Léo Vieira Peres

Complexidade de circuitos booleanos

Florianópolis/SC
2018

Léo Vieira Peres

Complexidade de circuitos booleanos

Orientadora:
Profa. Dra. Jerusa Marchi

Proposta de trabalho de conclusão
de curso para a obtenção do grau de
bacharel em ciências da computação
pela Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis/SC
2018

Sumário

Resumo

Podemos dizer que complexidade computacional busca descobrir o quão dificil é resolver problemas computacionais. Por exemplo, uma forma equivalente de descrever o problema em aberto mais importante da teoria da computação, $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$, é perguntar se o problema da sastifazibilidade booleana, denominado SAT, necessita de tempo "mais do que polinomial" para ser decidido no caso geral. Isto se deve ao fato que SAT pertence à classe de problemas NP-completos, que são problemas em NP que têm um algoritmo de tempo polinomial se e somente se todos os problemas em NP também têm. No entanto, até agora não se obteve muito sucesso em provar limitantes inferiores para problemas NP-completos, tanto que ainda é um problema em aberto determinar se SAT necessita de mais do que $\Omega(n^2)$ passos de uma máquina de Turing determinística para ser decidido.

Classificar problemas pela sua complexidade de circuitos é uma duas principais frentes de pesquisa para provar limitantes inferior de problemas computacionais e por muitos anos pesquisadores acreditaram que complexidade de circuitos era a chave para provar problemas como $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$, onde a complexidade de circuito de um problema é basicamente o número mínimo de portas lógicas necessárias para implementar um circuito que decida este problema.

Nós veremos a técnica de restrição e projeção aleatória que obteve sucesso em provar limitantes inferiores para classes bem estritas de circuitos, e logo depois também veremos que estas mesmas técnicas caem no escopo das *provas naturais* de Razborov e Rudich e portanto são limitadas demais para resolver a questão $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ e outros grandes problemas em aberto na área da complexidade computacional. Entretanto, alguns resultados recentes que ligam algoritmos eficientes e limitantes inferiores conseguiram provar limitantes inferiores que estavam em abertos desde os anos 80. Acredita-se que esta ligação entre algoritmos e limitantes inferiores possam a vir superar a barreira das provas naturais e portanto abriram caminho para novos tópicos de pesquisa.

Palavras chaves: complexidade computacional, complexidade de circuitos.

Capítulo 1

Introdução

O objetivo central da área de complexidade computacional é saber a dificuldade intrínseca de problemas computacionais, diferentemente de design de algoritmos que busca encontrar soluções eficientes para um problema. Quando falamos de complexidade de problemas computacionais estamos querendo dizer o recurso necessário para resolver tais problemas.

Segue então que, ao analisar a complexidade de problemas computacionais, nós devemos levar em conta o modelo computacional e o recurso em questão. Às vezes estamos interessados em avaliar o tempo necessário para computar um certo problema em uma máquina de acesso aleatório ou talvez o número de bits que dois processadores enviam um ao outro. Alguns resultados antigos mostraram que dar mais tempo ou espaço para máquinas de Turing aumenta o número de problemas que elas podem resolver, porém estes resultados não apresentaram limitantes inferiores para problemas naturais ([AB09], capítulo 3). Meyer e Stockmeyer provaram que certos problemas são completos para a classe de problemas que necessitam de tempo exponencial em máquinas de Turing [For09], o que também significa que estes problemas não podem ser decididos em tempo polinomial.

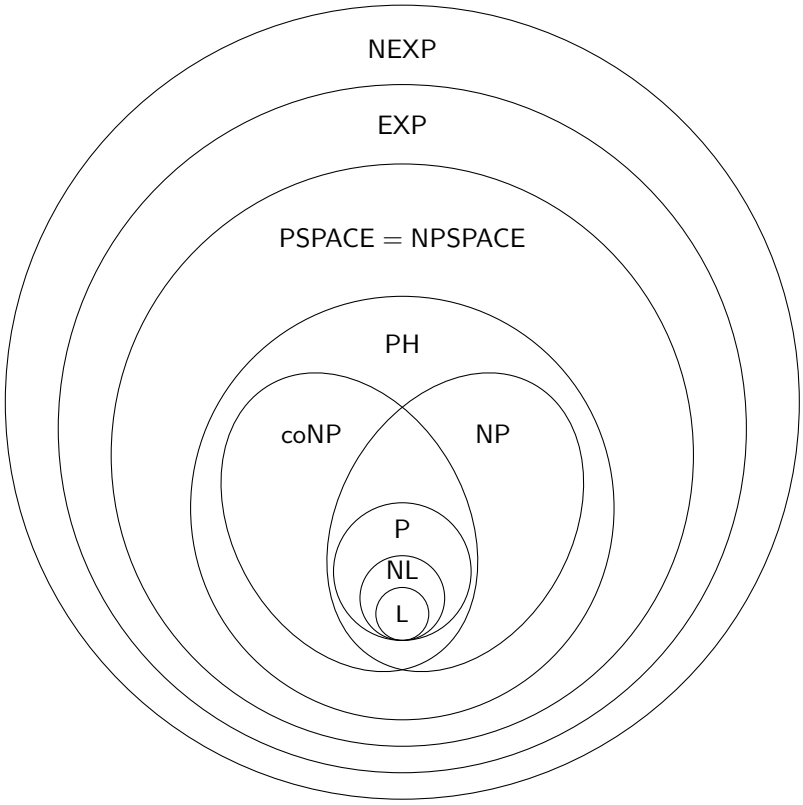
Em complexidade de circuitos procura-se saber o tamanho ou profundidade dos circuitos necessários para decidir uma linguagem. Circuitos booleanos são matematicamente mais simples do que máquinas de Turing e alguns resultados em complexidade de circuitos resolveriam também problemas em aberto em outros modelos de computação. Como exemplo, se conseguirmos provar que problemas que são fáceis de se verificar uma solução não têm circuitos de tamanho polinomial ($\mathsf{NP} \not\subseteq \mathsf{P/poly}$) então $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. Porém, provar que $\mathsf{NP} \not\subseteq \mathsf{P/poly}$ é extremamente dificil e por isso o foco de pesquisa hoje em dia é provar problemas mais fracos, na maioria das vezes restrigindo a classe de circuitos (como por exemplo, circuitos de profundidade constante). Nos anos 80 houve avanços neste sentido quando pesquisadores conseguiram mostrar que certos problemas não podem ser resolvidos por classes mais restritas de circuitos. No entanto, em 1994, Razborov e Rudich mostraram que, sob algumas hipóteses de complexidade computacional, as técnicas usadas até então para provar limitantes inferiores, as quais eles chamaram de provas naturais, não seriam suficientes para provar que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ [RR94]. E por isso, para que qualquer estratégia de prova possa ser levada à frente, é necessário de alguma forma passar pelas limitações das provas naturais.

Nos últimos anos, novos limitantes inferiores em complexidade de circuitos foram obtidos usando uma estratégia de prova que liga algoritmos "rápidos" a limitante inferiores [Wil13, Wil14]. Para uma determinada classe de circuitos $\mathcal{C}$, se você conseguir mostrar que o problema $\mathcal{C}$–SAT (o problema de avaliar se um circuito em $\mathcal{C}$ não computa a função $f(x) = 0$, para todo x) tem um algoritmo *não-trivialmente* mais rápido do que o algoritmo mais óbvio (tentar todas as 2^n entradas possíveis), então você consegue mostrar que a classe de problemas cuja solução pode ser verificada em tempo exponencial (NEXP) não tem circuitos em $\mathcal{C}$. Estudar a conexão entre algoritmos e limitantes inferiores em circuitos booleanos é um assunto interessante para alguém

que deseja realizar pesquisas em complexidade computacional.

1.1 Complexidade uniforme vs não-uniforme

Circuitos são frequentemente utilizados em ciência da computação para modelar algumas sequências de operações. Como alguns exemplos podemos citar os circuitos digitais que formam os chipes de silícone dentro dos computadores, em computação biológica as rede reguladoras de genes se comportam feito circuitos, e circuitos quânticos em que os operadores são matrizes unitárias que operam sobre bits quânticos em superposição. Este trabalho é sobre complexidade computacional então só iremos ver circuitos como uma representação de funções Booleanas e estaremos preocupados com a questão de o quão sucinta é a represetação de uma ou diversas funções Booleanas por circuitos, e não coisas como o custo de construção ou a viabilidade de uso de certos circuitos para a construção de computadores. De forma geral estamos querendo saber a relação entre as classes de complexidade. Considere o diagrama abaixo que mostra as relações de inclusão que já conhecemos a respeito de algumas classes de complexidade.



É um problema em aberto saber exatamente quais dessas inclusões são próprias e quais não são. O problema $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ é o mais famoso devido ao fato que estas duas classes contém uma quantidade desproporcional de problemas de decisão que são de interesses práticos. Se nós olharmos para o diagrama acima nós podemos ver que há diferente "categorias" de classes de complexidade como por exemplo classes de tempo determinístico e não-determinístico, e classes de complexidade de espaço. Graças aos teoremas de hierarquia a relação entre as classes na mesma categoria são conhecidas e sabemos, por exemplo, que a inclusão $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{EXP}$ é própria. Porém, as coisas ficam muito mais nebulosas quando consideramos classes de complexidade de categorias diferente.

Nós sabemos que, por exemplo, tempo determinístico é um caso especial de tempo não-determinístico (e portanto $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$) e que tempo (tanto determinístico quanto não-determinístico) é também um caso especial das classes de complexidade de espaço [1]. Mas provar ou refutar o converso destas relações é o objetivo maior da complexidade computacional. Agora, uma coisa que todas essas classes têm em comum é que elas são definidas a partir de modelos de computação *uniformes*, que são modelos de computação que admitem descrições finitas que servem para entradas de todos os tamanhos, como máquinas de Turing e máquinas de acesso aleatório. Isto significa que podemos dar um algoritmo para uma determinada linguagem nestes modelos e teremos que para entradas de todo os tamanhos as regras que o algoritmo tem que seguir são as mesmas com a excessão que o processo de computação possa consumir mais recurso [2]. Tome por exemplo os algoritmos de ordenamento de listas que os estudantes de ciência da computação normalmente aprendem. Não importa o número de elementos da lista, o código usado é sempre o mesmo e o resultado será sempre o correto.

Por outro lado, circuitos Booleanos são um modelo de computação *não-uniforme*, o que por sua vez significa que permitimos um algoritmo para cada tamanho da entrada [3]. Então, muito da pesquisa em complexidade de circuitos procura determinar a relação entre complexidade uniforme e não-uniforme, que assim como a relação entre classes de tempo determinístico vs tempo não determinístico ou tempo vs espaço, é ainda pouco compreendida. Porém, espera-se que pelas características estruturais de circuitos (eles são basicamente grafos dirigidos) seja uma tarefa mais fácil provar limitantes inferiores para classes de complexidade não-uniforme, e juntando a relação já conhecida entre classes de complexidade uniformes e não-uniformes, nós podemos eventualmente provar limitantes inferiores em complexidade de circuitos que irão até mesmo resolver alguns dos problemas em abertos em complexidade uniforme. Ao longo deste trabalho nós iremos ver alguns limitantes inferiores que caracterizam o que sabemos até agora a respeito de classes de complexidade não-uniformes. Mesmo que o estado da arte seja ainda bem modesto [4], focar em complexidade não-uniforme vem se provando ser a estratégia mais prolífica no que diz respeito à provas de limitantes inferiores.

1.2 Organização do trabalho

Abaixo nós iremos ver alguns resumos de cada capítulo do texto.

Fundamentos

Com o objetivo de fazer este texto autocontido no capítulo 2 nós fazemos um resumo dos fundamentos básicos necessários nos capítulos subsequentes, o que inclui algumas definições matemáticas. Em 2.3 iremos ver máquinas de Turing e algumas de suas generalizações e mostraremos que enquanto máquinas de Turing são poderosas o suficiente para capturar tudo que consideramos computável, ainda existem problemas que nos interessariam que não são computáveis por máquinas de Turing. Depois em 2.4 nós damos uma definição formal de circuitos Booleanos e definimos alguns conceitos importantes relacionados a este modelo de computação. Em 2.5 nós começamos a falar de complexidade computacional e apresentamos algumas classes de complexidade que iremos ver durante este trabalho como P, NP e PSPACE. Também apresentamos alguns resultados clássicos

[1] Por uma peculiaridade das classes de complexidade de espaço – basicamente, espaço é um recurso reutilizável – temos que espaço determinístico é tão abrangente quanto espaço não-determinístico para classes que contém todas as linguagens que exigem no máximo $\mathsf{polylog}(n)$ espaço. Ver [AB09], teorema 4.14.

[2] É por este motivo que estudamos complexidade computacional pra começo de história.

[3] Relaxar a exigência que um único algoritmo deva funcionar para todos os tamanhos da entrada torna trivial toda a questão de computabilidade, pois podemos descrever explicitamente a tabela verdade de uma função Booleana para todas as entradas de um determinado tamanho. As coisas mudam quando o foco é a complexidade dessas computações já que então o problema é determinar se há descrições muito mais sucintas do que uma tabela verdade. Basicamente, "computabilidade de circuitos" é trivial enquanto que complexidade de circuitos não é.

[4] Como foi dito anteriormente, só recentemente que foi provado que a classe NEXP não está contida em ACC^0 que é uma das menores classes de circuitos entre as mais estudadas, e ainda hoje pesquisadores não se sabe como ir muito além disso.

como alguns teoremas de hierarquia e o resultado de Baker, Gill e Solovay que prova a existência de um oráculo relativas a qual P e NP são diferentes. A seção 2.6 é sobre complexidade de circuitos e assim como vimos classes de complexidades definidas a partir de máquinas de turing nós iremos ver algumas classes de complexidades de circuitos, como elas se relacionam com outras classes de complexidades que vimos anteriormente e provaremos alguns resultados importantes que podem servir de motivação para outros resultados que irão aparecer mais para frente.

Computação relativizada e complexidade de circuitos

No capítulo 3 nós iremos ver como separações de classes de complexidade com oráculos seguem de alguns limitantes inferiores em complexidade de circuitos usando ideias que são discutidas em [Ko89] e [RST15b]. Em 3.1 nós provamos de novo o teorema de Baker, Gill e Solovay desta vez usando o limitante inferior para a complexidade de consulta da função Tribes_N definida como

$$\text{Tribes}_N(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{2^n,n-1}, x_{2^n,n}) = \bigvee_{i=1}^{2^n} \bigwedge_{j=1}^{n} x_{i,j},$$

em que $N = n2^n$ [5]. A complexidade de consulta de uma função $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ é definida como a profundidade mínima entre todas as árvores de decisão que computam a função. Nós facilmente podemos provar que a função Tribes_N tem complexidade de consulta máxima N usando um argumento de adversário. Nos anos 80 pesquisadores estavam interessados em saber a relação entre outras classes de complexidades relativas a algum oráculo. Em especial eles queriam saber se existe algum oráculo que separa as classes PSPACE e PH [6] e também se existe algum oráculo relativa a qual a hierarquia polinomial é infinita. Mostrando que a hierarquia polinomial pode ser expressa por circuitos de profundidade constante obtém-se que estes resultados seguem a partir de limitantes inferiores para o tamanho de circuitos de profundidade constante que computam determinadas funções, sendo estas as funções Parity_n e as funções de Sipser que iremos denotar por $f^{m,d}$. As definições destas duas funções aparecem em 3.7 e 3.11 respectivamente. Nós iremos ver uma prova das seguintes implicações.

- As funções Parity_n exigem circuitos de profundidade constante de tamanho superpolinomial $\Rightarrow$ existe um oráculo A tal que $\mathsf{PH}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$.
- As funções de Sipser $f^{m,d}$ exigem circuitos de profundidade constante de tamanho superpolinomial $\Rightarrow$ existe um oráculo A tal que a hierarquia polinomial é infinita relativa a A.

Nós deixamos as provas dos dois limitantes inferiores acima para o capítulo 4. Ao provar cada um destes limitantes inferiores nós também obteremos que as funções Parity_n e as funções de Sipser $f^{m,d}$ não podem nem mesmo ser aproximadas por circuitos de profundidade constante e tamanho polinomial. Pela lei zero-um de Kolmogorov nós podemos ainda provar as seguintes implicações.

- As funções Parity_n não podem ser aproximadas por circuitos de profundididade constante e tamanho polinomial $\Rightarrow$ $\mathsf{PH}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$ para um oráculo aleatório com probabilidade 1.
- As funções de Sipser $f^{m,d}$ não podem ser aproximadas por circuitos de profundidade constante e tamanho polinomial $\Rightarrow$ a hierarquia polinomial é infinita relativa a um oráculo aleatório com probabilidade 1.

[5] No apêndice A falamos mais a respeito das funções Tribes.
[6] Ver 2.27 e 2.34 para a definição dessas duas classes.

Dizer que, por exemplo, PSPACE e PH são diferentes relativas a um oráculo aleatório com probabilidade 1 não significa que elas são diferentes relativas a todo os oráculos, mas sim significa que o conjunto de todos os oráculos A que satisfazem $\mathsf{PH}^A = \mathsf{PSPACE}^A$ tem medida zero. De fato, veremos que para todos os resultados do capítulo 3 existe um oráculo relativa a qual as classes de complexidade em questão colapsam. A importância de um resultado destes é que se quisermos provar relações entre estas classes nós necessariamente teremos que usar métodos de provas que não relativizam, o que basicamente significa que teremos que usar um argumento que usa algo a mais do que a capacidade de uma das classes poder simular a outra classe. Por fim nós iremos ver um argumento que duas classes de complexidades serem diferentes relativas a um oráculo aleatório nem sequer serve como evidência que estas duas classes são diferentes no mundo não relativizado [For94].

Restrições e projeções aleatórias

O capítulo 4 é inteiramente voltado para provar os limitantes inferiores enunciados no capítulo 3 (ver 3.8, 3.9, 3.12 e 3.14). Na seção 4.1 nós iremos ver uma prova que as funções Parity_n exigem circuitos de profundidade constante que tenham um número exponencial de portas lógicas. O método utilizado é o de restrições aleatórias introduzidos em [Sub61] que funciona da seguinte forma. Suponha que é dada uma função Booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ com variáveis de entrada $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Uma restrição aleatória ρ irá atribuir valores em $\{0,1,*\}$ de forma aleatória e independente para cada uma das n variáveis de f, em que $*$ denota que a variável permanece livre. Chame de $\rho(x_i)$ o valor atribuido à i-ésima variável, então a função resultante $f_{|\rho}$ satisfaz

$$f_{|\rho}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \iff f(\rho(x_1), \rho(x_2), \ldots, \rho(x_n)) = 1.$$

Agora, o que queremos provar é que todos os circuitos de profundidade constante e tamanho subexponencial não podem computar Parity_n, para n suficientemente grande. Uma forma de fazer isto é provar os seguintes pontos separadamente.

1. Toda função computada por um circuito de profundidade constante e tamanho subexponencial colapsa para uma função extremamente simples quando atingida por uma restrição aleatória
2. As funções Parity_n permanecem complexas mesmo após serem atingidas por uma restrição aleatória.

Håstad em sua tese de doutorado [Hås87] provou o lema da troca de Håstad 4.2, que é essencial para provar o primeiro ponto acima. Nós iremos ver duas provas do lema da troca de Håstad, sendo a primeira prova a original de Håstad que usa indução. A segunda prova, que é atribuida a Razborov, aparece em [Bea94] e usa um argumento de contagem. O lema diz que circuitos de profundidade 2 simplificam quando atingidos por uma restrição aleatória. Então podemos para cada camada de um circuito de profundidade constante aplicar uma restrição aleatória que com probabilidade muito alta irá simplificar esta camada ao ponto de reduzir a profundidade do circuito em 1. Ao fim teremos transformado um circuito de profundidade $d \geq 2$ em algo como uma árvore de decisão de profundidade constante. Por outro lado, o item (2) acima é facilmente obtido observando que ao restringir as variáveis de entrada da função Parity_n nós ainda temos uma função paridade ou a sua negação sobre um número menor de variáveis mas que ainda não pode ser expressa por uma árvore de decisão de profundidade constante. Para provar o teorema 3.9 nós iremos usar o fato que restrições aleatórias preservam a distribuição uniforme.

Håstad conseguiu ainda na sua tese doutorado provar o teorema 3.12 usando restrições em bloco que atribui valores às variáveis de entrada de forma que variáveis num mesmo bloco não têm valores atribuidos de forma independente. Porém o método dele não é suficiente para provar 3.14 pois restrições em bloco não preservam a distribuição uniforme. Em [RST15a], Rossman, Servedio e Tan conseguiram superar esta barreira para por fim provar 3.14. Na seção 4.2 iremos mostrar a prova de Rossman, Servedio e Tan dos teoremas 3.12 e 3.14 que usa projeções aleatórias que são uma generalização de restrições aleatórias. Agora ao invés de setar uma

variável para uma constante ou manter elas livres, nós iremos particionar elas em blocos de forma que cada variável ou é feita constante ou é projetada para uma nova variável que é comum à todas as outras variáveis no mesmo bloco.

Provas naturais e complexidade irônica

O capítulo 5 é sobre dois temas importantes. Primeiro iremos ver porque pesquisadores ficaram presos nos limitantes inferiores para a classe AC^0. Basicamente, as técnicas usadas até então para provar limitantes inferiores só são suficientes para classes de circuitos que não contêm funções pseudo-aleatórias, que são funções que conseguem se passar por funções verdadeiramente aleatórias para qualquer máquina de Turing de tempo polinomial. Nós vamos ver que os limitantes inferiores que vimos no capítulo 4 na verdade nos dão um algoritmo que distingue qualquer sequência de funções Booleanas em AC^0 de funções verdadeiramente aleatórias. Em [RR94], Razborov e Rudich identificam as propriedade destas técnicas de prova que eles chamaram de *provas naturais* consolidando então a barreira das provas naturais. Assim como a barreira da relativização de Baker, Gill e Solovay, para provar limitantes inferiores melhores do que os atuais é preciso primeiro evitar a barreira das provas naturais.

O outro assunto do capítulo 5 é o que vem sendo chamado de complexidade irônica [7], uma estratégia para provar limitantes inferiores que algumas pessoas acreditam ser capaz de superar a barreira das provas naturais. A ideia agora é ligar limitantes inferiores para a classe NEXP com algoritmos rápidos para o problema de decidir se um dado circuito C tirado de alguma classe de circuitos $\mathcal{C}$ computa a função constante 0. Mais precisamente, o problema de decidir se um circuito na classe $\mathcal{C}$ computa a constante 0 é chamado de $\mathcal{C}$-SAT, e o que Williams provou é que dado um algoritmo para $\mathcal{C}$-SAT que roda em tempo determinístico $2^n/\mathsf{superpoly}(n)$, nós podemos provar que $\mathsf{NEXP} \not\subseteq \mathcal{C}$ [Wil13, Wil14] [8].

O capítulo 5 vai ser mais informal do que os anteriores, com pouco rigor e provas.

Conclusões

Por fim nas conclusões falamos de alguns assuntos que ficaram de fora deste trabalho, mais alguns comentários finais.

1.3 Objetivo

Este trabalho visa apresentar uma revisão acerca da área de complexidade de circuitos e suas aplicações ao estudo da complexidade computacional. Primeiramente será feito um estudo sobre complexidade computacional. Depois serão pesquisados tópicos em complexidades de circuitos com foco principal nos tópicos mais recentes e ferramentas/técnicas comumente usadas em provas em complexidade de circuitos.

1.3.1 Objetivos específicos

- Estudar a relação entre complexidade de circuitos e computação relativizada que motivaram pesquisadores no anos 80 e os limitantes inferiores que surgiram a partir desta empreitada.
- Estudar a prova de Servedio, Rossman e Tan da existência de uma hierarquia de profundidade constante no caso médio.

[7] Por falta de nomes melhores eu resolvi seguir a nomenclatura de Rahul Santhanam [S+13].

[8] Daí vem o nome de complexidade irônica. Você põe todo o seu esforço em provar um limitante superior para algum problema, mas a sua inteção é na verdade provar um limitante inferior.

- Entender o porquê das técnicas de prova usadas até então para provar limitantes inferiores para circuitos são limitadas demais para resolver $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$.
- Estudar o trabalho de Ryan Williams que liga algoritmos eficientes para o problema da satisfazibilidade de circuitos e limitantes inferiores para a classe NEXP.
- Escrever um texto que possa servir para futuros alunos se familiarizarem com um dos tópicos de pesquisa mais importante na complexidade computacional.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo nós introduzimos algumas convenções e conceitos fundamentais para o entedimento deste trabalho. Muitas das convenções usadas aqui são as mesmas encontradas em alguns dos principais livros de teoria da computação [AB09, Gol00, Sav98, LP97, Sip12]. O survey de Scott Aaronson sobre o estado atual da pesquisa em complexidade computacional tem basicamente tudo que alguém que queira começar a estudar a área precisa saber [Aar16]. A parte de complexidade de circuitos em particular está muito bem coberta pelo livro do Stasys Jukna sobre funções Booleanas [Juk12].

Introduzimos primeiro na seção 2.1 algumas definições matemáticas que serão importante ao longo deste texto, e também linguagens e como representar problemas computacionais como linguagens na seção 2.2. Depois falamos de máquinas de Turings e suas variantes em 2.3. Máquinas de Turing foram introduzidas por Alan Turing em [Tur36] e são a partir delas que iremos introduzir as principais classes de complexidade. Na seção 2.4 nós vemos circuitos Booleanos como um modelo de computação. Nas seções 2.5 e 2.6 nós discutiremos complexidade computacional pela primeira vez em algum detalhe.

2.1 Definições matemáticas

Ao longo deste trabalho nós vamos usar a notação $[n]$ quando queremos expressar o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de todos os números naturais menores ou iguais a n. Também, sempre que tivermos uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nós podemos sucintamente usar a notação $\{x_i\}_{i\in[n]}$. Se f é uma função qualquer e S é um conjunto, então denotamos por $f^{-1}(S)$ o conjunto $\{x|f(x) \in S\}$. Se $S = \{y\}$ contém apenas um elemento então podemos escrever $f^{-1}(y)$ ao invés de $f^{-1}(S)$. Sempre que usarmos log sem mencionar a base assumi-se então que estamos falando de $\log_2$.

Ao longo do texto iremos várias vezes usar as seguintes desigualdades.

1. $(1 + x)^r \geq 1 + rx$, para todo número real $x \geq -1$ e todo número inteiro $r \geq 1$.
2. $1 + x \leq e^x$, para todo número real $x \in \mathbb{R}$.

O item (1) segue do teorema binomial que diz que $(1 + a)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} x^k = 1 + ar + \frac{r(r-1)}{2}a^2 + \ldots$. Para a segunda desigualdade nós temos que os casos em que $x < -1$ e $x = 0$ são triviais. Para $x > 0$, nós podemos usar a série de Maclaurin de e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. \tag{2.1}$$

Então temos que e^x é igual a $1+x$ mais algum valor positivo. Para $-1 \leq x < 0$ nós fazemos o seguinte. Seja $y > 0$ tal que $x = -\frac{1}{y}$. Então é verdade que

$$1 + x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-yx},$$

e argumentamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} = e^x. \tag{2.2}$$

Como o limite acima aproxima-se do limite e^x pela esquerda teremos então que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} \leq e^x$, para todo $n > 0$. Em particular teremos que $1 + x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-yx} \leq e^x$. Podemos provar 2.2 usando a versão generalizada do teorema binomial que afirma que para todo $a, r \in \mathbb{R}$ é verdade que $(1+a)^r = 1 + ra + \frac{r(r-1)}{2!}a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}a^3 + \ldots$. Então, fazendo $a = -\frac{1}{n}$ e $r = -nx$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} = \lim_{n\to\infty} 1 + x + \frac{-nx(-nx-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{-nx(-nx-1)(-nx-2)}{3!}\left(-\frac{1}{n^3}\right) + \ldots.$$

Para todo $k > 2$ o k-ésimo termo tende a $\frac{x^k}{k!}$ com n indo ao infinito. Portanto temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

que é a série de Maclaurin para e^x.

Notação assintótica

Em ciência da computação é comum ao estarmos considerando funções que crescem com algum parâmetro n apenas levarmos em conta o comportamento assintótico da função, que é basicamente o comportamento da função no limite dos grandes números. Assim sendo, nós usaremos a notação assintótica para classificar funções a partir de seu comportamento assintótico. Nós dizemos que

- $f = \mathcal{O}(g)$ se existem constantes $c, n_0 \in \mathbb{R}$ tais que para todo $n \geq n_0$, $f(n) \leq cg(n)$.
- $f = \Omega(g)$ se existem constantes $c, n_0 \in \mathbb{R}$ tais que para todo $n \geq n_0$, $f(n) \geq cg(n)$.
- $f = \Theta(g)$ se $f = \mathcal{O}(g)$ e $f = \Omega(g)$.
- $f = o(g)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f = \omega(g)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$.

Ao usar a notação assintótica estamos apenas pegando o termo de maior ordem de uma função, ignorando fatores constantes e termos de menor ordem. Por exemplo, se $f = 4n^2 + 31n + 4$ então dizemos apenas que

$f = \mathcal{O}(n^2)$. Se quisermos ignorar fatores polilogarítmicos nós usamos $\widetilde{\mathcal{O}}$, $\widetilde{\Omega}$ e $\widetilde{\Theta}$. Por exemplo, temos que $n \log n = \widetilde{\Theta}(n)$ ao mesmo tempo que $n \log n = \omega(n)$.

Tem alguns tipos de funções que são importante o suficiente para receberem nomes específicos. Várias vezes iremos citar elas ao longo deste trabalho e abaixo segue o significado de cada uma delas.

- (Funções polilogarítmicas) $\mathsf{polylog}(n) : \log^{\mathcal{O}(1)} n$.
- (Funções polinomiais) $\mathsf{poly}(n) : n^{\mathcal{O}(1)}$.
- (Funções superpolinomiais) $\mathsf{superpoly}(n) : n^{\omega(1)}$.
- (Funções quasipolinomiais) $\mathsf{quasipoly}(n) : n^{\log^{\mathcal{O}(1)} n}$.
- (Funções subexponenciais) $\mathsf{subexp}(n) : 2^{n^{o(1)}}$.
- (Funções exponenciais) $\mathsf{exp}(n) : 2^{n^{\mathcal{O}(1)}}$.

Probabilidade e variáveis aleatórias

Iremos denotar por $\{0_p, 1_{1-p}\}$ e $\{0_{1-p}, 1_p\}$ a distribuição de bits aleatórios onde o bit 0 é tirado com probabilidade p e $1-p$, respectivamente. Para a distribuição uniforme podemos alternativamente usar as notações $\{0,1\}$ ou $\{0_{\frac{1}{2}}, 1_{\frac{1}{2}}\}$.

Sempre que quisermos denotar objetos aleatórios nós iremos destacar estes objetos em negrito. Por exemplo, denotamos por $\boldsymbol{x}$ uma string (uma sequência de 0s e 1s como veremos em 2.2) aleatória tirada de $\{0,1\}^n$, o que pode ser denotado por $\boldsymbol{x} \sim \{0,1\}^n$.

Em geral, um espaço de probabilidade Ω é um conjunto $\{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots\}$ e associamos a Ω uma distribuição de probabilidade $\mathcal{D} = \{p_1, p_2, \dots\}$ em que cada elemento $\boldsymbol{\omega}_i \in \Omega$ tem uma probabilidade p_i associada a ele e $\sum_{\boldsymbol{\omega}_i \in \Omega} p_i = 1$. Como já fizemos no parágrafo anterior, nós denotamos que $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$ é tirada da distribuição $\mathcal{D}$ por $\boldsymbol{\omega} \sim \mathcal{D}$. Uma variável aleatória $\boldsymbol{X}$ em um espaço de probabilidade Ω é uma função $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ e denotamos o valor esperado de $\boldsymbol{X}$ por $E_{\boldsymbol{\omega}_i \sim \Omega}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_i)] = \sum_{\boldsymbol{\omega}_i} p_i \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_i)$. Nós geralmente iremos apenas escrever $\boldsymbol{X}$ ao invés de $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\omega}_i)$, e algumas vezes iremos até mesmo omitir a distribuição quando o contexto for claro o suficiente.

As seguintes desigualdades serão de grande importância para nós. Elas nos dão um limitante exponencial para a probabilidade que certos tipos de variáveis aleatórias se afastem demais de suas médias. Sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \dots, \boldsymbol{X}_n$, variáveis aleatórias independentes e $\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ uma variável aleatória satisfazendo $E[\boldsymbol{X}] = \mu$. A desigualdade de Chernoff diz que

$$\Pr\left[\left|\boldsymbol{X} - \mu\right| \geq (1+\delta)\mu\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu}. \tag{2.3}$$

E também, para $0 \leq \delta < 1$,

$$\Pr\left[\left|\boldsymbol{X} - \mu\right| \leq (1-\delta)\mu\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2}\mu}. \tag{2.4}$$

No primeiro caso podemos relaxar a desigualdade para uma forma mais conveniente.

$$\Pr\left[\left|\boldsymbol{X} - \mu\right| \geq (1+\delta)\mu\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{3}\mu}, \text{ se } 0 \leq \delta \leq 1.$$

e também

$$\Pr\left[\left|\boldsymbol{X}-\mu\right| \geq (1+\delta)\mu\right] \leq e^{-\frac{\delta}{3}\mu}, \text{ se } \delta \geq 1.$$

A desigualdade de Hoeffding que veremos a seguir nos dá um outro limitante superior exponencial para a probabilidade que a soma de variáveis aleatórias independentes se afastem demais da média. Sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ variáveis aleatórias independentes tais que cada $\boldsymbol{X}_i$ está dentro de algum intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Então, para $t > 0$:

$$\Pr\left[\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i - \mathsf{E}\big[\boldsymbol{X}_i\big]\Big) \geq t\right] \leq e^{-\frac{2nt^2}{(b-a)^2}}. \tag{2.5}$$

Uma variável aleatória indicadora $\boldsymbol{X}$ para algum evento é 1 se este evento acontece e 0 caso contrário. Uma variável aleatória indicadora para algum evento convenientemente satisfaz $\mathsf{E}[\boldsymbol{X}] = \Pr[\boldsymbol{X} = 1] = \Pr[\text{o evento acontece}]$. Além do mais, sejam $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ varíaveis aleatórias indicadoras independentes. Então, a desigualdade de Hoeffding (2.5) nos diz que

$$\Pr\left[\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i - E\big[\boldsymbol{X}_i\big]\Big) \geq t\right] \leq e^{-2nt^2}. \tag{2.6}$$

2.2 Linguagens

Um *alfabeto* Σ é um conjunto finito e não vazio de símbolos como $\{0, 1\}$ ou $\{a, b, c\}$. Uma *palavra* construída sobre um alfabeto Σ é uma sequência de símbolos de Σ. Como exemplo, se Σ for o alfabeto binário $\{0, 1\}$, então 0011 e 0101 são palavras sobre Σ. Chamaremos as palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ de *strings*. Finalmente, denotamos por Σ^* o conjunto de todas as palavras formada por símbolos de Σ e definimos uma *linguagem* como um subconjunto qualquer de Σ^*.

Permitimos uma palavra vazia que não contém nenhum símbolo e denotamos esta palavra por ε e temos que $\varepsilon \in \Sigma^*$, para qualquer alfabeto Σ. O tamanho de uma palavra w é o número de símbolos que a compõem e é denotada por $|w|$ — desta forma $|\varepsilon| = 0$. Para representar o i-ésimo símbolo que compõe uma palavra w nós escreveremos w_i. Para algum inteiro $n \geq 0$, Σ^n denota o conjunto de todas as palavras de tamanho n sobre o alfabeto Σ. Sendo assim $\{0, 1\}^n$ seria o conjunto de todas as strings de tamanho n.

Nós também queremos representar objetos como grafos, vetores, etc, através de palavras. Neste caso, se x é um objeto qualquer, então sua representação em binário será denotada por $\langle x \rangle$.

O que mais nos importa aqui é que podemos representar problemas computacionais através de linguagens, o que nos chamamos de problemas de decisão.

2.2.1 Problemas de decisão

Em problemas de decisão nós queremos decidir se um determinado elemento pertence a um conjunto S ou não. Como exemplo de um problema de decisão: dado um número natural p, nós queremos decidir se p é primo. Neste caso S é o conjunto de todos os números primos.

Para solucionar o problema de decisão de $S \subseteq \{0, 1\}^*$ nós usamos uma função $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}$ tal que $S = \{x \mid f(x) = 1\}$. Chamamos f de *função característica* de S. Como iremos considerar a representação de objetos por strings binárias, temos que solucionar um problema de decisão é análogo a decidir se uma palavra pertence à uma linguagem. A partir da próxima seção nós veremos definições formais de modelos

de computação para descrever o que aqui está sendo vagamente descrito como "solucionar um problema de decisão".

As possíveis entradas para um determinado problema de decisão S será chamado de uma *instância* de S.

2.3 Máquinas de Turing

Uma visão intuitiva de uma máquina de Turing é a de um matemático que tem consigo uma folha de rascunho em que ele pode escrever os resultados parciais de sua computação e um conjunto finito de instruções que ele deve seguir. Formalmente, uma máquina de Turing é composta por três unidades:

- k fitas infinitas à direita que contêm células adjacentes e um cabeçote que em um dado momento se encontra em uma única célula de sua fita e que pode realizar as seguintes funções: a) escrever ou apagar um símbolo na célula em que ele se encontra b) se mover para uma das células adjacentes à sua célula atual;
- um registrador que guarda o estado atual da computação;
- um conjunto de instruções.

A computação inicia com os k cabeçotes na célula mais à esquerda de suas respectivas fitas e em um estado inicial que é o mesmo para todas as entradas. Daí em cada passo da computação os k cabeçotes irão ler o conteúdo atual das células em que eles se encontram e conforme o estado atual, o símbolo lido e o conjunto de instruções eles decidem se escrevem ou apagam um símbolo na sua célula atual (sendo que o símbolo escrito pode ser o mesmo que já se encontra naquela célula) e para qual direção eles irão se movimentar (ou se permanecerão na mesma célula). Após cada passo o registrador de estado passa a guardar um novo estado (ou seja, o próximo estado da computação) que depende do estado atual e o símbolo lido pelos cabeçotes. A computação termina quando o registrador de estado guarda um estado de parada.

Das k fitas da máquina de Turing, a primeira é de somente leitura e a chamaremos de *fita de entrada*. As últimas $k-1$ fitas são de escrita e leitura e elas são chamadas de *fitas de trabalho*, sendo a última fita a *fita de saída*.

A seguir nós vemos uma definição formal de máquina de Turing.

Definição 2.1. *(Máquinas de Turing)*

Uma máquina de Turing M de k fitas, para algum $k \geq 1$, é uma tripla (Γ, Q, δ) onde Γ é o alfabeto de fita, Q é o conjunto de estados de M que contém o estado inicial q_0 e o estado de parada q_h e $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{E, N, D\}^k$ é a função de transição.

A função de transição é interpretada como $\delta(q, (\sigma_1, \ ..., \ \sigma_k)) = (q', (\sigma'_2, \ ..., \ \sigma'_k), z)$, $z \in \{E, N, D\}^k$, significando que quando o estado atual de M for q e os símbolos sendo lidos pelos cabeçotes das k fitas forem $\sigma_1, \ ..., \ \sigma_k$ então M muda o seu estado atual para q', muda o conteúdo das suas últimas $k-1$ fitas para $\sigma'_2, \ ..., \ \sigma'_k$ e os k cabeçotes da fita se movimentam conforme z (a i-ésima fita se move para a esquerda, permanece na mesma célula ou se move para direita se o valor de z_i for E, N ou D, respectivamente). Sempre que um cabeçote que estiver na célula mais à esquerda de sua fita tentar se mover para esquerda, este permanecerá na mesma célula.

A entrada de uma máquina de Turing é o conteúdo da fita de entrada antes do ínicio da computação. Nós dizemos que a máquina para quando ela alcança o estado de parada q_h e o resultado de sua computação é o conteúdo de sua fita de saída. Denotamos o resultado da computação de M sobre uma entrada x por $M(x)$.

Neste trabalho vamos na maior parte das vezes assumir que $\Gamma = \{0, 1, \triangleright, \square\}$ [1], onde $\triangleright$ é o símbolo que marca o começo das fitas e $\square$ é um símbolo que denota uma célula vazia. Também podemos assumir que o conteúdo da fita de saída de uma máquina de Turing após o fim da computação vai ser um único bit escrito em sua fita mais à esquerda. Se M é uma máquina de Turing e $M(x) = 1$ então dizemos que M aceita a entrada x, e se $M(x) = 0$ então dizemos que M rejeita x. Desta forma M computa a função característica de um algum conjunto $S \subseteq \{0,1\}^*$ o que podemos ver como uma linguagem L sobre o alfabeto binário. Se for o caso que $M(x) = 1 \iff x \in L$ dizemos que M *reconhece* a linguagem L, e se também for o caso que $M(x) = 0 \iff x \notin L$ então M é um *decisor* de L. Neste trabalho só vamos considerar funções que são decididas por alguma máquina de Turing [2], exceto quando formos falar do problema da parada em 2.5.

Nós podemos representar cada passo da computação de uma máquina de Turing levando em conta o conteúdo atual das k fitas, as posições dos cabeçotes e o estado atual. Esta representação de um passo da computação de uma máquina de Turing é chamada de *configuração* e podemos mapear uma configuração para uma palavra em $\{0,1\}^*$. No ínicio da computação a máquina de Turing se encontra na *configuração inicial*. A sequência de todas as configurações que uma máquina de Turing entra durante a computação é chamada de *história de computação*. Esta visão dos passos da computação de uma máquina de Turing é útil quando queremos representar toda a computação de uma máquina de Turing como uma string. Sem nos preocurpamos com os detalhes de uma representação das configurações, vamos convencionar que a configuração inicial de qualquer computação terá o seguinte:

- Todas as fitas têm o símbolo $\triangleright$ em sua célula mais à esquerda;
- A primeira fita irá conter uma string $x \in \{0,1\}^*$ após a sua primeira célula;
- Todas as outras células de todas as fitas serão marcadas com $\square$.

2.3.1 Máquina de Turing universal

Note que precisamos somente da função de transição para descrever uma máquina de Turing. Dessa forma podemos representar máquinas de Turing como strings binárias e fazemos duas suposições:

- Cada string $\alpha \in \{0,1\}^*$ descreve uma máquina de Turing
- Cada máquina de Turing é descrita por infinitas strings

A primeira condição pode ser alcançada se mapearmos todas as strings que não são descrição válidas de máquinas de Turing para uma máquina canônica qualquer — como a máquina de Turing que rejeita todas as entradas. A segunda condição pode ser obtida se concatenarmos uma sequência de símbolos inúteis ao fim da descrição da máquina de Turing, isto não irá mudar o conjunto de instruções sendo representado se usarmos alguma sequência de bits para demarcar o fim da descrição.

De acordo com a nossa notação, denotaremos a string que descreve uma máquina de Turing M por $\langle M \rangle$. Se α é uma string, então denotaremos por M_α a máquina de Turing descrita por α.

Essa representação de máquinas de Turing como strings é útil quando queremos usar descrições de máquinas de Turing como entrada para uma outra máquina de Turing. O teorema a seguir nos diz que existe uma máquina de Turing capaz de simular a execução de qualquer máquina de Turing sobre uma entrada arbitrária.

[1] Os símbolos $\triangleright$ e $\square$ são ainda ssim apenas um preciosismo. Nós vamos sempre falar de funções Booleanas $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

[2] Pode ser que para algumas entrada x uma máquina de Turing M nunca chegue em seu estado de parada e execute indefinidamente, o que usando o jargão da matemática lógica significa dizer que a função característica computada por M é recursiva parcial. Por outro lado, se M chega em seu estado de parada para toda entrada x então M é o decisor de alguma linguagem e a função característica computada por M é dita ser recursiva total.

Teorema 2.2. *(Máquina de Turing universal)*

Existe uma máquina de Turing $\mathcal{U}$ que ao receber $\langle \alpha, x \rangle$ em sua fita de entrada, $\mathcal{U}$ dá como saída o resultado da computação de M_α sobre a entrada x.

Demonstração. Precisamos apenas nos convencer que uma vez que podemos extrair da descrição de M_α (ou seja, a string α) o seu conjunto de estados e sua função de transição temos então toda informação necessária para simular a execução de M_α sobre a entrada x usando as fitas de trabalho de $\mathcal{U}$.

Porém, o número de fitas de $\mathcal{U}$ é finito (somente 3 fitas são necessárias), e $\mathcal{U}$ deve ser capaz de simular qualquer máquina de Turing com um número arbitrário de fitas. Se k é o número de fitas de M_α, então é possível fazer isto guardando o conteúdo de $k-1$ fitas (nós podemos usar a fita de saída de $\mathcal{U}$ para simular a fita de saída de M_α) de M_α em uma das fitas de trabalho de $\mathcal{U}$ particionando esta fita em $k-1$ espaços $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$, onde cada espaços consecutivos são separados por um símbolo especial (como '#'). Sempre que a i-ésima fita de M_α precisar de mais espaço, movemos todos símbolos que aparecem após a última célula de E_i uma posição para a direita.

Dessa forma, após a simulação teremos $M_\alpha(x)$ escrito sobre a fita de saída de $\mathcal{U}$.

□

Um ponto importante sobre o resultado acima é que a simulação pode ser feita de forma eficiente. No capítulo seguinte iremos definir o que queremos dizer por eficiente e também veremos em detalhe uma máquina de Turing universal ainda mais eficiente do que a máquina de Turing esboçada na prova do teorema anterior.

2.3.2 Máquina de Turing não-determinística

Na nossa definição de máquinas de Turing acima, o próximo passo de uma máquina de Turing é definido somente pelos símbolos sendo lidos pelos seus cabeçotes de fita e o estado atual da máquina. Nós chamamos estas máquinas de Turing cujo o próximo passo é estritamento único de máquinas de Turing determinísticas. Por outro lado, uma máquina de Turing não-determinística tem sempre duas alternativas de próximos passos que ela deve decidir tomar.

Definição 2.3. *(Máquina de Turing não-determinística)*

Uma máquina de Turing não-determinística N é uma máquina de Turing convencional como definida em 2.1 mas com duas funções de transições δ_1 e δ_2. A cada passo de sua execução N deve escolher usar uma de suas duas funções.

Dizemos que N aceita a entrada x se existe pelo menos uma sequência de escolha das funções de transição tal que $N(x) = 1$.

O conjunto de linguagens decididas por máquinas de Turing não-determinística é o mesmo que o conjunto de linguagens decididas por máquinas de Turing determinística, isso segue pois podemos simular uma máquina de Turing não-determinística N por uma máquina de Turing M que tenta todas as possíveis sequência de escolhas da função de transição que N faz. Além disso, máquinas de Turing determinística são uma classe específica de máquinas de Turing não-determinísticas (onde δ_1 e δ_2 são idênticas).

2.3.3 Máquinas de Turing com oráculo

Um oráculo O para uma linguagem L é um dispositivo que recebe uma entrada x e dá como resposta 1 se $x \in L$ e 0 caso contrário. Nós não estamos preocupados com o funcionamento interno de um oráculo, nós vemos oráculos como "caixas pretas" donde nós simplesmente colocamos a entrada em um lado e recebemos a

saída em outro lado. Máquinas de Turing com oráculo são máquinas de Turing convencionais que têm acesso a um oráculo.

Definição 2.4. *(Máquina de Turing com oráculo)*

Uma máquina de Turing M com acesso a um oráculo para L é uma máquina de Turing convencional com a adição de uma fita que chamaremos de fita de oráculo *e três estados $q_{consulta}$, q_{sim} e $q_{não}$. Sempre que M quiser consultar o oráculo para saber se uma string x' pertence a L ou não, M escreve x' sobre sua fita de oráculo e muda seu estado para $q_{consulta}$. Daí, o próximo estado de M será q_{sim} caso $x' \in L$, ou $q_{não}$ caso contrário.*

A partir de agora denotaremos uma máquina de Turing M com acesso a um oráculo para uma linguagem L por M^L e o resultado da computação de M^L sobre x por $M^L(x)$.

Se uma linguagem L' é decidida por uma máquina de Turing com acesso a um oráculo O nós dizemos que L é decidível em relação a O.

A seguir nós vemos que, como esperado, a adição de um oráculo nos dar um poder adicional em relação a máquinas de Turing convencionais.

Teorema 2.5. *Existe uma linguagem que é decidível em relação a algum oráculo mas que não é decidível por uma máquina de Turing sem acesso a nenhum oráculo.*

Demonstração. Considere a seguinte linguagem:

$$\mathsf{HALT} = \{\langle \alpha, x\rangle |\ M_\alpha \text{ para após um número finito de passos quando recebe } x \text{ como entrada}\}$$

Podemos decidir HALT com um oráculo para HALT. M^{HALT} simplesmente copia o conteúdo de sua fita de entrada para a sua fita de oráculo e faz uma consulta ao oráculo. Após isso M^{HALT} escreve em sua fita de saída 1 se ela estiver no estado q_{sim}, ou 0 caso esteja no estado $q_{\text{não}}$.

Pelo teorema seguinte nós vemos que nenhuma máquina de Turing convencional decide HALT.

□

Teorema 2.6 ([Tur36])**.** HALT *não é decidida por nenhuma máquina de Turing sem acesso a um oráculo.*

Demonstração. Assuma que H é uma máquina de Turing determinística que decida HALT. Neste caso é possível simular a execução de H sobre qualquer entrada em tempo finito. Seja H' uma máquina de Turing tal que

$$H' \text{ rejeita } x \iff M_x \text{ aceita a entrada } x$$

H' primeiro simula H sobre a entrada $(\langle M_x\rangle, x)$ e aceita após este passo se e somente se a simulação rejeita. Após isso, H' simula M_x sobre a entrada x e aceita se e somente a simulação rejeita. Se denotarmos por $\mathbb{1}_M$ a função característica da máquina de Turing M, ou seja,

$$\mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } M \text{ aceita a entrada } x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

temos que a função característica de H' pode ser escrita como

$$\mathbb{1}_{H'}(x) = 1 - \mathbb{1}_H(\langle M_x\rangle, x)\mathbb{1}_{M_x}(x).$$

Pela nossa hipótese, todos os passos que H' faz pode ser feito em tempo finito e portanto, H aceita a entrada $(\langle H' \rangle, x)$, para todas as strings $x \in \{0,1\}^*$. Em particular,

$$H(\langle H' \rangle, \langle H' \rangle) = 1 \Rightarrow \mathbb{1}_H(\langle H' \rangle, \langle H' \rangle) = 1.$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{H'}(\langle H' \rangle) &= 1 - \mathbb{1}_H(\langle H' \rangle, \langle H' \rangle)\mathbb{1}_{H'}(\langle H' \rangle) \\ &= 1 - \mathbb{1}_{H'}(\langle H' \rangle), \end{aligned}$$

uma contradição.

□

A técnica de prova usada acima se chama *diagonalização*. Esta técnica foi inventada por Georg Cantor que a usou para provar que existe diferente níveis de infinito. Mais precisamente, ele provou que a cardinalidade do conjuntos de todas as string binárias de tamanho infinito tem cardinalidade maior do que o conjunto de todos os números naturais, apesar de ambos os conjuntos serem infinitos.

2.4 Circuitos booleanos

Agora nós vamos ver circuitos booleanos que é o principal modelo de computação para o propósito deste trabalho. Nós também iremos ver como circuito booleanos estão naturalmente relacionados com fórmulas booleanas. Ambos os modelos são "flexíveis" no sentido em que eles não estão somente restritos a um conjunto fixo de operações permitidas. Também iremos ver que os dois modelos são equivalentes dado que as operações primitivas permitidas são as mesmas.

Um circuito booleano é um grafo direcionado acíclico. Nós particionamos os vértices do circuito em três partes: 1) n entradas do circuito 2) k portas lógicas 3) uma porta de saída. As entradas do circuito têm grau de entrada zero e os vértice de saída têm grau de saída também zero. Uma base Ω é uma coleção finita e não vazia de funções booleanas. Cada porta lógica de um circuito (incluindo a porta de saída) deve computar uma função booleana tirada de uma base Ω. Os vértices de entrada guardam algum valor booleano (0 ou 1). O valor da computação de um circuito vai depender dos valores das variáveis de entrada e de uma sequência de valores de funções tirada de Ω que dependem das variáves de entrada e/ou de funções previamente computadas. Segue então uma definição de circuitos Booleanos onde também vemos uma descrição algorítmica de seu funcionamento.

Definição 2.7. *(Circuitos booleanos)*

Um circuito booleano C sobre uma base Ω é um grafo direcionado acíclico com m vértices donde n vértices de grau de entrada zero são as variáveis de entrada $v_1, \ldots, v_n$, e todos os outros vértices $v_{n+1}, \ldots, v_m$ são portas lógicas que computam alguma função em Ω e que têm grau de entrada e grau de saída maior ou igual a um com a exceção de v_m que é a saída do circuito e tem grau de saída zero.

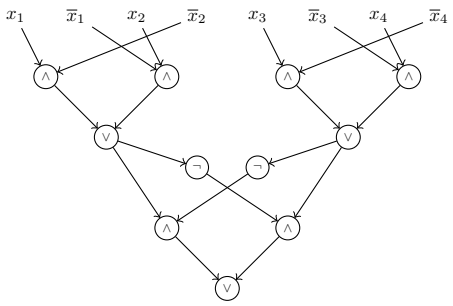
Cada vértice v do circuito terá um valor associado a ele que denotamos por $val(v)$. As arestas que chegam em uma porta lógica são suas entradas enquanto que as arestas que saem dela são as suas saídas. Dessa forma, se dois vértices u e v, onde u é uma porta lógica ou uma variável de entrada e v é uma porta lógica, são ligados por uma aresta que sai de u e chega em v, então temos que $val(v)$ depende de $val(u)$. Mais precisamente, se v é uma porta lógica que computa uma função $g \in \Omega$ e $u_1, \ldots, u_l$ são todos os vértices que são predecessores de v, então o valor de v é definido por $val(v) = g(val(u_1), \ldots, val(u_l))$.

Como um circuito é um grafo direcionado acíclico e os n primeiros vértices v_1 até v_n são fontes e o último vértice v_m é um sumidouro, podemos assumir que o ordenamento $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ é um ordenamento topológico dos vértices do circuito. Portanto, podemos formalizar o funcionamento do circuito da seguinte maneira: assume-se que os vértices de entradas $v_1, \ldots, v_n$ recebem valores booleanos arbitrários e $x = val(v_1) \cdot val(v_2) \ldots val(v_{n-1}) \cdot val(v_n)$ é a entrada do circuito e queremos computar o valor $C(x) = val(v_m)$. Para isso segue-se em m - n passos onde no i-ésimo passo é computado $val(v_{n+i})$. Note que em cada passo os valores dos vértices dos quais v_{n+i} depende já foram decididos por causa da nossa hipótese que $(v_1, \ldots, v_m)$ é um ordenamento topológico dos vértices do circuito.

Se $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ é a função booleana $f(x) = C(x)$, para todo $x \in \{0,1\}^n$, então é dito que C computa f.

O fan-in de uma porta lógica é o número de entradas que ela aceita e o fan-out é o número de saídas (ou seja, o grau de saída). Geralmente o fan-in das porta lógicas de um circuito vão ser limitados por uma constante mas em alguns casos nós vamos considerar classes de circuitos onde não há nenhuma restrição quanto ao fan-in máximo das portas lógicas. Podemos também definir circuitos que computam alguma função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ vendo cada bit na saída como o resultado da computação de um circuito que computa uma função Booleana.

Abaixo nós podemos ver um exemplo de circuito Booleano que computa a função Parity_4 que não é nada mais do que o XOR de 4 bits.



Para superar a limitação de circuitos aceitarem somente entradas de um tamanho fixo nós definimos uma sequência infinita de circuitos onde o n-ésimo circuito da sequência computa uma função com entradas de tamanho n. Desta forma podemos falar de circuitos (ou família de circuitos) que decidem uma dada linguagem, ao invés de somente computar uma função com domínio nas string binárias de um determinado tamanho.

Definição 2.8. *(Família de circuitos)*

Uma família de circuitos é uma sequência $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de circuitos booleanos onde cada C_n computa uma função $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Dizemos que $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de circuitos para uma função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ se $f(x) = C_{|x|}(x)$, $\forall x \in \{0,1\}^*$.

Adicionalmente, se uma família de circuitos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma família de circuitos para a função característica de uma linguagem L qualquer, então podemos dizer que $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decide L.

2.4.1 Fórmulas booleanas

Uma *fórmula booleana* é um circuito onde todas as porta lógicas têm fan-out igual a 1. Todos circuitos booleanos podem ser convertidos para uma fórmula se substituirmos todas portas lógicas com fan-out maior do

que um por um número suficiente de cópias dessas portas lógica com somente uma saída. E como fórmulas são um caso especial de circuitos temos que os dois modelos são equivalentes. Geralmente descrevemos fórmulas lógicas através de variáves, conectivos e parênteses para denotar a sequência correta de operações. Por exemplo, considere os seguintes operadores lógicos:

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	$\neg a$
0	1
1	0

O operador $\vee$ é chamado de *OU*, $\wedge$ é chamado de *E* e $\neg$ de NÃO. A base formada por $\vee, \wedge$ e $\neg$ é a mais "popular" no contexto de operação lógicas. Se x_1 e x_2 são variáveis então $(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$ é um exemplo de fórmula lógica.

Alternativamente, podemos definir fórmulas logicas sobre a base $\{\vee, \wedge, \neg\}$ recursivamente da seguinte forma:

- Se x é uma variável então x é uma fórmula
- Se ϕ e ψ são fórmulas então também são $\phi \vee \psi$, $\phi \wedge \psi$ e $\neg\phi$.

A seguir nós vemos algumas forma normais de se representar fórmulas lógicas que vão ser bastante úteis para nós.

Definição 2.9. *(Forma normal conjuntiva (FNC))*

Uma fórmula lógica sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é dita estar na forma normal conjuntiva (ou FNC) se ela é o E de OUs de variáveis em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ou as suas negações.

Ou seja, uma fórmula na FNC (alternativamente, uma fórmula FNC) pode ser escrita como

$$\bigwedge_{i=1}^{m} c_i$$

Onde os $c_i = x_{i_1} \vee \cdots \vee x_{i_{k(i)}}$ são chamados de cláusulas e m é o número de claúsulas na fórmula.

Por exemplo, se ϕ é uma fórmula sobre as variáves x_1, x_2, x_3 e x_4, então

$$\phi = (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_4)$$

está na forma normal conjuntiva.

Uma fórmula é dita ser uma k-FNC se ela estar na forma normal conjuntiva e cada cláusula estiver restrita a no máximo k literais.

Definição 2.10. *(Forma normal disjuntiva)*

Uma fórmula lógica sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é dita estar na forma normal disjuntiva (ou FND) se ela é o OU de Es de variáveis em $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ou as suas negações.

Os Es são chamados de termos. Se o número de termos na fórmula for m e $c_i = x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k(i)}}$, $i \in [m]$, forem termos então uma fórmula na FND (alternativamente, uma fórmula FND) pode ser escrita como

$$\bigvee_{i=1}^{m} c_i$$

Por exemplo, a fórmula $\phi = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_4)$ está na forma normal disjuntiva.

Assim como k-FNCs, uma k-FND é uma fórmula na forma normal disjuntiva com a restrição que cada termo deva ter no máximo k literais.

A largura de uma cláusula em uma fórmula FNC ou de um termo em uma fórmula FND é o número de literais que aparecem na cláusula/termo. A largura de uma fórmula FNC (ou FND) é o máximo entre a largura de todas as suas cláusulas (ou de todos os seus termos). Assim sendo, uma k-FNC ou uma k-FND tem largura k. O tamanho de uma fórmula FNC (ou FND) é o número de cláusulas (termos).

Definição 2.11. *Um* mintermo *é o E de todas as variáves de uma fórmula ou suas negações. Por exemplo,* $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$ *é um mintermo sobre as variáveis* x_1, x_2, x_3 *e* x_4*.*

Considere a seguinte operação sobre uma variável booleana x:

$$x^b = \begin{cases} x & \text{caso } b = 1, \\ \overline{x} & \text{caso } b = 0. \end{cases}$$

Então podemos escrever um mintermo sobre as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ de uma fórmula booleana como $x_i^{b_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{b_n}$, onde cada b_i é 0 ou 1. Daí fica óbvio que um mintermo é verdadeiro se e somente se $x_i = b_i$, para cada $i \in [n]$. Se $x = (b_1, \ldots, b_n)$ é uma atribuição às variáveis então associamos o seguinte mintermo a esta atribuição:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{b_i}$$

Então, para cada função booleana f com n variáveis, o n-FND onde cada termo é um mintermo associado às atribuições que satisfazem $f(x) = 1$ é uma fórmula que computa f. Isto significa que todas funções Booleanas $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ podem ser computadas por um circuito Booleano e consequentemente todas linguagens em $\{0,1\}^*$ são decididas por alguma família de circuitos, incluindo a linguagem HALT que não é computável por máquinas de Turing convencionais. Note que estamos fazendo um uso essencial da base $\{\vee, \wedge, \neg\}$ para tal afirmação. No caso geral podemos dizer que uma base Ω é *completa* se para todo $n > 0$ e toda função Booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ existe um circuito que utiliza a base Ω e computa a função f. Utilizando a lei de De Morgan podemos nos dispensar do operador $\vee$ e teremos que a base $\Omega = \{\wedge, \neg\}$ é também uma base completa, e também poderiamos dizer o mesmo a respeito de $\Omega = \{\vee, \neg\}$.

Árvores de decisão

Árvores de decisão são uma outra forma de representar funções Booleanas. Uma árvore de decisão que computa uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ pode ser vista como um algoritmo de consulta T que funciona da seguinte forma.

1. Existe uma consulta inicial q_1 à uma variável x_{i_1}, para algum $i_1 \in [n]$, e duas consultas $T(q_1, 0)$ e $T(q_1, 1)$ em que a próxima consulta é $T(q_1, b)$ se for o caso que a consulta à variável x_{i_1} retorna o bit b (ou seja $x_{i_1} = b$).

2. Para todas as outras consultas q_j subsequentes, nós definimos $T(q_j, b)$ de forma que a próxima consulta é $T(q_j, b)$ se a consulta à variável x_{i_j} retorna b.

3. Eventualmente, após T ter feito um número suficiente de consultas às variáveis ele dá como saída o valor $f(x) = b$ de forma que toda as strings $x' \in \{0,1\}^n$ que são consistentes com as respostas às consultas feitas por T satisfazem $f(x') = b$.

Uma sequência $(q_1, r_1), (q_2, r_2), \ldots, (q_l, r_l)$ de consultas e respostas forma um caminho de tamanho l. Uma árvore de decisão é definida da seguinte forma.

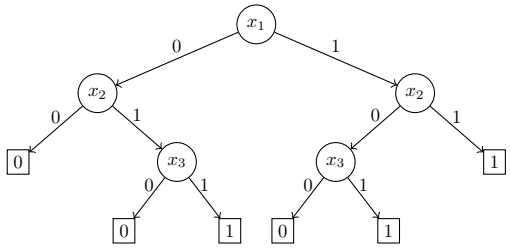
Definição 2.12 (Árvores de decisão)**.** *Uma árvore de decisão que computa a função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ é um algoritmo de consulta em que a primeira consulta é a raíz da árvore e todo caminho acaba em um nodo chamado de folha. Todos os outros nodos da árvore são chamados de nodos internos. Cada nodo que não é uma folha guarda uma variável x_i, para $i \in [n]$, e cada folha guarda um bit $b \in \{0,1\}$. Nós exigimos que*

1. *Cada nodo que não é uma folha tenha exatamente dois descendentes e uma das arestas que liga este nodo a um de seus descendentes direto está marcada com o bit 0 enquanto que a outra aresta está marcada com o bit 1.*

2. *Se um nodo interno estiver marcado com a variável x_j então o caminho pela árvore segue a aresta marcada com o bit b em que $x_j = b$.*

3. *Nenhuma variável é consultada mais do que uma vez em qualquer caminho da árvore.*

4. *Se $x \in \{0,1\}^n$ segue um caminho que acaba em uma folha que guarda o bit b então $f(x) = b$.*



A figura 2.4.1 dá um exemplo de uma árvore de decisão. Pode-se verificar que esta árvore de decisão computa a função Majority_3 em que $\text{Majority}_3(x)$ é 1 se e somente se o número de 1s em x é maior do que 1.

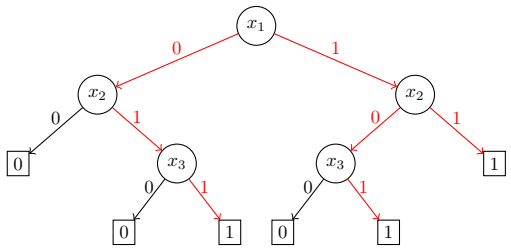
A profundidade de uma árvore de decisão é o tamanho do maior caminho da raiz até uma folha. O tamanho de uma árvore de decisão é o número de folhas que ela tem.

Nós podemos ver que toda árvore de decisão pode ser convertida em uma fórmula FND ou FNC da seguinte forma. Para converter uma árvore de decisão em uma fórmula FND nós pegamos cada caminho que termina numa folha com o label 1 e convertemos estes caminhos em um termo da fórmula que será a conjução de todas as variáveis que aparecem no caminho correspondente, sendo que aquelas variáves que têm uma aresta marcada com o valor 0 saindo de seu nodo aparecem como um literal negado na conjução. Para converter uma fórmula FNC nós pegamos os caminhos que levam à uma folha com o valor 0, construindo uma cláusula da fórmula FNC para cada um destes caminhos mas agora as variáveis que têm uma aresta com o valor 1 saindo de seu nodo aparecem como um literal negado na cláusula.

Como exemplo nós podemos tomar a árvore de decisão para a função Majority_3 que vimos acima. Se quisermos convertê-la para uma fórmula FND nós obtemos a fórmula

$$F_{FND} = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2).$$

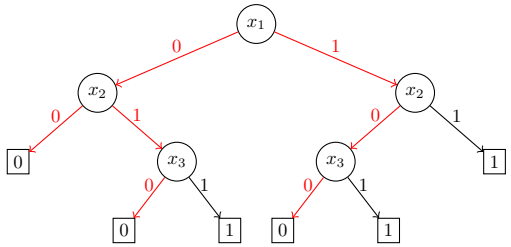
A figura 2.4.1 ilustra como a conversão é feita, onde cada caminho em vermelho forma um dos termos da fórmula FND.



Quando convertemos para uma fórmula FNC nós obtemos a fórmula

$$F_{FNC} = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3).$$

A figura 2.4.1 ilustra como é feita a conversão para uma fórmula FNC.



Finalmente, nós podemos notar que a largura da fórmula FND ou FNC formada é no máximo a profundidade da árvore, ao passo que o tamanho da fórmula é no máximo o tamanho da árvore de decisão. O converso não é verdade porém. Uma fórmula FND (ou FNC) com largura w e tamanho s não necessariamente pode ser convertida em uma árvore de decisão de profundidade no máximo w e tamanho no máximo s.

2.5 Complexidade computacional

Na seção anterior nós vimos que Turing nos deu uma definição formal do que nós intuitivamente pensamos ser computável. Porém, no mundo real, um problema ter um processo computacional finito que o resolva não é suficiente. Também queremos que a computação seja feita num tempo que seja útil para nós. O que foi observado é que o tempo de execução de algoritmos em computadores cresce a medida em que o tamanho da entrada também cresce. Pense no tamanho da entrada sendo medido como, por exemplo, o número de bits na representação binária de um número ou o número de vértices em um grafo. Como normalmente é desejável que um algoritmo seja eficiente para entradas de tamanho razoavelmente grande (em alguns casos o tamanho da entrada pode ser 10^6, por exemplo), nós queremos que a função de crescimento do algoritmo não cresça muito rápidamente — para que até para entradas de tamanho "razoavelmente grande" o número de passos necessários para realizar o algoritmo não seja excessivamente grande. Portanto foi importante definir uma forma de medir a complexidade de algoritmos e também o que nos queremos dizer por uma "função eficiente"para o tempo de execução de um algoritmo.

Talvez o primeiro artigo que definiu uma medida de complexidade para problema computacionais foi [HS65], onde Hartmarnis e Stearns definiram que uma sequência binária α é computável em tempo T, onde T é uma

função computável monotônica crescente de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N}$, se existe uma máquina de Turing que dá como saída o n-ésimo bit de α em menos do que $T(n)$ passos. Em [Edm65], Edmonds propõe que devemos considerar funções polinomiais como sendo sinônimo de eficiência.

Nós dizemos que uma máquina de Turing M roda em tempo $T(n)$ se M, ao receber uma entrada de tamanho n, executa no máximo $T(n)$ passos (um passo da computação da máquina de Turing envolve escrever símbolos em suas fitas de trabalho, movimentar os cabeçotes de suas fitas e mudar o seu estado atual). Ao longo deste trabalho nós vamos assumir que esta função T e qualquer outra função que estivermos usando para medir a complexidade de tempo de um problema computacional é *tempo-construtível* da forma definida a seguir.

Definição 2.13 (Funções tempo-construtíveis)**.** *Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dita ser tempo-construtível se existe uma máquina de Turing M_f que ao receber a string unária 1^n em sua entrada, M_f escreve a representação binária de $f(n)$ em sua fita de saída em $\mathcal{O}(f(n))$ passos.*

Todas funções que nos interessam como as funções polinomiais, $\log n$, 2^{n^c}, etc. são tempo construtíveis.

Nós vimos no teorema 2.2 que existe uma máquina de Turing que pode simular a execução de todas as outras máquinas de Turing sobre qualquer entrada. Também foi dito que a simulação é "eficiente" e que segundo Edmonds isto deveria significar que a simulação pode ser feito em tempo polinomial. E nós podemos verificar que o número de passos que $\mathcal{U}$ precisa para simular uma máquina de Turing M de tempo $T(n)$ é $\mathcal{O}(T(n)^2)$. Para provar isto temos que ver quanto passos $\mathcal{U}$ necessita para simular um único passo de M. Em cada simulação de um passo, $\mathcal{U}$ visita cada "espaço" que representa uma fita de M, e como uma computação que executa menos do que $T(n)$ passos não pode usar mais do que $T(n)$ células de sua fita, temos que cada espaço contém no máximo $T(n)$ células. Então para simular um passo de M, $\mathcal{U}$ visita algo em torno de $kT(n)$ células de sua fita de trabalho, onde k é o número de fitas de M, e portanto o "slowdown" de simular M é apenas $\mathcal{O}(T(n))$.

Nós podemos fazer melhor do que $T(n)^2$, nós podemos simular uma máquina de Turing com "slowdown" logarítmico.

Teorema 2.14. *Existe uma máquina de Turing de duas fitas $\mathcal{U}^*$ que sobre a entrada (α, x), $\mathcal{U}^*$ dá como saída $M_\alpha(x)$. Além disso, se $T(|x|)$ é o tempo que M_α leva para executar sua computação sobre a entrada x, então $\mathcal{U}^*$ roda em tempo $\mathcal{O}(T(|x|)\log T(|x|))$ ao receber (α, x) em sua fita de entrada.*

Uma prova do teorema 2.14 pode ser encontrada em [AB09] (Teorema 1.9). O resultado foi originalmente proposto por Hennie e Stearns [HS66].

Construindo sobre o resultado acima nós podemos provar o seguinte resultado que nos será útil mais para frente.

Definição 2.15. *Uma máquina de Turing* oblivious *é uma máquina de Turing cuja o movimento de seus cabeçotes de fita só dependem do tamanho da entrada, e não no conteúdo das células e o estado atual.*

Desta forma, a função de transição de uma máquina de Turing *oblivious* $A = \{\Gamma, Q, \delta\}$ de k fitas é $\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1}$. Nós podemos imaginar que existe uma função $m : \mathbb{N} \to \{\{E, N, D\}^k\}^*$ tal que ao receber uma entrada x, os movimentos dos cabeçotes das fitas de A é dado por $m(|x|) = (z_1, \ldots, z_{T(|x|)})$, onde cada $z_i \in \{E, N, D\}^k$ representa os movimentos dos cabeçotes de fita de A no i-ésimo passo e $T(|x|)$ é o tempo em que A para ao receber entradas de tamanho $|x|$.

Teorema 2.16. *Se M é uma máquina de Turing que roda em tempo $T(n)$ para entradas de tamanho n, então existe uma máquina de Turing* oblivious *A de duas fitas que roda em tempo $\mathcal{O}(T(n)\log T(n))$ tal que $A(x) = M(x)$, para todo $x \in \{0,1\}^*$.*

Demonstração. Nós podemos modificar a MT $\mathcal{U}^*$ no teorema 2.14 de forma que ela seja uma máquina de Turing *oblivious* sem aumentar significativamente o seu tempo de execução. E além disso, $\mathcal{U}^*$ pode ser construida usando somente 2 fitas.

Então, A simplesmente executa a simulação de $\mathcal{U}^*$ sobre entradas $(\langle M \rangle, x)$, para qualquer $x \in \{0,1\}^*$.

□

Uma das contribuições de Hartmanis e Stearns em [HS65] foi que eles mostraram como podemos agrupar problemas computacionais de acordo com o número de passos que um máquina de Turing necessita para resolvê-los. Nesta seção iremos nos preocupar apenas com o tempo e espaço necessários para resolver problemas computacionais. Algumas classes de complexidade de tempo são definidas a seguir, e no fim desta seção iremos ver algumas classes de complexidade de espaço.

Definição 2.17. *Para uma função $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nós definimos as seguintes classes de problemas:*

- $\mathsf{DTIME}(T(n))$*: a classe de todas linguagens L tal que existe uma máquina de Turing determinística M de tempo $T(n)$ que decide L.*
- $\mathsf{NTIME}(T(n))$*: a classe de todas linguagens L tal que existe uma máquina de Turing não-determinística N que decide L e N executa no máximo $T(n)$ passos ao receber uma entrada de tamanho n, indepedente das escolhas das funções de transição de N.*
- $\mathsf{coDTIME}(T(n))$*: a classe de todas linguagens L tal que $\overline{L} \in \mathsf{DTIME}(T(n))$, onde $\overline{L}$ é o complemento da linguagem L (ou seja, $x \in L \iff x \notin \overline{L}$). Da mesma forma nós definimos* $\mathsf{coNTIME}(T(n))$.

As classes P e NP

Como já vimos, iremos usar tempo polinomial como sinônimo de eficiência. Uma linguagem L é decidida em tempo polinomial se existe um polinômio p tal que o tempo necessário para decidir a pertinência de uma string x em L é menor do que $p(|x|)$. A classe de linguagens decididas em tempo polinomial é chamada de P.

Definição 2.18 (A classe P)**.** *Uma linguagem L é dita estar em* P *se e somente se existe $c \geq 1$ tal que $L \in \mathsf{DTIME}(n^c)$.*

Um dos grandes objetivos de designers de algoritmos é provar que um determinado problema está em P pois então geralmente ele pode ser implementado eficientemente em um computador. Alguém poderia dizer que talvez exista um problema (natural) que esteja em P mas o tempo de execução do algoritmo para este problema é algo do tipo $10^{1000}n$ ou n^{1000}, o que com certeza não seria nada eficiente até mesmo para entradas moderadamente pequenas. É verdade que um problema estar em P não implica necessariamente em ele poder ser resolvido eficientemente. Na verdade, nem mesmo a não existência de um algoritmo de tempo polinomial para um problema implica em ele não poder ser resolvido eficientemente na prática. Mas usar a convenção de tempo polinomial = eficiência é conveniente quando estamos estudando classes de complexidade e a relação entre elas, por alguns motivos como por exemplo algumas modificações na definição de máquinas de Turing e até mesmo outros modelos computacionais mais realistas (como máquinas de acesso aleatório) não alteram a classe P, entre outros motivos.

Enquanto que P procura capturar linguagens que podem ser decididas eficientemente, a classe NP por sua vez procura capturar linguagens cuja suas instâncias sejam eficientemente verificáveis.

Definição 2.19 (A classe NP)**.** *Uma linguagem L está em* NP *se e somente se existe um polinômio p e uma máquina de Turing de tempo polinomial M tal que $x \in L \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x,u) = 1$.*

Dizemos que u é um certificado da pertinência de x em L. Nós podemos definir NP de uma outra forma:

Definição 2.20. $\mathsf{NP} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{NTIME}(n^c)$.

Para ver que as duas definições são equivalentes note que as escolhas da máquina de Turing não-determinística podem servir como um certificado, enquanto que uma máquina de Turing não-determinística poderia "adivinhar" um certificado para x.

A questão em aberto mais importante em complexidade computacional pergunta se as classes P e NP são iguais. Esse problema tem alguma importância histórica já que vários problemas que são importante em aplicações práticas que estão em NP não parecem, pelo que sabemos até agora, ter solução melhor do que tentar exaustivamente todas as possibilidades. Encontrar uma solução para esses problemas que seja melhor do que a busca exaustiva esteve no coração de algumas das primeiras pesquisas em complexidade computacional.

Definição 2.21 (A classe coNP)**.** $\mathsf{coNP} = \bigcup_{c \geq 1} \mathsf{coNTIME}(n^c)$.

Note que $\mathsf{P} = \mathsf{coP}$, já que um procedimento que decide eficientemente a pertinência de uma *string* em uma linguagem também pode ser usada para decidir a não pertinência (simplesmente inverta a saída), e portanto $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ implica em $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.

Reduções

Um dos principais conceitos em teoria da computação é o de uma *redução*. Uma redução é basicamente um procedimento que transforma uma instância de um problema A em uma instância de um outro problema B.

Definição 2.22 (Reduções)**.** *Uma redução de um problema $L \subseteq \{0,1\}^*$ para um problema $L' \subseteq \{0,1\}^*$ é uma função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ tal que $x \in L \iff f(x) \in L'$, para todo $x \in \{0,1\}^*$.*

Além disso, L é dita ser redutível em tempo polinomial para L', o que denotamos por $L \leq_p L'$, se a redução f pode ser computada em tempo polinomial.

Reduções de tempo polinomial vão ser útil quando formos ver o próximo assunto. Se L é redutível em tempo polinomial para L', então um algoritmo de tempo polinomial para L' implica em um algoritmo de tempo polinomial para L, já que podemos usar a redução f para mapear uma string $x \in \{0,1\}^*$ em uma instâcia $f(x)$ de L' e depois usamos o algoritmo A de tempo polinomial que decida L' para computar $A(f(x))$. Se o tempo necessário para computar A sobre entradas de tamanho n for $p(n)$, onde p é um polinômio, e q for o tempo necessário para computar f então acabamos de mostrar que podemos decidir L em tempo menor do que $q(|x|) + p(q(|x|))$.

NP-completude e o teorema de Cook-Levin

Algumas linguagens em uma determinada classe de complexidade tem uma propriedade interessante em que elas capturam toda a dificuldade daquela classe. Um linguagem L é completa para uma classe sobre uma determinada "classe de reduções" $\leq_R$ (por exemplo, reduções em tempo polinomial como vimos na definição 2.22) se ela pertence à classe e todos os outros problemas dentro desta classe são redutíveis através de $\leq_R$ para L.

Definição 2.23 (NP-completude)**.** *Uma linguagem L é dita ser NP-difícil sse para todas linguagens $A \in \mathsf{NP}$, $A \leq_p L$.*

Se além de ser NP-difícil L também está em NP então dizemos que L é NP-completa.

Problemas NP-completos (que sejam naturais) existem, como foi provado por Stephen Cook e Leonid Levin, independentemente, no começo da década de 70. [Coo71, Lev73] O primeiro problema que foi provado ser NP-completo foi o problema da satisfazibilidade booleana.

Definição 2.24 (O problema da satisfazibilidade booleana)**.** *No problema da satisfazibilidade booleana, que chamaremos de SAT, é dado uma fórmula ϕ com variáveis $x_1, \ldots, x_n$ e queremos de decidir se existe uma atribuição $(x'_1, \ldots, x'_n)$ às variáves $x_1, \ldots, x_n$ tal que $\phi(x'_1, \ldots, x'_n) = 1$.*

Teorema 2.25 (Teorema de Cook-Levin)**.** SAT *é* NP*-completo.*

Apesar de poder ser um pouco longa, a prova do teorema 2.25 é bem simples de entender. Basicamente, nós temos que se A é uma linguagem em NP, então existe uma máquina de Turing M (que podemos assumir ter apenas uma fita) que aceita uma entrada $x \in \{0,1\}^n$ com um certificado $u \in \{0,1\}^{\text{poly}(n)}$ se e somente se $x \in A$ e u é um certificado da pertinência de x em A. A função $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ que transforma x em uma fórmula ϕ_x que é satisfazível se e somente se $x \in A$ faz o seguinte:

1. Se para todo $n > 0$ M roda em tempo menor do que $T(n)$ sobre entradas de tamanho n então f constroi um tableau $T(|x|) \times T(|x|)$ onde a i-ésima linha deste tableau guardará a configuração de M no seu i-ésimo passo.

2. A fórmula ϕ_x tem $T(|x|)^2$ variáveis que chamaremos de v_{ij}, $1 \leq i, j \leq T(|x|)$. O valor da variável v_{ij} é o conteúdo da célula na linha i e coluna j do tableau.

3. Pela computação de uma máquina de Turing ser local, o que significa dizer que o conteúdo de uma das células em um passo da computação depende somente do estado atual, da posição do cabeçote da fita e do conteúdo das duas células adjacente à ela, podemos construir uma fórmula booleana que decide o valor da variável v_{ij} em função das variáveis $v_{(i-1)(j-1)}, v_{(i-1)j}$ e $v_{(i-1)(j+1)}$. Esta fórmula depende somente da função de transição de M e portanto tem tamanho constante.

4. Precisamos assegurar algumas outras coisas, como por exemplo que a primeira linha do tableau é uma configuração inicial válida e que a última linha é uma configuração de aceitação (isto é, uma configuração onde o estado atual é q_{aceita}).

Pela natureza "repetitiva" da redução e pela fórmula ter tamanho polinomial ($\mathcal{O}(T(n)^2)$) podemos ver que ela pode ser feita em tempo polinomial. Finalmente, SAT $\in$ NP já que uma atribuição das variáveis que satisfazem uma fórmula pode servir como certificado.

Agora que nós temos um único problema que sabemos ser NP-completo, nós podemos provar que outros problemas são também NP-completo mostrando que SAT é redutível em tempo polinomial para eles. Isso segue pois a relação $\leq_p$ é transitiva. Por exemplo, podemos provar que a linguagem 3-SAT, que pergunta se uma fórmula na 3-FNC é satisfazível, é NP-completa. Em 1972, Richard Karp publicou [Kar72] onde 21 problemas importantes foram provados serem NP-completos e desde então milhares de problemas que aparecem em aplicações práticas já foram provados serem NP-completos. O livro de Garey e Johnson é uma excelente referência para o fenômeno da NP-completude. [GJ02]

Como já observamos antes, se existe uma linguagem NP-completa em P então P = NP, pois poderiamos usar a redução de tempo polinomial para L e depois o seu algoritmo de tempo polinomial para decidir qualquer outra linguagem em NP em tempo polinomial.

Hierarquia polinomial

Considere o seguinte problema em NP:

CLIQUE. *Dado um inteiro $k > 0$ e um grafo G, aceite se G tem um clique de tamanho maior ou igual a k.*

Podemos ver que CLIQUE está em NP pois um clique de tamanho maior ou igual a k em G é obviamente um certificado que G tem um clique de tamanho maior ou igual a k. Mas se ao invés de decidir se G tem um clique de tamanho pelo menos k nós queremos decidir se o maior clique em G tem tamanho k, como no problema MAX-CLIQUE:

MAX-CLIQUE. *Dado um inteiro $k > 0$ e um grafo G, aceite se o maior clique em G tem tamanho igual a k.*

Agora não fica tão óbvio para nós o que seria um certificado "eficiente" para MAX-CLIQUE. Além de termos que mostrar um clique de tamanho k, também devemos mostrar que nenhum subconjunto de tamanho maior do que k dos vértices de G formam um clique. Porém, adicionando um quantificador $\forall$ parece ser o suficiente para nós podermos capturar problemas como MAX-CLIQUE, o que a classe NP não parece conseguir fazer pelo o que nós sabemos até agora.

Definição 2.26 (A classe Σ_2^p)**.** *Uma linguagem L é dita estar em Σ_2^p se e somente se existe um polinômio p e uma máquina de Turing M que roda em tempo $p(n)$ tal que L pode ser escrita como:*

$$\text{Para todo } x \in \{0,1\}^*,\ x \in L \iff \exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2) = 1$$

Se as instâncias MAX-CLIQUE são da forma $\langle G, k\rangle$, onde G é um grafo e $k > 0$ um inteiro, então dizer $\langle G, k\rangle \in$ MAX-CLIQUE é o mesmo que dizer que *existe* um clique de tamanho k e que *todos* subconjuntos de tamanho maior do que k dos vértices de G não formam um clique.

Nós podemos ainda generalizar as classes NP e Σ_2^p, o que nós chamamos de hierarquia polinomial:

Definição 2.27 (Hierarquia polinomial)**.** *Para $k \geq 1$, uma linguagem L é dita estar em Σ_k^p se L pode ser expressa da seguinte forma:*

$$x \in L \iff \exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2, \dots, x_k) = 1$$

Onde Q_k é $\exists$ se k é ímpar ou $\forall$ se k é par. M é uma máquina de Turing de tempo $p(n)$.

A hierarquia polinomial é $\mathsf{PH} = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma_k^p$.

Note que $\mathsf{NP} = \Sigma_1^p$ e também podemos chamar P de Σ_0^p.

Assim como fizemos com NP, também podemos generilizar a classe coNP através de quantificadores alternantes. A diferença é que o primeiro quantificador é um $\forall$.

Definição 2.28. *Para todo $k \geq 1$ a classe $\mathsf{co}\Sigma_k^p$ consiste de todas as linguagens L que podem ser expressas como:*

$$x \in L \iff \forall x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Onde agora Q_k é $\forall$ se k é ímpar e $\exists$ caso contrário. E de novo, M é uma máquina de Turing de tempo $p(n)$. Para cada k, nós chamamos $\mathsf{co}\Sigma_k^p$ de Π_k^p.

E nós temos que $\mathsf{coNP} = \Pi_1^p$.

É fácil ver que para todo $k \geq 1$ nós temos as seguintes desigualdades:

$$\Sigma_k^p \subseteq \Pi_{k+1}^p \subseteq \Sigma_{k+2}^p$$

Portanto $\mathsf{PH} = \bigcup_{k \geq 1} \Pi_k^p$

Nós dizemos que a hierarquia polinomial *colapsa* se para algum k, $\mathsf{PH} = \Sigma_k^p$. Neste caso dizemos que a hierarquia polinomial colapsa para o seu k-ésimo level e também temos que $\Sigma_k^p = \Sigma_l^p$, para todo $l > k$.

Teorema 2.29. *Para todo $k \geq 1$, se $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$ então $\mathsf{PH} = \Sigma_k^p$.*

Demonstração.

Assuma que para algum $k \geq 1$, $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$.

Nós mostramos por indução que para todo $l > k$, $\Sigma_l^p = \Pi_l^p = \Sigma_k^p$. Para isso só precisamos mostrar que $\Sigma_l^p \subseteq \Sigma_k^p$, pois por nós termos assumido que $\Sigma_k^p = \Pi_k^p$, $\Sigma_l^p = \Sigma_k^p$ implica em Σ_l^p estar fechada sob complemento.

Para $l = k + 1$, nós temos que toda linguagem L em Σ_{k+1}^p pode ser expressa como:

$$x \in L \iff \exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_{k+1} x_{k+1} \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = 1 \tag{2.7}$$

para alguma polinômio p e máquina de Turing de tempo polinomial M.

Então considere a seguinte linguagem L':

$$(x, x_1) \in L' \iff \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_{k+1} x_{k+1} \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = 1$$

L' está em $\Pi_k^p = \Sigma_k^p$ portanto podemos reescrever L' como:

$$(x, x_1) \in L' \iff \exists y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M'(x, x_1, y_1, y_2, \dots, y_k) = 1 \tag{2.8}$$

Então podemos trocar toda parte a partir do primeiro quantificador $\forall$ de 2.7 pelo lado direito de 2.8 e temos o seguinte:

$$x \in L \iff \exists x_1, y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \dots Q_k y_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M'(x, x_1, y_1, y_2, \dots, y_k) = 1$$

Portanto $L \in \Sigma_k^p$.

Para provar para outros valores de $l > k + 1$, nós provamos da mesma maneira mas assumindo que $\Sigma_{l-1}^p = \Pi_{l-1}^p$ que agora sabemos que são iguais a Σ_k^p.

□

Assim como vimos que a classe NP tem problemas completos, podemos provar que cada nível da hierarquia tem seu próprio problema completo. Uma linguagem L é Σ_k^p-completa se e somente se $L \in \Sigma_k^p$ e para todo $L' \in \Sigma_k^p$, $L' \leq_p L$.

Cada level da hierarquia polinomial tem a sua própria versão do problema SAT.

Definição 2.30. *Para todo $k > 0$, a linguagem Σ_k^pSAT consiste de todas as fórmulas lógicas ϕ tal que:*

$$\exists u_1 \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \exists \dots Q_k u_k \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \phi(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

é verdadeiro, onde Q_k é $\exists$ se k é ímpar e $\forall$ se k é par.

Da mesma forma, uma fórmula lógica está em Π_k^pSAT se e somente o seguinte predicato quantificado é verdadeiro:

$$\forall u_1 \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \exists u_2 \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \forall \dots Q_k u_k \in \{0,1\}^{p(|\langle\phi\rangle|)} \phi(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

Onde Q_k é $\forall$ se k é ímpar e $\exists$ se k é par.

E como é de se esperar, cada $\Sigma_k^p\mathsf{SAT}$ é Σ_k^p-completo. A prova que $\Pi_k^p\mathsf{SAT}$ é Π_k^p-completo, para cada $k \geq 1$, é análoga.

Teorema 2.31. *Para todo $k \geq 1$, $\Sigma_k^p\mathsf{SAT}$ é Σ_k^p-completo.*

Demonstração. Para algum $k \geq 1$, seja L uma linguagem em Σ_k^p. Para toda string $x' \in \{0,1\}^*$, nós temos que mostrar que existe uma redução em tempo polinomial que transforma x' em uma instância $\phi_{x'}$ de $\Sigma_k^p\mathsf{SAT}$ tal que $\phi_{x'} \in \Sigma_k^p\mathsf{SAT} \iff x' \in L$. Sabemos que podemos expressar L como:

$$x \in L \iff \exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists \ldots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$$

Usando a redução do teorema 2.25, nós podemos transformar a máquina de Turing M em uma fórmula ϕ tal que $\phi(x, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1 \iff M(x, x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$ em tempo polinomial. Para cada $x' \in \{0,1\}^*$ nós criamos a fórmula $\phi_{x'}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \phi(x', x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e temos que

$$\exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists \ldots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} \phi_{x'}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

é verdade se e somente se

$$\exists x_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall x_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \exists \ldots Q_k x_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x', x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

também é verdade. Ou seja, $\phi_{x'} \in \Sigma_k^p\mathsf{SAT}$ se e somente se $x' \in L$, como queriamos mostrar.

□

Complexidade de espaço

Além de tempo, uma outra medida de complexidade de máquinas de Turing que iremos considerar é o número de células da fita de trabalho utilizadas durante a computação, o que denominamos por complexidade de espaço. Analogamente a como fizemos para complexidade de tempo, nós iremos ver classes de complexidade que agrupam problemas de acordo com a sua complexidade de espaço. Ao definir classes de complexidade para problemas que usam menos do que $S(n)$ células nós iremos assumir que a função $S(n)$ é espaço construtível, que são funções definidas de forma análoga a como definimos funções tempo-construtível.

Definição 2.32 (Funções espaço-construtíveis)**.** *Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dita ser espaço-construtível se existe uma máquina de Turing M_f tal que ao receber a string unária 1^n em sua entrada, M_f escreve a representação binária de $f(n)$ em sua fita de saída e utiliza $\mathcal{O}(f(n))$ células da sua fita de trabalho.*

De novo temos que todas as funções que iremos usar ao longo deste trabalho para descrever a complexidade de espaço de uma máquina de Turing são espaço-contrutíveis. Então definimos classes de complexidade de espaço da seguinte forma.

Definição 2.33 (Classes de complexidade de espaço)**.** *Para uma função (espaço-construtível) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nós definimos as seguintes classes de complexidade de espaço.*

- $\mathsf{SPACE}(S(n))$*: a classe de todas as linguangens L tais que existe uma máquina de Turing determinística M que decide L em complexidade de espaço $S(n)$.*
- $\mathsf{NSPACE}(S(n))$*: a classe de todas as linguagens L tais que existe uma máquina de Turing não-determinística N que decide L e todos os possíveis ramos da computação de N executam em complexidade de espaço $S(n)$.*

- $\mathsf{coSPACE}(S(n))$*: uma linguagem* L *é dita estar em* $\mathsf{coSPACE}(S(n))$ *se e somente se a linguagem* $\overline{L}$ *está em* $\mathsf{SPACE}(S(n))$*. Também podemos definir* $\mathsf{coNSPACE}(S(n))$ *de forma similar.*

Nós então podemos definir a classe de problemas com complexidade de espaço polinomial.

Definição 2.34 (A classe PSPACE)**.** *A classe* PSPACE *é* $\bigcup_{c>0} \mathsf{SPACE}(n^c)$*. Ou seja, uma linguagem* L *está em* PSPACE *se e somente se* $L \in \mathsf{SPACE}(n^c)$*, para algum* $c > 0$*.*

A classe PSPACE é a versão da classe P para complexidade de espaço. Da mesma forma também temos a versão NP de complexidade de espaço que é a classe NPSPACE.

Definição 2.35 (A classe NPSPACE)**.** $\mathsf{NPSPACE} = \bigcup_{c>0} \mathsf{NTIME}(n^c)$.

Nós temos que $P \subseteq \mathsf{PSPACE}$ pois uma máquina de Turing que para após um número polinomial de passos só pode ter usado um número polinomial de células da sua fita de trabalho. Indo na outra direção, temos que $\mathsf{PSPACE} \subseteq \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$ (mais pra frente iremos ver que isto pode ser denotado como $\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXP}$) pelo seguinte argumento. Cada passo de uma máquina de Turing M que usa apenas um número polinomial de células da sua fita de trabalho pode ser descrito por uma configuração usando um número polinomial de bits que iremos denotar por n^c, para algum $c > 0$. No entanto, por se tratar de uma máquina de Turing determinística temos que se M repetir alguma das possíveis 2^{n^c} configurações então M necessariamente entrou em um loop infinito. Como estamos considerando máquinas de Turing que param após um número finito de passos temos que isto não pode acontecer e portanto há de ser o caso que M para após no máximo 2^{n^c} passos.

Da mesma forma temos que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$ pois podemos reutilizar a fita de trabalho para simular cada escolha não-determinística, e também $\mathsf{NPSPACE} \subseteq \bigcup_{c>0} \mathsf{SPACE}(2^{n^c})$ (equivalentemente, $\mathsf{NPSPACE} \subseteq \mathsf{EXP}$) pelo mesmo argumento que usamos para argumentar que $\mathsf{PSPACE} \subseteq \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$. Na verdade, no caso geral temos que

$$\mathsf{DTIME}(S(n)) \subseteq \mathsf{NTIME}(S(n)) \subseteq \mathsf{SPACE}(S(n)) \subseteq \mathsf{NSPACE}(S(n)) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(S(n))}). \tag{2.9}$$

O fato que máquinas de Turing podem reutilizar as células de sua fita de trabalho pode ser usado para generalizar a afirmação $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$ para $\mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

Teorema 2.36. $\mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

Demonstração. Nós iremos provar por indução em $k = 1, 2, \ldots$ que $\Sigma_k^p \subseteq \mathsf{PSPACE}$. Nós temos que $\Sigma_1^p = \mathsf{NP}$ que já sabemos estar contida em PSPACE, portanto o caso $k = 1$ já está provado.

Para $k > 1$, seja $L \in \Sigma_k^p$. Então deve existir uma máquina de Turing determinística M que roda em tempo polinomial e é tal que

$$x \in L \iff \exists z_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \forall z_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots Q_k z_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, z_1, z_2, \ldots, z_k) = 1,$$

em que p é um polinômio. Então consideramos a linguagem L' que contém todos os pares (x, z_1), em que $|z_1| = p(|x|)$ e

$$(x, z_1) \in L' \iff \forall z_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)} \ldots Q_k z_k \in \{0,1\}^{p(|x|)} M(x, z_1, z_2, \ldots, z_k) = 1.$$

Logo podemos ver que L' está em Π_{k-1}^p. Pela hipótese indutiva temos que $\Sigma_{k-1}^p \subseteq \mathsf{PSPACE}$, e por PSPACE estar fechada sob complemento também temos que $\Pi_{k-1}^p \subseteq \mathsf{PSPACE}$, e portanto $L' \in \mathsf{PSPACE}$. Então podemos decidir a linguagem L em Σ_k^p deterministicamente da seguinte forma. Para cada escolha de $z_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)}$,

simule a execução de uma máquina de Turing determinística A que decide a linguagem L' em espaço polinomial sobre a entrada (x, z_1) e aceite se e somente se alguma das simulações aceita. Ao todo teremos que simular A $2^{p(|x|)}$ vezes, porém nós podemos reutilizar o espaço usado para a simulação. Portanto, o espaço utilizado é o espaço necessário para simular A (uma única vez) sob uma entrada de tamanho $|x| + p(|x|)$. Como A roda em espaço polinomial, segue que podemos decidir L em espaço polinomial e portanto $L \in \mathsf{PSPACE}$. Como L é uma linguagem arbitrária em Σ_k^p também segue que $\Sigma_k^p \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

Concluimos então que para todo $k \geq 1$ é verdade que $\Sigma_k^p \subseteq \mathsf{PSPACE}$ e portanto $\bigcup_{k\geq 1} \Sigma_k^p = \mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$. □

Nós podemos usar o argumento acima para argumentar que a seguinte linguagem está em PSPACE.

Definição 2.37. *Seja* TQBF *a linguagem que contém todas as fórmulas livres de quantificadores ϕ e uma sequência de quantificadores $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tais que*

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1,$$

Não só temos que TQBF está em PSPACE mas também é verdade que TQBF é PSPACE-completa.

Definição 2.38 (Linguagens PSPACE-completas)**.** *Uma linguagem L é dita ser* PSPACE*-difícil se para toda linguagem $L' \in \mathsf{PSPACE}$, $L' \leq_p L$. Se também for o caso que $L \in \mathsf{PSPACE}$ então dizemos que L é* PSPACE*-completa.*

Então agora mostramos que TQBF é PSPACE-completa. Com um argumento similar ao da prova do teorema 2.36 podemos ver que $\mathsf{TQBF} \in \mathsf{PSPACE}$, então agora basta mostrar que TQBF é PSPACE-difícil. Ou seja, só precisamos mostrar que para toda linguagem $L \in \mathsf{PSPACE}$, L é redutível em tempo polinomial para TQBF.

Teorema 2.39. *A linguagem* TQBF *é* PSPACE*-completa.*

Demonstração. Seja $L \in \mathsf{PSPACE}$. Nós queremos mostrar que $L \leq_p \mathsf{TQBF}$. Seja M uma máquina de Turing que decide L e roda em espaço polinomial. Para algum $x \in \{0,1\}^*$ nós então temos que $x \in L \iff M(x) = 1$. Equivalentemente, deve haver uma sequência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_T$, em que $T \leq 2^{|x|^c}$ para alguma constante $c > 0$, satisfazendo os seguintes critérios:

1. C_1 é a configuração inicial de M ao receber x em sua entrada.
2. C_T é uma configuração descrevendo M em seu estado de aceitação.
3. Para todo $1 \leq i < T$, a configuração C_{i+1} segue de C_i em apenas um passo de M.

Em geral nós iremos dizer que uma configuração C é alcançável a partir de uma outra configuração C' em m passos se existem configurações $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ tais que $C_1 = C$ e $C_{m-1} = C'$ e cada C_{i+1} segue de C_i em único passo de M. Portanto temos o seguinte:

$$x \in L \iff C_T \text{ é alcançável a partir de } C_1 \text{ em menos do que } 2^{|x|^c} \text{ passos.}$$

O nosso objetivo é construir uma fórmula ϕ_x tal que $\phi_x(C, C') = 1$ se e somente se a configuração C' é alcançável a partir de C em menos do que $2^{|x|^c}$ passos, e iremos usar quantificadores para representar esta fórmula sucintamente. Nós iremos construir indutivamente para $i = 0, 1, \ldots, |x|^c$ as fórmulas $\phi_{x,i}$ em que $\phi_{x,i}(C, C') = 1$ se e somente se a configuração C' é alcançável a partir de C em menos do que 2^i passos. Sendo assim teremos que

$$x \in L \iff \phi_{x,|x|^c}(C_1, C_T) = 1. \tag{2.10}$$

Note que podemos em tempo proporcional à complexidade de espaço de M verificar se uma dada configuração C' segue de uma outra configuração C em um único passo de M, e portanto a fórmula $\phi_{x,0}$ pode ser construida em tempo polinomial. Nós podemos reescrever 2.10 da seguinte forma.

$$x \in L \iff \exists C\Big(\phi_{x,|x|^c-1}(C_1, C) = 1 \wedge \phi_{x,|x|^c-1}(C, C_T) = 1\Big). \tag{2.11}$$

Ou seja, dizer que C_T é alcançável a partir de C_1 em menos do que $2^{|x|^c}$ passos é o mesmo que dizer que existe uma configuração C que tá na metade do caminho de tamanho $2^{|x|^c}$ de C_1 para C_T. Para evitar ter que dobrar o tamanho da fórmula a cada passo da recursão nós ainda podemos reescrever 2.11 da seguinte maneira.

$$x \in L \iff \exists C \forall (D_1, D_2)\Big((D_1 = C_1 \wedge D_2 = C) \vee (D_1 = C \wedge D_2 = C_T) \Rightarrow \phi_{x,|x|^c-1}(D_1, D_2) = 1\Big).$$

No fim, após termos passado por todos passos da recursão, iremos adicionar um número polinomial de quantificadores. Juntando o fato que a fórmula $\phi_{x,0}$ pode ser construida em tempo polinomial temos que a redução pode ser feita em tempo polinomial e portanto $L \leq_p \mathsf{TQBF}$.

Como L é uma linguagem em PSPACE arbitrária temos então que TQBF é uma linguagem PSPACE-completa.

□

Nós definimos complexidade de espaço como sendo a quantidade de células da *fita de trabalho* que uma máquina de Turing utiliza durante a sua computação. Portanto, nada nos impede de definir classes de complexidade para funções sublineares. Por exemplo, uma classe de complexidade importante é a classe de todos os problemas com complexidade de espaço logarítmico.

Definição 2.40 (As classes L e NL.)**.** *Uma linguagem L é dita estar em L se existe uma máquina de Turing M com complexidade de espaço $\mathcal{O}(\log n)$ que decide L. Ou seja, $L = \mathsf{SPACE}(\log n)$.*

Uma linguagem L é dita estar em NL se existe uma máquina de Turing N com complexidade de espaço não-determinística $\mathcal{O}(\log n)$ que decide L. Ou seja, $\mathsf{NL} = \mathsf{NSPACE}(\log n)$.

A partir de 2.9 podemos afirmar que $\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{SPACE}(2^{\mathcal{O}(\log n)}) = \mathsf{P}$. Ainda é um problema em aberto se $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NL}$ o que implicaria em $\mathsf{P} = \mathsf{NL}$ [3].

Classes de complexidade de tempo exponencial

Algumas classes de complexidade de tempo exponencial são bem importantes e comumente aparecem na literatura. Nós iremos ver elas agora.

Definição 2.41 (As classes EXP e NEXP)**.** *A classe de complexidade de tempo EXP é definida como $\mathsf{EXP} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(2^{n^c})$. A classe NEXP é a versão não-determinística de EXP: $\mathsf{NEXP} = \bigcup_{c>0} \mathsf{NTIME}(2^{n^c})$*

Assim como P vs NP ainda não se sabe se $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$. No entanto sabe-se que para provar que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ basta provar que $\mathsf{EXP} \neq \mathsf{NEXP}$ como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.42. *Se $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ então $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$.*

[3] Também não se sabe se $\mathsf{L} = \mathsf{NL}$, no entanto o teorema de Savitch [Sav70] afirma que $\mathsf{SPACE}(S(n)) = \mathsf{NSPACE}(S(n)^2)$ para funções $S(n) \geq \log n$, o que implica em, por exemplo, $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{NPSPACE}$.

Demonstração. Para cada linguagem $L \in \mathsf{NEXP}$ considere a seguinte linguagem *padded-L*:

$$\text{padded-}L = \{x0^{2^{|x|}-|x|} | x \in L\}.$$

Nós podemos notar que padded-L está em NP e portanto também está em P já que estamos assumindo que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Portanto, dado uma entrada x podemos construir uma máquina de Turing determinística que transforma a entrada x preenchendo 0s à direita formando a string $x0^{2^{|x|}-|x|}$ e então simula a execução de uma máquina de Turing determinística de tempo polinomial para a linguagem padded-L. Como o tempo para preencher a entrada e simular a execução da máquina de Turing para a linguagem padded-L requer apenas um número exponencial de passos (no tamanho da entrada x) temos então que $L \in \mathsf{EXP}$. Como L é uma linguagem arbitrária em NEXP então devemos ter que $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$.

□

Também é importante conhecermos as seguintes classes que são parecidas com EXP e NEXP.

Definição 2.43 (As classes E e NE)**.** *A classe* E *é* $\mathsf{DTIME}(2^{\mathcal{O}(n)})$*. A versão não-determinística de* E *é a classe* $\mathsf{NE} = \mathsf{NTIME}(2^{\mathcal{O}(n)})$.

Nós temos então as seguintes relações entre as classes de complexidade que vimos até agora.

$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{NEXP}.$$

Teoremas de hierarquia

Como foi dito na introdução, um dos principais desafios da complexidade computacional é demonstrar limitantes inferiores para problemas computacionais. Intuitivamente podemos acreditar que problemas intrinsecamente difíceis devem existir pois se dermos mais recursos para uma máquina de Turing computar deveriamos também sermos capaz de decidir mais linguagens. Os teoremas de hierarquia é uma série de teoremas que provam exatamente isso. Geralmente, iremos usar o fato que máquinas de Turing que usam mais tempo podem simular máquinas de Turing que usam menos tempo para montar uma máquina de Turing "diagonalizadora", e então mostramos que esta máquina deve discordar com todas as máquinas que usam menos tempo em pelo menos um ponto.

Teorema 2.44. *(Teorema da hierarquia de tempo determinístico [HS65])*

Para todas funções $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tempo-construtíveis satisfazendo* $g(n)\log g(n) = o(f(n))$*, temos que* $\mathsf{DTIME}(g(n)) \subsetneq \mathsf{DTIME}(f(n))$.

Demonstração. Seja $L \in \mathsf{DTIME}(g(n))$, note que pelo teorema 2.14 existe uma máquina de Turing que simula a execução de uma máquina de Turing que decide L em tempo $\mathcal{O}(g(n)\log g(n)) = o(f(n))$. Então temos que deve existir uma máquina de Turing $\mathcal{D}$ que funciona da seguinte maneira:

- Sobre a entrada $\langle M \rangle$:
- Simule M sobre a entrada $\langle M \rangle$ por $g(|\langle M \rangle|)$ passos.
- Se em algum momento M aceita, rejeite a entrada; caso contrário, aceite.

Note que $\mathcal{D}$ roda em tempo $\mathcal{O}(g(n)\log g(n))$ e portanto $L(\mathcal{D}) \in \mathsf{DTIME}(f(n))$.

Nós afirmamos que $L(\mathcal{D}) \notin \mathsf{DTIME}(g(n))$. Assuma o contrário, que $L(\mathcal{D}) \in \mathsf{DTIME}(g(n))$ e chame de $\mathcal{D}'$ uma máquina de Turing que decida $L(\mathcal{D})$ em tempo $g(n)$. Então usamos o mesmo argumento que usamos para mostrar que HALT não é decidível para mostrar que $L(\mathcal{D}) \notin \mathsf{DTIME}(g(n))$ (ou equivalentemente, que tal máquina de Turing $\mathcal{D}'$ não pode existir): nós rodamos $\mathcal{D}'$ sobre a sua própria descrição e vemos o que acontece.

- Se $\mathcal{D}'(\langle \mathcal{D}' \rangle) = 1$ então $\mathcal{D}$ pela sua definição deve rejeitar a entrada $\langle \mathcal{D}' \rangle$, o que implica em $\mathcal{D}(\langle \mathcal{D}' \rangle) = 0$
- Se $\mathcal{D}'(\langle \mathcal{D}' \rangle) = 0$ então $\mathcal{D}$ aceita a entrada $\langle \mathcal{D} \rangle$ e portanto $\mathcal{D}(\langle \mathcal{D}' \rangle) = 1$

Nos dois itens acima nós temos que assumir que a descrição de $\mathcal{D}'$ seja grande o suficiente para que D possa simular toda a tua execução sobre a entrada $\langle \mathcal{D}' \rangle$, mas isso não é problema já que D' possui descrições arbitrariamente grandes.

Ambos os casos são contradições e portanto temos que $L(\mathcal{D}) \notin \mathsf{DTIME}(g(n))$ e portanto $\mathsf{DTIME}(g(n)) \subsetneq \mathsf{DTIME}(f(n))$.

□

Agora nós vamos considerar o caso não-determinístico. Se tentarmos provar da mesma forma um teorema de hierarquia de tempo não-determinístico nós esbarrariamos no seguinte problema: não é óbvio o modo como podemos negar uma computação não-determinística, pois deveriamos ter um conhecimento "universal" sobre todas os ramos da computação. A única forma óbvia de fazer isso seria simular todos os ramos da computação, o que leva tempo exponencial. Porém, ainda pode-se usar essa simulação determinística para diagonalizar máquinas de Turing não-determinística, dado que a simulação seja feita numa entrada exponencialmente menor do que a entrada original. O truque é fazer que uma máquina "diagonalizadora" $\mathcal{D}$ ou discorde de uma máquina de Turing não-determinística M em alguma string unária de tamanho em um intervalo de comprimento exponencial ou que ela discorde nos extremos deste intervalo. Na prova do teorema abaixo nós usamos o fato que uma simulação não-deterministica pode ser feita com *slowdown* constante.

Teorema 2.45. *(Teorema da hierarquia de tempo não-determinístico [Coo73, SFM78, Žák83])*

Sejam $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funções tempo-construtíveis satisfazendo $g(n+1) = o(f(n))$, então $\mathsf{NTIME}(g(n)) \subsetneq \mathsf{NTIME}(f(n))$.

Demonstração. Nesta prova, $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ representa uma enumeração de todas as máquinas de Turing não-determinísticas.

Considere a função h definida como $h(1) = 2$ e $h(i+1) = 2^{g(h(i)+1)}$, para $i > 1$. Nós construimos uma máquina de Turing não-determinística $\mathcal{D}$ que inicialmente assumismo concordar com M_i em todas as strings unárias 1^n satisfazendo $h(i) < n \leq h(i+1)$, daí ela diagonaliza na entrada $1^{h(i+1)}$ e a partir disso nós obtemos uma contradição. Como $h(i+1)$ é exponencialmente maior do que $h(i)+1$, $\mathcal{D}$ pode simular todos os ramos da computação de M_i sobre a entrada $1^{h(i)+1}$ deterministicamente. A máquina de Turing $\mathcal{D}$ é definida da seguinte maneira (qualquer entrada que não seja da forma 1^n é imediatamente rejeitada):

1. Sobre a entrada 1^n, ache i tal que $h(i) < n \leq h(i+1)$.
2. Se $h(i) < n < h(i+1)$, $\mathcal{D}$ (ou equivalentemente, se $n \neq h(i+1)$) não-deterministicamente simula M_i sobre a entrada 1^{n+1} por $g(n+1)$ passos e aceita se e somente se M_i aceita.
3. Se $n = h(i+1)$, $\mathcal{D}$ deterministicamente simula M_i sobre a entrada $1^{h(i)+1}$ por $g(h(i)+1)$ passos e aceita se e somente se M_i rejeita.

Primeiro, nós temos que $\mathcal{D}$ roda em tempo não-determinístico $\mathcal{O}(f(n))$, pois estamos assumindo que $g(n+1) = o(f(n))$. Vamos assumir que exista uma máquina de Turing não-determinística $\mathcal{D}'$ que roda em tempo

$\mathcal{O}(g(n))$ e $L(\mathcal{D}') = L(\mathcal{D})$. Seja i suficientemente grande tal que $\mathcal{D}' = M_i$. Se existe algum $h(i) < n \leq h(i+1)$ tal que $\mathcal{D}'(1^n) \neq \mathcal{D}(1^n)$ então estamos feitos. Caso contrário, considere a entrada $1^{h(i+1)}$. Nós temos o seguinte:

- Se $\mathcal{D}'(1^{h(i)+1}) = 1$ então $\mathcal{D}$ deve rejeitar a entrada $1^{h(i+1)}$.
- Se $\mathcal{D}'(1^{h(i)+1}) = 0$ então $\mathcal{D}$ deve aceitar a entrada $1^{h(i+1)}$.

Então se quisermos evitar uma contradição precisamos ter $\mathcal{D}'(1^{h(i)+1}) \neq \mathcal{D}(1^{h(i+1)})$. Mas temos pelo item (2) na descrição de $\mathcal{D}$ e pela nossa suposição que $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ não diferem em nenhuma entrada 1^n quando $h(i) < n \leq h(i+1)$, nós devemos ter que

$$\mathcal{D}'(1^{h(i)+1}) = \mathcal{D}(1^{h(i)+2}) = \mathcal{D}'(1^{h(i)+2}) = \mathcal{D}(1^{h(i)+3}) = \cdots = \mathcal{D}'(1^{h(i+1)-1}) = \mathcal{D}(1^{h(i+1)}).$$

E portanto temos uma contradição.

□

Limites da diagonalização

Podemos nos perguntar se a estratégia de diagonalização usadas nas provas dos teoremas de hierarquia pode também nos dar limitantes inferiores mais interessantes. Por exemplo, podemos nos perguntar se existe uma prova que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ usando somente um argumento de diagonalização.

Vamos primeiro fazer algumas definições que nos remete de volta à definição de máquinas de Turing com oráculo que vimos em 2.3.3. Nós iremos usar máquinas de Turing com acesso à algum oráculo para definir algumas classes de complexidades, o que por vez é de fundamental importância ao tentarmos entender os limites da técnica de diagonalização. As definições abaixo mais o teorema 2.48 servirão de base para o que iremos ver no capítulo 3 em que iremos estender as idéias que estamos prestes a ver.

Definição 2.46. *Seja $\mathcal{O}$ um oráculo para alguma linguagem L arbitrária e $\mathcal{C}$ alguma classe de complexidade de tempo (ou seja, $\mathcal{C} = \mathsf{DTIME}(T(n))$ para alguma função tempo-construtível $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Então a classe $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ contém todas as linguagens que são decididas por uma máquina de Turing que roda em tempo menor do que $T(n)$ e tem acesso ao oráculo $\mathcal{O}$.*

Alternativamente, podemos denotar a mesma classe por $\mathcal{C}^L$.

Também podemos fazer a mesma definição para classes de complexidade de espaço.

Definição 2.47. *Seja $\mathcal{O}$ um oráculo para uma linguagem L arbitrária e $\mathcal{C} = \mathsf{SPACE}(S(n))$, para alguma função espaço-construtível $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A classe $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$ contém todas as linguagens que são decididas por uma máquina de Turing que utiliza menos do que $S(n)$ células de memória para entradas de tamanho n e tem acesso ao oráculo $\mathcal{O}$.*

Neste caso também podemos escrever $\mathcal{C}^L$ ao invés de $\mathcal{C}^{\mathcal{O}}$.

Para $\mathcal{O}$ algum oráculo arbitrário nós podemos definir a linguagem $\mathsf{P}^{\mathcal{O}}$ como sendo

$$\mathsf{P}^{\mathcal{O}} = \bigcup_{c>0} \mathsf{DTIME}(n^c)^{\mathcal{O}}.$$

De forma parecida podemos definir $\mathsf{NP}^{\mathcal{O}}$, $\mathsf{PSPACE}^{\mathcal{O}}$, etc..

No caso da linguagem SAT é usual escrever a classe $\mathsf{P}^{\mathsf{SAT}}$ como P^{NP}. A idéia por trás disso é que podemos simular um oráculo para qualquer linguagem em NP com um oráculo para SAT adicionando um *overhead* que

é apenas polinomial. Basta usar a NP-completude da linguagem SAT para reduzir qualquer consulta a um oráculo para alguma linguagem $L \in \mathsf{NP}$ à uma consulta a um oráculo para SAT. Em outras palavras:

$$\mathsf{P}^{\mathsf{SAT}} = \bigcup_{L \in \mathsf{NP}} P^L.$$

Podemos fazer o mesmo para a classe NP e chamar $\mathsf{NP}^{\mathsf{SAT}}$ de $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ [4]. Na verdade, $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$ é uma definição alternativa da linguagem Σ_2^p [5]. Intuitivamente isso é verdade pois podemos trocar o quantificador universal na definição de linguagens em Σ_2^p por uma chamada ao oráculo para SAT e vice versa. Diferentemente de computações não-determinística nós podemos dizer que oráculos são fechados sob complemento, ou seja, um oráculo para SAT serve também como um oráculo para a linguagem UNSAT, o complemento de SAT. Como podemos mostrar que UNSAT é coNP-completa, segue que $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{NP}^{\mathsf{coNP}} = \Sigma_2^p$.

Voltando à questão da existência de uma prova que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ que usa apenas diagonalização, vamos imaginar então que temos tal prova. Ou seja, nós usamos as mesmas idéias nas provas dos teoremas de hierarquia, definindo uma máquina de Turing $\mathcal{D}$ construída de forma que ela difere de todas as máquina de Turing M "em P" em pelo menos um ponto, simulando a execução de M e depois invertendo a saída de M sobre alguma entrada. Como podemos também enumerar e simular máquinas de Turing com qualquer oráculo $\mathcal{O}$ da mesma forma que podemos enumerar e simular máquinas de Turing convencionais, ao adicionar o oráculo $\mathcal{O}$ à $\mathcal{D}$ nós podemos também separar $\mathcal{D}^{\mathcal{O}}$ de todas as outras máquinas de Turing em $\mathsf{P}^{\mathcal{O}}$ de forma análoga. Portanto, uma prova que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ que usa diagonalização deve também provar que $\mathsf{P}^{\mathcal{O}} \neq \mathsf{NP}^{\mathcal{O}}$. Porém, o próximo teorema nos diz que existem oráculos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que $\mathsf{P}^{\mathcal{A}} = \mathsf{NP}^{\mathcal{A}}$ e $\mathsf{P}^{\mathcal{B}} \neq \mathsf{NP}^{\mathcal{B}}$.

Teorema 2.48 (Baker, Gill, Solovay [BGS75])**.** *Existem oráculos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que:*

1. $\mathsf{P}^{\mathcal{A}} = \mathsf{NP}^{\mathcal{A}}$.
2. $\mathsf{P}^{\mathcal{B}} \neq \mathsf{NP}^{\mathcal{B}}$.

Demonstração. Para provar o item (1) nós fazemos $\mathcal{A}$ ser um oráculo para a linguagem PSPACE-completa TQBF. Daí, por simulações, nós temos que

$$\mathsf{P}^{\mathsf{TQBF}} \subseteq \mathsf{NP}^{\mathsf{TQBF}} \subseteq \mathsf{PSPACE},$$

e por redução,

$$\mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{P}^{\mathsf{TQBF}}$$

O oráculo B nós vamos contruí-lo de forma que nenhuma máquina de Turing que executa menos do que $2^n/10$ passos possa decidir a linguagem $L_{\mathcal{B}}$ definida como

$$L_{\mathcal{B}} = \{1^n | \exists y \in \mathcal{B} \text{ tal que } |y| = n\}$$

$L_{\mathcal{B}} \in \mathsf{NP}^{\mathcal{B}}$ pois um certificado para a pertinência de 1^n em $L_{\mathcal{B}}$ é uma string x de tamanho n que está em $\mathcal{B}$. Nós podemos verificar que de fato $x \in \mathcal{B}$ com apenas uma consulta ao oráculo.

Agora, seja $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de todas máquinas de Turing de tempo polinomial e $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ o tempo de execução de cada uma das $M_i s$.

[4] Porém, ainda está em aberto se $\mathsf{P}^{\mathsf{NP}} = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}$. Enquanto $\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}} = \Sigma_2^p$, P^{NP} é uma classe contida em $\Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$. A classe P^{NP} é normalmente denotada por Δ_2^p.

[5] Enquanto que $\Sigma_3^p = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}}$, $\Sigma_4^p = \mathsf{NP}^{\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}^{\mathsf{NP}}}}$, etc.. Em geral, para todo $k \geq 1$, $\Sigma_k^p = \mathsf{NP}^{\Sigma_{k-1}^p}$.

Para M_1, escolhemos um número n_1 grande o suficiente de forma que $p_1(n_1) < 2^{n_1}$. Seja $q_1, q_2, \ldots, q_l$, com $l \leq p_1(n_1)$, as strings consultadas por M_1 na entrada 1^{n_1} e declaramos que cada $q_i \notin \mathcal{B}$. Então,

- Se $M_1(1^{n_1}) = 1 \Rightarrow$ declare todas as strings de tamanho n_1 como não estando em $\mathcal{B}$.
- Se $M_1(1^{n_1}) = 0 \Rightarrow$ declare pelo menos uma das strings de tamanho n_1 não consultadas por M_1 como estando em $\mathcal{B}$.

Como $p_1(n_1) < 2^{n_1}$ temos que tal string deve existir.

Para $i > 1$ nós fazemos a mesma coisa. Nós definimos n_i como sendo o menor número em $\mathbb{N}$ tal que $p_i(n_i) < 2^{n_i}$ e $n_i > n_{i-1}$. Como podemos assumir que nos passos anteriores nenhuma string de tamanho maior do que n_{i-1} já esteve sua pertinência em $\mathcal{B}$ resolvida, podemos proceder da mesma forma como fizemos no primeiro estágio.

Então, o que acabamos de fazer foi descrever para cada M_i uma string 1^{n_i} tal que $M_i(1^{n_i}) = 1 \iff 1^{n_i} \notin L_{\mathcal{B}}$. Portanto, nenhuma das máquinas de Turing de tempo polinomial M_i é um decisor para $L_{\mathcal{B}}$ e consequentemente $L_{\mathcal{B}} \notin \mathsf{P}^{\mathcal{B}}$.

□

Como consequência do teorema 2.48 qualquer estratégia de prova que continua valendo para qualquer mundo relativizado está destinada a falhar em resolver o problema P vs NP, ou qualquer outra conjectura a respeito de classes de complexidade que já foram provadas serem verdades em alguns mundos mas falsa em outros.

2.6 Complexidade de circuitos

O *tamanho* de um circuito booleano C é o número de portas lógicas que o compõem e a sua profundidade é o maior caminho de uma das variáveis de entrada até a saída de C. Denotamos o tamanho de C por $|C|$.

Definição 2.49. *(Medição de complexidade de circuitos)*

Para funções $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dizemos que uma linguagem L é dita estar em $\mathsf{SIZE}(f(n))$ se existe uma família de circuitos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|C_n| \leq f(n)$, para todos n, e que L é dita estar em $\mathsf{DEPTH}(g(n))$ se a profundidade de C_n é menor ou igual a $g(n)$, para todos n.

Uma observação quanto a representação de circuitos booleanos por strings. Como um circuito é um grafo não direcionado acíclico, nós podemos representá-lo pela sua lista de adjacência. A lista de adjacência de um circuito de tamanho S tem S linhas onde cada linha irá conter:

- O label da porta lógica.
- O índice das portas lógicas que alimentam a entrada desta porta lógica.

Se assumirmos que o fan-in de todas portas lógicas é limitado por uma constante então precisamos de $c \log S$ bits para formar uma das linhas da lista de adjacência de C, para alguma constante c, portanto ao todo precisamos de $\mathcal{O}(S \log S)$ bits para representar um circuito pela sua lista de adjacência.

Algumas vezes nós vamos querer usa máquinas de Turing para simular a computação de um circuito C sobre a entrada x. Considere o seguinte problema:

Definição 2.50 (Problema da avaliação de circuito)**.** *O problema da avaliação de circuito, que nós chamaremos de* CIRCUIT-EVAL*, consiste de todos pares $\langle C, x\rangle$ onde C é um circuito booleano e x uma string binária tal que $C(x) = 1$.*

Podemos verificar que existe uma máquina de Turing que decide CIRCUIT-EVAL em tempo linear usando basicamente o procedimento descrito na definição 2.7 em que avaliamos o valor de cada porta lógica de C seguindo um ordenamento topológico.

Circuitos de tamanho polinomial

Assim como fizemos na seção anterior, nós queremos definir uma classe que procura capturar todas as linguagens que são decididas por circuitos "pequenos". Assim como fizemos com máquinas de Turing, nós usamos complexidade polinomial como sinônimo de eficiência.

Definição 2.51 (P/poly)**.** *Uma linguagem L é dita estar em* P/poly *se e somente se existe $c > 0$ tal que $L \in \mathsf{SIZE}(n^c)$.*

Ou seja, $L \in \mathsf{P/poly}$ se e somente se existe uma família de circuitos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que decide L onde todos os circuitos em $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ têm tamanho polinomial.

Nós sabemos que vários problemas úteis têm circuitos pequenos, como adição e outras operações aritméticas. Na verdade, todos problemas que podem ser resolvidos eficientemente por uma máquina de Turing tem um família de circuito de tamanho polinomial como mostra o teorema a seguir.

Teorema 2.52. $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P/poly}$.

Podemos provar este teorema mostrando que para todas máquinas de Turing que param em menos do que $T(n)$ passos ao receber entradas de tamanho n existe um circuito de tamanho $\mathcal{O}(T(n)\log T(n))$ que computa a função característica de $L \cap \{0,1\}^n$.

Demonstração. Seja L uma linguagem em $\mathsf{DTIME}(T(n))$. Nós sabemos que existe uma máquina de Turing oblivious $A = (\Gamma, Q, \delta)$ de duas fitas que computa L em menos do que $T'(n) = \mathcal{O}(T(n)\log T(n))$ passos. Nós podemos usar A para construir circuitos C_n de tamanho $\mathcal{O}(T'(n))$ que decidem L restrita à strings de tamanho n, para todos $n \geq 1$. Os circuitos C_n que iremos construir tem $T'(n)$ níveis em que cada nível tem um número constante de portas lógicas e portanto $|C_n| = \mathcal{O}(T'(n)) = \mathcal{O}(T(n)\log T(n))$.

Cada nível de C_n é composto por um subcircuito que computa a função de transição de A. Chamaremos este subcircuito de C_δ e nós escreveremos C_δ^i quando queremos especificar o subcircuito que se encontra no i-ésimo nível. O que nós queremos é que o i-ésimo nível de C_n compute a configuração que A entra no $(i+1)$-ésimo passo. As entradas do subcircuito C_δ é dividida em três partes que representam o estado atual e os símbolos sendo lidos pelos dois cabeçotes de A, o que resulta na entrada ter aproximadamente $\log|Q|+3$ bits.[6] As saídas são particionadas em duas partes que representam o estado de A no próximo passo e o símbolo escrito na fita de trabalho. O estado na entrada de C_δ^i é o estado na saída de C_δ^{i-1}, o símbolo na fita de entrada de C_δ^i vem de uma das entradas de C_n e o símbolo na fita de trabalho vem da saída de C_δ^j, onde j é o maior número menor do que i tal que no passo j o cabeçote da fita de trabalho esteve na mesma posição em que ele se encontra no passo i, e caso o "j" não exista então o símbolo lido na fita de trabalho é $\square$, o que pode ser implementado com as constantes '0' e '1' usando um número constante de portas lógicas. A entrada de C_δ^1 é o estado inicial de A. Como C_δ depende somente da função de transição de A temos que $|C_\delta| = \mathcal{O}(1)$.

$\square$

O problema CIRCUIT-SAT

No problema CIRCUIT-SAT é dado um circuito C com n entradas e queremos decidir se existe $x \in \{0,1\}^n$ tal que $C(x) = 1$. Dizendo de outra maneira, queremos decidir se C computa ou não a função constante $C(x) = 0$.

[6] Para representar o símbolo sendo lido na fita de entrada precisamos de somente um bit, para representar o símbolo sendo lido pela fita de trabalho precisamos de um bit adicional porque este símbolo pode ser $\square$.

A seguir nós vemos que CIRCUIT-SAT é NP-completo e portanto ainda não se sabe se existe um algoritmo eficiente para computá-lo.

Teorema 2.53. CIRCUIT-SAT *é* NP*-completo.*

Demonstração. CIRCUIT-SAT está em NP pois uma atribuição às variáveis de entrada de C servem como certificado.

Se $L \in \mathsf{NP}$ então existe uma máquina de Turing oblivious M de tempo polinomial e polinômio p tal que $M(x,u) = 1$ sempre que $x \in L$ e $u \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ é um certificado para x. Daí, pela construção na prova do teorema 2.52 nós podemos construir um circuito C que computa $M_x(u) = M(x,u)$. C é satisfazível se e somente se existe u tal que $M(x,u) = 1$, que é o mesmo que dizer que $x \in L$.

A redução pode ser feita em tempo polinomial pois para construir cada nível do circuito nós precisamos somente da descrição de C_δ e a posição dos cabeçotes nas duas fitas de M_x. Para decidir a posição dos cabeçotes de M_x no passo i em tempo polinomial nós simplesmente simulamos M_x sobre uma entrada de tamanho $p(|x|)$ por i passos.

□

Famílias de circuitos uniforme

Famílias de circuitos como vimos até agora são um modelo de computação que não se encaixa tão bem com máquinas de Turing, e da mesma forma classes de complexidade de circuito que iremos falar ao longo desta seção também não se encaixam muito bem com as outras classes de complexidade que já vimos. Tome por exemplo a linguagem HALT. Não só existe uma família de circuito que decide HALT mas também temos que HALT está em P/poly se modificarmos ela um pouco. É só considerar a redução de HALT para a linguagem unária $\{1^n |$ a n-ésima string binária na ordem lexicográfica pertence a HALT$\}$, que chamamos de UHALT. Todas linguagens unárias $\mathcal{U}$ são decididas por uma família de circuito de tamanho polinomial: para cada n tal que $1^n \notin \mathcal{U}$, C_n é simplesmente o circuito que computa a função constante 0, e se $1^n \in \mathcal{U}$ então C_n computa o mintermo $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$. Portanto UHALT $\in$ P/poly mesmo ela sendo claramente indecidível (isto é, não existe nenhuma máquina de Turing que a decida).

Para contornar este problema podemos exigir que cada circuito de uma família de circuitos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seja computável de alguma forma. Nós então passamos a exigir que exista um algoritmo que ao receber uma entrada unária de tamanho n seja capaz de escrever a descrição do circuito C_n. Naturalmente, podemos também exigir que este algoritmo seja eficiente.

Definição 2.54. *(Família de circuitos* P*-uniforme)*

Uma família de circuitos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita ser P*-uniforme sse existe uma máquina de Turing A de tempo polinomial tal que sobre a entrada 1^n, A dá como saída o circuito C_n.*

E nós podemos provar que a classe de linguagens decididas por famílias de circuitos P-uniforme coincide com P.

Teorema 2.55. *Uma linguagem L é computável por uma família de circuitos* P*-uniforme sse $L \in$* P*.*

Demonstração.

- L é computável por uma família de circuitos P-uniforme $\Rightarrow L \in$ P:

  Seja A a máquina de turing que computa C_n a partir de 1^n em tempo polinomial. Nós podemos construir uma máquina de turing B que sobre uma entrada x, simula A sobre a entrada $1^{|x|}$ para obter $C_{|x|}$. Daí podemos computar $C_{|x|}(x)$ em tempo polinomial.

- $L \in \mathsf{P} \Rightarrow L$ é computável por uma família de circuitos P-uniforme:

  Como $L \in \mathsf{P}$ temos que existe uma máquina de Turing oblivious M que computa L em tempo $p(n) \log p(n) = \mathsf{poly}(p(n))$, para algum polinômio p. Usando a redução na prova do teorema 2.52, que sabemos que roda em tempo polinomial, podemos construir C_n a partir de 1^n.

□

Teorema de Karp-Lipton

Uma das maiores motivações para o estudo de complexidade de circuitos é a perspectiva de podermos separar P e NP usando resultados nesta área. Nós já vimos que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P/poly}$, portanto se provarmos que $\mathsf{NP} \nsubseteq \mathsf{P/poly}$ nós teremos provado que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$. Nós iremos ver agora que podemos parcialmente ir na outra direção e provar que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P/poly}$ implica no colapso da hierarquia polinomial.

Lema 2.56. *Se* $\mathsf{SAT} \in \mathsf{P/poly}$ *então existe um polinômio* p *tal que para todo* $n > 0$ *existe uma máquina de Turing* M_n *que ao receber a descrição de uma fórmula* ϕ *satisfazível de tamanho* n*,* M_n *retorna um* y *tal que* $\phi(y) = 1$ *em menos do que* $p(n)$ *passos.*

Demonstração.

Seja $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma família de circuitos de tamanho polinomial que decida SAT.

A máquina M_n tem a capacidade de escrever em uma das suas fitas de trabalho a descrição de C_k, $1 \leq k \leq n$. Ao receber $\langle \phi \rangle$ em sua fita de entrada, M_n primeiro verifica se $|\langle \phi \rangle| = n$, e se não for o caso que $|\langle \phi \rangle| = n$, M_n imediatemente rejeita a entrada.

Se $|\langle \phi \rangle| = n$ então primeiro verificamos se ϕ é satisfazível usando o circuito C_n, rejeitando a entrada $\langle \phi \rangle$ caso não seja. Daí, nós podemos achar uma atribuição $y \in \{0,1\}^m$ tal que $\phi(y) = 1$, m é o número de entradas de ϕ, decidindo sequencialmente o valor de cada variável de ϕ na atribuição y.

Primeiro faça $x_1 = 1$ e verifique se ϕ é satisfazível quando trocamos cada aparição de x_1 em ϕ pela constante 1. Se sim, então fixe $x_1 = 1$ e se não fixe $x_1 = 0$. Uma das duas restrições ($x_1 = 1$ ou $x_1 = 0$) deve manter ϕ satisfazível. Restringir o valor de algumas variáveis de ϕ resulta em uma fórmula menor, e por M_n poder escrever em sua fita de trabalho o circuito C_k, para todo $k \leq n$, podemos usar um destes circuitos para decidir a satisfazibilidade da fórmula restrita. Nós podemos continuar usando o mesmo procedimento que usamos para decidir o valor de x_1 para todas as outras variáveis, sempre diminuindo o tamanho do circuito. No fim nós teremos obtido a atribuição y.

Para ver que M_n roda em tempo menor do que $p(n)$, para algum polinômio p, nós simplesmente notamos que a operação mais custosa na computação de M_n é escrever a descrição de C_k, $1 \leq k \leq n$, leva tempo polinomial pois C_k tem tamanho polinomial.

□

Teorema 2.57 (Teorema de Karp-Lipton [KL82])**.** $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P/poly} \Longrightarrow \mathsf{PH} = \Sigma_2^p$.

Demonstração.

Assuma que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P/poly}$.

Pelo teorema 2.29 sabemos que para mostrar que $\mathsf{PH} = \Sigma_2^p$, é suficiente mostrar que $\Pi_2^p \subseteq \Sigma_2^p$. E para isso nós mostramos que a linguagem Π_2^p-completa $\Pi_2^p\mathsf{SAT}$ está em Σ_2^p.

Lembrando que a linguagem $\Pi_2^p\mathsf{SAT}$ contém todas fórmulas ϕ tal que

$$\forall x \in \{0,1\}^n \ \exists y \in \{0,1\}^n \phi(x,y) \tag{2.12}$$

é verdadeira. Ou seja, para cada $x \in \{0,1\}^n$, fixar o primeiro parâmetro de ϕ mantém a fórmula ϕ satisfazível. Denotamos $\phi(x,.)$ por $\phi_x(.)$ e dizer que $\phi \in \Pi_2^p\mathsf{SAT}$ é equivalente a dizer que para todos $x \in \{0,1\}^n$, ϕ_x é satisfazível. Isso é o mesmo que dizer que para um circuito C que computa atribuições que satisfazem fórmulas satisfazíveis:

$$\forall x \phi_x(C(\langle\phi\rangle, x)) = 1$$

Já que $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{P/poly}$ implica em SAT ter circuitos de tamanho polinomial, pelo lema 2.56 temos que tal circuito C deve ter tamanho polinomial, então o seguinte é verdadeiro se assumirmos que ϕ_x é satisfazível para todo x (ou seja, $\phi \in \Pi_2^p\mathsf{SAT}$):

$$\exists C' \in \{0,1\}^{p(n)} \forall x \in \{0,1\}^n \phi_x(C'(\langle\phi\rangle, x)) = 1 \tag{2.13}$$

Onde p é um polinômio.

Se 2.12 é verdadeiro então o circuito C irá, para todas strings $x \in \{0,1\}^n$, apresentar em tua saída um $y \in \{0,1\}^n$ tal que $\phi_x(x,y) = 1$ e portanto 2.13 também é verdadeiro.

E por outro lado, se 2.13 é verdadeiro então para todo $x \in \{0,1\}^n$, ϕ_x é satisfazível e portanto 2.12 também é verdadeiro.

Ou seja, 2.13 é uma formulação equivalente do problema $\Pi_2^p\mathsf{SAT}$ que pode ser visto como uma linguagem em Σ_2^p.

□

Limitantes inferiores e superiores para tamanho de circuitos

Nós já vimos que usando a base $\Omega = \{\vee, \wedge, \neg\}$ nós podemos implementar qualquer função booleana de n entradas usando circuitos de tamanho $\mathcal{O}(n2^n)$ através de mintermos. E também acabamos de ver que acredita-se que algumas linguagens em NP exigem circuitos de tamanho superpolinomial.

Agora nós vamos ver que nem todas funções podem ser computadas por circuitos de tamanho polinomial. E também veremos um limite superior melhor do que $\mathcal{O}(n2^n)$. Na verdade, vamos ver que ambos o limites difereciam entre si por um fator constante.

O limitante inferior foi descoberto por Shannon em dos primeiros resultados em complexidade de circuitos. Em 1949, Shannon estava interessado no problema de minimização de circuitos quando ele publicou o resultado que nos vamos ver em seguida em [S$^+$49]. A prova que eu apresento aqui pode ser encontrada em [AB09].

Teorema 2.58. *Para todo $n > 1$, existem uma constante d e funções booleanas $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ tal que f não é computada por circuitos de tamanho menor do que $\frac{2^n}{dn}$.*

Demonstração. Nós vimos que todos circuitos de tamanho S podem ser representados através de sua lista de adjacência usando no máximo $cS \log S$ bits, para alguma constante $c > 1$. Então, o número de circuitos de tamanho no máximo S é menor ou igual ao número de strings de tamanho $cS \log S$ que é igual a $2^{cS \log S}$. Por outro lado, o número de funções booleanas de n entradas é 2^{2^n}. Fazendo $S = \frac{2^n}{dn}$, para alguma constante $d > c$, nós temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 2^{cS \log S} &= 2^{c\frac{2^n}{dn} \log(\frac{2^n}{dn})} \\ &= 2^{\frac{c2^n}{dn}(n - \log dn)} \\ &< 2^{\frac{2^n cn}{dn}} \\ &< 2^{2^n} \end{aligned}$$

O número de funções booleanas de n entradas que têm circuitos de tamanho $\frac{2^n}{dn}$ é menor do que do que o número total de funções booleanas de n entradas. Portanto deve existir funções booleanas com n entradas que exigem circuitos com no mínimo $\frac{2^n}{dn}$ portas lógicas.

□

Nós também podemos notar que $\frac{2^{\frac{c}{d}2^n}}{2^{2^n}} = 2^{2^n(\frac{c}{d}-1)} = 2^{-\Theta(2^n)}$, o que significa que a fração de funções booleanas que têm circuitos de tamanho menor do que $\frac{2^n}{dn}$ é bem pequena.

Indo na mesma direção nós podemos nos perguntar se é possível obter um limitante inferior para o tamanho de circuitos que aproximem uma função f. Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ uma função Booleana qualquer, nós dizemos que $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ aproxima f com vantagem $\varepsilon > 0$ se

$$\left| \Pr[f(x) = g(x)] - 1/2 \right| > \varepsilon.$$

O valor ε quantifica o quanto g consegue predizer o valor de $f(x)$ em relação a um bit aleatório tirado de $\{0_{1/2}, 1_{1/2}\}$. Se tratarmos g como uma função aleatória, ou seja para cada $x \in \{0,1\}^n$ nós fazemos $g(x) = 1$ com probabilidade $1/2$ e $g(x) = 0$ com probabilidade $1/2$, e denotarmos por $Z_{f,x}$ a variável aleatória indicadora que é 1 se e somente se $f(x) = g(x)$, então usando a desigualdade de Hoeffding:

$$\Pr\left[2^{-n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} \Big(Z_{f,x} - E[Z_{f,x}] \Big) \geq \varepsilon \right] \leq e^{-2\varepsilon^2 2^n}. \tag{2.14}$$

O valor $Z_{f,x} - E[Z_{f,x}]$ é $1/2$ sempre que $f(x) = g(x)$, e $-1/2$ caso contrário. Então, na soma acima alguns termos serão cancelados mas, assumindo que a soma é positiva, terá algum excesso que será igual a vantagem que g tem em aproximar f. Portanto, 2.14 nos diz que com probabilidade muito alta uma função aleatória g vai falhar em aproximar f com vantagem maior do que ε. Usando a desigualdade acima podemos provar o segunte teorema.

Teorema 2.59. *([Oli13])*

Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante d e função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ tal que para todas funções $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ que admitem circuitos de tamanho no máximo $S = \frac{2^n}{dn}$ é verdade que

$$\Pr[f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})] \geq 1/2 + \varepsilon.$$

Demonstração. Seja c a constante tal que todo circuito de tamanho no máximo S pode ser representado por uma string de comprimento $cS \log S$ e para $\varepsilon > 0$ seja $d = d(\varepsilon) > \frac{c}{2log(e)\varepsilon^2}$.

Para todas funções $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ que admitem circuitos de tamanho menor do que $S = \frac{2^n}{dn}$ e para toda função Booleana $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, seja $Z_{f,g}$ a variável aleatória indicadora que é 1 se e somente se $\Pr[f(x) \neq g(x)] \geq 1/2 + \varepsilon$, ou seja se e somente se g falha em aproximar f com vantagem maior do que ε. Nós podemos notar que a desigualdade 2.14 implica em $E_{\boldsymbol{g}}[Z_{f,\boldsymbol{g}}] \geq 1 - e^{-2\varepsilon^2 2^n}$, quando fixamos uma função f arbitrária. Logo, pelo princípio da inclusão-exclusão a probabilidade que existe uma função f que satisfaz $Z_{f,g} = 1$ para todas funções g com circuitos de tamanho no máximo S é limitada por baixo por

$$\begin{aligned}
1 - 2^{cS\log S} e^{-2\varepsilon^2 2^n} &= 1 - 2^{cS\log S - 2\log(e)\varepsilon^2 2^n} \\
&= 1 - 2^{c\frac{2^n}{dn}(n - \log(dn)) - 2\log(e)\varepsilon^2 2^n} \\
&> 1 - 2^{2\log(e)\varepsilon^2 2^n - 2\log(e)\varepsilon^2 2^n} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo método probabilístico [7], deve haver um f que falha em ser aproximada com vantagem ε por todos circuitos de tamanho no máximo S.

□

Os dois limitantes inferiores em 2.58 e 2.59 são bem precisos na verdade. Em [Lup58] Lupanov apresenta uma representação de funções booleanas que nos leva a um limitante superior de $(1 + o(1))\frac{2^n}{n}$.

Definição 2.60 (Representação de Lupanov)**.** *Uma (k, s)-representação de Lupanov de uma fórmula booleana é descrita a seguir.*

- *Particione as n variáveis de f em duas partes: $x_1, \ldots, x_k$ e $x_{k+1}, \ldots, x_n$*
- *Construa uma matrix $2^k \times 2^{n-k}$ onde as linhas da matriz são indexadas pelas atribuições às k primeiras variáveis de f e as colunas são indexadas pelas atribuições às $n - k$ últimas variáveis. A entrada (x, y), $x \in \{0,1\}^k$ e $y \in \{0,1\}^{n-k}$, desta matriz é $f(x, y)$.*
- *Seja $p = \frac{2^k}{s}$, temos p conjuntos A_i, $1 \leq i \leq p$, onde A_i contém as s linhas $(i-1)s$ até $is-1$ da matriz que nós construimos. A_p pode ter menos do que s linhas caso s não seja um divisor de 2^k.*

Daí nós definimos para cada $1 \leq i \leq p$ e $w \in \{0,1\}^s$ as seguintes funções:

$$g_{iw}(x_1, \ldots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1, \ldots, x_k \text{ indexa a } j\text{-ésima linha de } A_i \text{ e } w_j = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O "j" pode ser qualquer inteiro menor do que $|A_i|$.

$$h_{iw}(x_1, \ldots, x_{n-k}) = \begin{cases} 1 & \text{se a coluna de } A_i \text{ indexada por } x_1, \ldots, x_{n-k} \text{ for } w, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizer que a coluna indexada por uma string $x_1 \ldots x_{n-k}$ é igual a w significa que a string formada tomando cada entrada da coluna começando pelo topo é a mesma string que w. Então podemos escrever $f(x_1, \ldots, x_n)$ como

$$\bigvee_{i=1}^{p} \bigvee_{w \in \{0,1\}^s} (g_{iw}(x_1, \ldots, x_k) \wedge h_{iw}(x_{k+1}, \ldots, x_n)). \tag{2.15}$$

Vamos nos convencer que f realmente pode ser escrita como 2.15. Particione $x \in \{0,1\}^n$ de forma que $x^1 = x_1 \ldots x_k$ e $x^2 = x_{k+1} \ldots x_n$, e suponha que x^1 indexe a j-ésima linha de A_i. Suponha que $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, o que implica na entrada (x^1, x^2) da matriz ser 1. Seja w a string que representa a coluna indexada por x^2 em A_i. Temos que $g_{iw}(x^1) = 1$ pois a entrada (x^1, x^2) da matriz é igual a $w_j = 1$, e também $h_{iw}(x^2) = 1$ pela forma como escolhemos w, e portanto 2.15 é verdadeira também.

Indo na outra direção, se 2.15 é verdadeira então existe um w tal que $g_{iw}(x^1) = 1$ e $h_{iw}(x^2) = 1$, o que significa que uma string que representa a coluna indexada por x^2 tem um 1 na j-ésima linha de A_i, a linha indexada por x^1, e portanto a entrada (x^1, x^2) da matriz é 1 e consequentemente $f(x) = 1$.

[7] Uma descrição do método probabilístico segue da seguinte forma: um jeito de se provar que existe pelo menos um objeto combinatório satisfazendo alguma propriedade basta provar que a probabilidade de um objeto dado satisfazer a propriedade é maior do que zero.

Então nós conseguimos reduzir a tarefa de computar a função f para a tarefa de computar funções g_{iw} e h_{iw} que supostamente deveriam ser mais simples pois recebem menos variáveis de entrada. No caso de g_{iw} que são funções $\{0,1\}^k \to \{0,1\}$, o circuito que é a disjunção de mintermos de g_{iw} tem tamanho no máximo $k2^k$. As funções h_{iw} recebem strings em $\{0,1\}^{n-k}$ e portanto podem ser computadas por circuitos de tamanho $(n-k)2^{n-k}$. Nós podemos escolher $k = c\log n$ para alguma constante $c > 2$ e então teremos que cada g_{iw} é computada por um circuito de tamanho $\widetilde{\mathcal{O}}(n^c)$ ao passo que cada função h_{iw} tem um circuito de tamanho $(n - c\log n)\frac{2^n}{n^c}$. Então, para computar cada $g_{iw} \wedge h_{iw}$ nós precisamos de apenas $\widetilde{\mathcal{O}}(n^c) + (n - c\log n)\frac{2^n}{n^c}$ portas lógicas. Pela definição da representação de Lupanov de f temos que deve haver $p2^s = \frac{2^k}{s}2^s$ escolhas de i e w. Como estamos fazendo $k = c\log n$ temos então que $p2^s = \frac{2^s n^c}{s}$. Desta forma temos ao todo que podemos computar f por sua representação de Lupanov por um circuito de tamanho no máximo

$$\frac{2^s n^c}{s}(\widetilde{\mathcal{O}}(n^c) + (n - c\log n)\frac{2^n}{n^c}) + \frac{2^s n^c}{s}, \tag{2.16}$$

em que o último termo aparece pois precisamos das portas $\vee$ para computar a disjunção de todos $g_{iw} \wedge h_{iw}$. Note que o termo dominate em 2.16 será $\frac{2^s}{s}(n - c\log n)2^n > \frac{2^s}{s}2^n$, portanto para garantir que não tenhamos um limitante superior maior do que o desejado devemos fazer $\frac{2^s}{s} < \frac{1+o(1)}{n}$ o que certamente é impossível para qualquer escolha razoável de s.

Nós podemos nos esquivar deste problema reutilizando os mintermos usados para computar as funções g_{iw} e h_{iw}. O próximo lema nos diz que precisamos de apenas $\mathcal{O}(2^n)$ portas lógicas para ter em disposição todos os mintermos de tamanho n, o que por si só já nos dá um limitante superior de $\mathcal{O}(2^n)$ para o tamanho do circuito necessário para computar qualquer função Booleana de n entradas.

Relembrando, quando escrevemos x^b para alguma variável que recebe valores Booleanos e $b \in \{0,1\}$ nós estamos utilizando a transformação que mantém x intacta se $b = 1$ e leva x para $\overline{x}$ se $b = 0$.

Lema 2.61. *Para $n \geq 1$, podemos computar todos os mintermos $x_1^{b_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{b_n}$ usando $\mathcal{O}(2^n)$ portas lógicas.*

Demonstração.

Provamos por indução que podemos computar todos mintermos de n variáveis usando $2^{n+1} + n - 4$ portas lógicas.

Para computar os mintermos x_1 e $\overline{x_1}$, precisamos usar apenas 1 porta $\neg$ somando ao todo $1 = 2^{1+1} + 1 - 4$ portas lógicas.

Assumimos agora que para todo $1 \leq k < n$ é verdade que podemos computar todos mintermos $x_1^{b_1} \wedge \cdots \wedge x_k^{b_k}$ usando $2^{k+1} + k - 4$ portas lógicas. Então em particular, podemos calcular todos mintermos de $n-1$ variáveis usando $2^n + (n-1) - 4$ portas lógicas. Para computar os mintermos de n variáveis nós podemos usar os circuitos que computam os mintermos de $n-1$ variáveis e ligamos x_n e $\overline{x_n}$ a cada uma das 2^{n-1} saídas dos mintermos de $n-1$ variáveis adicionando 2^n portas $\wedge$ e uma porta $\neg$. Portanto ao todo nós usamos $(2^n + (n-1) - 4) + 2^n + 1 = 2^{n+1} + n - 4$ portas lógicas.

□

O próximo lema é de certa forma uma extensão do lema anterior.

Lema 2.62. *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_m : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e $l = \sum_{i=1}^m \big|\{x | f_i(x) = 1\}\big|$. Então podemos computar as saídas dessas m funções usando no máximo $\mathcal{O}(2^n) + l$ portas lógicas.*

Demonstração. Pelo lema 2.61 sabemos que podemos computar as saídas de todos mintermos de n variáveis usando $\mathcal{O}(2^n)$ portas lógicas. Então só o que precisamos fazer é computar cada f_i através da disjunção de mintermos. Desta forma só precisamos adicionar no máximo l portas $\vee$.

□

Agora mostramos como usamos a (k, s)-representação de Lupanov para alcançar um limitante superior próximo do limitante inferior de Shannon. A prova usada aqui pode ser encontrada em [FM05] e [Sav98]

Teorema 2.63. *Para todas as funções booleanas f, $f \in$ SIZE$\big((1+o(1))\frac{2^n}{n}\big)$.*

Demonstração. Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, nós fazemos $k = 3\log n$ e $s = n - 4\log n$ e iremos mostrar que podemos usar a (k, s)-representação de Lupanov de f para construir um circuito de tamanho $(1+o(1))\frac{2^n}{n}$ para f.

Pelo lema 2.61 sabemos que podemos computar a saída de todos os mintermos de k variáveis usando não mais do que $\mathcal{O}(2^k)$ portas lógicas. Substituindo $k = 3\log n$ isto é $\mathcal{O}(n^3)$. Da mesma forma, usando não mais do que $\mathcal{O}(\frac{2^n}{n^3})$ portas lógicas computar a saída de todos os mintermos de $n-k$ variáveis.

Agora nós queremos usar o lema 2.62 para argumentar que podemos também computar a saída de todos os g_{iw} e h_{iw} usando um número não muito grande de portas lógicas. Para isso devemos raciocinar a respeito do número de entradas que fazem g_{iw} e h_{iw} avaliarem para um.

- As funções g_{iw} para $i \in [p]$ e $w \in \{0,1\}^s$:

  Para cada i e w, temos que $g_{iw}(x^1) = 1$, $x^1 \in \{0,1\}^k$, se e somente se x^1 indexa uma das no máximo p linhas de A_i e além disso $w_j = 1$. Portanto, fixando $i \in [p]$, teremos em média sobre todas as escolhas de $w \in \{0,1\}^s$ $s/2$ entradas x^1 que fazem $g_{iw}(x^1) = 1$, devido ao fato que exatamente metade das strings w têm $w_j = 1$, para qualquer $j \in [s]$. Então temos que

$$\sum_{i,w} \big|\{x^1 | g_{iw}(x^1) = 1\}\big| = p\frac{s}{2}2^s. \tag{2.17}$$

- As funções h_{iw}:

  Agora, para cada i e w, $h_{iw}(x^2) = 1$, $x^2 \in \{0,1\}^{n-k}$, se e somente se a coluna de A_i indexada por x^2 guarda a string w, quando vemos w como a string formada lendo cada entrada da coluna começando pelo topo. De novo, fixando i podemos ver que existe exatamente 2^{n-k} escolhas de w e x^2 que vão fazer $h_{iw}(x^2) = 1$, porque cada coluna guarda exatamente uma string em $\{0,1\}^{n-k}$ e ao todo A_i tem 2^{n-k} colunas. Portanto,

$$\sum_{i,w} \big|\{x^2 | h_{iw}(x^2) = 1)\}\big| = p2^{n-k}. \tag{2.18}$$

Lembrando que $p = \frac{2^k}{s} = \frac{n^3}{n-4\log n}$, fazendos as substituições e usando o lema 2.62, temos que o número de portas lógicas necessárias para computar a representação de Lupanov de f é no máximo

$$\mathcal{O}(n^3) + \frac{2^n}{2n} + \mathcal{O}(\frac{2^n}{n^3}) + \frac{2^n}{n-4\log n} + \frac{2^{n+1}}{n^2 - 4n\log n}. \tag{2.19}$$

Os dois primeiros termos surgem a partir de uma aplicação do lema 2.62 e a equação 2.17, enquanto que os terceiros e quartos termos são uma aplicação do lema 2.62 e 2.18. O último termo vem das portas $\vee$ e $\wedge$ que aparecem na fórmula 2.15.

Isolando $\frac{2^n}{n}$ e ignorando alguns termos de menor ordem temos que 2.19 é $(1+o(1))\frac{2^n}{n}$.

□

Circuitos de profundidade logarítmica e P vs NC

Nesta subseção nós vamos conhecer duas classes de circuitos que contêm apenas circuitos de profundidade logarítmica. Nós também rapidamente fazemos alguns comentários a respeito de como essas classes de complexidade de circuitos se relacionam com computação paralela.

Nós dizemos que um problema é eficientemente paralelizável se ele pode ser computado em tempo polilogarítmico usando um número polinomial de processadores. Nós vimos na seção 2.5 que um problema é eficientemente computável se existe uma máquina de Turing que é capaz de decidir tal problema em tempo polinomial. Agora, o que se espera é que aumentar o número de "máquinas de Turing" nos permite decidir um dado problema mais rapidamente. O quão mais rapidamente? Saber se todos os problemas em P podem ser *altamente paralelizáveis* ainda é um problema em aberto pelo menos quase tão interessante quanto a questão P vs NP. A seguir nós vemos a classe NC proposta por Pippenger - o primeiro nome dele é Nick, daí que veio o nome NC: *Nick's class* - que é equivalente à classe de problemas eficientemente paralelizáveis.

Definição 2.64. *(A classe* NC*)*

Uma linguage L é dita estar em NC^i se L é decidida por uma família de circuitos logspace-uniforme $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tamanho polinomial tal que $DEPTH(C_n) = \mathcal{O}(\log^i n)$, para todo n.

A classe NC é $\bigcup_{i\geq 1} \mathsf{NC}^i$.

Um exemplo de linguagem em NC é multiplicação de matrizes, que contém todas triplas $\langle M_1, M_2, M_1M_2\rangle$, e o problema de decidir a determinante de uma matrix que contém $\langle M, \det(M)\rangle$, em que $\det(M)$ é o determinante da matriz M. Ou seja, os problemas de multiplicar matrizes e computar a determinante de uma dada matriz são problemas eficientementes paralelizáveis.

A classe AC é definida como uma modificação de NC que permite fan-in arbitrário para suas portas lógicas.

Definição 2.65. *(A classe* AC*)*

Uma linguagem L é dita estar em AC^i se L é decidida por uma família de circuitos logspace-uniforme $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tamanho polinomial tal que $DEPTH(C_n) = \mathcal{O}(\log^i n)$, para todo n, e além disso o fan-in das portas lógicas são arbitrários.

A classe AC é $\bigcup_{i\geq 1} \mathsf{AC}^i$

Note que apesar do fan-in ser arbitrário, não faz sentido ter fan-in maior do que o tamanho do circuito e portanto podemos assumir que o fan-in máximo permitido pela classe AC é polinomial. Uma consequência disto é que podemos substituir uma porta lógica com fan-in $k \leq n^c$ por uma árvore de portas lógicas do mesmo tipo em que esta árvore tem profundidade $\log k \leq c \log n$. O número adicional de portas lógicas é menor do que $2^{\log k} \leq 2^{c \log n} = n^c$ e cada porta tem fan-in 2. O que isso significa é que podemos pegar um circuito C_n para uma linguagem em AC^i e transformá-lo de forma que todas portas lógicas no circuito resultante tenha fan-in 2. A profundidade do circuito cresce por um fator logarítmico enquanto que o tamanho do circuito cresce por um fator linear. A partir desta observação podemos afirma o seguinte a respeito das classes NC e AC.

$$\mathsf{NC}^0 \subseteq \mathsf{AC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1 \subseteq \mathsf{AC}^1 \subseteq \mathsf{NC}^2 \subseteq \ldots,$$

o que nos dá $\mathsf{AC} = \mathsf{NC}$.

Mais pra frente a classe AC^0 será importante para nós pois vamos querer provar que certas linguagens não estão em AC^0 [8]. Nós vamos aproveitar esta seção para definirmos o que é uma família de circuitos AC^0 e também alguns termos que iremos usar extensivamente ao longo deste trabalho.

[8] Note que apesar de AC^0 ser uma classe que por sua definição parece ser bem fraca ela ainda está na fronteira de onde limitantes inferiores para problemas naturais foram obtidos. Por exemplo, ainda está em aberto se $\mathsf{NEXP} \subseteq AC^1$, muito menos é conhecido se SAT ou qualquer outra linguagem NP-completa não estão em AC^1

Definição 2.66 (Família de circuitos AC^0)**.** *Uma família de circuitos* AC^0 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de profundidade d terá todos os circuitos* C_n *organizados da seguinte forma. Existe uma partição das porta lógicas de* C_n *em subconjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_d$ *satisfazendo os seguintes pontos:*

- *As portas lógicas em* A_1 *são alimentadas somente pelas variáveis de entrada. Além disso, nenhuma porta lógica que não está em* A_1 *é alimentada diretamente por uma das variáveis de entrada.*
- *Todas portas lógicas na mesma partição são do mesmo tipo.*
- *Se as portas lógicas na partição* A_i *são portas* $\wedge$ *então as portas lógicas na partição* A_{i+1} *são portas* $\vee$*, e vice versa.*
- *Portas lógicas em* A_i *alimentam as portas lógicas em* A_{i+1} *e somente portas lógicas em* A_{i+1} *são alimentadas por portas lógicas em* A_i*.*

A partição A_d *contém somente uma porta lógica que no caso seria a porta de saída do circuito* C*. Todas as portas* $\neg$ *foram empurradas para as variáveis de entrada usando a lei de De Morgan.*

Normalmente iremos dizer somente circuitos AC^0 ao invés de família de circuitos AC^0. Por assim dizer, circuitos AC^0 estão separados por camadas que alternam portas $\wedge$ e portas $\vee$ - o 'A' no nome da classe AC vem de *alternating* ou *alternations* - em que cada uma dessas camadas alimenta a próxima. Nós iremos sempre chamar as camadas dos circuitos AC^0 de *nível* de forma que a camada adjacente às variáveis de entrada é o primeiro nível ou o nível mais baixo, enquanto que o último nível ou o nível mais alto contém somente a porta de saída. Enquanto a classe AC^0 contém apenas família de circuitos de tamanho polinomial, circuitos AC^0 engloba todos os circuitos satisfazendo as condições acima sem nenhum limite em relação ao tamanho.

Nós também iremos considerar circuitos AC^0 sobre uma base que contém funções mod_n, em que mod_n é uma função que mapeia pra 0 todas as entradas com peso de Hamming igual a um múltiplo de n e mapeia para 1 todas as outras entradas. Um circuito AC^0 sobre a base $\{\wedge, \vee, \neg, \mathrm{mod}_{n_1}, \mathrm{mod}_{n_2}, \ldots, \mathrm{mod}_{n_m}\}$, em que $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m$, será chamado de um circuito $\mathsf{ACC}^0[n_1, n_2, \ldots, n_m]$, e circuitos deste tipo serão denominados circuitos ACC^0. Nós não fazemos nenhuma exigência quanto a um circuito ACC^0 ser alternante. Nós podemos definir a seguinte classe de circuitos ACC^0.

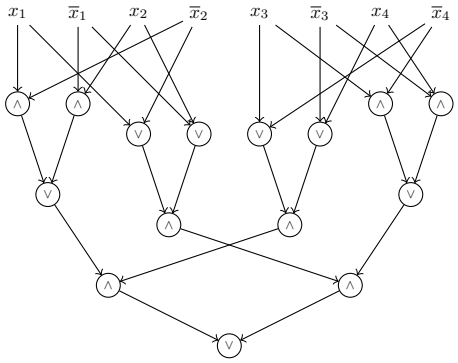
Definição 2.67. *(A classe* ACC^0*)*

Uma linguagem L *é dita estar em* $\mathsf{ACC}^0[n_1, n_2, \ldots, n_m]$*, em que* $1 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m$*, se existe uma família de circuitos* $\mathsf{ACC}^0[n_1, n_2, \ldots, n_m]$ *de tamanho polinomial que decide* L*.*

A classe ACC^0 *é* $\bigcup_{m\geq 1} \bigcup_{1<n_1<n_2<\cdots<n_m} \mathsf{ACC}^0[n_1, n_2, \ldots, n_m]$.

Nós temos que $\mathsf{ACC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1$ pois podemos substituir cada porta mod_n com k variáveis de entrada por um subcircuito de tamanho polinomial e profundidade $\mathcal{O}(\log k)$. Por exemplo, o circuito abaixo computa mod_2 com 4 variáveis de entrada [9] e tem tamanho 15 e profundidade 4.

[9] Também chamada de Parity_4.



Em geral, podemos computar mod_2 com k entradas com um subcircuito de tamanho k^2 e profundidade $\log k$.

Uma outra forma de modificar circuitos AC^0 é adicionando portas *thresholds* que iremos denotar por θ_t, para algum $t \in \mathbb{N}$. Estas portas satisfazem

$$\theta_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 x_2 \ldots x_2 \text{ tem peso de Hamming } > t. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E podemos definir a classe TC^0.

Definição 2.68. *(A classe TC^0)*

Uma linguagem L é dita estar em TC^0 se existe um circuito TC^0 de tamanho polinomial que decide L.

E nós temos a seguinte relação entre algumas das classes de profundidade limitada que vimos aqui:

$$\mathsf{AC}^0 \subseteq \mathsf{ACC}^0 \subseteq \mathsf{TC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1.$$

Capítulo 3

Computação relativizada e complexidade de circuitos

Neste capítulo nós vemos como circuitos e complexidade "relativizada" se relacionam.

3.1 Uma prova alternativa do teorema 2.48

Nós já vimos no teorema 2.48 que existem oráculos A e B satisfazendo $\mathsf{P}^A = \mathsf{NP}^A$ e $\mathsf{P}^B \neq \mathsf{NP}^B$. Neste capítulo nós vemos uma outra prova do segundo resultado que mostra a idéia geral de como conectamos limites inferiores a resultados em complexidade relativizada. Basicamente, nós usamos a incapacidade de certos dispositivos computacionais (por exemplo, circuitos de baixa profundidade) de computar certas funções mais o fato que certas classes de complexidade podem ser expressas por estes mesmos dispositivos computacionais para, ironicamente, diagonalizar e provar separação por oráculo. Note que essa é a mesma idéia que usamos anteriormente para provar o teorema 2.48. Naquela prova nós consideramos a linguagem

$$L(A) = \{1^n | \exists y \in A \text{ tal que } |y| = n\}.$$

Se escrevermos $A(x) = 1$ para expressar que $x \in A$ então podemos definir $L(A)$ como sendo a linguagem em que $1^n \in L(A) \iff \bigvee_{x \in \{0,1\}^n} (A(x) = 1)$. O que nós fazemos então é usar o fato que uma máquina de Turing M que roda em tempo polinomial não pode fazer um número exponencial de consultas ao oráculo e portanto é incapaz de garantidamente decidir o resultado do $\vee$ de 2^n variáveis. Isso significa que existe bastante espaço para definirmos A de forma que a saída de M sobre a entrada 1^n não é consistente com a linguagem $L(A)$. Por outro lado, máquinas de Turing não-determinística podem receber uma string $x \in \{0,1\}^n$ como uma prova que $1^n \in L(A)$ e após isso somente uma consulta ao oráculo A é necessária para certificar que $A(x) = 1$.

A função Or_n que é o $\vee$ de n variáveis é uma função Booleana bem básica e portanto podemos muito bem considerar dispositivos computacionais com uma estrutura finita como circuitos de profundidade constante para raciocinar sobre ela. Podemos por exemplo mostrar que uma árvore de decisão de profundidade menor do que n (a qual pode ser vista como um circuito AC^0 de profundidade 2) não pode computar Or_n corretamente em todas as entradas. Neste capítulo nós queremos provar que

1. Existe um oráculo A tal que $\mathsf{PH}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$.
2. Existe um oráculo A tal que para todo $k \geq 1$, $\Sigma_k^{p,A} \neq \Sigma_{k+1}^{p,A}$.

Ao longo deste capítulo iremos ver como generalizar o argumento que usamos para provar que $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$, para algum oráculo A, para provar os dois resultados acima, ao passo que será necessário provar limitantes inferiores para circuitos mais complexos do que árvores de decisão (mas que ainda têm profundidade constante). Esta conexão entre circuitos de profundidade constante e resultados que separam classes de complexidades relativas a um oráculo apareceu originalmente em [FSS84].

Para provar novamente a existência de um oráculo A tal que $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$ nós iremos deixar as funções Or de lado e ao invés disso iremos considerar a função Tribes_N que vimos na introdução e em A. Uma das propriedades de Tribes_N é que ela, assim como as funções Or, é *evasiva*, o que significa que ter conhecimento apenas parcial dos bits da entrada não é suficiente para avaliar a função. Para formalizar isso, suponha que nós temos uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e queremos computar $f(x)$ para alguma entrada x. Nós podemos fazer isso somente consultando cada bit de x sem nos preocuparmos com a complexidade das computações intermediárias. Desta formas podemos definir diversas medidas de complexidade de f. A medida que nos interessa no momento é a complexidade de consulta determinística:

Definição 3.1. *A complexidade de consulta determinística de um algoritmo A é o maior número de consulta aos bits da entrada sobre todas as entradas $x \in \{0,1\}^n$ que A faz.*

Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. A complexidade de consulta determinística de f, que denotamos por $D(f)$, é o mínimo da complexidade de consulta determinística de todos os algoritmos que computam f.

A partir de agora quando dissermos complexidade de consulta fica implícito que estamos falando da complexidade de consulta determinística.

Nós podemos representar as consultas feita pelo algoritmo através de uma árvore de decisão, onde em cada consulta o algoritmo ramifica para a esquerda ou para direita dependendo do valor do bit consultado. Desta forma $D(f)$ é a profundidade mínima entre todas as árvores de decisão que computam f.

Para ver que Tribes_N é evasiva bastar considerar o cenário em que nenhuma consulta revela o valor de uma das tribos (isto é, a consulta sempre retorna 1) até que o último bit da tribo seja consultado e acaba sendo 0. Assim mesmo que todas exceto uma tribo tenha todos seus bits revelados o valor desta última tribo vai ser incerto até que a última consulta seja feita. Isso pode ser traduzido como $D(\text{Tribes}_N) = N$. Também poderiamos ter usado o seguinte fato:

Fato 3.2. *Para todas funções $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, $deg(f) \leq D(f)$.*

E como vimos em A.10, $\deg(\text{Tribes}_n) = \text{n}$.

Agora, seja M uma máquina de Turing que pode fazer consultas a algum oráculo, e seja $x \in \{0,1\}^*$. O que M faz antes de tua primeira consulta é independente de qual oráculo ela tem acesso, e o que M faz entre a primeira e segunda consulta só depende da resposta à primeira consulta, e por aí vai. Isto sugere que a computação de M sobre a entrada x pode ser representada por um algoritmo de consulta (árvore de decisão) que ramifica sobre as respostas às suas consultas ao oráculo.

Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto finito de $\{0,1\}^*$ e $A \subseteq \{0,1\}^* \setminus \mathcal{X}$ um oráculo que inicialmente está definido apenas nas strings que não estão em $\mathcal{X}$. Sejam M e x os mesmos do parágrafo anterior, então o algoritmo de consulta $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ ramifica sobre consultas ao oráculo por strings em $\mathcal{X}$. Podemos ver a entrada de $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ como um vetor característica v onde $v_j = 1$ significa que a j-ésima string na ordem lexicográfica em $\mathcal{X}$ está em A. Desta forma, podemos definir $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ de forma que $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}(v) = 1 \iff M^{A \cup v}(x) = 1$, permitindo um pequeno abuso de notação. Em particular, se M roda em tempo polinomial e $\mathcal{X} = \{0,1\}^{|x|}$ então $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ tem complexidade de consulta polilogarítmica se $|x|$ for suficientemente grande já que o número de consultas de $T^{\mathcal{X}}_{M^A,x}$ é no máximo o número de consultas que M faz ao oráculo quando recebe x em sua entrada, e uma máquina de Turing de tempo polinomial só irá fazer um número polinomial de consultas ao seu oráculo.

Então, para cada oráculo $A \subseteq \{0,1\}^*$, considere a seguinte linguagem.

$$L(A) = \{1^w | \text{Tribes}_{w,s}(A) = 1\}, \tag{3.1}$$

em que $s \approx 2^w \ln(2)$. Se $N = ws$, o número de variáveis de entrada de $\text{Tribes}_{w,s}$, então $\text{Tribes}_{w,s}(A)$ siginifica a função $\text{Tribes}_{w,s}$ com o vetor característica de $A^{=\log N}$ em seu argumento. $L(A) \in \mathsf{NP}^A$ para todos $A \subseteq \{0,1\}^*$ pois precisamos apenas verificar que para algum i múltiplo de w, $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+w} \in A$, em que aqui x_i é a i-ésima string de tamanho $\log N$ na ordem lexicográfica. Como $\log N \approx w + \log w$ também temos que é possível em tempo polinomial escrever cada uma dessas strings na fita de oráculo. Agora podemos provar o teorema 2.48 novamente:

Teorema 3.3 ([RST15b])**.** *Existe um oráculo $A \subseteq \{0,1\}^*$ tal que $L(A)$ como definida em 3.1 não está em P^A.*

Demonstração. Seja $\{M_i\}_{i\geq 1}$ uma enumeração de todas as máquinas de Turing de tempo polinomial, e $\{p_i\}_{i\geq 1}$ o tempo de execução das respectivas máquinas de Turing.

Seja $w_1, w_2, \ldots$ uma sequência de números naturais em que $p_1(w_1) < 2^{w_1}$ e para cada $i > 1$ temos que $w_i > p_{i-1}(w_{i-1})$ e $p_i(w_i) < 2^{w_i}$.

Assim como fizemos na prova original que aparece na seção 2.5 nós iremos construir o oráculo A em estágios. Nós descrevemos o i-ésimo estágio para algum $i \geq 1$ arbitrário. Inicialmente fazemos $A(0) = \emptyset$ e iremos assumir que no fim do $(i-1)$-ésimo estágio a construção descrita abaixo já obteve o oráculo $A(i-1)$ definido sobre strings de tamanho no máximo $p_{i-1}(w_{i-1})$

Estágio i:

Seja $D(i) \subseteq \bigcup_{k\in I_i}\{0,1\}^k$, em que $I_i = \{p_{i-1}(w_{i-1}) + 1, p_{i-1}(w_{i-1}) + 2, \ldots, p_i(w^i)\} \setminus \{\log N_i\}$ em que $N_i \approx w_i + \log w_i$ [1]. Seja T_i a árvore de decisão da computação de M_i sobre a entrada 1^{w_i} com acesso ao oráculo $A(i-1) \cup D(i)$ em que os nodos da árvore ramificam com consutas à strings em $\{0,1\}^{\log N_i}$. Como T_i tem profundidade polilogarítmica e Tribes_{N_i} é evasiva, segue que existe um oráculo $A' \subseteq \{0,1\}^{\log N_i}$ tal que $T_i(A') \neq \text{Tribes}_{N_i}(A')$. Nós então fazemos $A(i) = A(i-1) \cup A' \cup D(i)$.

Então agora argumentamos que $A = \bigcup_{i\geq 1} A(i)$ satisfaz $\mathsf{NP}^A \not\subseteq \mathsf{P}^A$. Assuma que para algum $i \geq 1$ a máquina de Turing M_i decide $L(A)$ com acesso à A em tempo polinomial. Nós fazemos $A' = A \cap \{0,1\}^{\log N_i}$. Este A' apareceu no i-ésimo estágio e é tal que $A(i-1) = A(i) \setminus (A' \cup D(i))$. Nós temos o seguinte.

- $1^{w_i} \in L(A) \Rightarrow T_i(A') = 1 \Rightarrow \text{Tribes}_{N_i}(A) = 0 \Rightarrow 1^{w_i} \notin L(A)$.
- $1^{w_i} \notin L(A) \Rightarrow T_i(A') = 0 \Rightarrow \text{Tribes}_{N_i}(A) = 1 \Rightarrow 1^{w^i} \in L(A)$.

Ambos os casos são contradições e portanto tal máquina M_i não pode existir e $\mathsf{NP}^A \not\subseteq \mathsf{P}^A$.

□

Na prova que acabamos de ver nós usamos dois fatos a respeito da função Tribes_N: 1) ela é evasiva [2] e 2) nós podemos verificar que $\text{Tribes}_N = 1$ olhando para um número polinomial das variáveis de entrada de Tribes_N. Portanto poderiamos substituir Tribes_N por qualquer função que satisfaça (1) e (2), como por exemplo a função Or_n, a disjunção de n variáveis. Porém, a função Or_n não é balanceada, o que significa que com probabilidade muito maior do que $1/2$ temos que $Or_n(x) = 1$. O problema é que nós iremos precisar de uma função balanceada para provar o resultado da próxima seção.

[1] Neste ponto nós podemos assumir que $p_i = \Omega(n \log n)$ e que $p_i(w_i) > w_i + \log w_i$, pois o teorema da hierarquia de tempo determinístico que vimos em 2.44 diz que se nenhuma máquina de Turing que roda em tempo $\Omega(n \log n)$ pode decidir uma linguagem qualquer então certamente nenhuma máquina que roda em tempo $\mathcal{O}(n)$ pode decidir tal linguagem.

[2] Na verdade só precisamos do fato que Tribes_N não pode ser computada por um algoritmo que faz $\Omega(N^c)$ consultas, para qualquer $c < 1$.

3.2 P $\neq$ NP para oráculos aleatórios

Um dos objetivos de estudar complexidade relativizada é enteder a relação entres classes de complexidades quando não conseguimos dizer nada de muito útil no mundo não-relativizado. Porém, como já vimos pelo teorema 2.48, provar que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ para algum oráculo não é nenhuma evidência que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ no mundo não-relativizado, até porque a construção do oráculo A em ambas provas que vimos é só uma especialização do método da diagonalização que por sua vez é basicamente só uma forma de "trapacear o sistema" construido uma asserção que codifica a sua própria falsidade. Então, com o objetivo de conseguir algum tipo de evidência que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ poderiamos nos perguntar se é o caso que P e NP são diferentes no mundo relativizado típico. E de fato, o próximo teorema é o assunto desta subseção:

Teorema 3.4. $\Pr_{\boldsymbol{A}}[\mathsf{P}^{\boldsymbol{A}} \neq \mathsf{NP}^{\boldsymbol{A}}] = 1$.

A idéia que teoremas como 3.4 é evidência que o mesmo resultado que foi provado acontecer quase sempre para oráculos aleatórios também há de ser verdade no mundo não relativizado é conhecido como a hipótese do oráculo aleatório, que já foi provada ser falsa [Kur82, CCG+94, LFKN92, Sha92].

Antes de ver a prova do teorema 3.4 nós vamos rapidamente discutir o que queremos dizer por $\mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$ com probabilidade 1.

A lei zero-um de Kolmogorov

Um oráculo aleátorio é gerado incluindo cada $x \in \{0,1\}^*$ independentemente com probabilidade 1/2. Então, usando a mesma sequência de máquinas de Turing $M_1, M_2, \ldots$ e a mesma sequência $w_1, w_2, \ldots$, que usamos na prova do teorema 3.3, nós podemos considerar para cada $i \geq 1$ o evento em que $M_i^{\boldsymbol{A}^{=w_i}}(1^{w_i})$ é igual a 1 se $1^{w_i} \notin L(\boldsymbol{A})$ ou igual a 0 se $1^{w_i} \in L(\boldsymbol{A})$.

O que a lei zero-um de Kolmogorov diz é que todos eventos que são definidos no infinito e são independentes de qualquer sequência de eventos que seja finita mas arbitrariamente grande ou quase nunca acontecem (acontecem com probabilidade 0) ou quase sempre acontecem (acontecem com probabildade 1). Nós podemos assumir que toda máquina de Turing que roda em tempo polinomial tem infinitas descrições que aparecem na sequência $M_1, M_2, \ldots$. Se provarmos que todos os eventos descritos no parágrafo anterior acontecem com alta probabilidade, então podemos deduzir a partir da lei zero-um de Kolmogorov que toda máquina de Turing que roda em tempo polinomial eventualmente (com probabilidade 1) terá uma de suas descrições M_i, para algum $i > i_0$ e i_0 um inteiro que pode ser feito arbitrariamente grande, falhar em decidir $L(\boldsymbol{A})$ corretamente na entrada 1^{w_i} com acesso ao oráculo $\boldsymbol{A}$.

Prova do teorema 3.4

A idéia principal do teorema 3.4 é que a função $\text{Tribes}_{w,s} = \text{Tribes}_N$ não pode nem mesmo ser aproximada por algoritmos de consulta com complexidade de consulta polilogarítmica.

Proposição 3.5. *Seja A qualquer algoritmo de consulta com complexidade de consulta $o(\frac{n}{\log n})$, então:*

$$\Pr_{\boldsymbol{x} \sim \{0,1\}^n}[A(\boldsymbol{x}) = \mathit{Tribes}_N(\boldsymbol{x})] \leq 0,567$$

Demonstração. É suficiente provar que qualquer algoritmo A que só faz consultas às primeiras $\frac{1}{10}s$ tribos não pode aproximar a função Tribes_N. Podemos notar que neste caso o melhor que podemos fazer é fazer A computar a função $\text{Tribes}_{\frac{1}{10}s,w}$. Ou seja, se g é a função computada por A, então

$$g(x) = 1 \iff \text{pelo menos uma das primeiras } \frac{1}{10}s \text{ tribos é unanimamente 1.}$$

Daí temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[(\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}))^2].$$

Mas como $\mathrm{Tribes}_N(x) \geq g(x)$, para todos $x \in \{0,1\}^N$, temos que

$$\begin{aligned}
\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})] &= \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x})] \\
&= \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x})] - \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[g(\boldsymbol{x})] \\
&= 1 - (1-2^{-w})^s - 1 + (1-2^{-w})^{\frac{1}{10}s} \\
&= (1-2^{-w})^{\frac{1}{10}s} - (1-2^{-w})^s
\end{aligned}$$

Com w tendendo ao infinito isso é igual a $2^{-\frac{1}{10}} - 1/2 \approx 0,433$, e portanto

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^N}[\mathrm{Tribes}_N(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x})] \leq 1 - 0,433 = 0,567.$$

□

Então podemos provar o teorema 3.4.

Demonstração. (Prova do teorema 3.4)

Pela proposição 3.5 nós temos que para todo $i \geq 1$, M_i com acesso ao oráculo $\boldsymbol{A}$ falha em decidir $L(\boldsymbol{A})$ na entrada 1^{w_i} com probabilidade constante. Portanto, pela lei zero-um de Kolmogorov existe com probabilidade 1 algum $i' \geq i$ tal que M_i e $M_{i'}$ são equivalentes e $M_{i'}$ com acesso ao oráculo $\boldsymbol{A}$ falha em decidir $L(\boldsymbol{A})$ sobre a entrada $1^{w_{i'}}$. Como estamos falando da intersecção de eventos independentes temos que $\mathsf{P}^{\boldsymbol{A}} \neq \mathsf{NP}^{\boldsymbol{A}}$ com probabilidade 1.

□

3.3 PH vs PSPACE

Agora nós generalizamos a idéia que usamos para separar P e NP nas seções anteriores para podermos separar PSPACE e a hierarquia polinomial. Da mesma forma que usamos árvores de decisão para representar P nós iremos usar circuitos AC^0 para representar PH.

Fixe $k \geq 1$. Seja $L \subseteq \{0,1\}^*$ uma linguagem em Σ_k^p, o que significa que existe uma máquina de Turing M de tempo polinomial tal que para todo $x \in \{0,1\}^*$, $x \in L \iff \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q_k y_k M(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) = 1$. Fixando $y_1, y_2, \ldots, y_k$, podemos representar a computação de M sobre $x, y_1, y_2, \ldots, y_k$ por uma árvore de decisão da forma que vimos anteriormente. Então o circuito AC^0 $C^{\mathcal{X}}_{M,x}$ que usamos para representar L tem profundidade $k+1$ onde cada quantificador $\exists$ é representado por uma camada de portas $\vee$ e $\forall$ é representado por uma camada de portas $\wedge$, a profundidade é $k+1$ porque no nível mais baixo nós temos árvores de decisão que podem ser representadas por fórmulas FNC ou FND. Se $N = 2^n$ é o número de variáveis de entrada do circuito $C^{\mathcal{X}}_{M,x}$,

também temos que o fan-in das portas no primeiro nível é $\mathsf{polylog}(N)$ e o fan-in nas demais portas é $2^{p(n)}$. O tamanho do circuito é $N^{\mathsf{polylog}(N)}$.

Assim como as árvores de decisão que vimos nas seções 3.1 e 3.2, o circuito $C^{\mathcal{X}}_{M,x}$ satisfaz $C^{\mathcal{X}}_{M,x}(A) = 1 \iff M^{\mathcal{X}\cup A}(x) = 1$, onde nós vemos A como sendo o vetor caratecterísica de um oráculo A.

O objetivo desta seção é provar o seguinte teorema.

Teorema 3.6. *Existe $A \subseteq \{0,1\}^*$ tal que $\mathsf{PSPACE}^A \neq \mathsf{PH}^A = \bigcup_{k\geq 1} \Sigma^{p,A}_k$.*

Nós também temos que $\mathsf{PH}^{\mathsf{TQBF}} = \mathsf{PSPACE}^{\mathsf{TQBF}}$, e portanto o teorema 3.6 também nós diz que PH vs PSPACE, assim como P vs NP, necessariamente precisa de um argumento que não relativiza. Nós provamos 3.3 a partir de um limitante inferior para a função Tribes_N. Para provar o teorema 3.6 nós iremos usar um limitante inferior para a função paridade de n variáveis.

Definição 3.7. *(Paridade)*

Para $n \geq 1$ a função paridade de n variáveis, que denotaremos por Parity_n, é 1 se e se somente se $\sum_{i=1}^{n} x_1 \pmod 2 = 1$.

Ou seja, as funções Parity_n computam o xor dos bits em suas entradas. Consideremos para cada oráculo $A \subseteq \{0,1\}^*$ a seguinte linguagem:

$$L(A) = \{1^n | A(x) = 1 \text{ para um número ímpar de } x \in \{0,1\}^n\}.$$

E temos que $L(A) \in \mathsf{PSPACE}^A$ já que só precisamos de espaço para escrever cada string de n bits na fita de oráculo mais uma célula para guardar a paridade de $|\{x \in \{0,1\}^n | A(x) = 1)\}|$. Uma outra forma de descrever L é dado uma string unária 1^n e oráculo A, então $1^n \in L(A) \iff \text{Parity}_{2^n}(A^{=n}) = 1$ em que $A^{=n} = A \cap \{0,1\}^n$. Nós iremos usar esta caracterização de $L(A)$ mais o teorema 3.8 que é enunciado logo abaixo para provar o teorema 3.6.

Teorema 3.8. *Seja $d > 0$ um inteiro. Para n suficientemente grande temos que qualquer circuito de profundidade d com fan-in $\mathsf{polylog}(n)$ no teu primeiro nível e tamanho $2^{o\left(n^{\frac{1}{d-1}}\right)}$ não pode computar a função Parity_n corretamente em todas as entradas.*

Nós iremos provar o teorema 3.8 no próximo capítulo (4) quando formos ver restrições aleatórias e o lema da troca de Håstad. Na verdade, iremos ganhar de grátis o seguinte teorema.

Teorema 3.9. *Seja $d > 0$ um inteiro. Então, para n suficientemente grande, qualquer circuito com profundidade d, fan-in do primeiro nível $\mathsf{polylog}(n)$ que computa Parity_n corretamente numa fração maior do que $1/2 + \Omega(n^{-d})$ das entradas deve ter tamanho maior do que $2^{\Theta\left(n^{\frac{1}{d-1}}\right)}$.*

E portanto, usando a lei zero-um de Kolmogorov e um argumento semelhante ao que usamos para provar 3.4, nós temos o seguinte.

Teorema 3.10. $\Pr_A[\mathsf{PSPACE}^A \neq \mathsf{PH}^A] = 1$.

Furst, Saxe e Sipser [FSS84] foram os primeiros a provar que as funções paridades não tem circuitos de profundidade constante e tamanho polinomial e também naquele mesmo artigo eles perceberam que o teorema 3.6 segue de uma prova que estas funções necessitam de circuitos de profundidade constante que tenham tamanho exponencial. Um ano mais tarde, Andrew Yao em [Yao85] deu a primeira prova que as funções paridades necessitam circuitos de profundidade constante com tamanho exponencial, provando então o teorema 3.6. Por fim, Johan Håstad deu um limitante inferior essencialmente ótimo para as funções paridade [Hås87].

Os resultados de Yao e Håstad já nos dão um limitante inferior exponencial para o tamanho de circuitos AC^0 que aproximam as funções paridades. O mesmo resultado também foi provado por Jin-Yi Cai em [Cai86] e László Babai em [Bab87].

Agora nós iremos usar os limitantes inferiores para circuitos AC^0 que computam as funções Parity_n para provar o teorema 3.6.

Demonstração. (Prova do Teorema 3.6)

Nós usamos um argumento parecido com o da prova do teorema 3.3.

Seja $\{M_i\}_{i\geq 1}$ uma enumeração de todas as máquinas de Turing de tempo polinomial e $\{p_i\}_{i\geq 1}$ o tempo de execução dessas máquinas de Turing. Fixe algum $k \geq 1$ e provaremos que existe $A \subseteq \{0,1\}^*$ tal que $\Sigma_k^{p,A} \neq \mathsf{PSPACE}^A$. Por estarmos escolhendo um k arbitrário, após provarmos que $\Sigma_k^{p,A} \neq \mathsf{PSPACE}^A$ teremos também provado que $\mathsf{PH}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$.

Seja n_0 a constante tal que para todo $n \geq n_0$ o resultado do teorema 3.8 para circuitos de profundidade $k+1$ vale – ou seja, para todo $n \geq n_0$ e todo circuito C de profundidade $k+1$ e tamanho subexponencial existe um $x \in \{0,1\}^n$ tal que $C(x) \neq \text{Parity}_n(x)$. Nós definimos uma sequência $n_0, n_1, n_2, \ldots$ de números naturais tais que para todo $i \geq 1$ é verdade que $n_i > p_{i-1}(n_{i-1})$ e $p_i(n_i) < 2^{n_i}$.

Nós construimos A em estágios e descreveremos o i-ésimo estágio para algum $i \geq 1$ arbitrário. Seja $A(0) = \emptyset$.

Estágio i:

Seja $D(i) \subseteq \bigcup_{k\in I_i}\{0,1\}^k$ algum oráculo arbitrário onde $I_i = \{p_{i-1}(n_{i-1})+1, p_{i-1}(n_{i-1})+2, \ldots, p_i(n_i)\} \setminus \{n_i\}$. Seja C_i o circuito da computação de M_i sobre a entrada 1^{n_i} e com acesso ao oráculo $A(i-1) \cup D(i)$ e que faz consultas à strings em $\{0,1\}^{n_i}$. Pelo teorema 3.8 deve haver um oráculo $A' \subseteq \{0,1\}^{n_i}$ tal que $C_i(A') \neq \text{Parity}_{2^{n_i}}(A')$. Então fazemos $A(i) = A(i-1) \cup A' \cup D(i)$.

Argumentaremos que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A(i)$ satisfaz $L(A) \notin \Sigma_k^{p,A}$. Suponha que uma máquina de Turing de tempo polinomial M_i decida $L(A)$ com k quantificadores alternantes e com acesso a A. Seja A' o oráculo que apareceu no i-ésimo estágio que é tal que $A(i-1) = A(i) \setminus (A' \cup D(i))$. Note que também é verdade que $A \cap \{0,1\}^{n_i} = A'$. Então nós temos o seguinte.

- $1^{n_i} \in L(A) \Rightarrow C_i(A') = 1 \Rightarrow \text{Parity}_{2^{n_i}}(A') = 0 \Rightarrow 1^{n_i} \notin L(A)$.
- $1^{n_i} \notin L(A) \Rightarrow C_i(A') = 0 \Rightarrow \text{Parity}_{2^{n_i}}(A') = 1 \Rightarrow 1^{n_i} \in L(A)$.

Ambos os casos são contradições e portanto não existe tal máquina de Turing de tempo polinomial que decida $L(A)$ com k quantificadores alternantes. Como $L(A) \in \mathsf{PSPACE}^A$ podemos concluir que $\Sigma_k^{p,A} \neq \mathsf{PSPACE}^A$.

□

3.4 Separando a hierarquia polinomial

Como vimos na seção anterior, podemos representar Σ_k^p por circuitos AC^0 com profundidade $k+1$. Portanto, se queremos provar que existe $A \subseteq \{0,1\}^*$ tal que $\Sigma_k^{p,A} \not\subseteq \Sigma_{k-1}^{p.A}$ nós temos que demonstrar a existência de uma "hierarquia de profundidade". O que queremos dizer é que deve existir para cada $k > 1$ uma função f_k tal que existe um circuito de tamanho polinomial e profundidade $k+1$ que computa f_k mas que qualquer circuito com profundidade k que computa f_k tem tamanho exponencial. Note que pelo teorema 3.8 a função paridade não pode ser computada por circuitos AC^0 de tamanho polinomial e profundidade k para *todas* as constantes $k \geq 1$ e portanto temos que provar limitantes inferior para funções diferentes da função paridade. Para este fim define-se as funções de Sipser:

Definição 3.11. *(As funções de Sipser)*

Para $d \geq 2$ a função de Sipser $f^{m,d}$ é uma fórmula monotônica e read-once [3] *onde o nível mais baixo tem fan-in m, as portas lógicas nos níveis 2 até d - 1 têm fan-in $w = 2^m m \ln(2)$ e a porta lógica no nível mais alto tem fan-in $w_d \approx 2^m ln(2)$. Ou seja, podemos escrever $f^{m,d}$ como*

$$\bigvee_{i_d=1}^{w_d} \bigwedge_{i_{d-1}=1}^{w} \cdots \bigvee_{i_2=1}^{w} \bigwedge_{i_1=1}^{m} x_{i_1,i_2,\ldots,i_d}, \text{ se } d \text{ é par.} \tag{3.2}$$

e

$$\bigwedge_{i_d=1}^{w_d} \bigvee_{i_{d-1}=1}^{w} \cdots \bigvee_{i_2=1}^{w} \bigwedge_{i_1=1}^{m} x_{i_1,i_2,\ldots,i_d}, \text{ se } d \text{ é ímpar.} \tag{3.3}$$

Segue direto da definição que o número n de variáveis de entrada da função $f^{m,d}$ é simplesmente o produto dos fan-ins de cada nível.

$$n = mw^{d-2}w_d = \Theta(w^{d-1}).$$

E portanto também temos que $w = \Theta(n^{\frac{1}{d-1}})$.

Segue também pela definição de $f^{m,d}$ exposta em 4.7 e 4.8 que ela pode ser computada por um circuito de profundidade d e tamanho

$$S = 1 + \frac{n}{m}\sum_{i=0}^{d-2} n^i = 1 + \frac{n}{m}\Big(\frac{w^{d-1}-1}{w-1}\Big) = \widetilde{\Theta}(n^{2-\frac{1}{d-1}}),$$

Agora o resultado que nós precisamos para separar cada nível da hierarquia polinomial relativa à um oráculo segue do seguinte resultado, que também foi provado pela primeira vez por Yao em [Yao85] e depois por Håstad em sua tese de doutorado [Hås87].

Teorema 3.12. *Seja $d > 2$ e m suficientemente grande, qualquer circuito de tamanho no máximo $2^{w^{1/5}}$ e profundidade $d-1$ não computa a função $f^{m,d}$ corretamente em todas as entradas.*

Como $w = \Theta(n^{\frac{1}{d-1}})$, o teorema 3.12 nos dá um limitante inferior de $2^{n^{\Omega\left(\frac{1}{d-1}\right)}}$ para o tamanho de qualquer circuito de profundidade $d-1$ que computa a função $f^{m,d}$. De novo, deixaremos a prova do teorema 3.12 para o próximo capítulo, por enquanto só estamos preocupados na seguinte aplicação deste teorema.

Teorema 3.13. *Existe um oráculo $A \subseteq \{0,1\}^*$ tal que para todo $k \geq 2$, $\Sigma_k^{p,A} \neq \Sigma_{k-1}^{p,A}$.*

Ou seja, para este oráculo A, $\mathsf{PH}^A \neq \Sigma_k^{p,A}$, para todos $k \geq 1$. Logo, em particular, $\mathsf{NP}^A \neq \mathsf{PH}^A \Rightarrow \mathsf{P}^A \neq \mathsf{NP}^A$, então podemos ver a prova do teorema 3.13 como a terceira prova do teorema de Baker-Gill-Solovay que iremos ver, mas desta vez também estaremos provando algo bem mais forte usando uma estratégia parecida. Nós na verdade iremos provar que existe um oráculo A tal que para todo $k \geq 2$ é verdade que $\Pi_k^{p,A} \neq \Pi_{k-1}^{p,A}$, mas como observamos ainda na seção 2.5, é verdade que $\bigcup_{k\geq 1} \Sigma_k^{p,A} = \bigcup_{k\geq 1} \Pi_k^{p,A} = \mathsf{PH}^A$.

Para cada $k \geq 1$ nós definimos a linguagem $L_k(A) = \{1^m | f^{m,k+1}(A) = 1\}$, em que neste caso as variáveis de entrada de $f^{m,k+1}$ são $A(x)$ para cada string de x de um tamanho $|x| = \log n$ fixo em que $n \approx (d-1)(m+$

[3] Nós dizemos que um circuito ou fórmula é *read-once* se cada variável de entrada só alimenta uma única porta lógica.

$\log m$). Nós podemos notar que $L_k(A) \in \Pi_k^{p,A}$ pois podemos usar k quantificadores alternantes para simular as diferentes camadas do circuito AC^0 para $f^{m,k+1}$ e depois disso tudo que precisamos fazer é uma quantidade linear de consultas à A para achar o valor de uma das porta $\wedge$ no nível mais baixo. Para provar que existe um oráculo A tal que $\Pi_k^{p,A} \neq \Pi_{k-1}^{p,A}$ nós iremos provar a asserção mais forte que diz que existe um oráculo A tal que $L_k(A) \notin \Pi_{k-1}^{p,A}$.

Demonstração. (Prova do Teorema 3.13)

Nós agora iremos enumerar predicados PH que são predicados P da forma

$$P(x) \iff \forall z_1 \exists z_2 \forall \ldots Q_k z_k M(x, z_1, z_2, \ldots, z_k),$$

em que M é uma máquina de Turing de tempo polinomial. Seja $\{P_i\}_{i\geq 1}$ uma enumeração dos predicados PH e $\{p_i\}_{i\geq 1}$ é o tempo de execução de cada máquina de Turing na definição dos predicados PH.

Nós então consideramos uma sequência $m_0, m_1, m_2, \ldots$ de números naturais em que m_0 é grande o suficiente para satisfazer o resultado do teorema 3.12 e para todo $i \geq 1$ temos que $m_i > p_{i-1}(m_{i-1})$ e $p_i(m_i) < 2^{m_i}$. Para cada m_i nós teremos um outro número natural n_i que seria o número de variáveis de entrada da função $f^{m_i,k+1}$ em que k é tal que P_i é um predicado PH com $k-1$ quantificadores alternantes.

Como fizemos em todas as provas de resultados deste tipo, nós iremos construir o oráculo A em estágios e descreveremos o i-ésimo estágio, para algum $i \geq 1$ arbitrário. Inicialmente nós fazemos $A(0) = \emptyset$.

Estágio i:

Seja $k \geq 2$ tal que P_i é um predicado PH com $k-1$ quantificadores alternantes. Seja $D(i) \subseteq \bigcup_{l\in I_i}\{0,1\}^l$ um oráculo arbitrário em que $I_i = \{p_{i-1}(m_{i-1})+1, p_{i-1}(m_{i-1})+2, \ldots, p_i(m_i)\} \setminus \{\log n_i\}$ [4]. Seja C_i o circuito da computação de P_i sobre a entrada 1^{m_i} com $k-1$ quantificadores alternantes e acesso ao oráculo $A(i-1)\cup D(i)$. Ou seja, C_i é um circuito de profundidade k com tamanho quasipolinomial [5] e fan-in polilogarítmico no seu nível mais baixo e

$$C_i(A') = 1 \iff \forall z_1 \exists z_2 \forall \ldots Q_{k-1} z_{k-1} M_i^{A(i-1)\cup D(i)\cup A'}(1^{m_i}, z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}) = 1.$$

Então, pelo teorema 3.12 deve haver um oráculo $A' \subseteq \{0,1\}^{\log n_i}$ tal que $C_i(A') \neq f^{m,k+1}(A')$. Nós então fazemos $A(i) = A' \cup D(i)$.

Agora suponha que existe um $k \geq 1$ e um predicado PH P_i com k quantificadores alternantes tal que $P_i(x) \iff x \in L_k(A)$. Nós então consideramos o oráculo $A' = A \cap \{0,1\}^{\log n_i}$. Nós temos o seguinte

- $1^{m_i} \in L_k(A) \Rightarrow C_i(A') = 1 \Rightarrow f^{m_i,k+1}(A') = 0 \Rightarrow 1^{m_i} \notin L_k(A)$.
- $1^{m_i} \notin L_k(A) \Rightarrow C_i(A') = 0 \Rightarrow f^{m_i,k+1}(A') = 1 \Rightarrow 1^{m_1} \in L_k(A)$.

Ambos os casos são contradições.

□

Separando a hierarquia polinomial com oráculos aleatórios

Recentemente, Rossman, Servedio e Tan [RST15a] provaram uma versão do teorema 3.12 para o caso médio. Ou seja, eles mostraram que as funções de Sipser da forma que estamos definindo elas neste texto nos dão

[4] Agora temos que $\log n_i \approx (k-1)(m_i + \log m_i)$ mas podemos de novo assumir que todo polinômio p_i é $\Omega(n \log n)$ sem perda de generalidade.

[5] Quasipolinomial significa funções da forma $n^{\log^c n}$ para $c > 0$.

uma hierarquia de circuitos de profundidade constante até mesmo no caso médio em que nós permitimos que circuitos de profundidade $d-1$ apenas aproximem circuitos de tamanho polinomial e profundidade d. Ou seja, enquanto o teorema 3.12 nos diz que circuitos de tamanho subexponencial e profundidade $d-1$ não são capazes de computar $f^{m,d}$ corretamente em todas as entradas, o teorema que iremos enunciar logo em seguida vai além e diz que circuitos de tamanho subexponencial e profundidade $d-1$ nem sequer podem aproximar $f^{m,d}$.

Teorema 3.14. *Seja $d > 2$ e m suficientemente grande, então qualquer circuito de tamanho $S \leq 2^{w^{1/5}}$ e profundidade $d-1$ falha em computar a função $f^{m,d}$ corretamente numa fração maior do que $1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})$ das entradas.*

Então obtemos que a hierarquia polinomial é infinita relativa a um oráculo aleatório com probabilidade 1.

Teorema 3.15. *Seja $\boldsymbol{A} \sim \{0,1\}^*$ um oráculo aleatório, então com probabilidade 1 temos que para todo $k \geq 2$, $\Sigma_k^{p,\boldsymbol{A}} \neq \Sigma_{k-1}^{p,\boldsymbol{A}}$.*

Nós iremos deixar a prova do teorema 3.14 para a seção 4.2. Enquanto isso iremos provar o seguinte.

Teorema 3.16. $\Pr_{\boldsymbol{A}\sim\{0,1\}^*}[\mathsf{NP}^{\boldsymbol{A}} \neq \Sigma_2^{p,\boldsymbol{A}}] = 1$.

Como é de se esperar, o teorema 3.16 segue de um limitante inferior para circuitos AC^0 de profundidade 2 (ou seja, fórmulas FNC e FND) no caso médio. A função que iremos usar para provar o limitante inferior usa o dual da função Tribes.

Definição 3.17. *(Dual da função Tribes)*
O dual da função $Tribes_{w,s}$ é a função $Tribes^{\dagger}_{w,s}$ definida como

$$Tribes^{\dagger}_{w,s}(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{s,w}) = \overline{\Big(\bigvee_{i=1}^{s}\bigwedge_{j=1}^{w} \overline{x}_{i,j}\Big)} = \overline{Tribes_{w,s}(\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{1,2}, \ldots, \overline{x}_{s,w})}.$$

Então iremos exibir a prova do seguinte teorema de O'Donnell e Wimmer.

Teorema 3.18 (O'Donnell, Wimmer [OW07])**.** *Seja $b \geq 1$ e $m = b2^b$, e consideramos a função $F_m = Tribes_{b,2^b} \vee Tribes^{\dagger}_{b,2^b}$. Qualquer fórmula $g : \{0,1\}^m \times \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ de profundidade 2 e largura $w < \frac{3}{10}2^b = \mathcal{O}(m/\log m)$ deve satisfazer*

$$\Pr_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq F_m(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)] \geq 1/10.$$

O teorema 3.18 implica que qualquer circuito AC^0 de profundidade 2 com largura $\mathcal{O}(m/logm)$ deve falhar em computar F_m corretamente em uma fração maior do que $1/10$ das entradas. Como f pode ser computada por um circuito de tamanho polinomial e profundidade 3, o teorema 3.16 segue diretamente de 3.18.

Para provar o teorema 3.18 nós primeiro precisamos de algumas observações. Nós iremos primeiro focar em mostrar que uma fórmula FNC g com largura $\mathcal{O}(m/\log m)$ não pode aproximar a função $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$ e pra fazer isso nós vamos ver como reduzir g e $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$ para fórmulas mais simples de forma que o limitante que estamos querendo provar é preservado por estas simplificações.

Primeiro nós notamos que para computar a função $\mathrm{Tribes}_{b,2^n}$ nós só precisamos dos valores de cada tribo, sem ter que conhecer em detalhe os valores das variáveis dentro de cada tribo. Seja $\{y_i\}_{i\in[2^b]}$ um espaço de variáveis formais em que ao tirar $\boldsymbol{x} \sim \{0,1\}^m$ nós fazemos cada $\boldsymbol{y}_i = \bigwedge_{j=1}^{b} \boldsymbol{x}_{i,j}$, o que significa que cada $\boldsymbol{y}_i$ recebe o valor da i-ésima tribo sobre uma atribuição às variaveis $\boldsymbol{x}_{i,j}$s. Desta forma temos que $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$ é

equivalente à função Or_{2^b} sobre as variáveis $\{y_i\}_{i\in[2^b]}$. Como cada atribuição $\boldsymbol{y} \in \{0,1\}^{2^b}$ pode ser vista como uma string tirada de $\{0_{1-2^{-b}}, 1_{2^{-b}}\}^{2^b}$, nós temos a seguinte identidade.

$$\Pr_{\boldsymbol{y}\sim\{0_{1-2^{-b}},1_{2^{-b}}\}^{2^b}}[\mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y}) = 1] = \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^m}[\mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}) = 1]. \tag{3.4}$$

Durante o resto desta seção, sempre que $\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{x}$ aparecer nós iremos assumir que $\boldsymbol{y} \sim \{0_{1-2^{-b}}, 1_{2^{-b}}\}^{2^b}$ e também $\boldsymbol{x} \sim \{0,1\}^m$.

A partir da igualdade 3.4 nós temos uma estratégia para provar que uma fórmula FNC g com largura $\mathcal{O}(m/\log m)$ não pode aproximar a função $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$. Nós iremos achar uma forma de aplicar à g a mesma transformação que aplicamos à $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$ para obter uma função g' de forma que teremos também que

$$\Pr[g'(\boldsymbol{y}) = 1] = \Pr[g(\boldsymbol{x}) = 1],$$

e também

$$\Pr[g'(\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})] = \Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})].$$

Então, se mostrarmos que g' não consegue $\frac{1}{10}$-aproximar Or_{2^b} nós imediatamente obtemos que g não consegue $\frac{1}{10}$-aproximar $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$. Então agora nos concentramos em como obter g' a partir de g.

Nós estamos querendo aplicar à g a mesma transformação que aplicamos à $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$, e o que basicamente fizemos com $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$ foi substituir cada variável $x_{i,j}$ por uma única variável y_i que leva o valor de $\bigwedge_{j=1}^{b} x_{i,j}$. Como g é uma fórmula FNC de largura $\mathcal{O}(m/\log m)$ arbitrária temos que substituir diretamente cada $x_{i,j}$ por y_i pode não nos dar uma função equivalente à g. Por exemplo, tome a seguinte fórmula FNC.

$$(x_{1,1} \vee x_{1,2}) \wedge (x_{1,3} \vee x_{1,4}). \tag{3.5}$$

Se trocarmos cada $x_{1,j}$ por uma única variável y_1 que toma o valor $\bigwedge_{j=1}^{4} x_{1,j}$ nós obtemos a fórmula $y_1 \equiv x_{1,1} \wedge x_{1,2} \wedge x_{1,3} \wedge x_{1,4}$ que certamente não é equivalente a 3.5. Mas observe que $y_i = \bigwedge_{j=1}^{b} x_{i,j}$ implica na seguinte implicação ser uma tautologia:

$$y_i \Rightarrow x_{i,j}. \tag{3.6}$$

E também temos que podemos substituir cada aparição de $x_{i,j}$ na fórmula g por $(x_{i,j} \vee \mathcal{F})$, em que $\mathcal{F}$ é qualquer asserção falsa. Em particular $\mathcal{F}$ pode ser a negação de 3.6, que no caso seria $(\overline{x_{i,j}} \wedge y_i)$, e daí temos que

$$x_{i,j} \equiv x_{i,j} \vee (\overline{x_{i,j}} \wedge y_i) \equiv (x_{i,j} \vee y_i).$$

Então definimos $g' : \{0,1\}^m \times \{0,1\}^{2^b} \to \{0,1\}$ como sendo a fórmula g com cada aparição de $x_{i,j}$ substituida por $(x_{i,j} \vee y_i)$, e cada aparição de $\overline{x_{i,j}}$ substituida por $\overline{(x_{i,j} \vee y_i)}$. Neste caso temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{y}\leftarrow\boldsymbol{x}}[g'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1] = \Pr[g(\boldsymbol{x}) = 1],$$

em que introduzimos a notação $y \leftarrow x$ que significa que y foi obtida a partir de x fazendo $y_i = \bigwedge_{j=1}^{b} x_{i,j}$. Portanto neste ponto nós já temos o seguinte.

$$\Pr_{\boldsymbol{y}\leftarrow\boldsymbol{x}}[g'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})] = \Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})].$$

Por causa de algumas variáveis poderem aparecer negadas em g temos que g' não é uma fórmula FNC e, como veremos mais pra frente, nós vamos precisar assumir que g' é uma fórmula FNC possivelmente com largura $\mathcal{O}(m/\log m)$ para provar que ela não é bem correlacionada com Or_{2^b}. Portanto precisamos de mais alguns passos.

Ao invés de construir y a partir de x podemos também construir x a partir de y sem mudar a distribuição de pares (x, y), em que $y \leftarrow x$, usando o seguinte procedimento que vem sendo chamado de o truque de O'Donnell-Wimmer:

O truque de O'Donnell-Wimmer.

1. *Para cada* $i \in [2^b]$, *faça* $\boldsymbol{y}_i \sim \{0_{1-2^{-b}}, 1_{2^{-b}}\}$.
2. *Seja* $\boldsymbol{Y}$ *um conjunto aleatório tirado da distribuição uniforme sobre todos os subconjuntos* não vazios *de* $[b]$.
3. *Para cada* $j \in [b]$ *faça* $\boldsymbol{x}_{i,j} = 1$ *se* $j \notin \boldsymbol{Y}$ *e* $\boldsymbol{x}_{i,j} = \boldsymbol{y}_i$ *se* $j \in \boldsymbol{Y}$.

Nós não mudamos a distribuição de pares $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ em que $\boldsymbol{y} \leftarrow \boldsymbol{x}$ pois 1) no passo 3 nós garantimos que para todo $i \in [2^b]$ é verdade que $\boldsymbol{y}_i = \bigwedge_{j=1}^{b} \boldsymbol{x}_{i,j}$ e 2) temos que $\boldsymbol{x}_{i,j}$ é 0 sse $\boldsymbol{y}_i = 0$ e $j \in \boldsymbol{Y}$, o que acontece com probabilidade

$$\Pr[\boldsymbol{x}_{i,j} = 0] = (1 - 2^{-b})\frac{1/2}{(1 - 2^{-b})} = 1/2,$$

em que nós usamos que $\Pr[j \in \boldsymbol{Y}] = \frac{1/2}{(1-2^{-b})}$ pois estamos condicionando em $\boldsymbol{Y}$ não ser o conjunto vazio. Portanto a distribuição de $\boldsymbol{x}$ é a distribuição uniforme sobre $\{0,1\}^m$. Mas agora note que se $\boldsymbol{z} \sim \{0,1\}^m \setminus \{1\}^m$ então a distribuição para valores de $(\boldsymbol{z}_{i,j} \vee \boldsymbol{y}_i)$ é idêntica a distribuição para os valores de $(\boldsymbol{x}_{i,j} \vee \boldsymbol{y}_i)$ quando geramos $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ usando o truque de O'Donnell-Wimmer. Isto se deve ao fato que sempre que $\boldsymbol{y}_i = 1$ então não precisamos do valor de $\boldsymbol{x}_{i,j}$, para todo $j \in [b]$. Por $\boldsymbol{z}$ ser independente de $\boldsymbol{y}$ nós podemos agora reescrever a igualdade 3.4 como

$$\mathsf{E}_{\boldsymbol{z}\sim\{0,1\}^m\setminus\{1\}^m}\left[\Pr\left[g'(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})\right]\right] = \Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})]. \tag{3.7}$$

E se fixarmos algum $z^* \in \{0,1\}^m \setminus \{1\}^m$, temos que a fórmula g'_{z^*} que satisfaz $g'_{z^*}(y) = g'(z^*, y)$, para todo $y \in \{0,1\}^{2^b}$, é uma fórmula FNC que podemos verificar tem largura $\mathcal{O}(m/\log m)$. Nós vamos usar a equação 3.7 para finalmente provar que fórmulas FNC com largura $\mathcal{O}(m/\log m)$ não podem aproximar $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}$.

Teorema 3.19. *Seja* $b \geq 1$ *e* $m = b2^b$ *o número de variáveis de entrada da função* $\mathit{Tribes}_{b,2^b}$. *Se* $g : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ *é uma fórmula FNC com largura* $w < \frac{3}{10}2^b = \mathcal{O}(m/\log m)$, *então devemos ter que*

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathit{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})] \geq 1/3.$$

Demonstração. Assuma por contradição que

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})] < 1/3 \tag{3.8}$$

Vamos considerar a função g' sobre as variáveis $z_{i,j}$s e y_is como acabamos de descrever. Pela equação 3.7 e pela suposição em 3.8 devemos ter que existe uma string $z^* \in \{0,1\}^m \setminus \{1\}^m$ tal que

$$\Pr[g'(z^*, \boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})] < 1/3.$$

Como já comentamos, g'_{z^*} é uma fórmula FNC com largura no máximo w. Assuma então que toda cláusula de g'_{z^*} contém um literal negado. Então temos que a atribuição y que faz $y_i = 0$ para todo $i \in [2^b]$ é tal que $g'_{z^*}(y) = 1$ enquanto que $\mathrm{Tribes}_{b,2^b}(y) = 0$. Portanto devemos ter

$$\Pr[g'_{z^*}(\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})] \geq \Pr[\boldsymbol{y} = 0^m] = (1 - 2^{-b})^{2^b}.$$

A probabilidade acima é igual a $1/e$ no limite dos grandes números, o que é maior do que $1/3$ e então contradiz a nossa suposição. Portanto deve haver uma cláusula na fórmula g'_{z^*} que só contém literais não negados. Esta cláusula em particular é falsa com probabilidade pelo menos $1 - w2^{-b}$ e portanto neste caso

$$\Pr[g'_{z^*}(\boldsymbol{y}) = 0] \geq 1 - w2^{-b}.$$

Mas temos as seguinte desigualdades.

$$\begin{aligned}
\Pr[g'_{z^*}(\boldsymbol{y}) \neq \mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y})] &\geq \Big|\Pr[g'_{z^*}(\boldsymbol{y}) = 0] - \Pr[\mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y}) = 0]\Big| \\
&\geq \Pr[g'_{z^*}(\boldsymbol{y}) = 0] - \Pr[\mathrm{Or}_{2^b}(\boldsymbol{y}) = 0] \\
&\geq 1 - w2^{-b} - 1/e.
\end{aligned}$$

Portanto, assumindo que 3.8 é verdade, devemos ter

$$w \geq 2^b(1 - 1/e - 1/3) \geq \frac{3}{10}2^b.$$

O que é uma contradição pois $w < \frac{3}{10}2^b$. Portanto temos que 3.8 não pode ser verdade e devemos ter

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})] \geq 1/3.$$

□

Note que por dualidade, o mesmo limitante inferior vale para a função $\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b.2^b}$.

Teorema 3.20. *Seja $b \geq 1$ e $m = b2^b$ o número de variáveis de entrada da função $\mathit{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}$. Se $g : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ é uma fórmula FND com largura $w < \frac{3}{10}2^b = \mathcal{O}(m/\log m)$, então devemos ter que*

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}) \neq \mathit{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x})] \geq 1/3.$$

Note que o limitante inferior em 3.20 é pra fórmulas FND, e não fórmulas FNC. Agora podemos provar o teorema 3.18.

Demonstração. (Prova do teorema 3.18)

Assuma por enquanto que g é uma fórmula FNC. Nós iremos usar que

$$\begin{aligned}\Pr_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)] &\geq \Pr_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\wedge \mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0]\\ &= \Pr_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)\wedge \mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0].\end{aligned}$$

A desigualdade é verdadeira pois é sempre verdade que $\Pr[A]\leq\Pr[A\wedge B]$, para quaisquer eventos A e B. A igualdade é verdadeira pois se $x_2\in\mathrm{Tribes}^{\dagger-1}_{b,2^b}(0)$ então $F_m(x_1,x_2)=\mathrm{Tribes}_{b,2^b}(x_1)$. Além do mais, quando $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são tiradas de $\{0_{1/2},1_{1/2}\}^m$, nós também temos que

$$\begin{aligned}\Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)\wedge \mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0] &= \Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)|\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0]\\ &\quad\times\Pr[\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0].\end{aligned}$$

Para todo $x_2^*\in\mathrm{Tribes}^{\dagger-1}_{b,2^b}(0)$ a fórmula $g_{x_2^*}(x_1)=g(x_1,x_2^*)$ é uma fórmula FNC com largura no máximo w. Então podemos aplicar o teorema 3.19 para obter

$$\begin{aligned}\Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)|\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0] &= 2^{-m}\sum_{x_2^*\in\mathrm{Tribes}^{\dagger-1}_{b,2^b}(0)}\Pr[g_{x_2^*}(\boldsymbol{x}_1)\neq\mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)]\\ &\geq 1/3.\end{aligned}$$

Agora, juntando o fato que $\Pr[\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0]=1/e$ (no limite dos grandes números) podemos concluir que

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq \mathrm{Tribes}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_1)|\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0]\times\Pr[\mathrm{Tribes}^{\dagger}_{b,2^b}(\boldsymbol{x}_2)=0]\geq\frac{1}{3}\times\frac{1}{e}\geq 1/10.$$

E portanto

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)]\geq 1/10.$$

Condicionando em $x_1\in\mathrm{Tribes}^{-1}_{b,2^b}(0)$ e usando o teorema 3.20 podemos provar o mesmo resultado para fórmulas FND.

□

Podemos também provar um limitante inferior para o tamanho da fórmula usando o seguinte resultado mais geral que transforma um limitante inferior pra largura da fórmula em um limitante inferior para o tamanho da fórmula.

Teorema 3.21. *Seja $g:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ uma fórmula de profundidade 2 e tamanho s. Então, para todo $\varepsilon>0$, existe uma fórmula $g':\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ de profundidade 2 e largura no máximo $\log(s/\varepsilon)$ tal que*

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x})\neq g'(\boldsymbol{x})]<\varepsilon$$

Demonstração. Vamos assumir que g é uma fórmula FNC (o caso em que g é uma fórmula FND é simétrico). Seja g' a fórmula g com todas as cláusulas de largura pelo menos $\log(s/\varepsilon)$ removidas. Uma string $x\in\{0,1\}^m$

faz $g(x)$ ser diferente de $g'(x)$ se e somente se $g(x) = 0$ e todas as cláusulas que não são satisfeitas por x têm largura pelo menos $\log(s/\varepsilon)$, o que significa que estas cláusulas não aparecem em g' e portanto $g'(x) = 1$. Logo, a probabilidade que g e g' são diferentes é menor do que a probabilidade que pelo menos uma das cláusulas removidas de g não é satisfeita. Seja C uma dessas cláusula e temos que C tem largura pelo menos $\log(s/\varepsilon)$. A probabilidade que uma string $\boldsymbol{x} \sim \{0,1\}^m$ não satisfaz C é menor do que $2^{-\log(s/\varepsilon)} = \varepsilon/s$. Como há no máximo s cláusulas de largura pelo menos $\log(s/\varepsilon)$, pelo princípio da inclusão-exclusão temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}) \neq g'(\boldsymbol{x})] < s\frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon$$

□

Agora podemos usar os teoremas 3.18 e 3.21 para provar o seguinte.

Teorema 3.22 (O'Donnell, Wimmer [OW07])**.** *Seja $b \geq 1$ e $m = b2^b$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, qualquer fórmula $g : \{0,1\}^m \times \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ de profundidade 2 e tamanho $s < \varepsilon 2^{\frac{1}{3}2^b}$ satisfaz*

$$\Pr_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\sim\{0,1\}^m}[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)] \geq 1/10 - \varepsilon.$$

Note que se $\varepsilon = \mathcal{O}(1)$ então $\varepsilon 2^{\frac{1}{3}2^b} = 2^{\mathcal{O}(m/\log m)}$.

Demonstração. Pelo teorema 3.21, existe uma fórmula $g' : \{0,1\}^m \times \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ de profundidade 2 e com largura no máximo $\log(s/\varepsilon)$ tal que

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}_1.\boldsymbol{x}_2) \neq g'(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)] < \varepsilon.$$

Como $\log(s/\varepsilon) < \frac{1}{3}2^b$, pelo teorema 3.18 nós devemos ter

$$\Pr[g'(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)] \geq 1/10.$$

E portanto,

$$\Pr[g(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \neq F_m(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)] \geq 1/10 - \varepsilon.$$

□

Na seção 4.2 nós iremos revisitar o truque de O'Donnel-Wimmer para generalizar os resultados que acabamos de ver para circuitos de profundidade constante maior do que 2.

Capítulo 4

Restrições e projeções aleatórias

Nós já vimos no capítulo anterior que a busca por separações de algumas classes de complexidade no mundo relativizado motivou a pesquisa em complexidade de circuitos. Em especial, nós vimos como alguns limitantes inferiores para classes de circuito que somente admitem circuitos de profundidade constante implicariam na separação de algumas classes de complexidade relativas a algum oráculo. Agora iremos ver como provar estes limitante inferiores, concluindo então as provas dos teoremas do capítulo 3.

Na seção 4.1 iremos ver as provas de Håstad e Razborov que as funções paridades que definimos em 3.7 não têm circuitos de profundidade constante e tamanho subexponencial. Este resultado pode também ser expresso como Parity $\notin \mathsf{AC}^0$.

Também, como foi visto em 3.4, nos interessa provar que existe uma hierarquia de circuitos de profundidade constante. Ou seja, que circuitos de profundidade d são estritamente mais fortes do que circuitos de profundidade $d-1$ para todo $d \geq 2$. Se denotarmos por AC^0_d a classe AC^0 restrita a circuitos de profundidade d então a existência de uma hierarquia de profundidade implicaria em $AC^0_d \nsubseteq AC^0_{d-1}$, para todo $d \geq 2$. Este resultado foi provado pela primeira vez Yao [Yao85] e por Håstad em [Hås87]. Na seção 4.2 nós iremos ver a prova de Rossman, Servedio e Tan [RST15a] que também nos dá uma hierarquia de profundidade constante até mesmo quando apenas exigimos que circuitos de profundidade $d-1$ sejam capazes de aproximar circuitos de profundidade d.

Um componente chave das estratégias adotada nas duas seções deste capítulo envolve aleatoriamente restringir algumas variáveis de entrada do circuito com o objetivo de obter um circuito mais simples do que o original. Esta técnica é atribuida à Subbotovskaya que a introduziu em [Sub61]. Nós iremos ver que para provar que circuitos simplificam ao aplicarmos uma restrição aleatória sobre suas variáveis de entrada nós precisamos de um lema da troca que prova o "caso base" que fórmulas FNCs e FNDs com alta probabilidade simplificam ao serem atingidas por restrições aleatórias. Em [Bea94], Beame discute algumas aplicações de lemas da troca.

4.1 Restrições aleatórias e a prova de Håstad dos teoremas 3.8 e 3.9

De maneira geral, uma restrição a um conjunto de variáveis $X = \{x_i\}_{i\in[n]}$ é um mapeamento $\rho : X \to \{*, 0, 1\}^n$. Se $\rho(x_i) = *$ dizemos que x_i é uma variável livre. Se f é uma função sobre as variáveis X e aplicamos uma restrição ρ sobre X, obtemos uma nova função $f_{|\rho}$ sobre as variáveis em $\rho^{-1}(*)$. Se $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, então temos que

$$f_{|\rho}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(val_\rho(x_1), val_\rho(x_2), \ldots, val_\rho(x_n)),$$

em que $val_\rho(x_i)$ é 0 ou 1 se $\rho(x_i)$ é 0 ou 1, respectivamente, e $val_\rho(x_i) = x_i$ caso contrário.

Como já discutimos, ao tentar provar limitantes inferiores restrições são interessantes pois elas simplificam circuitos. Em particular, se considerarmos um circuito C de profundidade constante temos que $C_{|\rho}$ pode acabar sendo uma constante, ou uma função representável por uma árvore de decisão de profundidade pequena. Para que possarmos ser mais concretos, nós iremos agora dar uma definição formal para restrições aleatórias.

Definição 4.1. *(Restrições aleatórias)*

Seja $p \in (0, 1]$, uma restrição aleátoria $\boldsymbol{\rho}$ sobre as variáveis $\{x_i\}_{i\in[n]}$ é tirada da seguinte distribuição R_p. Para cada $i \in [n]$,

$$\boldsymbol{\rho}(x_i) = \begin{cases} * & \text{com probabilidade } p \\ 0 & \text{com probabilidade } (1-p)/2 \\ 1 & \text{com probabilidade } (1-p)/2. \end{cases}$$

Quando $\boldsymbol{\rho}$ for tirada de R_p escreveremos $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$. Se $\boldsymbol{\rho}^{-1}(*) = \emptyset$ nós dizemos que $\boldsymbol{\rho}$ é uma atribuição.

A idéia é que quando aplicamos uma restrição $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$, para algum valor $p \in (0, 1]$ bem próximo de 0, sobre as variáveis de entrada de um circuito C, com alta probabilidade este circuito irá degenerá-se em uma função extremamente simples (por exemplo, uma árvore de decisão de baixa profundidade). Daí, se houver uma função f que provadamente não simplifica sobre uma restrição $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$ (i.e., mantém algum tipo de estrutura) poderemos concluir que o circuito C não pode computar a função f.

Como exemplo de funções que não simplificam ao ter uma restrição tirada de R_p aplicada às suas variáveis de entrada, nós podemos tomar as funções Parity_n. Nós veremos que ao aplicarmos uma restrição $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$ sobre as n variáveis de entrada de Parity_n obteremos uma função sobre n' variáveis, em que $\mathsf{E}[n'] = pn$, que é somente a função $\text{Parity}_{n'}$ ou a função $1 - \text{Parity}_{n'}$. Em particular, n' irá crescer em expectativa quando n também cresce. Assim, podemos provar que com probabilidade muito alta as funções Parity_n não são representáveis por árvores de decisão de profundidade constante quando n é suficientemente grande, pois também é verdade que as funções paridades são evasivas[1].

O lema da troca de Håstad

Nós queremos provar o teorema 3.8. Para isso, nós provaremos que se fizermos p pequeno o suficiente, então para algum circuito C de profundidade constante uma restrição $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$ fará o circuito $C_{|\boldsymbol{\rho}}$ computar uma função representável por uma árvore de decisão de profundidade constante. Note que isso é o suficiente para provar que C não pode computar Parity_n porque quando restringimos as variáveis de entrada de Parity_n de forma que um número não tão pequeno de variáveis permaneçam livre, nós simplesmente obtemos uma nova função paridade ou a sua negação que por sua vez não pode ser computada por árvores de decisão com profundidade pequena.

Então, para provar o teorema 3.8 precisamos antes provar que circuitos simplificam após uma restrição, e para isso usamos o lema da troca de Håstad.

Lema 4.2. *(Lema da troca de Håstad)*

Seja F uma fórmula FNC (ou FND) com largura w, $s \geq 1$, $p \in (0, 1]$ e $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$, então

[1] Como já foi dito na seção 3.1 uma função Booleana sobre n variáveis é dita ser evasiva se ela não pode ser representável por uma árvore de decisão com profundidade menor do que n

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s] \leq (5pw)^s$$

Nós vamos ver 2 provas diferente do lema 4.2. A primeira é a prova original do próprio Håstad [Hås87]. A segunda prova é de Razborov e aparece em [Bea94].

Na primeira prova nós iremos considerar $F = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$, em que cada C_i é a disjunção de no máximo w variáveis, e iremos argumentar por indução em m, o número de cláusulas na prova. Na verdade, nós iremos provar o lema 4.6 que é uma versão mais forte do lema de Håstad. Antes precisamos das seguinte definições.

Definição 4.3 (Extensão de uma restrição)**.** *Seja $\rho \in \{*, 0, 1\}^n$ uma restrição às variáveis $\{x_i\}_{i\in[n]}$. Uma restrição ρ' é dita ser uma extensão de ρ se $\rho'^{-1}(*) \subseteq \rho^{-1}(*)$.*

Ou seja, ρ' é uma extensão de ρ se todas as variáveis que foram fixadas como uma constante em ρ também são fixadas como uma constante em ρ', e adicionalmente ρ' pode ter fixado algumas variáveis a mais como constantes.

Sendo assim podemos até mesmo definir uma ordem parcial sobre as restrições em $\{*, 0, 1\}^n$ em que $\rho \leq \rho'$ se e somente ρ' é uma extensão de ρ. Neste caso temos que atribuições são os elementos maximais deste ordenamento.

Definição 4.4 (Conjuntos inferiores)**.** *Seja Δ um conjunto de restrições em $\{*, 0, 1\}^n$. Nós dizemos que Δ é um conjunto inferior* [2] *se para toda restrição $\rho \in \Delta$ e toda extensão ρ' de ρ é verdade que $\rho' \in \Delta$.*

Em outras palavras, se Δ for um conjunto inferior e $\rho \in \Delta$ então restringir ainda mais variáves de ρ resultará numa restrição que ainda está em Δ.

Uma cadeia é um conjunto de restrições tal que o ordenamento induzido pelos elementos deste conjunto é um ordenamento total. Nós precisamos ainda da seguinte definição.

Definição 4.5 (Subconjunto inferior maximal)**.** *Seja S um conjunto qualquer de restrições em $\{*, 0, 1\}^n$. O subconjunto inferior maximal de S, que iremos denotar por S^0 é a união de todos subconjuntos de S que são cadeias e contêm um elemento maximal – equivalentemente, contêm uma atribuição.*

Nós podemos notar que

- S^0 é o maior conjunto inferior contido em S.
- S^0 pode ser obtido removendo todas restrições ρ em S tais que existe uma extensão ρ' de ρ e $\rho' \notin S$.

Agora podemos enunciar a versão mais forte do lema de Håstad que iremos provar.

Lema 4.6. *Seja F uma fórmula FNC (ou FND) com largura w, $s \geq 1$, $p \in (0, 1]$ e $\boldsymbol{\rho} \leftarrow R_p$, então*

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta] \leq (5pw)^s,$$

onde Δ é um conjunto inferior arbitrário.

O lema 4.6 é uma versão mais forte do lema de Håstad pois o conjunto de todas restrições em $\{*, 0, 1\}^n$ é um conjunto inferior. Porém, iremos precisar da condicionate para que o argumento por indução funcione.

[2] *Lower set* ou *downward closed set* do Inglês.

Demonstração. (Primeira prova do lema de Håstad [Hås14])

Como já foi dito iremos considerar $F = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$, onde cada cláusula C_i tem largura no máximo w. Nós iremos argumentar por indução em m, o número de cláusulas em F. Nós iremos assumir ao longo da prova que $5pw < 1$, pois caso contrário o lema é trivial.

Se $m = 0$ então $F = 1$ e não precisamos mais fazer nada. Suponha agora que $m > 0$, nós então temos que

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta] \leq \max(\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} = 1], \Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} \neq 1]),$$

em que Δ é um conjunto inferior qualquer. Desta forma nos basta mostrar que o lema é verdadeiro em ambos os casos ($C_{1|\rho} = 1$ e $C_{1|\rho} \neq 1$). Vamos primeiro considerar o caso em que $C_{1|\rho} = 1$. Se $C_{1|\rho} = 1$ então $F_{|\rho} = \bigwedge_{i=2}^{m} C_{i|\rho}$, e iremos chamar F sem a sua primeira cláusula de F' (daí temos que $F_{|\rho} = F'_{|\rho}$ quando $C_{1|\rho} = 1$). Temos que

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} = 1] = \Pr[D(F'_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} = 1].$$

Como F' é uma fórmula FNC com $m - 1$ cláusulas podemos usar a hipótese da indução dado que a condicionante nas probabilidades acima induz um conjunto inferior. Mas isto segue do seguinte fato:

Fato 4.7. *Se Δ_1 e Δ_2 são conjuntos inferiores então $\Delta_1 \cap \Delta_2$ é um conjunto inferior de restrições.*

E como o conjunto de todas as restrições que satisfazem a primeira cláusula é um conjunto inferior, segue pela hipótese da indução que

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} = 1] \leq (5pw)^s.$$

Agora iremos considerar o caso em que $C_{1|\rho} \neq 1$. Primeiro observamos que se $C_{1|\rho} = 0$ então $F_{|\rho} = 0$ e o resultado é trivial pois a função 0 tem uma árvore de decisão de profundidade 0. Iremos assumir então que $C_{1|\rho} \neq 0$. Agora não temos mais que $C_{1|\rho} \neq 1$ representa um conjunto inferior, portanto teremos que fazer algum esforço antes de poder usar a hipótese da indução.

Seja T o conjunto das variáveis que aparecem em C_1. Também, seja ρ uma restrição tal que $C_{1|\rho} \neq 1$ e $D(F_{|\rho}) \geq s$. Como estamos assumindo que $C_{1|\rho} \neq 0$ temos que deve haver um subconjunto Y de T tal que $\rho(x_i) = *$, para todo $x_i \in Y$, e $\rho(x_j) \in \{0, 1\}$ para todo $x_j \in T \setminus Y$. Iremos chamar este evento de $\rho(Y) = *$. Para cada atribuição π às variáveis em Y nós definimos o conjunto X_π da seguinte forma.

$$X_\pi = \{\rho' | \rho' = \rho\pi \text{ para alguma restrição } \rho \text{ e } C_{1|\rho} \neq 1\}.$$

O conjunto que realmente nos interessa é o subconjunto inferior maximal de X_π que denotamos por X_π^0. Nós podemos notar que $\rho' \in X_\pi^0$ se e somente se $\rho' = \rho\pi$ e ρ é tal que $\rho(Y) = *$. Temos a seguinte identidade.

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1] = \sum_{Y \subseteq T, Y \neq \emptyset} \Pr[\boldsymbol{\rho}(Y) = * | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}}] \times \Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1 \wedge \boldsymbol{\rho}(Y) = *]. \tag{4.1}$$

Então vamos limitar o valor de ambos os fatores que aparecem em cada termo no somatório do lado direito de 4.1. Primeiro argumentamos que

$$\Pr[\rho(Y) = * | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} \neq 1] \leq \left(\frac{2p}{1+p}\right)^{|Y|}. \tag{4.2}$$

Dizer que $C_{1|\rho} \neq 1$ é o mesmo que dizer que $\rho(x_i) \in \{b, *\}$, para cada variável $x_i \in T$ em que b é 0 se x_i aparece não-negada em C_1 e $b = 1$ caso contrário. Então dado que $\rho(x_i) \neq b$ temos que $\rho(x_i)$ é * com probabilidade $\frac{p}{1-\frac{1-p}{2}} = \frac{2p}{1+p}$, e como ρ atribui valores às variáveis de forma independente obtemos 4.2.

Para estimar o segundo fator nós precisamos do seguinte fato.

Fato 4.8. *Se ρ é tal que $D(F_{|\rho}) \geq s$ e $\rho(Y) = *$, então existe uma atribuição π às variáveis em Y tal que $C_{1|\pi} = 1$ e $D(F_{|\rho\pi}) \geq s - |Y|$.*

Isso é verdade pois se para todas tais atribuições π fosse verdade que $D(F_{|\rho\pi}) < s - |Y|$, então poderiamos construir uma árvore de decisão para $F_{|\rho}$ que primeiro faz consultas à todas as variáveis de Y e depois usa a árvore de decisão de profundidade menor do que $s - |Y|$ para $F_{|\rho\pi}$, em que π é a atribuição consistente com as respostas das consultas da árvore de decisão. Esta árvore de decisão teria profundidade menor do que $(s - |Y|) + |Y| = s$, o que é uma contradição. Além disso, a única atribuição π_{falsa} às variáveis de Y que torna a cláusula C_1 falsa ao ser composta com ρ satisfaz $F_{|\rho\pi_{\text{falsa}}} = 0$ e portanto ela não pode ser a atribuição que contradiz a asserção $D(F_{|\rho\pi}) < s - |Y|$ para todas atribuições π.

Então, pelo princípio da inclusão-exclusão, nós temos a seguinte desigualdade.

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1 \wedge \boldsymbol{\rho}(Y) = *] \leq \sum_{\pi} \Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}\pi}) \geq s - |Y| | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1 \wedge \boldsymbol{\rho}(Y) = *], \quad (4.3)$$

em que a soma no lado direito é somente sobre as atribuições π às variáveis em Y que tornam $C_{1|\rho}$ verdadeira. Mas agora temos que $C_{1|\rho} \neq 1$ e $\rho(Y) = *$ se e somente se $\rho\pi \in X^0_\pi$. Nos podemos então expressar a desigualdade 4.3 da seguinte forma.

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1 \wedge \boldsymbol{\rho}(Y) = *] \leq \sum_{\pi} \Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}\pi}) \geq s - |Y| | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge \boldsymbol{\rho}\pi \in X^0_\pi]. \quad (4.4)$$

Pelo subconjunto inferior maximal de um conjunto ser certamente um conjunto inferior e o fato 4.7, temos que agora há um conjunto inferior expresso na condicionante [3]. Além disso, como $F_{|\rho\pi}$ não depende da primeira cláusula de F, nós por fim podemos usar a hipótese indutiva para deduzir que para todo π que estamos levando em consideração é verdade que

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}\pi}) \geq s - |Y| | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge \boldsymbol{\rho}\pi \in X^0_\pi] \leq (5pw)^{s-|Y|}. \quad (4.5)$$

Lembrando que por estarmos assumindo que $5pw < 1$ nós podemos até mesmo assumir que $|Y| < s$ sem perda de generalidade. Usando que há $2^{|Y|} - 1$ atribuições às variáveis de Y que tornam C_1 verdadeira, nós podemos reescrever a desigualdade 4.4 como

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} \neq 1 \wedge \rho(Y) = *] \leq (2^{|Y|} - 1)(5pw)^{s-|Y|}. \quad (4.6)$$

Juntando 4.1, 4.2 e 4.6 temos que

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} \neq 1] \leq \sum_{Y \subseteq T, Y \neq \emptyset} \left(\frac{2p}{1+p}\right)^{|Y|} (2^{|Y|} - 1)(5pw)^{s-|Y|}.$$

[3] Bem, na verdade temos que condicionar em $\boldsymbol{\rho}$ pertencer a um conjunto inferior. Mas o conjunto de restrições ρ tais que $\rho\pi \in X^0_\pi$ ainda é um conjunto inferior.

Rearranjando os termos do somatório pela cardinalidade do conjunto Y nós temos que

$$\begin{aligned}\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1] &\leq \sum_{k=0}^{|T|} \binom{|T|}{k} \Big(\frac{2p}{1+p}\Big)^k (2^k - 1)(5pw)^{s-k} \\ &= (5pw)^s \sum_{k=0}^{|T|} \binom{|T|}{k} \Big(\frac{2}{5w(1+p)}\Big)^k (2^k - 1) \\ &= (5pw)^s \bigg(\Big(1 + \frac{4}{5w(1+p)}\Big)^{|T|} - \Big(1 + \frac{2}{5w(1+p)}\Big)^{|T|} \bigg).\end{aligned}$$

Usando que $(1+2x) \leq (1+x)^2$ e $(1+x) \leq e^x$ nós obtemos que

$$\Pr[D(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s | \boldsymbol{\rho} \in \Delta \wedge C_{1|\boldsymbol{\rho}} \neq 1] \leq (5pw)^s \big(e^{4p|T|/5w(1+p)} - e^{2p|T|/5w(1+p)} \big).$$

Usando que $|T| \leq w$ e notando que $e^{4/5} - e^{2/5} < 1$ nós podemos finalmente concluir que

$$\Pr[D(F_{|\rho}) \geq s | \rho \in \Delta \wedge C_{1|\rho} \neq 1] \leq (5pw)^s.$$

Então provamos que em ambos os casos em que ρ faz a primeira cláusula de F ser 1 ou não ser 1 a probabilidade que $D(F_{|\rho}) \geq s$ é no máximo $(5pw)^s$, concluindo então esta prova do lema de Håstad.

□

Prova do Lema da troca de Håstad usando o método de Razborov

Agora iremos ver a segunda prova do Lema da troca de Håstad. Primeiro nós vamos definir o que é a árvore de decisão canônica de uma fórmula FNC F.

Definição 4.9. *(Árvore de decisão canônica de F)*

Seja F uma fórmula FNC, a árvore de decisão canônica T de F é definida recursivamente da seguinte forma:

1. *Se $F = 0$ ou $F = 1$ então T é simplesmente a árvore de decisão trivial que não faz nenhuma consulta e tem uma única folha com o valor apropriado.*
2. *Seja C_1 a primeira cláusula não vazia de F e K o conjunto das variáveis que aparecem em C_1. Então T faz consultas às variáveis em K em alguma ordem arbitrária, formando em cada caminho uma folha associada à uma restrição π que seta os valores de K de forma consistente com o caminho da raiz de T até esta folha. Por fim trocamos cada folha com a árvore de decisão canônica de $F_{|\pi}$, em que π é a restrição associada à folha.*

Definição 4.10. *A complexidade de consulta canônica de F que denotaremos por $D_{can}(F)$ é a profundidade da árvore de decisão canônica de F.*

A idéia agora é codificar restrições "más", significando restrições $\rho \in \{*, 0, 1\}^n$ tais que $D_{\text{can}}(F_{|\rho}) \geq s$, de forma que o mapeamento de restrições más para códigos seja injetivo. Depois disso mostramos que o número de possíveis códigos é pequeno dando então um limitante superior para o número de restrições más.

Lema 4.11. *Seja F uma fórmula FNC (ou FND) com largura w, $s \geq 1$, $0 < p \leq 1/5$ e $\rho \leftarrow R_p$, então*

$$\Pr[D_{can}(F_{|\boldsymbol{\rho}}) \geq s] \leq (5pw)^s.$$

Note que adicionamos a restrição $p \leq 1/5$, o que todavia não tem nenhum impacto em qualquer aplicação do Lema da troca de Håstad que aparece neste trabalho. Porém, como veremos, não podemos remover tal restrição sem aumentar a constante que aparece no lado direito da desigualdade no enunciado do lema.

Demonstração. (Segunda prova do lema de Håstad [Bea94])

Vamos considerar $F = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ onde cada cláusula C_i tem largura no máximo w. Como já foi dito, o objetivo é codificar todas as restrições $\rho \in \{*, 0, 1\}^n$ que sejam más. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as restrições $\rho \in \{*, 0, 1\}^n$ tais que $D_{\text{can}}(F_{|\rho}) \geq s$. O nosso mapeamento é

$$\begin{aligned} \text{Code} : \mathcal{B} &\to \{*, 0, 1\}^n \times [w]^s \times \{0, 1\}^s \\ \text{Code}(\rho) &\mapsto (\rho', \beta, \delta). \end{aligned}$$

Em que ρ' é uma extensão de ρ e β e δ são informações adicionais que serão importante no processo de recuperar ρ a partir do seu código. Note que como $p \leq 1/5 < 1/2$ temos que qualquer extensão de uma restrição ρ terá um peso maior do que ρ no espaço de restrições R_p. Nós queremos que o mapeamento seja injetivo para que possamos usar o fato que ρ' tem um peso maior do que ρ para provar um limitante superior para a probabilidade $\Pr[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}]$.

Nós iremos dividir o restante da prova em três partes. Na primeira parte iremos descrever o processo de construir a partir de $\rho \in \mathcal{B}$ um código da forma (ρ', β, δ). Na segunda parte nós descrevemos em detalhe como recuperar ρ a partir de seu código, provando então que o mapeamento é injetivo. E finalmente na terceira parte nós estimamos a probabilidade que uma restrição $\rho \leftarrow R_p$ está no conjunto $\mathcal{B}$.

1. Construindo o código a partir de ρ.

   Seja $\rho \in \mathcal{B}$. Seja π um caminho qualquer da raíz até uma folha da árvore de decisão canônica T de $F_{|\rho}$ que tenha tamanho $\geq s$, truncando π de tal forma que $|\pi| = s$. Nós iremos ver π como uma atribuição às variávels que foram consultadas por T no caminho π. Nós construimos o código em estágio. Pra começar descrevemos o primeiro passo. Seja C_{α_1} a primeira cláusula da fórmula $F_{|\rho}$ que não seja igual a 1 (tal cláusula deve existir porque $F_{|\rho} \neq 1$) e chame de K_1 o conjunto de variáveis que aparecem em $C_{\alpha_1|\rho}$. Seja π_1 a parte de π que contém variáveis em K_1. Seja σ_1 a única atribuição às variáveis em K_1 que não satisfaz a cláusula $C_{\alpha_1|\rho}$. Consideramos então o vetor $\beta_1 \in [w]^{|K_1|}$ tal que a j-ésima coordenada de β_1 indica a posição da j-ésima variável em K_1 na clásula C_1 (nós podemos assumir alguma enumeração arbitrária das variáveis em cada cláusula de F).

   Para $i > 1$ nós fazemos C_{α_i} ser a primeira cláusula na fórmula $F_{|\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}}$ que não é igual a 1 e definimos σ_i, β_i e π_i de forma análoga a como fizemos no primeiro passo. Nós chegamos no último estágio quando $\pi_i = \pi \setminus \pi_1 \ldots \pi_{i-1}$. Vamos assumir que k estágios foram realizados, para algum $k \geq 1$ e notamos que a restrição π_k pode não setar valores à todas variáveis na cláusula $C_{\alpha_k|\rho\pi_1\ldots\pi_{k-1}}$ – em outras palavras, é possível que σ_k não tenha atribuido valores à todas as variáveis ainda vivas em $C_{\alpha_k|\rho\pi_1\ldots\pi_{k-1}}$ – pois truncamos o caminho π da árvore de decisão canônica de forma que ela contenha exatamente s variáveis. Porém, como veremos, necessitamos apenas que esta cláusula não seja satisfeita pela atribuição σ_k.

   Seja $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ e $\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$. Por fim definimos a string $\delta \in \{0, 1\}^s$ em que a i-ésima coordenada de d é 1 se e somente se a i-ésima variável setada pela restrição σ (seguindo algum ordenamento das cláusulas de F e das variáveis dentro dessas cláusulas) tem um valor atribuido diferente nas restrições σ e π.

A extensão de ρ que aparece no seu código é $\rho' = \rho\sigma = \rho\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$. Nós então fazemos $\text{Code}(\rho) = (\rho', \beta, \delta)$.

2. Decodificando $\text{Code}(\rho)$.

   Dado $\text{Code}(\rho) = (\rho\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k, \beta, \delta)$ nós recuperamos ρ em estágios. Nós assumimos que no i-ésimo estágio nós já recuperamos as restrições $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{i-1}$. Lembrando o i-ésimo estágio do processo de construção de $\text{Code}(\rho)$ nós tinhamos que C_{α_i} era a primeira cláusula que não era igual a 1 na fórmula $F_{|\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}}$, e o mesmo vale para a fórmula $F_{|\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}\sigma_i\ldots\sigma_k}$ pois cada σ_j, para $j > i$, só atribui valores a variáveis que não aparecem em $C_{\alpha_i|\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}}$ e também σ_i foi definida de forma que $C_{\alpha_i|\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}\sigma_i}$ não é igual a 1. Isso significa que a partir de $\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{i-1}\sigma_i\ldots\sigma_k$ podemos encontrar C_{α_i}. Agora podemos recuperar π_i a partir de C_{α_i}, β_i e a string δ. Agora, dado que sabemos cada π_i podemos dizer qual parte da restrição $\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_k$ é ρ: ρ só atribui valores à variáveis que não aparece em nenhum dos π_i.

3. Estimando $\Pr[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}]$.

   Seja $\rho \in \mathcal{B}$ e a o número de variáveis feitas constante por ρ. Então temos o seguinte:

$$\frac{\Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho]}{\Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho']} = \frac{p^{n-a}(1-p)^a}{p^{n-a-s}(1-p)^{a+s}} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^s,$$

   em que n é o número total de variáveis na fórmula e ρ' é a extensão de ρ que aparece em seu código. Portanto,

$$\Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho] = \left(\frac{p}{1-p}\right)^s \Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho'].$$

   Como estamos assumindo que $p \leq 1/5$:

$$\Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho] \leq \left(\frac{5p}{4}\right)^s \Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho'].$$

   Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as possíveis extensões ρ' das restrições $\rho \in \mathcal{B}$. Usando o fato que Code é um mapeamento injetivo e que β pode ser representado por uma string em $\{0,1\}^{s(\log w+1)}$ enquanto que δ é representável por uma string em $\{0,1\}^s$:

$$\begin{aligned}
\Pr[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}] &= \sum_{\rho\in\mathcal{B}} \Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho] \\
&\leq 2^{s(\log w+1)} 2^s \left(\frac{5p}{4}\right)^s \sum_{\rho'\in\mathcal{C}} \Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho'] \\
&\leq (5pw)^s,
\end{aligned}$$

   onde na última desigualdade nós usamos que a soma de probabilidades é no máximo 1.

□

Prova dos teoremas 3.8 e 3.9

Agora nós podemos ver como uma restrição aleatória simplifica um circuito C de profundidade d. Suponha que as portas no primeiro nível de C sejam portas $\wedge$, e portanto temos portas $\vee$ no segundo nível e portas $\wedge$ no terceiro nível. As portas $\vee$ no segundo nível computam uma fórmula FND e portanto se aplicarmos uma restrição às variáveis de entrada destas fórmulas FND, temos pelo lema da troca de Håstad que com alta probabilidade podemos trocar elas por árvores de decisão, que então podem ser convertidas em fórmulas FNC. Usando o princípio da inclusão-exclusão com alta probabilidade poderemos trocar todas as portas $\vee$ no segundo nível por fórmulas FNC e então teremos somente portas $\wedge$ no segundo nível alimentando portas $\wedge$ no terceiro nível. Então podemos absorver as portas $\wedge$ no segundo nível diminuindo a profundidade do circuito em 1.

Nós iremos usar este argumento para provar 3.8.

Teorema 4.12. *Seja $d > 0$ um inteiro. Para n suficientemente grande temos que qualquer circuito de profundidade d com fan-in* $\mathsf{polylog}(n)$ *no seu primeiro nível e tamanho $< 2^{10n^{\frac{1}{d-1}}}$ não pode computar a função paridade de n variáveis corretamente em todas as entradas.*

A idéia da prova que exibimos abaixo é a mesma que aparece em [O'D14] (lema 4.28).

Demonstração. (Prova do teorema 3.8)

Seja C um circuito de profundidade d e tamanho $2^{10n^{\frac{1}{d-1}}}$. Nós mostraremos que C e Parity_n com alta probabilidade colapsam para funções diferentes quando nós aplicamos uma restrição $\rho \leftarrow R_p$ onde

$$p = \frac{1}{10w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2}.$$

Especificamente, nós iremos mostrar que:

1. Com probabilidade maior do que 99%, $C_{|\rho}$ tem uma árvore de decisão de profundidade no máximo 10.
2. Com probabilidade maior do que 99%, $\text{Parity}_{n|\rho}$ é a função paridade ou a negação da função paridade de mais do que 10 variáveis.

Provar (1) e (2) é suficiente para provar o teorema porque a função paridade e a sua negação são funções evasivas, e portanto depender de mais do que 10 variáveis implica em não ter uma árvore de decisão de profundidade no máximo 10. Então temos que com probabilidade maior do que $1 - 2 \times 0,01 = 0,98$, $C_{|\rho} \neq \text{Parity}_{n|\rho}$ o que implica em C não poder ser um circuito para a função Parity_n.

Provando (1):

Nós usamos o fato que aplicar uma restrição $\rho \leftarrow R_p$ à uma função é o mesmo que aplicar uma sequência de restrições $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{d-1}$, onde $\rho_i \leftarrow R_{p_i}$ e cada p_i é $\frac{1}{10w}$ quando i = 1 ou $p_i = \frac{1}{10\log(120S)}$ para $2 \leq i \leq d-1$. Em cada aplicação das restrições ρ_i nós usamos o Lema de Håstad para mostrar que com alta probabilidade o circuito $C_{|\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}}$ tem sua profundidade diminuida. Por fim teremos que, com alta probabilidade, $C_{|\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-2}}$ é um circuito de profundidade 2 e pelo Lema de Håstad com probabilidade pelo menos $1 - \frac{1}{2^{10}}$ colapsa para um árvode de decisão de profundidade 10 quando aplicamos $\rho \leftarrow R_{p_2}$ às variáveis que sobreviveram todas as restrições anteriores.

Primeiro nós temos que ao aplicar $\rho \leftarrow R_{p_1}$ às variáves de entrada de C, cada porta $\vee$ no segundo nível de C podem ser substituida por uma árvore de decisão de profundidade $\log(120S)$ com probabilidade pelo menos $2^{-\log(120S)} = 1/120S$ (isto é apenas uma aplicação do Lema de Håstad). Portanto, com probabilidade pelo

menos $1 - S_2/120S$, onde em geral nós denotaremos por S_i o número de portas lógicas no i-ésimo nível de C, todas as portas $\vee$ no segundo nível de C podem ser substituidas por árvores de decisão de profundidade $\log(120S)$. Agora podemos usar o fato que uma árvore de decisão de profundidade $\log(120S)$ pode ser representável por uma fórmula FNC de largura $\log(120S)$ para colapsar o segundo e terceiro nível de C obtendo então um circuito de profundidade $d-1$ e fan-in $\log(120S)$ no seu nível mais baixo.

Nós agora repetimos o mesmo processo $d-2$ vezes usando restrições $\rho_i \leftarrow R_{p_2}$, em cada passo reduzindo a profundidade do circuito $C_{|\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}}$ em um com probabilidade pelo menos $1 - S_i/120S$. No último passo, assumindo que $C_{|\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-2}}$ tenha com sucesso reduzido a um circuito de profundidade 2, ao aplicarmos $\rho_{d-2} \leftarrow R_{p_2}$ temos que com probabilidade pelo menos $1 - 2^{-10}$ obtemos uma árvore de decisão de profundidade no máximo 10. A probabilidade que todas as restrições ρ_i tenha sucedidas em reduzir a profundidade de C é pelo menos

$$1 - S_2/120S - S_3/120S - \cdots - S_{d-2}/120S - 2^{-10} \geq 1 - 1/120 - 2^{-10} \geq 0,99.$$

Provando (2):

Nós iremos notar que $D(\text{Parity}_{n|\rho}) > 10$ sempre que o número de variáveis que continuam livres na restrição $\rho \leftarrow R_p$ for maior do que 10. Pela desigualdade de Chernoff nós temos que

$$\Pr\left[|\rho^{-1}(*)| \leq 10\right] \leq \exp\left(- \frac{n}{10w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2}\frac{\delta^2}{2}\right),$$

onde $\delta = 1 - \frac{100w}{n}(10\log(120S))^{d-2}$. Nós queremos mostrar que a probabilidade acima é no máximo uma constante então é suficiente mostrar que o valor no expoente é $-\omega(1)$. Como $(1 - \frac{100w}{n}(10\log(120S))^{d-2})^2 \geq 1 - \frac{200w}{n}(10\log(120S))^{d-2}$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{n}{10w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2}\frac{\delta^2}{2} &\geq \frac{n}{10w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2}\left(1/2 - \frac{100w}{n}(10\log(120S))^{d-2}\right)\\ &= \frac{n}{20w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2} - 10.\end{aligned}$$

Lembrando que $S = 2^{10n^{\frac{1}{d-1}}}$ e $w = \mathsf{polylog}(n)$ temos que

$$\frac{n}{20w}\left(\frac{1}{10\log(120S)}\right)^{d-2} - 10 = \Omega\left(\frac{n^{1-\frac{d-2}{d-1}}}{\mathsf{polylog}(n)}\right)$$

o que é $\omega(1)$ e portanto para n suficientemente grande temos que $\Pr\left[|\rho^{-1}(*)| \leq 10\right] \leq 0,01$, e portanto:

$$\Pr\left[|\rho^{-1}(*)| > 10\right] \geq 0,99,$$

quando n é suficientemente grande.

□

Lembrando no capítulo anterior quando mostramos que $\mathsf{PH}^A \neq \mathsf{PSPACE}^A$ com probabilidade 1 para um oráculo aleatório (ver 3.10) nós precisamos do teorema 3.9 que diz que a função paridade não pode nem mesmo ser aproximada por circuitos de profundidade constante e tamanho $2^{o(n^{\frac{1}{d-1}})}$ (ou seja, circuitos menores do que

os que consideramos no teorema 3.8). Nós na verdade podemos provar o teorema 3.9 a partir da prova do teorema 3.8 acima, obervando o seguinte:

Fato 4.13. *Seja $n \geq 1$ e T uma árvore de decisão de profundidade $\leq n-1$, então*

$$\Pr[T(x) = Parity_n(x)] = 1/2.$$

Isto é verdade pois se considerarmos um caminho π da árvore de decisão e todas as strings que seguem o caminho π, então exatamente metade destas strings têm paridade igual ao valor da folha de π. Além disso nós também temos o seguinte fato:

Fato 4.14. *Seja $p \in (0,1)$ e considere a seguinte distribuição $\mathcal{D}$ de strings em $\{0,1\}^n$:*

1. *Tire uma restrição $\rho \leftarrow R_p$;*
2. *Tire uma string x' uniformemente de $\{0,1\}^{\rho^{-1}(*)}$.*

Então $\mathcal{D}$ é a distribuição uniforme sobre as strings em $\{0,1\}^n$.

A partir de 4.13 e 4.14 e pela prova do teorema 3.8 é verdade que qualquer vantagem que um circuito C que consideramos no teorema 3.8 tem sobre uma das funções constantes em aproximar a função Parity_n vem das restrições ρ tais que pelo menos uma das condições (1) e (2) na prova daquele teorema não é satisfeita. O que nós mostramos é exatamente que apenas uma fração pequena das restrições falham em satisfazer ambas as condições e portanto qualquer vantagem que C venha a ter é limitada por este fato. A partir da prova do teorema 3.8 e dos dois fatos acima podemos afirmar que

$$\Pr[C(\boldsymbol{x}) \neq \text{Parity}_n(\boldsymbol{x}) \geq 0,49.$$

Uma asserção mais fraca do que foi citado no enunciado do teorema 3.9, mas ainda é suficiente para provar o teorema 3.10. Em [Hås14] Håstad provou o que é, até onde eu saiba, o melhor limitante inferior para $\Pr[C(\boldsymbol{x}) \neq \text{Parity}_n(\boldsymbol{x})]$ em que C é um circuito de profundidade d, fan-in no nível mais baixo polilogarítmico e tamanho no máximo $2^{n^{\frac{1}{d-1}}}$:

$$\Pr[C(\boldsymbol{x}) \neq \text{Parity}_n(\boldsymbol{x})] \geq 1/2 - \exp\Bigg(-\Omega\Bigg(\frac{n^{1-\frac{d-2}{d-1}}}{\mathsf{polylog}(n)}\Bigg)\Bigg).$$

Circuitos de profundidade d para Parity_n

Nós acabamos de ver limitante inferior para o tamanho de um circuito de profundidade d para Parity_n quando d é constante. Então podemos nos perguntar quanto portas lógicas são o suficiente para um circuito de profundidade d poder computar Parity_n. Na verdade, nós podemos ver que o limitante inferior do teorema 3.8 está bem próximo de ser ótimo como demostra o teorema a seguir.

Teorema 4.15. *Seja $d \geq 2$ uma constante. Então existe um circuito de profundidade d e tamanho $\mathcal{O}\Big(n^{\frac{d-2}{d-1}} 2^{n^{\frac{1}{d-1}}}\Big)$ com fan-in no nível mais baixo igual a $n^{\frac{d-2}{d-1}}$ que computa $Parity_n$.*

Demonstração. Seja $S^n(d)$ o tamanho do menor circuito de profundidade d que computa Parity_n. Nós provaremos por indução em d que

$$S^n(d) \leq 2^{n^{\frac{1}{d-1}}} \sum_{k=0}^{d-2} 2^{k-1} n^{\frac{k}{d-1}} + 1 = \mathcal{O}\Big(n^{\frac{d-2}{d-1}} 2^{n^{\frac{1}{d-1}}}\Big).$$

A última desigualdade é verdade pois o somatório acima é no máximo $d2^d n^{\frac{d-2}{d-1}}$ que por sua vez é $\mathcal{O}\big(n^{\frac{d-2}{d-1}}\big)$ (nós estamos considerando d constante).

Para $d = 2$, a fórmula FND que computa a soma dos mintermos da função Parity_n tem tamanho $2^{n-1} + 1$ e portanto o caso base é verdadeiro.

Agora seja $d > 2$. Nós podemos construir um circuito para Parity_n de profundidade d com o seguinte procedimento.

1. Particione as n variáveis de entrada em $n^{\frac{1}{d-1}}$ blocos de tamanho $m = n^{\frac{d-2}{d-1}}$ cada.
2. Use o circuito de profundidade $d-1$ e tamanho $S^m(d-1)$ para computar a paridade e a negação da paridade das variáveis de cada bloco.
3. Compute a paridade das saídas dos subcircuitos que computam Parity_m do passo (2) usando uma fórmula FND com $2^{n^{\frac{1}{d-1}}-1} + 1$ portas lógicas.

Agora nós analizamos quantas portas lógica o procedimento acima cria. Nós podemos ver que a profundidade do circuito é d já que podemos colapsar a porta de saída de cada subcircuito para Parity_m ou a sua negação com as portas $\wedge$ da fórmula FND que computa a paridade dos subcircuitos. Como temos $2n^{\frac{1}{d-1}}$ subcircuitos de tamanho $S^m(d-1)$ mais a fórmula FND que computa a paridade das saídas dos subcircuitos temos que o tamanho do circuito gerado é

$$2n^{\frac{1}{d-1}}(S^m(d-1) - 1) + 2^{n^{\frac{1}{d-1}}-1} + 1.$$

Nós temos um fator $S^m(d-1) - 1$ pois nós removemos uma porta lógica de cada subcircuito quando colapsamos um dos níveis do circuito. Pela hípotese da indução e por termos definido $S^n(d)$ como sendo o menor circuito que computa Parity_n:

$$S^n(d) \leq 2n^{\frac{1}{d-1}} 2^{m^{\frac{1}{d-2}}} \sum_{k=0}^{d-3} 2^{k-1} m^{\frac{k}{d-2}} + 2^{n^{\frac{1}{d-1}}-1} + 1.$$

E como $m = n^{\frac{d-2}{d-1}}$:

$$\begin{aligned}
S^n(d) &\leq 2n^{\frac{1}{d-1}} 2^{n^{\frac{1}{d-1}}} \sum_{k=0}^{d-3} 2^{k-1} n^{\frac{k}{d-1}} + 2^{n^{\frac{1}{d-1}}-1} + 1 \\
&= 2^{n^{\frac{1}{d-1}}} \sum_{k=1}^{d-2} 2^{k-1} n^{\frac{k}{d-1}} + 2^{n^{\frac{1}{d-1}}-1} + 1 \\
&= 2^{n^{\frac{1}{d-1}}} \left(\sum_{k=1}^{d-2} 2^{k-1} n^{\frac{k}{d-1}} + 1/2 \right) + 1 \\
&= 2^{n^{\frac{1}{d-1}}} \sum_{k=0}^{d-2} 2^{k-1} n^{\frac{k}{d-1}} + 1.
\end{aligned}$$

O que conclui o último passo da indução.

Quanto ao fan-in do circuito, é suficiente notar que o fan-in do circuito é igual ao fan-in dos subcircuitos que computam a paridade das variáveis em cada bloco. Como cada bloco tem $n^{\frac{d-2}{d-1}}$ variáveis temos que o fan-in de cada subcircuito é no máximo este valor.

□

4.2 Projeções aleatórias e a prova de RST dos teoremas 3.12 e 3.14

Agora nós iremos ver como provar os teoremas 3.12 usando uma generalização de restrições aleatórias. Lembrando que quando o nosso objetivo era provar que a hierarquia polinomial é infinita relativa a um oráculo nós precisamos de uma hierarquia de circuitos de profundidade constante. Nós podemos nos perguntar se o método de restrições aleatórias que acabamos de ver é suficiente para provar que tal hierarquia existe. Infelizmente, este não é o caso por causa de uma diferença crucial entre provar que a função paridade não tem circuitos de profundidade constante e provar que existe uma hierarquia de circuitos de profundidade constante. O argumento clássico é que agora estamos querendo mostar que circuitos de profundidade d, para algum $d > 1$, são capazes de computar funções com uma quantidade polinomial de portas lógicas que circuitos de profundidade $d-1$ não conseguem. Porém, o método de restrições aleatórias foi usada exatamente para "destruir" circuitos de profundidade constante, então não temos mais a capacidade de distinguir circuitos de profundidade $d-1$ da nossa função alvo por ela também se tratar de uma função com profundidade constante.

Para provar a existência de uma hierarquia de profundidade constante nós usa-se as funções de Sipser que por conveniência definimos mais uma vez abaixo.

Definição 4.16. *(As funções de Sipser)*

Para $d \geq 2$ a função de Sipser $f^{m,d}$ é uma fórmula monotônica e read-once [4] *onde o nível mais baixo tem fan-in m, as portas lógicas nos níveis 2 até d - 1 têm fan-in $w = 2^m m \ln(2)$ e a porta lógica no nível mais alto tem fan-in $w_d \approx 2^m ln(2)$. Ou seja, podemos escrever $f^{m,d}$ como*

$$\bigvee_{i_d=1}^{w_d} \bigwedge_{i_{d-1}=1}^{w} \cdots \bigvee_{i_2=1}^{w} \bigwedge_{i_1=1}^{m} x_{i_1,i_2,\ldots,i_d}, \text{ se } d \text{ é par.} \tag{4.7}$$

e

$$\bigwedge_{i_d=1}^{w_d} \bigvee_{i_{d-1}=1}^{w} \cdots \bigvee_{i_2=1}^{w} \bigwedge_{i_1=1}^{m} x_{i_1,i_2,\ldots,i_d}, \text{ se } d \text{ é ímpar.} \tag{4.8}$$

Nós então temos que definir uma nova forma de simplificar circuitos AC^0 que colapsa circuitos de profundidade $d-1$ ao mesmo tempo que mantém algum tipo de estrutura ao ser aplicada sobre a função $f^{m,d}$. Com este objetivo em mente define-se projeções aleatórias que são uma generalização de restrições.

Definição 4.17. *(Projeções aleatórias)*

Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ espaços de variáveis tais que $n = |\mathcal{X}| \leq |\mathcal{Y}|$ e seja block : $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ uma função. Nós definimos um espaço de projeções aleatórias P a partir de um espaço de restrições R tal que $\rho \leftarrow P$ é formada da seguinte forma:

Seja $\rho' \in \{*, 0, 1\}^n$ uma restrição tirada de R, então

[4] Nós dizemos que um circuito ou fórmula é *read-once* se cada variável de entrada só alimenta uma única porta lógica.

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho'(x) & \text{se } \rho'(x) \in \{0,1\} \\ block(x) & \text{se } \rho'(x) = *. \end{cases}$$

Para cada variável $y \in \mathcal{Y}$, o conjunto $\{x \in \mathcal{X} | block(x) = y\}$ é denoninado o bloco de y. Se x pertence ao bloco de y e $\rho(x) = y$ nós dizemos que x foi projetada para y.

Nós podemos dizer que projeções são uma generalização de restrições pois uma restrição é uma projeção onde $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ e block é a função identidade. Durante esta subseção ao aplicarmos uma projeção ρ sobre as variáveis de uma função nós passamos a considerar a projeção de f com respeito a ρ que nós definimos a seguir.

Definição 4.18. *(Projeção de uma função)*

Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e P um espaço de projeção que mapeia as variáveis de entrada da função f para $\{0,1\} \cup \mathcal{Y}$. Seja $\rho \leftarrow P$, então a projeção de f com respeito a ρ é

$$Proj_\rho f : \mathcal{Y} \to \{0,1\}$$
$$Proj_\rho f(y_1, y_2, \ldots, y_m) \mapsto f(\rho(x_1), \rho(x_2), \ldots, \rho(x_n)),$$

onde $m = |\mathcal{Y}|$ e neste caso específico deve-se entender $\rho(x_i)$ como carregando o mesmo valor que y_j sempre que $\rho(x_i) = y_j$ (ao invés de ver $\rho(x_i)$ como uma variável formal em $\mathcal{Y}$ sem nenhum valor atribuido como na definição 4.17).

Projeções aleatórias vão ter o mesmo papel na prova dos teoremas 3.12 e 3.14 que restrições aleatórias tiveram nas provas dos teoremas 3.8 e 3.9. Para provar que $f^{m,d}$ não pode ser computada por circuitos de profundidade $d-1$ e tamanho subexponencial nós iremos usar uma sequência de espaços de projeções P_i, para $i = 1, 2, \ldots, d-1$, que irão satisfazer as três condições listadas a seguir:

1. Qualquer circuito C de profundidade $d-1$ e tamanho subexponencial colapsa para uma função simples quando aplicamos $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{d-1}$ às variáveis de entrada de C, onde cada ρ_i é tirada de P_i.
2. A função $f^{m,d}$ mantém estrutura ao aplicarmos $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{d-1}$ às suas variáveis.
3. As projeções $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{d-1}$ completam para a distribuição uniforme sobre $\{0,1\}^n$.

O item (3) é necessário para a prova do teorema 3.14 e ela tem o mesmo papel que 4.14 tem para restrições aleatórias. Um ponto importante é que a definição de cada um dos espaços de projeções P_i dependem das projeções anteriores. Nós iremos definir $P_i(\rho_{i-1})$, onde $\rho_{i-1} \leftarrow P_{i-1}$, mas na maioria da vez nós iremos deixar implícita a dependência sobre ρ_{i-1}.

Nós definimos cada espaço de projeção P_i com a função $f^{m,d}$ em mente. Sejam $A_0, A_1, \ldots, A_d$ espaços de variáves em que A_0 é o conjunto das variáveis de entrada de $f^{m,d}$ e para cada A_i, com $i > 0$, A_i tem uma variável x_a para cada porta lógica a que aparece no i-ésimo nível da fórmula $f^{m,d}$. Nós faremos um abuso de notação e escreveremos $a \in A_i$ para denotar que a é uma porta lógica no i-ésimo nível de $f^{m,d}$. Para $a \in A_i$ seja input(a) o conjunto de portas lógicas ou variáveis de entrada que alimentam a. Com isto dito, o espaço de projeção P_i irá mapear variáveis em A_{i-1} para $\{0,1\} \cup A_i$ em que para cada $x_a \in A_i$ é verdade que uma variável $x_{a'} \in A_{i-1}$ pode ser projetada para x_a se e somente se $a' \in$ input(a). Em outras palavras $x_{a'}$ pertence ao bloco de x_a se e somente se $a' \in$ input(a).

O espaço de projeções P_1

Vamos começar definindo P_1 e depois mostramos como cada P_i, para $i > 1$, é definida a partir da projeção ρ_{i-1} tirada de P_{i-1}. Ao definir cada P_i nós iremos atribuir um valor $\rho_i(x_a)$ para cada $x_a \in A_i$ que denotará o valor na saída da porta lógica a após aplicarmos a projeção aleatória. Apesar disso não aparecer na definição 4.17 de projeções aleatórias, é útil para nós guardar este valor.

Durante esta seção nós iremos considerar os seguintes parâmetros:

$$\lambda = 2^{-5m/4} \qquad q = 2^{-m/2} - 2^{-10m/9}. \tag{4.9}$$

Definição 4.19. *(O espaço de projeção P_1)*

Por conveniência iremos considerar apenas as variáveis em uma porta $a \in A_1$ específica pois as projeções $\rho_1 \leftarrow P_1$ atribuem valores às variáveis que alimentam portas diferentes de forma independente. Inicialmente nós definimos o valor $\rho_1(x_a)$ da seguinte forma:

$$\rho_1(x_a) = \begin{cases} 1 & \textit{com probabilidade } \lambda. \\ x_a & \textit{com probabilidade } q. \\ 0 & \textit{com probabilidade } 1 - \lambda - q. \end{cases} \tag{4.10}$$

Em seguida nós tiramos um subconjunto não vazio S de input(a) aleatoriamante e uniformemente e fazemos $\rho_1(x_{a'}) = 1$ para todo $x_{a'} \in$ input$(a) \setminus S$ e $\rho_1(x_{a'}) = \rho_1(x_a)$ para todo $x_{a'} \in S$.

Nós fazemos a seguinte observação importante. Seja $a \in A_1$ e vamos considerar uma string $\mathbf{x} \in \{0,1\}^m$ formada pelo seguite procedimento. Seja t_1 tal que

$$\lambda + qt_1 = 2^{-m}. \tag{4.11}$$

Ou seja,

$$t_1 = \frac{2^{-m} - \lambda}{q} = \frac{2^{-m} - 2^{-5m/4}}{2^{-m/2} - 2^{-10m/9}}, \tag{4.12}$$

o que é bem próximo de $2^{-m/2}$. Então prosseguimos da seguinte forma:

1. Se $\rho_1(x_a) \in \{0,1\}$:
   Faça $\mathbf{x}_{a'} = \rho_1(x_{a'})$ para todo $a' \in \text{input}(a)$.
2. Se $\rho_1(x_a) = x_a$:
   Faça $\mathbf{x}_{a'} = 1$ para todo $a' \in \text{input}(a)$ tal que $\rho_1(x_{a'}) = 1$ e $\mathbf{x}_{a'} = b$ para todos os outros $\mathbf{x}_{a'} \in \text{input}(a)$, em que $b \sim \{0_{1-t_1}, 1_{t_1}\}$.

Nós temos que a distribuição acima é equivalente à distribuição uniforme sobre strings em $\{0,1\}^m$. Para ver isto nós mostramos que a probabilidade que a string 1^m é gerada pelo procedimento acima é 2^{-m} (isso é suficiente para provar que a distribuição de strings geradas é uniforme pois podemos facilmente observar que todas as outras strings são geradas com a mesma probabilidade). Isto segue direto da nossa definição de λ, q e t_1 em 4.9, 4.11 e 4.12, e pela primeira e segunda linha de 4.10:

$$\Pr[\mathbf{x} = 1^m] = \lambda + qt_1 = 2^{-m}$$

Ou seja, $\mathbf{x}$ é 1^m sempre que $\rho_1(x_a) = 1$ ou $\rho_1(x_a) = x_a$ e fazemos $\mathbf{x}_{a'} = 1$ para todos $x_{a'} \in \text{input}(a)$ no passo (2) do nosso procedimento. Aplicando o mesmo procedimento para todas $a \in A_1$ nós obtemos a distribuição uniforme sobre $\{0,1\}^n$.

O que o procedimento acima faz é basicamente atribuir valores tirados aleatoriamente de $\{0_{1-t_i}, 1_{t_i}\}$ às variáveis em A_1 que sobreviveram ρ_1. Então, se temos uma projeção $\rho_1 \leftarrow P_1$ e para cada $a \in A_1$ tal que $\rho_1(x_a) = x_a$ nós fizermos $x_a \sim \{0_{1-t_1}, 1_{t_1}\}$, nós temos uma distribuição de valores para as variáveis em A_1 que é equivalente a se nós tivessemos tirado uma atribuição às variáveis de entrada de $f^{m,d}$ da distribuição uniforme e olhassemos para a saída de cada porta $\wedge$ no primeiro nível da fórmula $f^{m,d}$.

Para $i > 1$ defina recursivamente

$$t_i = \frac{(1-t_{i-1})^{qw} - \lambda}{q}. \tag{4.13}$$

A idéia agora é que para todos espaços de projeções P_i subsequentes nós iremos garantir que ao substituir as variáveis que sobreviveram a projeção por um valor aleatório tirado da distribuição $\{0_{1-t_i}, 1_{t_i}\}$ se i for ímpar ou $\{0_{t_i}, 1_{1-t_i}\}$ se i for par, nós também iremos obter a distribuição que teriamos se nós tivessemos tirado uma atribuição às variáveis de entrada da distribuição uniforme e olhassemos para o valor na saída de cada porta lógica em A_i (ou seja, P_i completa para a distribuição uniforme). Além disso, nós iremos usar o fato que P_{i-1} completa para a distribuição uniforme para provar o mesmo para P_i. Assim, para provar que um circuito C de tamanho subexponencial e profundidade $d-1$ não é nem mesmo correlacionado com $f^{m,d}$ nós iremos aplicar uma sequência de projeções $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}$, onde cada ρ_i é tirada de P_i, ao circuito C e à $f^{m,d}$ e usando a notação $\Psi = \text{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}$ teremos que:

$$E_\Psi\left[\Pr_{\mathbf{x}\sim\{0_{1-t_{d-1}},1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}}\left[\Psi(f^{m,d})(\mathbf{x}) \neq \Psi(C)(\mathbf{x})\right]\right] = \Pr_{\mathbf{x}\sim\{0_{1/2},1_{1/2}\}^n}\left[f^{m,d}(\mathbf{x}) \neq C(\mathbf{x})\right], \text{ se d for par,} \tag{4.14}$$

ou

$$E_\Psi\left[\Pr_{\mathbf{x}\sim\{0_{t_{d-1}},1_{1-t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}}\left[\Psi(f^{m,d})(\mathbf{x}) \neq \Psi(C)(\mathbf{x})\right]\right] = \Pr_{\mathbf{x}\sim\{0_{1/2},1_{1/2}\}^n}\left[f^{m,d}(\mathbf{x}) \neq C(\mathbf{x})\right], \text{ se d for ímpar,} \tag{4.15}$$

Então nós mostraremos que $\Psi(f^{m,d})$ e $\Psi(C)$ em si não são correlacionadas para mostrar que $f^{m,d}$ e C também não são correlacionadas.

A observação acima corresponde à terceira condição que os espaços de projeção devem satisfazer. A primeira condição (que os circuitos C simplificam quando aplicamos $\Psi = \text{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}$) nós iremos ver mais pra frente quando provarmos um lema da troca para os espaços de projeções P_i. Para a segunda condição ($f^{m,d}$ mantém estrutura) nós iremos tratar agora o caso i = 1 fazendo as seguintes observações.

Definição 4.20. *(Projeções típicas para P_1)*

Seja $\rho_1 \leftarrow P_1$. Para toda $a' \in A_2$ seja $S_{a'} = \{a \in \text{input}(a') | \rho_1(x_a) = x_a\}$ e para toda $a'' \in A_3$ seja $U_{a''} = \{a' \in \text{input}(a'') | x_{a'}$ não é feita constante pela projeção $\rho_1\}$. Nós dizemos que ρ_1 é típica se:

1. *Para todo $a' \in A_2$, $\big||S_{a'}| - qw\big| \leq w^{1/3}$.*
2. *Para todo $a'' \in A_3$, $|U_{a''}| \geq w - w^{4/5}$.*

Note que qualquer restrição $\rho_1 \leftarrow P_1$ típica não fixa nenhuma porta $\vee$ a' em A_2 com o valor zero, pois para isto nós teriamos que ter $\rho_1(x_a) = 0$ para todo $a \in input(a')$, o que contradiz a condição (1). Portanto podemos equivalentemente dizer que a condição (2) exige que não mais do que $w^{4/5}$ portas $\vee$ na entrada de $a'' \in A_3$ tenham sido fixadas com o valor 1 pela projeção ρ_1.

Nós iremos entender a idéia por trás da primeira condição que uma projeção típica tem que satisfazer depois de definirmos os espaços de projeções P_i para $i > 1$ e após vermos o lema da troca para projeções P_i. Nós precisamos da segunda condição porque queremos que ao aplicarmos ρ_1 às variáveis de entrada de $f^{m,d}$ o circuito por trás da função $f^{m,d}$ a partir do terceiro nível não seja afetado.

Então temos que dado que $\rho_1 \leftarrow P_1$ é típica então $\text{Proj}_{\rho_1} f^{m,d}$ é uma fórmula com profundidade $d-1$ sobre as variáveis em A_1 que sobreviveram ρ_1 (ou seja, não foram feitas constantes). No nível mais baixo de $\text{Proj}_{\rho_1} f^{m,d}$ temos portas $\vee$ com fan-in no intervalo $[qw - w^{1/3}, qw + w^{1/3}]$ e no segundo nível temos portas $\wedge$ com fan-in $\geq w - w^{4/5}$. O restante da fórmula permanece intacta. Para mostrar que $f^{m,d}$ mantém estrutura com alta probabilidade nós temos primeiro que argumentar que $\rho_1 \leftarrow P_1$ é típica com alta probabilidade.

Proposição 4.21. *Seja $\rho_1 \leftarrow P_1$, então:*

1. *Para todo $a' \in A_2$, $\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \leq w^{1/3}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$;*
2. *Para todo $a'' \in A_3$, $\Pr\left[|U_{a''}| \geq w - w^{4/5}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}$.*

Daí segue pelo Princípio da Inclusão-Exclusão que ρ_1 é típica com probabilidade $1 - \big(|A_2| + |A_3|\big)e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$. Como $|A_i| = w^{\mathcal{O}(d)}$, para todo $i \in [d]$, temos que ρ_1 é típica como probabilidade $1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$.

Demonstração. Nós podemos provar ambos os itens no enunciado aplicando a desigualdade de Chernoff. Vale lembrar que se $a'' \in A_3$ e $a' \in \text{input}(a'')$ então $a' \in A_2$. Similarmente, se $a' \in A_2$ e $a \in \text{input}(a')$ então $a \in A_1$.

1. Provando o item (1).

   Seja $a' \in A_2$. Uma variável $x_a \in \text{input}(a')$ satisfaz $\rho_1(x_a) = x_a$ com probabilidade q pela definição de P_1 em 4.19. Portanto, temos que $E[|S_{a'}|] = qw = \widetilde{\Theta}(w^{1/2})$, e pela desigualdade de Chernoff temos que

   $$\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \geq w^{1/3}\right] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}qw},$$

   onde δ satisfaz $\delta qw = w^{1/3}$. Equivalentemente, $\delta = w^{1/3}/qw$, então segue que $\delta = \widetilde{\Omega}(w^{-1/6})$, onde nós também usamos que $qw = \widetilde{\Theta}(w^{1/2})$, e portanto

   $$e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}qw} = e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}.$$

   E por fim podemos concluir que

   $$\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \leq w^{1/3}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}.$$

2. Provando o item (2).

   Seja $a'' \in A_3$ e $a' \in \text{input}(a'')$. Como nós observamos em 4.20 nós podemos assumir que a' é substituida pela constante 1 sempre que $a' \notin U_{a''}$. Temos que a' não é forçada para 1 por ρ_1 se todos $a \in \text{input}(a')$ satisfazem $\rho_1(x_a) \neq 1$ (pois a' é uma porta $\vee$), o que acontece com probabilidade $(1-\lambda)^w$ pela definição de

P_1 em 4.19 e por ρ_1 agir de forma independente nos blocos $a \in A_1$. Segue então que $E\big[|U_{a''}|\big] = w(1-\lambda)^w$. Como $(1-\lambda)^w \geq 1 - w\lambda$ também temos que

$$E\big[|U_{a''}|\big] = w(1-\lambda)^w \geq w(1-w\lambda),$$

e pela desigualdade de Chernoff segue que

$$\Pr\big[w - |U_{a''}| \geq w^{4/5}\big] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}(w - E[|U_{a''}|])},$$

onde δ é tal que $(1+\delta)(w - E[|U_{a''}|]) = w^{4/5}$. Como $w - E\big[|U_{a''}|\big] \leq w(1-(1-w\lambda)) = w^2\lambda$ podemos dizer que $\delta \geq \frac{w^{4/5}}{w^2\lambda} - 1 = \widetilde{\Omega}(w^{1/20})$. Portanto,

$$e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}(w - E[|U_{a''}|])} = e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/20})(w - E[|U_{a''}|])}.$$

Como $(1-\lambda)^w \leq e^{-w\lambda} \leq 1 - w\lambda + \frac{w^2\lambda^2}{2}$, temos que $w^2\lambda - \frac{w^3\lambda^2}{2} \leq w - E\big[|U_{a''}|\big] \leq w^2\lambda$. Ou seja, $w - E\big[|U_{a''}|\big] = \widetilde{\Theta}(w^{3/4})$. Então:

$$e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/20})(w - E[|U_{a''}|])} = e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}.$$

Daí podemos concluir que

$$\Pr\big[w - |U_{a''}| \leq w^{4/5}\big] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})},$$

o que é equivalente à

$$\Pr\big[|U_{a''}| \geq w - w^{4/5}\big] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}.$$

□

Os espaços de projeções P_i

Agora nós definimos P_i para cada $i > 1$ de forma análoga a como definimos P_1. Em seguida nós também iremos ver que cada P_i completa para a distribuição uniforme e estendemos a definição de projeções típicas para P_i e mostraremos que $\rho_i \leftarrow P_i$ é típica com alta probabilidade.

A partir de agora nós iremos usar a função g definida como:

$$g(i,d) = 1/3 + \frac{i-1}{12d}.$$

Vale notar que para $1 \leq i \leq d-1$, temos $1/3 \leq g(i,d) \leq 5/12 < 1/2$.

Definição 4.22. *(O espaço de projeção P_i)*

De novo, nós nos concentramos em uma única porta $a \in A_i$ e sem perda de generalidade nós assumimos que i é ímpar (e portanto a é uma porta $\wedge$). Nós não perdemos em generalidade pois o caso em que i é par é completamente análogo com os papeis de 0 e 1 trocados. Seja $S_a = \{x_{a'} \in input(a) | \rho_{i-1}(x_{a'}) = x_{a'}\}$. Primeiro nós iremos "rejeitar" ρ_{i-1} se $\rho_{i-1}(x_{a'}) = 0$ para algum $x_{a'} \in input(a)$ ou se $\big||S_a| - qw\big| > w^{g(i-1,d)}$. Ao rejeitar ρ_{i-1} nós fazemos $x_{a'} \sim \{0_{t_{i-1}}, 1_{1-t_{i-1}}\}$ para cada $x_{a'} \in S_a$. Suponha que ρ_{i-1} não foi rejeitada, então nós fazemos

$$\rho_i(x_a) = \begin{cases} 1 & \textit{com probabilidade } \lambda. \\ x_a & \textit{com probabilidade } q_a. \\ 0 & \textit{com probabilidade } 1-\lambda-q_a. \end{cases}$$

Nós escolhemos q_a de forma que $\lambda + q_a t_i = (1-t_{i-1})^{|S_a|}$ (ou seja, $q_a = \frac{(1-t_{i-1})^{|S_a|}-\lambda)}{t_i}$). Em seguida tiramos um subconjunto não vazio T de S_a onde cada variável em S_a é incluida em T com probabilidade t_{i-1} e fazemos $\rho_i(x_{a'}) = 1$ para todo $x_{a'} \in S_a \setminus T$ e $\rho_i(x_{a'}) = \rho_i(x_a)$ para todo $x_{a'} \in T$.

Daqui pra frente a seguinte relação entre q e q_a, para qualquer $a \in \bigcup_{i=2}^{d-1} A_i$, nos será útil.

Proposição 4.23. *Seja $a \in A_i$ e $q_a = \frac{(1-t_{i-1})^{|S_a|}-\lambda}{t_i}$, onde $\big||S_a| - qw\big| \leq w^{g(i-1,d)}$, então*

$$q(1 - 3w^{g(i-1,d)}t_{i-1}) \leq q_a \leq q(1 + 3w^{g(i-1,d)}t_{i-1}).$$

Mais pra frente nós será útil a seguinte relação mais fraca entre q e q_a:

$$q/2 \leq q_a \leq 2q. \tag{4.16}$$

Agora iremos usar a hipótese que P_{i-1} completa para a distribuição uniforme para provar que P_i também completa para a distribuição unifome. Caso ρ_{i-1} não tenha sido rejeitada nós aplicamos o seguinte procedimento análogo ao que vimos após a definição de P_1. Seja $a \in A_i$:

1. Se $\rho_i(x_a) \in \{0, 1\}$:
   Faça $\mathbf{x}_{a'} = \rho_i(x_{a'})$ para todo $a' \in \text{input}(a)$.
2. Se $\rho_i(x_a) = x_a$:
   Faça $\mathbf{x}_{a'} = 1$ para todo $a' \in \text{input}(a)$ tal que $\rho_i(x_{a'}) = 1$ e para todos os outros a' faça $\mathbf{x}_{a'} = b$ onde

$$b = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade } 1 - t_i \\ 1 & \text{com probabilidade } t_i. \end{cases}$$

Desta forma, para cada a' tal que $x_{a'} \in S_a$, nós temos o seguinte:

$$\Pr[\mathbf{x}_{a'} = 1] = 1 - \frac{t_{i-1}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} + \frac{t_{i-1}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}}\big(\lambda + q_a t_i\big).$$

Lembrando que $\lambda + q_a t_i = (1-t_{i-1})^{|S_a|}$ pela forma como definimos q_a:

$$\begin{aligned} \Pr[\mathbf{x}_{a'} = 1] &= 1 - \frac{t_{i-1}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} + \frac{t_{i-1}(1-t_{i-1})^{|S_a|}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} \\ &= 1 - \frac{t_{i-1}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}}\big(1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}\big) \\ &= 1 - t_{i-1}. \end{aligned}$$

Ou seja, atribuir um valor tirado da distribuição $\{0_{1-t_i}, 1_{t_i}\}$ às variáveis que sobreviveram ρ_i é equivalente a ter setado todas as variáveis em S_a em um valor tirado de $\{0_{t_{i-1}}, 1_{1-t_{i-1}}\}$. Como $i-1$ é par e pela hipótese

que P_{i-1} completa para a distribuição uniforme devemos ter que $\rho_i \leftarrow P_i$ também completa para a distribuição uniforme. No caso em que ρ_{i-1} é rejeitada nós temos de imediato que as variáveis em S_a são atribuidas com valores tirados de $\{0_{t_{i-1}}, 1_{1-t_{i-1}}\}$ e portanto ao todo P_i completa para a distribuição uniforme. Nós temos a seguinte proposição como consequência.

Proposição 4.24. *Levando em conta a notação $\Psi = Proj_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}$, onde cada projeção ρ_i foi tirada de P_i, então assumindo que d é par (o caso em que d é ímpar é simétrico) temos que para todas funções $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$:*

$$E_\Psi\left[\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0_{1-t_{d-1}},1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}}[\Psi(f)(\boldsymbol{x}) = 1]\right] = \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) = 1].$$

E então temos o seguinte corolário.

Corolário 4.25. *Para todas as funções $f, g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ e assumindo que d é par (o caso em que d é ímpar é de novo simétrico) é verdade que*

$$E_\Psi\left[\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0_{1-t_{d-1}},1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}}[\Psi(f)(\boldsymbol{x}) \neq \Psi(g)(\boldsymbol{x})]\right] = \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})].$$

Em que $\Psi = Proj_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}$.

Agora sabemos que para provar que um circuito arbitrário C de tamanho subexponencial e profundidade d - 1 não pode aproximar $f^{m,d}$ basta nós mostrarmos que com alta probabilidade $\Psi(C)$ e $\Psi(f^{m,d})$ são funções não correlacionadas.

Agora nos voltamos para o objetivo de garantir que os espaços de projeções $P_2, P_3, \ldots, P_{d-1}$ mantém a função $f^{m,d}$ bem estruturada. Nós prosseguimos de forma bem parecida de como fizemos para o espaço de projeção P_1. Primeiro nós iremos definir o que é uma projeção típica para P_i.

Definição 4.26. *(Projeções típicas para P_i)*

Para algum $i \in \{2, 3, \ldots, d-1\}$ seja $\rho_i \leftarrow P_i$. Para toda variável $x_{a'} \in A_{i+1}$ seja $S_{a'} = \{x_a \in input(a') | \rho_i(x_a) = x_a\}$ e para todo variável $x_{a''} \in A_{i+2}$ seja $U_{a''} = \{x_{a'} \in input(a'') | x_{a'}$ não é feita constante pela projeção $\rho_i\}$. Nós dizemos que ρ_i é típica se:

1. *Para toda variável $x_a \in A_{i+1}$:*
   - *(a) $\big||S_a| - qw\big| \leq w^{g(i,d)}$, se $i < d-1$.*
   - *(b) $\big||S_a| - qw_d\big| \leq w^{g(i,d)}$, se $i = d-1$*
2. *Para todo variável $x_a \in A_{i+2}$:*
   - *(a) $|U_a| \geq w - w^{4/5}$, se $i < d-2$.*
   - *(b) $|U_a| \geq w_d - w_d^{4/5}$, se $i = d-2$.*

Se $i = d-1$ nós ignoramos o item (2).

Portanto dado que ρ_i é típica temos que $\mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f^{m,d}$ tem a mesma estrutura que $\mathrm{Proj}_{\rho_1} f^{m,d}$ quando ρ_1 é típica mas com profundidade $d-i$ ao invés de $d-1$. Nós queremos provar que ρ_i é típica com alta probabilidade e para isso é suficiente provar que $\rho_i \leftarrow P_i(\rho_{i-1})$ é típica com alta probabilidade quando $\rho_{i-1} \leftarrow P_{i-1}$ por sua vez também é típica. Nós temos a seguite proposição análoga à 4.21.

Proposição 4.27. *Seja $\rho_{i-1} \leftarrow P_{i-1}$ uma projeção típica e $\rho_i \leftarrow P_i(\rho_{i-1})$, para algum $i \in \{2, 3, \ldots, d-1\}$, então:*

1. *Para todo $a \in A_{i+1}$:*
   (a) $\Pr\left[\big||S_a| - qw\big| \leq w^{g(i,d)}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$, *se* $i < d-1$.
   (b) $\Pr\left[\big||S_a| - qw_d\big| \leq w^{g(i,d)}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$, *se* $i = d-1$.
2. *Para todo $a \in A_{i+2}$:*
   (a) $\Pr\left[|U_a| \geq w - w^{4/5}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}$, *se* $i < d-2$;
   (b) $\Pr\left[|U_a| \geq w_d - w_d^{4/5}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}$, *se* $i = d-2$.

Daí segue pelo Princípio da Inclusão-Exclusão que ρ_i é típica com probabilidade $1-\big(|A_{i+1}|+|A_{i+2}|\big)e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})} = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$. *Se $i = d-1$ nós ignoramos o item (2).*

Demonstração. Nós de novo podemos usar a desigualdade de Chernoff para provar ambos os itens.

1. Provando o item (1).

   Primeiro vamos assumir que $i < d-1$. Seja $a' \in A_{i+1}$. Agora temos que $a \in \text{input}(a')$ satisfaz $\rho_{i-1}(x_a) = x_a$ com probabilidade q_a e portanto $E[|S_{a'}|] = \sum_{a \in S_{a'}} q_a$. Usando a estimativa mais fraca para q_a em 4.16 e o fato que ρ_{i-1} é típica temos que $\frac{q}{2}(w - w^{4/5}) \leq E\big[|S_{a'}|\big] \leq 2qw$, ou seja $\mu = \widetilde{\Theta}(w^{1/2})$. Pela desigualdade de Chernoff temos que

   $$\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \geq w^{g(i,d)}\right] = e^{-\min\left(\frac{\delta_1^2}{2+\delta_1}, \frac{\delta_2^2}{2}\right) \times \widetilde{\Omega}(w^{1/2})}, \tag{4.17}$$

   em que δ_1 satisfaz $(1+\delta_1)(qw + 3qw^{g(i-1,d)+1}t_{i-1}) \geq qw + w^{g(i,d)}$ e δ_2 satisfaz $(1-\delta_2)(qw - 3qw^{g(i-1,d)+1}t_{i-1}) \leq qw - w^{g(i,d)}$ (nós estamos usando 4.23). Então temos $\delta_1 = \widetilde{\Omega}(w^{g(i,d)-1/2})$ e $\delta_2 = \widetilde{\Omega}(w^{g(i,d)-1/2})$, e como $g(i,d) - 1/2 \geq -1/6$ nós obtemos o seguinte quando trocamos $\min\left(\frac{\delta_1^2}{2+\delta_1}, \frac{\delta_2^2}{2}\right)$ por um fator $\widetilde{\Omega}(w^{-1/6})$ no lado direito da desigualdade 4.17:

   $$\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \geq w^{g(i,d)}\right] = e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}.$$

   Daí temos que

   $$\Pr\left[\big||S_{a'}| - qw\big| \leq w^{g(i,d)}\right] = 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}.$$

   Como os mesmos argumentos acima funcionam se trocarmos w por w_d nós também obtemos o resultado para o caso em que $i = d-1$.

2. Provando o item (2).

   Nós iremos provar o item (2) considerando separadamente o caso em que $i < d-2$ e o caso $i = d-2$, apesar de ambos os casos serem bastantes parecidos. Em ambos os casos nós iremos usar o fato que nenhuma porta $\vee$ no $(i+1)$-ésimo nível é fixada em 0 quando ρ_i é típica.

(a) O caso $i < d-2$.
Seja $a'' \in A_{i+2}$. Considere um $a' \in \text{input}(a'')$, por estarmos assumindo que i é ímpar temos que a' é uma porta $\vee$ e portanto ρ_i fixa a' em 1 se existe um $a \in \text{input}(a')$ tal que $\rho_i(x_a) = 1$. Para cada $a \in \text{input}(a')$ temos que $\Pr[\rho_i(x_a) = 1] = \lambda$ pois estamos assumindo que ρ_{i-1} é típica. Seja $\text{input}_{\rho_{i-1}}(a') = \{a \in \text{input}(a') | x_a \text{ não foi feita constante por } \rho_{i-1}\}$, então por ρ_{i-1} ser típica temos que $w - w^{4/5} \leq |\text{input}_{\rho_{i-1}}(a')| \leq w$. Daí temos que

$$E\big[|U_{a''}|\big] = \sum_{a' \in \text{input}(a'')} (1-\lambda)^{|\text{input}_{\rho_{i-1}}(a')|}.$$

e

$$w(1-\lambda)^w \leq E\big[|U_{a''}|\big] \leq w(1-\lambda)^{w-w^{4/5}}.$$

Usando que $w(1-\lambda)^{w-w^{4/5}} \leq we^{-(w-w^{4/5})\lambda} \leq w\big(1-(w-w^{4/5})\lambda + \frac{(w-w^{4/5})^2\lambda^2}{2}\big)$ e $w(1-\lambda)^w \geq w(1-w\lambda)$, nós temos as seguintes desigualdades:

$$w(w-w^{4/5})\lambda - \frac{w(w-w^{4/5})^2\lambda^2}{2} \leq w - E\big[|U_{a''}|\big] \leq w^2\lambda,$$

e podemos concluir que $w - E\big[|U_{a''}|\big] = \widetilde{\Theta}(w^{3/4})$. Então, pela desigualdade de Chernoff temos que

$$\Pr\Big[w - |U_{a''}| \geq w^{4/5}\Big] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\widetilde{\Omega}(w^{3/4})},$$

onde δ satisfaz $(1+\delta)w^2\lambda \geq w^{4/5}$, o que implica em $\delta = \widetilde{\Omega}(w^{1/20})$. Substituindo na desigualdade acima e rearranjando nós podemos concluir que

$$\Pr\Big[|U_{a''}| \geq w - w^{4/5}\Big] \geq 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}.$$

(b) O caso $i = d-2$.
Seja $a'' \in A_d$ (como $|A_d| = 1$ temos que a'' é necessariamente a porta de saída da fórmula $f^{m,d}$). Nós prosseguimos da mesma maneira como na prova do caso $i < d-2$ e obtemos as desigualdades

$$w_d(w-w^{4/5})\lambda - \frac{w_d(w-w^{4/5})^2\lambda^2}{2} \leq w_d - E\big[|U_{a''}|\big] \leq w_d w\lambda.$$

Mas como $w_d = \widetilde{\Theta}(w)$ nós ainda temos que $w_d - E\big[|U_{a''}|\big] = \widetilde{\Theta}(w^{3/4})$. Então pela desigualdade de Chernoff,

$$\Pr[w_d - |U_{a''}| \geq w_d^{4/5}] \leq e^{-\frac{\delta^2}{2+\delta}\widetilde{\Omega}(w^{3/4})},$$

em que δ satisfaz $(1+\delta)w_d w\lambda \geq w_d^{4/5}$, e portanto $\delta = \widetilde{\Omega}(w^{1/20})$. Por fim obtemos que

$$\Pr[|U_{a''}| \geq w_d - w_d^{4/5}] \geq 1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{4/5})}.$$

□

Nós já podemos mostrar que a função $f^{m,d}$ mantém alguma estrutura quando aplicamos as projeções $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{d-1}$. Nós usamos as proposições 4.21 e 4.27 para mostrar que com alta probabilidade todas projeções ρ_i são típicas e então argumentamos que se cada ρ_i é típica então $\Psi(f^{m,d})$ é uma fórmula com profundidade 1 e fan-in em torno de qw_d.

Proposição 4.28. *($f^{m,d}$ mantém estrutura)*

Com probabilidade $1 - e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$ temos que $\Psi(f^{m,d})$ é uma fórmula com profundidade 1 sobre n' variáveis em A_{d-1}, em que $n' \in [qw_d - w^{g(d-1,d)}, qw_d + w^{g(d-1,d)}]$.

Mais especificamente, $\Psi(f^{m,d})$ é o $\vee$ de n' variáveis se d é par ou o $\wedge$ de n' variáves se d é ímpar.

Demonstração. É suficiente argumentar que todas as projeções ρ_i são típicas com alta probabilidade, porque como vimos $\mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f^{m,d}$ é uma fórmula com profundidade $d-i$ com fan-in no nível mais baixo no intervalo $[qw - w^{g(i,d)}, qw + w^{g(i,d)}]$. Em particular, $\mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}} f^{m,d} = \Psi(f^{m,d})$ é uma fórmula com profundidade 1 e fan-in $n' \in [qw_d - w^{g(d-1,d)}, qw_d + w^{g(d-1,d)}]$.

Pelas proposições 4.21 e 4.27 e o Príncipio da Inclusão-Exclusão temos que todas projeções são típicas com probabilidade maior do que $1 - (d-1)e^{-\Omega(w^{1/6})}$, e como d é constante temos que isso é $1 - e^{-\Omega(w^{1/6})}$.

□

Lema da troca para projeções aleatórias

Com o objetivo de mostrar que circuitos de tamanho subexponencial e profundidade $d-1$ simplificam quando aplicamos as projeções $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{d-1}$ nós seguimos o mesmo método que usamos quando provamos um limitante inferior para a função paridade e mostramos um lema da troca para projeções aleátorias.

Nós vamos usar a estratégia de prova de Razborov para provar os seguintes lemas:

Lema 4.29. *(Lema da troca para projeções aleatórias $\rho_1 \leftarrow P_1$)*

Seja $F : A_0 \to \{0,1\}$ uma fórmula FNC (ou FND) com largura r, $s \geq 1$ e $\rho_1 \leftarrow P_1$, então

$$\Pr[D_{can}(Proj_{\rho_1} F) \geq s] = \widetilde{\mathcal{O}}(r2^r w^{-1/4})^s.$$

Lema 4.30. *(Lema da troca para projeções aleatórias $\rho_i \leftarrow P_i$)*

Sejam $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1}$ tiradas de $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ e seja $F : A_{i-1} \to \{0,1\}$ uma fórmula FNC (ou FND) com largura r e tal que $F = Proj_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}} f$, para alguma função $f : A_0 \to \{0,1\}$ qualquer. Se $s \geq 1$ e $\rho_i \leftarrow P_i(\rho_{i-1})$, então

$$\Pr[D_{can}(Proj_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f) \geq s] = \widetilde{\mathcal{O}}(re^{r\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}} w^{-1/4})^s.$$

Note que vamos provar um limitante superior para a probabilidade que a *projeção* de F não pode ser expressa por uma árvore de decisão canônica de profundidade pequena que faz consultas às variáveis que representam um bloco da projeção. Como exemplo, para o lema 4.29 nós estamos considerando a probabilidade que $\mathrm{Proj}_{\rho_1} F$ não pode ser computada por uma árvore de decisão de profundidade s que faz consultas às variáveis em A_1.

Nós iremos provar primeiro o lema 4.29 adaptando levemente o processo de codificação da projeção ρ_1, depois provamos o lema 4.30 na única parte em que a prova deste último lema difere da prova do lema anterior. Esta parte corresponde à terceira parte da segunda prova do lema da troca de Håstad em que nós argumentamos que ao estender a projeção ρ_i durante o processo de codificação nós obtemos um aumento no peso da projeção.

Demonstração. (Prova do Lema 4.29)

Nós podemos assumir que $\mathrm{Proj}_{\rho_1} F = \bigwedge_{\alpha=1}^{z} C_\alpha$ é uma fórmula FNC onde cada C_α tem largura no máximo r. Seja $\mathcal{B}_1$ o seguinte subconjunto de projeções tiradas de P_1:

$$\mathcal{B}_1 = \{\rho_1 \leftarrow P_1 | D_{\mathrm{can}}(\mathrm{Proj}_{\rho_1} F) \geq s).$$

Nós vamos novamente codificar $\rho_1 \in \mathcal{B}_1$ mapeando ρ_1 para (ρ_1', μ, β, d) tal que:

- $\rho_1' = \rho_1\sigma$ é uma extensão de ρ_1.
- $\mu \subseteq A_1$ é o subconjunto de blocos "afetados" por σ.
- $\beta \subseteq A_0$ é um subconjunto das variáveis afetadas por σ.
- $\delta \in \{0,1\}^s$ vai ter o mesmo papel que teve na segunda prova do Lema da Troca de Håstad.

Nós dividimos a prova em três partes: na primeira parte iremos descrever o processo de codificação de ρ_1, na segunda parte nós mostramos como recuperar ρ_1 a partir de seu código e na terceira parte nós mostramos um limitante superior para a soma

$$\sum_{\rho_1 \in \mathcal{B}_1} \Pr[\boldsymbol{\rho} = \rho_1], \tag{4.18}$$

obtendo o resultado desejado no enunciado do lema.

1. Construindo o código a partir de ρ_1.

   Nós iremos considerar um caminho π na árvore de decisão canônica de $\mathrm{Proj}_{\rho_1}F$ de tamanho pelo menos s, truncando π de forma que $|\pi| = s$. Seja C_{α_1} a primeira cláusula de $\mathrm{Proj}_{\rho_1}F$ que não foi feita verdadeira por ρ_1, π_1 a porção de π que faz consultas à variáveis que aparecem em C_{α_1}, $\mu_1 \subseteq A_1$ o conjunto de variáveis que aparecem em π_1 e $\beta_1 \subseteq A_0$ o conjunto de variáveis em A_0 que aparecem como um literal negado na cláusula C_{α_1} na fórmula F original, pertencem ao bloco de alguma variável em μ_1 e foram projetadas pela projeção ρ_1. Nós consideramos a seguinte projeção σ_1 que atribui valores somente às variáveis que pertencem a blocos em μ_1 da seguinte forma. Seja $a \in \mu_1$ e $a' \in \mathrm{input}(a)$:

   $$\sigma_1(x_{a'}) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{a'} \in \beta_1. \\ 0 & \text{se } \rho_1(x_{a'}) = x_a \text{ e } x_{a'} \notin \beta_1 \\ x_a & \text{se } \rho_1(x_{a'}) \in \{0,1\}. \end{cases} \tag{4.19}$$

   Nós fixamos $\sigma_1(x_a)$ para o valor em $\{0,1\}$ apropriado. Note que definimos σ_1 de forma que C_{α_1} não é satisfeita na fórmula $\mathrm{Proj}_{\rho_1\sigma_1}F$. Nós também temos que $\rho_1\sigma_1$ fixa todas as variáveis que pertecem a algum bloco em μ_1.

   Para todos os outros estágios $j = 2, 3, \ldots, l$ nós fazemos a mesma coisa, definindo C_{α_j} como sendo a primeira cláusula não fixada como verdadeira em $\mathrm{Proj}_{\rho\pi_1\pi_2\ldots\pi_{j-1}}F$. De novo nós chegamos no último estágio l quando $\pi_l = \pi \setminus \pi_1\pi_2\ldots\pi_{l-1}$.

   Sejam $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_l$, $\rho_1' = \rho_1\sigma$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$. Nós definimos a string $\delta \in \{0,1\}^s$ tal que $\delta_j = 1$ se e somente se a j-ésima variável em μ, seguindo a ordem em que estas variáveis aparecem no caminho π, é atribuida um valor diferente por σ e π. Então fazemos $\mathrm{Code}(\rho_1) = (\rho_1', \mu, \beta, \delta)$.

2. Decodificando $\mathrm{Code}(\rho_1)$.

   A idéia do processo de decodificação de $\mathrm{Code}(\rho_1)$ é basicamente o mesmo que já vimos na segunda prova do Lema da Troca de Håstad. Nós notamos que podemos obter quais variáveis σ_i fixou a partir de β_i, μ_i e σ. Para todo $a \in \mu_i$ e $a' \in \mathrm{input}(a)$ temos que

   $$\sigma_i(x_{a'}) \in \{0,1\} \iff x_{a'} \in \beta_i \text{ ou } \sigma(x_{a'}) = 0.$$

Que $\sigma_i(x_{a'}) = 1$ se e somente se $x_{a'} \in \beta_i$ segue direto da primeira linha na definição de σ_i em 4.19. Também, como $\rho_1\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}$ não atribui o valor 0 para nenhuma variável que pertence a algum bloco em μ_i nós obtemos que $\sigma_i(x_{a'}) = 0$ se e somente se $\sigma(x_{a'}) = 0$. Uma vez que recuperamos σ_i, podemos recuperar π_i com o auxílio da string δ. Daí podemos desfazer σ_i e montar a projeção $\rho_1\pi_1\pi_2 \dots \pi_i\sigma_{i+1} \dots \sigma_l$ o que nos permite avançar para o $(i+1)$-ésimo estágio. Ao recuperarmos σ podemos extrair ρ_1 de $\rho'_1 = \rho_1\sigma$.

3. Estimando $\Pr[\rho_1 \in \mathcal{B}_1]$.

   Na segunda parte desta prova nós mostramos que o mapeamento Code é injetivo, portanto se mostrarmos que $\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho_1] \leq \kappa \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho'_1]$ para cada $\rho_1 \in \mathcal{B}_1$, em que κ é u um fator $\widetilde{\mathcal{O}}(w^{-s/4})$, nós obtemos um limitante superior para a soma 4.18. Como ρ_1 e ρ'_1 só diferem nos blocos em μ nós iremos nos concentrar primeiro nestes blocos. Seja $a \in \mu$ e ρ_1^a a parte de ρ_1 que atribui valores às variáveis no bloco de a. Como $\rho_1(x_a) = x_a$:

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a] = q\frac{2^{-m}}{1-2^{-m}}.$$

   Enquanto que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}] = \begin{cases} \lambda & \text{se } \rho'_1(x_a) = 1. \\ (1-\lambda-q)\frac{2^{-m}}{1-2^{-m}} & \text{se } \rho'_1(x_a) = 0. \end{cases}$$

   Lembrando nossa observação que ρ'_1 fixa todas as variáves que pertencem a blocos em μ. Segue de imediato que

$$\frac{\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a]}{\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}]} = \begin{cases} \frac{q2^{-m}}{\lambda(1-2^{-m})} & \text{se } \rho'_1(x_a) = 1. \\ \frac{q}{1-\lambda-q} & \text{se } \rho'_1(x_a) = 0. \end{cases}$$

   E portanto temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a] \leq \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}] \times \max\left(\frac{q2^{-m}}{\lambda(1-2^{-m})}, \frac{q}{1-\lambda-q}\right) = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4}) \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}] \quad (4.20)$$

   Como $\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho_1] = \prod_{a\in A_1} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a]$:

$$\begin{aligned} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho_1] &= \prod_{a\in A_1\setminus\mu} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a] \times \prod_{a\in\mu} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a] \\ &\leq \prod_{a\in A_1\setminus\mu} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}] \times \prod_{a\in\mu} \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4}) \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}] \\ &= \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-s/4}) \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho'_1]. \end{aligned}$$

   Na primeira desigualdade nós usamos 4.20 e que $\Pr[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1^a] = \Pr[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_1'^{,a}]$ sempre que $x_a \in A_1 \setminus \mu$, enquanto que na segunda desigualdade nós usamos que $|\mu| = s$. Agora podemos estimar $\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}_1]$.

$$\begin{aligned} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}_1] &= \sum_{\rho_1\in\mathcal{B}} \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho_1] \\ &\leq \sum_{\rho_1\in\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-s/4}) \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho'_1]. \end{aligned}$$

Agora nós iremos usar o fato que Code é um mapeamento injetivo. Note primeiro que podemos representar μ, β e δ da seguinte forma:

- Cada μ_i em μ é representada por um vetor em $[r]^{|\mu_i|}$ onde a j-ésima coordenada do vetor guarda a posição da primeira variável pertencendo ao j-ésimo bloco em μ_i na cláusula C_{α_i}. Desta forma representamos μ como uma string de tamanho $s(\log r+1)$ e portanto existem no máximo $2^{s(\log r+1)} = (2r)^s$ possibilidades para μ.
- Cada β_i em β é representado por um vetor em $(\{0,1\}^r)^{|\mu_i|}$ em que cada string de tamanho r neste vetor indica pela posição em que aparece na cláusula C_{α_i} quais variáveis em um dos blocos de μ_i estão em β_i. Podemos então representar β por uma string de tamanho $s(r+1)$ e daí temos que há no máximo $2^{s(r+1)} = (2^{r+1})^s$ possibilidades para β.
- δ é uma string em $\{0,1\}^s$ e portanto existem 2^s possibilidades para δ.

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as restrições ρ tal que $\rho = \rho'_1$ para algum $\rho_1 \in \mathcal{B}_1$. Usando as observações acima a respeito do número de possíveis μ, β e δ e por Code ser um mapeamento injetivo:

$$\begin{aligned}\sum_{\rho_1 \in \mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-s/4}) \Pr_{\boldsymbol{\rho} \leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho'_1] &= \widetilde{\mathcal{O}}(r2^r w^{-1/4})^s \sum_{\rho'_1 \in \mathcal{C}} \Pr_{\boldsymbol{\rho} \leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} = \rho'_1] \\ &= \widetilde{\mathcal{O}}(r2^r w^{-1/4})^s.\end{aligned}$$

Com isso obtemos $\Pr_{\boldsymbol{\rho} \leftarrow P_1}[\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{B}_1] = \widetilde{\mathcal{O}}(r2^r w^{-1/4})^s$ como nós queriamos.

□

Agora iremos provar o Lema 4.30. O mapeamento Code na prova do Lema 4.29 também pode ser usado da mesma forma para mapear uma projeção $\rho_i \leftarrow P_i$ para (ρ'_i, μ, β, d) com a diferença que estamos consideranto variáves de entradas em A_i para a função $\mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} F$. O que realmente muda é que temos que adaptar alguns cálculos levando em conta a forma que P_i distribui pesos para as projeções $\rho_i \leftarrow P_i$.

Demonstração. (Prova do Lema 4.30.)

Nós vamos considerar que $F = \mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{i-1}} f = \bigwedge_{\alpha=1}^{z} C_\alpha$ é uma fórmula FNC em que cada cláusula contém no máximo r variáveis. Desta vez nós temos o conjunto $\mathcal{B}_i$ definido como:

$$\mathcal{B}_i = \{\rho_i \leftarrow P_i(\rho_{i-1}) | D_{\mathrm{can}}(\mathrm{Proj}_{\rho_i} F) \geq s\},$$

em que $\mathrm{Proj}_{\rho_i} F = \mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f$. Também iremos assumir que i é ímpar (a prova para o caso em que i é par é perfeitamente análoga com os papeis de 0 e 1 trocados). Seja $\rho_i \in \mathcal{B}_i$ e para cada $a \in \mu$ seja S_a como definido em 4.22. Note que por ρ' ter alterado o bloco a nós necessariamente devemos ter $\big||S_a| - qw\big| \leq w^{g(i-1,d)}$, pois senão a projeção ρ_i tirada de $P_i(\rho_{i-1})$ teria fixada todas as variáveis em input(a) com um valor constante. Seja $s_1(a)$ o número de variáveis em S_a que foram atribuidas o valor 1 por ρ_i, $s'_1(a)$ o número de variáveis em S_a que foram fixadas com o valor 1 na extensão ρ'_i de ρ_i e $\Delta_a = s'_1(a) - s_1(a) \geq 0$. Definindo ρ_i^a como sendo a parte de ρ_i que atribui valores às variáveis no bloco de a, nós temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho} \leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i^a] = q_a \frac{t_{i-1}^{|S_a| - s^1(a)}(1 - t_{i-1})^{s_1(a)}}{1 - (1 - t_{i-1})^{|S_a|}},$$

onde q_a é o mesmo definido em 4.22. Também,

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i'^{,a}] = \begin{cases} \lambda & \text{se } \rho_i'(x_a) = 1. \\ (1-\lambda-q_a)\frac{t_{i-1}^{|S_a|-s_1'(a)}(1-t_{i-1})^{s_1'(a)}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} & \text{se } \rho_i'(x_a) = 0. \end{cases}$$

E portanto,

$$\frac{\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i^a]}{\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i'^{,a}]} = \begin{cases} \frac{q_a}{\lambda}\frac{t_{i-1}^{\Delta_a}(1-t_{i-1})^{|S_a|-\Delta_a}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} & \text{se } \rho_i'(x_a) = 1 \\ \frac{q_a}{1-\lambda-q_a}\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a} & \text{se } \rho_1'(x_a) = 0, \end{cases}$$

onde nós usamos que $s_1'(a) = |S_a|$ sempre que $\rho_i'(x_a) = 1$. Daí obtemos que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i^a] \leq \Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i'^{,a}] \times \max\left(\frac{q_a}{\lambda}\frac{t_{i-1}^{\Delta_a}(1-t_{i-1})^{|S_a|-\Delta_a}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}}, \frac{q_a}{1-\lambda-q_a}\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a}\right).$$

Nós queremos um limitante superior para ambas expressões que aparecem dentro do max. Como temos que $qw - w^{g(i-1,d)} \leq |S_a| \leq qw + w^{g(i-1,d)}$:

$$(1-t_{i-1})^{qw+w^{g(i-1,d)}} \leq (1-t_{i-1})^{|S_a|} \leq (1-t_{i-1})^{qw-w^{g(i-1,d)}},$$

o que implica em $(1-t_{i-1})^{|S_a|} = 2^{-m}(1 \pm o(1))$. Daí, relembrando a relação entre q_a e q da proposição 4.23 e que $\frac{q2^{-m}}{\lambda} = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4})$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{q_a}{\lambda}\frac{t_{i-1}^{\Delta_a}(1-t_{i-1})^{|S_a|-\Delta_a}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}} &= \frac{q_a}{\lambda}\frac{(1-t_{i-1})^{|S_a|}}{1-(1-t_{i-1})^{|S_a|}}\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a} \\ &= \frac{q_a}{\lambda}2^{-m}(1 \pm o(1))\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a} \\ &= \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4})\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a}. \end{aligned}$$

Também temos que $\frac{q_a}{1-\lambda-q_a} = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}) = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4})$ e portanto podemos concluir que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i^a] = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/4})\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\Delta_a}\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}^a = \rho_i'^{,a}].$$

Seja $\|\beta\| = \sum_{a\in\mu}\Delta_a$ o número total de variáveis que foram fixadas em 1 por σ, ou equivalentemente o peso de Hamming de β. Então temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho} = \rho_i] = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-s/4})\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\|\beta\|}\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho} = \rho_i'], \tag{4.21}$$

para todo $\rho_i \in \mathcal{B}_i$. Definindo o conjunto $\mathcal{C}$ da mesma forma que fizemos na prova do Lema 4.29 e somando sobre todas as possibilidades de β obtemos o seguinte:

$$\sum_{\beta}\sum_{\rho_i'\in\mathcal{C}}\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{\|\beta\|}\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}=\rho_i'] \leq \sum_{k=0}^{rs}\binom{rs}{k}\left(\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{k}\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{C}] \leq \left(1+\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}\right)^{rs} \leq e^{rs\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}}. \tag{4.22}$$

Se somarmos também sobre todas as possibilidades de μ e δ e levando em conta as desigualdades 4.21 e 4.22 temos que:

$$\Pr_{\boldsymbol{\rho}\leftarrow P_i}[\boldsymbol{\rho}\in\mathcal{B}_i] = \widetilde{\mathcal{O}}(re^{r\frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}}w^{-1/4})^s,$$

o que conclui a prova do lema.

□

Prova dos Teoremas 3.12 e 3.14

Agora nós iremos provar o Teorema 3.12 que nós enunciamos mais uma vez por conveniência.

Teorema 4.31. *Seja $d > 2$ e m suficientemente grande, então qualquer circuito de tamanho $S \leq 2^{w^{1/5}}$ e profundidade $d-1$ não computa a função $f^{m,d}$ corretamente em todas as entradas.*

Teorema 4.32. *Seja $d > 2$ e m suficientemente grande, então qualquer circuito de tamanho $S \leq 2^{w^{1/5}}$ e profundidade $d-1$ falha em computar a função $f^{m,d}$ corretamente numa fração maior do que $1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})$ das entradas.*

O Teorema 4.31 é consequência de dois fatos que listamos a seguir. Seja C um circuito de profundidade d com no máximo $2^{w^{1/5}}$ portas lógicas no seu segundo nível pra cima e com fan-in $m/5$ no seu nível mais baixo:

1. Com alta probabilidade, $\Psi(C) = \mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}C$ é computada por uma árvore de decisão de profundidade pequena.
2. Com alta probabilidade, $\Psi(f^{m,d}) = \mathrm{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}f^{m,d}$ é uma fórmula de profundidade 1 sobre um número razoável de variáveis em A_{d-1}.

O item (2) é a Proposição 4.28. O item (1) nós usamos a mesma estratégia na prova do Teorema 4.12 usando uma sequência de aplicações dos Lemas 4.29 e 4.30 para reduzir a profundidade do circuito. Note que estamos agora falando de circuitos com profundidade d, mas a proposição 4.31 segue pois qualquer circuito de profundidade $d-1$ pode trivialmente ser convertido em um circuito de profundidade d com fan-in arbitrário se trocarmos cada variável de entrada que alimenta uma porta $\wedge$ ($\vee$) no seu nível mais baixo por uma porta $\vee$ ($\wedge$) que recebe como entrada somente aquela variável de entrada.

Proposição 4.33. *Seja $d > 2$, então qualquer circuito C de profundidade d com no máximo $2^{w^{1/5}}$ portas no seu segundo nível pra cima e fan-in $m/5$ no nível mais baixo satisfaz:*

$$\Pr[D(\Psi(C)) \leq 10] \geq 1 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}),$$

onde $\Psi = Proj_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_{d-1}}$ em que cada $\rho_i \leftarrow P_i$.

Demonstração. Vamos denotar por S_i o número de portas lógicas no i-ésimo nível de C e $S^* = \sum_{i=2}^{d} S_i \leq 2^{w^{1/5}}$.

Vamos assumir sem perda de generalidade que as portas lógicas no nível mais baixo de C são portas $\wedge$. O que nós queremos fazer é aplicar os lemas 4.29 e 4.30 em cada nível do circuito, assim como fizemos na prova do teorema 3.8, reduzindo a profundidade do circuito em 1 com alta probabilidade. Agora mostramos como proceder com este argumento.

(a) Primeiro nós aplicamos o lema da troca para o espaço de projeções P_1 (4.29) com os parâmetros $r = m/5$ e $s = \log S^{*2}$. Seja a uma porta $\vee$ no segundo nível de C e seja f_a a fórmula FND computada por a. Pelo lema da troca para P_1 e por C ter fan-in $m/5$ no seu nível mais baixo, nós temos o seguinte.

$$\Pr[D_{\text{can}}(\text{Proj}_{\rho_1} f_a) \geq \log S^{*2}] = \widetilde{\mathcal{O}}\Big(\frac{m}{5} 2^{m/5} w^{-1/4}\Big)^{\log S^{*2}}.$$

E como $\frac{m}{5} 2^{m/5} w^{-1/4} = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/20}) = o(1)$ temos que para m suficientemente grande (lembrando que w depende de m) é verdade que

$$\Pr[D_{\text{can}}(\text{Proj}_{\rho_1} f_a) \geq \log S^{*2}] \leq 2^{-\log S^{*2}} = \frac{1}{S^{*2}}.$$

(b) Agora, seja $i \in \{2, 3, \ldots, d-2\}$ e assuma que as projeções $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1}$ sucederam em todas as suas aplicações. Nós aplicamos o lema da troca para o espaço de projeção P_i com os parâmetros $r = s = \log S^{*2}$. Seja a uma porta lógica no $(i+1)$-ésimo nível de C que computa f_a que no caso seria uma fórmula FND se i é ímpar ou uma fórmula FNC se i é par. Por 4.30 e pelas portas lógicas no i-ésimo nível agora terem fan-in no máximo $\log S^{*2}$ nós temos que

$$\Pr[D_{\text{can}}(\text{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f_a) \geq \log S^{*2}] = \widetilde{\mathcal{O}}\big(\log S^{*2} e^{\log S^{*2} \frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}} w^{-1/4}\big)^{\log S^{*2}}.$$

Nós temos de novo que a expressão na base da exponenciação é $\widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/20}) = o(1)$ e portanto para m suficientemente grande,

$$\Pr[D_{\text{can}}(\text{Proj}_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_i} f_a) \geq \log S^{*2}] \leq 2^{-\log S^{*2}} = \frac{1}{S^{*2}}.$$

(c) Para o último passo assuma que todas projeções anteriores sucederam e portanto o que resta é uma fórmula de profundidade 2 sobre as variáveis em A_{d-2}. Nós aplicamos o lema de troca para o espaço de projeções P_{d-1} às variáves de A_{d-2} com os parâmetros $r = \log S^{*2}$ e $r = 10$ e temos que

$$\Pr[D_{\text{can}}(\Psi(C)) \geq 10] = \widetilde{\mathcal{O}}\big(\log S^{*2} e^{\log S^{*2} \frac{t_{i-1}}{1-t_{i-1}}} w^{-1/4}\big)^{10}, \tag{4.23}$$

o que implica em

$$\Pr[D_{\text{can}}(\Psi(C)) \geq 10] = \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}),$$

porque a expressão na base da exponenciação em 4.23 é $\widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/20})$.

Por fim aplicamos o princípio da inclusão-exclusão para dar um limitante inferior para a probabilidade que todos as projeções sucederam em transformar as fórmulas de profundidade 2 computada por cada porta lógica de C em uma árvore de decisão de baixa profundidade, obtendo o seguinte.

$$\Pr[D_{\text{can}}(\Psi(C)) < 10] \geq 1 - \frac{S^*}{S^{*2}} - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}) \geq 1 - \frac{1}{2^{w^{1/5}}} - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}) = 1 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}).$$

□

Então nós já temos por 4.28 e 4.33 que $f^{m,d}$ não pode ser computada por um circuito de tamanho $2^{w^{1/5}}$, profundidade d e fan-in $m/5$ no nível mais baixo pois com probabilidade positiva teremos que $\Psi(f^{m,d})$ é uma função que depende em um grande número de variáveis enquanto que $\Psi(C)$ depende apenas de um número constante de variáveis. Por completude a prova do teorema 4.31 segue abaixo:

Demonstração. (Prova do teorema 3.12, 4.31)

Seja C um circuito de profundidade d, tamanho menor do que $2^{w^{1/5}}$ e com fan-in no nível mais baixo menor do que $m/5$. Por 4.33 sabemos que com probabilidade maior do que $1 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})$, $\Psi(C)$ é representável por uma árvore de decisão de profundidade no máximo 10. Por outro lado, por 4.28 temos que com probabilidade maior do que $1-e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$ nós temos que $\Psi(f^{m,d})$ é um circuito de profundidade 1 que depende de n' variáveis, onde $n' \in [qw_d - w^{g(d-1,d)}, qw_d + w^{g(d-1,d)}]$. Portanto, pelo Princípio da Inclusão-Exclusão com probabilidade maior do que $1-\widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})-e^{-\widetilde{\Omega}(w^{1/6})}$ temos que ambos os eventos acontecem. Como o $\vee$ de $n' >> 10$ variáveis não pode ser representado por um árvore de decisão de profundidade 10, temos pelo método probabilístico que C não pode ser um circuito para a função $f^{m,d}$.

□

Para provar o teorema 4.32 nosso objetivo agora é mostrar que $\Psi(f^{m,d})$ e $\Psi(C)$ com alta probabilidade nem sequer são correlacionadas.

Proposição 4.34. *Seja $f : A_{d-1} \to \{0,1\}$ o $\vee$ de n' variáveis, onde $n' \in [qw_d - w^{g(d-1,d)}, qw_d + w^{g(d-1,d)}]$, e $g : A_{d-1} \to \{0,1\}$ uma função computável por uma árvore de decisão de profundidade 10, então temos que*

$$\Pr_{\boldsymbol{x} \sim \{0_{1-t_{d-1}}, 1_{t_{d-1}}\}}[f(\boldsymbol{x}) \neq g(\boldsymbol{x})] \geq 1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}).$$

Demonstração. Seja T uma árvore de decisão com profundidade 10 que melhor aproxima f. Para alguma entrada $x \leftarrow \{0_{1-t_{d-1}}, 1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}$ temos que T vê um 1 com probabilidade no máximo $10t_{d-1}$ e nesse caso T pode sempre dar como saída o valor correto de $f(x)$ (no caso teriamos $T(x) = f(x) = 1$).

Por outro lado, com probabilidade maior do que $1 - 10t_{d-1}$, T vê somente 0s após fazer 10 consultas às suas variáveis de entrada. Vamos considerar então a função f' que é o $\vee$ das $n' - 10$ variáveis em A_{d-1} que não foram consultadas por T no caso em que todas as 10 consultas retornaram 0. Então, a melhor estratégia que T pode fazer é adivinhar o valor de f' sobre uma entrada tirada da distribuição $\{0_{1-t_{d-1}}, 1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}$. Mais especificamente, a melhor estratégia que T pode tomar é dar como saída um valor $b \in \{0,1\}$ tal que com respeito à distribuição $\{0_{1-t_{d-1}} 1_{t_{d-1}}\}^{A_{d-1}}$ é verdade que $\Pr[f' = b] \geq \Pr[f' = 1 - b]$. Nós temos que

$$\Pr_{\boldsymbol{x} \sim \{0_{1-t_{d-1}}, 1_{t_{d-1}}\}}[f'(\boldsymbol{x}) = 0] = (1 - t_{d-1})^{n'-10},$$

o qual podemos ver satisfaz

$$1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}) \leq (1 - t_{d-1})^{n'-10} \leq 1/2 + \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}).$$

Segue então que qualquer que for a estratégia que T pode tomar, T irá dar como saída o valor correto de $f(x)$ com probabilidade no máximo $1/2 + \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12})$. Ao todo, T corretamente computa f com probabilidade no máximo

$$10t_{d-1} + 1/2 + \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}) = 1/2 + \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}).$$

Podemos então concluir que

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0_{1-t_{d-1}},1_{t_{d-1}}\}}[f(\boldsymbol{x}) \neq T(\boldsymbol{x})] \geq 1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12}).$$

Pela forma que definimos T o resultado da proposição segue como consequência.

□

A partir de 4.33, 4.28 e 4.34 podemos provar o teorema 4.32.

Demonstração. (Prova do teorema 3.14, 4.32)

Na prova do teorema 4.31 nós vimos que com probabilidade $1 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})$ é verdade que $\Psi(C)$ e $\Psi(f^{m,d})$ caem no caso da proposição 4.34. Portanto temos que

$$E_\Psi\left[\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0_{1-t_{d-1}},1_{t_{d-1}}\}}[\Psi(C) \neq \Psi(f^{m,d})]\right] \geq \left(1 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2})\right)\left(1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/12})\right) = 1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}).$$

Daí segue por 4.25 que

$$\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[C(\boldsymbol{x}) \neq f^{m,d}(\boldsymbol{x})] \geq 1/2 - \widetilde{\mathcal{O}}(w^{-1/2}).$$

□

Capítulo 5

Provas naturais e complexidade irônica

Logo no começo da introdução deste trabalho nós mencionamos uma dicotomia entre complexidade computacional, o estudo de quão difíceis problemas computacionais são, e o design de algoritmo eficientes. Pode parecer que achar um algoritmo eficiente para um problema não nos diria nada a respeito da dificuldade de outros problemas, porém, a existência de hierarquias de classes de complexidade como as que vimos na seção 2.5 na verdade impõem limitações para a existência de algoritmos rápidos para determinados problemas (além daqueles problemas cuja a dificuldade é o assunto do teorema) e colapsos de algumas classes de complexidade. Para nos convecermos disto nós podemos considerar o seguinte teorema e iremos ver que um algoritmo polinomial para SAT implica em $\mathsf{EXP} \nsubseteq \mathsf{P/poly}$ devido à uma violação do teorema da hierarquia de tempo determinístico:

Teorema 5.1 (Meyer)**.** *Se* $\mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{P/poly}$ *então* $\mathsf{EXP} = \Sigma_2^p$.

Agora, assuma que $\mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{P/poly}$ e $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Nós podemos generalizar o teorema 2.29 e obter que $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ implica em $\mathsf{P} = \mathsf{PH} = \Sigma_2^p$, e então pelo teorema 5.1 nós teriamos que $\mathsf{P} = \mathsf{EXP}$, o que é uma contradição pelo teorema da hierarquia de tempo determinístico que nós vimos em 2.44. Indo na contrapositiva, se achassemos um algoritmo polinomial para algum problema NP-completo como SAT então $\mathsf{EXP} \neq \Sigma_2^p$ e pela contrapositiva do teorema 5.1 nós teriamos que $\mathsf{EXP} \nsubseteq \mathsf{P/poly}$. Ou seja, um algoritmo eficiente para o problema SAT implica em um limitante inferior para a complexidade de circuitos da classe EXP.

Antes de falar sobre a relação entre algoritmos e limitantes inferiores nós iremos ver porque precisamos destas técnicas, ou mais precisamente iremos ver o porquê que os métodos de restrições/projeções aleatórias do capítulo anterior não são capazes de provar limitantes inferiores para classes maiores do que AC^0. Enquanto esse capítulo é sobre limitantes inferiores que seguem de algoritmos rápidos para certos problemas, na próxima seção iremos ver que algoritmos rápidos surgem a partir da prova de limitantes inferiores conhecidas como provas naturais.

5.1 Provas naturais

O resultado de Baker, Gill e Solovay que vimos em 2.48 e 3.3 nos diz que para resolver, por exemplo, o problema $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$ é necessário um argumento que não relativiza. O que pode ter sido desapontante na época, pois argumentos que relativizam tiveram sucessos em provar limitantes inferiores até então, como por exemplo os que são implicados pelos teoremas de hierarquia que vimos na seção 2.5. Acontece que o sucesso que pesquisadores tiveram em provar limitantes inferiores contra circuitos de profundidade constante esbarram numa barreira semelhante. No capítulo 4 nós vimos que as funções paridades não estão em AC^0. Razborov [Raz87] e Smolensky [Smo87] foram além e mostraram que a função Mod_m não pode ser computada

por circuitos $\mathsf{ACC0}[p]$ de tamanho subexponencial, em que p é um número primo e $m \neq p^r$, para todos $r \geq 1$ (nas conclusões iremos falar um pouco mais a respeito deste resultado). Se quisermos ir ainda mais além e provar limitantes inferiores contra a classe NC^1 ou até mesmo TC^0 nós teremos que achar uma estratégia de prova que seja fundamentalmente diferente das estratégias usadas para provar limitantes inferiores já conhecidas. O motivo para isso é que acredita-se que as classes NC^1 e TC^0 contêm funções pseudoaleatórias, que são basicamente funções indistinguiveis de funções verdadeiramente aleatórias [1].

Vamos tomar como exemplo o resultado do capítulo anterior em que vimos que Parity $\notin \mathsf{AC}^0$ e vamos nos convencer do seguinte: o método de prova de restrições aleatórias não só prova que Parity $\notin \mathsf{AC}^0$, mas também mostra que uma função (verdadeiramente) aleatória não está em AC^0 com alta probabilidade. Nós podemos perceber isto pois , assim como as funções paridades, após termos restringidos algumas variáveis porém não todas de uma função aleatória se espera que ela ainda permaneça complexa. De fato, após termos provado que um circuito AC^0 com alta probabilidade colapsa para uma árvore de decisão de profundidade 10 ao ser atingida com uma restrição aleatória, nós poderiamos ter dado um passo a mais e ter restringido mais 10 variávies que formam um dos caminhos da árvore de decisão obtendo então uma função constante, enquanto que na segunda parte da prova do teorema 4.12 nós provamos que com alta probabilidade mais do que 10 variáveis sobrevivem a restrição aleatória. Enquanto isso, é fácil perceber que uma função aleatória com probabilidade muito alta não será constante após termos restringidos algumas de suas variáveis mas não todas.

Além do mais, nós podemos em tempo polinomial dado a tabela verdade de uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ codificada por uma string de tamanho 2^n verificar se esta mesma função f colapsa para uma árvore de decisão após termos aplicado uma restrição às suas variáveis de entrada, assim como fizermos na prova do teorema 4.12. O algoritmo simplesmente itera sobre todas as restrições ρ à um número fixo de variáveis, e verifica se existe alguma árvore de decisão de profundidade 10 sobre as variáveis que sobreviveram a restrição que computa a função $f_{|\rho}$. Este algoritmo executa em $2^{\mathcal{O}(n)}$ passos que é polinomial no tamanho da entrada.

Então, seja $f_1, f_2, \ldots$ qualquer família de funções em AC^0. Nós iremos considerar o seguinte jogo:

1. Com probabilidade $1/2$ faça f ser uma função tirada aleatoriamente e uniformemente da sequência acima e com probabilidade $1/2$ faça f ser uma função verdadeiramente aleatória.

2. Um algoritmo A recebe a tabela verdade de f e deve dar como saída 1 se f foi tirada da sequência em AC^0 e 0 se f for uma função aleatória.

Nós podemos tomar A como sendo o algoritmo que tira algumas restrições aleatórias que deixam algumas mas não todas variáveis de f livres e verifica se a função f após ser atingida por alguma dessas restrições colapsa para uma função computável por uma árvore de decisão de profundidade 10. Temos então que com alta probabilidade A vai dar a resposta correta e portanto a sequência em AC^0 é distinguível em tempo polinomial e não pode ser uma sequência de funções pseudo-aleatórias. Isso quer dizer que a prova do teorema 4.12 necessita do fato que a classe AC^0 não contém funções pseudoaleatórias. Indo na outra direção, se fosse o caso que AC^0 tivesse funções pseudo-aleatórias, nós necessariamente precisariamos de uma outra estratégia de prova para provar que as funções paridades não estão em AC^0.

Vamos agora generalizar o argumento acima. Nós temos que se acredita que as classes TC^0 e NC^1 contêm funções pseudoaleatórias. O nosso objetico é nos convencer que uma estratégia que usa uma prova natural necessariamente deva falhar em provar limitantes inferiores contra estas duas classes. Então precisamos definir o que Razborov e Rudich queriam dizer por provas naturais.

[1] Uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ "verdadeiramente aleatória" seria uma função cuja sua tabela verdade é a saída de um algoritmo que gera uma string de tamanho 2^n setando cada bit da string como sendo 1 com probabilidade $1/2$ e 0 também com probabilidade $1/2$. Por outro lado, uma função pseudo-aleatória seria uma função cuja tabela verdade é tirada de alguma distribuição $\mathcal{D}$ sobre as strings de tamanho 2^n que não necessariamente seja a distribuição uniforme e que para todo algoritmo probabilístico A que roda em tempo polinomial deve satisfazer $|\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\mathcal{D}}[A(\boldsymbol{x}) = 1] - \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^{2^n}}[A(\boldsymbol{x}) = 1]| < 1/p(n)$, em que p pode ser qualquer polinômio

Propriedades naturais. *(Razborov, Rudich [RR94])*

Uma propriedade de funções $\mathcal{P}$ é um subconjunto do conjunto de todas funções Booleanas. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ classes de complexidade. Nós dizemos que $\mathcal{P}$ é uma propridade $\mathcal{C}_1$-natural se existe um algoritmo A que aceita todas as tabelas verdades de funções em $\mathcal{P}$ e também satisfaz o seguinte:

1. *(Utilidade) Se $f \in \mathcal{C}_2$ então $A(f) = 0$.*
2. *(Construtividade) A é computável em $\mathcal{C}_1$.*
3. *(Densidade) $A(1) = 1$ para uma fração maior do que $1/n^{\mathcal{O}(1)}$ das funções de n variáveis.*

Usando um raciocínio parecido com o que usamos, podemos enunciar o seguinte princípio: se existe uma prova $\mathcal{C}_1$-natural contra a classe $\mathcal{C}_2$ então existe um algoritmo em $\mathcal{C}_1$ que distingue todas as funções em $\mathcal{C}_2$ de funções verdadeiramente aleatórias. Em particular, $\mathcal{C}_2$ não pode conter funções pseudo-aleatórias.

Em [RR94], Razborov e Rudich demonstraram que basicamente todas estratégias de prova usadas para limitantes inferiores em complexidade de circuito até então caiam no escopo das provas naturais. Nós temos um conflito então. Nós poderiamos querer usar provas naturais como as que vem sendo utilizadas para provar limitantes inferiores para classes restritas de circuitos. No entanto, para alcançar tal objetivo é necessário quebrar funções pseudoaleatórias.

5.2 Limitantes inferiores a partir de algoritmos eficientes

No exemplo que nós demos no ínicio do capítulo sofre com o defeito de ter $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$ como sua hipótese, que por si só é um problema que ninguém faz ideia de como resolver. Então podemos exigir menos e nos perguntar se ainda podemos obter limitantes inferiores. O objetivo desta seção é mostrar alguns dos ingredientes utilizados para provar que $\mathsf{NEXP} \not\subseteq \mathcal{C}$ segue de algum algoritmo rápido para o problema $\mathcal{C}$-SAT. Nós iremos seguir o texto de Williams [Wil11] em que ele tentar explicar a linha de raciocínio que ele seguiu para provar os resultados em [Wil13] e [Wil14]. Ao longo desta seção uma classe de circuitos $\mathcal{C}$ são classes de complexidade como ACC^0 ou $\mathsf{P/poly}$, etc.. Se denotarmos $\mathcal{C}[s(n)]$, para alguma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, nós estamos querendo dizer a subclasse de $\mathcal{C}$ que contém todos as famílias de circuitos em $\mathcal{C}$ de tamanho $s(n)$. As linguagens $\mathcal{C}$-SAT, que são apenas uma generalização de $\mathsf{CIRCUIT\text{-}SAT}$, são definidas a seguir.

Definição 5.2. *(As linguagens $\mathcal{C}$-SAT)*

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de circuitos. Dado um circuito C de n entradas que pertence a uma família de circuitos em $\mathcal{C}$ o problema é decidir se existe uma string $x \in \{0,1\}^n$ tal que $C(x) = 1$, e se for o caso nós dizemos que C é satisfazível. Então, $\mathcal{C}$-SAT é definida da seguinte forma:

$$\mathcal{C}\text{-}\mathsf{SAT} = \{\langle C\rangle |\ \textit{o circuito } C \textit{ pertence a uma família de circuitos em } \mathcal{C} \textit{ e } C \textit{ é satisfazível}\}.$$

Decidir se C pertence a uma família de circuitos em $\mathcal{C}$ não é parte do problema, pode-se assumir que todas instâncias de $\mathcal{C}$-SAT são circuitos de tal tipo.

Vamos dizer que um algoritmo para o problema $\mathcal{C}$-SAT é não trivial se ele executa em tempo $2^n/s(n)$, em que $s(n)$ é uma função superpolinomial. Nós iremos começar assumindo que o problema $\mathcal{C}$-SAT tem um algoritmo não-trivial, e então veremos como decidir qualquer problema em $\mathsf{NTIME}(2^n)$ em tempo $2^n/\alpha(n)$, em que $\alpha(n)$ é também uma função superpolinomial, contradizendo o teorema da hierarquia de tempo não-determinístico. Para demonstrar que podemos acelerar computação de uma linguagem em $\mathsf{NTIME}(2^n)$ é escolhido um único problema NEXP-completo e depois é demonstrado que ao assumir a existência de um algoritmo não trivial

para $\mathcal{C}$-SAT e que NEXP $\subseteq \mathcal{C}$ nós podemos decidir este problema NEXP-completo eficientemente. Usando algumas reduções eficientes para o problema NEXP-completo nós então podemos afirmar que todo problema em NTIME(2^n) também pode ser decido em tempo $2^{o(n)}$, chegando na contradição desejada.

Seja $\mathcal{C}$ alguma classe de circuito. Nós a partir de agora vamos assumir que $\mathcal{C}$[poly(n)]-SAT tem um algoritmo não-trivial que iremos chamar de $A_{\mathcal{C}\text{-SAT}}$. Também estamos assumindo que NEXP $\subseteq \mathcal{C}$[poly(n)]. Nosso objetivo é contradizer o teorema da hierarquia não-determinística, e assim que conseguirmos tal feito nós vamos poder afirma o seguinte.

$$\mathcal{C}[\text{poly}(n)]\text{-SAT tem um algoritmo não-trivial } \Rightarrow \text{NEXP} \nsubseteq \mathcal{C}[\text{poly}(n)].$$

Obtendo uma linguagem NEXP-completa

Nós podemos considerar um método de se obter linguagens NEXP-completas usando descrições sucintas às instâncias de uma linguagem L. Nós primeiro precisamos da seguinte convenção: se C é um circuito e x é uma string descrevendo o circuito C então TT(x) denota a string que representa a tabela verdade de C [2].

Definição 5.3. *Seja L uma linguagem qualquer. Então a linguagem* SUCCINT-L *contém todas as strings x tais que* TT(x) *é uma string em L.*

Graças a um teorema de Papadimitriou e Yannakakis [PY86] podemos afirmar que se L é uma linguagem NP-completa com respeito a um certo tipo de redução [3] então a linguagem SUCCINT-L é NEXP-completa. Pode-se considerar 3SAT como sendo a linguagem NP-completa e pelo teorema da hierarquia para tempo não determinístico temos que a linguagem NEXP-completa SUCCINT-3SAT não pode ser computada muito eficientemente como mostra o teorema a seguir.

Teorema 5.4. *(Um limitante inferior para* SUCCINT-3SAT*)*

Seja M uma máquina de Turing não-determinística que decide a linguagem SUCCINT-3SAT*. Então para todo n_0 suficientemente grande existe um $n \geq n_0$ e uma string $x \in \{0,1\}^n$ tal que M executa em tempo $2^{n-\mathcal{O}(\log n)}$ ao receber x em sua fita de entrada.*

Isto é verdade pois se temos um algoritmo que roda em tempo $2^n/\omega(n)$ para a linguagem SUCCINT-3SAT nós podemos eficientemente reduzir instâncias de uma linguagem $L \in$ NTIME($2^{\mathcal{O}(n)}$) arbitrária para uma instância de SUCCINT-3SAT e depois usar o algoritmo rápido para este último problema para decidir L em tempo $o(2^n)$. Isto implicaria em NTIME(2^n) $\subseteq$ NTIME($o(2^n)$), uma contradição ao teorema da hierarquia para tempo não-determinístico. Esta redução eficiente tem as seguintes características:

Definição 5.5. *(Redução de Cook-Levin eficiente para* SUCCINT-3SAT*)*

Uma redução de Cook-Levin eficiente R de uma linguagem L em NTIME(2^n) *para a linguagem* SUCCINT-3SAT *satisfaz o seguinte.*

- *Para toda string x, $x \in L \iff R(x) \in$* SUCCINT-3SAT*.*
- *R roda em tempo polinomial.*
- *Para n suficientemente grande e todo $x \in \{0,1\}^n$, $R(x)$ é a descrição em string de um circuito sobre $n + 4\log n$ variáveis e tamanho* poly(n)*.*

[2] Se C é um circuito de n entradas e x é uma string descrevendo C então TT(x) é uma string de tamanho 2^n em que o i-ésimo bit de TT(x) é 1 se e somente se $C(x^{(i)}) = 1$, em que $x^{(i)}$ é a i-ésima string de tamanho n na ordem lexicográfica.

[3] Em que cada bit da redução pode ser computado eficientemente (em tempo polilogarítmico) olhando para apenas uma quantidade polilogarítmica dos bits da entrada.

E daí temos que toda linguagem em $\mathsf{NTIME}(2^n)$ tem uma redução de Cook-Levin eficiente para SUCCINT-3SAT.

Teorema 5.6. *([Wil11])*

Para toda linguagem $L \in \mathsf{NTIME}(2^n)$, existe uma redução de Cook-Levin eficiente de L para SUCCINT-3SAT*.*

Agora temos que para encontrar uma contradição ao teorema da hierarquia de tempo não-determinístico, basta provar que existe um algoritmo eficiente para a linguagem SUCCINT-SAT.

Circuitos certificados

Para qualquer string x podemos ver $\mathsf{TT}(x)$ como sendo um certificado que pode ser usado como entrada para um verificador de uma linguagem.

Definição 5.7. *(Circuitos certificados)*

Se L for uma linguagem qualquer e V for um verificador para L de forma que $x \in L \iff \exists w$ tal que $V(x, w) = 1$, então dizemos que L admite um circuito certificado na classe de circuitos $\mathcal{C}$ se existe uma família de circuitos C_L em $\mathcal{C}$ de forma que para todo $x \in L$ existe uma string w_x que codifica um circuito C_{w_x} em C_L e é tal que $V(x, \mathsf{TT}(w_x)) = 1$.

O seguinte teorema provado por Williams em [Wil13] segue diretamente de um teorema de Impagliazzo, Kabanets e Wigderson.

Teorema 5.8. *([IKW02, Wil11])*

Assuma que $\mathsf{NEXP} \subseteq \mathcal{C}$*, então* SUCCINT-3SAT *admite circuitos certificados em $\mathcal{C}$.*

Construindo um algoritmo eficiente para SUCCINT-3SAT

Agora que já sabemos que SUCCINT-3SAT admite circuitos certificados em $\mathcal{C}[\mathsf{poly}(n)]$ (pois para efeito de contradição estamos assumindo que $\mathsf{NEXP} \subseteq \mathcal{C}[\mathsf{poly}(n)]$), vamos considerar o seguinte algoritmo não-determinístico para decidir SUCCINT-3SAT. O algoritmo pode parecer bem óbvio mas vai servir de ponto de partida para a construção do algoritmo eficiente.

Algoritmo para linguagem SUCCINT-3SAT. *Sobre entrada $x \in \{0,1\}^*$:*

1. *Não-deterministicamente adivinhe um circuito certificado em $\mathcal{C}[\mathsf{poly}(n)]$ codificado pela string w_x.*
2. *Rode um verificador V para a linguagem* SUCCINT-3SAT *sobre a entrada $(x, \mathsf{TT}(w_x))$ e aceite se e somente se V aceita.*

O primeiro passo pode ser executado em tempo não-determinístico polinomial já que um circuito de tamanho polinomial tem uma descrição em string de tamanho polinomial. O segundo passo necessita de tempo exponencial porém, já que precisamos de $\mathsf{poly}(n)2^{\mathcal{O}(n)}$ passos para computar $\mathsf{TT}(w_x)$ a partir de w_x. O nosso objetivo é acelerar este segundo passo e para isso iremos usar que estamos assumindo ser verdade que $\mathcal{C}[\mathsf{poly}(n)]$-SAT tem um algoritmo não-trivial.

Seja x uma instância do problema SUCCINT-3SAT, e suponha que $\mathsf{TT}(x)$ codifica uma fórmula 3-FNC de m cláusulas. Nós iremos considerar um circuito C_x que dado um índice $i \in [m]$, C_x dá como saída os índices das variáveis presente na i-ésima cláusula da fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$ mais três bits indicando quais variáves

aparecem negada. Então, se exigirmos que o circuito $\mathsf{TT}(w_x)$ seja uma atribuição às variáves da fórmula nós já podemos parcialmente realizar o nosso objetivo de decidir se $\mathsf{TT}(x)$ codifica uma fórmula satisfazível, pois para alguma cláusula arbitrária nós podemos decidir se a atribuição $\mathsf{TT}(w_x)$ a satisfaz. O que nos resta fazer é "apenas" decidir o mesma para todas as outras cláusulas.

Constroi-se então um circuito que vai nos auxiliar a decidir se $\mathsf{TT}(w_x)$ satisfaz todas cláusulas da fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$. O que nós podemos fazer é ligar as saídas do circuito C_x nas entradas de três cópias de um circuito C_{w_x} de forma que se a entrada de C_x for um índice i então cada cópia de C_{w_x} irá receber o índice de uma das variáveis que aparecem na i-ésima cláusula da fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$ mais um bit de controle indicando se a variável aparece negada. O circuito C_{w_x} é basicamente uma cópia do circuito descrito pela string w_x com a adição do bit de controle na saída que irá inverter a saída se o bit for 1. Este mecanismo é necessário pois queremos que a saída de C_{w_x} tenha o mesmo valor que um literal que pode estar negado ou não. Também fazemos com que cada saída das cópias de C_{w_x} alimentem uma única porta $\wedge$. Chame o circuito que tem como porta de saída esta porta $\wedge$ de D. Então podemos afirmar que $D(i) = 1$ se e somente a i-ésima cláusula da fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$ é satisfeita pela atribuição $\mathsf{TT}(w_x)$. Agora o que acontece se ligarmos a saída de D a uma porta $\neg$?

- $D(i) = 0 \Rightarrow \neg D(i) = 1$ e as duas afirmações a seguir são verdadeiras:
  (a) $\mathsf{TT}(w_x)$ não satisfaz a fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$.
  (b) $\neg D$ é satisfazível.
- $D(i) = 1 \Rightarrow \neg D(i) = 0$ e não sabemos se o circuito $\neg D$ é satisfazível. Porém, se $D(i) = 1$ para *todos* $i \in [m]$ então ambas as afirmações a seguir são verdadeiras:
  (a) $\mathsf{TT}(w_x)$ satisfaz a fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$.
  (b) $\neg D$ não é satisfazível.

Ou seja, $\neg D$ não é satisfazível se e somente se $\mathsf{TT}(w_x)$ satisfaz a fórmula codificada por $\mathsf{TT}(x)$. Finalmente, D pode ser construído em tempo polinomial pois só precisamos fazer algumas consultas aos bits de x e w_x. Então eis o algoritmo eficiente para SUCCINT-3SAT:

Algoritmo eficiente para linguagem SUCCINT-3SAT. *Sobre entrada* $x \in \{0,1\}^*$*:*

1. *Não-deterministicamente adivinhe um circuito certificado em* $\mathcal{C}[\mathsf{poly}(n)]$ *codificado pela string* w_x*.*
2. *Construa o circuito* D *a partir de* C_x *e três cópias de* C_{w_x}*.*
3. *Rode o algoritmo* $A_{\mathcal{C}\text{-SAT}}$ *sobre uma descrição do circuito* $\neg D$ *e aceite se e somente se* $A_{\mathcal{C}\text{-SAT}}$ *rejeita.*

Os dois primeiros passos do algoritmo podem rodar em tempo polinomial. O tempo necessário para executar o último passo é igual ao tempo necessário para rodar $A_{\mathcal{C}\text{-SAT}}$, que estamos assumindo ser $2^n/\mathsf{superpoly}(n)$. Portanto, podemos afirmar que SUCCINT-3SAT tem um algoritmo não-determinístico que roda em tempo $2^{n-\omega(\log n)}$, contradizendo o teorema 5.4.

Em [Wil14], Ryan Williams foi capaz de aplicar o seu próprio método para obter o seguinte resultado.

Teorema 5.9. *([Wil14])* $\mathsf{NEXP} \not\subseteq \mathsf{ACC}^0$*.*

Lembrando que ACC^0 contém circuitos de tamanho polinomial, profundidade constante que além das portas lógicas usuais ($\vee$, $\wedge$, $\neg$) também faz uso de portas mod_m. Ele conseguir provar o teorema acima dando um algoritmo não trivial para o problema ACC^0-SAT. Note que ainda não se sabe se ACC^0 tem ou não funções

pseudo-aleatórias, portanto não se pode dizer que este resultado de fato ultrapassa a barreira das provas naturais pois pode ser o caso que não exista barreira alguma para superar.

Alguns textos que falam a respeito do assunto desta seção (além de [Wil11]) mas que tenham mais rigor e provas são [Oli13] e [S$^+$13]. Esta é uma área de pesquisa intensa e também promissora que além de limitantes inferiores para circuitos também tem aplicações em diversas áreas da teoria da computação como aprendizagem computacional e desaleatorização, além de motivar a pesquisa em algoritmos para o problema da satisfazibilidade de circuitos. Importante notar também que não precisamos de nenhuma matemática complicada, somente é preciso ter um grande conhecimento de resultados em complexidade computacional.

Capítulo 6

Conclusões

A complexidade computacional contém várias questões de grande interesse científico ainda a serem explorados. Para este trabalho eu foquei mais em entender o máximo possível a prova dos resultados discutidos nos capítulos anteriores e infelizmente eu não pude escrever a respeito de tudo que eu gostaria inicialmente. Então irei usar esta oportunidade para escrever brevemente sobre alguns tópicos de complexidade de circuito que me chamaram a atenção. Todos estes tópicos estão, assim como todo o resto da área de complexidade computacional, repletas de problemas em abertos que são tópicos de intensa pesquisa atualmente. Ainda assim eu deixarei de fora alguns tópicos importantes como a relação entre complexidade de circuitos e criptografia, desaleatorização, complexidade de comunicação, etc..

O método da aproximação de Razborov-Smolensky para provar limitantes inferiores

Este método é baseado no seguinte teorema provado por Razborov em [Raz87].

Teorema 6.1. *(Razborov, [Raz87])*

Seja p algum número primo. Para todo $l > 0$ e para todo circuito ACC^0 C sobre as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com portas lógicas para a função $\mod_p$ *de tamanho s e profundidade d, existe um polinômio $p \in \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de grau $((p-1)l)^d$ tal que*

$$\Pr[C(x) \neq p(x)] < s/2^l.$$

Então, podemos provar limitantes inferiores para funções como Parity e Majority distinguindo elas de funções aproximadas por polinômios de grau pequeno. Em [Smo87] Smolensky considerou as funções de Hilbert $h_k(S)$ que é igual a dimensão do espaço vetorial gerado por todos os vetores formados por polinômios de grau no máximo k restritos à entradas no conjunto S [1]. Daí, pode-se provar que para valores pequenos de k, $h_k(S)$ não é muito grande enquanto que para funções como Parity e Majority se considerarmos S como sendo o conjunto dos zeros destas funções (o conjunto de todas strings com um número par de 1s no caso de Parity e o conjunto de strings com peso de Hamming no máximo $n/2$ no caso de Majority) pode-se provar que $h_k(S)$ atinge o seu valor máximo.

Uma nova prova para os resultados de Razborov e Smolensky foi apresentada por Kopparty e Srinivasan em [KS12] utilizando o que eles chamam de método polinomial. Motivados em provar uma existência de hierarquia de tamanhos para circuitos de profundidade constante e fan-in arbitrários, eles mostraram que

[1] Para cada polinômio p temos um vetor que tem como componentes o valor de p sobre cada entrada no conjunto S.

pode-se usar a noção de polinômios certificados para distinguir circuitos $\mathsf{AC}^0[2]$ [2] de tamanho quase linear das funções chamadas de $(a, n-a)$-*Approximate Majority* [3]. Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ uma função Booleana qualquer, um polinômio $P : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ é dito ser um polinômio certificado para f se f é constante no conjunto $\{x \in \{0,1\}^n | P(x) = 0\}$. Então, eles provaram um resultado geral o qual afirma que uma função f ser ε-aproximável por um polinômio de grau pequeno implica na existência de um polinômio certificado de grau pequeno para f, de certa forma adaptando o resultado do teorema 6.1 para polinômios certificados no lugar de polinômios que aproximem a função computada pelo circuito. A partir deste resultado geral pode-se distinguir circuitos $\mathsf{AC}^0[2]$ de tamanho subexponencial da função Majority.

Note que as funções Parity_n trivialmente estão em $\mathsf{ACC}^0[2]$ pois é preciso somente um porta mod_2 para computá-las. Então provar limitantes inferiores para a classe $\mathsf{ACC}^0[2]$ pode ser vista como o próximo passo natural após ter sido provado que as funções Parity_n não estão em AC^0, pois agora estamos dando de graça para o circuito a função que foi provada ser difícil.

Limitantes inferiores para complexidade monotônica

Um circuito monotônico é um circuito Booleano sobre a base (não completa) $\{\wedge, \vee\}$. Pode-se verificar que uma função Booleana f é computável por um circuito monotônico se e somente se f é uma função monotônica no seguinte sentido: sejam $x, y \in \{0,1\}^n$, nós dizemos que $x \preceq y$ se é sempre verdade que $x_i = 1 \Rightarrow y_i = 1$, então f é monotônica se para todo $x \preceq y$, vale que $f(x) \leq f(y)$. Em outras palavras, mudar qualquer bit da entrada de f de 0 para 1 não fará o valor de f mudar de 1 para 0.

Pode-se pensar que considerando este modelo aparentemente mais simples de circuitos Booleanos podemos provar limitantes inferiores para alguns problemas de interesse. Ainda nos anos 80, Razborov provou que a função característica do problema NP-completo CLIQUE [4] não tem circuitos monotônicos de tamanho polinomial [Raz85] quando nos restringimos a encontrar cliques de tamanho k para valores de k que crescem suficientemente rápido com o número de vértices n e $k \leq n^{1/4}$. Este resultado já é um grande avanço considerando o que ainda sabemos do caso não monotônico. Logo após, Alon e Boppana obteram um limitante inferior exponencial para o mesmo problema [AB87]. Eles mostraram que circuitos monotônicos para detectar cliques de tamanho k em grafos com n vértices, para $k \leq \frac{n^{2/3}}{\log^{2/3} n}$, necessitam ter tamanho $2^{\Omega(\sqrt{k})}$. Ainda mais impressionate, Razborov também provou que o problema do emparelhamento perfeito de grafos [5] também não tem circuitos monotônicos de tamanho polinômial [Raz85]. Considerando que este último problema está em P e que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P/poly}$ nós temos que a relação entre a complexidade de circuitos monotônico e não monotônico de uma função pode nem mesmo ser polinomial. Finalmente, Tardos em [Tar88] provou que um problema em P não admite circuitos monotônicos de tamanho *exponencial*, estabelecendo então que a complexidade de circuitos monotônica e não monotônica diferem-se exponencialmente.

Os capítulos sobre complexidade monotônica de fórmulas e circuitos do livro do Stasys Jukna [Juk12] é uma boa referência para o que foi dito aqui sobre complexidade monotônica e muito mais.

[2] Lembrando: circuitos AC^0 com acesso à portas lógicas para a função mod_2

[3] Uma função Booleana f é dita ser uma $(a, n-a)$-*Approximate Majority* se f é 0 para todas entradas com peso de Hamming $\leq a$ e 1 para todas entradas com peso de Hamming $\geq n - a$. Sendo assim, a função Majority de n entradas é a única função $(n/2, n/2)$-*Approximate Majority*, quando consideramos apenas n ímpares.

[4] Nós podemos representar um grafo simples de n vértices por uma string de tamanho $\binom{n}{2}$ indicando a presença de cada uma das possíveis arestas. No problema CLIQUE é também parametrizado por um inteiro k e dado um grafo G queremos decidir se existe um clique de tamanho k em G. Note que a propriedade de ter um clique de tamanho k é monotônica pois adicionando uma nova aresta no grafo só pode acrescentar novos cliques.

[5] Dado um grafo $G = (V, E)$ um emparelhamento perfeito seria um subconjunto $M \subseteq E$ em que o subgrafo induzido por M é 1-regular e contém todos os vértices em V. Ou seja, cada vértice em V é adjacente à exatamente uma única aresta de M. Então, o problema de decisão em questão é decidir se existe tal subconjunto entres as arestas de G. Claramente temos um função monotônica pois adicionar uma aresta no grafo só pode acrescentar um novo emparalhamento perfeito.

Circuitos aritméticos

Ao longo deste trabalho nós consideramos apenas circuitos que operam sobre valores Booleanos. Mas podemos também considerar circuitos que operam sobre algum corpo e que representam polinômios sobre estes corpos, o que são conhecidos como circuitos aritméticos. Em um circuito aritmético sobre o corpo $\mathbb{F}$ as entradas são variáveis que recebem valores em $\mathbb{F}$ ou constantes em $\mathbb{F}$, enquanto que cada porta lógica tem fan-in 2 e computam uma das operações em $\{+, \times\}$. Podemos dizer que uma famĺia de polinômios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é representável por uma família de circuitos aritméticos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se para todo $n \in \mathbb{N}$ é verdade que C_n representa o polinômio p_n. Nós definimos a profundidade e tamanho de um circuito aritmético da mesma forma que fazemos para circuitos Booleanos, e o mesmo vale para família de circuitos aritméticos.

No caso em que estamos considerando funções Booleanas a questão central é P vs NP. No mundo algebráico a respectiva questão é relacionada ao problema NC vs $\#\mathsf{P}$, em que $\#\mathsf{P}$ é a classe de problemas em que o número de certificados pode eficientemente ser contado. Precisamente, interessa-se saber qual é a relação entre a complexidade de computar o *determinante* de uma matriz e a complexidade de computar o *permanente*. Dado uma matrix $A = (a_{i,j})_{i,j\in[n]}$, o seu determinante é dado pelo polinômio [6]

$$\mathsf{Det}(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}, \tag{6.1}$$

em que S_n é o conjunto de todas permutações de n elementos e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é 1 se há um número par de inteiros em $i \in [n]$ tal que $\sigma(\sigma(i)) < \sigma(i)$ e -1 caso contrário. O problema de decisão para o determinante está em NC e portanto tem circuitos Booleanos de tamanho polinomial. Também é verdade que o polinômio em 6.1 pode ser representado por um circuito aritmético de tamanho polinomial. Então este é o nosso problema fácil. Por outro lado, o permanente de A é o seguinte polinômio que é quase idêntico ao polinômio para o determinante:

$$\mathsf{Perm}(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{6.2}$$

Ou seja, o cálculo do permanente é apenas o determinante sem a troca de sinais. Apesar dos dois polinômios serem tão parecidos, a complexidade deles podem ser bem diferentes. De fato, conjectura-se que o permanente é exponencialmente mais difícil do que o determinante, o que não é nada absurdo de se pensar pois o determinante é basicamente um problema NC-completo enquanto que o permanente é $\#\mathsf{P}$-completo, duas classes que a princípio parecem estar bem distantes. Nós dizemos que podemos embarcar o permanente de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ em uma matriz $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, em que $m = D(n)$ para alguma função $D(n) \geq n$, se cada entrada da matriz B é uma combinação afim das entradas da matriz A e $\mathsf{Perm}(A) = \mathsf{Det}(B)$. Daí que entra a conjectura de Valiant.

Conjectura 6.2 (Conjectura de Valiant)**.** *A função $D(n)$ cresce superpolinomialmente para corpos com característica* [7] *diferente de 2.*

Para corpos de característica 2 tanto o determinante quanto o permanente são equivalentes ao problema de contar o número de emparalhamentos perfeitos em um grafo.

Se a conjectura de Valiant for verdadeira então segue que o permanente não tem circuitos aritméticos de tamanho subexponencial. Isto segue pois o determinante é completo para a classe de família de polinômios com circuitos aritméticos no seguinte sentido.

[6] Estamos vendo as entradas da matriz como variáveis de entrada de um polinômio de múltiplas variáveis.

[7] A característica de um corpo $\mathbb{F}$ é o menor número n tal que $\sum_{i=1}^{n} 1 = 0$, em que 1 e 0 são as identidades multiplicativas e aditivas de $\mathbb{F}$. Se for o caso que tal número n não existe então dizemos que $\mathbb{F}$ tem característica 0. Em especial, se p é um número primo então a característica do corpo primo $\mathbb{F}_p$ é p.

Teorema 6.3. *Seja $\mathbb{F}$ algum corpo arbitrário. Se $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma família de polinômios em que cada $f_n \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ com fórmulas aritméticas de tamanho $s(n)$ então existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{(s(n)+1)\times(s(n)+1)}$ cuja as entradas são combinações afim das variáveis de p_n e para todo $x \in \mathbb{F}^n$, $p_n(x) = \mathsf{Det}(A)$.*

Em [VSBR83], Valiant, Skyum, Berkowitz e Rackoff também provaram que se for o caso que Perm tem circuitos aritméticos de tamanho polinomial então Perm também tem fórmulas aritméticas de tamanho $2^{\mathcal{O}(\log^2 n)}$, portanto provar que $D(n) = n^{\omega(\log n)}$ seria o suficiente para provar um limitante inferior superpolinomial para o tamanho de circuitos aritméticos para Perm.

Uma peculiaridade de circuitos aritméticos é que é muito mais difícil provar limitantes inferiores para circuitos de profundidade constante se comparado ao caso de circuitos Booleanos. Isto se deve ao fato que provar limitantes inferiores para circuitos aritméticos de profundidade 4 é suficiente para provar limitante inferiores para circuitos de profundidade $d > 4$ devido a alguns resultados que nos permitem reduzir a profundidade de circuitos aritméticos sem ter que pagar muito em número de portas adicionais. Já em 83, Valiant, Skyum, Berkowitz e Rackoff mostraram que circuitos aritméticos sobre n variáveis que computam polinômios de grau $r = \mathsf{poly}(n)$ podem ser convertidos em circuitos aritméticos de tamanho polinomial em n e profundidade $\mathcal{O}(\log^2 r)$ que representam os mesmos polinômios [VSBR83]. Em particular, isto significa que $\mathsf{P/poly} = \mathsf{NC}^2$ [8] no mundo de circuitos aritméticos, bem diferente do que se acredita acontecer quando estamos falando de complexidade de circuitos Booleanos.

Ao falar de circuitos aritméticos de profundidade constante nós iremos assumir que eles estão organizados em camadas alternantes de porta aditivas e portas multiplicativas, em que a porta lógica no último nível é uma porta $+$. Nós denotamos um circuito aritmético de profundidade 3 por $\Sigma\Pi\Sigma$, um circuito aritmético de profundidade 4 por $\Sigma\Pi\Sigma\Pi$, e por aí vai. Em [AV08], Agrawal e Vinay provaram o seguinte teorema:

Teorema 6.4 (Agrawal, Vinay [AV08])**.** *Seja $\mathbb{F}$ um corpo qualquer. Qualquer família de polinômios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, em que cada $p_n \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tem grau $d(n) = \mathcal{O}(n)$, é representável por um circuito $\Sigma\Pi\Sigma\Pi$ de tamanho $2^{o(d(n)+n\log(\frac{n}{d(n)}))}$.*

Graças ao teorema 6.4 podemos afirmar o seguinte: se quisermos provar que, por exemplo, o polinômio $\mathsf{Perm}(A)$ em 6.2 não tem circuitos aritméticos de tamanho subexponencial, basta provar que qualquer circuito aritmético que computa $\mathsf{Perm}(A)$ e que tenha profundidade somente 4 necessita ter tamanho exponencial. Além do mais, somente é necessário provar o mesmo limitante inferior para circuitos *homogêneos* [9], que são uma classe mais restrita de circuitos aritméticos. Outros resultados de redução de profundidade foram obtidos desde então, sempre restringido a classe de circuitos [Koi12, Tav15]. Em especial, Gupta, Kamath, Kayal, e Saptharishi [GKKS13] provaram que um limitante inferior de $n^{\Omega(\sqrt{n})}$ para o tamanho de circuitos $\Sigma\Pi\Sigma$ que representam o polinômio $\mathsf{Perm}(A)$ implicaria em um limitante inferior para circuitos aritméticos de profundidade arbitrária para $\mathsf{Perm}(A)$, exceto que o resultado é verdadeiro somente para corpos com característica 0 e não mais podemos assumir que o circuito $\Sigma\Pi\Sigma$ é homogêneo.

Os textos [SY+10] e [Sar14] discutem muito do que o é estado da arte de complexidade de circuitos aritméticos, incluindo alguns limitantes inferiores e a relação da complexidade aritmética com o problema de *desaleatorizar* PIT (*Polynomial Identity Test*) [10].

[8] Na linguagem de complexidade aritmética este resultado nos diz que $\mathsf{VP} = \mathsf{VNC}^2$ em que VP é a classe de polinômios de n variáveis e grau $\mathsf{poly}(n)$ que são representáveis por circuitos aritméticos de tamanho polinomial, enquanto que VNC^2 seria uma subclasse de VP que contém polinômios representáveis por circuitos aritméticos de tamanho polinomial e profundidade $\mathcal{O}(log^2 n)$. O V no nome das duas classes vem de Valiant quem as definiu pela primeira vez.

[9] Um polinômio é homogêneo se todos os seus monômios têm o mesmo grau. Exemplos de polinômios homogêneos são $\mathsf{Det}(A)$ que vimos em 6.1 e $\mathsf{Perm}(A)$ que vimos em 6.2. Um circuito aritmético é dito ser homogêneo se todas as suas portas computam um polinômio homogêneo.

[10] No problema PIT é dado acesso a algum circuito aritmético C e queremos decidir se C representa o polinômio 0. Usando o lema de Schwartz-Zippel (ver [AB09], Lema A.36), este problema admite um algoritmo *probabilístico* eficiente. Porém, o melhor algoritmo determinístico para PIT é exponencial.

Comentários finais

Neste trabalho nós vimos como alguns dos primeiros resultados de limitantes inferiores em circuitos Booleanos foram motivados pela descoberta da barreira da diagonalização por Baker, Gill e Solovay que nos vimos em 2.48. Tal barreira foi de certa forma um choque devido ao sucesso que técnicas de diagonalização tiveram em provar alguns teoremas de hierárquia. Mas para a comunidade de pesquisadores de complexidade computacional ficou como lição que para tentar atacar questões mais difíceis como P vs NP são necessários argumentos que identificam alguma "estrutura" na noção ainda pouca conhecida de computabilidade, e por isso objetos combinatórios como circuitos Booleanos começaram a ser estudados mais a fundo.

Os métodos de restrições e projeções aleatórias que vimos no capítulo 4 são um bom exemplo da ideia de olhar para a estrutura da computação. Em ambos os casos faz-se uso de repetidas transformações às variáveis de entrada que provadamente reduzem a profundidade do tipo de circuito que estamos considerando – o que no caso seria circuitos AC^0 – até ser possível provar um resultado mais fácil a respeito de uma classe bem mais limitada de dispositivos computacionais (árvores de decisão de profundidade constante). Porém, a barreira das provas naturais surgiram e a comunidade da complexidade computacional teve que mais uma vez lidar com o fato que as técnicas até então conhecidas eram triviais demais para os grandes problemas em aberto da área. O problema agora era que os limitantes inferiores obtidos não só separam uma classe de complexidade de algum problema de interesse, mas também, com os mesmos argumentos, separam a classe em questão de funções verdadeiramente aleatórias, o que entra em conflito com algumas conjecturas a respeito da existência de primitivas criptográficas em algumas classes de circuito.

Apesar da barreira das provas naturais ainda muitos resultados de limitantes inferiores – em especial limitantes inferiores em complexidade de circuitos aritméticos [11] – foram provado seguindo a mesma ideia de achar alguma propriedade que é verdadeira para uma determinada classe de complexidade e depois achar um único problema que seja relevante o suficiente que não satisfaça tal propriedade. O que é interessante nesta estratégia é que para achar estas propriedades comumente só precisamos pensar a respeito de coisas como funções Booleanas, grafos e polinômios, que já foram extensivamente estudados pela comunidade matemática. Pensando desta forma talvez seja o caso que buscar limitantes inferiores para modelos computacionais que tenham uma boa representação matemática não seja muito diferente da tarefa de buscar algoritmos eficientes. Isto é particularmente verdadeiro se a gente pensar que o sucesso que pesquisadores obteram em encontrar algoritmos eficiente para diversos problemas é normalmente justificado pelo fato que o trabalho era somente encontrar um único algoritmo que funcione para determinado problema, diferente de provas de limitantes inferiores em que devemos refutar todos algoritmos eficientes possíveis. Mas também podemos dizer que para provar limitantes inferiores precisamos apenas encontrar uma propriedade útil que funcione para uma determinada classe de circuito. Um problema com esta linha de raciocínio é que devemos tomar o cuidado em não cair nas outras duas condições das provas naturais de Razborov e Rudich. Para algumas separações de classes a propriedade de construtividade é inevitável [Wil16], portanto é preciso evitar uma propriedade que seja densa. É necessário então focar em propriedades que impõem algum tipo de estrutura que não se vê em funções aleatórias.

Um outro caminho possível é descobrir novos argumentos clássicos que basicamente só fazem uso da lógica como os que vêm sendo usados em complexidade irônica que vimos no capitulo 5. Talvez descobrindo mais a respeito da teoria matemática da computação muitos dos problemas considerados difíceis hoje podem vir a ser não tão difíceis assim.

[11] A existência de uma barreira de provas naturais para circuitos aritméticos ainda está em aberto.

Referências Bibliográficas

[Aar16] Scott Aaronson, $\mathsf{P} \stackrel{?}{=} \mathsf{NP}$.

[AB87] Noga Alon and Ravi B Boppana, *The monotone circuit complexity of boolean functions*, Combinatorica **7** (1987), no. 1, 1–22.

[AB09] Sanjeev Arora and Boaz Barak, *Computational complexity: a modern approach*, Cambridge University Press, 2009.

[AV08] Manindra Agrawal and V Vinay, *Arithmetic circuits: A chasm at depth four*, Foundations of Computer Science, 2008. FOCS'08. IEEE 49th Annual IEEE Symposium on, IEEE, 2008, pp. 67–75.

[Bab87] László Babai, *Random oracles separate pspace from the polynomial-time hierarchy*, Information Processing Letters **26** (1987), no. 1, 51–53.

[Bea94] Paul Beame, *A switching lemma primer*, Tech. report, Technical Report UW-CSE-95-07-01, Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, 1994.

[BGS75] Theodore Baker, John Gill, and Robert Solovay, *Relativizations of the p=?np question*, SIAM Journal on computing **4** (1975), no. 4, 431–442.

[BOL90] Michael Ben-Or and Nathan Linial, *Collective coin flipping*, randomness and computation **5** (1990), 91–115.

[Cai86] Jin-Yi Cai, *With probability one, a random oracle separates pspace from the polynomial-time hierarchy*, Proceedings of the eighteenth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1986, pp. 21–29.

[CCG+94] Richard Chang, Benny Chor, Oded Goldreich, Juris Hartmanis, Johan Håstad, Desh Ranjan, and Pankaj Rohatgi, *The random oracle hypothesis is false*, Journal of Computer and System Sciences **49** (1994), no. 1, 24–39.

[Coo71] Stephen A Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1971, pp. 151–158.

[Coo73] ———, *A hierarchy for nondeterministic time complexity*, Journal of Computer and System Sciences **7** (1973), no. 4, 343–353.

[Edm65] Jack Edmonds, *Paths, trees, and flowers*, Canadian Journal of mathematics **17** (1965), no. 3, 449–467.

[FM05] Gudmund Skovbjerg Frandsen and Peter Bro Miltersen, *Reviewing bounds on the circuit size of the hardest functions*, Information Processing Letters **95** (2005), no. 2, 354–357.

[For94] Lance Fortnow, *The role of relativization in complexity theory*, Bulletin of the EATCS **52** (1994), 229–243.

[For09] ———, *The status of the p versus np problem*, Communications of the ACM **52** (2009), no. 9, 78–86.

[FSS84] Merrick Furst, James B Saxe, and Michael Sipser, *Parity, circuits, and the polynomial-time hierarchy*, Theory of Computing Systems **17** (1984), no. 1, 13–27.

[GJ02] Michael R Garey and David S Johnson, *Computers and intractability*, vol. 29, wh freeman, 2002.

[GKKS13] Ankit Gupta, Pritish Kamath, Neeraj Kayal, and Ramprasad Saptharishi, *Arithmetic circuits: A chasm at depth three*, Foundations of Computer Science (FOCS), 2013 IEEE 54th Annual Symposium on, IEEE, 2013, pp. 578–587.

[Gol00] Oded Goldreich, *Computational complexity*, In The Princeton Companion, Citeseer, 2000.

[Hås87] Johan Håstad, *Computational limitations of small-depth circuits*.

[Hås14] ———, *On the correlation of parity and small-depth circuits*, SIAM Journal on Computing **43** (2014), no. 5, 1699–1708.

[HS65] Juris Hartmanis and Richard E Stearns, *On the computational complexity of algorithms*, Transactions of the American Mathematical Society (1965), 285–306.

[HS66] Fred C Hennie and Richard Edwin Stearns, *Two-tape simulation of multitape turing machines*, Journal of the ACM (JACM) **13** (1966), no. 4, 533–546.

[IKW02] Russell Impagliazzo, Valentine Kabanets, and Avi Wigderson, *In search of an easy witness: Exponential time vs. probabilistic polynomial time*, Journal of Computer and System Sciences **65** (2002), no. 4, 672–694.

[Juk12] Stasys Jukna, *Boolean function complexity: advances and frontiers*, vol. 27, Springer Science & Business Media, 2012.

[Kar72] Richard M Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, Springer, 1972.

[KL82] Richard M Karp and Richard Lipton, *Turing machines that take advice*, Enseign. Math **28** (1982), no. 2, 191–209.

[Ko89] Ker-I Ko, *Constructing oracles by lower bound techniques for circuits*, 1989.

[Koi12] Pascal Koiran, *Arithmetic circuits: The chasm at depth four gets wider*, Theoretical Computer Science **448** (2012), 56–65.

[KS12] Swastik Kopparty and Srikanth Srinivasan, *Certifying polynomials for ac^ 0 (parity) circuits, with applications*, LIPIcs-Leibniz International Proceedings in Informatics, vol. 18, Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2012.

[Kur82] Stuart A Kurtz, *On the random oracle hypothesis*, Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1982, pp. 224–230.

[Lev73] Leonid A Levin, *Universal sequential search problems*, Problemy Peredachi Informatsii **9** (1973), no. 3, 115–116.

[LFKN92] Carsten Lund, Lance Fortnow, Howard Karloff, and Noam Nisan, *Algebraic methods for interactive proof systems*, Journal of the ACM (JACM) **39** (1992), no. 4, 859–868.

[LP97] Harry R Lewis and Christos H Papadimitriou, *Elements of the theory of computation*, Prentice Hall PTR, 1997.

[Lup58] Oleg B Lupanov, *A method of circuit synthesis*, Izvestia vuz Radio zike **1** (1958), 120–140.

[O'D14] Ryan O'Donnell, *Analysis of boolean functions*, Cambridge University Press, 2014.

[Oli13] Igor C Oliveira, *Algorithms versus circuit lower bounds*, arXiv preprint arXiv:1309.0249 (2013).

[OW07] Ryan O'Donnell and Karl Wimmer, *Approximation by dnf: examples and counterexamples*, ICALP, vol. 4596, Springer, 2007, pp. 195–206.

[PY86] Christos H Papadimitriou and Mihalis Yannakakis, *A note on succinct representations of graphs*, Information and Control **71** (1986), no. 3, 181–185.

[Raz85] Alexander A Razborov, *Lower bounds for the monotone complexity of some boolean functions*, Soviet Math. Dokl., vol. 31, 1985, pp. 354–357.

[Raz87] ———, *Lower bounds for the size of circuits of bounded depth with basis f^; g.*

[RR94] Alexander A Razborov and Steven Rudich, *Natural proofs*, Proceedings of the twenty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1994, pp. 204–213.

[RST15a] Benjamin Rossman, Rocco A Servedio, and Li-Yang Tan, *An average-case depth hierarchy theorem for boolean circuits*, Foundations of Computer Science (FOCS), 2015 IEEE 56th Annual Symposium on, IEEE, 2015, pp. 1030–1048.

[RST15b] Benjamin Rossman, Rocco A. Servedio, and Li-Yang Tan, *Complexity theory column 89: The polynomial hierarchy, random oracles, and boolean circuits*, SIGACT News **46** (2015), no. 4, 50–68.

[S+49] Claude Shannon et al., *The synthesis of two-terminal switching circuits*, Bell System Technical Journal **28** (1949), no. 1, 59–98.

[S+13] Rahul Santhanam et al., *Ironic complicity: Satisfiability algorithms and circuit lower bounds*, Bulletin of EATCS **1** (2013), no. 106.

[Sar14] Shubhangi Saraf, *Recent progress on lower bounds for arithmetic circuits*, Computational Complexity (CCC), 2014 IEEE 29th Conference on, IEEE, 2014, pp. 155–160.

[Sav70] Walter J Savitch, *Relationships between nondeterministic and deterministic tape complexities*, Journal of computer and system sciences **4** (1970), no. 2, 177–192.

[Sav98] John E Savage, *Models of computation*, Exploring the Power of Computing (1998).

[SFM78] Joel I Seiferas, Michael J Fischer, and Albert R Meyer, *Separating nondeterministic time complexity classes*, Journal of the ACM (JACM) **25** (1978), no. 1, 146–167.

[Sha92] Adi Shamir, *Ip= pspace*, Journal of the ACM (JACM) **39** (1992), no. 4, 869–877.

[Sip12] Michael Sipser, *Introduction to the theory of computation*, Cengage Learning, 2012.

[Smo87] Roman Smolensky, *Algebraic methods in the theory of lower bounds for boolean circuit complexity*, Proceedings of the nineteenth annual ACM symposium on Theory of computing, ACM, 1987, pp. 77–82.

[Sub61] Bella Abramovna Subbotovskaya, *Realizations of linear functions by formulas using+*, Doklady Akademii Nauk SSSR **136** (1961), no. 3, 553–555.

[SY+10] Amir Shpilka, Amir Yehudayoff, et al., *Arithmetic circuits: A survey of recent results and open questions*, Foundations and Trends® in Theoretical Computer Science **5** (2010), no. 3–4, 207–388.

[Tar88] Éva Tardos, *The gap between monotone and non-monotone circuit complexity is exponential*, Combinatorica **8** (1988), no. 1, 141–142.

[Tav15] Sébastien Tavenas, *Improved bounds for reduction to depth 4 and depth 3*, Information and Computation **240** (2015), 2–11.

[Tur36] Alan Mathison Turing, *On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem*, J. of Math **58** (1936), 345–363.

[VSBR83] Leslie G. Valiant, Sven Skyum, Stuart Berkowitz, and Charles Rackoff, *Fast parallel computation of polynomials using few processors*, SIAM Journal on Computing **12** (1983), no. 4, 641–644.

[Wil11] Ryan Williams, *Guest column: a casual tour around a circuit complexity bound*, ACM SIGACT News **42** (2011), no. 3, 54–76.

[Wil13] ———, *Improving exhaustive search implies superpolynomial lower bounds*, SIAM Journal on Computing **42** (2013), no. 3, 1218–1244.

[Wil14] ———, *Nonuniform acc circuit lower bounds*, Journal of the ACM (JACM) **61** (2014), no. 1, 2.

[Wil16] R Ryan Williams, *Natural proofs versus derandomization*, SIAM Journal on Computing **45** (2016), no. 2, 497–529.

[Yao85] Andrew Chi-Chih Yao, *Separating the polynomial-time hierarchy by oracles*, Foundations of Computer Science, 1985., 26th Annual Symposium on, IEEE, 1985, pp. 1–10.

[Žák83] Stanislav Žák, *A turing machine time hierarchy*, Theoretical Computer Science **26** (1983), no. 3, 327–333.

Apêndice A

Funções Tribes

Uma função Booleana é uma função $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, porém nada nos impede de também considerar funções com domínio $\{-1,1\}^n$ e contradomínio $\{-1,1\}$, o que pode vir a ser mais conveniente em algumas situações. Para passar uma string $x \in \{0,1\}^n$ para uma string $x' \in \{-1,1\}^n$ usamos a transformação $x'_i = (-1)^{x_i}$, então para cada função $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ temos a função $f^* : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ onde $f^*(x) = 1 - 2f(x')$ que é "equivalente" à f e também estruturalmente semelhante.

Nós iremos usar a análise de funções Booleanas para deduzir algumas propriedade das funções Tribes definidas da seguinte forma:

$$\text{Tribes}_{w,s}(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{s,w}) = \bigvee_{i=1}^{s} \bigwedge_{j=1}^{w} x_{i,j},$$

em que $w, s > 1$ são inteiros arbitrários. Alguém interessado em saber mais sobre a Análise de funções Booleanas pode ler o livro do Ryan O'Donnell [O'D14].

Qualquer função $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ pode ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{x' \in \{-1,1\}} g(x', x) f(x') \tag{A.1}$$

Onde $g(x', x) = 1$ quando $x' = x$ e 0 quando $x' \neq x$, e é fácil verificar que $g(x', x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + x_i x'_i)$ satisfaz exatamente isso. Seja $\mathcal{V}$ o espaço vetorial de todas funções de $\{-1,1\}^n$ para $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle f, g \rangle = 2^{-n} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x)g(x) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})]$, nós queremos mostrar que as *funções paridade* $\chi_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$, $S \subseteq [n]$ e com $\chi_\emptyset = 1$, formam uma base de $\mathcal{V}$. Ou seja, podemos escrever f como

$$f(x) = \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) \chi_S(x) \tag{A.2}$$

Onde $\widehat{f}(S)$ é a coordenada de f na "direção S", o que nós vamos chamar de coeficiente de Fourier em S de f.

Proposição A.1. *Seja $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$. Podemos escrever f como A.2 onde para cada $S \subseteq [n]$, $\widehat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle$.*

Demonstração. Nós expandimos A.1 com $g(x, x') = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(1 + x_i x'_i)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{x' \in \{-1,1\}^n} f(x') \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i x'_i}{2} \\
&= \sum_{x' \in \{-1,1\}^n} \sum_{S \subseteq [n]} 2^{-n} f(x') \chi_S(x') \chi_S(x) \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} \chi_S(x) \left(2^{-n} \sum_{x' \in \{-1,1\}^n} f(x') \chi_S(x') \right) \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} \langle f, \chi_S \rangle \chi_S(x)
\end{aligned}
$$

Então, para cada $S \subseteq [n]$, fazemos $\widehat{f}(S) = \langle f, \chi_S \rangle$ e obtemos A.1.

□

Além disso, como existem 2^n funções paridades temos que elas formam uma base de $\mathcal{V}$. A base formada pelas funções paridade é ortornomal, basta observar que $\mathsf{E}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[\chi_S(\boldsymbol{x})] = 0$ para qualquer $S \subseteq [n]$ que não seja $\emptyset$ e $\chi_S \chi_{S'}$ é uma função paridade diferente de $\chi_\emptyset$ (mais especificamente, $\chi_{S \triangle S'}$) sempre que S e S' não são iguais. Quando $S = S'$ temos $\mathsf{E}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[\chi_S(\boldsymbol{x}) \chi_S(\boldsymbol{x})] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[\chi_\emptyset] = 1$.

Note que

$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})] &= \mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n} \left[\left(\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) \chi_S(\boldsymbol{x}) \right) g(\boldsymbol{x}) \right] \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) \mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[\chi_S(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})] \\
&= \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S) \widehat{g}(S)
\end{aligned}
$$

Este resultado é o *teorema de Plancherel*. Do teorema de Plancherel podemos obter o *teorema de Parseval*: $\mathsf{E}_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[f(\boldsymbol{x})^2] = \sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2$. No caso especial em que $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ segue do teorema de Parseval que $\sum_{S \subseteq [n]} \widehat{f}(S)^2 = 1$.

Influência individual e total

Nós dizemos que uma variável i é *pivotal* para uma string $x \in \{-1,1\}$ em f se $f(x) \neq f(x^{\oplus i})$, onde $x^{\oplus i}$ é a string x com a i-ésima coordenada invertida.

Definição A.2. *(Influência individual)*

A influência de i em f, denotada por $Inf_i[f]$, é:

$$
\Pr_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[i \text{ é pivotal para } \boldsymbol{x} \text{ em } f].
$$

Ou seja,

$$
Inf_i[f] = \Pr_{\boldsymbol{x} \sim \{-1,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})]
$$

Para funções Booleanas $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ nós fazemos a seguinte definição.

Definição A.3. *Seja $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$. A derivada na direção i de f é definida como*

$$D_i f(x) = \frac{f(x^{(i\to 1)}) - f(x^{(i\to -1)})}{2}$$

onde $x^{(i\to b)}$ é a string x com a coordenada i "forçada" como b.

Note que para todo $i \in [n]$, $D_i f(x)^2$ é 1 quando a coordenada i é pivotal para x em f e 0 caso contrário, portanto $\mathsf{E}[D_i f(\boldsymbol{x})^2] = Inf_i[f]$ e podemos generalizar a noção de influência para funções $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ definindo $Inf_i[g] = \mathsf{E}[D_i g(\boldsymbol{x})^2]$.

Proposição A.4. *Seja $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ e $i \in [n]$, então:*

1. $D_i f(x) = \sum_{S \ni i} \widehat{f}(S)\chi_{S\setminus\{i\}}(x)$;
2. $Inf_i[f] = \sum_{S\ni i} \widehat{f}(S)^2$.

Demonstração. Primeiros nós provamos (1). Como D_i é um operador linear, precisamos apenas mostrar que $D_i\chi_S$ é igual a $\chi_{S\setminus\{i\}}$ quando $i \in S$ e 0 caso contrário.

Se $i \in S$ então $\chi_S(x^{(i\to 1)}) = 1 \times \prod_{i\in S\setminus\{i\}} x_i = \chi_{S\setminus\{i\}}(x)$. Na mesma forma vemos que $\chi_S(x^{(i\to -1)}) = -\chi_{S\setminus\{i\}}(x)$. Portanto

$$\begin{aligned} D_i\chi_S(x) &= \frac{1}{2}(\chi_{S\setminus\{i\}}(x) - (-\chi_{S\setminus\{i\}}(x))) \\ &= \frac{1}{2}(2\chi_{S\setminus\{i\}}(x)) \\ &= \chi_{S\setminus\{i\}}(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, se $i \notin S$ então $\chi_S(x^{(i\to 1)}) = \chi_S(x^{(i\to -1)})$ e portanto $D_i\chi_S(x) = 0$. O item (2) é só uma aplicação do teorema de Parseval e $Inf_i[f] = E[D_i f(\boldsymbol{x})^2]$.

□

Nós podemos meio que generalizar o operador D_i para funções $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ com o operador de Laplace definido a seguir.

Definição A.5. *(Operador de Laplace)*

Seja $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$. O operador de expectativa E_i é definido como

$$E_i f(x) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{b}\sim\{0,1\}}[f(x^{(i\to \boldsymbol{b})})]$$

O operador de Laplace L_i é

$$L_i f = f - E_i f$$

Ou seja, o operador de Laplace subtrai de f a parte de f que não depende da i-ésima coordenada, então parece razoável medir a "importância" da i-ésima coordenada usando L_i, assim como fizemos com D_i. Nós podemos provar o seguinte.

Proposição A.6. *Seja $f : \{0,1\} \to \mathbb{R}$, então*

$$L_i f = \sum_{S \ni i} \widehat{f}(S)\chi_S$$

Demonstração. Para isso precisamos apenas mostrar que

$$E_i f = \sum_{S \not\ni i} \widehat{f}(S)\chi_S \tag{A.3}$$

e portanto o resultado segue pela definição do operador de Laplace.

Para mostrar que a fórmula A.3 é verdadeira nós só precisamos considerar o caso em que f é uma das funções paridades por E_i se tratar de um operador linear. Então, seja $S \subseteq [n]$. Se $S = \emptyset$ então $E_i\chi_\emptyset = 1 = \chi_\emptyset$. Se $S \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} E_i\chi_S(x) &= \mathsf{E}_{\boldsymbol{b}\sim\{0,1\}}[\chi_S(x^{(i\to\boldsymbol{b})})] \\ &= \frac{1}{2}\big(\chi_S(x^{(i\to 0)}) + \chi_S(x^{(i\to 1)})\big) \end{aligned}$$

Se $i \in S$ então $\chi_S(x^{(i\to 0)}) + \chi_S(x^{(i\to 1)}) = 0$ e caso contrário é igual a $2\chi_S(x)$, e portanto

$$E_i\chi_S = \begin{cases} \chi_S \text{ se } i \notin S \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

□

Note que se $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ então $L_i f = x_i D_i f$ e portanto $\mathsf{E}[L_i f^2] = \mathsf{E}[D_i f^2] = Inf_i[f]$. Para funções $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ temos somente que $E[L_i f^2] = \frac{1}{4} Inf_i[f]$, se adaptarmos a forma como influências individuais foram definidas em A.2.

Proposição A.7. *Seja $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ então $\mathsf{E}[L_i f^2] = \frac{1}{4}\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})]$.*

Demonstração. Primeiro note que $\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})] = \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}\big[\big(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})\big)^2\big]$. Portanto

$$\begin{aligned} \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})] &= \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}\big[\big(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})\big)^2\big] \\ &= 4\mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}\left[\left(\frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})}{2}\right)^2\right] \\ &= 4\mathsf{E}[L_i f^2] \end{aligned}$$

□

Por convenção, neste trabalho nós iremos usar $\mathsf{E}[L_i f^2]$ como a definição de $Inf_i[f]$ para funções $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, ao invés de $\Pr_{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n}[f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}^{\oplus i})]$. O mesmo vale para funções de $\{0,1\}^n$ para $\mathbb{R}$. A vantagem disso é podermos usar a fórmula que aparece em A.4 como a definição da influência da i-ésima coordenada independente se o domínio é $\{0,1\}^n$ ou $\{-1,1\}^n$.

A influência total de f é a soma das influências individuais de todas as coordenadas: $\mathrm{I}[f] = \sum_{i\in[n]} Inf_i[f]$. Levando em conta que $Inf_i[f] = \sum_{S\ni i} \widehat{f}(S)^2$, cada coeficiente de Fourier $\widehat{f}(S)$ aparece $|S|$ vezes na soma da influência total, portanto temos a seguinte fórmula: $\mathrm{I}[f] = \sum_{k>0} kW^k[f]$.

Tribes$_N$

A função $\mathrm{Tribes}_{w,s} : \{0,1\}^{ws} \to \{0,1\}$ é definida como sendo $\bigvee_{i=1}^{s} \bigwedge_{j=1}^{w} x_{i,j}$. Nós chamamos cada termo de *tribo* e portanto $Tribes_{w,s} = 1$ se e somente se pelo menos uma tribo é unanimamente 1.

Essa função (até onde eu saiba) apareceu primeiro em [BOL90], em que Ben-Or e Linial a usaram como exemplo de uma função que é ao mesmo tempo equilibrada e que tem influência máxima pequena, mais ou menos próxima do mínimo imposto pela desigualdade de Poincaré: $\max_{i\in[n]}\{Inf_i[f]\} \geq \frac{1}{n}$.

Fixando $w \geq 1$, nós vamos considerar a função $\mathrm{Tribes}_n = \mathrm{Tribes}_{s,w}$, onde $n = sw$ e s é o maior inteiro tal que $(1-2^{-w})^s \geq 1/2$. Com essas escolhas de s e w nós temos o seguinte.

Proposição A.8. *Seja $w \geq 1$, s o maior inteiro satisfazendo $(1-2^{-w})^s \geq 1/2$ e $n = ws$, então:*

- $w = logn - loglogn - o(1)$.
- $s = \Theta(\frac{n}{logn})$.

Demonstração. Primeiro nós achamos uma expressão para s. Usando a desigualdade $e^x \geq 1 + x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $e^{-s2^{-w}} \geq (1-2^{-w})^s \geq 1/2$, e portanto quanto tiramos o logaritmos de ambos os lados obtemos $-s2^{-w} \geq -ln(2)$ e rearranjando:

$$s \leq 2^w ln(2)$$

E também, como escolhemos s de forma que $(1-2^{-w})^{s+1} < 1/2$:

$$s + 1 \geq \frac{-ln(2)}{ln(1-2^{-w})} \geq (2^w - 1)ln(2)$$

Donde nós usamos que $ln(1-2^{-w}) \geq \frac{1}{1-2^w}$. Juntando tudo temos que

$$2^w ln(2) - ln(2) - 1 \leq s \leq 2^w ln(2)$$

Então, para algum $\alpha_w \in [0,2]$ apropriado, temos que $s = 2^w ln(2) - \alpha_w$.

Agora, $n = ws = w2^w ln(2) - w\alpha_w$ e consequentemente $n \leq w2^w ln(2)$ e $n \geq w2^w ln(2) - 2w$, ou seja:

$$\frac{n}{ln(2)} \leq w2^w \leq \frac{n}{ln(2) - 2^{-w+1}}$$

E vemos que com w tendendo ao infinito, $n/ln(2) = w2^w$ e portanto $w = logn - loglogn - o(1)$. Quando substituimos este valor w na expressão que encontramos para s temos que $s = \Theta(\frac{n}{logn})$.

□

Da forma que definimos n para um w fixo nós temos na verdade uma sequência $\{n_w\}_{w\geq 1}$, e podemos verificar que $n_{w+1} > 2n_w$.

Agora também podemos computar a influência total de Tribes_n.

Proposição A.9. *Para todo $i \in [n]$, $Inf_i[Tribes_n] = \mathcal{O}(\frac{logn}{n})$.*

Demonstração. Usando a nossa definição para as influências individuais para funções de $\{0,1\}^n$ para $\{0,1\}$, temos que

$$Inf_i[\text{Tribes}_n] = \mathsf{E}[L_i\text{Tribes}_n^2] = \frac{1}{4}\Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[\text{Tribes}_n(\boldsymbol{x}) \neq \text{Tribes}_n(\boldsymbol{x}^{\oplus i})]$$

Para que uma coordenada i seja pivotal para uma entrada $x \in \{0,1\}^n$ é suficiente e necessário que todas as outras coordenadas na mesma tribo que i sejam 1 e que nenhuma outra tribo seja 1 unanimamente. Traduzindo:

$$Inf_i[\text{Tribes}_n] = \frac{1}{4}(2^{-w+1}(1-2^{-w})^{s-1}) = \frac{1}{2^{w+1}-2}\Pr[Tribes_n(\boldsymbol{x}) = 0]$$

Agora, seja $s' \in \mathbb{R}$ tal que $(1-2^{-w})^{s'} = 1/2$ e $\epsilon \in [0,1)$ tal que $s' = s + \epsilon$. Então temos:

$$\begin{aligned}\Pr[Tribes_n(\boldsymbol{x}) = 1] &= (1-2^{-w})^s \\ &= (1-2^{-w})^{s'}(1-2^{-w})^{-\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}(1+\epsilon 2^{-w} + \mathcal{O}(2^{-2w}))\end{aligned}$$

E como $w = logn - loglogn - o(1)$,

$$\Pr[Tribes_n(\boldsymbol{x}) = 1] = \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\frac{logn}{n})$$

E como $\frac{1}{2^{w+1}-2} = \mathcal{O}(\frac{logn}{n})$ o resultado segue.

□

Para cada $i \in [s]$ denotaremos por T_i o conjunto de índices das variáveis na i-ésima tribo e definimos f_i como

$$f_i(x) = \begin{cases}1 \text{ se a } i\text{-ésima tribo não é unanimamente 1 sobre a entrada } x \\ 0 \text{ caso contrário}\end{cases}$$

Desta forma $\text{Tribes}_n(x) = 1 - \prod_{i=1}^s f_i(x)$ e usamos esta forma de representar Tribes_n para calcular seus coeficientes de Fourier.

Proposição A.10. *Seja $S \subseteq [n]$, $(S_1, S_2, \ldots, S_s)$ uma partição de S tal que $S_i = S \cap T_i$, para cada $i \in [s]$, e $k = \#\{i | S_i \neq \emptyset\}$ então*

$$\widehat{Tribes_n}(S) = \begin{cases}1-(1-2^{-w})^s \text{ se } S = \emptyset \\ (-1)^{|S|+k+1}2^{-kw}(1-2^{-w})^{s-k} \text{ se } S \neq \emptyset\end{cases}$$

Demonstração. O caso $S = \emptyset$ é verdade pois

$$\widehat{\text{Tribes}_n}(\emptyset) = \mathsf{E}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[\text{Tribes}_n(\boldsymbol{x})] = \Pr_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[\text{Tribes}_n(\boldsymbol{x}) = 1] = 1-(1-2^{-w})^s$$

Para o caso geral nós temos

$$\begin{aligned}
\widehat{Tribes_n}(S) &= \mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[\mathrm{Tribes}_n(\boldsymbol{x})\chi_S(\boldsymbol{x})] \\
&= \mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}\big[(1-\prod_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{x}))\chi_S(\boldsymbol{x})\big] \\
&= -\prod_{i=1}^{s} \mathop{\mathsf{E}}_{\boldsymbol{x}\sim\{0,1\}^n}[f_i(\boldsymbol{x})\chi_{S_i}(\boldsymbol{x})] \\
&= -\prod_{i=1}^{s} \widehat{f}_i(S_i)
\end{aligned}$$

Então só precisamos analizar $\widehat{f}_i(S_i)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_i(S_i) &= 2^{-n} \sum_{x\in\{0,1\}^n} f_i(x)\chi_{S_i}(x) \\
&= 2^{-n} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_j=1 \text{ para todo } j\in T_i}} (-1)^{|S_i|} f_i(x) + 2^{-n} \sum_{\substack{x\in\{0,1\}^n \\ x_j\neq 1 \text{ para algum } j\in T_i}} \chi_{S_i}(x)
\end{aligned}$$

Cada termo da primeira soma é 1 sempre que pelo menos uma das $w-|S_i|$ variáveis em $T_i \setminus S_i$ é 1, o que acontece com probabilidade $(1-2^{-w+|S_i|})$. A segunda soma pode ser decomposta pela quantidade de variáveis com índices em S_i que são 0:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_i(S_i) &= (-1)^{|S_i|}2^{-|S_i|}(1-2^{-w+|S_i|}) + 2^{-n}\sum_{k=1}^{|S_i|}(-1)^{|S_i|-k}\binom{|S_i|}{k}2^{n-|S_i|} \\
&= (-1)^{|S_i|+1}2^{-w} + (-1/2)^{|S_i|}\sum_{k=0}^{|S_i|}(-1)^k\binom{|S_i|}{k} \\
&= (-1)^{|S_i|+1}2^{-w}
\end{aligned}$$

Lembrando que $k = \#\{i|S_i \neq \emptyset\}$, podemos concluir:

$$\begin{aligned}
\widehat{Tribes_n}(S) &= -\prod_{i=1}^{s}\widehat{f}_i(S_i) \\
&= -\left(\prod_{i:S_i\neq\emptyset}(-1)^{|S_i|+1}2^{-w}\right)(1-2^{-w})^{s-k} \\
&= (-1)^{|S|+k+1}2^{-kw}(1-2^{-w})^{s-k}
\end{aligned}$$

□