ e, consequentemente $g = 0$. Logo ϕ' é injetora.

Seja $h \in (U \otimes V)^*$. Defina $\overline{h} \in \text{Hom}(U, V^*)$ dada por $\overline{h}(u)(v) = h(u \otimes v)$. Então $\overline{h} \in \text{Hom}(U, V^*)$ e

$$\phi'(\overline{h})(u \otimes v) = \overline{h}(u)(v) = h(u \otimes v)$$

para todo $v \in V$ e $u \in U$, logo $\phi'(\overline{h}) = h$ e assim ϕ' é sobrejetora. Portanto ϕ' é um isomorfismo.

(iii) Colocando $W = V^*$ e $\rho = \phi' \circ \phi$ este item segue de (i) e (ii).

□

Corolário 2.17. *Sejam* $V_1, \cdots, V_n$ $\Bbbk$*-espaços vetoriais e* $\theta_n : V_1^* \otimes \cdots \otimes V_n^* \longrightarrow (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)^*$ *dada por*

$$\theta(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f_1(v_1) f_2(v_2) \cdots f_n(v_n)$$

é injetora. Além disso, θ *é isomorfismo se, e somente se, no mínimo um dos* $V_1, \cdots, V_n$ *for de dimensão infinita.*

Demonstração. Basta aplicar indução ao item (iii) do Lema 2.16. □

2.2.1 A Álgebra $\mathrm{Hom}(C, A)$

Sejam (A, μ, η) uma álgebra e (C, Δ, ϵ) uma coálgebra sobre um corpo $\Bbbk$. Considere o espaço vetorial $\mathrm{Hom}(C, A)$ de todas as transformações lineares entre C e A. Podemos colocar uma estrutura de $\Bbbk$-álgebra em $\mathrm{Hom}(C, A)$ com a seguinte operação $*$ dada por

$$(f * g)(c) = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Para mostrar que $\mathrm{Hom}(C, A)$ é uma $\Bbbk$-álgebra, basta mostrar a associatividade e a distributividade da operação $*$, já que $\mathrm{Hom}(C, A)$ é $\Bbbk$-espaço vetorial.

Sejam $f, g, h \in \mathrm{Hom}(C, A)$, $\lambda \in \Bbbk$ e $c \in C$. Então

$$\begin{aligned}
(f * (g + \lambda h))(c) &= f(c_{(1)})(g + \lambda h)(c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)})(g(c_{(2)}) + \lambda h(c_{(2)})) \\
&= f(c_{(1)})g(c_{(2)}) + \lambda f(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= (f * g)(c) + \lambda(f * h)(c) \\
&= (f * g + \lambda f * h)(c),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((f + \lambda g) * h)(c) &= (f + \lambda g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= (f(c_{(1)} + \lambda g(c_{(1)}))h(c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)})h(c_{(2)}) + \lambda f(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= (f * h)(c) + (\lambda g * h)(c) \\
&= (f * h + \lambda g * h)(c),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)})h(c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)})g(c_{(2)(1)})h(c_{(2)(2)}) \\
&= f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\
&= (f * (g * h))(c).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
f * (\eta \circ \epsilon)(c) &= f(c_{(1)})\eta(\epsilon(c_{(2)})) \\
&= f(c_{(1)})\epsilon(c_{(2)})1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(c_{(1)}\epsilon(c_{(2)})) \\
&= f(c).
\end{aligned}
$$

Analogamente $(\eta \circ \epsilon) * f = f$, o que faz com que $\eta \circ \epsilon$ seja a unidade da álgebra.

2.2.2 A Álgebra Dual de uma Coálgebra

Seja (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Considerando $A = \Bbbk$ no caso da seção anterior, temos que $C^* = \mathrm{Hom}(C, \Bbbk)$ é uma álgebra com o produto de convolução.

Mais explicitamente, ainda podemos escrever

$$\mu_{C^*}(f \otimes g) = \mu_{\Bbbk} \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Definindo $\theta : C^* \otimes C^* \longrightarrow (C \otimes C)^*$ dada por $\theta(f \otimes g)(c \otimes d) = f(c)g(d)$ (que é linear e injetora pelo Corolário 2.17), temos que para todo $c \in C$

$$
\begin{aligned}
\theta \circ \Delta^*(f \otimes g)(c) &= \theta \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c) \\
&= \theta(f \otimes g)(c_{(1)} \otimes c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \\
&= \mu_{\Bbbk} \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c).
\end{aligned}
$$

Assim $\mu_{C^*} = \theta \circ \Delta^*$. Note que a identidade de C^* é tal que

$$1_{C^*} = \eta_{\Bbbk} \circ \epsilon = \mathrm{Id}_{\Bbbk} \circ \epsilon = \epsilon.$$

Defina $\eta_{C^*} = \epsilon^* \circ \gamma$ onde γ é o isomorfismo entre $\Bbbk$ e $\Bbbk^*$ visto anteriormente.

Então, para todo $c \in C$ ocorrem

$$
\begin{aligned}
\mu_{C^*} \circ (\eta_{C^*} \otimes \mathrm{Id}_{C^*})(\lambda \otimes f)(c) &= \mu_{C^*}((\epsilon^* \circ \gamma(\lambda)) \otimes f)(c) \\
&= (\lambda\epsilon * f)(c) \\
&= \lambda\epsilon(c_{(1)})f(c_{(2)}) \\
&= \lambda f(c) \\
&= \varphi(\lambda \otimes f)(c),
\end{aligned}
$$

$$\mu_{C^*} \circ (\mathrm{Id}_{C^*} \otimes \eta_{C^*})(f \otimes \lambda)(c) = \mu_{C^*}(f \otimes (\lambda\epsilon))(c)$$

$$
\begin{aligned}
&= (f * (\lambda\epsilon))(c) \\
&= f(c_{(1)})\lambda\epsilon(c_{(2)}) \\
&= \lambda f(c) \\
&= \psi(f \otimes \lambda)(c),
\end{aligned}
$$

onde φ é o isomorfismo canônico entre $\Bbbk \otimes A$ e A e ψ é o isomorfismo canônico entre $A \otimes \Bbbk$ e A.

Dessa forma η_{C^*} satisfaz a comutatividade do diagrama da unidade da $Definio$ 2.1, e conseguimos escrever a estrutura de álgebra para C^* por meio de diagramas, com as aplicações lineares μ_{C^*} e η_{C^*}.

Proposição 2.18. *Sejam $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ coálgebras e $f : C \longrightarrow D$ um homomorfismo de coálgebras. Então a transposta $f^* : D^* \longrightarrow C^*$ é um homomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Sabemos que f^* é linear. Sejam $p, q \in D^*$ $c \in C$, então

$$
\begin{aligned}
f^*(p * q)(c) &= (p * q) \circ f(c) \\
&= p(f(c)_{(1)})q(f(c)_{(2)}) \\
&= p(f(c_{(1)}))q(f(c_{(2)})) \\
&= ((p \circ f) * (q \circ f))(c) \\
&= f^*(p) * f^*(q)(c),
\end{aligned}
$$

logo $f^*(p * q) = f^*(p) * f^*(q)$, e

$$
\begin{aligned}
f^*(\mathbb{1}_{D^*}) &= f^*(\epsilon_D) \\
&= \epsilon_D \circ f \\
&= \epsilon_C \\
&= \mathbb{1}_{C^*}.
\end{aligned}
$$

Assim, f^* é um homomorfismo de álgebras. $\square$

2.2.3 A Coálgebra Dual de uma Álgebra

Seja (A, μ, η) uma álgebra de dimensão finita. Para dar uma estrutura de coálgebra para A^* utilizaremos a aplicação $\theta : A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A)^*$ vista no Corolário 2.17. Como A tem dimensão finita, θ é um isomorfismo.

Defina $\Delta_{A^*} = \theta^{-1} \circ \mu$ e $\epsilon_{A^*} = \gamma^{-1} \circ \eta^*$, onde $\gamma : \Bbbk \longrightarrow \Bbbk^*$ é o isomorfismo visto na seção anterior.

Lema 2.19. *Sejam (A, μ, η) uma álgebra de dimensão finita e $f \in A^*$, nesse caso temos*

$$\Delta_{A^*}(f) = \sum_j g_j \otimes h_j.$$

Então

1. $f(a \cdot b) = \sum_j g_j(a)h_j(b)$ *para todo* $a, b \in A$.

2. *Se existirem* $g_i', h_i' \in A^*$ *tais que* $f(a \cdot b) = g_i'(a)h_i(b)$ *para todo* $a, b \in A$, *devemos ter que*

$$\sum_j g_j \otimes h_j = \sum_i g_i' \otimes h_i'.$$

Demonstração. 1. Sejam $a, b \in A$, então

$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= f \circ \mu(a \otimes b) \\ &= \mu^*(f)(a \otimes b) \\ &= (\theta \circ \theta^{-1} \circ \mu^*(f))(a \otimes b) \\ &= (\theta \circ \Delta_{A^*}(f))(a \otimes b) \\ &= \theta \left(\sum_j g_j \otimes h_j \right) (a \otimes b) \\ &= \sum g_j(a)h_j(b). \end{aligned}$$

2. Se $f(a \cdot b) = \sum g_j(a)h_j(b) = \sum g_i'(a)h_i(b)$ para todos $a, b \in A$, então temos que

$$\theta \left(\sum_j g_j \otimes h_j \right) = \theta \left(\sum_i g_i' \otimes h_i' \right)$$

Pelo Corolário 2.17 θ é sempre injetiva, logo

$$\sum_j g_j \otimes h_j = \sum_i g_i' \otimes h_i'.$$

□

Proposição 2.20. *Seja (A, μ, η) uma álgebra de dimensão finita. Então $(A^*, \Delta_{A^*}, \epsilon_{A^*})$ é uma coálgebra, onde*

$$\Delta_{A^*} = \theta^{-1} \circ \mu_{A^*} \ \ e \ \epsilon_{A^*} = \gamma^{-1} \circ \eta^*$$

Demonstração. Seja $f \in A^*$. Denotemos

$$\Delta_{A^*}(f) = \sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)},$$

$$\Delta_{A^*}(f_i^{(1)}) = \sum_j f_{ij}^{(1)(1)} \otimes f_{ij}^{(1)(2)},$$

$$\Delta_{A^*}(f_i^{(2)}) = \sum_j f_{ij}^{(2)(1)} \otimes f_{ij}^{(2)(2)}.$$

Então,

$$(\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f) = \sum_{i,j} f_{ij}^{(1)(1)} \otimes f_{ij}^{(1)(2)} \otimes f_i^{(2)}$$

e

$$(\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f) = \sum_{i,k} f_i^{(1)} \otimes f_{ik}^{(2)(1)} \otimes f_{ik}^{(2)(2)}.$$

Vamos mostrar que esses elementos são iguais. Considere a bijeção linear do Corolário 2.17

$$\theta : A^* \otimes A^* \otimes A^* \longrightarrow (A \otimes A \otimes A)^*,$$

onde

$$\theta(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)(a \otimes b \otimes c) = f_1(a) f_2(b) f_3(c),$$

para todos $f_1, f_2, f_3 \in A^*$ e $a, b, c \in A$. Sejam $a, b, c \in A$. Então pelo lema 2.19 temos

$$\begin{aligned}
\theta((\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f))(a \otimes b \otimes c) &= \sum_i \left(\sum_j f_{ij}^{(1)(1)}(a) f_{ij}^{(1)(2)}(b) \right) f_i^{(2)}(c) \\
&= \sum_i f_i^{(1)}(a \cdot b) f_i^{(2)}(c) \\
&= f(a \cdot b \cdot c),
\end{aligned}$$

$$\theta((\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f))(a \otimes b \otimes c) = \sum_i f_i^{(1)}(a) \left(\sum_k f_{ik}^{(2)(1)}(b) f_{ik}^{(2)(2)}(c) \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i f_i^{(1)}(a) f_i^{(2)}(b \cdot c) \\
&= f(a \cdot b \cdot c).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\theta((\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f)) = \theta((\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f)),$$

e portanto

$$(\Delta_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f) = (\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \Delta_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f).$$

Isso mostra a comutatividade do diagrama da coassociatividade.
Vejamos agora a counidade.
Seja $g \in A^*$. Então

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{A^*}(g) &= \gamma - 1 \circ \eta^*(g) \\
&= \gamma^{-1}(g \circ \eta) \\
&= g \circ \eta(1) \\
&= g(1_A)
\end{aligned}
$$

Seja $f \in A^*$. Então

$$
\begin{aligned}
\varphi((\epsilon_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f)) &= \varphi\left((\epsilon_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*})\left(\sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}\right)\right) \\
&= \varphi\left(\sum_i \epsilon_{A^*}(f_i^{(1)}) \otimes f_i^{(2)}\right) \\
&= \varphi\left(\sum_i f_i^{(1)}(1_A) \otimes f_i^{(2)}\right) \\
&= \sum_i f_i^{(1)}(1_A) f_i^{(2)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi((\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \epsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f)) &= \psi\left((\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \epsilon_{A^*})\left(\sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}\right)\right) \\
&= \psi\left(\sum_i f_i^{(1)} \otimes \epsilon_{A^*}(f_i^{(2)})\right)
\end{aligned}
$$

$$= \psi\left(\sum_i f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}(1_A)\right)$$
$$= \sum_i f_i^{(2)}(1_A) f_i^{(1)}.$$

Seja $a \in A$. Pelo Lema 2.19 temos:

$$\begin{aligned}
\varphi((\epsilon_{A^*} \otimes \mathrm{Id}_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f))(a) &= \sum_i f_i^{(1)}(1_A) f_i^{(2)}(a) \\
&= f(1_A a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi((\mathrm{Id}_{A^*} \otimes \epsilon_{A^*}) \circ \Delta_{A^*}(f))(a) &= \sum_i f_i^{(2)}(1_A) f_i^{(1)}(a) \\
&= f(1_A a) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Como os diagramas de counidade e coassociatividade foram satisfeitos, concluímos que $(A^*, \Delta_{A^*}, \epsilon_{A^*})$ é uma coálgebra. $\square$

2.2.4 Dual Finito de uma Álgebra

Para construir uma coálgebra a partir do dual de uma álgebra tivemos que nos restringir aos espaços vetoriais de dimensão finita, para que os isomorfismos em questão pudessem ser satisfeitos. Veremos agora como construir, a partir de uma álgebra A, uma coálgebra definida em um subespaço apropriado de A^*.

Seja (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra. Defina o conjunto

$$A^\circ = \{f \in A^* : \ker(f) \text{ contém um ideal de codimensão finita}\}.$$

Relembramos que, dado um espaço vetorial V e um subespaço vetorial W, a *codimensão de* W é $\dim(V/W)$. A codimensão de W é denotada por $\mathrm{codim}(W)$.

Lema 2.21. *Sejam V um $\Bbbk$-espaço vetorial, $X, Y \subseteq V$ subespaços vetoriais de V. Então*

$$\mathrm{codim}(X \cap Y) \leq \mathrm{codim}(X) + \mathrm{codim}(Y).$$

Demonstração. Defina a função $T : V \longrightarrow \frac{V}{X} \times \frac{V}{Y}$, dada por

$$T(v) = (v + X, v + Y).$$

Note que $\ker(T) = X \cap Y$. Então, pelo teorema do isomorfismo temos

$$\frac{V}{(X \cap Y)} = \frac{V}{\ker(T)} \cong \operatorname{Im}(T) \subseteq \frac{V}{X} \times \frac{V}{Y}.$$

Logo,

$$\dim\left(\frac{V}{(X \cap Y)}\right) \leq \dim\left(\frac{V}{X} \times \frac{V}{Y}\right) = \dim\left(\frac{V}{X}\right) + \dim\left(\frac{V}{Y}\right),$$

ou seja,

$$\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Y).$$

$\square$

Proposição 2.22. *Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Então A° é um $\Bbbk$-espaço vetorial.*

Demonstração. Seja $0 \in A^*$ o funcional nulo. Então $\ker(0) = A$, que é ideal de A e $A \subseteq \ker(0)$ e

$$\operatorname{codim}(A) = \dim(\tfrac{A}{A}) = 0.$$

Logo, $0 \in A^\circ$.

Sejam $f, g \in A^\circ$. Então existem ideais de A, I_f, I_g tais que $I_f \subseteq \ker(f)$, $I_g \subseteq \ker(g)$ e $\operatorname{codim}(I_f) < \infty$, $\operatorname{codim}(I_g) < \infty$.

Seja $a \in I_f \cap I_g$. Então

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0,$$

logo temos que

$$a \in \ker(f + g).$$

Com isso, $(I_f \cap I_g) \subseteq \ker(f + g)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}(I_f \cap I_g) &\leq \operatorname{codim}(I_f) + \operatorname{codim}(I_g) < \infty \\ &\Rightarrow f + g \in A^\circ. \end{aligned}$$

Note que $\ker(f) \subseteq \ker(\alpha f)$. Então,

$$I \subseteq \ker(f) \subseteq \ker(\alpha f),$$

o que mostra que $\alpha f \in A^\circ$.

Portanto A° é um $\Bbbk$-espaço vetorial.

$\square$

Lema 2.23. *Se um conjunto de funcionais lineares* $\{f_i\}_{i=1}^n$ *definidos em um espaço vetorial* V *é linearmente independente então existem* $\{v_j\}_{j=1}^n \subseteq V$ *tais que* $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ *.*

A demostração do lema acima pode ser encontrada em [1], página 39.

Teorema 2.24. *Sejam* A *uma álgebra,* $f \in A^*$ *e* θ *como no Corolário 2.17. Então são equivalentes:*

(i) *Existem* $f_i, g_i \in A^*$, *com* $i \in \{1, ..., n\}$, *tais que* $f(ab) = \sum\limits_i f_i(a)g_i(b)$, *para todo* $a, b \in A$;

(ii) $\mu^*(f) \in \theta(A^* \otimes A^*)$;

(iii) *Existe* $I \subseteq \ker(f)$ *um ideal à esquerda de* A *de codimensão finita;*

(iv) *Existe* $J \subseteq \ker(f)$ *um ideal à direita de* A *de codimensão finita;*

(v) *Existe* $K \subseteq \ker(f)$ *um ideal de* A *de codimensão finita.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [11], página 57.

Pelo teorema acima, temos que A° é o conjunto dos funcionais lineares $f \in A^*$ que satisfazem um dos itens acima.

Proposição 2.25. *Seja* (A, μ, η) *uma álgebra. Então* $(A^\circ, \Delta, \epsilon)$ *é uma coálgebra, onde* $\Delta_{A^\circ} = \theta^{-1} \circ \mu^*$ *e* $\epsilon_{A^\circ} = \gamma^{-1} \circ \eta_{A^*}$.

Demonstração. Na Proposição 2.22, já mostramos que A° é um subespaço vetorial de A^*. Vamos mostrar que a aplicação Δ_{A° está bem definida, isto é, $\Delta_{A^\circ}(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$.

Seja $f \in A^\circ$. Então podemos escrever

$$\Delta_{A^\circ}(f) = \sum_i f_i \otimes g_i,$$

com $f_i, g_i \in A^*$ e $\{f_i\}_{i=1}^n$ LI. Pelo Lema 2.23 existem $\{a_j\}_{j=1}^n \subseteq A$ tais que

$$f_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

Então

$$\begin{aligned} g_i(ab) &= \sum_{ij} \delta_{ij} g_j(ab) \\ &= \sum_{ij} f_j(a_i) g_j(ab) \\ &= \sum_{ij} f_j(a_i a) g_j(b) \\ &= \sum_{ij} (f_j \circ L_{a_i})(a) g_j(b), \end{aligned}$$

onde L_{a_i} é a multiplicação à esquerda por a_i. Como pudemos escrever $g_i(ab)$ como uma soma $\sum_j \widehat{f}_j(a) g_j(b)$, pelo item (i) do Teorema 2.24 temos que $g_i \in A^\circ$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Com isso, concluímos que

$$\Delta_{A^\circ}(f) \in A^* \otimes A^\circ.$$

Analogamente, conseguimos mostrar que $\Delta_{A^\circ}(f) \in A^\circ \otimes A^*$.

Assim,

$$\Delta_{A^\circ}(f) \in A^* \otimes A^\circ \bigcap A^* \otimes A^\circ = A^\circ \otimes A^*.$$

Logo Δ_{A° está bem definida.

A demonstração da counidade e coassociatividade são análogos ao caso finito. □

Proposição 2.26. *Seja $f : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então o morfismo*

$$f^\circ : B^\circ \longrightarrow A^\circ,$$

definido por $f^\circ(g) = f^*(g)$ para todo $g \in B^\circ$ é um homomorfismo de coálgebras.

Demonstração. Primeiramente vejamos que f° está bem definido. Seja $g \in B^\circ$. Então, dados $a, b \in A$ temos:

$$\begin{aligned} f^\circ(g)(ab) &= g \circ f(ab) \\ &= g(f(a) f(b)) \\ &= \sum_j g'_j(f(a)) g''_j(f(b)) \end{aligned}$$

$$= \sum_j (g'_j \circ f)(a)(g''_j \circ f)(b),$$

onde $g'_j, g''_j \in B^*$. Logo $g'_j \circ f, g''_j \circ f \in A^*$, e fica satisfeito o item (i) do Teorema 2.24, donde $f^\circ(g) \in A^\circ$.

A demonstração de que f° é um homomorfismo de coálgebras é análogo ao caso finito. □

2.3 Álgebras de Hopf

Considere agora $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ uma biálgebra. Denotaremos por H^c a coálgebra (H, Δ, ϵ) e por H^a a álgebra (H, μ, η).

Então o conjunto $\mathrm{Hom}(H^c, H^a)$ é uma álgebra com a operação de convolução que definimos anteriormente, lembremos que a aplicação Id_H identidade de H é um elemento de $\mathrm{Hom}(H^c, H^a)$.

Definição 2.27. Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ uma biálgebra. Uma aplicação linear $S \in \mathrm{Hom}(H^c, H^a)$ é dita uma antípoda de H se S é o elemento inverso de Id_H com respeito a operação de convolução, ou seja, se

$$S * \mathrm{Id}_H = \mathrm{Id}_H * S = \eta \circ \epsilon.$$

Definição 2.28. Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ uma biálgebra. Se H possuir uma antípoda então H é dita uma álgebra de Hopf.

Na notação de Sweedler, temos que para todo $h \in H$

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon(h)1.$$

Definição 2.29. Sejam H e K álgebras de Hopf. Uma transformação linear $f : H \longrightarrow K$ é um morfismo de álgebras de Hopf se é um morfismo de biálgebras.

Proposição 2.30. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. Então*

(i) $S(gh) = S(h)S(g)$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_{(1)}) \otimes S(h_{(2)})$.

(iv) $\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$,

para todos $g, h \in H$.

A demonstração da proposição pode ser vista em [1], capítulo 4, página 153.

Proposição 2.31. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. São equivalentes:*

(i) $S(h_{(2)})h_{(1)} = \epsilon(h)1_H$,

(ii) $h_{(2)}S(h_{(1)}) = \epsilon(h)1_H$,

(iii) $S \circ S = \mathrm{Id}_H$,

para todo $h \in H$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (iii)$ Sabemos que Id_H é a inversa de S pela convolução. Vamos mostrar que $S \circ S$ é também inversa de Id_H e, pela unicidade da inversa, teremos que $S \circ S = \mathrm{Id}_H$. Seja $h \in H$. Então

$$\begin{aligned} S * (S \circ S)(h) &= S(h_{(1)})S(S(h_{(2)})) \\ &= S(S(h_{(2)})h_{(1)}) \\ &= S(\epsilon(h)1_H) \\ &= \epsilon(h)1_H. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Aplicando S em $S(h_{(1)})h_{(2)}$ temos

$$S(S(h_1))S(h_{(2)}) = \epsilon(h)1_H.$$

Como $S \circ S = \mathrm{Id}_H$ então $h_{(2)}S(h_{(1)}) = \epsilon(h)1_H$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Seja $h \in H$. Usando a unicidade da inversa pela convolução como em (i) temos

$$\begin{aligned} (S \circ S) * S(h) &= S(S(h_{(1)}))S(h_{(2)}) \\ &= S(\epsilon(h)1_H) \\ &= \epsilon(h)1_H. \end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Aplicando S à equação $S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1_H$ e usando que $S \circ S = \mathrm{Id}_H$ obtemos a equação $S(h_{(2)})h_{(1)} = \epsilon(h)1_H$. □

Exemplo 2.32. Seja $\Bbbk$ um corpo e G um grupo. Então a álgebra de grupo $\Bbbk G$ vista anteriormente é uma álgebra de Hopf.

De fato, defina

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \Bbbk G & \longrightarrow & \Bbbk G \otimes \Bbbk G \\ & \delta_g & \longmapsto & \delta_g \otimes \delta_g \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \epsilon: & kG & \longrightarrow & k \\ & \delta_g & \longmapsto & 1 \end{array}.$$

Então dado $g \in G$ tem-se:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk G}) \circ \Delta(\delta_g) &= \delta_g \otimes \delta_g \otimes \delta_g \\ &= (\mathrm{Id}_{\Bbbk G} \otimes \Delta) \circ \Delta(\delta_g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_{\Bbbk G} \otimes \epsilon) \circ \Delta(\delta_g) &= \delta_g \otimes 1 \\ &= \varphi(\delta_g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_{\Bbbk G}) \circ \Delta(\delta_g) &= 1 \otimes \delta_g \\ &= \psi(\delta_g), \end{aligned}$$

onde $\varphi : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk G \otimes \Bbbk$ e $\psi : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk \otimes \Bbbk G$ são os isomorfismos canônicos.

Até aqui, mostramos que $\Bbbk G$ é uma coálgebra. Agora veja que

$$\begin{aligned} \Delta(\delta_g \delta_h) &= \Delta(\delta_{gh}) \\ &= \delta_{gh} \otimes \delta_{gh} \\ &= \delta_g \delta_h \otimes \delta_g \delta_h \\ &= (\delta_g \otimes \delta_g)(\delta_h \otimes \delta_h) \\ &= \Delta(\delta_g)\Delta(\delta_g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\delta_g \delta_h) &= \epsilon(\delta_{gh}) \\ &= 1 \\ &= \epsilon(\delta_g)\epsilon(\delta_h), \end{aligned}$$

o que mostra que $\Bbbk G$ é uma biálgebra.

Considere aplicação linear S abaixo.

$$\begin{array}{rccc} S: & \Bbbk G & \longrightarrow & \Bbbk G \\ & \delta_g & \longmapsto & \delta_{g^{-1}} \end{array}$$

Afirmamos que S é a antípoda de $\Bbbk G$.

Seja $\delta_g \in \Bbbk G$. Então

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_{\Bbbk G} * S)(\delta_g) &= \delta_g \delta_{g^{-1}} \\ &= \delta_e \\ &= \eta(1) \\ &= \eta \circ \epsilon(\delta_g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(S * \mathrm{Id}_{\Bbbk G})(\delta_g) &= \delta_{g^{-1}} \delta_g \\ &= \delta_e \\ &= \eta(1) \\ &= \eta \circ \epsilon(\delta_g).\end{aligned}$$

Portanto S é a antípoda e com isso $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf.

2.3.1 Álgebra das Funções Representativas de um Grupo

Proposição 2.33. *Sejam G um grupo, $\Bbbk$ um corpo e $f : G \longrightarrow \Bbbk$ uma função. São equivalentes:*

(i) O espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{f(z\_x) : z, x \in G\}$, em que $f(z\_x)(y) = f(zyx), \forall y \in G$, tem dimensão finita.

(ii) O espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{f(\_z) : z \in G\}$, em que $f(\_z)(y) = f(yz), \forall y \in G$, tem dimensão finita.

(iii) O espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{f(z\_) : z \in G\}$, em que $f(z\_)(y) = f(zy), \forall y \in G$, tem dimensão finita.

(iv) Existem V um k-espaço vetorial de dimensão finita, uma representação $\pi : G \longrightarrow GL(V)$, um funcional $\varphi \in V^*$ e um vetor $v \in V$ tais que $f(x) = \varphi(\pi_x(v)), \forall x \in G$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$

Seja $y \in G$. Então para todo $z \in G$ temos

$$\begin{array}{rcl} f(\_z)(y) & = & f(yz) \\ & = & f(eyz) \\ & = & f(e\_z)(y) \end{array} .$$

Logo $f(\_z) = f(e\_z)$. Assim, $\{f(\_z) : z \in G\} \subseteq \{f(x\_z) : x, z \in G\}$ e $\text{span}\{f(\_z) : z \in G\} \subseteq \text{span}\{f(x\_z) : x, z \in G\}$, sendo o último tem dimensão finita por hipótese. Portanto $\text{span}\{f(\_z) : z \in G\}$ também tem dimensão finita.

$(i) \Rightarrow (iii)$

Seja $y \in G$. Então para todo $z \in G$ tem-se:

$$f(z\_)(y) = f(zy) = f(z\_e).$$

Logo $\{f(z\_) : z \in G\} \subseteq \{f(z\_x) : z, x \in G\}$ e assim $\text{span}\{f(z\_) : z \in G\} \subseteq \text{span}\{f(z\_x) : z, x \in G\}$. Como $\text{span}\{f(z\_x) : z, x \in G\}$ tem dimensão finita, concluímos que $\text{span}\{f(z\_) : z \in G\}$ também tem dimensão finita.

$(ii) \Rightarrow (iv)$

Seja $V = \text{span}\{f(\_z) : z \in G\}$.
Defina $\pi : G \longrightarrow GL(V)$ dada por

$$\begin{aligned} \pi(x)(f(\_z)) &= \pi_x(f(\_z)) \\ &= f(\_xz). \end{aligned}$$

Vejamos que π é representação.
Claramente, π_x é transformação linear para todo $x \in G$, além disso,

$$\begin{aligned} \pi_x \circ \pi_{x^{-1}}(f(\_z)) &= \pi_x(f(\_x^{-1}z)) \\ &= f(\_xx^{-1}z) \\ &= f(\_z) \end{aligned}$$

e, analogamente

$$\pi_{x^{-1}} \circ \pi_x(f(\_z)) = f(\_z).$$

Logo $\pi_x \in GL(V)$, para todo $x \in G$.
Sejam $x, y, t \in G$. Então

$$\begin{aligned} \pi_{xy}(f(\_z))(t) &= f(\_xyz)(t) \\ &= \pi_x(f(\_yz))(t) \\ &= \pi_x(\pi_y(f(\_z)))(t) \end{aligned}$$

$$= \pi_x \circ \pi_y(f(\_z))(t)$$

Concluímos que $\pi_{xy} = \pi_x \circ \pi_y$, sendo assim homomorfismo de grupos. Portanto π é representação de grupos.

Defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & V & \longrightarrow & k \\ & f(\_z) & \longmapsto & f(\_z)(e). \end{array}$$

A função φ é linear, pois dados $\alpha \in k, f(\_z), f(\_w) \in V$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha f(\_z) + f(\_w)) &= (\alpha f(\_z) + f(\_w))(e) \\ &= \alpha f(z) + f(w) \\ &= \alpha f(\_z)(e) + f(\_w)(e) \\ &= \alpha\varphi(f(\_z)) + \varphi(f(\_w)). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\varphi(\pi_x f(\_e)) = \varphi(f(\_x)) = f(x),$$

satisfazendo (iv).

Com argumento semelhante, obtemos a implicação $(iii) \Rightarrow (iv)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$

Sejam $\pi : G \longrightarrow GL(V), \varphi \in V^*$ e $v \in V$ tais que

$$f(x) = \varphi(\pi_x(v)) \text{ para todo } x \in G.$$

Defina o seguinte conjunto

$$\mathscr{C}(\pi) = \{g : G \longrightarrow k : g(x) = \psi(\pi_x(w)), \text{ para alguns } \psi \in V^* \text{ e } w \in V\}.$$

Note que $\mathscr{C}$ é um espaço vetorial com as operações pontuais.

Sejam $\{e_j\}_{j=1}^n$ base de V, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ base dual de V^* e $g \in \mathscr{C}(\pi)$.

Assim existem $\psi \in V^*$ e $w \in V$ tais que

$$g(x) = \psi(\pi_x(w)), \text{ para todo } x \in X.$$

Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in k$ e $\beta_1, \cdots, \beta_n \in k$ tais que

$$\psi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$$

e

$$w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j.$$

Então

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \xi_i(\pi_x(e_j)).$$

Denote $\xi_i(\pi_x(e_j))$ por $g_{ij}(x)$, neste caso

$$g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j g_{ij}(x).$$

Assim $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ é subconjunto de $\mathscr{C}(\pi)$ e é gerador de $\mathscr{C}(\pi)$, donde

$$\dim \mathscr{C}(\pi) \leq n^2 < \infty.$$

Sejam $x, z \in G$. Então dado $y \in G$,

$$\begin{aligned} f(z\_x)(y) &= f(zyx) \\ &= \varphi(\pi_{zyx}(v)) \\ &= \varphi(\pi_z(\pi_y(\pi_x(v)))) \\ &= \psi(\pi_y(w)), \end{aligned}$$

onde $\psi = \varphi \circ \pi_z$ e $w = \pi_x(v)$, ou seja

$$f(z\_x) \in \mathscr{C}(\pi) \text{ para todo } z, x \in G,$$

e portanto

$$\dim \operatorname{span}\{f(z\_x) : z, x \in G\} \leq n^2$$

sendo assim, de dimensão finita e satisfazendo (i). $\square$

Definição 2.34. Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. Dizemos que uma função $f : G \longrightarrow \Bbbk$ é representativa se f satisfaz algum dos itens do resultado anterior. Se G é topológico ainda exigimos que f seja contínua. Neste caso, assumimos $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$. O conjunto da funções representativas de G será denotado por $R(G)$.

Proposição 2.35. *Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo, então $R(G)$ é uma $\Bbbk$-álgebra unital com as operações pontuais.*

Demonstração. Sejam $f, g \in R(G)$. Então existem V e W $\Bbbk$-espaços vetoriais de dimensão finita, $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$ funcionais lineares, $v \in V, w \in W$ vetores, $\Phi : G \longrightarrow GL(V), \Psi : G \longrightarrow GL(W)$ representações de grupo, tais que

$$f(x) = \varphi(\Phi_x(v)) \text{ e } g(x) = \psi(\Psi_x(w)), \forall x \in G.$$

É natural definir $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, e de fato é o que vamos fazer, mas primeiro precisamos saber se esta nova função é representativa. Sabemos que $V \cong simeqV \oplus \{0\} = V'$ e $W \cong \{0\} \oplus W = W'$. Pelo que vimos no capítulo 1, existem representações $\Phi' : G \longrightarrow GL(V')$ e $\Psi' : G \longrightarrow GL(W')$ que são equivalentes a Φ e Ψ respectivamente. Além disso, os vetores $v \in V$ e $w \in W$ são identificados com $(v, 0) \in V'$ e $(0, w) \in W'$ e podemos definir funcionais $\varphi' : V' \longrightarrow k, \psi' : W' :\longrightarrow k$ dados por $\varphi(v, 0) = \varphi(v), \psi'(0, w) = \psi(w)$. Dessa forma, podemos reescrever as equações acima como

$$f(x) = \varphi'(\Phi'_x(v, 0)) \text{ e } g(x) = \psi'(\Psi'_x(0, w)).$$

Como V e W são de dimensão finita, temos que $V \oplus W$ também tem dimensão finta, a representação $\Phi' \oplus \Psi' : G \longrightarrow GL(V \oplus W)$ está bem definida (como soma direta interna vista no capítulo sobre representações) e ainda

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= \varphi'(\Phi'_x(v, 0)) + \psi'(\Psi'_x(0, w))\\ &= \varphi' \oplus \psi'(\Phi'_x \oplus \Psi'_x(v, w)),\end{aligned}$$

em que $\varphi' \oplus \psi'(v, w) = \varphi(w) + \psi(w)$ que também é funcional linear.

Com isso $f + g$ é uma função representativa.

Considere agora a representação $\Phi \otimes \Psi$ vista na Proposição 1.45 e seja $\varphi \otimes \psi \in (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$. Então,

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes \psi)((\Phi \otimes \Psi)_x(v \otimes w)) &= (\varphi \otimes \psi)(\Phi_x(v) \otimes \Psi_x(w))\\ &= (\varphi(\Phi_x(v))) \otimes (\psi(\Psi_x)(w))\\ &= (\varphi(\Phi_x(v)))(\psi(\Psi_x)(w)))\\ &= f(x)g(x),\end{aligned}$$

com isso vemos que $f \cdot g \in R(G)$.

Seja $\alpha \in \Bbbk$. Então

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha\varphi(\Phi_x(v)) \\
&= \varphi(\Phi_x(\alpha v)),
\end{aligned}
$$

o que faz com que αf também seja uma função representativa.

As demais propriedades relativas à associatividade das operações seguem das propriedades das operações no espaço vetorial das representações de G e no corpo $\mathbb{k}$.

Por último, considere a função $\mathbb{1} : G \longrightarrow \mathbb{k}$ a função constante igual a $1_{\mathbb{k}}$. Como a multiplicação na álgebra é pontual, $\mathbb{1}$ deve ser a unidade da álgebra. Vamos ver que $\mathbb{1}$ é representativa.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{k}$, a representação trivial $\Phi : G \longrightarrow GL(\mathbb{k})$, o vetor $v = 1_{\mathbb{k}}$ e o funcional $\mathrm{Id}_{\mathbb{k}} : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}$.

Seja $x \in G$. Então

$$\varphi(\Phi_x(1_{\mathbb{k}})) = 1_{\mathbb{k}} = \mathbb{1}(x).$$

Logo, $\mathbb{1}$ é representativa e, portanto, $R(G)$ é uma $\mathbb{k}$-álgebra unital.

$\square$

Para utilizar a definição 2.1 em $R(G)$ temos que identificar as transformações lineares $\mu : R(G) \otimes R(G) \longrightarrow R(G)$ e $\eta : \mathbb{k} \longrightarrow R(G)$, que fazem aqueles diagramas comutarem, e ainda que corresponda às operações acima. Naturalmente definimos:

$$
\begin{array}{rccc}
\mu : & R(G) \otimes R(G) & \longrightarrow & R(G) \\
& f \otimes g & \longmapsto & fg
\end{array}
\quad \text{e} \quad
\begin{array}{rccc}
\eta : & \mathbb{k} & \longrightarrow & R(G) \\
& \lambda & \longmapsto & \lambda\mathbb{1}
\end{array}.
$$

Assim,para quaisquer $f, g, h \in R(G)$ tem-se:

$$
\begin{aligned}
\mu \circ (\mathrm{Id}_{R(G)} \otimes \mu)(f \otimes g \otimes h) &= \mu(f \otimes (gh)) \\
&= f(gh) \\
&= (fg)h \\
&= \mu(fg \otimes h) \\
&= \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{R(G)})(f \otimes g \otimes h)
\end{aligned}
$$

e para quaisquer $\lambda \in \mathbb{k}$ e $f \in R(G)$ tem-se:

$$\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{R(G)})(\lambda \otimes f) = \lambda f$$

$$\mu \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{R(G)})(g \otimes \lambda) = \lambda f$$

onde λf é a imagem de $\lambda \otimes f$ e de $f \otimes \lambda$ pelos isomorfismos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \Bbbk \otimes R(G) & \longrightarrow & R(G) \\ & \lambda \otimes f & \longmapsto & \lambda f \end{array} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & R(G) \otimes \Bbbk & \longrightarrow & R(G) \\ & f \otimes \lambda & \longmapsto & \lambda f \end{array},$$

respectivamente.

Lema 2.36. *Seja f uma função representativa de um grupo G. Então, existem g_i e h_i representativas para todo $i \in \{1, \cdots n\}$ tais que*

$$f(xy) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y),$$

para todos $x, y \in G$.

Demonstração. Sendo f representativa, sabemos que existem (Φ, V) representação de G, φ funcional linear e $v \in V$ tais que $f(x) = \varphi(\Phi_x(v))$. Digamos que o grau desta representação é n.

Seja $\{w_i\}_{i=1}^n$ base de V e $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ base dual associada. Assim, para todo $w \in V$ temos que $w = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i(w) w_i$.

Dados $x, y \in G$, segue que

$$\begin{aligned} f(xy) &= \varphi(\Phi_{xy}(v)) \\ &= \varphi(\Phi_x \Phi_y(v))) \\ &= \varphi\left(\Phi_x\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\Phi_y(v)) w_i\right)\right) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1^n} \xi_i(\Phi_y(v)) \Phi_x(w_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\Phi_x(w_i)) \xi_i(\Phi_y(v)). \end{aligned}$$

Definindo $g_i(x) = \varphi(\Phi_x(w_i))$ e $h_i(y) = \xi_i(\Phi_y(v))$, temos que g_i e h_i são representativas e também que $f(xy) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) h_i(y)$.

$\square$

Teorema 2.37. *Seja G um grupo. Então a transformação linear $\pi : R(G) \otimes R(G) \longrightarrow R(G \times G)$ dada por $\pi(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ é um isomorfismo de álgebras.*

Demonstração. Primeiramente vejamos que π é homomorfismo de álgebras.

Sejam $\alpha \in k, f \otimes f', g \otimes g' \in R(G) \otimes R(G)$ e $(x, y) \in G \times G$. Então,

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha f \otimes f' + g \otimes g')(x, y) &= \alpha f(x) f'(y) + g(x) g'(y) \\
&= \alpha \pi(f \otimes f')(x, y) + \pi(g \otimes g')(x, y) \\
&= (\alpha \pi(f \otimes f') + \pi(g \otimes g'))(x, y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\pi((f \otimes f') \cdot (g \otimes g'))(x, y) &= \pi(f \cdot g \otimes f' \cdot g')(x, y) \\
&= (f \cdot g)(x)(f' \cdot g')(y) \\
&= f(x) g(x) f'(y) g'(y) \\
&= f(x) g(y) f'(x) g'(y) \\
&= (\pi(f \otimes g) \cdot \pi(f' \otimes g'))(x, y),
\end{aligned}$$

o que mostra que π é um homomorfismo entre álgebras.

Suponha que exista $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in R(G) \otimes R(G)$ tal que

$$\pi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right) = 0.$$

Podemos supor que $\{g_i\}_i^n$ é linearmente independente.

Defina, para cada $t \in G$, a seguinte transformação linear

$$\begin{array}{rccc}
\mathrm{ev}_t : & R(G \times G) & \longrightarrow & R(G) \\
 & f & \longmapsto & f(t, _)
\end{array},$$

em que $f(t, \_)(x) = f(t, x), \forall x \in G$. Então, dado $x \in G$, a igualdade

$$\mathrm{ev}_t\left(\pi\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i\right)\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i = 0, \forall t \in G.$$

Como $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ é linearmente independente, temos que $f_i(t) = 0$, para todo i e para todo $t \in G$. Logo $f_i = 0, \forall i$. Logo $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i = 0$ e segue que π é injetora.

Vejamos agora a sobrejetividade de π. Seja $f \in R(G \times G)$.

Então $f(x,y) = f((x,e)(e,y))$. Pelo Lema 2.36 existem $f_i, g_i \in R(G \times G)$, tais que

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x,e) g_i(e,y).$$

Como cada uma dessas funções pertence ao conjunto $R(G \times G)$ existem, para cada i, $(\Phi^i, V_i), (\Psi^i, W_i)$ representações, $v_i \in V_i$, $w_i \in W_i$ e funcionais lineares $\varphi_i \in V_i^*$, $\psi_i \in W_i^*$, tais que

$$f_i(x,y) = \varphi_i(\Phi^i_{(x,y)}(v_i)) \text{ e } g_i(x,y) = \psi_i(\Psi^i_{(x,y)}(w_i)),$$

para todo $(x,y) \in G \times G$.

Considere as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i^{(1)}: & G & \longrightarrow & GL(V_i) \\ & x & \longmapsto & \Phi^i(x,e) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \Psi_i^{(2)}: & G & \longrightarrow & GL(V_i) \\ & x & \longmapsto & \Psi^i(e,x) \end{array}.$$

Note que essas funções são homomorfismos de grupo. Além disso,

$$f_i(x,e) = \varphi_i(\Phi_i^{(1)}(x)(v_i)) \tag{2.1}$$

$$g_i(e,y) = \psi_i(\Psi_i^{(2)}(y)(w_i)). \tag{2.2}$$

Defina

$$\begin{array}{rccc} \hat{f}_i: & G & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ & x & \longmapsto & f_i(x,e) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \hat{g}_i: & G & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ & y & \longmapsto & g_i(e,y) \end{array}.$$

Por2.1 e 2.2 temos que $\hat{f}_i$ e $\hat{g}_i$ pertencem ao conjunto $R(G)$, para todo i.

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(x,e)g_i(e,y) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i(x)\hat{g}_i(y) \\
&= \pi\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i \otimes \hat{g}_i\right)(x,y)
\end{aligned}
$$

Dessa forma concluímos que π é um isomorfismo entre álgebras. $\square$

Observação 2.38. O resultado anterior se estende para uma quantidade finita de produtos tensoriais de $R(G)$.

Com este útimo resultado, podemos definir uma estrutura de coálgebra em $R(G)$. Defina

$$
\begin{array}{rccc}
\epsilon : & R(G) & \longrightarrow & k \\
 & f & \longmapsto & f(e)
\end{array}
$$

que é claramente linear, e considere a seguinte aplicação

$$C : R(G) \longrightarrow R(G \times G) \text{ dada por } C(f)(x,y) = f(xy).$$

Veja que

$$
\begin{aligned}
C(\alpha f + g)(x,y) &= (\alpha f + g)(xy) \\
&= \alpha f(xy) + g(xy) \\
&= (\alpha C(f) + C(g))(x,y).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, C é uma transformação linear, e então a aplicação $\Delta := \pi^{-1} \circ C : R(G) \longrightarrow R(G) \otimes R(G)$ também é linear.

Afirmação 2.39. *$(R(G), \Delta, \epsilon)$ é uma coálgebra.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in G$ e $f \in R(G)$. Então

$$
\begin{gathered}
(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f)(x,y,z) = f_{(1)(1)}(x)f_{(1)(2)}(y)f_{(2)}(z) = f(xyz) \text{ e} \\
(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(f)(x,y,z) = f_{(1)}(x)f_{(2)(1)}(y)f_{(2)(2)}(z) = f(xyz),
\end{gathered}
$$

logo, $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ e o diagrama da coassociatividade comuta.

Seja $f \in R(G)$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \Delta(f) &= f_{(1)} \otimes f_{(2)}(e) \\
&= f_{(1)} f_{(2)}(e) \\
&= f \otimes 1,
\end{aligned}$$

pois

$$f_{(1)}(x) f_{(2)}(e) = f(xe) = f(x), \forall x \in G$$

donde $f_{(1)} f_{(2)}(e) = f$.

Analogamente, $(\epsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f) = 1 \otimes f$, para toda $f \in R(G)$. Portanto o diagrama da counidade também comuta, concluindo assim que $(R(G), \Delta, \epsilon)$ é uma coálgebra. □

Afirmação 2.40. *$(R(G), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ é uma biálgebra.*

Demonstração. Para mostrar que $(R(G), \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ é biálgebra, vamos mostrar que Δ e ϵ são homomorfismos de álgebra.

Dadas $f, g \in R(G)$, temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon(fg) &= fg(e) \\
&= f(e) g(e) \\
&= \epsilon(f) \epsilon(g),
\end{aligned}$$

logo ϵ é homomorfismo de álgebras.

Veja que,

$$\begin{aligned}
C(fg)(x, y) &= fg(xy) \\
&= f(xy) g(xy) \\
&= C(f)(x, y) C(g)(x, y) \\
&= C(f) C(g)(x, y),
\end{aligned}$$

para todos $(x, y) \in G \times G$. Como já tínhamos visto que C é linear, isso mostra que é homomorfismo de álgebras.

Sendo $\Delta = \pi^{-1} \circ C$ e π homomorfismo de álgebras, concluímos que Δ é também homomorfismo de álgebras.

□

Definimos agora a seguinte aplicação:

$$S: \begin{array}{ccc} R(G) & \longrightarrow & R(G) \\ f & \longmapsto & S(f) \end{array}, \text{ onde } S(f)(x) = f(x^{-1}).$$

Então, dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in R(G)$ e $x \in G$ tem-se

$$\begin{aligned} S(\alpha f + g)(x) &= (\alpha f + g)(x^{-1}) \\ &= \alpha f(x^{-1}) + g(x^{-1}) \\ &= \alpha S(f)(x) + S(g)(x) \\ &= (\alpha S(f) + S(g))(x), \end{aligned}$$

o que mostra que S é linear.

Proposição 2.41. *$(R(G), \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. Vamos verificar que $S * \mathrm{Id}_{R(H)} = \mathrm{Id}_{R(G)} * S = \eta \circ \epsilon$

Sejam $f \in R(G)$ e $x \in G$. Então:

$$\begin{aligned} ((S * \mathrm{Id}_{R(G)}(f)))(x) &= (S(f_{(1)})f_{(2)})(x) \\ &= f_{(1)}(x^{-1})f_{(2)}(x) \\ &= f(x^{-1}x) \\ &= f(e)\mathbb{1}(x) \\ &= \eta(\epsilon(f))(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\mathrm{Id}_{R(G)} * S)(f))(x) &= f_{(1)}(x)f_{(2)}(x^{-1}) \\ &= f(xx^{-1}) \\ &= f(e)\mathbb{1}(x) \\ &= \eta(\epsilon(f))(x). \end{aligned}$$

Logo $S * \mathrm{Id}_{R(G)} = \eta \circ \epsilon = \mathrm{Id}_{R(G)} * S$, e com isso, S é a antípoda de $R(G)$.

Segue das afirmações anteriores que $(R(G), \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf. □

Um resultado interessante sobre as funções representativas envolve a coálgebra $(\mathbb{k}G)^{\circ}$.

Seja G um grupo. Considere o espaço vetorial de todas as funções de G para $\mathbb{k}$, que denotaremos por $\mathcal{F}(G, \mathbb{k})$. Este espaço ainda tem estrutura de álgebra comutativa com unidade, com as operações pontuais. Defina:

$$
\begin{array}{rccl}
\phi: & \mathcal{F}(G,\Bbbk) & \longrightarrow & (\Bbbk G)^* \\
 & f & \longmapsto & \phi(f)
\end{array}
$$

onde

$$
\phi(f)\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right)=\sum_{g\in G}\alpha_g f(g).
$$

Afirmação 2.42. *A aplicação ϕ acima é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Demonstração. ϕ é linear:

Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G,\Bbbk)$ e $\lambda \in \Bbbk$. Então

$$
\begin{aligned}
\phi(\lambda f_1+f_2)\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right) &= \sum_{g\in G}\alpha_g(\lambda f_1+f_2)(g)\\
&= \sum_{g\in G}\lambda\alpha_g f_1(g)+\alpha_g f_2(g)\\
&= \lambda\sum_{g\in G}\alpha_g f_1(g)+\sum_{g\in G}\alpha_g f_2(g)\\
&= \lambda\phi(f_1)\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right)+\phi(f_2)\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right)\\
&= (\lambda\phi(f_1)+\phi(f_2))\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right)
\end{aligned}
$$

ϕ é injetora:

Seja $f \in \mathcal{F}(G,\Bbbk)$ tal que $\phi(f) \equiv 0$. Então $\phi(f)(\delta_g) = 0$, para todo $g \in G$, ou seja, $f(g) = 0$ para todo $g \in G$. Logo f é a função nula.

ϕ é sobrejetora:

Seja $\varphi \in (\Bbbk G)^*$. Considere a função $\widehat{\varphi} : G \longrightarrow \Bbbk$ dada por $\widehat{\varphi}(g) = \varphi(\delta_g)$. Assim,

$$
\phi(\widehat{\varphi})\left(\sum_{g\in G}\alpha_g\delta_g\right)=\sum_{g\in G}\alpha_g\widehat{\varphi}(g)
$$

$$= \sum_{g \in G} \alpha_g \varphi(\delta_g)$$

$$= \varphi\left(\sum_{g \in G} \alpha_g \delta_g\right)$$

. Logo $\phi(\widehat{\varphi}) = \varphi$.

Concluímos que ϕ é um isomorfismo de espaços vetoriais. $\square$

Consideremos o subespaço vetorial $\phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ}) \subseteq \mathcal{F}(G, \Bbbk)$. Seja $f \in \phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ})$. Então $\phi(f) \in (\Bbbk G)^{\circ}$ e, pelo Teorema 2.24 sabemos que existem $f_i', f_i'' \in (\Bbbk G)^*$, com $i \in \{1, \cdots, n\}$ tais que

$$\phi(f)(\delta_{gh}) = \sum_{i=1}^{n} f' i(\delta_g) f_i''(\delta_h).$$

Aplicando ϕ^{-1} em $\phi(f)$ e em cada f_i', f_i'' obtemos

$$f(gh) = \sum_{i=1}^{n} \phi^{-1}(f_i')(g) \phi^{-1}(f_i'')(h).$$

Assim,

$$\phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ}) = \{f \in \mathcal{F}(G, \Bbbk) : \exists f_i', f_i'' \in \mathcal{F}(G, \Bbbk), f(gh) = \sum_i f_i'(g) f_i''(h)\}.$$

Afirmamos que $f \in \phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ})$ é representativa. Para mostrar isto, vamos usar o item (ii) da Proposição 2.33.

Considere o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{f(\_h) : h \in G\}$. Sejam $g, h \in G$. Então

$$f(\_h)(g) = f(gh) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(g) f_i''(h) = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i''(h) f_i'\right)(g)$$

onde, para cada f_i' temos que $f_i' = f_i'(\_e)$. Logo a dimensão deste subespaço tem que ser menor ou igual a n, concluindo que f é representativa.

Isso mostra também que $\phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ}) \subseteq R(G)$.

Seja $f \in R(G)$, pelo Lema 2.36 temos que $f \in \phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ})$.

Portanto,

$$R(G) = \phi^{-1}((\Bbbk G)^{\circ})$$

Da discussão acima nós provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.43. *Seja G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. Então*

$$R(G) \cong (\Bbbk G)^{\circ}.$$

Sejam G um grupo e $\Bbbk$ um corpo. Então, G age em $R(G)$ de duas maneiras:

1. Ação r definida por $r_g(f)(x) = f(xg)$, para todo $x, g \in G$, chamada de ação por translação à direita.

2. Ação definida por $l_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$, para todo $x, g \in G$, chamada de ação por translação à esquerda.

É fácil ver que

$$r_g(f_1 f_2) = r_g(f_1) r_g(f_2)$$

para quaisquer $f_1, f_2 \in R(G)$.

$$r_g(f_1 f_2) = r_g(f_1) r_g(f_2)$$

para quaisquer $f_1, f_2 \in R(G)$.

Definição 2.44. Dizemos que uma subálgebra $B \subseteq R(G)$ é um G-submódulo de com respeito à translação à direita se $r_g(B) \subseteq B$, para todo $g \in G$.

As dois resultados a seguir serão muito importantes para os teoremas principais do trabalho. Eles dizem respeito à propriedades topológicas da álgebra de funções representativas de um grupo quando este é um grupo compacto.

Proposição 2.45. *Seja G um grupo compacto e B um G-submódulo de $R(G)$ com respeito à ação por translação à direita. Então B é fechado pela topologia da norma do supremo.*

A demonstração deste resultado pode ser consultado em [18], página 126, Proposição 1.4.

Teorema 2.46 (Peter-Weyl)**.** *Sejam G um grupo topológico compacto, $R(G)$ a álgebra das funções representativas de G com valores reais, $C(G)$ a álgebra das funções contínuas de G em $\mathbb{R}$. Então $R(G)$ é denso em $C(G)$.*

A demonstração desse teorema pode ser vista na página 134 de [18].

2.4 Módulos e Comódulos

Quando estudamos teoria de módulos, geralmente vemos módulos sobre um anel. Nesta sessão vamos restringir ao caso em que este anel é uma álgebra com unidade e ver a ação desta álgebra como a comutatividade de certos diagramas, assim conseguiremos (invertendo as flechas), definir a estrutura de um comódulo.

Definição 2.47. Seja (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra. Um A-módulo à esquerda é uma par (X, γ), onde X é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\gamma : A \otimes X \longrightarrow X$ é uma transformação linear que satisfaz a comutatividade dos diagramas abaixo.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes X \arrow[r, "\mathrm{Id}_A \otimes \gamma"] \arrow[d, "\mu \otimes \mathrm{Id}_X"'] & A \otimes X \arrow[d, "\gamma"] \\
A \otimes X \arrow[r, "\gamma"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes X \arrow[dd, "\gamma"] \\
\Bbbk \otimes X \arrow[ur, "\eta \otimes \mathrm{Id}_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Aqui φ é o isomorfismo canônico.

Analogamente definimos um A-módulo à direita.

Exemplo 2.48. Seja (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra. Então (A, μ) é um A-módulo à esquerda e à direita sobre si mesma.

Exemplo 2.49. Seja (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra, então A^n é um A-módulo à esquerda e direita.

Demonstração. Defina $\gamma : A \otimes A^n \longrightarrow A^n$ por $\gamma(a \otimes (a_1, \cdots, a_n)) = (aa_1, \cdots, aa_n)$. Então γ é linear e dados $(a_1, \cdots, a_n) \in A^n, a, b \in A$ temos

$$\begin{aligned}
\gamma \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \gamma)(a \otimes b \otimes (a_1, \cdots, a_n)) &= \gamma(a \otimes (ba_1, \cdots, ba_n)) \\
&= (a(ba_1), \cdots, a(ba_n)) \\
&= ((ab)a_1, \cdots, (ab)a_n) \\
&= (\mu(a \otimes b)a_1, \cdots, \mu(a \otimes b)(a_n)) \\
&= \gamma(\mu(a \otimes b) \otimes (a_1, \cdots, a_n)) \\
&= \gamma \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{A^n})((a \otimes b) \otimes (a_1, \cdots, a_n))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{A^n})(\lambda \otimes (a_1, \cdots, a_n)) &= (\eta(\lambda)a_1, \cdots, \eta(\lambda)a_n) \\
&= (\mu(\eta(\lambda) \otimes a_1), \cdots, \mu(\eta(\lambda) \otimes a_n) \\
&= (\varphi(\lambda \otimes a_1), \cdots, \varphi(\lambda \otimes a_n)) \\
&= \varphi_{A^n}(\lambda \otimes (a_1, \cdots, a_n))
\end{aligned}
$$

Logo A^n é um A-módulo à esquerda. Analogamente A^n é um A-módulo à direita. □

Exemplo 2.50. Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf. Então podemos definir uma estrutura de H-módulo à esquerda para H da seguinte maneira:

$$
\gamma(h \otimes b) = h_{(1)} b S(h_{(2)})
$$

para todos $h, b \in H$.

Sejam $a, b, c, h \in H$ e $\lambda \in \Bbbk$. Então,

$$
\begin{aligned}
\gamma \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_H)(a \otimes b \otimes c) &= \gamma(ab \otimes c) \\
&= (ab)_{(1)} c S((ab)_{(2)}) \\
&= a_{(1)} b_{(1)} c S(a_{(2)} b_{(2)}) \\
&= a_{(1)} b_{(1)} c S(b_{(2)}) S(a_{(2)}) \\
&= \gamma(a \otimes (\gamma(b \otimes c))) \\
&= \gamma \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \gamma)(a \otimes b \otimes c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_H)(\lambda \otimes h) &= \gamma(\eta(\lambda) \otimes h) \\
&= \eta(\lambda)_{(1)} h S(\eta(\lambda)_{(2)}) \\
&= \eta(\lambda_{(1)}) h S(\eta(\lambda_{(2)})) \\
&= \eta(\lambda) h S(1_H) \\
&= \mu(\eta(\lambda) \otimes h) \\
&= \varphi(\lambda \otimes h)
\end{aligned}
$$

Isso mostra que H é um H-módulo à esquerda com a ação γ. Esta ação é chamada de ação adjunta.

Exemplo 2.51. Seja (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra. Então A^* é um A-módulo à esquerda com a ação dada por

$$\gamma(a \otimes f)(b) = f(ba).$$

Sejam $a, b, c \in A$ e $\lambda \in \Bbbk$. Então

$$\begin{aligned}
\gamma \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \gamma)(a \otimes b \otimes f)(c) &= \gamma(a \otimes \gamma(b \otimes f))(c) \\
&= \gamma(b \otimes f)(ca) \\
&= f(cab) \\
&= \gamma(ab \otimes f)(c) \\
&= \gamma \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{A^*})(a \otimes b \otimes f)(c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_A)(\lambda \otimes f)(a) &= \gamma(\eta(\lambda) \otimes f)(a) \\
&= f(\eta(\lambda)a) \\
&= f(a\lambda) \\
&= \lambda f(a) \\
&= \varphi_{A^*}(\lambda \otimes f)(a)
\end{aligned}$$

Logo A^* é um A-módulo à esquerda.

Exemplo 2.52. Sejam $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma $\Bbbk$-álgebra de Hopf, (M, γ_M), (N, γ_N) H-módulos à esquerda. Então o espaço vetorial de todas as transformações lineares entre M e N, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$ é um H-módulo à esquerda com a ação dada por

$$\gamma_{\mathrm{hom}}(h \otimes T)(m) = \gamma_N(h_{(1)} \otimes (\gamma_M(S(h_{(2)}) \otimes m)).$$

Sejam $h, k \in H$, $T \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$, $n \in N$, $\lambda \in \Bbbk$. Então

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\mathrm{hom}} \circ (\mathrm{Id}_{\mathrm{hom}} \otimes \gamma_{\mathrm{hom}})(h \otimes k \otimes T)(m) = \\
= \quad & \gamma_{\mathrm{hom}}(h \otimes \gamma_{\mathrm{hom}}(k \otimes T))(m) \\
= \quad & \gamma_N(h_{(1)} \otimes \gamma_{\mathrm{hom}}(k \otimes T)(\gamma_M(S(h_{(2)}) \otimes m)) \\
= \quad & \gamma_N(h_{(1)} \otimes \gamma_N(k_{(1)} \otimes T(\gamma_M(S(k_{(2)}) \otimes \gamma_M(S(h_{(2)}) \otimes m)))) \\
= \quad & \gamma_N(h_{(1)} \otimes \gamma_N(k_{(1)} \otimes T(\gamma_M \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \gamma_M)(S(k_{(2)}) \otimes S(h_{(2)}) \otimes m)))) \\
= \quad & \gamma_N(h_{(1)} \otimes \gamma_N(k_{(1)} \otimes T(\gamma_M \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_M)(S(k_{(2)}) \otimes S(h_{(2)}) \otimes m)))) \\
= \quad & \gamma_N(h_{(1)} \otimes \gamma_N(k_{(1)} \otimes T(\gamma_M(S((hk)_{(2)}) \otimes m))) \\
= \quad & \gamma_N \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_N)(h_{(1)} \otimes k_{(1)} \otimes T(\gamma_M(S((hk)_{(2)}) \otimes m)) \\
= \quad & \gamma_N((hk)_{(1)} \otimes T(\gamma_M(S((hk)_{(2)}) \otimes m)) \\
= \quad & \gamma_{\mathrm{hom}}(hk \otimes T)(m) \\
= \quad & \gamma_{\mathrm{hom}} \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{hom}})(h \otimes k \otimes T)(m).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_{\mathrm{hom}} \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{hom}})(\lambda \otimes T)(m) = \\
= \;& \gamma_N(\eta(\lambda)_{(1)} \otimes T(\gamma_M(S(\eta(\lambda)_{(2)}) \otimes m)) \\
= \;& \gamma_N(\eta(\lambda_{(1)}) \otimes T(\gamma_M(S(\eta(\lambda_{(2)})) \otimes m)) \\
= \;& \gamma_N(\eta(\lambda) \otimes T(\gamma_M(S(\eta(1)) \otimes m)) \\
= \;& \gamma_N(\eta(\lambda) \otimes T(\gamma_M(S(1_H) \otimes m)) \\
= \;& \gamma_N(\eta(\lambda) \otimes T(\gamma_M(1_H \otimes m)) \\
= \;& \gamma_N \circ (\eta \otimes \mathrm{Id}_N)(\lambda \otimes T(\gamma_M(1_H \otimes m))) \\
= \;& \lambda T(\gamma_M(1_H \otimes m)) \\
= \;& \lambda T(\gamma_M(\eta(1) \otimes m)) \\
= \;& \lambda T(1_H m) \\
= \;& \lambda T(m) \\
= \;& \varphi_{\mathrm{hom}}(\lambda \otimes T)(m)
\end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, N)$ é um H-módulo à esquerda.

Com esta definição de A-módulo, podemos pensar na dualização. Vamos agora definir um comódulo sobre uma coálgebra.

Definição 2.53. Sejam (C, Δ, ϵ) uma coálgebra. Um C-comódulo à esquerda é um par (M, ρ), onde M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $\rho : M \longrightarrow C \otimes M$ é uma transformação linear que satisfaz a comutatividade dos diagramas abaixo.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[d, "\mathrm{Id}_C \otimes \rho"] \\
C \otimes M \arrow[r, "\Delta \otimes \rho"'] & C \otimes C \otimes M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\rho"'] & \\
& M \otimes \Bbbk \\
M \otimes C \arrow[ur, "\mathrm{Id}_M \otimes \epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

Aqui ψ é o isomorfismo canônico.

Exemplo 2.54. Seja (C, Δ, ϵ) uma $\Bbbk$-coálgebra. Então (C, Δ) é um C-comódulo à esquerda. Segue diretamente da comutatividade dos diagramas de coassociatividade e counidade.

Analogamente, C é uma coálgebra à direita.

Exemplo 2.55. Considere C a coálgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo $\Bbbk$. Então $\Bbbk^n$ é um C-comódulo à direita com $\rho : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \otimes C$ dada por

$$\rho(e_i) = \sum_j e_j \otimes E_{ji}$$

onde $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ é a base canônica de $\Bbbk^n$ e $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ é a base canônica do espaço vetorial de matrizes.

A estrutura da coálgebra de matrizes que estamos considerando é dada por

$$\Delta(E_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}$$

e

$$\epsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$$

.

Seja $e_i \in \Bbbk^n$. Então

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} \otimes \Delta) \circ \rho(e_i) &= \mathrm{Id}_{\Bbbk^n} \otimes \Delta \left(\sum_{j=1}^{n} e_i \otimes E_{ji} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \left(\sum_{p=1}^{n} E_{jp} \otimes E_{pi} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} e_j \otimes E_{jp} \otimes E_{pi}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\rho \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \rho(e_i) &= \rho \otimes \mathrm{Id}_C \left(\sum_{p=1}^{n} e_p \otimes E_{pi} \right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes E_{jp} \right) \otimes E_{pi} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} e_j \otimes E_{jp} \otimes E_{pi},
\end{aligned}$$

logo $(\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{Id}_C) \circ \mathrm{Id}_C$. Mais ainda, temos que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} \otimes \epsilon) \circ \rho(e_i) &= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \epsilon(E_{ji}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes \delta_{ji}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_i \otimes 1 \\
&= \psi(e_i),
\end{aligned}
$$

e assim, $(\mathrm{Id}_{\Bbbk^n} \otimes \epsilon) \circ \rho = \psi$.

Como os dois diagramas de comódulos comutam, $(\Bbbk^n, \rho)$ é um comódulo à direita sobre a coálgebra de matrizes.

Exemplo 2.56. Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo $\Bbbk$. Considere a seguinte aplicação

$$
\begin{array}{rccc}
\mathrm{coad}: & H & \longrightarrow & H \otimes H \\
& h & \longmapsto & h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}.
\end{array}
$$

Afirmamos que (H, coad) é um H-comódulo à direta.

De fato, seja $h \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{coad} \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \mathrm{coad}(h) &= (\mathrm{coad} \otimes \mathrm{Id}_H)(h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}) \\
&= \mathrm{coad}(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)})h_{(3)} \\
&= h_{(3)} \otimes S(h_{(2)})h_{(4)} \otimes S(h_{(1)})h_{(5)}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_H \otimes \Delta) \circ \mathrm{coad}(h) &= (\mathrm{Id}_H \otimes \Delta)(h_{(2)} \otimes S(h_{(1)})h_{(3)}) \\
&= h_{(2)} \otimes \Delta(S(h_{(1)})h_{(3)}) \\
&= h_{(3)} \otimes S(h_{(2)})h_{(4)} \otimes S(h_{(1)})h_{(5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon) \circ \mathrm{coad}(h) &= h_{(2)} \otimes (\epsilon(S(h_{(1)})h_{(3)})) \\
&= h_{(2)} \otimes \epsilon(S(h_{(1)}))\epsilon(h_3) \\
&= h_{(2)} \otimes \epsilon(h_{(1)})\epsilon(h_{(3)}) \\
&= \epsilon(h_{(1)})\epsilon(h_{(3)})h_{(2)} \otimes 1 \\
&= h \otimes 1.
\end{aligned}
$$

Com isso, mostramos que (H, coad) é um H-comódulo à direita sobre H.

Definição 2.57. Sejam (A, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra, $(M, \gamma_M), (N, \gamma_N)$ A-módulos à esquerda. Um morfismo de A-módulos entre M e N é uma transformação $f : M \longrightarrow N$ que satisfaz a comutatividade do diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id}_A \otimes f"] \arrow[d, "\gamma_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\gamma_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}.
$$

Definição 2.58. Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra, $(M, \rho_M), (N, \rho_N)$ C-comódulos à esquerda. Um morfismo entre M e N é uma transformação linear $f : M \longrightarrow N$ que satisfaz a comutatividade do diagrama abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
C \otimes M \arrow[r, "\mathrm{Id}_C \otimes f"'] & C \otimes N
\end{tikzcd}.
$$

Considere A uma álgebra, (M, γ_M) A-módulo à esquerda e $m \in M$. Então podemos definir a função

$$
\begin{array}{rccl}
\rho_m : & A & \longrightarrow & M \\
& a & \longmapsto & \gamma_M(a \otimes m).
\end{array} \tag{2.3}
$$

ρ é um morfismo de A módulos, pois dados $a, b \in A$, então:

$$
\begin{aligned}
\rho_m \circ \mu(a \otimes b) &= \rho_m(ab) \\
&= \gamma_M(ab \otimes m) \\
&= \gamma_M \circ (\mu \otimes \mathrm{Id}_M)(a \otimes b \otimes m) \\
&= \gamma_M \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \gamma_M)(a \otimes b \otimes m) \\
&= \gamma_M(a \otimes \gamma_M(b \otimes m)) \\
&= \gamma_M(a \otimes \rho_m(b)) \\
&= \gamma_M \circ (\mathrm{Id}_A \otimes \rho_m)(a \otimes b).
\end{aligned}
$$

O próximo teorema mostrará uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra seja uma biálgebra. Este será o teorema fundamental das biálgebras. Para prová-lo precisamos de alguns resultados que faremos a seguir.

Sejam (N, γ_N) um A-módulo à esquerda e $n \in N$. Então, através do produto tensorial de espaços vetoriais podemos definir a aplicação ρ como acima, para o módulo N e ainda temos o seguinte homomorfismo de A-módulos

$$\begin{array}{rccl} \rho_m \otimes \rho_n : & A \otimes A & \longrightarrow & M \otimes N \\ & a \otimes b & \longmapsto & \rho_m(a) \otimes \rho_n(b). \end{array}$$

Suponha agora que $A \otimes A$ também é um A-módulo com uma ação γ. Então podemos definir

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & A & \longrightarrow & A \otimes A \\ & a & \longmapsto & \gamma(a \otimes 1_A \otimes 1_A). \end{array}$$

Então Δ é linear, uma vez que γ também é. Como $\Delta(a) \in A \otimes A$, podemos dizer que $\gamma(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Lema 2.59. *Sejam $(M, \gamma_M), (N, \gamma_N)$ A-módulos. Então*

$$\gamma_{M \otimes N}(a \otimes m \otimes n) = \gamma_M(a_{(1)} \otimes m) \otimes \gamma_N(a_{(2)} \otimes n)$$

para todos $a \in A$, $m \in M$, $n \in N$, onde $\gamma_{M \otimes N}$ é a ação de A em $M \otimes N$, e $a_{(1)} \otimes a_{(2)} = \Delta(a)$, com Δ definido acima.

Demonstração. Sejam $m \in M, n \in N$. Considere os morfismos ρ_m, ρ_n como em 2.3. Então

$$\begin{aligned} \gamma_M(a_{(1)} \otimes m) \otimes \gamma_N(a_{(2)} \otimes n) &= \rho_m(a_{(1)}) \otimes \rho_n(a_{(2)}) \\ &= \rho_m \otimes \rho_n(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\ &= \rho_m \otimes \rho_n(\Delta(a)) \\ &= \rho_m \otimes \rho_n(\gamma(a \otimes 1_A \otimes 1_A)) \\ &= \gamma_{M \otimes N}(a \otimes (\rho_m \otimes \rho_n)(1_A \otimes 1_A)) \\ &= \gamma_{M \otimes N}(a \otimes \rho_m(1_A) \otimes \rho_n(1_A) \\ &= \gamma_{M \otimes N}(a \otimes m \otimes n). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.60 (Teorema Fundamental para Biálgebras)**.** *Seja (H, μ, η) uma $\Bbbk$-álgebra. Então H é uma $\Bbbk$-biálgebra se, e somente se, $\Bbbk$ é um H-módulo à esquerda e, para todos (M, γ_M), (N, γ_N) módulos sobre H à esquerda, $M \otimes N$ também é um H-módulo à esquerda.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Seja H uma biálgebra. Defina

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{M \otimes N} : & H \otimes M \otimes N & \longrightarrow & M \otimes N \\ & h \otimes m \otimes n & \longmapsto & \gamma_M(h_{(1)} \otimes m) \otimes \gamma_N(h_{(2)} \otimes n) \end{array}$$

Sejam $h, k \in H, m \otimes n \in M \otimes N, \lambda \in \Bbbk$. Então,

$$
\begin{array}{rl}
& \gamma_{M\otimes N}\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\gamma_{M\otimes N})(h\otimes k\otimes m\otimes n)= \\
= & \gamma_{M\otimes N}(h\otimes\gamma_M(k_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N(k_{(2)}\otimes n)) \\
= & \gamma_M(h_{(1)}\otimes\gamma_M(k_{(1)}\otimes m))\otimes\gamma_N(h_{(2)}\otimes\gamma_N(k_{(2)}\otimes n)) \\
= & \gamma_M\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\gamma_M)(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\gamma_N)(h_{(2)}\otimes k_{(2)}\otimes n) \\
= & \gamma_M\circ(\mu\circ\mathrm{Id}_M)(h_{(1)}\otimes k_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N\circ(\mu\circ\mathrm{Id}_N)(h_{(2)}\otimes k_{(2)}\otimes n) \\
= & \gamma_M(h_{(1)}k_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N(h_{(2)}k_{(2)}\otimes n) \\
= & \gamma_M((hk)_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N((hk)_{(2)}\otimes n) \\
= & \gamma_{M\otimes N}(hk\otimes m\otimes n) \\
= & \gamma_{M\otimes N}\circ(\mu\otimes\mathrm{Id}_{M\otimes N})(h\otimes k\otimes m\otimes n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& \gamma_{M\otimes N}\circ(\eta\otimes\mathrm{Id}_{M\otimes N})(\lambda\otimes m\otimes n)= \\
= & \gamma_{M\otimes N}(\eta(\lambda)\otimes m\otimes n) \\
= & \gamma_M(\eta(\lambda)_{(1)}\otimes m)\otimes\gamma_N(\eta(\lambda)_{(2)}\otimes n) \\
= & \gamma_M(\eta(\lambda)\otimes m)\otimes\gamma_N(\eta(1)\otimes n) \\
= & \varphi_M(\lambda\otimes m)\otimes\varphi_N(1\otimes n) \\
= & \lambda m\otimes n \\
= & \varphi_{M\otimes N}(\lambda\otimes m\otimes n)
\end{array}
$$

Portanto $(M\otimes N,\gamma_{M\otimes N})$ é um H-módulo à esquerda.
Para a estrutura de H-módulo defina:

$$
\begin{array}{rccc}
\gamma_{\Bbbk}: & H\otimes\Bbbk & \longrightarrow & \Bbbk \\
& h\otimes\lambda & \longmapsto & \epsilon(\lambda h)
\end{array}
$$

Sejam $h,k\in H,\lambda,\lambda'\in\Bbbk$. Então

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\Bbbk}\circ(\mathrm{Id}_H\otimes\gamma_{\Bbbk})(h\otimes k\otimes\lambda) &= \gamma_{\Bbbk}(h\otimes\epsilon(\lambda k)) \\
&= \epsilon(\epsilon(\lambda k)h) \\
&= \lambda\epsilon(h)\epsilon(k) \\
&= \epsilon(\lambda hk) \\
&= \gamma_{\Bbbk}(hk\otimes\lambda) \\
&= \gamma_{\Bbbk}\circ(\mu\otimes\mathrm{Id}_{\Bbbk})(h\otimes k\otimes\lambda)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\Bbbk}\circ(\eta\otimes\mathrm{Id}_{\Bbbk})(\lambda\otimes\lambda') &= \gamma_{\Bbbk}(\eta(\lambda)\otimes\lambda') \\
&= \epsilon(\lambda'\eta(\lambda)) \\
&= \epsilon(\eta(\lambda'\lambda)) \\
&= \lambda'\lambda
\end{aligned}
$$

$$= \varphi_{\Bbbk}(\lambda \otimes \lambda')$$

Com isso fica provado que $(\Bbbk, \gamma_{\Bbbk})$ é um H-módulo à direita.

$\Leftarrow$ Suponha que (H, μ, η) é uma álgebra. Então (H, μ) é um H-módulo à esquerda. Por hipótese temos que $(H \otimes H, \rho)$ e $(\Bbbk, \nu)$ são H-módulos à esquerda. Veja que isso implica também que $H \otimes H \otimes H$ é um H-módulo, vamos denotá-lo por $(H \otimes H \otimes H, \gamma)$.

Defina

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & H & \longrightarrow & H \otimes H \\ & h & \longmapsto & \rho(h \otimes 1_H \otimes 1_H), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \epsilon : & H & \longrightarrow & \Bbbk \\ & h & \longmapsto & \nu(h \otimes 1). \end{array}$$

(H, Δ, ϵ) é coálgebra:

Seja $h \in H$ então

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta(h) &= (\Delta \otimes \mathrm{Id}_H)(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\ &= \rho(h_{(1)} \otimes 1_H \otimes 1_H) \otimes h_{(2)} \\ &= \rho(h_{(1)} \otimes 1_H \otimes 1_H) \otimes \mu(h_{(2)} \otimes 1_H) \\ &= \gamma(h \otimes 1_H \otimes 1_H \otimes 1_H) \qquad (2.4) \\ &= \mu(h_{(1)} \otimes 1_H) \otimes \rho(h_{(2)} \otimes 1_H \otimes 1_H) \qquad (2.5) \\ &= h_{(1)} \otimes \Delta(h_{(2)}) \\ &= (\mathrm{Id}_H \otimes \Delta)(\Delta(h)) \end{aligned}$$

Em 2.4 usamos o Lema 2.59 para os H-módulos $(H \otimes H, \rho)$ e (H, μ). Em 2.5 usamos o mesmo lema para (H, μ) e $(H \otimes H, \rho)$.

Vamos denotar o módulo $\Bbbk \otimes H$ por $(\Bbbk \otimes H, \vartheta)$.

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta(h) &= \epsilon(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\ &= \nu(h_{(1)} \otimes 1) \otimes \mu(h_{(2)} \otimes 1_H) \\ &= \vartheta(h \otimes 1 \otimes 1_H) \\ &= 1 \otimes \mu(h \otimes 1_H) \\ &= 1 \otimes h, \end{aligned}$$

e analogamente $\mathrm{Id}_H(\otimes \epsilon) \circ \epsilon(h) = h \otimes 1$.

Isso mostra que (H, Δ, ϵ) é coálgebra.

Sejam $h, k \in H$, então:

$$
\begin{aligned}
\Delta(h)\Delta(k) &= h_{(1)}k_{(1)} \otimes h_{(2)}k_{(2)} \\
&= \mu(h_{(1)} \otimes k_{(1)}) \otimes \mu(h_{(2)} \otimes k_{(2)}) \\
&= \rho(h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\
&= \rho(h \otimes \rho(k \otimes 1_H \otimes 1_H)) \\
&= \rho(hk \otimes 1_H \otimes 1_H) \\
&= \Delta(hk),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\epsilon(hk) &= \nu(hk \otimes 1) \\
&= \nu(h \otimes \nu(k \otimes 1))) \\
&= \nu(h \otimes \epsilon(k)) \\
&= \epsilon(k)\nu(h \otimes 1) \\
&= \epsilon(k)\epsilon(h) \\
&= \epsilon(h)\epsilon(k).
\end{aligned}
$$

Logo, Δ e ϵ são homomorfismos de álgebra e, portanto $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ é uma biálgebra.

$\square$

Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e (M, ρ) um C-comódulo à esquerda. Para todo $m \in M$ denotamos

$$\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$$

Os elementos da primeira entrada do tensor estão em M e os da segunda entrada do tensor estão em C.

Se M é um C-comódulo à direita com ação $\gamma : M \longrightarrow C \otimes M$ denotamos

$$\gamma(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$$

Neste caso, os elementos da primeira entrada do tensor estão em C e os da segunda entrada estão em M.

Segue da definição de C-comódulo que

$$\epsilon(m_{(0)})m_{(1)} = m.$$

Podemos estender esta notação como no caso das coálgebras, e assim obter

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)} = (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)}.$$

Para mais detalhes sobre essa notação o leitor pode consultar [1], capítulo 2, páginas 66 e 67.

Definição 2.61. Sejam H uma biálgebra e M um $\Bbbk$-espaço vetorial. Dizemos que M é um H-módulo de Hopf à direita se H é um H-módulo à direita (denotaremos a ação de um elemento $h \in H$ em um elemento $m \in M$ por $m \triangleleft h$), e M é H-comódulo à direita com a ação $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$ onde, para todos $m \in M$, $h \in H$ tem-se

$$\rho(m) \triangleleft h = \rho(m \triangleleft h) = m_{(0)} \triangleleft h_{(1)} \otimes m_{(1)} \triangleleft h_{(2)} \ .$$

Definição 2.62. Sejam H uma biálgebra, M, N H-Hopf módulos à direita, e $f : M \longrightarrow N$ uma transformação linear. Dizemos que f é um morfismo de módulos de Hopf se f é um morfismo de módulos e comódulos, ou seja,

$$f(m \triangleleft h) = f(m) \triangleleft h$$

e

$$(f(m))_{(0)} \otimes (f(m))_{(1)} = f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$$

Definição 2.63. Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H-módulo de Hopf à direita, com estrutura de comódulo dada por $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$. O conjunto

$$M^{coH} = \{m \in M : \rho(m) = m \otimes 1_H\}$$

é um subespaço vetorial de M chamado de subespaço dos coinvariantes de M.

Seja $f : M \longrightarrow N$ morfismo de H comódulos, e seja $m \in M^{coH}$. Então

$$(f(m))_{(0)} \otimes (f(m))_{(1)} = f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = f(m) \otimes 1_H$$

ou seja

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq N^{coH}. \tag{2.6}$$

.

Sejam H uma biálgebra e X um $\Bbbk$-espaço vetorial. Sabemos que H é um H-módulo com a ação dada pela multiplicação. Então podemos definir a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & X \otimes H \otimes H & \longrightarrow & X \otimes H \\ & x \otimes h \otimes k & \longmapsto & x \otimes hk. \end{array}$$

Vamos denotar $\gamma(x \otimes h \otimes k) = (x \otimes h) \triangleleft k$. Afirmamos que $X \otimes H$ é um H módulo à direita.

De fato, sejam $x \in X, h, k, w \in H$. Então

$$\begin{aligned} \gamma \circ (\mathrm{Id}_{X \otimes H} \otimes \mu)(x \otimes h \otimes k \otimes w) &= \gamma(x \otimes h \otimes kw) \\ &= x \otimes h(kw) \\ &= x \otimes (hk)w \\ &= (x \otimes hk) \triangleleft w \\ &= ((x \otimes h) \triangleleft k) \triangleleft w \\ &= \gamma(\gamma(x \otimes h \otimes k) \otimes w) \\ &= \gamma \circ (\gamma \circ \mathrm{Id}_H)(x \otimes h \otimes k \otimes w). \end{aligned}$$

Seja $\lambda \in \Bbbk$, então

$$\begin{aligned} \gamma \circ (\mathrm{Id}_{X \otimes H} \otimes \eta)(x \otimes h \otimes \lambda) &= \gamma(x \otimes h \otimes \lambda 1_H) \\ &= x \otimes \lambda h \\ &= \lambda(x \otimes h). \end{aligned}$$

Logo, $X \otimes H$ tem estrutura de H-módulo à direita.

Defina $\rho = \mathrm{Id}_X \otimes \Delta$. Então $(X \otimes H, \rho)$ é um H-comódulo à direita, pois

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_{X \otimes H} \otimes \Delta) \circ \rho(x \otimes h) &= x \otimes h_{(1)} \otimes \Delta(h_{(2)}) \\ &= x \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)} \\ &= (\rho \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho(x \otimes h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_{X \otimes H} \otimes \epsilon) \circ \rho(x \otimes h) &= x \otimes h_{(1)} \otimes \epsilon(h_{(2)}) \\ &= x \otimes h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) \otimes 1 \\ &= x \otimes h \otimes 1. \end{aligned}$$

Dada H uma biálgebra, podemos construir uma categoria onde os objetos são os espaços vetoriais que são H-módulos e H-comódulos à direira e os morfismos são as transformações lineares que são morfismos de comódulos e módulos. Esta categoria será denotada por $\mathscr{M}_H^H$.

Podemos criar dois funtores:

$$\begin{array}{rccc} (\ )^{coH}: & \mathscr{M}_H^H & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \\ & M & \longmapsto & M^{coH} \end{array}$$

$$
\begin{array}{rccc}
\_ \otimes H : & \mathrm{Vect}_{\Bbbk} & \longrightarrow & \mathscr{M}_H^H \\
 & X & \longmapsto & X \otimes H
\end{array}
$$

Dados H-módulos e de H-comódulos $(f)^{coH} = f_{|_{M^{coH}}}$ (que está bem definida pela equação 2.6) e $f \otimes H = f \otimes \mathrm{Id}_H$ que é morfismo de H-comódulos e H-módulos.

Teorema 2.64. *Seja H uma biálgebra. Então o funtor $\_ \otimes H$ é adjunto à esquerda do funtor $(\ )^{coH}$.*

Demonstração. Queremos mostrar que para cada $X \in (\mathrm{Vect}_{\Bbbk})^0$ e $M \in (\mathscr{M}_H^H)^0$ existe um isomorfismo natural

$$
\mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, M^{coH}) \cong \mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M)
$$

Para isso, vamos definir duas transformações naturais e verificar que uma é inversa da outra. Defina

$$
\begin{array}{rccc}
\Phi_{X,M} : & \mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, M^{coH}) \\
 & f & \longrightarrow & \Phi_{X,M}(f)
\end{array}
$$

onde

$$
\begin{array}{rccc}
\Phi_{X,M}(f) : & X & \longrightarrow & M^{coH} \\
 & x & \longmapsto & f(x \otimes 1_H).
\end{array}
$$

Vejamos que $\Phi_{X,M}$ está bem definida, ou seja, vamos verificar que $\Phi_{X,M}(f)(x) \in M^{coh}$ para todo $x \in X$. Denote por ρ_M a coação de H à direita de M, $\rho_{X \otimes H}$ a coação à direita de H em $X \otimes M$. Então

$$
\begin{aligned}
\rho_M(\Phi_{X,M}(f)(x)) &= \rho_M(f(x \otimes 1_H)) \\
&= (f \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho_{X \otimes H}(x \otimes 1_H) \\
&= (f \otimes \mathrm{Id}_H)(x \otimes 1_H \otimes 1_H) \\
&= f(x \otimes 1_H) \otimes 1_H \\
&= \Phi_{X,M}(f)(x) \otimes 1_H.
\end{aligned}
$$

Defina

$$
\begin{array}{rccc}
\Psi_{X,M} : & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, M^{coH}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M) \\
 & g & \longmapsto & \Psi_{X,M}(g)
\end{array}
$$

onde

$$
\begin{array}{rccc}
\Psi_{X,M}(g) : & X \otimes M & \longrightarrow & M \\
 & x \otimes h & \longmapsto & g(x) \triangleleft h.
\end{array}
$$

Vejamos que $\Psi_{X,M}(g)$ é morfismo de H-módulo à direita e H-comódulo à direita. Sejam $x \in X$ e $h, k \in H$. Então

$$\begin{aligned}\Psi_{X,M}(g)((x \otimes h) \triangleleft k) &= \Psi_{X,M}(g)(x \otimes hk) \\ &= g(x) \triangleleft hk \\ &= (g(x) \triangleleft h) \triangleleft k \\ &= \Psi_{X,M}(x \otimes h) \triangleleft k,\end{aligned}$$

logo $\Psi_{X,M}(g)$ é morfismo de H-módulos.

$$\begin{aligned}\rho_M(\Psi_{X,M}(g)(x \otimes h)) &= \rho_M(g(x) \triangleleft h) \\ &= (g(x))_{(0)} \triangleleft h_{(1)} \otimes (g(x))_{(1)} \triangleleft h_{(2)} \\ &= g(x) \triangleleft h_{(1)} \otimes 1_H \triangleleft h_{(2)} \\ &= \Psi_{X,M}(g)(x \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\ &= (\Psi_{X,M} \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho_{X \otimes H}(x \otimes h),\end{aligned}$$

e assim, $\Psi_{X,M}(g)$ é um morfismo de H-comódulos. Com isso vemos que $\Psi_{X,M}$ está bem definida.

Vamos mostrar agora que $\Psi_{X,M}$ é inversa de $\Phi_{X,M}$. Sejam $x \in X, h \in h$. Então

$$\begin{aligned}(\Psi_{X,M} \circ \Phi_{X,M})(g)(x \otimes h) &= \Psi_{X,M}(\Phi_{X,M}(g))(x \otimes h) \\ &= \Phi_{X,M}(g)(x) \triangleleft h \\ &= g(x \otimes 1_H) \triangleleft h \\ &= g(x \otimes h).\end{aligned}$$

Portanto $(\Psi_{X,M} \circ \Phi_{X,M})(g) = g$, para todo $g \in \mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M)$.

Resta ver que $\Phi_{X,M}$ é natural. Sejam X e Y $\Bbbk$-espaços vetoriais e $f : X \longrightarrow Y$ transformação linear. Queremos mostrar que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M}_H^H(Y \otimes H, M) \arrow[r, "\Phi_{X,M}"] \arrow[d, "\_\circ(f \otimes \mathrm{Id}_H)"'] & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(Y, M^{coH}) \arrow[d, "\_\circ f"] \\ \mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M) \arrow[r, "\Phi_{Y,M}"'] & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, M^{coH}) \end{tikzcd} .$$

Sejam $x \in X$ e $g \in \mathscr{M}_H^H(Y \otimes H, M)$. Então

$$(\_ \circ f)(\Phi_{Y,M}(g))(x) = \Phi_{Y,M}(g)(f(x))$$

$$
\begin{aligned}
&= g(f(x) \otimes 1_H) \\
&= g \circ (f \otimes \mathrm{Id}_H)(x \otimes 1) \\
&= \Phi_{X,M}((\_ \circ f \otimes \mathrm{Id}_H)(g))(x).
\end{aligned}
$$

Por último, vamos mostrar que $\Phi_{X,M}$ é natural em M. Seja $f : M \longrightarrow N$ morfismo de módulos e comódulos. Vamos denotar $f|_{M^{coH}}$ por $\overline{f}$. Queremos mostrar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{M}_H^H(X \otimes H, M) \arrow[r, "\Phi_{X,M}"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, M^{coH}) \arrow[d, "\overline{f}_*"] \\
\mathscr{M}_H^H(X \otimes H, N) \arrow[r, "\Phi_{X,N}"'] & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(X, N^{coH})
\end{tikzcd}
$$

Sejam $g : X \otimes H \longrightarrow M$ morfismo de módulos e comódulos e $x \in X$. Então

$$
\begin{aligned}
\overline{f}_*(\Phi_{X,N}(g))(x) &= (\overline{f} \circ \Phi_{X,M}(g))(x) \\
&= \overline{f}(g(x \otimes 1_H)) \\
&= f(g(x \otimes 1_H)) \\
&= f_*(g)(x \otimes 1_H) \\
&= \Phi_{X,N}(f_*(g))(x).
\end{aligned}
$$

Com isso, $\Phi_{X,M}$ é também natural em M e, portanto o isomorfismo é natural. $\square$

Seja H uma biálgebra. Da mesma forma que definimos a ação e coação de H em $X \otimes H$, para X um $\Bbbk$-espaço vetorial, nós podemos definir a ação e coação de H em $H \otimes H$. A única diferença que teremos é que a ação será a multiplicação à esquerda, e não à direita como tínhamos feito antes. Denotaremos esta ação à esquerda por $\triangleright$.

Defina

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Can} : \quad H \otimes H &\longleftrightarrow H \otimes H \\
h \otimes k &\longmapsto hk_{(1)} \otimes k_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Proposição 2.65. *A aplicação* Can *definida acima é um morfismo de H-módulos à esquerda e de H-comódulos à direita.*

Demonstração. Claramente, Can é linear. Sejam $h, k, w \in H$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Can}(w \triangleright h \otimes k) &= (wh)k_{(1)} \otimes k_{(2)} \\
&= w(hk_{(1)}) \otimes k_{(2)} \\
&= w \triangleright (\mathrm{Can}(h \otimes k))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Can} \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho(h \otimes k) &= \mathrm{Can} \otimes \mathrm{Id}_H(h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\
&= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)},
\end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
\rho \circ \mathrm{Can}(h \otimes k) &= \rho(hk_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\
&= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}.
\end{aligned}$$

Portanto, Can é um morfismo de H-módulos à esquerda e de H-comódulos à direita. □

Seja H uma biálgebra. Considere ${}_H\mathrm{Hom}^H(H \otimes H, H \otimes H)$ o espaço vetorial das aplicações lineares f que são morfismos de H-módulos à esquerda e H-comódulos à direita. É fácil ver que esse conjunto é uma álgebra com a operação de composição. Sabemos também que $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ é uma álgebra com o produto de convolução.

Lema 2.66. *Seja H uma biálgebra. Então*

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H) \cong_H \mathrm{Hom}^H(H \otimes H, H \otimes H)^{op}$$

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rccc}
\Psi: & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H) & \longrightarrow & {}_H\mathrm{Hom}^H(H \otimes H, H \otimes H) \\
& f & \longmapsto & \Psi(f)
\end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rccc}
\Psi(f): & H \otimes H & \longrightarrow & H \otimes H \\
& h \otimes k & \longmapsto & hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}.
\end{array}$$

Primeiramente vejamos que Ψ está bem definida. Sejam $h, k, w \in H$ e $f : H \longrightarrow H$ uma transformação linear. Então

$$\begin{aligned}
\Psi(f)(h \triangleright (k \otimes w)) &= \Psi(f)(hk \otimes w) \\
&= hkf(w_{(1)}) \otimes w_{(2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= h \triangleright (kf(w_{(1)}) \otimes w_{(2)}) \\
&= h \triangleright \Psi(f)(k \otimes w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho(\Psi(f))(h \otimes k) &= \rho(hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Psi(f) \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho(h \otimes k) &= (\Psi(f) \otimes \mathrm{Id}_H)(h \otimes k_{(1)} \otimes k_{(2)}) \\
&= (\Psi(f)(h \otimes k_{(1)})) \otimes k_{(2)} \\
&= hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \otimes k_{(3)}.
\end{aligned}
$$

Com isso fica provado que $\Psi(f)$ é morfismo de módulos à esquerda e comódulos à direita.

Sejam $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ e $h, k \in H$, então

$$
\begin{aligned}
\Psi(f * g)(h \otimes k) &= h(f * g)(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \\
&= hf(k_{(1)(1)})g(k_{(1)(2)}) \otimes k_{(2)} \\
&= hf(k_{(1)})g(k_{(2)}) \otimes k_{(3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(g) \circ \Psi(f)(h \otimes k) &= \Psi(g)(hf(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}) \\
&= hf(k_{(1)})g(k_{(2)(1)}) \otimes k_{(2)(2)} \\
&= hf(k_{(1)})g(k_{(2)}) \otimes k_{(3)},
\end{aligned}
$$

isso mostra que Ψ é anti-morfismo de álgebras.

Para mostrar que Ψ é bijetora nós vamos definir uma inversa. Defina

$$
\begin{array}{rccc}
\Phi : & {}_H\mathrm{Hom}^H(H \otimes H, H \otimes H) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H) \\
& f & \longmapsto & \Phi(f)
\end{array}
$$

onde

$$
\Phi(f)(h) = (\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon)(f(1_H \otimes h))
$$

Sejam $f \in_H \mathrm{Hom}^H(H \otimes H, H \otimes H)$, $h, k \in H$, então

$$
\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)(f)(h \otimes k) &= h\Phi(f)(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} \\
&= h(\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon)(f(1_H \otimes k_{(1)})) \otimes k_{(2)} \\
&= h \triangleright ((\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon)(f(1_H \otimes k_{(1)})) \otimes k_{(2)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= h \triangleright ((\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id}_H)(f(1_H \otimes k_{(1)}) \otimes k_{(2)}))\\
&= h \triangleright ((\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id}_H)(f \otimes \mathrm{Id}_H)\rho(1 \otimes k))\\
&= h \triangleright ((\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon \otimes \mathrm{Id}_H)(f \otimes \mathrm{Id}_H)(\mathrm{Id}_H \otimes \Delta)(1 \otimes k))\\
&= h \triangleright ((\mathrm{Id}_H \otimes \mathrm{Id}_H)f(1 \otimes k))\\
&= h \triangleright f(1 \otimes k)\\
&= f(h \otimes k).
\end{aligned}
$$

□

Observação 2.67. Sejam H uma biálgebra e $h \in H$, então

$$
\begin{aligned}
\Phi(\mathrm{Can})(h) &= (\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon)(\mathrm{Can}(1_H \otimes h))\\
&= (\mathrm{Id}_H \otimes \epsilon)(h_{(1)} \otimes h_{(2)})\\
&= h_{(1)}\epsilon(h_{(2)})\\
&= h\\
&= \mathrm{Id}_H(h),
\end{aligned}
$$

isso significa que $\Phi(\mathrm{Can}) = \mathrm{Id}_H$.

Teorema 2.68 (Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf)**.** *Seja H uma biálgebra. São equivalentes:*

(i) *H é Hopf.*

(ii) *A adjunção vista no Teorema 2.64 é equivalência categórica.*

(iii) $\mathrm{Can} : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H$, *dada por* $\mathrm{Can}(h \otimes k) = hk_{(1)} \otimes k_{(2)}$ *é bijetora.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponha H Hopf. Então existe $S : H \longrightarrow H$ tal que $S * \mathrm{Id}_H = \mathrm{Id}_H * S = \eta \circ \epsilon$. Defina, para cada $M \in (\mathscr{M}_H^H)^0$ as aplicação:

$$
\begin{array}{rccc}
\zeta_M : & M^{coH} \otimes H & \longrightarrow & M\\
& m \otimes h & \longmapsto & m \triangleleft h.
\end{array}
$$

Vejamos que ζ_M é um morfismo de H-módulos e H-comódulos à direita.

Sejam $m \in M^{coH}$, $h, k \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
\zeta_M((m \otimes h) \triangleleft k) &= \zeta_M(m \otimes hk)\\
&= m \triangleleft (hk)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (m \triangleleft h) \triangleleft k \\
&= \zeta_M(m \otimes h) \triangleleft k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\zeta_M \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \rho_M(m \otimes h) &= (m \triangleleft h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \\
&= \rho_M(m \triangleleft h) \\
&= \rho_M(\zeta_M(m \otimes h)).
\end{aligned}
$$

Logo ζ_M é um morfismo em $\mathscr{M}_H^H$.

Considere a seguinte função:

$$
\begin{array}{rccc}
\xi_M : & M & \longrightarrow & M^{coH} \otimes H \\
 & m & \longmapsto & m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)}.
\end{array}
$$

Aqui vamos colocar os índices da notação de Sweedler para comódulos na parte superior do elemento, para que não haja confusão com o índice na parte inferior que se refere à aplicação Δ.

Vejamos que ξ_M está bem definida. Seja $m \in M$. Então

$$
\begin{aligned}
(\rho_M \otimes \mathrm{Id}_H)\xi_M(m) &= (\rho_M \otimes \mathrm{Id}_H)(m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)}) \\
&= (m^{(0)(0)} \triangleleft (S(m^{(1)}))_{(1)}) \otimes (m^{(0)(1)}(S(m^{(1)})_{(2)}) \otimes m^{(2)}) \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(2)})_{(1)} \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)})_{(2)} \otimes m^{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(2)(2)}) \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)(1)}) \otimes m^{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}_{(3)}) \otimes m^{(1)}_{(1)} S(m^{(1)}_{(2)}) \otimes m^{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(\epsilon(m^{(1)}_{(1)}) m^{(1)}_{(2)}) \otimes 1_H \otimes m^{(2)} \\
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes 1_H \otimes m^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que ξ_M é a função inversa de ζ_M.

$$
\begin{aligned}
\xi_M \circ \zeta_m(m \otimes h) &= \xi_M(m \triangleleft h) \\
&= (m \triangleleft h)^{(0)} \triangleleft S((m \triangleleft h)^{(1)}) \otimes (m \triangleleft h)^{(2)} \\
&= m \triangleleft h_{(1)} S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(2)}) h_{(3)} \\
&= m \otimes \epsilon(h_{(1)}) h_{(2)} \\
&= m \otimes h
\end{aligned}
$$

$$
\zeta_M \circ \xi_M(m) = \zeta_M(m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)}) \otimes m^{(2)})
$$

$$
\begin{aligned}
&= m^{(0)} \triangleleft S(m^{(1)})m^{(2)} \\
&= m^{(0)}\epsilon(m^{(1)}) \\
&= m.
\end{aligned}
$$

Resta mostrar que ζ_M é natural em M.

Sejam $M, N \in \mathscr{M}_H^H$, $f : M \longrightarrow N$ morfismo, $h \in H, m \in M^{coH}$, então

$$
\begin{aligned}
f \circ \zeta_M(m \otimes h) &= f(m \triangleleft h) \\
&= f(m) \triangleleft h \\
&= \zeta_N(f(m) \otimes h) \\
&= \zeta_N \circ (\overline{f} \otimes \mathrm{Id}_H)(m \otimes h),
\end{aligned}
$$

Com isso fica provado que ζ_M é um isomorfismo natural entre os funtores $(\_ \otimes H) \circ (\ )^{coH}$ e $\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_H^H}$.

Vamos agora definir um isomorfismo natural entre os funtores $(\ )^{coH} \circ (\_ \otimes H)$ e $\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_{\Bbbk}}$.

Para cada X $\Bbbk$-espaço vetorial defina

$$
\begin{array}{rccc}
\nu_X : & X & \longrightarrow & (X \otimes H)^{coH} \\
& x & \longmapsto & x \otimes 1_H
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
\theta_X : & (X \otimes H)^{coH} & \longrightarrow & X \\
& \sum x_i \otimes h_i & \longmapsto & \sum \epsilon(h_i)x_i.
\end{array}
$$

Afirmamos que θ e ν são transformações naturais e são inversas uma da outra.

Veja que ν_X está bem definida, pois

$$
\begin{aligned}
\rho(x \otimes 1_H) &= x \otimes \Delta(1_H) \\
&= x \otimes 1_H \otimes 1_H
\end{aligned}
$$

Claramente ν_X e θ_X são lineares. Vejamos que ν_X é natural. Sejam X, Y $\Bbbk$-espaços vetoriais e $f : X \longleftrightarrow Y$ transformação linear. Seja $x \in X$, então

$$
\begin{aligned}
\overline{f \otimes \mathrm{Id}_H} \circ \nu_X(x) &= \overline{f \otimes \mathrm{Id}_H}(x \otimes 1_h) \\
&= \overline{f}(x) \otimes 1_H \\
&= \nu_Y(f(x)).
\end{aligned}
$$

Portanto ν é natural. Por último, vamos mostrar que ν_X e θ_X são inversas uma da outra.

Antes disso veja que, dado $\sum x_i \otimes h_i \in (X \otimes H)^{coH}$ temos

$$\sum x_i \otimes h_{i(1)} \otimes h_{i(2)} = \sum x_i \otimes h_i \otimes 1_H.$$

Então

$$\sum x_i \otimes h_i = \sum x_i \otimes \epsilon(h_{i(1)})h_{i(2)} = \sum x_i\epsilon(h_i) \otimes 1_H$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nu_X \circ \theta_X(\sum x_i \otimes h_i) &= \nu_X(\sum x_i\epsilon(h_i)) \\
&= \sum \epsilon(h_i) \otimes 1_H \\
&= \sum x_i \otimes h_i.
\end{aligned}$$

Seja $x \in X$, então

$$\begin{aligned}
\theta_X \circ \nu_X(x) &= \theta_X(x \otimes 1_h) \\
&= \epsilon(1_h)x \\
&= x.
\end{aligned}$$

Com isso, temos que o isomorfismo natural desejado e concluímos a equivalência categórica entre as categorias $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ e $\mathscr{M}_H^H$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Primeiramente vejamos que $(H \otimes H)^{coH} = H \otimes 1_H$.

Seja $\sum h_i \otimes k_i \in (H \otimes H)^{coH}$, então

$$\sum h_i \otimes \Delta(k_i) = \sum h_i \otimes k_i \otimes 1_H$$

Assim,

$$k_i = \epsilon(k_{i(1)})k_{i(2)} = \epsilon(k_i)1_H,$$

e dessa forma,

$$\sum h_i \otimes k_i = \sum h_i\epsilon(k_i) \otimes 1_H.$$

Por outro lado, seja $\sum h_i \otimes 1_H$, então

$$\rho(\sum h_i \otimes 1_H) = \sum h_i \otimes 1_H \otimes 1_H$$

Com isso temos que $(H \otimes H)^{coH} = H \otimes 1_H$.

Definindo a bijeção $\phi : H \longrightarrow H \otimes 1_H$, dada por $\phi(h) = h \otimes 1_H$, temos que $\phi \otimes \mathrm{Id}_H : H \otimes H \longrightarrow (H \otimes 1_H) \otimes H$ também é uma bijeção. Sabendo que $(H \otimes H)^{coH} = H \otimes 1_H$ podemos aplicar o isomorfismo natural $\zeta_{H\otimes H}$. Então a composição abaixo é uma bijeção

$$H \otimes H \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{Id}_H} (H \otimes 1_H) \otimes H \xrightarrow{=} (H \otimes H)^{coH} \otimes H \xrightarrow{\zeta_{H\otimes H}} H \otimes H$$

e, dados $h \otimes k \in H \otimes H$ temos que

$$\begin{aligned}
\zeta_{H\otimes H} \circ (\phi \otimes \mathrm{Id}_H)(h \otimes k) &= \zeta_{H\otimes H}(h \otimes 1_H \otimes k) \\
&= (h \otimes 1_H) \triangleright k \\
&= hk_{(1)} \otimes k_{(2)} \\
&= \mathrm{Can}(h \otimes k).
\end{aligned}$$

Com isso obtemos que Can é uma bijeção.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Se Can é bijetora então sabemos que ela possui inversa pela composição. Pelo Lema 2.66 e observação seguinte sabemos que $\Phi(\mathrm{Can}) = \mathrm{Id}_H$. Consequentemente Id_H possui inversa pela convolução e, assim H é Hopf.

$\square$

Capítulo 3

Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein

Um importante teorema que inicia nossa abordagem em dualidade é o teorema da dualidade de Pontrjagin que além da versão para grupos abelianos localmente compactos tem a versão, que será apresentada aqui, para grupos abelianos finitos.

3.1 Teorema de Dualidade de Pontrjagin

Definição 3.1. Seja G um grupo abeliano. O conjunto dos caracteres de G, denotado por $\widehat{G}$ é o conjunto de todos os homomorfismos de grupos de G em $\mathbb{T}$, onde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

$$\widehat{G} = \{f : G \longrightarrow \mathbb{T} : f \text{ é homomorfismo de grupos}\}.$$

Este conjunto é chamado de *dual de Pontrjagin* do grupo G.

Proposição 3.2. *Seja G um grupo. Então $\widehat{G}$ é um grupo com a operação pontual.*

Demonstração. Sejam $f, g, h \in \widehat{G}$. Então, para todo $x, y \in G$,

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(xy) &= f(xy)g(xy) \\ &= f(x)f(y)g(x)g(y) \\ &= (f \cdot g)(x)(f \cdot g)(y),\end{aligned}$$

logo a operação é fechada em $\widehat{G}$.

A operação é associativa:

$$\begin{aligned}(f\cdot(g\cdot h))(x) &= f(x)(g(x)h(x))\\ &= (f(x)g(x))h(x)\\ &= ((f\cdot g)\cdot h)(x).\end{aligned}$$

Tem elemento neutro, o homomorfismo $\mathbb{1}(x) = 1$ para todo $x \in G$.

Seja $f \in \widehat{G}$. Defina $g : G \longrightarrow \mathbb{T}$ dada por $g(x) = f(x)^{-1}$. Então g é um homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}g(xy) &= f(xy)^{-1}\\ &= f(x)^{-1}f(y)^{-1}\\ &= g(x)g(y),\end{aligned}$$

para todo $x, y \in G$ e g é o inverso multiplicativo de f, pois para todo $x \in G$ temos:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x) &= f(x)g(x)\\ &= f(x)f(x)^{-1}\\ &= 1\\ &= \mathbb{1}(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g\cdot f)(x) &= g(x)f(x)\\ &= f(x)^{-1}f(x)\\ &= 1\\ &= \mathbb{1}(x).\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.3. Considere o grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Afirmamos que $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$. Primeiramente, observe que dado $f \in \widehat{\mathbb{Z}}$ ele está unicamente determinado pela escolha de sua imagem em 1, uma vez que $\mathbb{Z}$ é um grupo cíclico gerado pelo 1.

Defina a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{T}\\ & f & \longmapsto & f(1)\end{array}.$$

Φ é um homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}\Phi(f_1 \cdot f_2) &= (f_1 \cdot f_2)(1)\\ &= f_1(1)f_2(1)\\ &= \Phi(f_1)\Phi(f_2).\end{aligned}$$

Φ é injetora:

Sejam f_1, f_2 tais que $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$. Então $f_1(1) = f_2(1)$. Aplicando indução sobre n, temos que $f_1(n) = f_2(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, e portanto os homomorfismos são iguais.

Φ é sobrejetora:

Seja $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Definindo $f_\theta(1) = e^{i\theta}$ temos que $f_\theta(n) = e^{i\theta n}$. Então, para todo $0 \leq \theta < 2\pi$ temos que $f_\theta \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Assim, Φ sobrejetora.

Segue que $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$.

Veremos agora o teorema da Dualidade de Pontrjagin. Para prová-lo utilizaremos o seguinte resultado:

Lema 3.4. *Sejam G um grupo abeliano finito e $H \subseteq G$ um subgrupo. Então um caracter de H pode ser estendido a um caracter de G de $[G : H]$ maneiras.*

Seja G um grupo abeliano finito, com n elementos. Aplicando o lema acima para $H = \{e\}$ concluímos que o único caracter de $\{e\}$ que é a função que associa e a 1 pode ser estendida a um caracter de G de n maneiras. Logo existem n caracteres de G. Analogamente existem n caracteres de $\widehat{G}$, ou seja, $|G| = |\widehat{G}| = |\widehat{\widehat{G}}|$

A demonstração do lema acima pode ser vista em [3].

Teorema 3.5 (da Dualidade de Pontrjagin)**.** *Seja G um grupo abeliano finito. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{ev}: & G & \longrightarrow & \widehat{\widehat{G}}\\ & x & \longmapsto & \mathrm{ev}_x\end{array}$$

onde, para todos $f \in \widehat{G}$ e $x \in G$

$$\mathrm{ev}_x(f) = f(x),$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. Veja que ev é um homomorfismo de grupos. Sejam $x, y \in G$. Então

$$\begin{aligned} \text{ev}_{xy}(f) &= \text{ev}_{xy}(f) \\ &= f(xy) \\ &= f(x)f(y) \\ &= \text{ev}_x(f)\text{ev}_y(f) \\ &= \text{ev}_x\text{ev}_y(f). \end{aligned}$$

ev é injetora:

Seja $x \in G$, $x \neq e$. Então $\langle x \rangle$ é um subgrupo cíclico de G e podemos definir a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \langle x \rangle & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & x^{\mathbb{k}} & \longmapsto & e^{\frac{2\pi i}{n}} \end{array},$$

onde n é a ordem de x que é maior do que 1, pois $x \neq e$. Além disso, f é um homomorfismo de grupos.

Pelo Lema 3.4, podemos estender f a um caractere F de G e, por construção:

$$\text{ev}_x(F) = F(x) = f(x) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 1.$$

Assim $x \neq e$ implica $\text{ev}_x \neq 1$, e segue a injetividade desejada.

Como G e $\widehat{\widehat{G}}$ têm a mesma quantidade de elementos, segue que ev é injetora.

$\square$

3.2 Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein

Os próximos resultados serão utilizados para provar os Teoremas de Dualidade de Tannaka-Krein. Utilizaremos resultados de topologia e análise real que serão mencionados no apêndice.

Primeiramente, considere $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma $\mathbb{R}$-álgebra de Hopf e o conjunto

$$\mathcal{G}(H) = \{\phi : H \longrightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ é homomorfismo de álgebras}\}.$$

Coloquemos em $\mathcal{G}(H)$ o produto de convolução, ou seja, para $a \in H$

$$\begin{aligned} \phi_1 * \phi_2(a) &= \mu_{\mathbb{R}} \circ (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta(a) \\ &= \phi_1(a_{(1)})\phi_2(a_{(2)}) \end{aligned}$$

onde $\mu_{\mathbb{R}}$ indica a multiplicação de $\mathbb{R}$. Usando o isomorfismo $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ ainda podemos escrever esse produto de convolução como

$$\phi_1 * \phi_2(a) = (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta.$$

Com esta operação $\mathcal{G}(H)$ é um grupo. Sejam $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}(H)$, então:

$$\begin{aligned}(\phi_1 * \phi_2)(ab) &= \phi_1((ab)_{(1)}(ab)_{(2)}) \\ &= \phi_1(a_{(1)})\phi_{(1)}(b_{(1)})\phi_2(a_{(2)})\phi_2(b_{(2)}) \\ &= (\phi_1 * \phi_2)(a)(\phi_1 * \phi_2)(b),\end{aligned}$$

o que mostra que a operação $*$ é fechada em $\mathcal{G}(H)$.

O elemento neutro desse grupo é ϵ, pois dados $\phi \in \mathcal{G}(H)$ e $a \in H$:

$$\begin{aligned}(\phi * \epsilon)(a) &= \phi(a_{(1)})\epsilon(a_{(2)}) \\ &= \phi(a_{(1)}\epsilon(a_{(2)})) \\ &= \phi(a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\epsilon * \phi)(a) &= \epsilon(a_{(1)})\phi(a_{(2)}) \\ &= \phi(\epsilon(a_{(1)})a_{(2)}) \\ &= \phi(a),\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}(\phi * (\phi \circ S))(a) &= \phi(a_{(1)})\phi(S(a_{(2)})) \\ &= \phi(a_{(1)}S(a_2)) \\ &= \phi \circ \mu \circ (\mathrm{Id}_H \otimes S) \circ \Delta(a) \\ &= \phi \circ (\mathrm{Id}_H * S)(a) \\ &= \phi \circ \eta \circ \epsilon(a) \\ &= \epsilon(a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((\phi \circ S) * \phi)(a) &= \phi(S(a_{(1)}))\phi(a_{(2)}) \\ &= \phi(S(a_{(1)})a_{(2)}) \\ &= \phi \circ \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \phi \circ (S * \mathrm{Id}_H)(a) \\ &= \phi \circ \eta \circ \epsilon(a) \\ &= \epsilon(a). \end{aligned}$$

Agora, para cada $a \in H$, defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc} E_a : & \mathcal{G}(H) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \longmapsto & \phi(a) \end{array}.$$

Proposição 3.6. *Dada H uma álgebra de Hopf, $\mathcal{G}(H)$ é um grupo topológico com a topologia inicial associada à família de funções $\{E_a\}_{a \in H}$.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{G}(H)$ é um grupo topológico com a topologia inicial associada à família $\{E_a\}_{a \in H}$ é necessário mostrar que são contínuas nessa topologia as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{G}(H) \times \mathcal{G}(H) & \longrightarrow & \mathcal{G}(H) \\ & (\phi, \psi) & \longmapsto & \phi * \psi \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} i : & \mathcal{G}(H) & \longrightarrow & \mathcal{G}(H) \\ & \phi & \longmapsto & \phi^{-1} = \phi \circ S \end{array}$$

Para mostrar isso vamos usar nets. Primeiramente lembremos que a convergência de nets nesta topologia é o mesmo que convergência pontual.

Seja $\{\phi_\lambda, \psi_\lambda\}_\lambda$ uma net convergente para (ϕ, ψ). Então, para todo $a \in H$, $(\phi_\lambda(a), \psi_\lambda(a)) \longrightarrow (\phi(a), \psi(a))$ (na topologia usual de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Isso ocorre se, e somente se, para todo $a \in H$, $\phi_\lambda(a) \longrightarrow \phi(a)$ e $\psi_\lambda(a) \longrightarrow \psi(a)$.

Seja $a \in H$, queremos mostrar que $(\phi_\lambda * \psi_\lambda)(a) \longrightarrow (\phi * \psi)(a)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_\lambda (\phi_\lambda * \psi_\lambda)(a) &= \lim_\lambda \phi_\lambda(a_{(1)}) \psi_\lambda(a_{(2)}) \\ &= \lim_\lambda \phi_\lambda(a_{(1)}) \lim_\lambda \psi_\lambda(a_{(2)}) \\ &= \phi(a_{(1)}) \psi(a_{(2)}) \\ &= (\phi * \psi)(a), \end{aligned}$$

e com isso, $*$ é contínua.

Seja $\{\phi_\lambda\}_\lambda$ net em $\mathcal{G}(H)$ que converge para $\phi \in \mathcal{G}(H)$. Então, para todo $a \in H$, $\phi_\lambda(a) \longrightarrow \phi(a)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\lambda} \phi_\lambda \circ S(a) &= \lim_{\lambda} \phi_\lambda(S(a)) \\
&= \phi(S(a)) \\
&= \phi \circ S(a),
\end{aligned}
$$

logo i também é contínua, o que mostra que $\mathcal{G}(H)$ é um grupo topológico com a topologia inicial associada a família $\{E_a\}_{a\in H}$. $\square$

Definição 3.7. Seja H uma álgebra de Hopf comutativa e real. Uma integral à direita de H, positiva e não degenerada, é um funcional $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $(J \otimes \mathrm{Id}_H) \circ \Delta = \eta \circ J$ e $J(a^2) > 0$ se $a \neq 0$. O funcional J é chamado de funcional de Haar.

Lema 3.8. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ álgebra de Hopf comutativa e real, munida de uma integral à direita de H, positiva e não degenerada. Então são verdadeiras:*

(i) A função

$$
\begin{array}{rccc}
\langle , \rangle_J : & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (b, c) & \longmapsto & J(bc)
\end{array}
$$

define um produto interno em H.

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{G}(H)$ tem-se que $J = J \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta$.

(iii) Dado $\phi \in \mathcal{G}(H)$, $\phi = \epsilon \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta$

Demonstração. (i) Como H é comutativo, $\langle , \rangle_J$ é simétrico. Sendo J um funcional linear, $\langle , \rangle_J$ é bilinear. E, por último, a propriedade $J(a^2) > 0$ se $a \neq 0$ garante a positividade da aplicação. Assim, $\langle , \rangle_J$ define um produto interno em H.

(ii) Sejam $\phi \in \mathcal{G}(H)$ e $a \in H$. Então

$$
\begin{aligned}
J \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta(a) &= J(a_{(1)}\phi(a_{(2)})) \\
&= J(a_{(1)})\phi(a_{(2)}) \\
&= \phi(J(a_{(1)})a_{(2)}) \\
&= \phi \circ (J \otimes \mathrm{Id}_H)\Delta(a) \\
&= \phi \circ \eta \circ J(a) \\
&= J(a).
\end{aligned}
$$

(iii) Sejam $\phi \in \mathcal{G}(H)$ e $a \in H$. Então,

$$\begin{aligned} \epsilon \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta(a) &= \epsilon(a_{(1)}\phi(a_{(2)}) \\ &= \epsilon(a_{(1)})\phi(a_{(2)}) \\ &= \phi(\epsilon(a_{(1)})a_{(2)}) \\ &= \phi(a). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.9. *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, J)$ álgebra de Hopf comutativa e real, munida de uma integral à direita de H, positiva e não degenerada. Então o grupo topológico $\mathcal{G}(H)$ é compacto.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{G}(H)$ é compacto, veremos que $\mathcal{G}(H)$ é homeomorfo à um espaço topológico compacto.

Para cada $a \in H$ temos que

$$\Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{i(1)} \otimes a_{i(2)}.$$

Podemos assumir que $\{a_{1(1)}, \cdots a_{n(1)}\}$ é um conjunto ortonormal com relação ao produto interno induzido por J.

Seja $\phi \in \mathcal{G}(H)$. Como

$$(\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{i(1)} \otimes \phi(a_{i(2)}),$$

então o subespaço vetorial gerado pelo conjunto

$$\{(\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta(a) : \phi \in \mathcal{G}(H)\}$$

tem base $\{a_{i(1)}\}_{i=1}^{n}$.

Defina o conjunto $S_a = \{\phi(a) : \phi \in \mathcal{G}(H)\}$. Pelo Lema 3.8 sabemos que

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon(a_{i(1)})\phi(a_{i(2)}).$$

Defina

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} \epsilon(a_{i(1)})x_i \end{array}$$

Observe que F é contínua, pois a norma em $\mathbb{R}$ é a usual.

Usando o Lema 3.8 temos:

$$\begin{aligned}
J(a^2) &= J \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta(a^2) \\
&= J \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi)(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i(1)}a_{j(1)} \otimes a_{i(2)}a_{j(2)}) \\
&= J(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i(1)}a_{j(1)}\phi(a_{i(2)}a_{j(2)}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} J(a_{i(1)}a_{j(1)})\phi(a_{i(2)}a_{j(2)}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \phi(a_{j(2)}^2) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \phi(a_{j(2)})^2.
\end{aligned}$$

Considere B_a a bola fechada de $\mathbb{R}^n$ com centro em 0 e raio $\sqrt{J(a^2)}$. Como F é contínua, $F(B_a)$ é compacto também.

Vejamos agora que $S_a \subseteq F(B_a)$. Seja $\phi(a) \in S_a$. Considere

$$x = (\phi(a_{1(2)}), \cdots, \phi(a_{n(2)})).$$

Então

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \phi(a_{j(2)})^2 = J(a^2) \Rightarrow x \in B_a$$

Veja que

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{j=1}^{n} \epsilon(a_{j(1)})\phi(a_{j(2)}) \\
&= \phi(a),
\end{aligned}$$

logo $\phi(a) = F(x) \in F(B_a)$ e assim $S_a \subseteq F(B_a)$.

Seja $T := \prod_{a\in H} F(B_a)$ que é compacto pelo Teorema de Tikhonov (Teorema A.2).

Defina

$$\begin{array}{cccc}
j: & \mathcal{G}(H) & \longrightarrow & T \\
 & \phi & \longmapsto & (\phi(a))_{a\in H}
\end{array}$$

Afirmamos que j é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Sejam $\phi, \psi \in \mathcal{G}(H)$, tais que $j(\phi) = j(\psi)$. Então

$$\begin{aligned}(\phi(a))_{a\in H} &= (\psi(a))_{a\in H}\\ \Rightarrow \phi(a) &= \psi(a), \forall a \in H\\ \Rightarrow \phi &= \psi,\end{aligned}$$

o que implica que j é injetora.

Sabemos que j é contínua se, e somente se, $p_a \circ j$ é contínua para todo $a \in H$ onde p_a é a projeção na a-ésima coordenada.

Note que , dado $a_0 \in H$,

$$\begin{aligned}p_{a_0} \circ j(\phi) &= p_{a_0}((\phi(a))_{a\in H})\\ &= \phi(a_0)\\ &= E_{a_0}(\phi).\end{aligned}$$

Logo, $p_a \circ j = \varepsilon_a$ que é contínua para todo $a \in H$, pois a topologia de $\mathcal{G}(H)$ é a topologia inicial associada à família $\{E_a\}_{a\in H}$. Concluímos assim que j é contínua.

Para ver que j é um homeomorfismo sobre sua imagem, vamos mostrar que j leva fechados em fechados (que é o equivalente a mostrar que j leva abertos em abertos).

Seja $C \subseteq \mathcal{G}(H)$ subconjunto fechado. Seja $(\theta_a)_{a\in H} \in \overline{j(C)}$. Então existe $((\phi_\lambda(a))_{a\in H})_\lambda$ net em $j(C)$ que converge para $(\theta_a)_{a\in H}$.

Defina a aplicação

$$\begin{array}{rccc}\theta: & H & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & a & \longmapsto & \theta_a\end{array}$$

Vamos mostrar que $\theta \in j(C)$, ou seja, vamos mostrar que θ é um homomorfismo de álgebras.

Sejam $a, b \in H$ e $\alpha \in \mathbb{k}$.

$$\begin{aligned}\alpha\theta(a) + \theta(b) &= \alpha \lim_\lambda \phi_\lambda(a) + \lim_\lambda \phi_\lambda(b)\\ &= \lim_\lambda \alpha\phi_\lambda(a) + \phi_\lambda(b)\\ &= \lim_\lambda \phi_\lambda(\alpha a + b)\\ &= \theta(\alpha a + b),\end{aligned}$$

$$\theta(ab) = \lim_\lambda \phi_\lambda(ab)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda} \phi_\lambda(a)\phi_\lambda(b) \\
&= \lim_{\lambda} \phi_\lambda(a) \lim_{\lambda} \phi_\lambda(b) \\
&= \theta(a)\theta(b).
\end{aligned}
$$

Segue que θ é um homomorfismo de álgebras. Veja que dizer que $((\phi_\lambda(a))_{a\in H})_\lambda$ converge para $(\theta_a)_{a\in H}$ é o mesmo que dizer que $(\phi_\lambda)_\lambda$ converge para θ. Como C é fechado, $\theta \in C$ e portanto $\theta \in j(C)$.

Dessa forma, j é um homeomorfismo sobre sua imagem.

Por fim, $j(\mathcal{G}(H))$ é fechado em $\prod_{a\in H} F(B_a)$ que é compacto, logo $j(\mathcal{G}(H))$ é compacto. Como j é homeomorfismo sobre sua imagem temos que $\mathcal{G}(H)$ é compacto. $\square$

Demonstração. Sejam $\phi, \psi, \theta \in \mathcal{G}(H)$ e $f \in R(\mathcal{G}(H))$. Então

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\phi*\psi}(f)(\theta) &= f(\theta * (\phi * \psi)) \\
&= f((\theta * \phi) * \psi) \\
&= \alpha_\psi(f)(\theta * \phi) \\
&= \alpha_\phi(\alpha_\psi(f))(\theta).
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{G}(H)$ age em $R(\mathcal{G}(H))$ pela ação α. $\square$

Veja que na ação acima, dado $\phi \in \mathcal{G}(H)$, α_ϕ preserva o produto de $R(\mathcal{G}(H))$, pois este é a multiplicação pontual de funções.

Teorema 3.10 (Dualidade de Tannaka-Krein)**.** *Seja $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ uma álgebra de Hopf real, comutativa e munida de uma integral positiva e não-degenerada. Então a aplicação*

$$E : H \longrightarrow R(\mathcal{G}(H))$$

definida por

$$E(a)(\phi) = \phi(a), \text{ para } \phi \in \mathcal{G}(H) \text{ e } a \in H,$$

é um isomorfismo de álgebras de Hopf.

Demonstração. Afirmamos que E está bem definida. De fato, seja $h \in H$ e considere C_h a menor subcoálgebra de H que contém h. Defina

$$
\begin{array}{rccc}
\pi : & \mathcal{G}(H) & \longrightarrow & GL(C_h) \\
& \phi & \longmapsto & \pi_\phi
\end{array}
$$

onde

$$\pi_\phi = \mu_H \circ (\mathrm{Id}_H \otimes \phi) \circ \Delta.$$

π_ϕ é linear pois é composição de aplicações lineares.

π é homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned}
\pi_\phi \circ \pi_{\phi'}(h) &= \pi_\phi(h_{(1)}\phi'(h_{(2)})) \\
&= \phi'(h_{(2)})\pi_\phi(h_{(1)}) \\
&= \phi'(h_{(2)})h_{(1)(1)}\phi(h_{(1)(2)}) \\
&= h_{(1)}\phi(h_{(2)})\phi'(h_{(3)})
\end{aligned}$$

por outro lado temos:

$$\begin{aligned}
\pi_{\phi*\phi'}(h) &= h_{(1)}(\phi * \phi')(h_{(2)}) \\
&= h_{(1)}\phi(h_{(2)(1)})\phi'(h_{(2)(2)}) \\
&= h_{(1)}\phi(h_{(2)})\phi'(h_{(3)})
\end{aligned}$$

Logo π é homomorfismo de grupos e, com isto, (C_h, π) é uma representação de $\mathcal{G}(H)$.

Agora veja que,

$$\begin{aligned}
\epsilon(\pi_\phi(h)) &= \epsilon(h_{(1)}\phi(h_{(2)})) \\
&= \phi(h_{(2)})\epsilon(h_{(1)}) \\
&= \phi(\epsilon(h_{(1)})h_{(2)}) \\
&= \phi(h) \\
&= E_h(\phi).
\end{aligned}$$

Isto prova que E_h é representativa para todo $h \in H$.

Além disso, E_h é contínua para todo $h \in H$, pois a topologia de $\mathcal{G}(H)$ é a topologia inicial associada à família $\{E_h\}_{h\in H}$.

Como E_h é contínua e representativa para todo $h \in H$, a função E está bem definida.

Sejam $a, b \in H$ e $\phi \in \mathcal{G}(H)$. Então

$$\begin{aligned}
E(ab)(\phi) &= \phi(ab) \\
&= \phi(a)\phi(b) \\
&= E(a)(\phi)E(b)(\phi) \\
&= (E(a)E(b))(\phi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(\lambda a+b)(\phi) &= \phi(\lambda a+b)\\
&= \lambda\phi(a)+\phi(b)\\
&= \lambda E(a)(\phi)+E(b)(\phi)\\
&= (\lambda E(a)+E(b))(\phi).
\end{aligned}
$$

Claramente E_{1_H} é a função consntante igual a 1, que é a unidade de $R(\mathcal{G}(H))$. Logo, E é um homomorfismo de álgebras.

Para não haver confusão entre as coálgebras de H e de $R(\mathcal{G}(H))$, vamos denotar a estrutura de coálgebra de $R(\mathcal{G}(H))$ por $(R(\mathcal{G}(H)), \overline{\Delta}, \overline{\epsilon})$.

Sejam $a \in H$, $\phi, \psi \in \mathcal{G}(H)$. Então

$$
\begin{aligned}
\overline{\Delta} \circ E(a)(\phi,\psi) &= E(a)(\phi * \psi)\\
&= (\phi * \psi)(a)\\
&= \phi(a_{(1)})\psi(a_{(2)})\\
&= \phi(a_1)\otimes\psi(a_{(2)})\\
&= E(a_{(1)})(\phi)\otimes E(a_{(2)})(\psi)\\
&= (E\otimes E)\circ\Delta(a)(\phi\otimes\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\epsilon}\circ E_a &= E_a(\epsilon)\\
&= \epsilon(a)
\end{aligned}
$$

Portanto E é um homomorfismo de coálgebras. Sendo também um homomorfismo de álgebras, E é um homomorfismo entre álgebras de Hopf. Resta mostrar que E se trata de um isomorfismo.

A injetividade da aplicação pode ser vista no capítulo 1, Teorema 1.30 de [2].

Para a sobrejetividade, considere $\phi, \psi \in \mathcal{G}(H)$ com $\phi \neq \psi$. Então existe $x \in H$ tal que $\phi(x) \neq \psi(x)$, ou seja, $E_x(\phi) \neq E_x(\phi)$. Isto mostra que $E(H)$ separa pontos de $\mathcal{G}(H)$. Como $E_{1_H} \equiv 1$, a função constante igual a 1 é a unidade de $C(\mathcal{G}(H), \mathbb{R})$, temos que $E(H)$ é uma subálgebra unital.

Assim, pelo Teorema de Stone-Weierstrass temos que

$$
\overline{E(H)} = C(\mathcal{G}(H), \mathbb{R}).
$$

Agora vamos mostrar que $E(H)$ é um $\mathcal{G}(H)$-submódulo de $R(\mathcal{G}(H))$ com respeito à translação à direita.

De fato, sejam $a \in H$, $\phi, \psi \in \mathcal{G}(H)$. Então

$$\begin{aligned} r_\phi(E_a)(\psi) = & \quad E_a(\psi * \phi) \\ &= \psi(a_{(1)})\phi(a_{(2)}) \\ &= \psi(\phi(a_{(2)})a_{(1)}) \\ &= E_{\phi(a_{(2)})a_{(1)}}(\psi). \end{aligned}$$

Isso significa que $r_\phi(E(H)) \subseteq E(H)$. Pela Proposição 2.45 temos que $E(H)$ é fechado em $R(\mathcal{G}(H))$ pela topologia da norma. Usando o Teorema A.4, temos

$$R(\mathcal{G}(H)) = \overline{E(H)} = E(H)$$

E portanto, E é sobrejetora. Segue que $E(H) = R(\mathcal{G}(H))$ e, portanto E é sobrejetora.

$\square$

Da teoria de análise harmônica, dado G um grupo topológico compacto, existe uma medida chamada Medida de Haar sobre G. Podemos definir um funcional $J : R(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada função representativa f sua integral de Haar. Neste caso, as seguintes sentenças são verdadeiras:

$$J(r_y(f)) = J(f), \forall g \in G$$

e

$$J(f^2) > 0,$$

sempre que $f \neq 0$, $J(f^2) = 0$ se, e somente se $f = 0$.

Considerando a álgebra de Hopf real e comutativa $R(G)$ temos que $\eta \circ J(f)$ é a função constante igual a $J(f)$. Além disso, dado $y \in G$, temos

$$r_y(f)(x) = f(xy) = \sum_i g_i(x)h_i(y).$$

Segue que

$$J(f) = \sum_i J(g_i)h_i.$$

Veja que

$$(J \otimes \mathrm{Id}_{R(G)}) \circ \Delta(f) = (J \otimes \mathrm{Id}_{R(G)}) \left(\sum_i g_i \otimes h_i \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i J(g_i)h_i \\
&= J(f) \\
&= \eta \circ J(f).
\end{aligned}
$$

Portanto, J é um funcional de Haar, ou seja, é uma integral à direita, positiva e não-degenerada.

Teorema 3.11 (Dualidade de Tannaka-Krein)**.** *Seja G um grupo topológico compacto. Então a aplicação*

$$
\begin{array}{cccc}
e: & G & \longrightarrow & \mathcal{G}(R(G)) \\
& x & \longmapsto & e_x
\end{array}
$$

onde $e_x(f) = f(x)$, para todo $x \in G$, é um isomorfismo de grupos compactos.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que e é um homomorfismo de grupos. Sejam $x, y \in G$ e $f \in R(G)$. Então $f(xy) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$, onde $\Delta(f) = \sum_i f_i \otimes g_i$. Lembremos que o produto de convolução entre $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{G}(R(G))$ é dado por $\mu_{\mathbb{R}} \circ (\phi_1 \otimes \phi_2) \circ \Delta$. Assim,

$$
\begin{aligned}
e_{xy}(f) &= f(xy) \\
&= \mu_{\mathbb{R}}\left(\sum_i f_i(x) \otimes g_i(y)\right) \\
&= \mu_{\mathbb{R}}\left(\sum_i e_x(f_i) \otimes e_y(g_i)\right) \\
&= \mu_{\mathbb{R}} \circ (e_x \otimes e_y) \circ \Delta(f) \\
&= e_x * e_y(f)
\end{aligned}
$$

Logo, e é um homomorfismo de grupos.

Pelo teorema de Peter-Weyl A.4, temos que $R(G)$ é denso em $C(G)$, com isso, $R(G)$ também separa pontos e consequentemente e é injetora.

Como a convergência em $\mathcal{G}(R(G))$ é pontual, temos que a aplicação e é contínua.

Considere agora função $E : R(G) \longrightarrow R(\mathcal{G}(R(G)))$ definida no Teorema 3.10.

Defina

$$
\begin{array}{cccc}
e^t: & R(\mathcal{G}(R(G))) & \longrightarrow & R(G) \\
& F & \longmapsto & F \circ e
\end{array}
$$

Então e^t é uma inversa à direita de E pois

$$e^t \circ E_f(x) = E_f(e_x) = e_x(f) = f(x)$$

e como E é um isomorfismo, e^t também é.

Estendendo e^t para $C(\mathcal{G}(R(G)))$ obtemos o isomorfismo

$$C(G) \cong C(\mathcal{G}(R(G))).$$

Pelo Teorema A.6 temos que $\mathcal{G}(R(G))$ e G são homeomorfos. Em particular, e é sobrejetora. $\square$

Apêndice A

Resultados Topológicos

Apresentamos aqui alguns resultados da área de topologia que foram utilizados mas que não foram demonstrados.

Proposição A.1. *Sejam X um espaço topológico compacto e Y um subespaço fechado de X. Então X é compacto.*

Teorema A.2 (Tikhonov)**.** *Seja (X_i, τ_i) uma família não vazia de espaços topológicos. Então o produto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ munido da topologia produto é compacto se, e somente se, (X_i, τ_i) é compacto para todo $i \in I$.*

Teorema A.3 (Stone-Weierstrass)**.** *Sejam M um espaço métrico compacto, $A \subseteq C(M, \mathbb{R})$ uma subálgebra unital da álgebra das funções contínuas de M com valores reais. Então A é denso em $C(M, \mathbb{R})$ se, e somente se A separa pontos.*

Teorema A.4 (Peter-Weyl)**.** *Sejam G um grupo topológico compacto, $R(G)$ a álgebra das funções representativas contínuas e reais de G, $C(G)$ a álgebra das funções contínuas de G em $\mathbb{R}$. Então $R(G)$ é denso em $C(G)$.*

Um corolário deste teorema é:

Corolário A.5. *Sejam G um grupo topológico compacto. Então, dado $x \in G$ existe uma função $f \in R(G)$ tal que $f(x) \neq 1$.*

Demonstração. Seja $x \in G$. Defina a aplicação $e_x : C(G, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $e_x(f) = f(x)$. Veja que e_x é contínua, pois se uma sequência

$\{f_n\}_n$ de $C(G,\mathbb{R})$ converge em norma para f então o limite pontual também convergirá para f.

Considere a imagem inversa de $\{1\}$, $e_x^{-1}\{1\}$ que é fechado. Então o conjunto $U_x = C(G,\mathbb{R})\backslash e_x^{-1}\{1\}$ é um subconjunto aberto de $C(G,\mathbb{R})$.

Como $R(G)$ é denso em $C(\mathbb{R},G)$ temos que $R(G)\cap(U_x)\neq\emptyset$.

Logo existe $f\in R(G)$ tal que $f(x)\neq 1$. $\square$

Teorema A.6 (Gelfand-Kolmogorov)**.** *Sejam X e Y espaços topológicos compactos. Então $C(X)$ e $C(Y)$ são isomorfas como álgebras se, e somente se, X e Y são homeomorfos. Além disso, todo isomorfismo de álgebras $T : C(Y) \longrightarrow C(X)$ é da forma $T(f) = f\circ h$, onde $h : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo.*

O resultado acima pode ser consultado em [4].

Apêndice B

Resultados Importantes de Teoria de Categorias

Definição B.1. Uma categoria $\mathscr{C}$ consiste de:

1. Uma classe de objetos, denotada por $\mathscr{C}^0$.

2. Para quaisquer objetos A e B, uma classe de morfismos entre A e B, denotada por $\mathscr{C}(A, B)$, satisfazendo:

    - Para todo objeto A existe um morfismo Id_A pertencente a classe $\mathscr{C}(A, A)$, chamado *morfismo identidade*.
    - Podemos compor morfismos: dados f morfismo em $\mathscr{C}(A, B)$ e g em $\mathscr{C}(B, C)$, existe um único morfismo $g \circ f$ em $\mathscr{C}(A, C)$. Esta composição é associativa e,

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f \text{ e } \mathrm{Id}_B \circ f = f.$$

Se $\mathscr{C}(A, B)$ for um conjunto, para todos A e B objetos de $\mathscr{C}$, então a categoria é dita *localmente pequena*. Se a classe dos objetos de $\mathscr{C}$ for um conjunto então a categoria é dita *pequena*.

Usaremos o símbolo $\in$ para indicar a pertinência dos elementos às classes, mesmo que estas não necessariamente sejam conjuntos.

Alguns exemplos de categorias são:

- *Set*: a categoria cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções.

- $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$: a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo $\Bbbk$, seus morfismos são as transformações lineares.

- Seja A um anel. Então podemos considerar a categoria de todos os A-módulos à esquerda. Os morfismos desta categoria são os homomorfismos de A-módulos. Denotamos essa categoria por ${}_A\mathscr{M}$.

Definição B.2. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f : A \longrightarrow B$ um morfismo em $\mathscr{C}$. Dizemos que f é um epimorfismo se, para todos $g, g' : B \longrightarrow C$ morfismos em $\mathscr{C}$ tais que $g \circ f = g' \circ f$ acontecer que $g = g'$.

Definição B.3. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f : A \longrightarrow B$ um morfismo em $\mathscr{C}$. Dizemos que f é um monomorfismo se, para todos $g, g' : C \longrightarrow A$ tais que $f \circ g = f \circ g'$ acontecer que $g = g'$.

Definição B.4. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f : A \longrightarrow B$ um morfismo em $\mathscr{C}$. Dizemos que f é um isomorfismo, se existe $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_A \text{ e } f \circ g = \mathrm{Id}_B.$$

O morfismo g acima é chamado de morfismo inverso de f.

Seja $f : A \longrightarrow B$ um isomorfismo. Sejam $g, g' : B \longrightarrow A$ morfismos inversos de f.

Então,

$$\begin{aligned} g &= g \circ \mathrm{Id}_B \\ &= g \circ (f \circ g') \\ &= (g \circ f) \circ g' \\ &= \mathrm{Id}_A \circ g' \\ &= g'. \end{aligned}$$

Logo o morfismo inverso de f é único e podemos nos referir a ele como o morfismo inverso de f.

Na categoria Set os monomorfismos são as funções injetoras, os epimorfismos são as funções sobrejetoras e os isomorfismos são as funções bijetoras.

Definição B.5. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A, B \in \mathscr{C}^0$, $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$. Um equalizador para o par (f, g) é um par (E, e), onde $E \in \mathscr{C}^0$ e $e \in \mathscr{C}(E, A)$ tal que, $f \circ e = g \circ e$ e, para qualquer outro par (T, t) (T objeto e $t \in \mathscr{C}(T, A)$) tal que $f \circ t = g \circ t$, existe um único morfismo $u \in \mathscr{C}(T, E)$ satisfazendo $t = e \circ u$. Em diagrama temos:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B. \\
T \arrow[u, "\exists! u"] \arrow[ur, "t"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria, $A, B \in \mathscr{C}^0$, $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$. Um coequalizador para o par (f, g) é um par (C, c), onde $C \in \mathscr{C}^0$ e $c \in \mathscr{C}(B, C)$ tal que, $c \circ f = c \circ g$ e, para qualquer outro par (T, t) (T objeto e $t \in \mathscr{C}(B, T)$) tal que $t \circ f = t \circ g$, existe um único morfismo $u \in \mathscr{C}(C, T)$ satisfazendo $t = u \circ c$. Em diagrama temos:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "t"'] & C \arrow[d, "\exists! u"] & . \\
& & T &
\end{tikzcd}
$$

Definição B.6. Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $C \in \mathscr{C}^0$. Dizemos que:

- C é um objeto inicial se, para todo $A \in \mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}(C, A)$ é um conjunto unitário.
- C é um objeto final se, para todo $A \in \mathscr{C}^0$, $\mathscr{C}(A, C)$ é um conjunto unitário.
- C é um objeto nulo se é final e inicial.
- C é um objeto terminal se é final ou inicial.

Se uma categoria possui objeto terminal então ele é único a menos de isomorfismo.

Seja $\mathscr{C}$ uma categoria que possua objeto nulo, digamos $O \in \mathscr{C}^0$. Seja $A \in \mathscr{C}^0$. Vamos denotar por 0 o único morfismo $f \in \mathscr{C}(C, A)$. Denotaremos também por 0 o único morfismo $g \in \mathscr{C}(A, C)$. Faremos distinção entre esses morfismos somente se houver confusão.

Definição B.7. Seja $\mathscr{C}$ um categoria que possua objeto nulo O. Sejam $A, B \in \mathscr{C}^0$ e $f \in \mathscr{C}(A, B)$. Então o kernel de f é o equalizador do par $(f, 0)$ e, o cokernel de f é o coequalizador do par $(f, 0)$

Definição B.8. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorias. Um funtor covariante é uma função que associa a cada objeto $C \in \mathscr{C}^0$ um objeto de $F(C) \in \mathscr{D}$ e a cada morfismo $f : C \longrightarrow C'$ em $\mathscr{C}$ um morfismo $F(f) : F(C) \longrightarrow F(C')$. Satisfazendo as condições:

- Para todo $C \in \mathscr{C}^0$ tem-se que $F(\mathrm{Id}_C) = \mathrm{Id}_{F(C)}$;
- Dados $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos em $\mathscr{C}$ tem-se que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Definição B.9. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorias. Um funtor contravariante é uma função que associa a cada objeto $C \in \mathscr{C}^0$ um objeto de $F(C) \in \mathscr{D}$ e a cada morfismo $f : C \longrightarrow C'$ em $\mathscr{C}$ um morfismo $F(f) : F(C') \longrightarrow F(C)$, satisfazendo as condições:

- Para todo $C \in \mathscr{C}^0$ tem-se que $F(\mathrm{Id}_C) = \mathrm{Id}_{F(C)}$;
- Dados $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ morfismos em $\mathscr{C}$ tem-se que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Exemplo B.10. Seja Ab a categoria cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos. É fácil ver que Ab é de fato uma categoria. Então a aplicação $U : Ab \longrightarrow Set$ que associa cada grupo abeliano à si próprio como conjunto e cada morfismo à si próprio como função é um funtor covariante.

Exemplo B.11. Considere a categoria $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ e fixe um $\Bbbk$-espaço vetorial V. Podemos definir o funtor

$$\mathrm{Hom}(V, \_) : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \longrightarrow Set$$

que associa a cada espaço vetorial W o conjunto $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W)$ e a cada morfismo $f : W_1 \longrightarrow W_2$ a função

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W_1) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W_2) \\ & g & \longmapsto & f \circ g. \end{array}$$

Sejam W, um $\Bbbk$-espaço vetorial. Então $\mathrm{Hom}(V, \mathrm{Id}_W) = \mathrm{Id}_{W*}$ e dado $g \in \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W)$ temos

$$\mathrm{Id}_{W*}(g) = \mathrm{Id}_W \circ g = g$$

ou seja,

$$\mathrm{Id}_{W*} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V,W)} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}(V,W)}.$$

Sejam $f : W_1 \longrightarrow W_2$, $g : W_2 \longrightarrow W_3$ morfismos em $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$. Então $(g \circ f)_* : \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W_1) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W_2)$.

Seja $h \in \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(V, W_1)$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)_*(h) & = & (g \circ f) \circ h \\ & = & g \circ (f \circ h) \\ & = & g_*(f_*(h)) \\ & = & (g_* \circ f_*)(h) \end{array}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Com isso fica provado que $\mathrm{Hom}(V, \_)$ é um funtor covariante.

Exemplo B.12. Seja V um $\Bbbk$-espaço vetorial. Em $\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$ podemos definir um funtor semelhante ao do exemplo anterior:

$$\mathrm{Hom}(\_, V) : \mathrm{Vect}_{\Bbbk} \longrightarrow Set.$$

onde $\mathrm{Hom}(W, V) = \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(W, V)$ e para $f : W_1 \longrightarrow W_2$ morfismo, $\mathrm{Hom}(f, V) = \_ \circ f$ é dada por

$$\begin{array}{rccc} \_ \circ f : & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(W_2, V) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_{\Bbbk}(W_1, V) \\ & g & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

Com essa definição, $\mathrm{Hom}(\_, V)$ é um funtor contravariante.

Definição B.13. Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ categorias, $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtores covariantes. Uma transformação natural $\alpha : F \Rightarrow G$ é uma classe de morfismos $\{\alpha_C : F(C) \longrightarrow G(C)\}$ indexada pelos objetos de $\mathscr{C}$ tal que, para todos $C, C' \in \mathscr{C}^0$ e $f \in \mathscr{C}(C, C')$ tem-se o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\alpha_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\alpha_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd} .$$

Quando cada um dos morfismos α_C é um isomorfismo, dizemos que α é um isomorfismo natural entre os funtores F e G.

Definição B.14. Uma categoria $\mathscr{C}$ é dita abeliana se satisfaz os seguintes itens:

(i) $\mathscr{C}(A, B)$ é um grupo abeliano para todos $A, B \in \mathscr{C}^0$.

(ii) $\mathscr{C}$ possui objeto nulo.

(iii) Todo par de objetos de $\mathscr{C}$ possui coproduto.

(iv) Todo morfismo em $\mathscr{C}$ possui kernel e cokernel.

(v) Todo monomorfismo é um kernel e todo epimorfismo é um cokernel.

Referências Bibliográficas

[1] S. Dăscălescu; C. Năstăsescu; S. Raian. **Hopf Algebras: An Introduction**, Marcel Dekker, New York, 401p. (2001).

[2] José M. Gracia-Bondía, Joseph C. Várilly, Héctor Figueroa. **Elements of Noncommutative Geometry**, New York: Springer, 685p. (2001)

[3] Keith Conrad. **Charaters of Finite Abelian Groups**, UConn Math Departament, 26p, disponível em http://www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/grouptheory/charthy.pdf

[4] M. Isabel Garrido, Jesús A. Jaramillo. **Variations on the Banach-Stone Theorem**, Extracta Mathematicae, Laredo, Vol. 17, Núm. 3, 351 – 383 (2002).

[5] Timmermann T. **An invitation to quantum groups and duality**, EMS, Zürich, 407p. (2008)

[6] Barry Simon. **Representations of Finite and Compact Groups**, American Mathematical Society, Rhode Island, 266p. (1996)

[7] S. Caenepeel, J. Vercruysse. **Hopf Algebras**, Vrije Universiteit Brussel, 115p. (2013).

[8] Eiichi Abe. **Hopf Algebras**, Cambridge University Press, Cambridge, 284p. (1980).

[9] Gerard J. Murphy. **C*-Algebras and Operator Theory**, Academic Press, London 286p. (1990).

[10] Gerhard P. Hochschild. **The structure of Lie groups**, Holden-Day, San Francisco, 230p. (1965).

[11] Giovani G. Pollachini. **Álgebras de Hopf associadas a grafos tipo árvore**, Dissertação de Mestrado, UFSC, (2015), disponível em https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/134767.

[12] M. M. Teixeira. **Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf**, Dissertação de Mestrado, UFSC, (2011), disponível em http://mtm.ufsc.br/ ebatista/Orientacoes_arquivos/volume4.pdf.

[13] Saunders Mac Lane. **Categories for the Working Mathematician**, New York: Springer, 314p. (1998).

[14] Etingof P., et al. **Introduction to Representation Theory**, American Mathematical Society,, Rhode Island, 228p. (2011).

[15] L. S. Pontriagin. **Grupos Continuos**, Moscou: Mir, 533p. (1978).

[16] Benjamin Steinberg. **Representation Theory of Finite Groups - An Introductory Approach**, Springer, New York, 157p. (2012).

[17] Anton Deitmar. **A First Course in Harmonic Analysis**, Springer, New York, 151p. (2001).

[18] Theodor Bröcker, Tammo tom Dieck. **Representations of Compact Lie Groups**, Springer, New York, 313p. (1985).

[19] Edwin Hewitt, Kenneth A. Ross. **Abstract Harmonic Analysis Volume I**, Springer, New York, 510p. (1979).

[20] David E Radford. **Hopf Algebras**,World Scientific, Singapore, 559p. (2012).