

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO SÓCIO-ECONÔMICO  
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES  
INTERNACIONAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA  
MESTRADO EM ECONOMIA  
DISSERTAÇÃO**

**DANIEL DANIELI NETO**

**ANÁLISE DE UM EVENTO EXTREMO  
NEGATIVO EM UMA ESTRATÉGIA PARA  
FUNDOS DE INVESTIMENTOS EM PORTFÓLIO**

**FLORIANÓPOLIS  
2017**

**DANIEL DANIELI NETO**

**ANÁLISE DE UM EVENTO EXTREMO  
NEGATIVO EM UMA ESTRATÉGIA PARA  
FUNDOS DE INVESTIMENTOS EM PORTFÓLIO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Economia.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Da Silva

Florianópolis  
2017

Danieli, Daniel Neto

Análise de um evento extremo negativo em uma estratégia para fundos de investimentos em portfólio / Daniel Danieli Neto ; orientador , Sérgio Da Silva. – Florianópolis, SC, 2017.

101 p.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Sócio-Econômico, Programa de Pós-Graduação em Economia, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Economia. 2. Econofísica. 3. Finanças quantitativas. 4. Sistemas Complexos. 5. Teoria da informação. I. Da Silva, Sérgio. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Economia. III. Título.

**DANIEL DANIELI NETO**

**ANÁLISE DE UM EVENTO EXTREMO  
NEGATIVO EM UMA ESTRATÉGIA PARA  
FUNDOS DE INVESTIMENTOS EM PORTFÓLIO**

Essa dissertação foi julgada adequada para a obtenção do Título de Mestre em Economia, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 31 de Março de 2017.

---

Prof. Dr. Jaylson Jair da Silveira  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Coordenador do Curso

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Prof. Dr. Eraldo Sérgio Barbosa da Silva  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Orientador

---

Prof. Dr. Raul Yukihiro Matsushita  
Universidade de Brasília  
Membro Externo

---

Prof. Dr. Newton Affonso Carneiro da Costa Júnior  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Membro Interno

---

Prof. Dr. Gilson Geraldino da Silva Júnior  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Membro Interno

## RESUMO

Esta dissertação estende a especificação de um modelo para a simulação computacional de um sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa baseado em agentes grafistas e fundamentalistas que interagem em uma estrutura de mercado. Na simulação computacional deste modelo, a dinâmica determinística dá à luz uma variável (série-preço, ação) de ativo financeiro autossustentável ao longo do tempo (ou iterações) onde há estados de ordem, caos, e eventos extremos. Então, investiga-se a regra de evolução deste sistema dinâmico, isto é, esta série temporal de ativo financeiro caótica, sob hipóteses de aleatoriedade e por intermédio de um modelo para análise de mercados financeiros. Ou seja, faz-se uma análise de um processo determinístico como se fosse um processo estocástico. Por sua vez, através de um conjunto de estatísticas descritivas (bem como, verifica-se a memória desta série temporal com o expoente de Hurst) e por meio de um modelo de mercado financeiro para a gestão de fundos de investimentos em portfólio que traz para a modelagem a hipótese de mistura de distribuições, o princípio de máxima entropia e leis de potência. De maneira que com isso verifica-se o ajuste dos dados desta série temporal do ativo financeiro caótica. Não obstante, o desempenho deste modelo para mercados financeiros, sob dependência da estratégia de investimentos que lhe caracteriza, depende de eventos extremos em preços de ativos financeiros. Por definição, se a mudança de um preço traz para um observador as propriedades de ser-lhe improvável, de ter-lhe um alto impacto e de ser-lhe considerável somente após acontecer, então é-lhe um evento extremo.

**Palavras-chaves:** Caos determinístico. Evento extremo negativo. Estratégia de portfólio de *barbell*.

## ABSTRACT

This dissertation extends the specification of a model for the computational simulation of a nonlinear deterministic system of speculative financial dynamics based on graphical and fundamentalist agents that interact in a market structure, the global level. In computational simulation, deterministic dynamics give rise to a variable (series-price, stock) of a financial asset (from initial conditions for the specification of the model, as well as its resolution by numerical methods) that has proved to be self-sustaining over time (or iterations). The evolution of this dynamic system is then investigated under hypotheses of randomness and through a model for the analysis of financial markets. Thus, an analysis of this chaotic time series is made using a set of descriptive statistics. Another analysis is made through a financial market model for the management of portfolio investments that starts from the modern theory of the portfolio and surpasses it. It also brings to the modeling the hypothesis of mixture of distributions, as well as some specific cases of maximum entropy distribution and power law. This is relevant to estimate the data of this time series of the chaotic financial asset in a way that allows to verify the adjustment of this data to this financial market model. Nevertheless, the performance of this model for financial markets, under dependency on the investment strategy that characterizes it, relies on extreme events in prices of financial assets. By definition, if the change of a price is able to impact an observer only after it happens and also brings great impact, it can be considered an extreme event.

**Key-words:** Deterministic chaos. Negative extreme event. *Barbell's* portfolio.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	54
Figura 2 – Hierarquia de dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	55
Figura 3 – PDF da distribuição empírica dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	56
Figura 4 – CDF da distribuição empírica dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	57
Figura 5 – PDF da distribuição <i>Kernel</i> . . . . .	58
Figura 6 – CDF da distribuição <i>Kernel</i> . . . . .	59
Figura 7 – Histograma dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	60
Figura 8 – Teste de hipótese de normalidade de Jarque-Bera para os dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	61
Figura 9 – Restrições de riscos de cauda esquerda . . . . .	72
Figura 10 – Histograma suavizado para o caso normal . . . . .	84
Figura 11 – CDF para o caso normal . . . . .	85
Figura 12 – Plotagem quantílica para o caso normal . . . . .	86
Figura 13 – Histograma suavizado para o caso de mistura de distribuições . . . . .	87
Figura 14 – CDF para o caso de mistura de distribuições . . . . .	88
Figura 15 – Plotagem quantílica para o caso de mistura de distribuições . . . . .	89
Figura 16 – CDF para a distribuição de máxima entropia. . . . .	91
Figura 17 – Análise de dados da cauda direita. . . . .	92
Figura 18 – Outra análise de dados da cauda direita. . . . .	93
Figura 19 – Ajuste de lei de potência expresso na cauda direita. . . . .	93
Figura 20 – Comparação de cauda – distribuição empírica versus distribuição gaussiana. . . . .	94

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Estatísticas descritivas de mensuração de dispersão dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica. . . . .	64
Tabela 2	– Estimativas do expoente de Hurst para a memória dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica . . . . .	65
Tabela 3	– Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica para com a mistura de duas distribuições normais . . . . .	90
Tabela 4	– Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica para com a extensão de máxima entropia no caso de média global . . . . .	91
Tabela 5	– Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica com leis de potência . . . . .	92

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
	<i>A Seção 1.1 tematiza as principais características de linhas de pesquisas que investigam o "fenômeno" eventos extremos em finanças e traz o problema de pesquisa desta dissertação que, apropriadamente, consiste na investigação de um processo determinístico como se fosse um processo estocástico, em específico, por intermédio de um modelo de mercado financeiro. Para isso, a Seção 1.2 justifica a pesquisa com uma teoria sobre o "fenômeno" em finanças, isto é, a lógica do cisne negro. Então, a Seção 1.3 introduz o modelo de mercado financeiro, estratégia de portfólio, cujo desempenho depende do "fenômeno" em finanças. Enquanto, a Seção 1.4 traça os objetivos de pesquisa desta dissertação. Por fim, a Seção 1.5 exibe a sua estrutura.</i>	
<b>1.1</b>	<b>Aleatoriedade, determinismo, ordem, caos, fractal, periodicidade, e um sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>1.2</b>	<b>Os cisnes negros em finanças . . . . .</b>	<b>37</b>
<b>1.3</b>	<b>Estratégia de portfólio de <i>barbell</i> . . . . .</b>	<b>41</b>
<b>1.4</b>	<b>Objetivos . . . . .</b>	<b>46</b>
1.4.1	Objetivo geral . . . . .	46
1.4.2	Objetivos específicos . . . . .	46
<b>1.5</b>	<b>Estrutura da dissertação . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>2</b>	<b>MATERIAIS . . . . .</b>	<b>48</b>
	<i>A Seção 2.1 descreve o modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira de agentes grafistas e fundamentalistas que interagem em um mercado. A Subseção 2.1.1 traz uma explicação para esta dinâmica especulativa. A</i>	

*Seção 2.2 apresenta uma série temporal de preço do ativo financeiro caótica originada por meio da simulação numérica deste modelo. Enquanto, a Seção 2.3 traz um conjunto de estatísticas descritivas para esta série temporal caótica. Por fim, a Seção 2.4 exhibe, por meio do expoente de Hurst, a memória dos dados desta série temporal caótica.*

<b>2.1</b>	<b>Um sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado . . . . .</b>	<b>48</b>
2.1.1	Dinâmica Especulativa . . . . .	49
<b>2.2</b>	<b>Dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>2.3</b>	<b>Estatísticas descritivas dos dados da série temporal caótica . . . . .</b>	<b>56</b>
2.3.1	Teste de hipótese de normalidade para os dados da série temporal caótica . . . . .	60
2.3.2	Estatísticas descritivas de mensuração de dispersão dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .	61
<b>2.4</b>	<b>Memória dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica . . . . .</b>	<b>62</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODOS . . . . .</b>	<b>66</b>

*A Seção 3.1 traz um modelo para a análise de mercados financeiros, isto é, uma formalização da estratégia de barbell que, por sua vez, serve para a gestão de fundos de investimentos em portfólio. Com isso, a Subseção 3.1.1 trata de riscos de cauda esquerda em termos de Valor em Risco (VaR) e de Valor em Risco Condicional (CVaR), ou seja, as duas restrições centrais na distribuição deste portfólio. Tornadas robustas de maneira a não depender de suposições paramétricas. Enquanto, a Subseção 3.1.2 parte do quadro média-variância da teoria do portfólio (padrão) para começar a explicar sobre o portfólio. A Subseção 3.1.3 trata da distribuição*

*multivariada desconhecida para os componentes individuais que denotam, em agregado, no retorno deste portfólio. Já, a Subseção 3.1.4 formaliza as restrições de riscos de cauda esquerda, isto em termos de probabilidade de cauda visto na Subsubseção 3.1.4.1 e de CVaR visto na Subsubseção 3.1.4.2. A Subseção 3.1.5 exhibe o caso "normal". A Subseção 3.1.6 apresenta o caso da hipótese de mistura de distribuições (MDH). A Subseção 3.1.7 traz a máxima entropia. Então, a Subsubseção 3.1.7.1 apresenta o caso de uma extensão de máxima entropia para impor uma restrição na média global, na parte direita da distribuição. Bem como, a Subsubseção 3.1.7.2, só que ao invés de ser uma restrição na média global, é uma restrição na média absoluta; deste portfólio. Finalmente, a Subsubseção 3.1.7.3 traz leis de potência para complementar a análise. E, por fim, a Subseção 3.1.8 traz a extensão do modelo para o caso de multi-períodos. Enquanto a Seção 3.2 trata de outras possibilidades de distribuições de máxima entropia.*

<b>3.1</b>	<b>Formalização da estratégia de portfólio de <i>barbell</i></b>	<b>66</b>
3.1.1	Riscos de cauda esquerda . . . . .	68
3.1.2	Quadro média-variância . . . . .	69
3.1.3	Distribuição multivariada desconhecida . . . . .	70
3.1.4	Restrições de riscos de cauda esquerda . . . . .	70
3.1.4.1	Probabilidade de cauda . . . . .	70
3.1.4.2	Valor em Risco Condicional . . . . .	71
3.1.5	Caso normal . . . . .	71
3.1.6	Hipótese de mistura de distribuições . . . . .	74
3.1.7	Máxima entropia . . . . .	75
3.1.7.1	Restrição na média global . . . . .	76
3.1.7.2	Restrição na média absoluta . . . . .	77
3.1.7.3	Leis de potência para a cauda direita . . . . .	77
3.1.8	Comportamento multi-períodos . . . . .	78
<b>3.2</b>	<b>Outras possibilidades de distribuições de máxima entropia . . . . .</b>	<b>80</b>

<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>82</b>
	<i>Este Capítulo expõe resultados de pesquisa desta dissertação. A Seção 4.1. traz estimativas de modelagem para com a série temporal do ativo financeiro caótica. A Subseção 4.1.1 apresenta estimativas de restrições VaR e CVaR para a cauda esquerda. A Subseção 4.1.2 exhibe estimativas para o caso normal em termos de PDF, CDF e de plotagem quantílica. A Subseção 4.1.3 mostra as estimativas para a mistura de duas normais. A Subseção 4.1.4 exhibe as estimativas para o caso de máxima entropia. A Subseção 4.1.5 expõe uma análise para a cauda direita da série temporal caótica. Por fim, a Subseção 4.1.6 traz para ela o ajuste de leis de potência. Adicionalmente, a Seção 4.2 traz uma comparação de cauda, isto é, distribuição empírica versus distribuição gaussiana. E a Seção 4.3 que traz alguns aspectos resultantes de modelagem com a distribuição de Pareto do tipo I e distribuição de estável de Levy para a série temporal caótica.</i>	
<b>4.1</b>	<b>Estimativas de modelagem para com a série temporal do ativo financeiro caótica . . . . .</b>	<b>82</b>
4.1.1	Estimativas para as restrições de cauda esquerda . .	82
4.1.2	Estimativas para o caso normal . . . . .	83
4.1.3	Estimativas para o caso de mistura de distribuições .	84
4.1.4	Estimativas para o caso de máxima entropia . . . .	85
4.1.5	Estimativas para a cauda direita . . . . .	87
4.1.6	Ajuste de leis de potência . . . . .	88
<b>4.2</b>	<b>Comparação de cauda: distribuição empírica versus distribuição gaussiana . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>4.3</b>	<b>Verificação de distribuição de Pareto do tipo I e distribuição estável de Levy para a série temporal do ativo financeiro caótica . . . . .</b>	<b>90</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>95</b>

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . . 97**

# 1 INTRODUÇÃO

*A Seção 1.1 tematiza as principais características de linhas de pesquisas que investigam o "fenômeno" eventos extremos em finanças e traz o problema de pesquisa desta dissertação que, apropriadamente, consiste na investigação de um processo determinístico como se fosse um processo estocástico, em específico, por intermédio de um modelo de mercado financeiro. Para isso, a Seção 1.2 justifica a pesquisa com uma teoria sobre o "fenômeno" em finanças, isto é, a lógica do cisne negro. Então, a Seção 1.3 introduz o modelo de mercado financeiro, estratégia de portfólio, cujo desempenho depende do "fenômeno" em finanças. Enquanto, a Seção 1.4 traça os objetivos de pesquisa desta dissertação. Por fim, a Seção 1.5 exhibe a sua estrutura.*

## **1.1 Aleatoriedade, determinismo, ordem, caos, fractal, periodicidade, e um sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira**

Em finanças, a pesquisa teórica e empírica que investiga a imprevisibilidade do comportamento dinâmico de séries temporais de preços de ativos financeiros evoluiu a partir de duas linhas distintas (ou seja, dois gêneros de estudos em termos de artigos científicos, monografias, dissertações, e teses de doutorado). A primeira linha traz dois campos com hipóteses específicas de dinâmica aleatória para a modelagem através de processos estocásticos (genericamente, o campo um investiga a aleatoriedade do tipo I e o campo dois investiga a aleatoriedade do tipo II), enquanto a segunda linha traz campos com hipóteses específicas de dinâmica determinística para a modelagem através de sistemas determinísticos não-lineares e de fórmulas de log-periodicidade (isto é, um campo com a hipótese de caos e outro campo com a hipótese de periodicidade) (BACHELIER, 1900; MANDELBROT, 1963; FAMA, 1963; MANDELBROT; TAYLOR, 1965; FELLER, 1968; BAUMOL, 1970; STEWART, 1997; MANTEGNA; STANLEY, 2000; MANDELBROT; TALEB, 2007b; MANDELBROT; HUDSON, 2006; WIGGINS, 2003;

SORNETTE, 2003; FARMER et al., 2004; GABAIX, 2008; TALEB, 2010; TALEB, 2014). A presente Seção traz estas quatro hipóteses. Bem como, a meta-perspectiva da teoria de fractais (MANDELBROT; NESS, 1968; MANDELBROT, 1997; MANDELBROT, 2007) em que aleatoriedade e determinismo, ordem e caos, coexistem (PETTERS, 1994). Não obstante, esta meta-perspectiva serve para a modelagem de sistemas complexos (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987; LARRY; DANIELA, 2000; BARANGER, 2001; SORNETTE, 2003; GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004; PREIS, 2011; SCHINCKUS, 2013; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Por fim, esta Seção traz o problema de pesquisa desta dissertação: Onde, por meio da extensão e simulação computacional de um modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa baseado em agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado (a nível global) em que a dinâmica determinística reflete o comportamento coletivo emergente por meio de uma variável (série-preço, ação) do ativo financeiro (onde eventos extremos podem ocorrer) subjacente, autossustentável ao longo do tempo (ou iterações), que é gerada a partir das condições iniciais da especificação desse modelo (DE-GRAUWE; DEWACHER, 1992; SILVA, 2000; SILVA, 2001a; SILVA, 2001b). Por sua vez, o problema de pesquisa desta dissertação consiste na investigação do comportamento determinístico não-linear (caótico) desta variável resultante sob hipóteses de aleatoriedade, e, por intermédio de um modelo de mercado financeiro, para a gestão de investimentos em portfólio, cujo desempenho depende da busca e exposição para o *fenômeno* eventos extremos em ativos financeiros (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Por definição, se a alteração de um preço traz para um observador as propriedades de ser-lhe improvável, de ter-lhe um alto impacto e de ser-lhe considerável somente após ocorrer, então é-lhe um evento extremo (raro e desconhecido) do tipo cisne negro (TALEB, 2010).

A série temporal de preço de um ativo financeiro descreve um conjunto de medidas sequenciais (conforme alterações que ocorrem no respectivo preço cujos incrementos de dados-numéricos são tomados em ordem aos seus respectivos instantes em pontos (ou passos) no tempo, por sua vez, sucessivos a partir da alteração do preço corrente de condição inicial, os quais então são dispostos em uma amostra) que descreve a transição de estados de um sistema, ou seja, o seu comportamento "*ponto-a-ponto*" ou "*passo-a-passo*" ao longo do tempo, dentro

de seu espaço de fase. Onde o comportamento dinâmico refere-se à transição de um estado do sistema para outro estado do sistema que lhe sucede. Enquanto estado refere-se à localização corrente do sistema. Cada ponto corresponde a um único estado possível do sistema dentro de seu espaço de fase (o mesmo vale para passo). De maneira que atualiza-se o estado do sistema em cada ponto de tempo contínuo (que é um fluxo contínuo e infinitamente divisível) ou em cada passo de tempo discreto. Em geral, utilizam-se equações diferenciais para descrever um sistema dinâmico contínuo e equações de diferença (temporal) para descrever um sistema dinâmico discreto (BAUMOL, 1970; WIGGINS, 2003; SORNETTE, 2003). Tal que os estados sequenciais do sistema descrevem a sua trajetória (isto é, o seu caminho) dentro de seu espaço de fase. Não obstante, a trajetória origina-se no ponto (ou passo) de condição inicial dentro de seu (respectivo) espaço de fase. Conceitualmente, espaço de fase é o espaço multidimensional (cujas dimensões refletem os valores possíveis de variáveis de posição (localização) e de momento, ou seja, as coordenadas que indicam os estados e respectivos instantes) que representa todos os estados possíveis de um sistema dinâmico. Por sua vez, o conjunto de estados denota os valores correntes para os parâmetros a serem usados para definir e medir o sistema. Em qualquer momento, o sistema está em um estado específico em seu espaço e segue uma regra de evolução que descreve a transição de estados do sistema ao longo do tempo. Um sistema dinâmico é uma regra para a evolução ao longo do tempo em um espaço de fase. A regra de evolução atribui com a previsão de outro(s) estado(s) para suceder(em) o estado atual do sistema ao longo do tempo uma sequência de transições que tentam explicar o comportamento dinâmico do sistema dentro de seu espaço de fase. Nesta perspectiva, um sistema dinâmico pode ser visto como um modelo para explicar a evolução de um sistema ao longo do tempo. Consideram-se os sistemas dinâmicos estocásticos e os sistemas dinâmicos determinísticos (BAUMOL, 1970; PETERS, 1994; WIGGINS, 2003; SORNETTE; JOHANSEN; BOUCHAUD, 1996; SCHINCKUS, 2013). Tal regra de evolução também associa-se com atratores (por exemplo, os de pontos-fixos) e (ou) com pontos-críticos (SILVA; MATSUSHITA, 2017). Genericamente, um atrator refere-se a um valor ou um conjunto de valores para onde o sistema tende ao longo do tempo, dentro de seu espaço de fase. Por sua vez, dentro do espaço de fase de um sistema dinâmico, a bacia de

atração, em relação a um determinado atrator, descreve todos os valores possíveis (para as variáveis do sistema) que fazem com que o sistema tenha por tendência o determinado atrator. Adiante, exemplifica-se a bacia de atração *gaussiana*.

O fato em comum das duas linhas (mencionadas no primeiro parágrafo dessa Seção) é o de assumirem a hipótese da teoria ergódica para investigar o comportamento de longo-prazo, isto é, verificar propriedades emergentes (SCHINCKUS, 2013), de séries temporais de preços de ativos financeiros, por sua vez, de que estados futuros refletem estatisticamente estados passados de seus sistemas, não obstante, dentro de seus espaços de fase. Portanto, quanto maior uma amostra de dados melhor a análise estatística (PREIS, 2011). De maneira diferente, a dinâmica de sistemas ao longo do tempo, ou seja, do curto-prazo ao longo-prazo, é a abordagem de investigação da teoria de sistemas complexos (SCHINCKUS, 2013).

Aleatoriedade é informação incompleta (isto é, ausência de conhecimento) sobre a transição do estado corrente de um sistema para outro estado do sistema que lhe sucede, ou seja, a imprevisibilidade de um comportamento dinâmico (TALEB, 2010). Por sua vez, se é informação incompleta (isto é, ausência de conhecimento) sobre a alteração que ocorre em um preço, então essa série temporal de preço do ativo financeiro traz um evento de aleatoriedade. O que é uma perspectiva do observador na relação entre aleatoriedade e determinismo. De fato, a aleatoriedade depende da perspectiva do observador. A aleatoriedade nem sempre é uma característica do sistema. No caso, o sistema que representa o respectivo espaço de fase desta série temporal de preço de ativo financeiro. Nesta perspectiva, associa-se aleatoriedade com processos estocásticos. Pode-se considerar o conjunto de processos estocásticos como um dos que fazem parte da classe de modelos de sistemas dinâmicos que são conhecidos e que servem para explicar a evolução de sistemas ao longo do tempo, por exemplo, os sistemas de séries temporais de preços de ativos financeiros. Um padrão puramente estocástico que origina-se apenas de eventos aleatórios é aquele cujo comportamento dinâmico é imprevisível (MANDELBROT; NESS, 1968). Por definição, os sistemas dinâmicos estocásticos têm soluções que são relacionadas às distribuições de probabilidade. Não obstante, qualquer processo estocástico traz um comportamento dinâmico com componentes que são aleatórios ou probabilísticos. Assim, a primeira

linha parte de processos estocásticos para investigar a imprevisibilidade do comportamento dinâmico de séries temporais de preços de ativos financeiros. A seguir, exibem-se algumas das características que fundamentam os processos estocásticos com base na bacia de atração *gaussiana* e depois algumas das características de modelos de leis de potência.

Na primeira linha, o campo um parte da hipótese de que séries temporais de dados de preços de ativos financeiros seguem uma distribuição normal padrão (*gaussiana*) e com isso tende a investigá-las como sendo de aleatoriedade do tipo I (isto é, *gaussiana* ou suave) (TALEB, 2010). Hipótese com bases no teorema do limite central e na bacia de atração *gaussiana* (FELLER, 1968; TALEB, 2010; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Por exemplo, em um processo estocástico do tipo passeio aleatório, a série temporal de preço de um ativo financeiro refere-se ao conjunto de medidas sequenciais (passos) de seu sistema que descrevem o seu caminho que segue para diferentes direções aleatórias dentro de seu espaço de fase. Se o seu caminho é de muitos passos pequenos em um passeio genuinamente aleatório, então aproxima-se do movimento *browniano* (cuja ocorrência pode se associar a um padrão puramente estocástico). No exemplo, se o somatório  $\sum_{i=1}^n$  de  $n$  passos de uma variável aleatória  $va_i$  satisfaz as condições de ser independente (isto é, o passo no período de tempo em  $t$  não é dependente do passo no período de tempo em  $t - 1$ ) e identicamente distribuído (variância finita) (i.i.d.), não obstante,  $va_i \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$ , tal que  $st_n = \sum_{i=1}^n [va_1, va_2, va_3, \dots, va_n]$ . Então, a série temporal  $st_n \sim i.i.d. (\mu, \sigma^2)$  denota o passeio aleatório cujos momentos estatísticos  $E[va_i^n]$  não são dependentes do  $i$ -ésimo passo. Mandelbrot (2007) traz que a partir da formulação de origem dos modelos de escala de preços onde pressupõe-se que os preços alteram-se aleatoriamente e cada alteração de preço é estatisticamente independente de todas as anteriores (de modo que, o caminho aleatório segue em passos iguais, para cima ou para baixo, igualmente espaçados no tempo), por sua vez, parte para o que pressupõe-se com a função densidade de probabilidade *gaussiana* que permite um nível leve de dispersão, bem como, para quaisquer generalizações desta distribuição, por sua vez, à origem do termo "*suave*" para referir-se ao tipo de aleatoriedade que modela. Daí esse processo estocástico é dito ergódico se ele passa (caminha) por todos os estados possíveis de modo que sejam igualmente

prováveis e então o comportamento final de longo-prazo não depende da condição inicial do  $i$ -ésimo passo, ao assumir o seguinte. Por sua vez, com base no teorema do limite central, conforme  $n \rightarrow \infty$  então  $st_n$  converge assintoticamente para uma função densidade de probabilidade *gaussiana*  $st_n \sim N(\mu, \sigma^2)$  que representa o atrator (ponto fixo) do tipo *gaussiano*, do mesmo modo, um conjunto destas funções densidade de probabilidade representa a bacia de atração *gaussiana*.

A teoria do passeio aleatório na forma originalmente concebida (o mesmo vale para extensões) é verificada por Mandelbrot (1963), Mandelbrot (2007) (por meio da hipótese acima exposta) ao analisar o primeiro modelo de processo estocástico para a análise de preços que em geral se referencia, ou seja, o modelo de Bachelier (1900). O modelo de Bachelier (1900) dá origem a hipótese dos mercados eficientes (HME) em finanças, por sua vez, também chamada de teoria do passeio aleatório porque compara preços de ativos financeiros a um passeio aleatório. Mandelbrot (1963) aponta que Bachelier (1900) fez o seu modelo por meio dos pressupostos de que (i) as sucessivas alterações dos preços são independentes, (ii) os preços trazem um comportamento característico conforme um processo *martingale* (isto é, sem nenhum desvio do comportamento médio, sem nenhuma taxa de juros, e sem a possibilidade de arbitragem) para a finalidade de expressar um mercado perfeito, (iii) imperfeições de mercado permanecem exclusivamente nos casos de serem inferiores aos custos de transação, (iv) os preços competitivos seguem um movimento *browniano* e (v) que parte da hipótese de distribuição normal padrão. Bem como, (porque vale para extensões do modelo) (vi) ausência de comportamento cíclico, e (vii) ausência de agrupamentos de conjunto de estados (em localização no tempo) em que há grandes alterações de preço (*clustering*) (MANDELBROT, 2007). Mandelbrot (1963) relata os pressupostos do modelo de Bachelier (1900) a partir da falta de evidências empíricas e por meio da hipótese de descontinuidade dos preços, isto é, existe a necessidade de continuidade dos preços para o movimento *browniano* que é demonstrado no modelo de Bachelier (1900) através de um passeio aleatório de tempo contínuo e de deslocamentos infinitesimais (MANDELBROT, 1963; FERNANDES; GLEISER, 1994; MANDELBROT, 2007). O que diz respeito para as propriedades de invariância e de escala de preço para o movimento *browniano* (MANDELBROT, 2007). Conforme Mandelbrot (2007), o único significado de continuidade é de que os

preços sucessivos diferem apenas por montantes da ordem de grandeza de um mínimo irredutível.

Para o comportamento dos mercados, Mandelbrot (2007) traz que para cumprir com a sua finalidade os preços nos mercados financeiros devem ser capazes de mudar instantaneamente, por sua vez, quando as novas informações importantes tornam-se disponíveis. Isto é, que os mercados totalmente eficientes. Por definição, HME é a capacidade de um mercado em refletir toda a informação disponível no preço do ativo financeiro (MANTEGNA; STANLEY, 2000). Por sua vez, o montante de informação disponível não redundante cuja densidade pode ser processada por um mercado eficiente de forma absoluta a partir da eficiência fraca (em que apenas a informação do histórico de seu preço se reflete no seu preço corrente), da eficiência semi-forte (em que a informação do histórico de seu preço e a informação pública se refletem no seu preço corrente), e da eficiência forte (em que a informação do histórico de seu preço, a informação pública, e a informação privada se refletem no seu preço corrente) (FAMA; MILLER, 1972), o que, então, representa a sub-casos para a hipótese de eficiência de mercado, ainda que de maneira absoluta. Conforme Silva e Matsushita (2017), a informação também pode ser processada em um mercado de forma relativa, ou seja, em uma medida da eficiência de um mercado real em relação ao padrão aleatório de um mercado eficiente que representa o seu ideal.

A distribuição *gaussiana* em qualquer aplicação de modelagem empírica traz a limitação de não atribuir probabilidades para todos os tipos de eventos (não-normais) que ocorrem nas alterações de preços de ativos financeiros (por exemplo, as descontinuidades (MANDELBROT, 2007)). Traz limitações em mensurar assimetria e leptocurtose (SORNETTE, 2003) e não atribui probabilidades para a ocorrência de eventos extremos (TALEB, 2010). Dentro desta perspectiva, na modelagem o fato de ocorrer  $n$ -enésimo(s) evento(s) extremo(s) é passível de exclusão ou tratável como *outlier*, por sua vez, porque as propriedades estatísticas desse(s) estado(s) atípico(s) discrepam das propriedades estatísticas dos outros estados sequenciais do sistema que descrevem o seu caminho ao longo do tempo, dentro de seu espaço de fase (conforme a bacia de atração *gaussiana*). Portanto, a distribuição *gaussiana* não é apropriada para modelar o *fenômeno* eventos extremos. Consequentemente, a partir da discrepância entre distribuições empíricas de

séries temporais de preços de ativos financeiros e distribuição teórica *gaussiana* tem-se a aleatoriedade do tipo I. Para a teoria dos "*grandes erros*" os desvios da média chamam-se irregularidades (MANDELBROT, 2007). A aleatoriedade do tipo I retrata o que é improvável (isto é, a possibilidade de eventos raros ou extremos) como inconsequente (isto é, não precisa ser considerado e pode então ser excluído ou tratado como *outlier*) e de baixo impacto (isto é, nenhum evento em especial vai ter impacto sobre um sistema cuja amostra seja grande) (TALEB, 2010). Não obstante, pode-se consultar como o campo evolui em torno de outros processos estocásticos como os que partem de modelos das classes ARMA (Autoregressivo e Médias Móveis), ARIMA (Autoregressivo Integrado e Médias Móveis), ARCH (Autoregressivo Condicionalmente Heterocedástico) e GARCH (Autoregressivo Condicionalmente Heterocedástico Generalizado), entre outros, por exemplo, em Hamilton (1994), Mantegna e Stanley (2000), Tsay (2010), e, Silva e Matsushita (2017). Vide no Capítulo 2 o exemplo de que um único evento extremo é o suficiente para que uma série temporal não siga uma distribuição *gaussiana*, e alternativa para lhe confirmar como *gaussiano*.

Na primeira linha, o campo dois parte da hipótese de que a imprevisibilidade do comportamento dinâmico de séries temporais de preços de ativos financeiros pode ser modelado por distribuição de lei de potência e com isso a investigação se dá para com a aleatoriedade do tipo II (isto é, violenta ou selvagem) (TALEB, 2010). Hipótese com bases em generalizações do teorema do limite central e inúmeras bacias de atração (MANTEGNA; STANLEY, 2000; MANDELBROT; HUDSON, 2006; TALEB, 2010; CHARRAS-GARRIDO; LEZAUD, 2013; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Associa-se ao economista italiano Vilfredo Pareto (1848-1923) a descoberta da distribuição de probabilidade de lei de potência cujo interesse e utilidade torna-se notável a partir de Mandelbrot (1963), Fama (1963) e Fama (1965) em finanças. Como resultado, eles encontram menor discrepância entre distribuições empíricas de séries temporais de dados de preços de ativos financeiros e distribuições teóricas para leis de potência, isso em comparação à distribuição teórica *gaussiana*. Uma lei de potência é a forma tomada por um grande número de regularidades empíricas, ou *leis*, que ocorrem em economia e finanças, como as que ocorrem nos retornos das séries temporais de dados de preços de ativos financeiros (GABAIX, 2008).

Por exemplo, tem-se a hipótese de regularidade de eventos extremos (ou de cauda, vide Subseção 1.2). Na distribuição de lei de potência assume-se a maior amostra de dados possível de séries temporais de ativos financeiros para dizer qual o tipo de distribuição (de lei de potência) oferece o melhor ajuste para com o comportamento dos dados, em geral escalável, e há caudas finas, longas ou grossas (TALEB, 2010). Na aleatoriedade do tipo II retratasse o que é improvável como consequente e impactante, ou seja, pode-se atribuir probabilidades para grande parte dos eventos que são improváveis e podem ocorrer nas alterações dos preços (TALEB, 2010). Traz, por exemplo, a entropia diferencial estocástica para a finalidade de representar a incerteza residual de um processo e modelar o *fenômeno* eventos extremos em séries temporais financeiras (vide Seção 1.3 e Capítulo 3). Não obstante, como limitação do campo, parte-se da observação de Gabaix (2008) que não se tem com a abordagem uma explicação ainda apropriada para algumas das regularidades empíricas em finanças. Por exemplo, a regularidade de eventos extremos (que não são de cauda, vide Subseção 1.2). A lógica de eventos extremos é apresentada na Subseção 1.2, bem como a continuação da ideia de leis de potência. Nesta perspectiva, aleatoriedade "*violenta*" pode denotar em eventos do tipo súbitos, rápidos, regulares (ou não), e daí "*selvagem*" pode denotar na descoberta de um tipo de evento ou de regularidades para uma classe de eventos até então desconhecida.

O determinismo é a informação completa (isto é, o conhecimento absoluto) sobre a transição do estado corrente de um sistema para outro estado deste sistema que lhe sucede, ou seja, um comportamento dinâmico previsível (enquanto há certeza), não obstante, que evolui de suas condições iniciais, por sua vez, como uma ordem de lei da natureza. O determinismo refere-se à modelos matemáticos onde o estado no período de tempo em  $t + 1$  é determinado (de forma absoluta) pelo estado no período de tempo em  $t$  (PETTERS, 1994). Em que os modelos têm soluções exatas, isto é, não são relacionados à distribuições, então ao contrário de qualquer processo estocástico, um sistema dinâmico determinístico não traz os componentes que são aleatórios ou probabilísticos (WIGGINS, 2003). Por sua vez, ocorre imprevisibilidade em sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares, por exemplo, em termos de dinâmica do comportamento coletivo de agentes que interagem em um mercado. Portanto, a imprevisibilidade não é uma ex-

clusividade de sistemas dinâmicos estocásticos. A imprevisibilidade de séries temporais de dados de preços de ativos financeiros não significa que elas devam ser modeladas exclusivamente por meio de processos estocásticos (SILVA; MATSUSHITA, 2017). De maneira alternativa, ou complementar, elas podem ser modeladas de modo determinístico. Para os modelos de sistemas determinísticos não-lineares, em geral, as resoluções são de análise numéricas (GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004). A linha dois traz que os comportamentos determinísticos podem ser modelados com a finalidade de investigar a (im)previsibilidade de sistemas dinâmicos. No caso, os comportamentos podem ser explicados por equações simples. Não obstante, comportamentos complexos ocorrem em sistemas descritos matematicamente por equações simples (WIGGINS, 2003; GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004). A seguir, apresentam-se as principais características de modelos de sistemas determinísticos não-lineares e de modelos de fractais. Abordagens que são para analisar e entender sistemas complexos (LARRY; DANIELA, 2000). O que permite introduzir algumas das principais propriedades (e que são gerais) para descrever sistemas complexos. Com isso, faz-se uma breve verificação de seu emprego em modelos de fórmulas de log-periodicidade. E, por fim, especifica-se as características de um sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa financeira.

A segunda linha traz o campo de pesquisas que parte da hipótese de que a imprevisibilidade do comportamento dinâmico de séries temporais de preços de ativos financeiros pode ser investigada por meio de dinâmicas determinísticas não-lineares que lhe são subjacentes, o que permite a finalidade de explicar o seu comportamento ao longo do tempo com uma quantidade delimitada de variáveis (MANDELBROT; TAYLOR, 1965). Por exemplo, por meio de um modelo cujo número fixo de equações definidas caracteriza a estrutura determinística não-linear de um sistema a nível global (conceito que se define abaixo). Onde a interação de agentes no respectivo mercado se expressa no comportamento dinâmico da série temporal de preço do ativo financeiro subjacente, daí o comportamento dinâmico é contínuo ao longo do tempo se a estrutura determinística do modelo é autossustentável, o que denota em processo determinístico não-linear. (Vide uma especificação no Capítulo 2). Conforme Baranger (2001) a estrutura determinística se auto-sustenta a partir da assinatura tempo-caos através da configuração

inicial no período de tempo em  $t$  que é dada nos parâmetros para a calibragem do modelo, ou seja, representa a sensibilidade às condições iniciais. Isto é, o efeito borboleta.

Ordem ao caos em sistemas determinísticos refere-se à sensibilidade às condições iniciais (ou seja, o efeito borboleta – "*butterfly effect*"), ela diz que qualquer alteração (por menor que seja) em um dos valores dos parâmetros das condições iniciais para um modelo de sistema determinístico não-linear é capaz de gerar diferentes padrões de comportamento dinâmico ao longo do tempo (SILVA, 2001b). Por exemplo, ao se ter um conjunto de condições iniciais para dois pontos no espaço de fase de duas forças (como se vê a seguir, a de agentes grafistas e de agentes fundamentalistas) que são extremamente próximas uma da outra, por sua vez, as trajetórias que seguem eventualmente divergem exponencialmente para longe uma da outra, ao longo do tempo. Se a sensibilidade às condições iniciais é alta, então pequenas alterações (por exemplo, na quantidade de casas decimais) denotam em condições bastante diferentes no futuro. O que refere-se ao desempenho na determinação do comportamento futuro, por sua vez, a sequência de estados ao longo do tempo do sistema. Portanto, qualquer pequena incerteza que existe nas condições iniciais do modelo vem a crescer de forma exponencial conforme a série se auto-sustenta, e, eventualmente, a incerteza se torna tão grande a ponto de que talvez aconteça de se perder todo o conhecimento útil da sequência de estados do sistema até algum momento. Consequentemente, mesmo ao conhecer a sequência de estados do sistema com precisão (ou seja, desde o estado de condições iniciais para até o estado corrente) não pode-se prever a trajetória que se segue, de forma autossustentada, para sempre. Pode-se fazer previsão por um tempo, mas o erro, a partir da incerteza, cresce exponencialmente. De maneira que as observações de valor mínimo e de valor máximo (dos eventos) podem trazer distribuição de valores extremos de modo que não aparentam ser consistentes com a sequência de estados precedentes. Por isso, a sequência de ordem para o caos que ocorre denota em imprevisibilidade de sistemas determinísticos, e, não obstante, há incerteza. Por exemplo, se a ocorrência da transição do estado no período de tempo em  $t$  de um sistema dinâmico não-linear para o estado no período de tempo em  $t + 1$  do sistema dinâmico não-linear que lhe sucede (bem como,  $t + 1$  é determinado por  $t$ ) for imprevisível, ou seja, um comportamento dinâmico imprevisível, por sua vez,

a ocorrência é caótica. Portanto, um sistema imprevisível não precisa ser aleatório. A sensibilidade para as condições iniciais representa o comportamento caótico de sistemas não-lineares que tornam-se não previsíveis. O que acontece na evolução ao longo do tempo de um sistema que é sensível para as condições iniciais (STEWART, 1997; BARANGER, 2001; WIGGINS, 2003). Caos não é anti-determinismo e só indica que a imprevisibilidade ocorre.

A teoria do caos traz os sistemas dinâmicos não-lineares que trazem sensibilidade para as condições iniciais como o objeto de modelagem. Pode-se introduzir o caos em modelos de mercado financeiro por meio da dinâmica especulativa de grafistas e fundamentalistas (DE-GRAUWE; DEWACHTER, 1992). Em que grafistas e fundamentalistas são as forças centrífugas e centrípetas, isto é, as forças para gerar-se o caos (SILVA; MATSUSHITA, 2017). Pode-se adicionar o modelo de Silva (2001b) em qualquer tipo de modelo de mercado financeiro fazendo-o caótico, ele foi empregue nos modelos tradicionais de macroeconomia de Dornbusch e de Obstfeld-Rogoff em um mercado para o preço do dólar em taxa de câmbio nominal, onde o caos se origina a partir da interação entre grafistas e fundamentalistas e sem ocorrer choques externos acontecem flutuações que se autossustentam nas taxas de câmbio (SILVA, 2000; SILVA, 2001a; SILVA, 2001b). Então, a hipótese de que ao se simular (originar) uma série temporal de dados de preços de um ativo financeiro (por meio de um modelo que traz um sistema determinístico não-linear) que surge da transição de ordem para caos, em que na variável há a possibilidade de ordem e caos existirem em conjunto ou de forma separada, por sua vez, em uma dinâmica caótica esta série temporal traz imprevisibilidade mas não é aleatória. Com isso, ao especificar-se uma extensão do modelo de Silva (2001b) e ao simular-se computacionalmente esta extensão pode-se gerar uma variável caótica (série-preço, ação) de ativo financeiro subjacente de aleatoriedade falsa. Em outras palavras, é uma classe de modelos de dinâmica não-linear com a capacidade de dar origem à séries séries temporais de dados dos preços de ativos financeiros cujos comportamentos replicam a padrões aleatórios das séries de preços reais. Originalmente, modelos para a simulação computacional em que agentes representativos (grafistas e fundamentalistas) interagem, de forma especulativa, em um sistema de mercado de ação, cujo comportamento baseia-se em equações.

O caos é outro tipo de aleatoriedade. Isto é, o caos é a aleatoriedade falsa. O caos é o aparente comportamento estocástico que ocorre em um sistema determinístico (STEWART, 1997). Para Taleb (2010) existe pouca diferença entre a aleatoriedade verdadeira onde há ausência de informação e a aleatoriedade falsa onde não há ausência de informação (ou seja, o caos determinístico), isto é, em um sistema genuinamente aleatório não existem propriedades previsíveis, por sua vez, em um sistema caótico existem propriedades inteiramente previsíveis, no entanto, difíceis de encontrar. À medida que para questões de ordem prática não há diferença entre a forma funcional da aleatoriedade verdadeira e a forma funcional da aleatoriedade falsa, não obstante, a diferença entre a aleatoriedade verdadeira e a aleatoriedade falsa é apenas conceitual (TALEB, 2010). Para Silva e Matsushita (2017) caos não denota a padrões como os padrões da aleatoriedade genuína (dados em desordem total) e atratores estranhos (caóticos) mostram ordem em uma série caótica. O atrator estranho tem estrutura fractal, em geral ocorrem mais em sistemas dinâmicos e em regimes que exibem caos. Conceitualmente, o caos é o fenômeno em que o comportamento futuro de um sistema é altamente sensível às condições iniciais do sistema no período de tempo em  $t$  e há um longo-prazo cada vez mais imprevisível conforme maior a sensibilidade. Portanto, a imprevisibilidade de séries temporais de dados de preços de ativos financeiros pode originar-se de sistemas determinísticos não-lineares, ou seja, pode-se ter uma dinâmica caótica imprevisível que não é aleatória (SILVA; MATSUSHITA, 2017). Assim, a sensibilidade que depende da configuração inicial do sistema é uma propriedade que define o caos na teoria de sistemas dinâmicos. Há chances de ocorrer intervalos nos dados de séries caóticas onde há regularidades, isto é, alternadamente ocorrem intervalos de periodicidade que seguem para intervalos de aperiodicidade, e, vice-versa. Em um sistema caótico não se pode fazer previsão de longo-prazo, e, não obstante, pode-se fazer previsão de curto-prazo, pois há uma estrutura determinística que origina os dados caóticos. E, para dados de séries caóticas com base na recíproca da entropia de Shannon (1948) pode-se mensurar intervalos onde há viabilidade de se fazer previsão. Então, como vai se verificar, a aleatoriedade falsa pode ser modelada através de processos estocásticos.

A teoria da informação traz como objeto de pesquisa a modelagem de imprevisibilidade de sistemas (SHANNON, 1948; JAYNES,

1957a; JAYNES, 1957b; MANDELBROT, 1997; ZELLNER; HIGH-FIELD, 1988; FRITTELLI, 2000; ZHOU; TONG, 2013; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). No caso, a imprevisibilidade de um sistema determinístico não-linear pode ser mensurada através da entropia de Shannon (1948). A entropia de Shannon (1948) traz uma medida de desordem nos dados de uma série temporal caótica. Isto é, a medida de entropia fornece um intervalo de previsão em que há o armazenamento e transmissão de informações na dinâmica determinística não-linear subjacente à série temporal caótica, que é de curto-prazo. Cabe destacar que as análises de imprevisibilidade de sistemas dinâmicos estocásticos também revelam horizontes de previsão que são de curto-prazo. Não como consequência desta perspectiva, mas no emprego, ao contrário de um sistema estocástico em que o comportamento dinâmico de um preço é imprevisível a partir de informação incompleta sobre alterações que ocorrem no preço, em um sistema determinístico não-linear o comportamento dinâmico de um preço subjacente é imprevisível a partir da sensibilidade às condições iniciais que se torna incompreensível para algumas trajetórias. Considerado isso, ao fim da Seção 1.3 complementa-se esta teoria.

A teoria de fractais refere-se a determinismo e aleatoriedade em conjunto (PETTERS, 1994). Ordem e caos, determinismo e aleatoriedade, em coexistência (PETTERS, 1994). Ou seja, em meta-perspectiva. Um fractal traz a propriedade de auto-similaridade, isto é, a trajetória de um preço aparenta estar em desordem em intervalos curtos, mas daí em intervalos longos aparenta ter padrões ou tendências que não são de desordem (PETTERS, 1994; SCHMIDT, 2005). Em outras palavras, um objeto no espaço que tem um número cada vez maior de peças de tamanho cada vez menores (LARRY; DANIELA, 2000; SCHMIDT, 2005). É auto-similar, ou seja, as peças menores são cópias reduzidas das peças maiores (LARRY; DANIELA, 2000). Mandelbrot e Ness (1968) ao investigarem a dinâmica de preços a partir do movimento *browniano* trazem o movimento *browniano* fracional (ou fractal, isto é, a forma que exibe auto-similaridade através de diferentes escalas) para denotar o padrão oculto no movimento *browniano* que às vezes é observável e, assim, descreve um padrão dinâmico bem definido dentro de seu espaço de fase. A teoria traz a propriedade de invariância de escala, ou seja, não há uma escala característica, isto é, na transição de fase do estado corrente de um sistema para a sequência

de outros estados que lhe sucedem, em que, por sua vez, a transição se avizinha de um ponto crítico, então, podem ocorrer eventos extremo com diferentes escalas de tamanho nos estados que lhe sucedem, e, portanto, pode-se procurar uma teoria de invariância de escala que descreva o fenômeno para esta transição e intervalo de estados. Um fractal determinístico traz uma trajetória que se repete em escala e apresenta uma semelhança geométrica. Enquanto um fractal aleatório (auto-afim) origina-se seguindo um padrão estocástico. Em comum, eles têm a dimensão, que, por sua vez, denota o que um processo tem de determinístico ou de estocástico (PETTERS, 1994). Por exemplo, se ordem e caos, determinismo e aleatoriedade, se inter-relacionam, daí o sistema de um mercado que traz uma aleatoriedade a nível local e ao mesmo tempo um determinismo a nível global ao longo do tempo, o que, por sua vez, caracteriza uma estrutura estável, consequentemente a sequência de ausência ou presença de nova informação que altera o comportamento dos agentes ao longo do tempo no mercado se reflete em uma sequência de informações de forma determinística, isto é, uma trajetória (PETTERS, 1994). Por hipótese, se a escala do mercado é determinada pelo tempo daí um fractal tem a aleatoriedade a nível local e o determinismo a nível global. Dimensão fractal revela se um processo é algo entre determinístico ou aleatório (MANDELBROT, 2007). Mandelbrot e Ness (1968) destaca que as séries temporais econômicas exibem ciclos típicos de todas as ordens de magnitude, e que, por sua vez, os ciclos de curto-prazo mais lentos têm períodos de duração comparáveis ao tamanho total da amostra, então, de longo-prazo, não obstante, que os espectros de tais amostras não mostram um período puro que é acentuado, mas uma densidade espectral com um pico que é acentuado perto de frequências próximas do inverso do tamanho da amostra.

A hipótese de mercado fractal (HMF) diz que um mercado se estabiliza sozinho quando há investidores com horizontes temporais diferentes, por exemplos, agentes que atuam no curto-prazo e agentes que atuam no longo-prazo, não obstante, eles compartilham do mesmo risco quando atual em igual escala de tempo (PETTERS, 1994; MANDELBROT; HUDSON, 2006; MANDELBROT, 2007). Sob HMF, o investidor de curto-prazo tem um intervalo com maior aleatoriedade por ser pequeno para mensurar informações disponíveis, em relação ao investidor de longo-prazo. (Modelagem que, em conjunto com a

abordagem de fórmulas de log-periodicidade, traz avanços em "*tentativas de descrever o preço de ações por uma modelagem caótica determinística*" (ARAÚJO, 1994, p. 151)).

A teoria de sistemas complexos traz um conjunto de atributos para descrever a dinâmica de um sistema ao longo do tempo (SCHINCKUS, 2013). Propriedades válidas para diferentes áreas do conhecimento como, por exemplo, Física, Biologia, e Ciências Sociais. Para uma dinâmica determinística o comportamento coletivo emergente é a propriedade a nível global de um sistema que se origina em interações de componentes individuais do sistema, dentro de seu espaço de fase. O comportamento coletivo emergente não é explicável através do comportamento de componentes individuais do sistema ou através do possível somatório de comportamento de (ou dos) componentes individuais que atuam no sistema. A nível local. Se um componente individual é um agente capaz de atingir uma meta ou de efetuar um resultado ao operar ou interagir com outros agentes em um sistema, por exemplo, o sistema de um mercado. Então, a partir das interações dos agentes, por sua vez, inter-relacionados, no sistema, então emerge a complexidade (SCHINCKUS, 2013). Não obstante, em oposição às características individuais dos agentes em si. Por definição, se um sistema concentra uma elevada quantidade de agentes que interagem, sem controle central, cujo comportamento coletivo emergente (a nível global) é modelado ou descrito em termos de dinâmica, processamento de informação, e (ou) adaptação, é um sistema complexo (SORNETTE, 2003; SCHINCKUS, 2013; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Por comparação, o sistema é mais complexo do que se for modelado ou descrito a partir de uma possível compreensão do somatório de comportamentos dos componentes individuais do sistema.

O comportamento coletivo emergente é associável com fenômenos complexos, por exemplo, os fenômenos críticos (SORNETTE, 2003; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Em sistemas dinâmicos os fenômenos críticos podem acontecer (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). Em geral, fenômenos críticos acontecem em sistemas que se encontram fora de equilíbrio (GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004). Estes fenômenos críticos dependem de pontos-críticos. Em particular, o ponto-crítico representa para a trajetória de um sistema dinâmico uma mudança de direção, dentro de seu espaço de fase. Por exemplo, o caso de uma diferente estrutura, dentro de seu espaço de fase, por sua vez,

após o ponto-crítico. Ou seja, o ponto-crítico denota uma tendência para o comportamento dinâmico em uma possível transição de estado que se avizinha, dentro de seu espaço de fase. Sob criticalidade um pequeno choque pode ter um grande impacto. Se em uma transição de estado, o ponto-crítico atinge o sistema, então tem-se o estado-crítico corrente. No estado-crítico, uma força mínima pode ter efeitos enormes sobre eventos consequentes, ou, vice-versa. Por sua vez, os fenômenos em estado-crítico não possuem escala típica no tempo (leis de escala) (GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004). Enquanto, auto-organização refere-se para a transição de um estado do sistema para outro estado do sistema que lhe sucede que evolui de forma natural sem depender de condição inicial. Os atratores representam o processo de auto-organização dos sistemas (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). Por sua vez, sob criticalidade auto-organizada o ponto-crítico é atingido espontaneamente, por meio do comportamento dinâmico do sistema (BAK; TANG; WIESENFELD, 1987). Liberdade individual não foge da criticalidade auto-organizada, pois há padrões de interações entre grupos, por sua vez o comportamento de componentes individuais não é previsível (GLERIA; SILVA; MATSUSHITA, 2004). (CARVALHO, 1994, p. 148). Dentro desta perspectiva, conforme Schinckus (2013) a econofísica baseada em agentes traz um campo de análise micro-orientada de sistemas complexos cujo conjunto de modelos traz uma propriedade razoável de processo contínuo de aprendizagem para os agentes heterogêneos que resulta em uma situação de complexidade a qual obriga os agentes a reavaliar e atualizar o seu comportamento de acordo com o seu desempenho, e, com isso, não há um equilíbrio final.

Na segunda linha, o campo de pesquisas sobre periodicidade parte da hipótese de que a imprevisibilidade do comportamento dinâmico de séries temporais de preços de ativos financeiros pode ser investigada por meio de fórmulas de log-periodicidade. Hipótese de periodicidade com fortes bases em hierarquia de escala de tempo (ponto de máximo local) e também em pontos-críticos. A idéia é a de que o sistema tenha como tendência tornar-se periódico na véspera de um evento do tipo extremo (*crash*) por meio da soma do conjunto de imitação cooperativa dos agentes que atuam em um mercado. A hipótese de hierarquia de escala de tempo origina-se da interação entre os comportamentos coletivos de agentes, bem como, o retorno de expectativas passadas do sistema (SORNETTE, 2003). Denomina-se

intervalo-crítico o espaço vizinho ao ponto-crítico. Pode-se modelar o comportamento coletivo emergente de agentes em um sistema dinâmico e descrever algum *crash* (evento então determinístico mas que é aparentemente aleatório) que pode ocorrer (SORNETTE, 2003). Por sua vez, o método de harmônicos serve para ajustar bolhas (*bull market*) e antibolhas (*bear markets*) nas fórmulas de log-periodicidade (SORNETTE, 2003; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Por exemplo, se a expansão da imitação cooperativa a nível local de agentes que se converte em cooperação a nível global, isto é, *positive feedback*, do tipo *bull market* em um mercado cujo sistema traz uma trajetória temporal longa em que os parâmetros evoluem de forma lenta e origina uma bolha (SORNETTE, 2003), então o comportamento do sistema torna-se vulnerável para as perturbações que partem das propriedades do sistema determinístico e são relacionadas com o preço. A escala de tempo até o limite do intervalo-crítico reflete o acúmulo de correlações a partir do *positive feedback* que evoluiu ao longo do tempo (SORNETTE, 2003). Com o acúmulo de estresse (SILVA; MATSUSHITA, 2017), por fim, se dá a transição para o ponto-crítico que denota o estado-crítico do sistema que representa o fato de inúmeros agentes ofertarem em conjunto a mesma ordem de venda no mercado. Assim, essa imitação torna esse comportamento dinâmico previsível (SILVA; MATSUSHITA, 2017) em tal sequência de estados que precedem o *crash*. Portanto, nas vésperas do *crash* verifica-se a hipótese de periodicidade. Tal comportamento dinâmico como um todo pode representar o risco sistêmico (SORNETTE, 2003). Na perspectiva, ao contrário de *positive feedback* ocorre o comportamento de *negative feedback* (SILVA; MATSUSHITA, 2017). (Como limitação do campo, Sornette (2003) não desconsidera as críticas para o excesso de parametrização para viabilizar este tipo de modelagem (FERNANDES; GLEISER, 1994, p. 238). (No caso de trajetórias de irregularidades, isto é, "...irregularidades no processo econômico real, são elas passíveis de correção por parte das autoridades econômicas, como se assume no caso keynesiano?" (ARAÚJO, 1994, p. 151). Taleb (2010) (vide notas de rodapé) sustenta que esta classe de modelos de log-periodicidade é superior, em termos de mensuração, aos modelos econômicos tradicionais como os macroeconômicos).

Um sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira baseado em agentes grafistas e fundamentalistas que

interagem em um mercado, cujo comportamento coletivo emergente se expressa em uma variável que se auto-sustenta ao longo do tempo, pode ser testado por meio da hipótese de mercados fractais. No caso em que grafistas atuam no curto-prazo e fundamentalistas atuam no longo-prazo. É de suma importância para a pesquisa teórica e empírica em finanças a implementação de extensões de modelos como os de De-Grauwe e Dewachter (1992), Silva (2000), Silva (2001a) e Silva (2001b) capazes de gerar soluções caóticas e com a capacidade de dar origem a séries temporais caóticas que replicam os padrões de séries temporais de aleatoriedade do tipo II. Pode-se gerar séries de preços de aleatoriedade falsa que trazem eventos improváveis, por exemplo, eventos extremos falsos. Então, por meio de modelagem financeira que analise a série temporal caótica como se fosse aleatória, tem-se a finalidade de aplicações práticas que consistem na investigação do ajuste de modelos para análise de mercados financeiros (por exemplo, modelos para a gestão de portfólio) para com este tipo de dados. O que é uma alternativa para a modelagem convencional de dados.

### *O problema de pesquisa desta dissertação*

Explica-se o problema de investigação de um processo determinístico como se fosse um processo estocástico sob hipóteses de aleatoriedade e por intermédio de um modelo para análise de mercados financeiros em quatro etapas:

1. Um modelo baseado em agentes que parte da especificação de um sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa de agentes grafistas e fundamentalistas que interagem em um mercado, de forma a estender o modelo de Silva (2001b). A simulação computacional deste modelo baseado em agentes, cujo número fixo de equações definidas especifica a estrutura de um sistema determinístico não-linear e caracteriza uma dinâmica determinística. Isto é, uma autossustentável sequência de transições de estados (conforme iterações) que sucedem ao estado de origem (de condições iniciais) do sistema. O que, por sua vez, descreve a evolução do comportamento coletivo (a nível global) desse sistema determinístico de mercado, dentro de seu espaço de fase. Com isso, gera uma variável caótica (série-preço,

ação) de ativo financeiro subjacente. Tal variável caótica deve replicar os padrões estatísticos de uma variável aleatória de mercado financeiro que imita. Por isso pode trazer a regularidade de eventos extremos. Por si só, a ocorrência do *fenômeno* eventos extremos constitui um objeto base desta investigação. A cada iteração (na simulação), ao longo do tempo, então o montante de informação disponível não redundante cuja densidade é processada pelo mercado determinístico se expressa no comportamento dinâmico da variável resultante. Assim, a variável caótica de aparente aleatoriedade pode ser contextualizada e analisada a partir de algumas destas seguintes características seguintes (isso não quer dizer que todas elas serão utilizadas durante a pesquisa):

- a) Agentes: Agentes grafistas e fundamentalistas que participam no mercado do ativo financeiro. No mercado há um conjunto de indivíduos que exibem a capacidade de alcançar um objetivo ou efetuar um resultado;
- b) Modelo baseado em agentes: Para a simulação computacional em que os componentes individuais do sistema determinístico de dinâmica financeira especulativa são representados por agentes grafistas e fundamentalistas que interagem explicitamente no mercado subjacente. Interações que podem se refletir, por exemplo, no preço do ativo financeiro e no seu volume de negociação;
- c) Mercado: Representa a estrutura do sistema, por sua vez, expresso através do modelo baseado em agentes, em que o comportamento do sistema é baseado em equações e os agentes são representados explicitamente. Essencialmente, reflete os termos de interação de oferta e demanda pelo ativo financeiro;
- d) Modelagem determinística: No caso, para revelar o padrão ordem-caos no conjunto de medidas sequenciais que indica a transição de estados do sistema, isto é, a trajetória ao longo do tempo (ou iterações) dentro do espaço de fase. Também pode servir para complementar processos estocásticos empregues em modelos de portfólio;

- e) Sensibilidade às condições iniciais: O comportamento dinâmico de ordem para o caos, ou seja, intervalos de regularidades para imprevisibilidade;
- f) Expoente de Lyapunov: Uma medida que pode descrever a taxa na qual as duas trajetórias do sistema dinâmico são separadas entre si por unidade de tempo, dentro do espaço de fase. Um indicativo de sensibilidade do sistema às condições iniciais;
- g) Caos como aleatoriedade falsa: Na perspectiva desta dissertação. Utiliza-se a série temporal caótica como série temporal aleatória, uma vez que deve ser originada por um sistema determinístico financeiro não-linear. De outra maneira, uma variável caótica originada a partir da interação entre agentes que ocorre em um sistema de mercado real pode revelar interessantes propriedades sobre a trajetória de seu comportamento determinístico (por exemplo, algo sobre o comportamento coletivo emergente), por sua vez, o que pode servir para uma eventual comparação com a trajetória de seu comportamento estocástico;
- h) Efeito *feedback*: Tendência de longo-prazo e auto-correlação (positivo), por sua vez, a partir da interação dos agentes no mercado de forma não-linear e interdependente (negativo);
- i) Atratores: Por exemplo, os atratores estranhos. Então diferentes do que se tem ao modelar através da bacia de atração *gaussiana*;
- j) Auto-similaridade: Ao longo da trajetória ocorrem características que são parecidas, por exemplo, estatísticas similares;
- k) Dimensão fractal: Revela se o processo é algo entre determinístico ou aleatório;
- l) Fractal determinístico: Verificar se uma trajetória que se repete em escala apresenta uma semelhança geométrica;
- m) Retrato de fase: Refere-se a um resumo de cada trajetória para cada condição inicial concebível, dentro do espaço de fase. Em geral, é plotado em um gráfico ao longo de

- eixos das variáveis de estado relevantes, e pode descrever trajetórias estáveis e atratores;
- n) Auto-organização: A possível transição de estados no caso de um sistema determinístico, que, não mais dependem de condição inicial e então evolui de forma natural para outra trajetória;
  - o) Hipótese de mercado fractal: O mercado se auto-organiza quando os agentes, por exemplo, grafistas e fundamentalistas têm horizontes temporais diferentes para especular, ou seja, um no curto-prazo e outro no longo-prazo. Se estiverem no mesmo horizonte de tempo daí compactuam o mesmo risco;
  - p) Mercado escalável no tempo: Fractal com aleatoriedade a nível local e com determinismo a nível global;
  - q) Fenômenos críticos: Fenômenos que ocorrem fora do equilíbrio. Dependem de pontos-críticos;
  - r) Ponto-crítico: Para a trajetória do sistema dinâmico, o ponto-crítico indica uma mudança de direção dentro de seu espaço de fase;
  - s) Criticalidade: Intervalo que precede o estado-crítico;
  - t) Criticalidade auto-organizada: O ponto-crítico é atingido espontaneamente, por meio do comportamento dinâmico do sistema;
  - u) Estado-critico: Uma força mínima no sistema pode ter efeitos grandes na dinâmica, por exemplo, eventos extremos;
  - v) Invariância de escala: A transição de fase do estado corrente do sistema para a sequência de outros estados que lhe sucedem. Por exemplo, se a trajetória que se avizinha é a de um ponto crítico, então, podem ocorrer eventos extremo com diferentes escalas de tamanho nos estados que vão suceder;
  - w) Modelagem para estados ainda não característicos do sistema após um ponto-crítico: Se houver o caso do sistema trazer uma estrutura de sequência de transição de estados

- que se avizinha de um ponto-crítico, cujo fenômeno crítico traz uma estrutura peculiar não conhecida para ser modelada;
- x) Ponto de inflexão: Alguma pequena sensibilidade, por exemplo, para as condições iniciais, que possa fazer alterar dramaticamente uma trajetória;
  - y) Eventos extremos: O sistema traz a capacidade de comportamento emergente onde ocorre o *fenômeno* eventos extremos;
  - z) Equilíbrio de mercado: Pontos em que as forças econômicas são estáveis, por exemplo, quando a curva de preços atende a curva de demanda.
2. A análise de estatísticas descritivas para a finalidade de modelar a variável caótica como se fosse variável aleatória. Não obstante, é recorrente modelar este tipo de variáveis aleatórias com modelos de mercado de financeiro.
  3. Apresentar o modelo de mercado financeiro para a gestão de fundos de investimentos em portfólio de Geman, Geman e Taleb (2015) para modelar esta variável caótica.
  4. Investigar esta variável caótica com o modelo de mercado financeiro de Geman, Geman e Taleb (2015). O que permite avaliar o desempenho deste modelo para com esta variável caótica. Bem como, revelar as propriedades do sistema determinístico não-linear que representa o mercado que origina esta variável caótica, a partir de leis de potência.

Se o resultado da simulação do modelo caótico cuja dinâmica determinística não-linear origina uma variável que replica os padrões de variáveis aleatórias financeiras acontece. Se necessário, justifica-se que a variável deve ser modelada com leis de potência. Isto é, apenas se violar à teoria normal padrão. De maneira que se acontece o *fenômeno* eventos extremos, isto é, cisnes negros, eles são cisnes negros falsos por serem de aleatoriedade falsa. Então, a Seção 1.2 justifica a modelagem de eventos extremos em finanças e exhibe uma breve formalização de leis de potência.

Destaca-se o fato de que este tipo de análise de sistemas dinâmicos de mercados, por meio de sistemas complexos, serve como um acessório para os modelos de gestão de portfólios por trazer para a modelagem de gestão de portfólios um conhecimento detalhado, às vezes esquecido, para cada um dos sistemas dinâmicos determinísticos de cada um dos ativos financeiros que compõem um portfólio.

## 1.2 Os cisnes negros em finanças

Sabe-se há mais de 40 anos que as alterações de preços são de cauda pesada, isto é, com probabilidade de eventos extremos, por sua vez, muito maior do que pode se esperar com uma distribuição normal padrão (MANDELROT, 1963; FARMER et al., 2004; TALEB, 2010). A importância de leis de potência para o risco em finanças é de que grandes flutuações de preços são muito mais comuns do que o esperado (FARMER et al., 2004). Para mensurar cauda pesada, não exclusivamente para dados de finanças, existem inúmeras teorias sobre leis de potência (LARRY; DANIELA, 2000; FARMER et al., 2004; CHARRAS-GARRIDO; LEZAUD, 2013; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Antes de uma definição de leis de potência apresenta-se onde vai se usar. No caso, a série temporal caótica de preço de ativo financeiro descreve o conjunto de medidas sequenciais (conforme iterações que ocorrem no respectivo preço cujos incrementos de dados numéricos são tomados em ordem a partir das condições iniciais em intervalos regulares de pontos) que indica a transição de estados do sistema determinístico não-linear, isto é, o seu comportamento ao longo do tempo, dentro de seu espaço de fase. Ou seja, uma variável aleatória caótica a ser gerada pela simulação computacional da extensão do modelo de Silva (2001b), cujo comportamento dinâmico determinístico refere-se à transição de um estado do sistema determinístico para outro estado do sistema determinístico que lhe sucede. Após uma trajetória (isto é, sequência de estados) que se avizinha de um ponto crítico podem ocorrer o fenômeno eventos extremos (ou seja, cisnes negros) dentro de seu espaço de fase, o que justifica utilizar uma teoria de leis de potência para a investigação. Como é aleatoriedade falsa que imita a aleatoriedade verdadeira, então pode-se dizer que são cisnes negros falsos. A seguir, define-se cisne

negro.

A lógica de cisne negro (bem como, a análise de inocência ou fragilidade para cisnes negros) torna-se de uso crescente em finanças em paralelo ao lançamento do livro *The Black Swan*, do autor Libanês Nassim Taleb, em 2007. Obra que se fez presente em uma lista do jornal norte-americano New York Times como *best-seller* da literatura contemporânea. É *praxe* partir do contexto da origem deste conceito para explicar as propriedades de sua definição e entender cisne negro como uma metáfora para evento extremo. Contexto que remonta à época de 1697 da Europa Ocidental e da Austrália Ocidental. Antes de europeus ocidentais (exploradores holandeses) visitarem a Austrália em 1697, a cultura ocidental europeia trazia uma crença limitante de que existia apenas um único tipo de cisne com a cor branca. A crença baseava-se em um ditado associado ao poeta romano Juvenal "*rara avis in terris nigroque simillima cygno*" que presumia não existir cisne negro, e, no contexto, o ditado era empregado como uma declaração para impossibilidades (TALEB, 2008). Porque só os cisnes brancos eram vistos pelos europeus ocidentais em suas visitas ao redor do mundo. Mas, em 1697 chega à Europa Ocidental a informação, da visita, de que foi visto um tipo diferente de cisne que é negro e vive na Austrália. O ditado foi redescoberto. A visita trouxe um evento altamente improvável com um impacto extremo sobre uma crença limitante da cultura ocidental europeia, de então. O que faz perceber que existe a possibilidade de ocorrer alguma *exceção* totalmente oculta no que se conhece. Isto é, o improvável ocorre. No entanto, o cisne negro não é uma ave. Por definição, o cisne negro é um evento. Um evento raro. Um evento desconhecido. Um evento com três propriedades: (1) é altamente improvável, (2) traz um impacto extremo, e (3) depois de acontecer é que busca-se uma explicação para que ele se pareça mais provável e menos aleatório, do que era antes (isto é, previsibilidade em retrospectiva) (TALEB, 2010). Como contraexemplo, para os nativos *australianos* em 1697 a visualização de um cisne negro deveria ser completamente recorrente e previsível, consequentemente por meio da não satisfação das três propriedades da definição dada, no tópico frasal, acima: o que os nativos *australianos* visualizavam não era cisne negro, mas, cisne branco. Cisne branco também não é ave, mas um evento que se desvia pouco ou que se desvia muito do que é esperado. Não menos importante, essa visita de europeus em 1697 à Austrália foi

um cisne negro sobre os nativos *australianos*. De fato, a aleatoriedade depende da perspectiva do observador. Portanto, o impacto altamente improvável de um evento sobre algum observador pode ser de total irrelevância para outro observador.

A ocorrência de fenômenos como *Black Monday* (evento extremo no mercado de ações, através da quebra, da bolsa de Nova York) nos Estados Unidos em 1987, bolha da internet (evento extremo no respectivo mercado) nos Estados Unidos em 2000 e as crises financeiras nos Estados Unidos e Global em 2008 constituem exemplos de cisnes negros em finanças. Porque, em comum eles foram raros, ficaram para além das expectativas sob a hipótese de normalidade, e, resultaram em forte impacto sobre os mercados financeiros e riqueza dos investidores. Eventos extremos são característicos de sistemas sociais denominados complexos (SORNETTE, 2003). Como em finanças e preços. Para questões práticas, quando um cisne negro se torna modelável então ele muda de tonalidade e torna-se um cisne cinzento. Ou seja, revelam-se as propriedades do cisne negro e, portanto, se tem o conhecimento de consequências que ele traz. Por exemplo, se um observador está ciente de que um mercado de ações vai quebrar, como ocorreu no caso *Black Monday*, então não é negra a tonalidade do cisne (TALEB, 2010). Em cisne negro tem-se o caso da incerteza Knightiana que é, por natureza, incomputável (imensurável e não sujeita à probabilidades), enquanto em cisne cinzento tem-se o caso de risco Knightiano que é, então, computável (KNIGHT, 1921; TALEB, 2010).

A perspectiva de análise de inocência para cisnes cinzentos e para cisnes negros nos preços é relevante para finanças porque associa-se a situações de risco e de incerteza. Por exemplo, situações de risco como nos casos do impacto da extinção de instituições financeiras (ou espécies) nos preços de ativos financeiros, impactos de quedas inesperadas nos preços de ativos financeiros, impactos de subidas inesperadas nos preços de ativos financeiros, consequências de crises políticas que levem a forte volatilidade nos preços de ativos financeiros, consequências de crises financeiras nos preços de ativos financeiros, consequências de crises sociais nos preços de ativos financeiros, consequências de atos terroristas nos preços de ativos financeiros, e *drawdowns* (isto é, uma medida do pico até o piso de uma queda do preço ou retorno). Tais eventos que também denominam-se de eventos *unknown unknowns* (desconhecido desconhecidos) e eventos de cauda pesada, são funda-

mentais para a investigação por meio de modelos de mercado financeiro que tratem da aleatoriedade do tipo II, por exemplo leis de potência, uma vez que ao ocorrerem, em geral, não são estimáveis sob o uso da hipótese de distribuição normal padrão para os preços dos ativos financeiros (MANDELBROT; HUDSON, 2006; TALEB, 2010). *Par excellence*, estimações com hipótese de distribuição normal padrão vão, necessariamente, ocultar a possibilidade de alguns desses exemplos. O que justifica para análise de cisnes cinzentos e de cisnes negros, usar leis de potência. A análise de cisnes cinzentos ou de cisnes negros não é trivial devido à escassez ou a raridade do acontecimento destes eventos (que se encontram nas caudas das distribuições), porque há poucas informações sobre os mesmos. Cisnes cinzentos são bastante escassos e os cisnes negros são extremamente raros, mas não a ponto de extinção. Sabe-se, ainda, que cisnes negros podem surgir quando se ignoram fontes de aleatoriedade. No entanto, fontes de aleatoriedade falsa podem ser geradas por meio de modelos caóticos, de forma a gerar falsos cisnes. Estes cisnes podem ser adicionados à dados reais (por exemplo, por meio da implementação do modelo de Silva (2001b) para esta finalidade). Também podem ser adicionados à modelos de mercado financeiro, como se faz através da extensão do modelo de Silva (2001b) por meio da geração de série de preço caótica que imita série de preço aleatória. Então justifica-se uma análise para esses dados.

Se os dados de alguma série temporal financeira, por sua vez, de aleatoriedade falsa, em um processo estocástico no tempo consistem de alguns valores grandes, muitos valores médios e uma enorme quantidade de valores pequenos. Por conta da violação da distribuição normal padrão, utiliza-se de leis de potência. Não só em finanças ocorre a violação da distribuição normal padrão. Para Larry e Daniela (2000), grande parte da natureza não segue a distribuição normal padrão, por sua vez, ela consiste de objetos com um número cada vez maior de peças sempre menores. Então não há um único número como uma média que caracterize de forma adequada os dados. Se a função densidade de probabilidade (PDF) não é *gaussiana*, mas uma linha reta do  $\log[PDF(va)]$  "versus"  $\log(va)$  com a forma  $Pva^{-p}$  daí é uma lei de potência. Ou de outra maneira. Leis de potência (ou leis de escala) são as formas que espelham a maioria das regularidades que acontecem em economia e em finanças, por sua vez, através da relação  $R = kVA^{-\alpha}$ , em que  $R$  e  $VA$  são as variáveis de interesse e  $\alpha$  é o expoente de

lei de potência e  $k$  é uma constante (em geral, não muito importante) (MANDELBROT; TALEB, 2007b; IBRAGIMOV; WALDEN, 2007; GABAIX, 2008; IBRAGIMOV; JOHAN, 2008; TALEB, 2010; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Por exemplo, ocorrem leis de escala em macroeconomia, distribuição de renda, distribuição de riqueza, tamanho de firmas, tamanhos de cidades, teoria quantitativa da moeda, retornos de ativos financeiros, volume de negociações (MANDELBROT; TALEB, 2007b; GABAIX, 2008; TALEB, 2010; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Outro exemplo para lei de escala são os sistemas determinísticos não-lineares de *Crypto*-moedas que podem descrever um mercado fractal com interessantes regularidades consistentes com sistemas complexos, a partir da interação entre agentes, não obstante, um mercado com origem em princípios anarco-capitalistas e de ética libertária conforme escola de pensamento da economia Austríaca, o que, por sua vez, pode contrastar com o resultado de liberdade individual em comportamento coletivo emergente. Considerados os exemplos de leis de potência. Por intermédio da modelagem da estratégia de portfólio de *barbell* pode-se fazer uma análise de leis de potência para este tipo de dados de aleatoriedade falsa originada pelo modelo caótico. Procedimento cujos resultados não são recorrentes em literatura de finanças.

### 1.3 Estratégia de portfólio de *barbell*

Por definição, portfólio descreve a guarda de um conjunto de elementos, por exemplo, a de investimentos em ativos financeiros. No exemplo, por vezes, ocorre o emprego de teorias (MARKOWITZ, 1952; IBRAGIMOV; WALDEN, 2007; IBRAGIMOV; JOHAN, 2008; TALEB, 2010; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Tais teorias de portfólios, em uma de suas agendas de pesquisas, podem tentar explicar o comportamento de ativos financeiros ao longo do tempo, o que, por sua vez, de fato, depende dos mercados que lhe são subjacentes. Daí, se o mercado descrito por uma série temporal de preço de ativo financeiro é um sistema complexo, então o conjunto de mercados descritos por séries temporais de preços de ativos financeiros pode ser um conjunto de sistemas complexos (ou complicados). Dentro desta perspectiva, difícil tarefa é a pretensão da classe de modelos para a gestão de portfólio de ativos financeiros que trazem a modelagem de sistemas complexos

em termos de riscos e retornos dos ativos financeiros. Portanto, um esquema de diversificação de portfólio (MARKOWITZ, 1952) pode ser um esquema de diversificação de sistemas complexos. Em geral, no emprego da teoria moderno de portfólio não se consideram todas as propriedades que foram descritas de  $a$  até  $z$  no problema de pesquisa, não obstante, *apenas* as que podem surgir na prática (considerando restrições reais) de modelagem de portfólio. Isto é, propriedades que podem fazer falta em modelos de gestão de portfólio. Entretanto, a estratégia de portfólio de *barbell* de Geman, Geman e Taleb (2015) serve de modelo para a gestão de fundos de investimentos em portfólio e considera um destes aspectos (de forma implícita e relevante), como veremos ao fim desta Seção 1.3. Em síntese, é um portfólio separado em dois fundos, um grande fundo onde busca-se investimentos em mercados cujo comportamento seja de pouco ou nenhum risco (se isso existir) (isto é, sem perspectivas de eventos de cauda, extremos) e outro pequeno fundo cujo comportamento seja de auto risco (isto é, com perspectivas de eventos de cauda, extremos) para apostas (por exemplo, de maneira que dê para avaliar um sistema complexo de apenas um mercado). Considerada esta potencialidade, o que se faz nesta pesquisa é utilizar apenas uma parte desta estratégia de maneira que dê para avaliar apenas um mercado, por sua vez, utiliza-se o mercado originado pela especificação da extensão do modelo de Silva (2001b) descrito no Capítulo 2.

A definição da estratégia de *barbell* é de que enquanto adota-se uma atitude defensiva, adota-se também outra atitude agressiva, por sua vez, em termos de percentagem (peso) para cada atitude. Isto é, adota-se uma atitude defensiva por meio da proteção da maioria dos recursos de todas as fontes de incerteza (por exemplo, 80 por cento ou 90 por cento) enquanto adota-se outra atitude extremamente ofensiva para alocar-se a parte restante dos recursos em estratégias de alto risco para o portfólio (TALEB, 2010). Por exemplo, os investimentos na parte segura em títulos livres de risco e na parte insegura em apostas de alto risco em contratos que tragam possibilidades de grandes retornos (isto é, a exposição e busca de eventos extremos, os cisnes negros e cisnes cinzentos). (Máxima certeza e baixo risco de um lado e máxima incerteza e risco controlado, até o limite de perda, sobre o outro lado). É uma intuição em um modelo de probabilidade. De maneira que separa-se o fundo de investimentos em duas partes diferentes para

então obter-se uma posição oposta de cada lado de uma distribuição de probabilidade de um portfólio. Então, define-se *barbell* como a mistura de duas propriedades extremas de um portfólio de maneira que a combinação linear de máximo conservadorismo para um fração  $\omega$  do portfólio, com  $\omega \in (0, 1)$  de um lado, por sua vez, do outro lado, uma postura extremamente agressiva  $(1 - \omega)$ . Isto é, o teorema de separação de dois fundos (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Na prática, é a ideia da relação entre o lucro esperado para o caso de pior retorno ajustado dinamicamente para evitar a ruína (ou critério de Kelly) (KELLY, 1956; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

Para a especificação do modelo, como estratégia defensiva para a mensuração de riscos em potencial, o risco de cauda esquerda é a restrição central do portfólio. Para isso, as premissas fundamentais para a especificação deste modelo são duas restrições na cauda esquerda. Uma restrição de risco que incide sobre a perda máxima que pode ser gerada e que pode ser suportada durante um determinado período de tempo e a um determinado nível de confiança em que se define a partir da posição de Valor em Risco (*VaR*) do agente-operador. Se expressa por meio de um valor *threshold* de perda  $\mathbf{K}$ . O que é uma estatística sobre a escala da distribuição desejada. Portanto, tal restrição é a probabilidade de cauda. Isto é, a probabilidade de perda do portfólio sobre dado horizonte de tempo que excede o valor *threshold* de perda  $\mathbf{K}$ . Enquanto a outra restrição de risco é a perda esperada condicional que excede o *VaR*, isto é, o Valor em Risco Condicional (*CVaR*). De maneira que *VaR* e *CVaR* são métodos que podem ser montados de forma robusta e sem depender de supostos paramétricos. Uma vez que as restrições de cauda esquerda são para o lado esquerdo da distribuição, por sua vez, com o objetivo de limitar os erros e deixar as recompensas em aberto. Para a cauda direita da distribuição, tem-se outra restrição para o desempenho global ou então para o crescimento do portfólio (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

No modelo, em geral, considera-se a distribuição de probabilidade conjunta de ativos financeiros que compõem o portfólio. Se a escolha do vetor de pesos dos ativos que compõem o portfólio permite encontrar um desempenho ótimo de média-variância, então pode-se modelar o retorno total do portfólio através de uma série que representa o retorno total do portfólio. O que, por sua vez, permite derivar o formato da distribuição conjunta desejada do portfólio. E, por fim,

o desempenho do retorno total do portfólio é avaliável ao longo do tempo. O que torna a análise de componentes individuais do portfólio de relevância limitada. *Mas na perspectiva desta pesquisa de dissertação é relevante para a descrição de um único mercado com este modelo.* Não obstante, iguala-se a distribuição do retorno do portfólio como uma extensão de máxima entropia das restrições expressas por expectativas estatísticas do comportamento de cauda esquerda, bem como para expectativa de retorno ou log-retorno. Assumir o retorno do portfólio com distribuição normal padrão equivale a assumir que a entropia do portfólio é maximizada (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). O que justifica modelar as duas partes da distribuição de probabilidade do portfólio como uma extensão de máxima entropia (Maxent), com base na teoria da informação. Então trazem três casos de extensão de máxima entropia como distribuições de probabilidade para modelar as duas restrições de cauda esquerda e outra para o retorno (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

Em síntese, tal modelo traz uma especificação de distribuição para o retorno de portfólios sob as restrições de cauda, o que é completamente diferente do sugerido pelo método de média-variância (em que variância indica o risco). Na modelagem de Geman, Geman e Taleb (2015) utiliza-se de entropia estocástica para caracterizar a incerteza residual de portfólios. Tal que, o movimento de entropia das séries temporais de preços de ativos financeiros é investigável no modelo de portfólio.

O conceito de entropia foi introduzido por Shannon (1948) e há várias generalizações e empregos do conceito. Genericamente, pode-se conceituar entropia como uma medida de desordem nos dados de uma distribuição (SILVA; MATSUSHITA, 2017). Ou seja, a tendência de um sistema para a transição de um estado mais ordenado para outro estado menos ordenado dentro de seu espaço de fase, por sua vez, refere-se à noção de *ordem e desordem*. Em outras palavras, o número de possíveis micro-estados que correspondem a um determinado macro-estado. Em síntese, a entropia Shannon (1948) mede a distribuição de estados de um sistema, e, por sua vez, também mede as frequências dos estados do sistema, dentro de seu espaço de fase. Para Geman, Geman e Taleb (2015), a entropia de Shannon (1948) traz um quadro de maximização bastante desenvolvido e conhecido para a distribuição de máxima entropia. Dentro desta perspectiva, destaca que

para caracterizar uma amostra (e que, por sua vez, traga eventos desconhecidos) com uma distribuição de probabilidade, deve-se escolher sempre a que tem máxima entropia. O que justifica usar Maxent sobre a distribuição normal padrão. O que é uma técnica para modelar um sistema complicado em que há muitas interações ou efeitos que são difíceis, ou nada interessantes, de rastrear. Então serve para descrever um sistema como uma distribuição de probabilidade sobre as suas possíveis configurações.

No campo da teoria da informação:

*Information theory provides a constructive criterion for setting up probability distributions on the basis of partial knowledge, and leads to a type of statistical inference which is called the maximum entropy estimate. It is least biased estimate possible on the given information; i.e., it is maximally noncommittal with regard to missing information. (JAYNES, 1957a; JAYNES, 1957b)*

Na perspectiva de pesquisa desta dissertação, o objetivo para com este modelo de análise de mercados financeiros é a modelagem estatística da distribuição de probabilidade de uma série temporal de ativo financeiro de aleatoriedade falsa originada pela extensão do modelo de Silva (2001b). No momento, o objetivo não é de empregar este modelo para a análise de mercados financeiros em outra prática quantitativa de séries temporais reais ou de gestão de portfólio. Além do mais, pode-se observar em Ibragimov e Walden (2007), Ibragimov e Johan (2008) a sugestão de que quando o expoente de lei de potência (de Hill) der aproximadamente  $\alpha = 1$  então se tem um ponto de virada no portfólio e, que, em resumo, não resolve colocar algum ativo financeiro com  $\alpha = 1$  em uma minimização da variância (como se vê no Capítulo 3); daí Ibragimov e Walden (2007), Ibragimov e Johan (2008) sugere escolher arbitrariamente um peso pro ativo com  $\alpha = 1$  no portfólio e trabalhar com ele de maneira isolada. Ou seja, quando se tem uma distribuição de Cauchy (MANTEGNA; STANLEY, 2000) em uma série temporal de preço de ativo financeiro. Não obstante, o ativo ainda faz parte do portfólio. (Por fim, para mais detalhes sobre os conceitos do tema desta dissertação há os mini-cursos disponíveis em Instituto Santa Fé. Vide: <https://www.complexityexplorer.org>).

## 1.4 Objetivos

A partir do tema de pesquisa e delimitação do problema de pesquisa desta dissertação. A presente Seção traz o objetivo geral e os objetivos específicos para ela.

### 1.4.1 Objetivo geral

O objetivo geral é o de especificar uma extensão do modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado financeiro. Para a finalidade de investigar uma série temporal de ativo financeiro caótica subjacente à extensão desse modelo, conforme um processo estocástico, por intermédio de um modelo para a análise de mercados financeiros.

### 1.4.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo geral. Os objetivos específicos são:

1. Descrever características do modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado financeiro;
2. Apresentar características da série temporal do ativo financeiro caótica gerada através da extensão do modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado financeiro;
3. Verificar um conjunto de estatísticas descritivas da série temporal do ativo financeiro caótica como se fosse variável aleatória;
4. Verificar a função densidade probabilidade empírica desta série temporal do ativo financeiro caótica como se fosse variável aleatória em relação à distribuição normal padrão;
5. Descrever o modelo para a análise de mercado financeiro;

6. Investigar a série temporal do ativo financeiro caótica por meio do modelo que serve para a análise de mercados financeiros;
7. Analisar a cauda esquerda da série temporal do ativo financeiro caótica;
8. Verificar um ajuste de leis de potência desta série temporal do ativo financeiro caótica como se fosse variável aleatória;
9. Analisar a cauda direita da série temporal do ativo financeiro caótica.

## 1.5 Estrutura da dissertação

Este trabalho divide-se em cinco partes. O capítulo um é de introdução e traz o contexto e problema de pesquisa. O capítulo dois traz o modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado, após isso, o capítulo traz um conjunto de estatísticas descritivas para caracterizar a série de dados de aleatoriedade que é originada pelo modelo. O capítulo três traz o modelo para a análise de mercados financeiros, isto é, a distribuição de probabilidade da estratégia de portfólio de *barbell*. Enquanto, o capítulo quatro mostra os resultados do emprego do modelo para a análise de mercados financeiros para com esta série de dados de aleatoriedade falsa que é gerada pelo modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira. E, por fim, o capítulo cinco conclui o trabalho.

## 2 MATERIAIS

*A Seção 2.1 descreve o modelo de sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira de agentes grafistas e fundamentalistas que interagem em um mercado. A Subseção 2.1.1 traz uma explicação para esta dinâmica especulativa. A Seção 2.2 apresenta uma série temporal de preço do ativo financeiro caótica originada por meio da simulação numérica deste modelo. Enquanto, a Seção 2.3 traz um conjunto de estatísticas descritivas para esta série temporal caótica. Por fim, a Seção 2.4 exhibe, por meio do expoente de Hurst, a memória dos dados desta série temporal caótica.*

### **2.1 Um sistema determinístico não-linear de dinâmica especulativa financeira de agentes grafistas e agentes fundamentalistas que interagem em um mercado**

Um modelo baseado em agentes que parte da especificação de um sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira especulativa de agentes grafistas e fundamentalistas que interagem em um mercado, de forma a estender o modelo de Silva (2001b), e que gera a soluções com taxas de câmbio nominais caóticas. O caos pode ser adicionado em modelos do mercado financeiro através da dinâmica especulativa de grafistas e fundamentalistas (DE-GRAUWE; DEWACHTER, 1992). Estas são as forças centrífugas e centrípetas para se gerar caos (SILVA; MATSUSHITA, 2017).

Os modelos de taxa de câmbio que são capazes de gerar soluções caóticas têm como vantagem a capacidade de replicar padrões aleatórios que são similares ao que é empiricamente observável em taxas de câmbio reais (SILVA, 2001b). O modelo de Silva (2001b) é resolvido para a taxa de câmbio nominal de curto-prazo, nele incorporam-se dinâmicas especulativas que originam a um grande número de equilíbrios arbitrários e inclusive caóticos. No modelo, a eficiência no mercado de câmbio não é assumida desde o início.

A simulação computacional deste modelo baseado em agentes, cujo número fixo de equações definidas especifica a estrutura do

sistema determinístico não-linear, caracteriza uma dinâmica determinística. A equação resultante da taxa de câmbio nominal não-linear é utilizada para a realização de uma simulação numéricas com valores de parâmetros que conferem a série temporal de dados de preços do ativo financeiro caótica a ser empregue. Isto é, uma autossustentável sequência de transições de estados (conforme iterações) que sucedem ao estado de origem (de condições iniciais) do sistema. O que, por sua vez, descreve a evolução do comportamento coletivo (a nível global) do sistema determinístico de mercado da taxa de câmbio nominal, dentro de seu espaço de fase. Com isso, gera uma variável caótica (série-preço) do ativo financeiro subjacente. Ela pode trazer uma regularidade de eventos extremos. A cada iteração (na simulação), ao longo do tempo, então o montante de informação disponível não redundante cuja densidade é processada pelo mercado determinístico se expressa no comportamento dinâmico da variável resultante. Então apresenta-se a ideia de dinâmica especulativa e a equação resultante da imitação da estrutura de mercado do modelo de Silva (2001b) (bem como, assume-se toda a estrutura deste modelo, isto é, a partir das características básicas, então preferências, poder de paridade de compra, restrição de orçamento individual, demanda, ineficiência do mercado da taxa de câmbio, para com a dinâmica especulativa, caracterizar além de os micro-fundamentos, e fechar o modelo para, com isso, gerar a série temporal caótica). E indica-se o termo extensão como a alteração dos parâmetros de condições iniciais e a anexação do quarto grau de liberdade com valor diferente para a equação resultante (1), como vai se ver a seguir.

### 2.1.1 Dinâmica Especulativa

Dinâmica onde agentes-*traders* que atuam no mercado de ações tomam posições no período  $t$  com base em previsões feitas para  $t + 1$ , por sua vez, feitas com base em informação disponível em  $t - 1$ . As previsões de preços da taxa de câmbio  $P^E$  baseiam-se então em gráficos  $G$  e também em fundamentos  $F$ :

$$\frac{P_{t+1}^E}{P_{t-1}} = \left( \frac{P_{G_{t+1}}^E}{P_{t-1}} \right)^{G_t} \left( \frac{P_{F_{t+1}}^E}{P_{t-1}} \right)^{1-G_t}$$

em que  $G \in (0, 1)$  refere-se para o peso dos gráficos nas previsões (SILVA, 2001b; SILVA; MATSUSHITA, 2017).

A previsão com base no gráficos.

$$\frac{P_{G_{t+1}}^E}{P_{t-1}} = \left( \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right)^\vartheta$$

em que  $\vartheta$  é um parâmetro positivo para medir o grau de extrapolação do passado usado em análise gráfica. Por sua vez,  $\vartheta$  é de sinal positivo, e, portanto quanto maior for o  $\vartheta$  então mais dados do passado são usados para fazer a previsão, com isso os grafistas esperam que o preço em  $t + 1$  seja menor do que o preço em  $t - 1$ . A intuição é de que um grafista espera um aumento do preço sempre que uma média móvel de curto prazo dos preços anteriores  $P_{CP_t}$  cruze por uma média móvel de longo prazo  $P_{LP_t}$  de baixo para cima. Bem como espera uma queda do preço sempre que uma  $P_{CP_t}$  cruza  $P_{LP_t}$  de cima para baixo. Não esquecendo da hipótese de teoria de mercado de fractais que quando há o cruzamento, ambos os agentes compartilham do mesmo risco. Formalmente:

$$\frac{P_{G_{t+1}}^E}{P_{t-1}} = \left( \frac{P_{CP_t}}{P_{LP_t}} \right)^{2\vartheta}$$

e

$$P_{CP_t} = \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$$

por fim

$$P_{LP_t} = \left( \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{P_{t-2}}{P_{t-3}} \right).$$

Quando um agente-trader faz as previsões com base em fundamentos usa a seguinte regra (LEBARON, 1994; SILVA, 2000; SILVA; MATSUSHITA, 2017):

$$\frac{P_{t+1}^E}{P_{t-1}} \left( \frac{P_{t-1}^*}{P_{t-1}} \right)^\vartheta$$

em que  $P_{t-1}^*$  é o preço a ser correto da ação com base na situação da empresa que a emite, e o parâmetro positivo  $\vartheta$  mensura a velocidade esperada para o retorno do preço observado na direção do preço com base nos fundamentos da empresa. Sempre que um agente-*trader* do tipo fundamentalista observa um preço acima do seu preço correto, por sua vez, então espera uma queda do preço. Daí se o preço estiver abaixo do seu valor fundamental, então espera uma alta. Não obstante, o peso das previsões com base em gráfico é endogeneizado na equação (LEBARON, 1994; SILVA, 2000; SILVA; MATSUSHITA, 2017):

$$G_t = \frac{1}{1 + \iota (P_{t-1}^1 - P_{t-1}^*)^2}$$

A quantidade de análise gráfica utilizada é dependente do desvio do preço que é observado pelo preço fundamental. O parâmetro positivo  $\iota$  mede a velocidade de mudança de previsões com base em gráficos para as previsões com base em fundamentos. Tal que  $(P_{t-1} - P_{t-1}^*)^2 \rightarrow \infty$ , então  $G \rightarrow 0$ . Não obstante, se  $(P_{t-1} - P_{t-1}^*)^2 \rightarrow 0$ , então  $G \rightarrow 1$ . Como resultado, as previsões oscilam entre análise grafista e análise fundamentalista sem parar. Assume-se a estrutura do modelo de (SILVA, 2001b), bem como a sua micro-fundamentação. De maneira que as seguintes equações mostram que, por fim, as previsões da taxa de câmbio nominal dependem de taxas de câmbio nominais passadas de uma forma não-linear:

$$P_{t+1}^e = P_{t-1}^{f_1} P_{t-2}^{f_2} P_{t-3}^{f_3},$$

$$f_1 \equiv \frac{1 + \vartheta + \iota(1 - \vartheta)(P_{t-1} - 1)^2}{1 + \iota(P_{t-1} - 1)^2},$$

$$f_2 \equiv \frac{-2\vartheta}{1 + \iota(P_{t-1} - 1)^2},$$

$$f_3 \equiv \frac{\vartheta}{1 + \iota(P_{t-1} - 1)^2}.$$

Em que, por fim, dá a equação final para a taxa de câmbio nominal:

$$2P_t + \frac{\xi - 1}{\xi} P_t^{-\frac{\sigma}{\tau}} P_{t-1}^{f_1} P_{t-2}^{f_2} P_{t-3}^{f_3} - P_{t-1}^{f_1} P_{t-2}^{f_2} P_{t-3}^{f_3} = 0. \quad (1)$$

A expressão (1) é uma equação de diferença não-linear para a qual uma solução analítica não está disponível. Para resolvê-la numericamente, necessita-se de condições iniciais, ou seja, os valores para  $P_{t-1}$ ,  $P_{t-2}$  e  $P_{t-3}$  são requeridos. Mesmo tendo em conta tais valores, a expressão (1) tem muitas soluções, de maneira que existem diferentes combinações de parâmetros. Para realizar simulações numéricas, assume-se a taxa de câmbio nominal em seu valor de equilíbrio do Poder de Paridade de Compra (PPP) no ponto de partida, isto é,  $P_{t-3} = P_{t-1}^{PPP} = 1$ . Nos dois períodos subsequentes, pequenos desvios a partir deste equilíbrio são permitidos. Em particular, assume-se o  $P_{t-2} = 0.98$  e  $P_{t-1} = 1.02$ . Este conjunto de condições iniciais são suficientes para gerar uma dinâmica muito complexa no modelo. Concentra-se sobre o comportamento de grafistas e fundamentalistas através de parâmetros  $\vartheta$  e  $\wp$ . A simulação varia até 15.000 pontos de dados, e cada parâmetro com nove casas decimais. A expressão (1) por meio do algoritmo de Newton calcula o valor da taxa de câmbio nominal no passo seguinte da iteração conforme determinado pelo seu valor corrente menos a razão entre a função dada pelo lado esquerdo de (1) e a sua derivada. Para realizar simulações com o algoritmo de Newton, há a necessidade técnica para uma estimativa adicional quanto ao quarto valor da série temporal do ativo financeiro que é a taxa de câmbio nominal. Este quarto valor passado é assumido como 0.99. Os outros valores de parâmetros são tomados como dados em  $\varpi = -10^2$ ,  $\xi = 1.5$ ,  $\iota = 10^4$  e  $\tau = 0.5$ . Isso estabelece um ambiente em que a elasticidade da demanda de moeda para o consumo assume um valor sensível ( $\tau = 0.5$ ), a velocidade em que as previsões com base em gráficos mudam para as com base em fundamentos é relativamente alta ( $\iota = 10^4$ ), a estrutura de mercado é uma forte concorrência

monopolista ( $\xi = 1.5$ ), e há uma intervenção cambial *leaning-against-the-wind* ( $\varpi = -10^2$ ) (SILVA, 2001b). Em simulações, pode-se testar que em grandes valores de  $\vartheta$ , tais como 100, 200, 225 e 275 as crenças dos fundamentalistas estão em conformidade com a real atividade subjacente. A possibilidade de caos para valores baixos de  $\vartheta$  tais como 0, 1 e 10 ocorre a partir de elementos de auto-organização. Então, para esta expressão (1) por meio desta extensão do modelo de Silva (2001b) (em que aqui considera-se a extensão como a mudança de parâmetros, isto é, uma pequena adaptação do modelo original), obteve-se a série temporal caótica que é analisada no seguinte Capítulo.

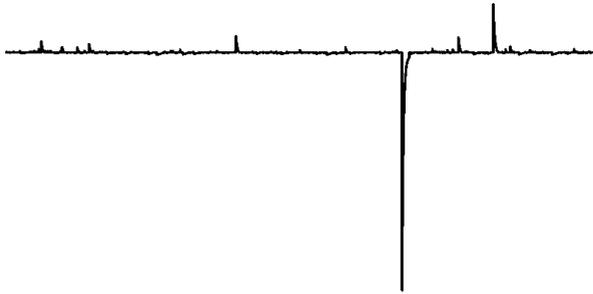
## 2.2 Dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica

A presente Seção apresenta a série dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica que é originada a partir da simulação do modelo de dinâmica especulativa financeira de agentes grafistas e agentes fundamentalistas, conforme Seção anterior. A amostra desta série temporal caótica traz 15.000 observações. Ao longo do texto, denota-se ela também por  $X$ . Então, plota-se esta série temporal, que traz o aparente comportamento estocástico que ocorre em um sistema determinístico, na figura a seguir. Onde observa-se que depois de algumas observações após o evento extremo negativo, a série de dados volta para uma zona de equilíbrio de mercado.

A amostra de dados desta série temporal expressa através da Figura 1 traz (da esquerda para a direita no intervalo do ponto um até o ponto quinze mil) como dispersão, na distribuição de valores extremos, um mínimo de - 89.66 (um piso para baixo) e um máximo de 19.44 (para cima). A seguir, na figura 2 plota-se a série de dados por meio de um ajuste gráfico em que se faz uma simples sequência de *clusters* (isto é, faz-se uma hierarquia no conjunto de dados da amostra).

Na geometria computacional tem-se o estudo de algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos. O problema do vizinho mais próximo envolve a identificação de um ponto, ou de um conjunto de pontos, o mais próximo do ponto de consulta de acordo com alguma medida de distância. O problema de vizinhança mais próxima envolve a identificação do *locus* de pontos mais próximos do ponto de consulta

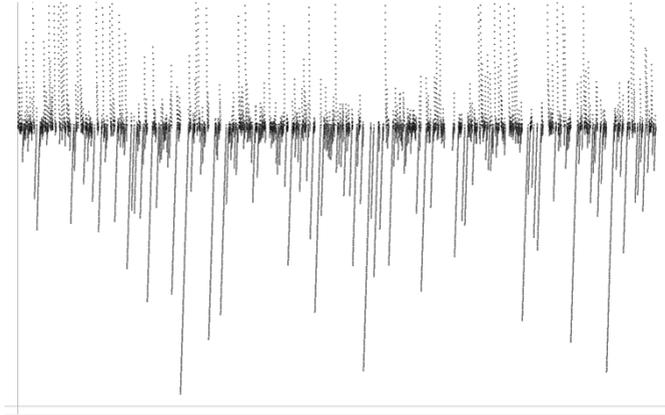
Figura 1 – Dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

(aqui, no caso a média) do que para qualquer outro ponto do conjunto. No procedimento, separam-se todos os pontos de dados como *outliers* a partir da distância da média amostral com o objetivo de hierarquizar os maiores vales que distam da média (*clusters*) das 150.000 observações. A análise de *clusters* é uma técnica de aprendizagem não supervisionada usada para a classificação de dados, os elementos de dados são divididos em grupos chamados de *clusters* que representam coleções próximas de elementos de dados com base em uma função de distância ou dissimilaridade, os pares de elementos idênticos têm distância igual a zero ou dissimilaridade, e todos os outros têm distância positiva ou dissimilaridade. A aleatoriedade pode ser utilizada no agrupamento de duas maneiras diferentes. Alguns dos métodos utilizam uma atribuição aleatória de alguns pontos para um número específico de *clusters* como ponto de partida. Aleatoriedade também pode ser usada para ajudar a determinar o que parece ser o melhor número de *clusters* para usar. Em princípio, técnicas de agrupamento como esta podem

Figura 2 – Hierarquia de dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

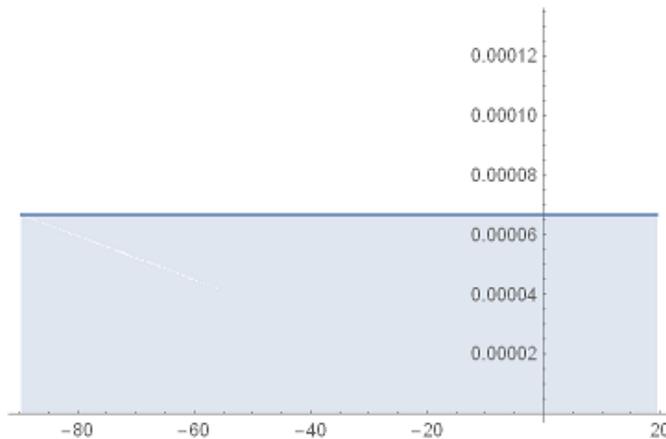
ser aplicadas a qualquer conjunto de dados, tudo o que é necessário é uma medida da distância de cada elemento no conjunto de outros elementos, ou seja, uma função que dá a distância entre os elementos. Na análise, podem ser separados, por exemplo, através da distância de correlação. Através da Figura 2 pode-se observar o eixo das ordenadas que vai de - 1.5 até 0.5, enquanto o eixo das abcissas reproduz todas as observações de 1 a 15.000. Ocorre um vale à direita do centro da distribuição dos dados onde não há muitos pontos para cima e a "opacidade" diminui, por sua vez, é onde ocorre o evento extremo. (Em relação à Figura 1 cuja disposição é mais para a esquerda). Além disso, verifica-se, visualmente, a propriedade para este tipo de aleatoriedade falsa de crescimento exponencial na variação dos dados e, aparentemente, a de periodicidade. Em síntese, o ajuste do gráfico expressa uma seqüência de hierarquias de agrupamentos de conjuntos de estados (em localização na amostra) no total dos dados, pode-se indicar por volatilidade (mas na distância de qualquer ponto até o que

lhe sucede), em que se observa as alterações no preço, isto é, *clustering*, por sua vez, faz-se uma hierarquia no conjunto de dados. (Vide: <https://reference.wolfram.com/language/guide/ComputationalGeometry.html>).

### 2.3 Estatísticas descritivas dos dados da série temporal caótica

Esta Seção traz a apresentação de um conjunto de estatísticas descritivas para a análise dos dados desta série temporal caótica. Inicialmente, apresentam-se a função densidade de probabilidade (PDF) e depois a função densidade acumulada (CDF). Por sua vez, através da ilustração gráfica da distribuição empírica que retorna a distribuição dos valores dos dados da amostragem desta série temporal.

Figura 3 – PDF da distribuição empírica dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica

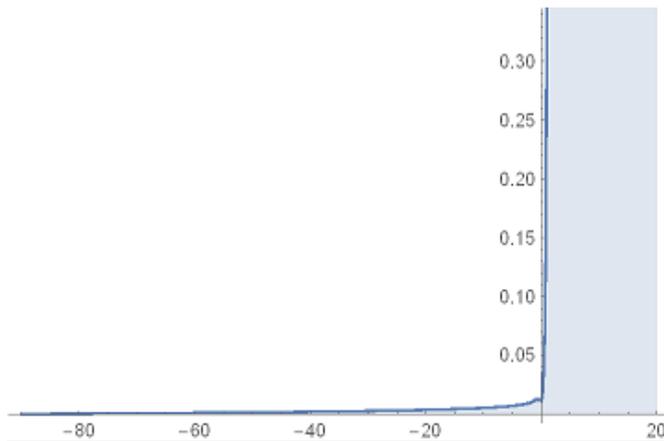


Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A ilustração acima refere-se à função de densidade de probabilidade (PDF). A ilustração abaixo refere-se à função de densidade

acumulada (CDF). A linha em azul descreve a distribuição empírica da amostra de dados. Na PDF dá-se grande atenção para o conjunto das observações com sinal negativo. Através da ilustração da figura 3 pode se visualizar que observações à esquerda caracterizaram o evento de cauda, na amostra. Tal PDF sugere a hipótese de ocorrer cauda longa nos dados da série temporal caótica. Automaticamente os limites da PDF se estendem de - 90 (à esquerda) para até 20 (à direita). Na ilustração abaixo, os limites da CDF são escolhidos para o intervalo de - 80 (à esquerda) para até 20 (à direita). Intencionalmente, dá-se maior atenção para o lado esquerdo da distribuição empírica.

Figura 4 – CDF da distribuição empírica dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica



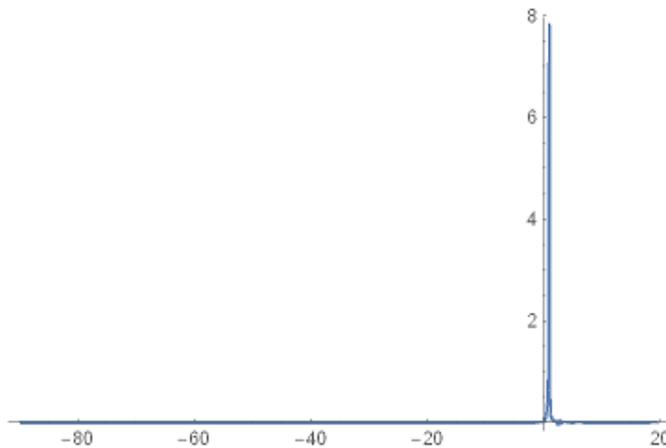
Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A diferença das Figuras 5 e 6 para as anteriores é a de que ela se visualiza como a mistura de cada uma das observações da amostra, o que vai gerar as condições para do que se oculta no histograma mostrado na Figura 7.

Então, em seguida, a estimação da densidade da mistura *Kernel* em que se considera a cada uma das observações da amostra, para

verificar a contribuição de cada um dos pontos de dados para o total da amostra. Utilizam-se os métodos-padrão da regra de *Silverman's* para determinar a banda e o *kernel* para a densidade *gaussiana*, antes disso ao gerar a função densidade:  $\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n ke\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ , em que  $ke$  é o *kernel* de suavização,  $h$  é a banda (janela), e  $n$  são as  $i$ -observações (pontos de dados da amostra). Ao verificarem-se as figuras, entende-se a intenção da escolha da exposição delas. Isso, em paralelo com a ilustração do histograma desta amostra de dados que é apresentado depois.

Figura 5 – PDF da distribuição *Kernel*

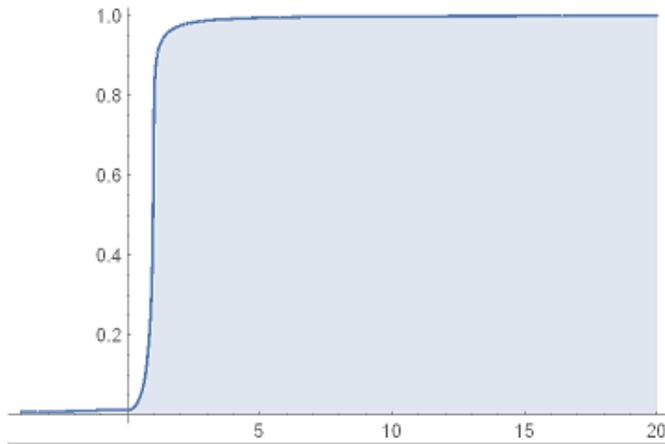


Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A PDF na Figura 5 e a CDF na Figura 6. A distribuição de mistura *Kernel* das observações denota-se em azul: para a série temporal caótica. Tal CDF sugere a hipótese de ocorrer cauda longa nos dados da série. Automaticamente os limites da PDF se estendem de -90 (à esquerda) para até 20 (à direita) e, ainda, os limites da CDF são escolhidos para o intervalo de -4 (à esquerda) para até 20 (à direita): Assim, interpreta-se que, para os valores de cada uma das observações, desde um pouquinho antes de 1 para, aproximadamente, até o 8, tem-se

"normalidade padrão" na amostra.

Figura 6 – CDF da distribuição *Kernel*

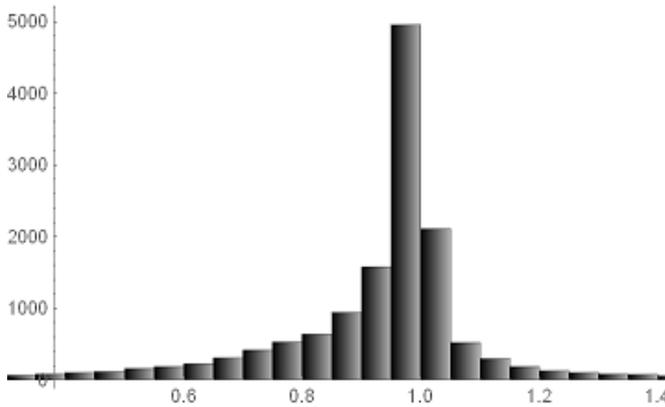


Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Destaca-se que o ajuste gaussiano que gera o formato do histograma acaba por ocultar o evento extremo, em análise (o que justifica o segundo parágrafo da introdução). Interpreta-se que o foco do histograma parece refletir as condições iniciais dadas no modelo de dinâmica especulativa que gerou esta série, isto é, a mediana de 0.975, com o decaimento exponencial para os lados, com isso verifica-se este pressuposto apresentado na introdução. Ocorre porque o evento está em um pequeno intervalo da amostra, cuja localização se encontra extremamente à esquerda do centro deste histograma, o que justifica a apresentação das figuras 5 e 6.

Após essa análise, apresenta-se o teste de hipótese de normalidade de *Jarque-Bera* para os dados da série temporal caótica.

Figura 7 – Histograma dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

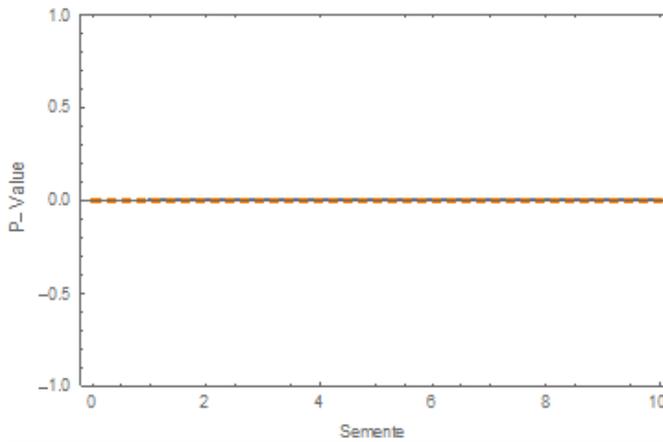
### 2.3.1 Teste de hipótese de normalidade para os dados da série temporal caótica

A Subseção traz a estatística descritiva do valor em probabilidade (*P-Value*) do teste de hipótese de normalidade de *Jarque-Bera* para os dados da série temporal caótica através da Figura 8.

O *P-Value* (valor em probabilidade) do teste de hipótese de normalidade de *Jarque-Bera* é nulo para a série a 0.05, ou a qualquer nível de significância. Calcula-se o teste de *Jarque-Bera* através de 50 reamostragens de *Monte Carlo*, para a semente  $i$ , de 1 a 10. Na semente, de mínimo a máximo, em que ela não afeta o estado de geração e não tem nenhum efeito sobre o *P-Value* resultante. Portanto, rejeita-se a hipótese de normalidade para a série de dados em análise. Resultado que sem mantém com outros testes-padrão (como, por exemplo, o teste de *Kolmogorov-Smirnov* que traz uma estatística de 0.419 com o valor em probabilidade que resulta em zero).

A seguir, a Tabela 1 traz a mensuração de estatísticas descritivas

Figura 8 – Teste de hipótese de normalidade de Jarque-Bera para os dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica



Fonte: Desenvolvida pelo autor. Nota: A figura traz o P-Value do teste de hipótese de normalidade de Jarque-Bera para a série, em que rejeita-se a hipótese de normalidade.

de localização. Bem como, as estatísticas descritivas de dispersão. E ainda, as estatísticas descritivas do formato da distribuição.

### 2.3.2 Estatísticas descritivas de mensuração de dispersão dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica

A Tabela 1 traz as estatísticas descritivas de localização, dispersão e de mensuração de *shape* (genericamente, o formato da distribuição), ou seja, a mensuração da média, mediana, variância, do desvio padrão, do desvio médio, e de desvio mediano. Então, para *shape*, a tabela mostra a mensuração de assimetria, em que o sinal negativo indica que a distribuição traz uma cauda longa para a esquerda. Mostra a mensuração de curtose (estatística que traz uma mensuração de concentração dos dados ao redor de um pico na cauda versus a concentração

nos flancos): Interpreta-se ela por  $\beta$ , e se ocorre um  $\beta > 3$ , então a distribuição é leptocurtica, o que ocorre na amostra de dados em análise (pois ocorre um pico maior do que a distribuição normal em que ocorre  $\beta = 3$ ). Por fim, a medida de quartil de assimetria denota que por meio do sinal negativo: o valor negativo da inclinação de quartil indica que a mediana está mais próxima do quartil superior. Trabalha-se no próximo capítulo com a medida de entropia que também é uma das estatísticas descritivas de *shape*.

## 2.4 Memória dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica

A presente Seção traz a verificação de se há memória longa nos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica, ou não. Então, testa-se se há hipótese de memória longa conforme o movimento Browniano fracional e conforme o ruído *gaussiano* fracional (no caso: empregam-se os métodos-padrão). Não obstante, o ruído *gaussiano* não é pertinente para a análise pois a distribuição não é *gaussiana*, mesmo assim se utilizar, então como uma medida de comparação. A estatística em uso para detectar memória longa é o expoente de Hurst ( $H$ ), em que encontra-se no intervalo  $(0, 1)$ . Em geral, se  $H = 0.5$  então a estatística indica que a série é um processo sem memória longa (então, interpreta-se que os dados da amostra são independentes, por exemplo, o processo de *Wiener*), se o índice for  $H > 0.5$  então a série apresenta dependência temporal de longo prazo positiva (há uma tendência que se reforça na série, logo, interpreta-se que o incremento de dados futuros são similares aos incrementos de dados passados na amostra), e, se, o índice for  $H < 0.5$  a série apresenta dependência temporal de longo prazo negativa (antipersistência: tendências passadas não tendem a se reverter no futuro, o que se interpreta como uma maior quantidade de inversão nos incrementos, isto é, incrementos negativos no passado tendem a denotar incrementos positivos no futuro – assim a maior oscilação e imprevisibilidade) (MANDELBROT; NESS, 1968; SILVA; MATSUSHITA, 2017). Então, na tabela 2 apresenta-se a estimativa do expoente de Hurst conforme o movimento *browniano* fracional, uma generalização do movimento *browniano* (apresentados na introdução). Conforme Mandelbrot e Ness (1968), no caso a correlação não de-

pende do tempo, mas apenas do expoente de Hurst. – Em que não há estacionariedade fraca. – Interpreta-se que se o índice for  $H = 0.5$  a série apresenta correlação igual a zero e então os dados da amostra são independentes (e o movimento deixa de ser fracional e que se reduz a um processo de *Wiener* em 0.5), então se há  $H > 0.5$  acontece correlação positiva e há persistência, e ainda se há  $H < 0.5$  então a correlação é negativa e há antipersistência. Ao calcular-se  $H$ , para o caso de um processo de movimento *browniano* fracional, que é do tipo gaussiano, utiliza-se de um algoritmo padrão de processo aleatório de tempo contínuo (de *drift* zero e volatilidade igual a um) para as observações.

O resultado da aplicação do modelo equivocado, ou seja, o ruído *gaussiano* fracional, indica que há memória longa. Um processo de ruído *gaussiano* fracional com *drift* igual a zero e volatilidade igual a um, em que há estacionariedade fraca, e auto-similaridade nos dados. Após a tabela, o resultado do movimento *browniano* fracional.

Interpreta-se que a presença do evento extremo que caracteriza uma quebra estrutural no padrão dos dados pode se relacionar com memória longa. Portanto, a estimativa correta do expoente de Hurst indica que não há memória longa. Logo, caracterizando o padrão oculto de que há anti-persistência por meio do movimento *browniano* fracional. Daí surge o procedimento que às vezes é adotado de excluir eventos extremos de amostras de dados como é relatado por Taleb (2010), Silva e Matsushita (2017) que fazem, neste caso, com que o ruído *gaussiano* fracional não aparente ser equivocado em testes de hipóteses, entretanto, ele é equivocado para descrever a trajetória dos dados. O que vale para testes de normalidade.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas de mensuração de dispersão dos dados da série temporal de preço do ativo financeiro caótica.

Estatística	Valor	Tipo
Média	0.795	Localização
Mediana	0.9758	Valor central
Variância	10.709	Dispersão
Desvio padrão	3.272	Dispersão
Desvio médio	0.509	Dispersão
Desvio mediano	0.0502	Dispersão
Assimetria	-17.299	<i>Shape</i>
Curtose	367.084	<i>Shape</i>
Quartil de assimetria	-0.5286	<i>Shape</i>

Fonte – Desenvolvida pelo autor.

Nota – Estatísticas do total dos dados com base em sua distribuição empírica. Anotações - A média é análogo à localização, pode-se dizer expectativa, *drift*, ou primeiro momento. Mediana é equivalente ao valor central, conforme o peso de cada uma das observações na amostra. Variância é uma medida de dispersão dos dados da amostra, análogo à volatilidade e segundo momento. Desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Desvio médio é equivalente ao desvio médio absoluto a partir da média dos dados da amostra. Desvio mediano equivale ao desvio mediano absoluto, a partir da mediana da amostra. Assimetria é análogo ao terceiro momento. Por fim, curtose é análogo ao quarto momento.

Tabela 2 – Estimativas do expoente de Hurst para a memória dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica

Série temporal caótica	$H$	Memória longa
Ruído <i>gassiano</i> fracional	0.874	Sim (modelo equivocado)
Movimento <i>browniano</i> fracional	0.431	Não (modelo correto)

Fonte – Desenvolvida pelo autor.

### 3 MÉTODOS

*A Seção 3.1 traz um modelo para a análise de mercados financeiros, isto é, uma formalização da estratégia de barbell que, por sua vez, serve para a gestão de fundos de investimentos em portfólio. Com isso, a Subseção 3.1.1 trata de riscos de cauda esquerda em termos de Valor em Risco (VaR) e de Valor em Risco Condicional (CVaR), ou seja, as duas restrições centrais na distribuição deste portfólio. Tornadas robustas de maneira a não depender de suposições paramétricas. Enquanto, a Subseção 3.1.2 parte do quadro média-variância da teoria do portfólio (padrão) para começar a explicar sobre o portfólio. A Subseção 3.1.3 trata da distribuição multivariada desconhecida para os componentes individuais que denotam, em agregado, no retorno deste portfólio. Já, a Subseção 3.1.4 formaliza as restrições de riscos de cauda esquerda, isto em termos de probabilidade de cauda visto na Subsubseção 3.1.4.1 e de CVaR visto na Subsubseção 3.1.4.2. A Subseção 3.1.5 exhibe o caso "normal". A Subseção 3.1.6 apresenta o caso da hipótese de mistura de distribuições (MDH). A Subseção 3.1.7 traz a máxima entropia. Então, a Subsubseção 3.1.7.1 apresenta o caso de uma extensão de máxima entropia para impor uma restrição uma restrição na média global, na parte direita da distribuição. Bem como, a Subsubseção 3.1.7.2, só que ao invés de ser uma restrição na média global, é uma restrição na média absoluta; deste portfólio. Finalmente, a Subsubseção 3.1.7.3 traz leis de potência para complementar a análise. E, por fim, a Subseção 3.1.8 traz a extensão do modelo para o caso de multi-períodos. Enquanto a Seção 3.2 trata de outras possibilidades de distribuições de máxima entropia.*

#### 3.1 Formalização da estratégia de portfólio de barbell

Esta seção descreve a formalização da estratégia de portfólio de barbell, ou seja, um modelo para a análise de mercados financeiros, através da gestão de fundos de investimentos em portfólio. Parte-se

do fato de que ao se trabalhar em um quadro institucional, operadores e tomadores de risco dependem de mandatos regulatórios que trazem limites de perda de cauda para estabelecer os níveis de risco em seus portfólios (por exemplo, para os bancos desde Basileia II), para isso, a necessidade de testes de estresse, *stop-loss*, Valor em Risco (*VaR*), Valor em Risco Condicional (*CVaR*) e outros métodos similares de análise (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Este modelo traz estes testes clássicos, em particular: sem depender de supostos paramétricos e com o uso da teoria da informação. Então, o modelo parte da teoria moderna do portfólio com a distribuição normal (padrão), traz a hipótese de mistura de distribuições, princípio da máxima entropia, e leis de potência.

O teste de estresse é uma análise de desempenho do portfólio quando ele enfrenta um conjunto de desvios arbitrários nas variáveis que o compõem. Um exercício que visa identificar e gerenciar situações que podem causar perdas extraordinárias, como quebra de relações históricas, sejam elas temporárias ou permanentes. Esse teste consiste na avaliação do impacto financeiro e determinação de potenciais perdas ou ganhos do portfólio sob cenários extremos, com grande volatilidade. Enquanto, *stop-loss* indica, por exemplo, a intenção de interromper alguma perda em uma posição aberta conforme *VaR* ou *CVaR*. Além do mais, uma das preocupações centrais de agentes-operadores não é a variância de séries temporais de preços de ativos financeiros em mercados, mas sim o risco de possibilidade de algum *drawdown* (isto é, uma medida de pico até o piso de uma queda do preço ou retorno) neles, ou seja, um risco significativo para os investidores quando se considera o aumento no preço das ações necessárias para superar uma redução. Por exemplo, pode não parecer muito se uma ação perde 2 por cento, pois o operador só precisa de um aumento de 1.02 por cento para recuperar a posição anteriormente tomada. No entanto, uma redução de 20 por cento requer um retorno de mais de 20 por cento, enquanto uma redução de 50 por cento (por exemplo, um caso como durante a recessão nos Estados Unidos da América de 2008 a 2009) exige um enorme aumento que pode se aproximar de 100 por cento, para recuperar a mesma posição.

Em geral, artigos relacionados à entropia na literatura de finanças quantitativas trazem a minimização da entropia como um critério de otimização. Por exemplo, Frittelli (2000) traz uma medida de mini-

mização de entropia "*martingal*" sob algumas condições e mostra que a minimização da entropia é equivalente a maximizar a utilidade exponencial esperada da riqueza terminal. De maneira distinta, a presente abordagem traz a maximização da entropia como o reconhecimento da incerteza sobre as distribuições de ativos financeiros (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Sob as restrições do *VaR* e *CVaR*, obtém-se como solução o portfólio de *barbell*, o que estende a configuração do teorema de separação de dois fundos de investimentos.

### 3.1.1 Riscos de cauda esquerda

Para a especificação do modelo separa-se o portfólio em duas partes diferentes para obter-se uma posição oposta de cada lado da distribuição de probabilidade. Tal que a combinação linear de máximo conservadorismo para um fração  $\omega$  do portfólio, com  $\omega \in (0, 1)$  de um lado, por sua vez, do outro lado, uma postura extremamente agressiva  $(1 - \omega)$ . (Entre 80 e 90 para uma fração e o restante para outra que é de apostas de alto risco.) Então, como estratégia defensiva para a mensuração de riscos em potencial. O risco de cauda esquerda é a restrição central do portfólio. Para isso, as premissas fundamentais para a especificação deste modelo são duas restrições na cauda esquerda.

Uma restrição de risco que incide sobre a perda máxima que pode ser gerada e que pode ser suportada durante um determinado período de tempo e a um determinado nível de confiança em que se define a partir da posição de *VaR* do agente-operador e se expressa por meio de um valor *threshold* de perda  $\mathbf{K}$  (único, a partir da truncagem, e sempre negativo), de maneira que a probabilidade de que a perda do portfólio sobre dado horizonte específico de tempo que exceda esse valor é  $\varepsilon$ . Por sua vez, trunca-se o espaço de  $\varepsilon$ , isto é, a cauda esquerda, em geral, em valores como, aproximadamente, 0.05, 0.1, 0.25, ou 0.5, por exemplo, aí partir disso avalia-se a perturbação em  $\varepsilon$ . Então, as informações incorporadas na truncagem do  $\mathbf{K}$  refletem a aversão ao risco do operador e a forma de escala (uma estatística) para a distribuição pretendida. Tal restrição traz a probabilidade de cauda esquerda. Então,  $\mathbf{K}$  determina o ponto da abcissa sobre o qual os valores observados ou observáveis mais a esquerda podem trazer casos atípicos. Enquanto a outra restrição de risco é a perda esperada condicional que excede o *VaR*, isto é, o *CVaR*. De maneira que *VaR*

e *CVaR* são métodos que podem ser montados de forma robusta e sem depender de supostos paramétricos (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

O Capítulo de resultados que é o seguinte (adiantando-o) traz  $\omega = 1$ . para a análise dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica, por ser um caso univariado. Com isso, a modelagem da série temporal caótica parte da Subseção 3.1.4 (não obstante, assume-se as duas Subseções seguintes: 3.1.2 e 3.1.3). E, sem nenhuma perda de generalidade, faz-se a análise de um componente individual do portfólio.

### 3.1.2 Quadro média-variância

Para a modelagem. Faz-se  $\vec{X} = (X_1, \dots, X_m)$  denotar  $m$  retornos de ativos ao longo de um único período de tempo com densidade conjunta,  $g(\vec{x})$ , com retornos médios  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  e matriz de covariância  $m \times m$ . Portanto  $\Sigma : \Sigma_{ij} = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mu_i \mu_j$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . Ao assumir que  $\vec{\mu}$  e  $\Sigma$  podem ser estimados a partir dos dados. Então o retorno do portfólio em que obtém-se os pesos por meio de  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_m)$  é o seguinte

$$X = \sum_{i=1}^m \omega_i X_i,$$

com média  $\mathbb{E}(X) = \vec{\omega} \vec{\mu}^T$  e variância  $V(X) = \vec{\omega} \Sigma \vec{\omega}^T$ . (Às vezes atribui-se este formato para a fórmula da variância porque permite visualizar a atribuição dos pesos no portfólio).

Na teoria do portfólio (moderna) padrão minimiza-se  $\mathbf{V}(x)$  para todo  $\vec{\omega}$  sujeito a  $\mathbb{E}(X) = \mu$  para o retorno médio fixo desejado  $\mu$ . Tal que ao maximizar-se o retorno esperado  $\mathbb{E}(X)$  sujeito à variância fixa  $\mathbf{V}(X)$  tem-se o equivalente.

Para estabelecer associação com entropia representam-se dois casos. Este primeiro que segue: A distribuição conjunta  $g(\vec{x})$  de retornos dos ativos é uma distribuição multivariada *gaussiana*  $N(\vec{\mu}, \sigma^2)$ . Assumir normalidade é equivalente a assumir que  $g(\vec{x})$  tem máxima entropia de Shannon (1948), por sua vez, entre todas as distribuições multivariadas que têm estatísticas de primeira e de segunda ordem  $\vec{\mu}$  e  $\Sigma$ . Não obstante, para uma média fixa  $\mathbb{E}(X)$ , minimizar a variância

$V(X)$  é equivalente a minimizar a entropia, isto é, incerteza, de  $X$ . De tal maneira que se a normalidade conjunta implique que  $X$  é normal univariada para qualquer escolha de pesos, a variável de entropia para  $N(\mu, \sigma^2)$  é  $H = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$ . Este é o caso de informação completa (PHILIPPATOS; WILSON, 1972; ZHOU; TONG, 2013; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Após esse caso, o segundo caso é o de distribuição multivariada desconhecida.

### 3.1.3 Distribuição multivariada desconhecida

Ao assumir que é viável estimar a estrutura de segunda ordem no caso padrão, antes demonstrado. Então pode-se escolher os pesos para o portfólio e encontrar um desempenho para média-variância. O que determina  $\mathbb{E}(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ . Entretanto, não se "conhece" a real distribuição do retorno  $X$ . O fato (estritamente) principal é que "assumir"  $X$  como normal  $N(\mu, \sigma^2)$  é equivalente a assumir que a entropia de  $X$  é maximizada. Isso é porque esta normal *gaussiana* maximiza a entropia para uma dada média e variância (PHILIPPATOS; WILSON, 1972; ZHOU; TONG, 2013; GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

A estratégia do modelo consiste de generalizar isso ao substituir a variância  $\sigma^2$  por duas restrições para a cauda esquerda do *VaR* e modelar o retorno do portfólio como uma extensão de máxima entropia para essas restrições. Em conjunto com outra restrição para o desempenho geral ou para o crescimento do portfólio. (Em tudo que segue, conforme Geman, Geman e Taleb (2015)).

### 3.1.4 Restrições de riscos de cauda esquerda

Ao deixar  $X$  com densidade de probabilidade  $f(x)$ . E, deixar  $\mathbf{K} < 0$  ser uma constante escolhida para ser consistente com a riqueza do tomador de risco. Para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $v_- < \mathbf{K}$ . Então as restrições *VaR* do portfólio são as seguintes:

#### 3.1.4.1 Probabilidade de cauda

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbf{K}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{K}} f(x)dx = \varepsilon.$$

### 3.1.4.2 Valor em Risco Condicional

CVaR:

$$\mathbb{E}(X|X \leq \mathbf{K}) = v_-.$$

Ao assumir 3.1.4.1, então, a restrição 3.1.4.2 é equivalente a

$$\mathbb{E}(XI_{(X \leq \mathbf{K})}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{K}} xf(x)dx = \epsilon v_-.$$

Dado os parâmetros do VaR:  $\Theta = (\mathbf{K}, \epsilon, v_-)$ , ao deixar  $\Omega_{var}(\theta)$  denotar o conjunto de densidades de probabilidade  $f$  que satisfaçam as duas restrições. Nota-se que  $\Omega_{var}(\theta)$  é convexo, isto é,  $f_1, f_2 \in \Omega_{var}(\theta)$  o que implica em  $\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2 \in \Omega_{var}(\theta)$ . Depois segue-se o passo de adicionar uma restrição para a média global.

### 3.1.5 Caso normal

Ao assumir a suposição de que  $X$  é *gaussiano* com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Em princípio, é possível satisfazer as restrições do VaR pois têm-se dois parâmetros livres. Então, as restrições de cauda esquerda determinam  $\mu$  e  $\sigma$ .

Satisfazer as restrições leva para uma desigualdade no estilo "no free lunch" (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Ao deixar  $\eta(\epsilon)$  ser o  $\eta$ -quantil da distribuição normal padrão, ou seja,  $\eta(\epsilon) = \Phi^{-1}(\epsilon)$  em que  $\Phi$  é a função densidade acumulada (c.d.f.) da distribuição normal padrão  $\phi(x)$ . Então, configura-se o seguinte:

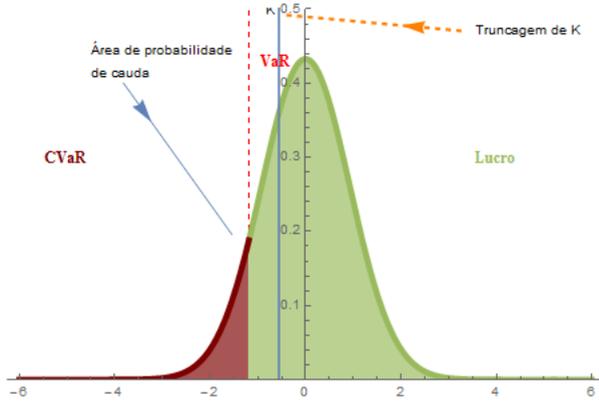
$$B(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon \eta(\epsilon)} \phi(\eta(\epsilon)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \eta(\epsilon)} \exp\left[-\frac{\eta(\epsilon)^2}{2}\right].$$

**Proposição um:** Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e satisfaz as duas restrições do VaR, então a média e a variância são dadas por:

$$\mu = \frac{v_- + \mathbf{K}B(\epsilon)}{1 + B(\epsilon)}, \quad \sigma = \frac{\mathbf{K} - v_-}{\eta(\epsilon)(1 + B(\epsilon))}.$$

Deve-se notar que  $B(\epsilon) < -1$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B(\epsilon) = -1$ . (Demonstração ao fim desta Subseção.)

Figura 9 – Restrições de riscos de cauda esquerda



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: Ao se estabelecer  $\mathbf{K}$  (o  $VaR$  que é indicado através da linha azul), por sua vez, através da truncagem. Então, com a probabilidade  $\varepsilon$  (isto é, a área que se inicia na linha azul) de exceder-lhe tem-se na relação com o valor em risco condicional mais à esquerda  $v_-$  a expressão  $\varepsilon v_-$ . Ou seja, é a média da cauda esquerda.

Pode-se observar que as duas restrições do  $VaR$  levam para as duas equações em  $\mu$  e  $\sigma$ :

$$\mu + \eta(\varepsilon)\sigma = \mathbf{K}, \quad \mu - \eta(\varepsilon)B(\varepsilon)\sigma = v_-.$$

Consideram-se as condições em que as restrições do  $VaR$  permitem um retorno médio *positivo*  $\mu = \mathbb{E}(X) > 0$ . Primeiro, checka-se a partir da equação linear acima em  $\mu$  e  $\sigma$  em termos de  $\eta(\varepsilon)$  e  $\mathbf{K}$ , por sua vez, encontra-se que  $\sigma$  aumenta como  $\varepsilon$  aumenta para qualquer média fixa  $\mu$ , e, não obstante, que  $\mu > 0$  se, e, somente, se  $\sigma > \frac{\mathbf{K}}{\eta(\varepsilon)}$ , ou seja, aceita-se um limite inferior na variância que aumenta com  $\varepsilon$ , como uma propriedade. Com isso, a partir da expressão para  $\mu$  na Proposição um chega-se em

$$\mu > 0 \Leftrightarrow |v_-| > \mathbf{K}B(\varepsilon)$$

Observa-se que a única maneira de ter um (retorno esperado positivo) é acomodar um risco suficientemente grande, expresso por *trade-offs* entre os parâmetros de risco  $\Theta$  para satisfazer a desigualdade acima.

**Demonstração da proposição um:**

Ao deixar que  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , a restrição de probabilidade de cauda é

$$\varepsilon = \mathbb{P}(X < \mathbf{K}) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{\mathbf{K} - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mathbf{K} - \mu}{\sigma}\right).$$

Pela definição  $\Phi(\eta(\varepsilon)) = \varepsilon$ . Tal que,

$$\mathbf{K} = \mu + \eta(\varepsilon)\sigma \tag{2}$$

A restrição de CVaR:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X; X < \mathbf{k}) &= \int_{-\infty}^{\mathbf{K}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} dx \\ &= \mu\varepsilon + \sigma \int_{-\infty}^{(\mathbf{K} - \mu)/\sigma} x \Phi(x) dx \\ &= \mu\varepsilon - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(\mathbf{K} - \mu)^2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Desde que,  $\mathbb{E}(X; X < \mathbf{K}) = \varepsilon v_-$ , e a partir da definição de  $B(\varepsilon)$  obtém-se

$$v_- = \mu - \eta(\varepsilon)B(\varepsilon)\sigma \tag{3}$$

Ao resolver (1) e (2) para  $\mu$  e  $\sigma^2$  obtém-se as expressões para a proposição um. Tipo, por simetria para a desigualdade dá a cauda superior da normal padrão. Tem-se que para  $x < 0$ ,  $\Phi(x) \leq \frac{\Phi(x)}{-x}$ . Ao escolher  $x = \eta(\varepsilon) = \Phi^{-1}(\varepsilon)$  chega-se em  $\varepsilon = \mathbb{P}(X < \eta(\varepsilon)) \leq$

$-\varepsilon B(\varepsilon)$  ou  $1 + B(\varepsilon) \leq 0$ . Desde que a desigualdade dá a cauda superior que é assintoticamente exata em  $x \rightarrow \infty$  então tem-se que  $B(0) = -1$ . Adicionalmente, assume-se a expressão (8).

### 3.1.6 Hipótese de mistura de distribuições

A mistura de duas normais fornece uma extensão útil para o caso *gaussiano* em finanças. Conforme Geman, Geman e Taleb (2015), a Hipótese de Mistura de Distribuições (MDH) refere-se a uma mistura de duas normais e é amplamente investigada, por exemplo, como uma mistura infinita de distribuições normais para os retornos de estoque que decorre da introdução de um "*relógio estocástico*" que explica a taxa de chegada desigual do fluxo de informações nos mercados financeiros, além disso, os operadores de opções usam misturas para respostas de caudas pesadas, e para examinar a sensibilidade de um portfólio para um aumento da curtose. Representa-se a mistura de distribuições por meio de somas de c.d.f.'s (em que "s" indica singular) de componentes das distribuições; para uma única série temporal ela capta bem duas trajetórias adversas ao longo do tempo, por exemplo, se ela traz duas forças atratoras então a distribuição pode descreve-las bem até um certo limite.

Considera-se a mistura

$$f(x) = \lambda N(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \lambda)N(\mu_2, \sigma_2^2). \quad (4)$$

Testa-se o caso-base em que se fixa a média geral  $\mu$ , de tal maneira que  $\lambda = \varepsilon$  e  $\mu_1 = v_-$  no caso em que  $\mu_2$  é restrito para ser  $\frac{\mu - \varepsilon v_-}{1 - \varepsilon}$ . Segue que as restrições de cauda esquerda são aproximadamente satisfeitas para  $\sigma_1, \sigma_2$  suficientemente pequenos. Quando  $\sigma_1 \approx \sigma_2 = 0$ , a densidade é composta por dois picos (pequenas variâncias normais), por sua vez, a esquerda centrada em  $v_-$  e a direita centrada em  $\frac{\mu - \varepsilon v_-}{1 - \varepsilon}$ . Aí no caso extremo com a função delta de Dirac para a dinâmica *Stop Loss*. Pode-se encontrar uma introdução sobre esta função em Mantegna e Stanley (2000).

### 3.1.7 Máxima entropia

Conforme Geman, Geman e Taleb (2015), ocorre que, na prática, a densidade  $f$  do retorno  $X$  é desconhecida e nenhuma teoria fornece isso. Ao assumir que pode-se ajustar os parâmetros do portfólio para satisfazer as restrições do  $VaR$ , e talvez outra restrição no valor esperado de alguma função da média geral de  $X$ . Para calcular probabilidades e expectativas de interesse, por exemplo,  $\mathbb{P}(X > 0)$  ou a probabilidade de perder mais de  $2K$ , ou o retorno esperado dado que  $X > 0$ . Uma estratégia é de fazer tais estimativas em circunstâncias imprevisíveis consistentes com as restrições. Então, usa-se a extensão de entropia máxima (MEE) das restrições como modelo para  $f(x)$ . A entropia diferencial de  $f$  é  $h(f) = -\int f(x)\ln f(x)dx$ . Utiliza-se a entropia diferencial *estocástica* para se caracterizar a incerteza residual de um portfólio, nesta pesquisa, um componente individual que é uma série temporal caótica. A entropia é côncava no espaço de densidades com a definição:

$$h(\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2) \geq \alpha h(f_1) + (1 - \alpha)h(f_2).$$

A extensão de máxima entropia é então

$$f_{MEE} = \arg \max_{f \in \Omega} h(f)$$

em que  $\Omega$  é o espaço de densidade que satisfazem todas as restrições da forma  $\mathbf{E}\Phi_j(X) = c_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Assume-se que  $\Omega$  é não vazio. Sabe-se que  $f_{MEE}$  é único e (longe da fronteira de viabilidade) é uma distribuição exponencial em funções de restrição e tem a seguinte forma (onde utiliza-se para a caracterização de extensão de máxima entropia para as restrições (não obstante, ela associa-se com a família de distribuições exponenciais)):

$$f_{MEE}(x) = C^{-1} \exp\left(\sum_j \lambda_j \Phi_j(x)\right)$$

em que  $C = C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  é a constante de "normalização" (esta forma provém da diferenciação de  $J(f)$  com base na entropia e daí forçando a integral a ser igual a um e ao impor as restrições com o método de multiplicadores de *Lagrange*). Como se mostra nos casos três casos a seguir.

O objetivo é de maximizar a entropia sujeito às restrições do  $VaR$  e junto a de outras que se queiram adicionar. De fato, as restrições do  $VaR$ , de maneira isolada, não admitem uma extensão de máxima entropia, uma vez que não há restrição para a densidade de  $f(x)$  para  $x > \mathbf{K}$ . A entropia pode ser feita arbitrariamente grande de modo a permitir que  $f$  seja identicamente a  $C = \frac{1-\varepsilon}{N-\mathbf{K}}$  sobre  $\mathbf{K} < x < N$  e ao deixar que  $N \rightarrow \infty$ . Supõe-se, no entanto, que se tem uma restrição adjacente (ou mais de uma) sobre o comportamento de  $f$  que são compatíveis com as restrições do  $VaR$ , por sua vez, no sentido de que o conjunto de densidades  $\Omega$  que satisfaçam todas as restrições não é vazio. Tal que  $\Omega$  depende dos parâmetros  $VaR$   $\Theta = (\mathbf{K}, \varepsilon, v_-)$  junto com os parâmetros associados às restrições adicionais.

### 3.1.7.1 Restrição na média global

O primeiro caso é de adicionar a restrição no retorno médio, ou seja,  $\mathbb{E}(X) = \mu$ . Desde que  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X \leq K)\mathbb{E}(X|X \leq K) + \mathbb{P}(X > \mathbf{K})\mathbb{E}(X|X > \mathbf{K})$ , ao adicionar a restrição média é equivalente a adicionar

$$\mathbb{E}(X|X > \mathbf{K}) = v_+$$

em que  $v_+$  satisfaz  $\varepsilon v_- + (1 - \varepsilon)v_+ = \mu$ . Então define-se

$$f_-(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\mathbf{K}-v_-)} \exp\left[-\frac{\mathbf{K}-x}{\mathbf{K}-v_-}\right] & \text{se } x < \mathbf{K}, \\ 0 & \text{se } x \geq \mathbf{K}. \end{cases}$$

E ainda

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{1}{(v_+-\mathbf{K})} \exp\left[-\frac{x-\mathbf{K}}{v_+-\mathbf{K}}\right] & \text{se } x > \mathbf{K}, \\ 0 & \text{se } x \leq \mathbf{K}. \end{cases}$$

Então pode-se checar que ambos  $f_-$  e  $f_+$  integram em um. Em que  $f_-$  significa para a função acima que os valores menores do que  $\mathbf{K}$  são contabilizados e os maiores ou igual a  $K$  iguais a 0 (e remete à cauda esquerda). De maneira que para  $f_+$  é o contrário (e remete à cauda direita). Daí então

$$f_{MEE}(x) = \varepsilon f_x + (1 - \varepsilon)f_+(x)$$

é a extensão de máxima entropia (MEE) das três restrições. Primeiro:

1.  $\int_{-\infty}^{\mathbf{K}} f_{MEE}(x)dx = \varepsilon;$
2.  $\int_{-\infty}^{\mathbf{K}} xf_{MEE}(x)dx = \varepsilon v_-;$
3.  $\int_{\mathbf{K}}^{\infty} xf_{MEE}(x)dx = (1 - \varepsilon)v_+.$

Depois que as restrições são satisfeitas. Segundo (a  $f_{MEE}$  tem uma forma exponencial nas funções de restrições):

$$f_{MEE}(x) = C^{-1} \exp - [\lambda_1 x + \lambda_2 I_{(x \leq \mathbf{K})} + \lambda_3 x I_{(x \leq \mathbf{K})}]. \quad (5)$$

Em que  $C = C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  é a constante de "normalização". A forma de  $f_-$  depende da relação entre  $\mathbf{K}$  e o CVaR, por sua vez, a partir de  $v_-$ . Portanto, quanto mais próximo  $v_-$  é de  $K$  então mais rápido a cauda cai. Como  $v_- \rightarrow K$ , daí  $f$  converge para o pico de uma unidade em  $x = \mathbf{K}$ .

### 3.1.7.2 Restrição na média absoluta

Ao utilizar-se restrição para a média absoluta

$$E|X| = \int |x|f(x)dx = \mu,$$

então, a extensão de máxima entropia é menos aparente, mas ainda pode ser encontrada. Ao definir  $f_-(x)$  como antes e deixar

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{(2 - \exp(-\lambda_1 \mathbf{K}))} \exp(-\lambda_1 |X|) & \text{se } x \geq \mathbf{K}, \\ 0 & \text{se } x < \mathbf{K}. \end{cases}$$

Então  $\lambda_1$  pode ser escolhido de forma que

$$\varepsilon v_- + (1 - \varepsilon) \int_{\mathbf{K}}^{\infty} |x|f_+ dx = \mu.$$

### 3.1.7.3 Leis de potência para a cauda direita

Se os retornos têm "caudas pesada", e, em particular, se a cauda direita decai como uma lei de potência, ao invés de exponencialmente

ou como uma densidade normal. Pode-se adicionar essa restrição às restrições do *VaR* ao invés de trabalhar com o caso geral ou absoluto. Tal que a forma exponencial da extensão de máxima entropia para a densidade  $f_+(x)$  traz uma lei de potência

$$f_+(x) = \frac{1}{C(\alpha)}(1 + |x|)^{-(1+\alpha)}, \quad x \geq \mathbf{K},$$

para  $\alpha > 0$  se a restrição for da forma

$$E(\log(1 + |X|)|X > \mathbf{K}) = A.$$

Além disso, a partir da teoria extensão de máxima entropia, sabe-se que o parâmetro é obtido minimizando o logaritmo da função de normalização. Neste caso, verificamos que

$$C(\alpha) \doteq \int_{\mathbf{K}}^{\infty} (1 + |x|)^{-(1+\alpha)} dx = \frac{1}{\alpha}(2 - (1 - \mathbf{K})^{-\alpha}).$$

E segue que  $A$  e  $\alpha$  satisfazem a equação

$$A = \frac{1}{\alpha} - \frac{\log(1 - \mathbf{K})}{2(1 - \mathbf{K})^\alpha - 1}.$$

Equação de determinação da taxa de decaimento para um determinado  $A$  ou, alternativamente, determina a restrição para o valor de  $A$  necessária para conseguir uma lei de potência particular  $\alpha$ . Então, a extensão de máxima entropia, com a restrição no log do retorno

$$f_{ME}(x) = \varepsilon I_{(x \leq \mathbf{K})} \frac{1}{(\mathbf{K} - v_-)} \exp\left[-\frac{\mathbf{K} - x}{\mathbf{K} - v_-}\right] + (1 - \varepsilon) I_{(x > \mathbf{K})} \frac{(1 + |x|)^{-(1+\alpha)}}{C(\alpha)}. \quad (6)$$

### 3.1.8 Comportamento multi-períodos

Aí pode-se considerar o caso com o comportamento multi-períodos. O caso de restrição na média global se aproxima do caso *gaussiano* regular. Não no caso de leis de potência.

Para o caso de restrição na média global a função característica pode ser escrita da forma:

$$\Psi^A(t) = \frac{e^{iKt}(t(K - v_- \varepsilon + v_+(\varepsilon - 1)) - i)}{(Kt - v_- t - i)(-1 - it(K - v_+))} \quad (7)$$

Por fim, pode-se derivar de convoluções que a função  $\Psi^A(t)^n$  converge para um  $n$ -somaatório *gaussiano*. E, a função característica do limite da média tem a forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^A(t)^n = e^{it(v_+ + \varepsilon(v_- - v_+))}, \quad (8)$$

que é a função característica da função delta de Dirac, aí o efeito da lei dos grandes números traz o mesmo resultado que o caso de restrição na média global que é o *gaussiano* com a média  $(nv_+ + \varepsilon(v_- - v_+))$ . Quanto ao caso de lei de potência, a convergência para a *gaussiana* ocorre se  $\alpha \geq 2$  de forma extremamente lenta (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). O que sugere a hipótese de lei cúbica inversa (GABAIX, 2008; TALEB, 2014; SILVA; MATSUSHITA, 2017).

Em síntese, a maximização da entropia como o reconhecimento de incerteza das distribuições de ativos. Sob restrições de *VaR* e *CVaR* obtém-se o portfólio de *barbell* como solução, que estende uma configuração de abordagem do teorema de separação de dois fundos. No modelo, o *Stop-loss* desempenha um papel maior na determinação das propriedades estocásticas do que a composição do portfólio. Tal que, o *Stop-loss* não é desencadeado por componentes individuais, mas por variações no total portfólio,  $X$ . O que, por sua vez, daí permite ao operador em concentrar-se nos componentes individuais do portfólio (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Nesta abordagem, a cauda esquerda é o que se pode ter algum controle. Não obstante, o objetivo desta dissertação é de concentrar-se em um componente individual do portfólio, este modelo serve para o objetivo de modelar uma série temporal de preço de ativo financeiro caótica, por sua vez, ela parte do modelo descrito no Capítulo 2 desta dissertação.

Em síntese, para calcular-se a função de densidade de probabilidade de extensão de máxima entropia (para a série de aleatoriedade falsa) pode ser por meio da aplicação do método de multiplicadores de Lagrange, emprego da função interpolação, e método de Newton (ZELLNER; HIGHFIELD, 1988).

## 3.2 Outras possibilidades de distribuições de máxima entropia

Em finanças existem outras aplicações do princípio de máxima entropia, além de o investigado, por exemplo em precificação de ativos e mesmo em seleção de portfólio. No sentido de que a entropia de uma variável aleatória mede a incerteza na teoria da probabilidade. Ela quantifica a complexidade exponencial de um sistema dinâmico, ou seja, o fluxo médio de informação por unidade de tempo na teoria dos sistemas dinâmicos.

Para Zhou e Tong (2013), a aplicação da entropia nas finanças pode ser considerada como a extensão da entropia de informação e a entropia de probabilidade e é uma ferramenta importante na seleção de portfólio e no preço de ativos. Philippatos e Wilson (1972) iniciaram a pesquisa ao aplicar o conceito de entropia à seleção de portfólio, propõem uma abordagem de entropia média em comparação aos métodos tradicionais ao encontrar que as carteiras de entropia média eram consistentes com a covariância completa de Markowitz. Existem ainda formas de entropia mais generalizadas para precificação de ativos, por exemplo, derivativos, não obstante, de opções. Já Buchen e Kelly (1996) usam o princípio de máxima entropia no preço das opções e estimam a distribuição de um ativo para um conjunto de preços de opções, daí mostram que a distribuição máxima de entropia é capaz de se adequar com uma função de densidade de probabilidade conhecida, com o resultado de que pode simular os preços de opções a preços de exercício diferentes. Bem como a entropia de Rennyi e a entropia de Tsallis, que é uma generalização da entropia de Shannon (1948) (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

A entropia não extensiva de Tsallis apresenta um quadro interessante para aplicações em finanças. Tem-se a hipótese de que distribuições de mercados financeiros tem os retornos melhor aproximados por distribuição *q-gaussiana* na estrutura extensiva de Tsallis. Em finanças, para a gestão de risco, o sinal de processamento é de grande interesse. Dentro desse contexto, a forma de entropia associada com uma probabilidade dependente do tempo é a entropia de (SHANNON, 1948), mas ela não dá conta para interações de longo alcance (Isto é, é extensiva ou aditiva). Em sua generalização, a medida de informação de Tsallis (ou entropia de Tsallis) serve para isso. Esta entropia não extensiva

generaliza a de Shannon (1948) como um recurso para a análise de memória longa, e como uma ferramenta para a análise de complexos, não-lineares e sinais não estacionários. Por sua vez, há uma literatura crescente em aplicações em economia e finanças (GRADOJEVIC; GENCAÏ, 2011).

## 4 RESULTADOS

*Este Capítulo expõe resultados de pesquisa desta dissertação. A Seção 4.1. traz estimativas de modelagem para com a série temporal do ativo financeiro caótica. A Subseção 4.1.1 apresenta estimativas de restrições VaR e CVaR para a cauda esquerda. A Subseção 4.1.2 exhibe estimativas para o caso normal em termos de PDF, CDF e de plotagem quantílica. A Subseção 4.1.3 mostra as estimativas para a mistura de duas normais. A Subseção 4.1.4 exhibe as estimativas para o caso de máxima entropia. A Subseção 4.1.5 expõe uma análise para a cauda direita da série temporal caótica. Por fim, a Subseção 4.1.6 traz para ela o ajuste de leis de potência. Adicionalmente, a Seção 4.2 traz uma comparação de cauda, isto é, distribuição empírica versus distribuição gaussiana. E a Seção 4.3 que traz alguns aspectos resultantes de modelagem com a distribuição de Pareto do tipo I e distribuição de estável de Levy para a série temporal caótica.*

### 4.1 Estimativas de modelagem para com a série temporal do ativo financeiro caótica

Assume-se que a série temporal do ativo financeiro caótica é igual ao retorno  $X$  do portfólio e assim apresentam-se os seguintes resultados de estimativas.

#### 4.1.1 Estimativas para as restrições de cauda esquerda

Ao estabelecer uma truncagem em  $\alpha = 0.99$  para a cauda esquerda, o que é uma propriedade sobre o formato da distribuição. Então, conforme 3.1.4.1, e 3.1.4.2 calcula-se o valor em risco, por meio da função de densidade acumulada inversa da distribuição normal de  $X$ , ao se fazer um menos esta truncagem escolhida, obtém-se:

$$K = -6.81.$$

Antes

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbf{K}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{K}} f(x)dx = 0.01,$$

então

$$\mathbb{E}(X|X \leq \mathbf{K}) = -7.92,$$

ou

$$\mathbb{E}(XI_{(X \leq \mathbf{K})}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{K}} xf(x)dx = -7.92.$$

Estatísticas que servem para o formato da distribuição.

#### 4.1.2 Estimativas para o caso normal

A Subseção traz a modelagem de  $X$  conforme a Subseção 3.1.5. Ou seja, parte-se do caso normal, então com média  $\mu$  e variância  $\sigma$ . Inicialmente, dispõem-se graficamente a PDF da distribuição e em seguida a CDF da distribuição, ambas em comparação com a distribuição empírica dos dados. E, após isso, segue a plotagem quantílica para uma análise de cauda.

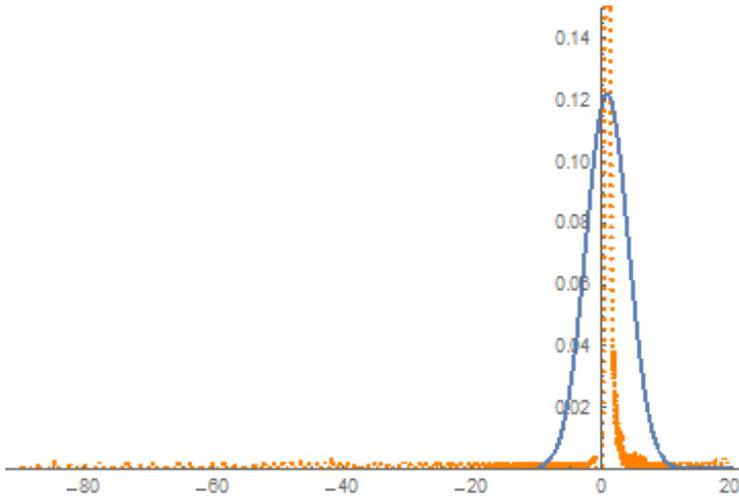
Assim, a relação entre função densidade probabilidade (PDF) e histograma suavizado, no mesmo gráfico. Na linha em azul tem-se o ajuste *gaussiano* para os dados da amostra. Onde, logo acima do valor de oito para esta distribuição, ela tende a não fornecer nenhuma probabilidade de eventos para a esquerda.

Após isso, mostra-se a função densidade acumulada (CDF) (em comparação com a distribuição empírica).

Segue então a plotagem quantílica que dá o ajuste da distribuição para com os dados, ou seja, uma inspeção de cauda.

Feito isso, em seguida as ilustrações da PDF, CDF, e plotagem quantílica em relação à distribuição empírica, então para a mistura de duas normais. E a análise de ajuste dos dados por meio de testes-padrão.

Figura 10 – Histograma suavizado para o caso normal



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste *gaussiano* da distribuição em linha azul não alcança o evento extremo situado à extrema esquerda do centro do histograma.

#### 4.1.3 Estimativas para o caso de mistura de distribuições

Inicialmente, plota-se PDF e histograma suavizado para a mistura de duas normais.

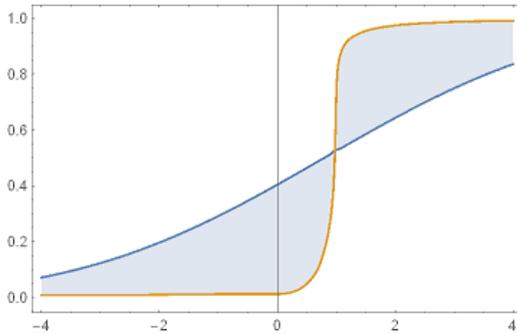
Daí plota-se a CDF em comparação com distribuição empírica.

Por fim, plota-se a forma quantílica para a mistura de duas normais, isto é, uma inspeção de cauda.

Assim, a Tabela 3 traz alguns testes-padrão de ajustes da distribuição para com os dados da série temporal do ativo financeiro caótica.

Cabe destacar que rejeita-se a hipótese nula de que os dados distribuem-se conforme a mistura de duas normais, então representada através da expressão (4), a um nível de 5 por cento com base no teste de Cramér-von Mises. Portanto, rejeita-se a hipótese de que a

Figura 11 – CDF para o caso normal



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste *gaussiano* da distribuição em linha azul em relação à distribuição empírica em amarelo.

série temporal caótica segue essa mistura. Não obstante, o objetivo do modelo de portfólio é obter a máxima incerteza para a modelar com a extensão de máxima entropia.

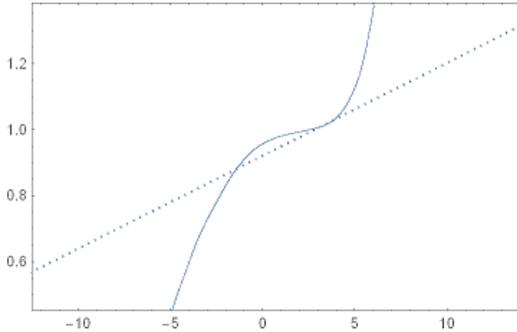
Lembrando que de maneira simples pode-se impor na mistura da distribuição: por exemplo, uma distribuição de Cauchy ou uma  $t$  de Student com mais de um grau de liberdade, bem como qualquer outra distribuição disponível que seja útil para análise e que melhore o ajuste para com diferentes tipos de dados.

#### 4.1.4 Estimativas para o caso de máxima entropia

Na prática, a real densidade do retorno de algum portfólio multivariado (mesmo tornando  $X$  univariado) é desconhecida, o que nenhuma teoria provê (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015).

Nesta subseção, ajusta-se os parâmetros do portfólio para satisfazer as duas restrições de cauda esquerda e outra para o valor esperado de  $X$ . Para obter com as restrições na extensão de máxima entropia um modelo para  $f(x)$  parte-se da entropia diferencial. Genericamente, uma medida de desordem para a distribuição. Então,

Figura 12 – Plotagem quantílica para o caso normal



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste *gaussiano* da distribuição em linha azul em relação à linha pontilhada que representa o seu ideal.

$$h(f) = - \int f(x) \ln f(x) dx = 0.09$$

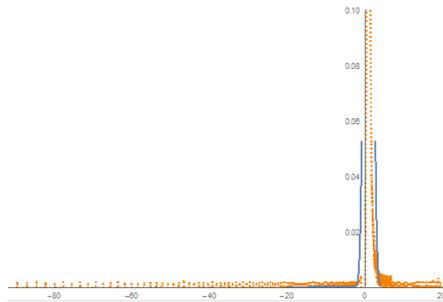
Então, a restrição de que  $x > \mathbf{K}$  para a extensão de máxima entropia. De maneira que para o valor esperado de  $X$ .

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(X \leq K) \mathbb{E}(X|X \leq K) + \mathbb{P}(X > \mathbf{K}) \mathbb{E}(X|X > \mathbf{K}) = 0.7959.$$

Tal que  $v_+$  satisfaz  $\epsilon v_- + (1 - \epsilon) v_+ = 0.7959$ . Ao fazer com que as funções integrem em um, daí se chegar na extensão de máxima entropia para as três restrições, e considerando também que as restrições estão satisfeitas. Modela-se a equação (5) por meio do algoritmo de Newton e multiplicadores de Lagrange, no formato simbolicamente. – Aceita-se a hipótese nula de que os dados distribuem-se através da equação (5) a um nível de 5 por cento com base no teste de Cramér-von Mises e a um nível de 5 por cento também no teste de Kolgomorov-Smirnov.

Após a tabela, ilustra-se a CDF (em relação à distribuição empírica) para a distribuição de máxima entropia, no caso de média global.

Figura 13 – Histograma suavizado para o caso de mistura de distribuições



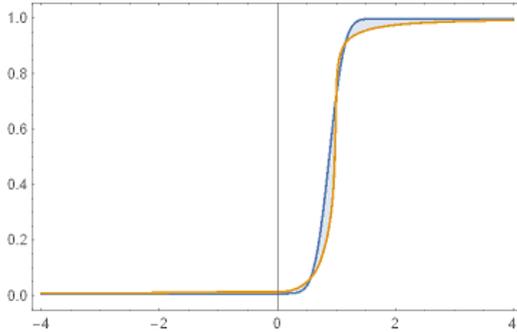
Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste *gaussiano* da distribuição em linha azul alcança até, aproximadamente,  $-20$  o evento extremo situado à extrema esquerda do centro do histograma.

#### 4.1.5 Estimativas para a cauda direita

Estima-se que a hipótese nula de que os dados apenas para a cauda direita são distribuídos de acordo com uma lei de potência expressa através da expressão (6) como uma forma de generalização de uma distribuição do tipo de Pareto é rejeitado a um nível de 5 por cento com base nos testes de Cramér-von Mises e Kolmogorov-Smirnov. Ocorre um decaimento exponencial nos dados da cauda. Entretanto, por meio da expressão (6), ao modelar-se a distribuição de todos os dados de  $X$  não se rejeita a hipótese nula por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov a um nível de 5 por cento para a modelagem com tal distribuição.

Para fazer-se a análise da cauda direita a partir desta distribuição, utiliza-se esta reamostragem das observações de  $x$  que são maiores do que  $\mathbf{K}$ , conforme lado direito da expressão (6). Assim, faz-se uma análise desta cauda ao usar-se o logaritmo na base dois dela (pode-se adotar o procedimento de expressar perdas como valores positivos (LITTLE; RUBIN, 2002; MEUCCI, 2005), ou seja, em valor absoluto). Isto é, o logaritmo na base dois para o retorno  $X$  para uma distribuição

Figura 14 – CDF para o caso de mistura de distribuições



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste da mistura de duas normais da distribuição em linha azul em relação à distribuição empírica em amarelo.

com média igual a zero e desvio padrão igual a um.

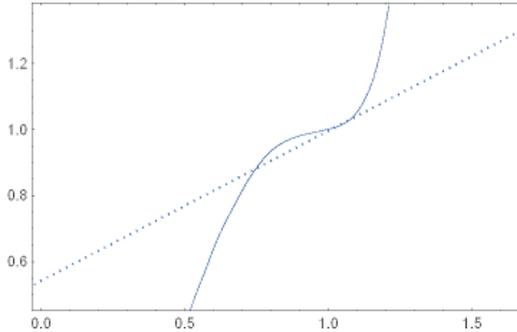
Na Figura 17 tem-se  $f(x)$  à esquerda e  $x$  à direita. Então, em seguida, na Figura 18 ilustra-se o comportamento através de sua forma logarítmica, em base dois.

Com isso, a partir da especificação da equação (6) utiliza-se ainda de leis da potência para a série temporal do ativo financeiro caótica.

#### 4.1.6 Ajuste de leis de potência

Calcula-se a lei da potência para a série temporal do ativo financeiro caótica por meio do método de ajuste linear por regressão ("*Fit model linear*"). Obtém-se, conforme o melhor ajuste dos parâmetros uma constante em 0.017 e uma lei de potência com expoente de cauda,  $\alpha$ , de 1.015. Resultado similar obtém-se com o método de máxima verosimilhança. Portanto, o que se faz é plotar o ajuste de cauda conforme a lei de potência obtida. Na figura a seguir faz-se o ajuste para a cauda direita.

Figura 15 – Plotagem quantílica para o caso de mistura de distribuições



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste da mistura aponta para duas trajetórias.

O expoente de cauda,  $\alpha$ , de 1.015, sugere uma distribuição de Cauchy, entretanto, para ela o ajuste destes dados é rejeitado pelos testes-padrão.

## 4.2 Comparação de cauda: distribuição empírica versus distribuição gaussiana

Esta Seção traz uma abordagem alternativa para comparar a distribuição empírica versus a distribuição *gaussiana*. Procedimento que consiste em separar a expressão de cauda direita de distribuição da lei de potência obtida no lado direito de (6), por sua vez, de dados da cauda direita. Para fazer uma relação com a CDF da distribuição *gaussiana* obtida na Subsubseção 3.1.5. Isto serve para fazer uma comparação direta por meio da disposição na ilustração gráfica.

Distribuição empírica em vermelho e distribuição *gaussiana* em *dashed* (isto é, a linha pontilhada em azul). Observa-se que os dados não se distribuem conforme a distribuição *gaussiana*. O que não fica muito intuitivo. Na figura, à esquerda é o logaritmo na base dois de  $f(x)$  e a direita é o logaritmo na base dois de  $x$ . O ajuste é observável

Tabela 3 – Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica para com a mistura de duas distribuições normais

Teste	Estatística	<i>P-Value</i>
Anderson-Darling	12841.29	0.
Cramér-Von Misses	2623.97	$5.517808432387028 \times 10^{-14}$
Kolmogorov-Smirnov	0.73	$9.2453722586 \times 10^{-7053}$
Kuiper	0.83	$9.71627111663194 \times 10^{-9052}$
Pearson $\chi^2$	372087.75	$1.074064340427494 \times 10^{-80615}$

Fonte – Desenvolvida pelo autor. Nota: Para o teste de Anderson-Darling quanto melhor uma distribuição se ajusta aos dados, menor é a estatística. Já o teste de Cramér-Von Misses é um critério usado para julgar o ajuste de uma função de distribuição cumulativa em comparação com uma determinada função de distribuição empírica. Enquanto o teste de Kolmogorov-Smirnov traz um ajuste da distribuição empírica com a distribuição teórica. O teste Kuiper vai dizer se uma distribuição é contrariada por evidências existentes nos dados. Daí o de Pearson é para avaliar se um conjuntos de dados categóricos relacionam-se em tabelas de respectivas contingência.

na figura em aproximadamente 0.01.

Ao estimar a probabilidade de cauda com este arranjo de lei de potência obtém-se o valor de 0.0075 que serve para reajustar adequadamente a distribuição de lei de potência na cauda. Ou seja, um valor absoluto a partir da relação entre o tamanho da amostra de cauda em relação a amostra total dos dados.

### 4.3 Verificação de distribuição de Pareto do tipo I e distribuição estável de Levy para a série temporal do ativo financeiro caótica

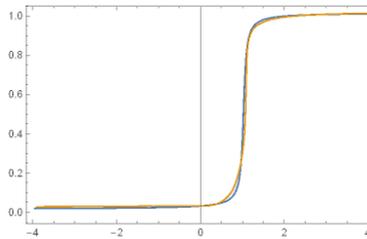
Ao estimar-se esta reamostragem dos dados para a cauda direita por meio de uma distribuição de Pareto do tipo I, então, encontra-se um expoente de cauda cujo valor é de 0.716. O que é rejeitado a um nível de 5 por cento com base no teste de Cramér-von Mises. Sendo

Tabela 4 – Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica para com a extensão de máxima entropia no caso de média global

Teste	Estatística	<i>P-Value</i>
Cramér-Von Misses	307.509	0.256
Kolmogorov-Smirnov	0.061	0.140

Fonte – Desenvolvida pelo autor.

Figura 16 – CDF para a distribuição de máxima entropia.



Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: O ajuste da distribuição em linha azul em relação à distribuição empírica em amarelo.

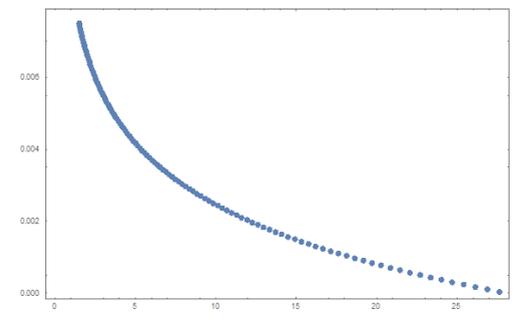
assim, para este tamanho de reamostragem, quando simulado, tende a super-estimar probabilidades de eventos. Ao se fazer a estimação desta série temporal caótica em uma distribuição estável do tipo no quadro de Levy, encontra-se um expoente de lei de potência cujo valor é 0.74, um parâmetro *beta* de assimetria cujo valor é  $-0.341$ , o que indica que a distribuição é leptocurtica, um parâmetro de localização cujo valor é 0.979 e um parâmetro de escala cujo valor é 0.043. O que é também rejeitado a um nível de 5 por cento com base no teste de Cramér-von Mises (FELLER, 1968; MANTEGNA; STANLEY, 2000).

Tabela 5 – Teste de ajustes dos dados da série temporal do ativo financeiro caótica com leis de potência

Teste	Estatística	<i>P-Value</i>
Kolmogorov-Smirnov	0.21	0.13

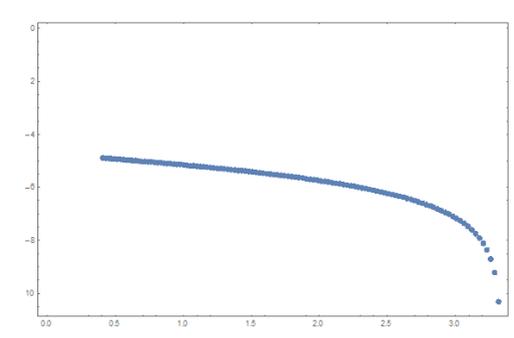
Fonte – Desenvolvida pelo autor.

Figura 17 – Análise de dados da cauda direita.



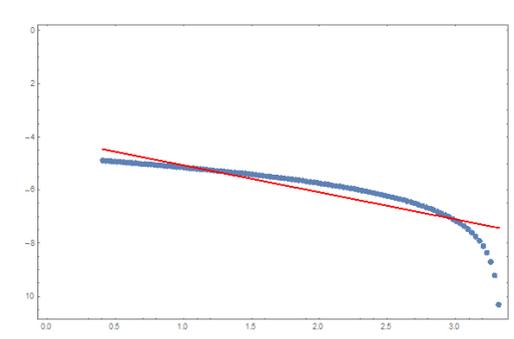
Fonte: Desenvolvida pelo autor. - Nota: observa-se um decaimento exponencial.

Figura 18 – Outra análise de dados da cauda direita.



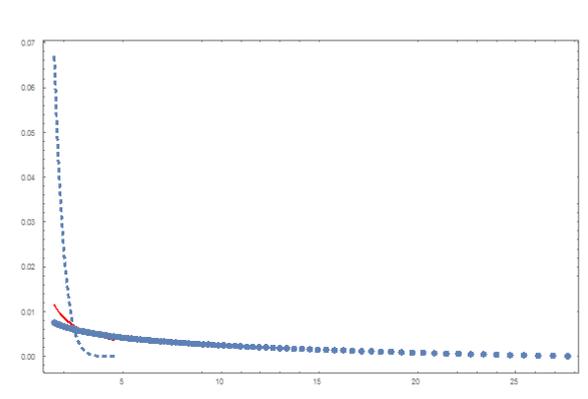
Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Figura 19 – Ajuste de lei de potência expresso na cauda direita.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Figura 20 – Comparação de cauda – distribuição empírica versus distribuição gaussiana.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

## 5 CONCLUSÃO

Observamos que o estudo objeto desta dissertação de incorporar uma dinâmica financeira determinística em um modelo de mercado financeiro para a gestão de fundos de investimentos em portfólio caracteriza-se como um procedimento complementar de se fazer pesquisas na área de finanças. Por sua vez, o estudo de sistemas complexos traz para os modelos de gestão de portfólios a possibilidade de se conhecer um conjunto de informações úteis (em geral não consideradas) sobre os sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares para cada uma das séries temporais financeiras possíveis. De maneira que ao considerarmos uma dentre as maneiras em que os sistemas dinâmicos determinísticos podem ser acoplados aos modelos de mercado financeiro então podemos sugerir que um sistema determinístico não-linear de dinâmica financeira é um poderoso procedimento para complementar (ou substituir no caso de não houver dados suficientes) a análise de um processo estocástico em investigações de risco, retorno, imprevisibilidade e eventos extremos. (às vezes em detalhes)

Tendo em vista que o estudo de sistemas complexos traz para os modelos de mercados financeiros uma alternativa de investigação que permite um conhecimento prévio (às vezes em detalhes) dos riscos de cauda esquerda a partir de cada um dos sistemas determinísticos não-lineares subjacentes às séries temporais financeiras através da modelagem de comportamento coletivo emergente, a nível global. Modelagem que pode ser feita por meio da abordagem de risco sistêmico como foi visto na introdução quando se tratou de periodicidade. Ou, então, tal que cada um dos sistemas determinísticos não-lineares pode gerar outra série temporal cujo comportamento dinâmico pode ser investigado como um substituto para o verdadeiro processo estocástico em termos de análise. Assim, como implicação prática, ao investigar-se (o que não é recorrente na literatura de finanças) o quadro de evolução deste sistema dinâmico, isto é, a série temporal de ativo financeiro caótica, sob hipóteses de aleatoriedade e por meio de uma análise de um conjunto de estatísticas descritivas e de memória (através do expoente de Hurst) caótica cujos resultados confirmam a possibilidade de inves-

tingar o processo determinístico como se fosse um processo estocástico, bem como a análise por meio do modelo para a gestão de investimentos em portfólio por meio da hipótese de mistura de distribuições, máxima entropia e leis de potência.

A implicação teórica do estudo é de que se a análise da cauda esquerda é a única forma de se ter algum controle sobre o risco de um portfólio (GEMAN; GEMAN; TALEB, 2015). Então, este acréscimo da análise de sistemas determinísticos não-lineares subjacentes ao longo do tempo, em particular, para verificar a cauda esquerda traz a contribuição de que com isso se tem um nível maior de segurança (ou nível de conhecimento) para as operações, por sua vez, na prática de finanças quantitativas. E como sugestão de futuras pesquisas, cabe apenas aperfeiçoar este tipo de modelagem.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, A. Teoria econômica e caos. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 147–154, 1994. Disponível em: <<http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/2647/7949>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 31.

BACHELIER, L. *Theory of speculation*. [1900]. In: *The random character of stock market prices*. Cambridge: MIT Press, 1900. v. 1964. p. 17-78. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 19.

BAK, P.; TANG, C.; WIESENFELD, K. Self-organized criticality: an explanation of  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, v. 59, n. 4, p. 381–384, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 15, 29 e 30.

BARANGER, M. *Chaos, Complexity and Entropy. A physics talk for non-physicists*. 2001. Disponível em: <<http://necsi.org/projects/>>. Acesso em: 20 nov 2016. Citado 3 vezes nas páginas 15, 23 e 25.

BAUMOL, W. J. *Economic Dynamics*. EUA: Macmillan Co, 1970. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

BUCHEN, P. W.; KELLY, M. The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. *Finance Quantitative*, p. 143–159, 1996. Citado na página 80.

CARVALHO, F. J. C. D. Sobre ordem, incerteza e caos em economia. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 179–188, 1994. Disponível em: <<http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/607/7951>>. Citado na página 30.

CHARRAS-GARRIDO, M.; LEZAUD, P. Extreme value analysis: an introduction. *Journal de la Societe Francaise de Statistique*, v. 154, n. 2, p. 66–98, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.

DE-GRAUWE, P.; DEWACHTER, H. Chaos in the dornbusch model of the exchange rate. *Kredit und Kapital*, v. 25, n. 1, p. 26–54, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 15, 25, 32 e 48.

FAMA, E. Mandelbrot and the stable paretian hypothesis. *The Journal of Business*, v. 4, n. 36, p. 420–429, 1963. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 21.

FAMA, E. The behaviour of stock market prices. *Journal of Business*, v. 38, p. 34–105, 1965. Citado na página 21.

FAMA, E.; MILLER, M. H. *The Theory of Finance*. Hinsdale, Illinois, USA: Dryden Press, 1972. Citado na página 20.

FARMER, J. D. et al. What really causes large price changes? *Quantitative Finance*, v. 4, p. 383–397, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 37.

FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 3. ed. New York, NY, USA: John Wiley and Sons, 1968. v. 1. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 18 e 91.

FERNANDES, M.; GLEISER, I. A questão da dinâmica de preços de ativos financeiros. *Revista Brasileira de Economia*, v. 48, n. 2, p. 235–243, 1994. Disponível em: <<http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/rbe/article/view/601/7957>>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 31.

FRITTELLI, M. The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets. *Mathematical Finance*, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 67.

GABAIX, X. Power laws in economics and finance. *NBER Working Paper Series: National Bureau Of Economic Research*, 2008. Disponível em: <<http://www.nber.org/papers/w14299>>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 21, 22, 41 e 79.

GEMAN, D.; GEMAN, H.; TALEB, N. N. Tail risk constraints and maximum entropy. *Entropy*, v. 17, n. 6, p. 3724–3737, 2015. Citado 20 vezes nas páginas 15, 26, 27, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 67, 68, 69, 70, 71, 74, 75, 79, 80, 85 e 96.

GLERIA, I.; SILVA, S. D.; MATSUSHITA, R. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 2, p. 99–108, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 15, 23, 29 e 30.

GRADOJEVIC, N.; GENCAJ, R. Financial applications of nonextensive entropy. *IEEE SIGNAL PROCESSING MAGAZINE*, p. 116–122, 2011. Citado na página 81.

HAMILTON, J. D. *Time series analysis*. New Jersey, NJ, EUA: Princeton University Press, 1994. Citado na página 21.

IBRAGIMOV, R.; JOHAN, W. Portfolio diversification under local and moderate deviations from power laws. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 42, n. 2, p. 594–599, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 45.

IBRAGIMOV, R.; WALDEN, J. The limits of diversification when losses may be large. *Journal of Banking and Finance*, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 45.

JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physics Review*, v. 106, p. 620–630, 1957a. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 45.

JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics ii. *Physics Review*, v. 108, p. 171–190, 1957b. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 45.

KELLY, J. R. A new interpretation of information rate. *Bell Sys. Tech. J.*, v. 35, n. 4, p. 917–926, 1956. Citado na página 43.

KNIGHT, F. H. *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston, EUA: Houghton Mifflin, 1921. Citado na página 39.

LARRY, S. L.; DANIELA, S. Two lessons from fractals and chaos. *Complexity*, v. 5, n. 4, p. 35–43, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 15, 23, 27, 37 e 40.

LEBARON, B. Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A*, p. 397–404, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

LITTLE, J. A. R.; RUBIN, B. D. *Statistical Analysis with Missing Data*. EUA: Wiley, 2002. Citado na página 87.

MANDELBROT, B. Variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, v. 36, n. 4, p. 394–419, 1963. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 19, 21 e 37.

MANDELBROT, B. *Tractates, hasard et finance*. Paris: Flammarion, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 15, 26 e 27.

MANDELBROT, B. *Fractal and Scaling in Finance*. New Haven: Springer, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 15, 18, 19, 20, 21 e 28.

MANDELBROT, B.; HUDSON, R. L. *The (Mis)Behavior of Markets: A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*. Cambridge: Basic Books, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 21, 28 e 40.

MANDELBROT, B.; NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, v. 10, p. 422–437, 1968. Citado 5 vezes nas páginas 15, 17, 27, 28 e 62.

MANDELBROT, B.; TALEB, N. N. Mild vs. wild randomness: Focusing on those risks that matter, in: The known, the unknown and the unknowable in financial institutions: Measurement and theory advancing practice. In: \_\_\_\_\_. Princeton: Princeton University Press, 2007b. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 41.

MANDELBROT, B.; TAYLOR, H. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*, v. 15, p. 1057–1062, 1965. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 23.

MANTEGNA, R.; STANLEY, H. E. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 14, 15, 20, 21, 45, 74 e 91.

MARKOWITZ. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

MEUCCI, A. *Risk and Asset Allocations*. EUA: Springer, 2005. Citado na página 87.

PETTERS, E. E. *Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics*. New York: Wiley, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 22, 27 e 28.

PHILIPPATOS, G. C.; WILSON, C. J. Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, v. 4, n. 3, p. 209–220, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 80.

PREIS, T. Econophysics—complex correlations and trend switching in financial time series. *The European Physical Journal*, v. 194, p. 5–86, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

SCHINCKUS, C. Between complexity of modelling and modelling of complexity: An essay on econophysics. *Physica A*, p. 54–65, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 17, 29 e 30.

SCHMIDT, A. B. *Quantitative finance for physicists: an introduction*. New Haven: Academic Press, 2005. Citado na página 27.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 1948. Citado 6 vezes nas páginas 26, 27, 44, 69, 80 e 81.

SILVA, S. D. The role of foreign exchange intervention in a chaotic dornbusch model. *Kredit und Kapital*, v. 33, n. 3, p. 1–37, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 15, 25, 32, 50 e 51.

SILVA, S. D. Chaos and exchange rates. *Estudos Empresariais*, v. 6, n. 1, p. 9–15, 2001a. Citado 3 vezes nas páginas 15, 25 e 32.

SILVA, S. D. Chaotic exchange rate dynamics redux. *Open Economies Review*, v. 3, n. 12, p. 281–304, 2001b. Citado 13 vezes nas páginas 15, 24, 25, 32, 37, 40, 42, 45, 48, 49, 50, 51 e 53.

SILVA, S. D.; MATSUSHITA, R. *Econofísica*. Florianópolis, SC, Brasil: UFSC?, 2017. Citado 19 vezes nas páginas 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 29, 31, 37, 41, 44, 48, 50, 51, 62, 63 e 79.

SORNETTE, D. *Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems*. New Jersey: Princeton University Press, 2003. Citado 8 vezes nas páginas 14, 15, 16, 20, 29, 30, 31 e 39.

SORNETTE, D.; JOHANSEN, A.; BOUCHAUD, J. P. Stock market crashes, precursors and replicas. *Journal de Physique*, v. 6, n. 1, p. 167–175, 1996. Citado na página 16.

STEWART, I. *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*. 2. ed. London: Penguin Books, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 25 e 26.

TALEB, N. N. *Fooled by randomness*. Nova York, NY, EUA: Random House, 2008. Citado na página 38.

TALEB, N. N. *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*. New York, NY, USA: Random House, 2010. Citado 16 vezes nas páginas 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 26, 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42 e 63.

TALEB, N. N. *Antifragile: Things That Gain from Disorder*. New York, NY, USA: Random House, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 79.

TSAY, R. *Analysis of Financial Time-Series Analysis of Financial Time-Series*. New Jersey: Wiley. Hoboken, 2010. Citado na página 21.

WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 2003. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 16, 22, 23 e 25.

ZELLNER, A.; HIGHFIELD, R. Calculation of maximum entropy distributions and approximation of marginal posterior distributions. *Journal of Econometrics*, 1988. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 79.

ZHOU, R.; TONG, G. Applications of entropy in finance: A review. *Entropy*, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 26, 27, 70 e 80.