

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO**

Rodrigo Cesar Nunes Maciel

**PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ALTITUDE  
PARA UM VANT DE ASA FIXA**

Araranguá

2018

Rodrigo Cesar Nunes Maciel

**PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ALTITUDE  
PARA UM VANT DE ASA FIXA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Graduação em Engenharia de Computação para a obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. César Cataldo Scharlau

Araranguá

2018

Rodrigo Cesar Nunes Maciel

**PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ALTITUDE  
PARA UM VANT DE ASA FIXA**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Graduação em Engenharia de Computação para a obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. César Cataldo Scharlau

Araranguá

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Maciel, Rodrigo Cesar Nunes  
PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ALTITUDE PARA UM  
VANT DE ASA FIXA / Rodrigo Cesar Nunes Maciel ;  
orientador, César Cataldo Scharlau, 2018.  
94 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Campus  
Araranguá, Graduação em Engenharia de Computação,  
Araranguá, 2018.

Inclui referências.

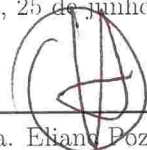
1. Engenharia de Computação. 2. Veículo aéreo não  
tripulado. 3. Controlador de altitude. I. Scharlau,  
César Cataldo. II. Universidade Federal de Santa  
Catarina. Graduação em Engenharia de Computação. III.  
Título.

Rodrigo Cesar Nunes Maciel

**PROJETO DE UM CONTROLADOR DE ALTITUDE  
PARA UM VANT DE ASA FIXA**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de “Bacharel em Engenharia de Computação”, e aprovado em sua forma final pelo Programa de Graduação em Engenharia de Computação.

Araranguá, 25 de junho 2018.



---

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Eliane Pozzebon  
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:



---

Prof. Dr. César Cataldo Scharlau  
Orientador



---

Prof. Dr. Anderson Luiz Fernandes Pérez

*Daniel Neri Cardoso*

Me. Daniel Neri Cardoso

Aos meus pais e filhos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de curso por me ajudarem nos momentos de dificuldades que passei. Ao professor César Cataldo Scharlau, pela sua paciência, conhecimento e orientação deste trabalho. Aos Professores Vilson Gruber, Roderval Marcelino e Giuliano Arns Rampinelli, por me concederem espaço para estudos nos laboratórios LabTel, LPA e Planta Piloto. Muito obrigado a todos...!



*Quanto mais nos elevamos, menores parecemos aos olhos daqueles que não sabem voar. Friedrich Nietzsche*

## RESUMO

Em um Veículo Aéreo Não Tripulado (*VANT*) de asa fixa, o controle de altitude é considerado mais difícil pois requer do sistema de controle o domínio da dinâmica de movimento longitudinal da aeronave. Essa dinâmica é complexa devido às suas respectivas propriedades modais de baixa e alta frequência, que causam reações distintas na aeronave, podendo acarretar na perda de controle. A maioria das soluções utilizadas no controle de altitude de *VANTs* utilizam a técnica de cascadeamento de controladores. Esse método, embora muito robusto e eficiente, demonstra-se mais complexo, pois necessita que o projetista sintonize individualmente cada um dos controladores, sem provocar saturações entre eles, e pôr em risco a estabilidade da aeronave. Este trabalho descreve o projeto de um controlador de altitude para um *VANT* de asa fixa utilizando a técnica de controle ótimo Regulador Linear Quadrático (*LQR*, do inglês *Linear Quadratic Regulator*). Essa técnica permite que os ganhos de sintonia do controlador sejam calculados através de uma única operação. O controlador *LQR* se baseia na Teoria de Controle Moderno e vem sendo utilizado em aplicações onde a planta a ser controlada possui dinâmica complexa, como é o caso de um *VANT* de asa fixa. O controlador *LQR* foi projetado para atuar no controle de altitude do pequeno *VANT* de asa fixa *Rascal 110*. Inicialmente, foi obtido o modelo matemático da dinâmica de movimento longitudinal da aeronave e, após, calculados os ganhos para sintonia do controlador. O desempenho de diferentes conjuntos de ganhos foi verificado. Os testes do controlador *LQR* foram realizados através do programa *Simulink* e com o simulador de voo *FlightGear*. Os resultados dos testes de simulação demonstraram boa robustez da técnica de controle *LQR*. Os resultados do controlador apresentaram pequenos sobressinais e pequenos erros em regime permanente em ambos os simuladores, *Simulink* e *FlightGear*. Embora o controlador tenha sido testado em condições ideais, sem distúrbios, os objetivos do trabalho foram alcançados, pois o controlador permitiu o deslocamento vertical da aeronave para as altitudes de referência e lá permanecendo de forma estabilizada.

**Palavras-chave:** Veículo aéreo não tripulado, dinâmica de movimento longitudinal, controle de altitude, controlador *LQR*.

## ABSTRACT

In an fixed wing unmanned aerial vehicle (*UAV*), altitude control is considered the most difficult because it requires the control of the complex dynamics of longitudinal motion of the aircraft. This complexity comes from the modal properties of low and high frequency, which causes different reactions in the aircraft and may even cause their loss of control. Several solutions used in altitude control of *UAVs* employ the cascading controllers technique. This method, although very robust and efficient, proves to be more complex since it requires the designer to individually tune each of the controllers without causing saturation between them and spoil the stability of the aircraft. This work describes the design of an altitude controller for a fixed-wing *UAV* using the optimal control technique Linear Quadratic Regulator (*LQR*). This technique allows controller tuning gains to be computed on a single operation. The *LQR* controller is based on the Modern Control Theory and has been employed in applications where the plant to be controlled has complex dynamics such as a fixed wing *UAV*. This controller was designed to operate on the altitude control of the small fixed wing *Rascal 110*. Firstly, the mathematical model of the dynamics of the longitudinal movement of the aircraft was obtained. Next, gains were calculated for the controller. The performance of different sets of gains was evaluated. The *LQR* controller tests were performed through *Simulink* program and the flight simulator *FlightGear*. The results of the simulation tests demonstrated a good robustness of the *LQR* control technique. These results presented small peaks and small steady state errors. Although the controller was tested under ideal conditions, without disturbances, the goals of this work were achieved, since the controller allowed the vertical displacement of the aircraft to the desired reference altitudes and remaining there in a stabilized way.

**Keywords:** Unmanned aerial vehicle, dynamics of longitudinal motion, altitude control, *LQR* controller.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Controlador de altitude em cascata. ....	23
Figura 2	Eixos de movimento do <i>VANT</i> . ....	27
Figura 3	Superfícies de controle do <i>VANT</i> . ....	29
Figura 4	Aeronave Rascal 110. ....	30
Figura 5	Sistemas de Coordenadas. ....	34
Figura 6	Representação das variáveis de estado. ....	36
Figura 7	Forças e momentos sobre o <i>VANT</i> . ....	45
Figura 8	Espaço de estados em diagrama de blocos. ....	62
Figura 9	Propriedades modais. ....	67
Figura 10	Validação do sistema modelado. ....	68
Figura 11	Sistema regulador ótimo. ....	70
Figura 12	Controlador <i>LQR</i> com integrador. ....	74
Figura 13	Testes de subida no <i>Simulink</i> . ....	81
Figura 14	Testes de descida no <i>Simulink</i> . ....	81
Figura 15	Testes de subida no <i>FlightGear</i> . ....	84
Figura 16	Testes de descida no <i>FlightGear</i> . ....	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Ficha técnica do <i>Rascal 110</i> .....	31
Tabela 2	Variáveis de estado do <i>VANT</i> .....	35
Tabela 3	Coefficientes aerodinâmicos, de momentos e inercial.....	64
Tabela 4	Condições de voo em equilíbrio.....	65
Tabela 5	Análise modal do sistema.....	67
Tabela 6	Valores aplicados a $Q$ e $R$ para obtenção de $\hat{K}$ .....	79
Tabela 7	Ganhos obtidos para o vetor $\hat{K}$ .....	80
Tabela 8	Resultados numéricos do <i>Simulink</i> .....	82
Tabela 9	Análise dos testes em subida no <i>FlighGear</i> .....	86
Tabela 10	Análise dos testes em descida no <i>FlighGear</i> .....	86

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VANTs	Veículos Aéreos Não Tripulados . . . . .	19
PID	Proporcional, Integral e Derivativo . . . . .	19
SMC	Sliding Mode Control . . . . .	19
LQR	Linear Quadratic Regulator . . . . .	19
IA	Inteligência Artificial . . . . .	19
RNA	Rede Neural Artificial . . . . .	19
ANFIS	Adaptive Network based Fuzzy Inference Systems . . . . .	19
GPS	Global Positioning System . . . . .	21
UDP	User Datagram Protocol . . . . .	24
SIL	Software In Loop . . . . .	24
UAS	Unmanned Aircraft System . . . . .	26
ANAC	Agência Nacional de Aviação Civil . . . . .	28
NED	North, East and Down . . . . .	33

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\theta$	Posição angular em torno do eixo transversal . . . . .	20
$q$	Velocidade angular em torno do eixo transversal . . . . .	20
$h$	Altitude . . . . .	21
$\dot{h}$	Razão de subida/descida . . . . .	21
$a_{z_c}$	Aceleração vertical normal . . . . .	21
$\delta_e$	Elevador . . . . .	28
$\delta_a$	Ailerons . . . . .	29
$\delta_r$	Leme de direção . . . . .	29
$\mathcal{F}^i$	Inertial frame . . . . .	33
$i^i$	Representação do eixo $x$ no sistema $\mathcal{F}^i$ . . . . .	33
$j^i$	Representação do eixo $y$ no sistema $\mathcal{F}^i$ . . . . .	33
$k^i$	Representação do eixo $z$ no sistema $\mathcal{F}^i$ . . . . .	33
$\mathcal{F}^b$	Body frame . . . . .	33
$i^b$	Representação do eixo $x$ no sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	33
$j^b$	Representação do eixo $y$ no sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	33
$k^b$	Representação do eixo $z$ no sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	33
$\mathcal{F}^s$	Stability frame . . . . .	33
$V_a$	Vetor velocidade do ar . . . . .	33
$\alpha$	Ângulo de ataque . . . . .	33
$i^s$	Representação do eixo $x$ no sistema $\mathcal{F}^s$ . . . . .	33
$j^s$	Representação do eixo $y$ no sistema $\mathcal{F}^s$ . . . . .	33
$k^s$	Representação do eixo $k$ no sistema $\mathcal{F}^s$ . . . . .	33
$\mathcal{F}^v$	Vehicle frame . . . . .	33
$\mathcal{F}^{v1}$	Vehicle-1 frame . . . . .	33
$\mathcal{F}^{v2}$	Vehicle-2 frame . . . . .	33
$\mathcal{F}^w$	Wind frame . . . . .	33
$u$	Velocidade ao longo do eixo $i^b$ . . . . .	34
$v$	Velocidade ao longo do eixo $j^b$ . . . . .	34
$w$	Velocidade ao longo do eixo $k^b$ . . . . .	34
$p_n$	Posição ao longo do eixo $i^i$ . . . . .	35
$p_e$	Posição ao longo do eixo $j^i$ . . . . .	35
$p_d$	Posição ao longo do eixo $k^i$ . . . . .	35

$\phi$	Posição angular em torno do eixo longitudinal . . . . .	35
$\psi$	Posição angular em torno do eixo vertical . . . . .	35
$p$	Velocidade angular em torno do eixo longitudinal . . . . .	35
$r$	Velocidade angular em torno do eixo vertical . . . . .	35
$V_g$	Vetor velocidade em relação ao solo . . . . .	38
$m$	Massa da aeronave . . . . .	38
$f$	Soma das forças externas . . . . .	38
$\omega_{b/i}$	Velocidade angular em relação ao sistema $\mathcal{F}^i$ . . . . .	38
$\omega_{b/i}^b$	Velocidade angular em relação ao sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	39
$f^b$	Vetor soma das forças externas no sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	39
$F_x$	Forças externas ao longo do eixo $i^b$ . . . . .	39
$F_y$	Forças externas ao longo do eixo $j^b$ . . . . .	39
$F_z$	Forças externas ao longo do eixo $k^b$ . . . . .	39
$\mathbf{h}$	Vetor momento angular . . . . .	40
$\mathbf{m}$	Soma dos momentos externos . . . . .	40
$\mathbf{J}$	Matriz produto de inércia . . . . .	40
$g$	Constante gravitacional . . . . .	43
$f_g^v$	Força gravitacional expressada no sistema $\mathcal{F}^v$ . . . . .	43
$f_g^b$	Força gravitacional expressada no sistema $\mathcal{F}^b$ . . . . .	43
$\rho$	Densidade do ar . . . . .	44
$F_L$	Força de sustentação . . . . .	44
$F_D$	Força de arrasto . . . . .	45
$\mathbf{m}$	Momento de arfagem . . . . .	45
$S$	Área das asas . . . . .	45
$c$	Comprimento da corda da asa . . . . .	45
$C_L$	Coefficiente de sustentação . . . . .	45
$C_D$	Coefficiente de arrasto . . . . .	45
$C_m$	Coefficiente de momento de arfagem . . . . .	45
$C_{L_0}$	Coefficiente de sustentação para $C_L = 0$ . . . . .	45
$C_{L\alpha}$	É a variação de $C_L$ pela variação de $\alpha$ . . . . .	46
$C_{Lq}$	É a variação de $C_L$ pela variação de $q$ . . . . .	46
$C_{L\delta_e}$	É a variação de $C_L$ pela variação de $\delta_e$ . . . . .	46
$C_{D_0}$	Coefficiente de arrasto quando $\alpha = 0$ . . . . .	46
$C_{D\alpha}$	Coefficiente de arrasto pela variação de $\alpha$ . . . . .	46



$C_{Dq}$	Coeficiente de arrasto pela variação de $q$ .....	46
$C_{D\delta_e}$	Coeficiente de arrasto pela variação de $\delta_e$ .....	46
$C_{m\alpha}$	Coeficiente de momento de arfagem quando $\alpha = 0$ .....	46
$C_{mq}$	Coeficiente de momento de arfagem pela variação de $q$ .....	46
$C_{m\delta_e}$	Coeficiente de momento de arfagem pela variação de $\delta_e$ .....	46
$\beta$	Ângulo de derrapagem lateral.....	48
$C_Y$	Coeficiente de força aerodinâmica ao longo do eixo $j^b$ .....	48
$C_l$	Coeficiente de momento aerodinâmico em torno do eixo $i^b$ .....	48
$C_n$	Coeficiente de momento aerodinâmico em torno do eixo $k^b$ .....	48
$b$	Envergadura das asas.....	48
$C_{Y\beta}$	Coeficiente de força aerodinâmica quando $\beta = 0$ .....	49
$C_{Yp}$	Coeficiente de força aerodinâmica pela variação de $p$ .....	49
$C_{Yr}$	Coeficiente de força aerodinâmica pela variação de $r$ .....	49
$C_{Y\delta_a}$	Coeficiente de força aerodinâmica pela variação de $\delta_a$ .....	49
$C_{Y\delta_r}$	Coeficiente de força aerodinâmica pela variação de $\delta_r$ .....	49
$C_{l\beta}$	Coeficiente de momento de rolamento quando $\beta = 0$ .....	49
$C_{lp}$	Coeficiente de momento de rolamento pela variação de $p$ .....	49
$C_{lr}$	Coeficiente de momento de rolamento pela variação de $r$ .....	49
$C_{l\delta_a}$	Coeficiente de momento de rolamento pela variação de $\delta_a$ .....	49
$C_{l\delta_r}$	Coeficiente de momento de rolamento pela variação de $\delta_r$ .....	49
$C_{n\beta}$	Coeficiente de momento de guinada quando $\beta = 0$ .....	49
$C_{np}$	Coeficiente de momento de guinada pela variação de $p$ .....	49
$C_{nr}$	Coeficiente de momento de guinada pela variação de $r$ .....	49
$C_{n\delta_a}$	Coeficiente de momento de guinada pela variação de $\delta_a$ .....	49
$C_{n\delta_r}$	Coeficiente de momento de guinada pela variação de $\delta_r$ .....	49
$P_0$	Pressão estática.....	50
$V_e$	Velocidade em que o ar deixa a hélice.....	50
$P_f$	Pressão a frente da hélice.....	50
$P_b$	Pressão atrás da hélice.....	50
$\delta_t$	Comando de aceleração do motor.....	50

$K_m$	Constante de eficiência do motor .....	50
$S_h$	Área de cobertura da hélice .....	50
$F_{xp}$	Força de propulsão .....	50
$C_h$	Coefficiente aerodinâmico da hélice .....	50
$f_p$	Força de propulsão ao longo do eixo $i^b$ .....	51
$T_p$	Torque gerado pela força de propulsão .....	51
$K_{Tp}$	Constante de torque da hélice .....	51
$\mathbf{m}_p$	Momento de propulsão ao longo do eixo $i^b$ .....	51
$C_{X^*}$	Coefficientes de forças aerodinâmicas ao longo do eixo $i^b$ ...	53
$C_{Z^*}$	Coefficientes de forças aerodinâmicas ao longo do eixo $k^b$ ...	54
$\bar{x}(t)$	Vetor de estados .....	61
$\bar{\mathbf{u}}(t)$	Vetor de sinais de entrada de controle .....	61
$\bar{y}(t)$	Vetor dos sinais de saída .....	61
$A$	Matriz de estabilidade .....	61
$B$	Matriz de controle .....	61
$C$	Matriz de saída .....	61
$D$	Matriz de transmissão direta .....	61
$\xi$	Fator de amortecimento .....	67
$\omega_n$	Frequência natural de oscilação .....	67
$Q$	Matriz de penalização de estados .....	69
$R$	Matriz de penalização de controle .....	70
$K_I$	Ganho integral .....	73
$C_x$	Matriz de controlabilidade .....	78
$O_x$	Matriz de observabilidade .....	78
$K_c$	Vetor de ganhos do controlador .....	79
$Mp$	Sobressinal .....	82
$Tp$	Tempo de pico .....	82
$Ts$	Tempo de acomodação .....	82

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	19
1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO .....	19
1.2 OBJETIVOS .....	22
1.2.1 Geral .....	22
1.2.2 Específicos .....	22
1.3 JUSTIFICATIVAS .....	22
1.4 METODOLOGIA .....	24
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	24
<b>2 VEÍCULO AÉREO NÃO TRIPULADO</b> .....	26
2.1 DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO .....	26
2.2 SUPERFÍCIES DE CONTROLE .....	28
2.3 O VANT RASCAL 110 .....	30
<b>3 CINEMÁTICA E DINÂMICA DO VOO</b> .....	32
3.1 SISTEMAS DE COORDENADAS .....	32
3.2 VARIÁVEIS DE ESTADO .....	35
3.3 CINEMÁTICA .....	36
3.4 DINÂMICA .....	38
3.4.1 Movimento Translacional .....	38
3.4.2 Movimento Rotacional .....	40
<b>4 FORÇAS E MOMENTOS</b> .....	43
4.1 FORÇAS GRAVITACIONAIS .....	43
4.2 FORÇAS AERODINÂMICAS E MOMENTOS .....	44
4.2.1 Aerodinâmica Longitudinal .....	44
4.2.2 Aerodinâmica Lateral .....	47
4.3 FORÇAS DE PROPULSÃO E MOMENTOS .....	50
4.3.1 Propulsão da Hélice .....	50
4.3.2 Torque da Hélice .....	51
<b>5 MODELAGEM DA DINÂMICA DE UM VANT</b> ....	53
5.1 EQUAÇÕES NÃO LINEARES DO MOVIMENTO LONGI- TUDINAL .....	53
5.2 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO ...	55
5.2.1 Condições de Equilíbrio .....	55
5.2.2 Teoria de Pequenos Distúrbios .....	58
5.2.3 Obtenção das Derivadas de Estabilidade e Controle	59
5.2.4 Representação em Espaço de Estados .....	61
5.3 MODELAGEM DO RASCAL 110 .....	63
<b>6 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO - LQR</b> .....	69

6.1	TEORIA DO CONTROLADOR LINEAR QUADRÁTICO..	69
6.1.1	Eliminação do Erro em Regime Permanente.....	73
6.2	PROJETO DO CONTROLADOR .....	76
6.3	RESULTADOS .....	79
6.3.1	Resultados e Discussões do <i>Simulink</i> .....	80
6.3.2	Resultados e Discussões do <i>FlightGear</i> .....	83
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS .....	89
	REFERÊNCIAS .....	90

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A crescente presença de *VANTs* (Veículos Aéreos Não Tripulados) nos setores militares e civis, realizando missões de observação, monitoramento, coleta de dados, entre outras aplicações comerciais (LONGHITANO, 2010; NERIS, 2001), está levando muitos países a estudarem possibilidades de integrá-los em um espaço aéreo compartilhado com aeronaves tripuladas. Um estudo realizado por Jenkins e Vasigh (2013) sugere que a integração de *VANTs* no espaço aéreo Norte Americano movimentará em sua economia, até o ano de 2025, mais de US\$ 82 bilhões e gerará mais de 100 mil empregos voltados a área. Esta tendência de integração de *VANTs* também é vista no Brasil (RODRIGUES, 2015). Com a crescente demanda por essas aeronaves e devido aos seus inúmeros benefícios operacionais e econômicos, o projeto e desenvolvimento de controladores autônomos tornou-se um campo de pesquisa muito atrativo, tanto no setor privado quanto no acadêmico (ÖZDEN et al., 2015).

Muitas técnicas de controle já foram testadas visando projetar controladores robustos, capazes de garantir segurança de voo. Dentre elas, destacam-se o emprego de técnicas de controle clássico, tal como o *PID* (Proporcional, Integral e Derivativo) (WARSI et al., 2014), e controle moderno, tais como *SMC* (Controle por Modos Deslizantes, do inglês *Sliding Mode Control*) (NOUR; SOUFIENE; JOSEPH, 2016) e *LQR* (Regulador Linear Quadrático, do inglês *Linear Quadratic Regulator*) (ESTEVES; MOUTINHO; AZINHEIRA, 2015). Também empregam-se técnicas de *IA* (Inteligência Artificial), tais como *RNA* (Rede Neural Artificial) (PUTTIGE, 2008) e *ANFIS* (Sistema de Inferência Fuzzy baseado em Redes Adaptativas, do inglês *Adaptive Network based Fuzzy Inference Systems*) (SARHAN; QIN, 2016), entre outras. Usualmente os *VANTs* combinam controladores em cascata que possibilitam total aeronavegabilidade às aeronaves. Esses controladores são capazes de regular a velocidade de voo, altitude e direção de deslocamento, tornando-as capazes de seguirem com precisão as rotas pré-estabelecidas em seus planos de missões (CHAO; CAO; CHEN, 2010).

O controle do movimento longitudinal de um *VANT* de asa fixa, de onde se obtém o controle de altitude, é considerado mais difícil devido as suas características oscilatórias naturais de baixo e alto período, além da alta sensibilidade que essas aeronaves possuem sobre essa di-

nâmica (PETERS; KONYAK, 2003). Apesar disso, esse tipo de aeronave possui como vantagem maior autonomia de voo e conseguem cobrir maiores áreas em suas missões, proporcionando melhores rendimentos de trabalho (BOON; DRIJFHOUT; TESFAMICHAEL, 2017). Quando projetado na sua forma mais simples, ou seja, com apenas uma entrada e uma saída, o controlador de altitude atuará sobre umas das superfícies de controle do avião chamada elevador. Geralmente localizado na cauda da aeronave, o elevador é a superfície responsável pela maior parte do controle longitudinal do avião (ROSKAM, 1998). Embora fora do escopo deste trabalho, também é possível, através de ações conjuntas com o elevador, atuar sobre a potência do motor para controlar a velocidade de voo e aumentar a eficiência do controlador, porém deixando a estrutura de controle mais complexa e difícil de modelar (PETERS; KONYAK, 2003).

Sarhan e Qin (2016) demonstram a obtenção de um controlador de altitude para um *VANT* de asa fixa através de uma estrutura de controle simplificada, implementando-o através da relação direta *altitude/elevador*, e empregando técnicas de *IA*. Estas técnicas de controle possuem como vantagem maior adaptabilidade às não linearidades da dinâmica de voo e maior largura de banda de controle. Porém, em sua grande maioria, os controladores baseados em *IA* são sintonizados de forma experimental e com base em conhecimento empírico, sem considerar a análise matemática da dinâmica de voo da aeronave. No entanto, quando deseja-se utilizar técnicas de controle clássico ou moderno, é demonstrado por Peters e Konyak (2003) que o controle de altitude utilizando a relação *altitude/elevador* torna-se difícil e quase sempre impraticável. Isso ocorre devido as limitações destas técnicas em lidar com sistemas linearizados e as oscilações naturais de curto e longo período, existentes sobre a dinâmica longitudinal.

Para resolver os problemas das oscilações, as estruturas de controle mais comuns empregadas em *VANTs* de asa fixa realizam o controle de altitude através de um cascadeamento de controladores, distribuídos usualmente entre três laços de realimentação. Algumas variáveis de estado da dinâmica longitudinal, que fornecem informações sobre posições e velocidades angulares, altitude e velocidades vertical e horizontal, são geralmente utilizadas por estas técnicas de cascadeamento. Dentre essas variáveis de estado, como exemplo, destacam-se:

- $\theta$ : posição angular em torno do eixo transversal. Representa a inclinação do nariz da aeronave em relação a superfície da terra;
- $q$ : velocidade angular em torno do eixo transversal, ou seja, o

quanto  $\theta$  varia por segundo;

- $h$ : altitude de voo da aeronave;
- $\dot{h}$ : razão de subida ou descida da aeronave, ou seja, é o quanto  $h$  varia por segundo.

Estruturas de controle que fazem o uso destas variáveis de estado através de cascadeamento de controladores, são demonstradas em detalhes nas publicações de Shah, Samar e Ali (2015), Elsayed et al. (2015), Zhai et al. (2014). O controle longitudinal através da relação  $q/elevador$  possibilita controlar a variação da velocidade angular de  $\theta$  e melhorar o amortecimento das oscilações de curto período, deixando o controlador menos agressivo em sua dinâmica longitudinal, principalmente durante as trocas de altitudes de referências (BEARD; MCLAIN, 2012).

A proposta apresentada em Ahsun et al. (2015), diferencia-se por utilizar uma estrutura de controle mais robusta se comparada às citadas no parágrafo anterior. Esta estrutura é formada pelo cascadeamento de controladores clássicos distribuídos entre quatro laços de realimentação. Segundo os autores, a utilização da variável aceleração vertical normal ( $a_{zc}$ ) permite controlar com precisão o fator de carga da aeronave durante manobras de subida ou descida, dispensando uso de  $\theta$  e mantendo um melhor controle sobre as oscilações. Esta proposta também realiza o controle direto pela relação  $q/elevador$  no laço mais interno, sendo que as referências para  $q$  são geradas pelos controladores entre os três laços restantes, utilizando as variáveis  $h$ ,  $\dot{h}$  e  $a_{zc}$ . O valor do sinal de  $a_{zc}$  é obtido empregando-se a técnica de filtro complementar, que funde o sinal da variável aceleração, fornecido pelo sensor acelerômetro, com o valor de  $\dot{h}$ , estimada através de um receptor de GPS (Sistema de Posicionamento Global, do inglês *Global Positioning System*).

As soluções apresentadas para o controle de altitude de uma aeronave de asa fixa são as mais variadas e não devem se restringir a estas alternativas. A crescente necessidade da integração dos VANTs em um espaço aéreo compartilhado está abrindo caminho para pesquisas visando a melhoria das técnicas de controles existentes. Dentro desta perspectiva, este trabalho visa desenvolver um controlador de altitude para um VANT de asa fixa, através da técnica LQR, utilizando um projeto simplificado para o controlador e avaliar os resultados através de um simulador de voo. A técnica LQR foi utilizada para fornecer robustez ao sistema em malha fechada, compensando simplificações do modelo dinâmico, e também pela sua capacidade de otimização da

energia gasta no controle de processos. O controlador desenvolvido permite que o *VANT* mova-se verticalmente para altitudes de referências, mantendo-se em voo nivelado após atingi-las.

## 1.2 OBJETIVOS

A presente seção descreve os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

### 1.2.1 Geral

Projetar e implementar, através de simuladores, um controlador de altitude para o *VANT* de asa fixa *Rascal 110*, visando simplificar o projeto do controlador através da técnica de controle ótimo *LQR*. Na abordagem proposta, não há a necessidade de sintonia individual de vários controladores em cascata.

### 1.2.2 Específicos

- Demonstrar as propriedades modais da dinâmica longitudinal do *VANT*;
- Implementar um controlador de altitude, com realimentação dos estados para o *LQR* e seguimento de referência apenas da variável  $h$ , com uso de integrador;
- Demonstrar a capacidade da técnica de controle *LQR* em garantir estabilidade de voo ao *VANT* mediante uma estrutura de controle mais simplificada;
- Implementar o controlador de altitude sobre o *Rascal 110* através do simulador de voo *FlightGear*.

## 1.3 JUSTIFICATIVAS

O controle de altitude em *VANTs* de asa fixa através da técnica de cascadeamento de controladores é eficiente. Porém, aumenta a complexidade da estrutura de controle. Como exemplo dessas técnicas, é possível citar o sistema proposto por Ahsun et al. (2015), ilustrado na





2017). Neste trabalho, a técnica *LQR* é utilizada para simplificar o projeto do controlador e minimizar um critério quadrático associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle a serem projetados, mantendo a robustez do sistema conforme demonstrado em (VURAL; HAJIYEV, 2014).

## 1.4 METODOLOGIA

Para alcançar os objetivos descritos na Seção 1.2, inicialmente foram realizadas pesquisas bibliográficas em livros, artigos e teses, referentes a dinâmica de voo de aeronaves de asa fixa e sobre a técnica de controle *LQR*. Na sequência, foi formulado um modelo matemático linear da dinâmica longitudinal do *VANT* e apresentado através de sua representação em espaço de estados. Através do programa *Matlab/Simulink*, esse modelo foi implementado para análise matemática e verificação da resposta do sistema em malha aberta. Sua resposta foi comparada com a resposta do *Rascal 110*, coletada através do simulador *FlightGear*.

No projeto do controlador, inicialmente foram estabelecidos os critérios de projeto, tais como a definição dos ganhos utilizados pelo *LQR*. Nesta fase, o controlador *LQR* foi realizado e simulado através do *Matlab/Simulink* para análise de sua resposta em malha fechada. Após projetado, o controlador *LQR* foi implementado em linguagem de programação *C* onde se comunicou com o *FlightGear* via protocolo de comunicação *UDP (User Datagram Protocol)* para controlar o *VANT*, realizando um processo de comunicação entre processos chamado *SIL (Software In Loop)*. Foram realizados vários voos de testes no simulador, colocando o *VANT* em movimentos de subida e descida para as altitudes de referência. Os resultados foram apresentados através de gráficos e tabelas demonstrativas.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho foi organizado em sete capítulos incluindo a introdução, referenciada como Capítulo 1.

O Capítulo 2 apresenta algumas definições sobre os veículos aéreos não tripulados. São apresentadas suas classificações, tipos de movimentos e a descrição do funcionamento de suas superfícies de controle. Também é vista e especificada a aeronave utilizada como plataforma

de testes para este trabalho.

O Capítulo 3 demonstra algumas expressões matemáticas que definem a cinemática de voo de uma aeronave de asa fixa e descreve alguns sistemas de coordenadas utilizados na modelagem da dinâmica de *VANTs*, assim como os conceitos que envolvem os movimentos translacionais e rotacionais, presentes em todas as fases de voo de um *VANT*.

O Capítulo 4 apresenta as forças e momentos que agem sobre o corpo de um *VANT* de asa fixa. São demonstradas algumas expressões matemáticas que descrevem as respectivas forças gravitacionais, aerodinâmicas e de propulsão, assim como os momentos.

O Capítulo 5 apresenta a obtenção do modelo matemático da dinâmica de movimento longitudinal do *VANT*, assim como todos os passos para a obtenção de um modelo linearizado, necessário para o projeto do controlador de altitude.

O Capítulo 6 realiza o projeto do controlador *LQR* para o controle de altitude do *VANT*. São apresentados alguns conceitos básicos sobre controladores baseados na teoria de Controle Moderno, necessários ao projeto do *LQR*. Apresenta também os testes e discussões sobre os resultados obtidos com o controlador projetado.

O Capítulo 7 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## 2 VEÍCULO AÉREO NÃO TRIPULADO

Neste capítulo são abordados conceitos básicos sobre *VANTs* de asa fixa. Esses conceitos são baseados nas definições do Capítulo 2 de Nelson (1989) e Capítulo 4 de Beard e McLain (2012) e são abordados de forma resumida. O objetivo é demonstrar algumas características e princípios básicos sobre a dinâmica de voo deste tipo de aeronave.

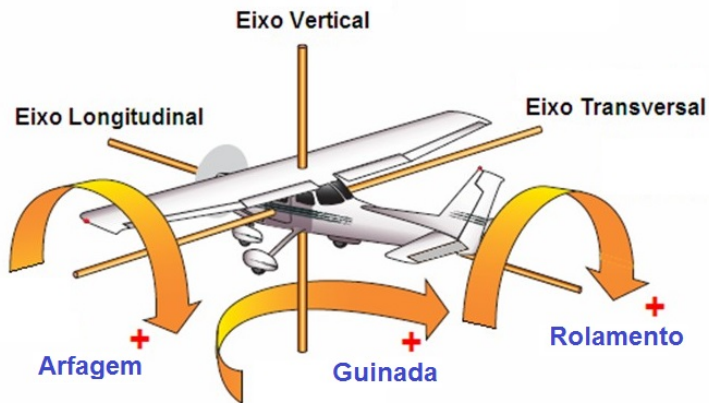
Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 são feitas algumas definições e classificações sobre *VANTs* de asa fixa. Em seguida, na Seção 2.2, são introduzidos alguns princípios de voo através das superfícies de controle dos *VANTs*. Por fim, na Seção 2.3, é apresentado o *Rascal 110*, o *VANT* que será aplicado o controle de altitude proposto neste trabalho.

### 2.1 DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO

Um *VANT* caracteriza uma aeronave de qualquer tamanho que pode voar sem tripulação e ser controlada remotamente ou através de sistemas de controles embarcados, neste caso voando de forma autônoma (FURTADO et al., 2008). Existem vários tipos e, dentre os mais comuns, os de asa fixa (avião) e os de asa rotativa (helicóptero) (CAI; DIAS; SENEVIRATNE, 2014). Atualmente, a nomenclatura *VANT* vem sendo substituída por *UAS* (do inglês *Unmanned Aircraft System*), que significa Sistemas de Aeronaves Não Tripuladas (DCEA, 2015). Esta mudança vem ocorrendo devido a essa terminologia não se referir apenas a aeronave, mas também a todos os equipamentos que dão suporte ao sistema, incluindo sensores, microcontroladores, *software*, sistema de comunicação, entre outros itens necessários ao voo de uma aeronave não tripulada (BEARD; MCLAIN, 2012). Pelo fato deste trabalho não tratar de todos os componentes que englobam o termo *UAS* e devido a massiva presença do termo *VANT* na literatura, será mantido esse último termo em todos os capítulos deste trabalho.

Semelhante a um avião tripulado, um *VANT* de asa fixa é capaz de deslocar-se no espaço através de três eixos de movimento: longitudinal, transversal e vertical. Ao longo destes eixos, a aeronave consegue realizar movimentos horizontais e verticais, mensuráveis através de sensores indicadores de velocidade e altitude, por exemplo. Em torno de cada eixo, a aeronave também consegue realizar movimentos de rotação, mensuráveis através de sensores indicadores de inclinação, por exemplo

Figura 2 – Eixos de movimento do *VANT*.



Fonte: <http://www.asasdeferrosuplementos.blogspot.com.br>

os ângulos. Os tipos de sensores e sua forma de funcionamento podem ser vistos em detalhes no Capítulo 1 de Nelson (1989). A Figura 2, ilustra os três eixos de movimento de uma aeronave de asa fixa.

Conforme pode-se observar na Figura 2, em torno dos eixos existem os respectivos movimentos de arfagem, rolamento e guinada. O movimento de arfagem causa variações na inclinação do nariz da aeronave, podendo sob certas circunstâncias variar sua altitude de voo (NELSON, 1989). O movimento de rolamento faz as asas da aeronave se inclinarem, permitindo que ela mude sua trajetória de voo. Por fim, o movimento de guinada faz a aeronave girar seu corpo sobre o plano horizontal, também permitindo que a aeronave mude sua trajetória de voo. Em geral, para mudanças de trajetória, é efetuado um movimento coordenado entre rolamento e guinada (BEARD; MCLAIN, 2012).

Esses movimentos de rotação, combinados com os movimentos horizontais e verticais ao longo dos eixos, permitem ao *VANT* deslocar-se no espaço em qualquer direção. Posteriormente, no Capítulo 3, serão obtidas as componentes matemáticas contidas em cada eixo de movimento e que representam a dinâmica de voo do *VANT*.

Quanto a sua classificação, no Brasil os *VANTs* são classificados em três classes (Agência Nacional de Aviação Civil - ANAC, 2017), sendo elas:

- Classe 1: são considerados *VANTs* de grande porte, com peso acima de 150 kg. Necessitam de piloto habilitado e a aeronave

deve passar por um processo de certificação, semelhante as aeronaves tripuladas, para poderem operar;

- Classe 2: são considerados *VANTs* de médio porte, com peso acima de 25 kg e abaixo ou igual a 150 kg. Também precisam de piloto habilitado, mas a aeronave não necessita de certificação, porém sua construção deve atender a requisitos técnicos exigidos por regulamentação do órgão federal responsável;
- Classe 3: são considerados *VANTs* de pequeno porte, com peso menor ou igual a 25 kg. Nesta categoria, não cabem as exigências das outras classes. Porém, necessitam ser cadastradas na ANAC (Agência Nacional de Aviação Civil), para obtenção de matrícula de identificação da aeronave.

Entre as três classes, o *VANTs* da Classe 3 vem ganhando cada vez mais espaço no mercado devido ao seu baixo custo operacional, alta manobrabilidade e fácil manutenção (CAI; DIAS; SENEVIRATNE, 2014). Beard e McLain (2012) complementam que essa categoria de *VANTs* tem ainda como vantagem autonomies superiores a 10 horas de voo, devido a maioria delas utilizarem pequenos motores de combustão interna e de baixo consumo.

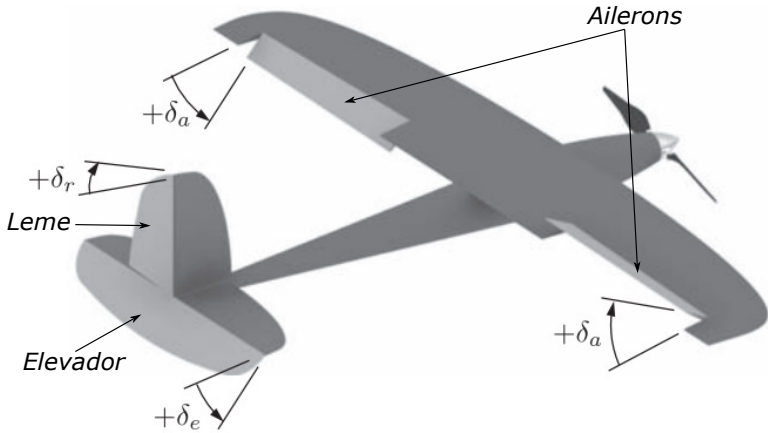
## 2.2 SUPERFÍCIES DE CONTROLE

Nesta seção, são apresentadas as principais superfícies aerodinâmicas de controle existentes nas aeronaves da asa fixa. Essas superfícies são responsáveis por dar manobrabilidade ao *VANT*, possibilitando os movimentos de rolamento, arfagem e guinada. Segundo Nelson (1989), estas superfícies são peças móveis, geralmente localizadas nas asas e cauda das aeronaves que, quando defletidas, geram forças aerodinâmicas capazes de rotacionar a aeronave em torno de seus eixos. A Figura 3 ilustra essas superfícies e suas representações.

Conforme pode-se observar na Figura 3, atribuem-se nomes e símbolos as superfícies de controle do *VANT*. Com base nas informações do Capítulo 2 de Nelson (1989), segue os nomes e funcionalidades de cada superfície:

- Elevador: encontra-se localizado ao final da cauda da aeronave, na parte de trás do estabilizador horizontal. Está representado pelo símbolo  $\delta_e$ , sendo conhecido também como "profundor" ou "leme de profundidade". É a superfície de controle responsável

Figura 3 – Superfícies de controle do VANT.



Fonte: Adaptado de (BEARD; MCLAIN, 2012)

pelo movimento de arfagem. Exerce movimentos de deflexão para cima e para baixo, gerando forças aerodinâmicas capazes de variar a inclinação do nariz do VANT, ou seja, rotacionando-o em torno do eixo transversal. Por padrão, o simulador de voo *FlightGear* assume valores negativos quando o elevador é defletido para cima e valores positivos quando defletido para baixo;

- Ailerons: encontram-se localizados na parte de trás das asas da aeronave. Estão representados pelo símbolo  $\delta_a$ , sendo a superfície de controle responsável pelo movimento de rolamento. Exerzem movimentos de deflexão para cima e para baixo, porém em sentidos opostos. Sua deflexão assimétrica produz forças aerodinâmicas capazes de fazer a aeronave inclinar suas asas, ou seja, rotacionando-a em torno do eixo longitudinal;
- Leme: encontra-se localizado ao final da cauda da aeronave, na parte de trás do estabilizador vertical. Está representado pelo símbolo  $\delta_r$ , sendo conhecido também como "leme direcional". Exerce movimentos de deflexão a direita e a esquerda, gerando forças aerodinâmicas capazes de fazer a aeronave girar sobre o

plano horizontal, ou seja, rotacionar em torno do eixo vertical.

Para o controle de altitude proposto neste trabalho, apenas o elevador será considerado no projeto do controlador. A mudança de altitude do *VANT*, ocorrerá somente através da deflexão do elevador. Isso não exige a utilização de  $\delta_a$  e  $\delta_r$  nos voos de testes, porém controlados manualmente ou pelo controlador padrão do simulador de voo.

### 2.3 O VANT RASCAL 110

O *Rascal 110* é uma aeronave radiocontrolada de pequeno porte, fabricada pela empresa *Sigplanes*, e muito popular entre entusiastas do aeromodelismo. A Figura 4 ilustra os aspectos físicos desta aeronave.

Figura 4 – Aeronave Rascal 110.



Fonte: <http://www.sigplanes.com>

Conforme pode-se observar na Figura 4, o *Rascal 110* é uma aeronave de asa fixa e utiliza propulsão a hélice. Devido sua boa performance e baixo custo operacional, o *Rascal 110* já foi utilizado em alguns trabalhos acadêmicos. No trabalho de Çakir (2011), essa aeronave foi automatizada e transformada em uma plataforma de testes. Seu objetivo foi desenvolver um *VANT* de baixo custo para servir a cursos de graduação que abrangem as áreas de controle e automação. Jodeh (2006) vai mais além, transformando o *Rascal 110* em um *VANT* autônomo e descrevendo em detalhes todos os passos para obtenção do modelo dinâmico e projeto do seu sistema de controle.

O simulador de voo *FlightGear* disponibiliza uma versão do *Ras-*



*cal 110*. Através da interface do simulador, é possível pilotá-la usando dispositivos de entrada, tais como teclado, mouse e *joystick*. Também é possível efetuar voos autônomos com o controlador *PID* padrão do *FlightGear* ou através de qualquer outro sistema de controle automático implementado pelo próprio usuário. O *FlightGear* também disponibiliza na documentação da aeronave a ficha técnica do *VANT*, cujos principais dados são vistos na Tabela 1.

Tabela 1 – Ficha técnica do *Rascal 110*.

Descrição	Medida
Comprimento	6,31 <i>ft</i>
Envergadura	9,17 <i>ft</i>
Corda	1,15 <i>ft</i>
Área das asas	10,57 <i>ft</i> <sup>2</sup>
Peso bruto	14,5 <i>lbs</i>
Velocidade de cruzeiro	101,26 <i>ft/s</i>
Deflexão do elevador	±0,35 <i>rad</i>

Fonte: Do Autor

Conforme pode-se observar na Tabela 1, foi utilizado o sistema imperial de medidas, por estar assim descrito na documentação da aeronave e também ser muito utilizado na literatura especializada em *VANTs*.

Neste capítulo, foram apresentados alguns conceitos básicos sobre o funcionamento de *VANTs* de asa fixa. Esses conceitos são importantes para facilitar o entendimento do processo de obtenção do modelo da dinâmica do *VANT*, realizada posteriormente nos Capítulos 3, 4 e 5.

### 3 CINEMÁTICA E DINÂMICA DO VOO

O objetivo deste capítulo é demonstrar, de forma resumida, as relações entre posições e velocidades (cinemática) e as relações entre forças e momentos (dinâmica) que envolvem o voo de uma aeronave de asa fixa. São apresentadas as expressões que definem a cinemática e dinâmica de uma aeronave de asa fixa, sem demonstrar por completo as deduções matemáticas para obtenção de cada equação, por estar fora do escopo deste trabalho. Os procedimentos para obtenção de cada equação estão descritos em detalhes nos Capítulos 2 e 3 de Beard e McLain (2012).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 3.1 são apresentados os sistemas de coordenadas utilizados na modelagem da dinâmica de *VANTs*. Em seguida, na Seção 3.2, é definida a notação utilizada para as variáveis de estado do *VANT*. Na Seção 3.3 são demonstradas as equações que definem a cinemática de voo do *VANT*. Por fim, na Seção 3.4, são apresentadas as equações que definem a dinâmica de voo do *VANT*.

#### 3.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Nesta seção, são apresentados alguns sistemas de coordenadas utilizados na modelagem da dinâmica de *VANTs*. Os conceitos aqui apresentados são baseados no Capítulo 2 de Beard e McLain (2012). O objetivo é demonstrar como é possível descrever a orientação de uma aeronave em relação à um referencial inercial (terra). De acordo com Beard e McLain (2012), é necessário utilizar diferentes tipos de sistemas de coordenadas pelas seguintes razões:

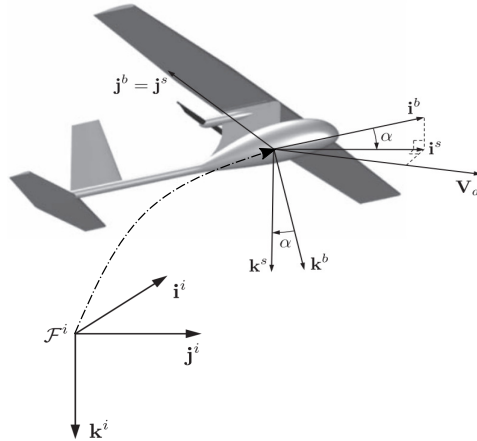
- As equações de movimento de Newton, são derivadas em relação a um referencial inercial fixo, a terra;
- Forças aerodinâmicas e momentos que agem sobre a aeronave são mais facilmente descritas tomando-se o próprio corpo da aeronave como referência;
- Sensores embarcados, tais como acelerômetros e giroscópios, medem as informações em relação ao corpo da aeronave. Em contrapartida, sistemas de posicionamento global medem posições e velocidades em relação a superfície da terra.

Um sistema de coordenada é transformado em outro através de operações trigonométricas de rotação e translação (BEARD; MCLAIN, 2012). Os três principais sistemas de coordenadas, ilustrados na Figura 5, utilizam como referência a terra, o corpo da aeronave e a direção do vetor velocidade do ar, respectivamente. A seguir uma breve descrição, em tradução livre, de cada um dos três sistemas de coordenadas, identificados pelos seus símbolos de representação.

- $\mathcal{F}^i$ : nomeado em inglês como "*inertial frame*", esse sistema de coordenadas é fixado na superfície da terra. É também conhecido pela sigla *NED* (*North, East and Down*). Em seu sistema de coordenadas, o eixo  $x$  aponta para o norte, o eixo  $y$  para o leste e o eixo  $z$  em direção ao centro da terra. Seus eixos coordenados  $(x, y, z)$  são representados por vetores unitários e nomeados de  $i^i$ ,  $j^i$  e  $k^i$ , respectivamente;
- $\mathcal{F}^b$ : nomeado em inglês como "*body frame*", esse sistema de coordenadas é fixado no centro de massa da aeronave. É obtido através de uma sequência de rotações, com base nos ângulos de *Euler*, de  $\mathcal{F}^i$  para  $\mathcal{F}^b$ . Em seu sistema de coordenadas, o eixo  $x$  aponta na direção do nariz da aeronave, o eixo  $y$  na direção da asa direita e o eixo  $z$  para baixo. Seus eixos coordenados  $(x, y, z)$  são representados por vetores unitários e nomeados de  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ , respectivamente;
- $\mathcal{F}^s$ : nomeado em inglês como "*stability frame*", esse sistema de coordenadas se baseia no vetor velocidade do ar ( $V_a$ ). A velocidade da aeronave é referida com base na velocidade do ar em torno dela. Para gerar força de sustentação, as asas da aeronave devem formar um ângulo em relação ao vetor  $V_a$ . Esse ângulo é chamado de ângulo de ataque e é representado por  $\alpha$ . Em seu sistema de coordenadas, o eixo  $x$  aponta na direção do vetor  $V_a$ , o eixo  $y$  na direção da asa direita e o eixo  $z$  para baixo. Seus eixos coordenados  $(x, y, z)$  são representados por vetores unitários e nomeados de  $i^s$ ,  $j^s$  e  $k^s$ , respectivamente.

A Figura 5 ilustra uma representação geral dos três sistemas de coordenadas citados. Além dos sistemas  $\mathcal{F}^i$ ,  $\mathcal{F}^b$  e  $\mathcal{F}^s$ , Beard e McLain (2012) demonstram a existência de mais quatro, caracterizados pelos símbolos  $\mathcal{F}^v$  (*vehicle frame*),  $\mathcal{F}^{v1}$  (*vehicle-1 frame*),  $\mathcal{F}^{v2}$  (*vehicle-2 frame*) e  $\mathcal{F}^w$  (*wind frame*). A projeção individual de cada um destes sistemas de coordenadas pode ser visto em detalhes no Capítulo 2 de Beard e McLain (2012).

Figura 5 – Sistemas de Coordenadas.



Fonte: Adaptado de (BEARD; MCLAIN, 2012)

O vetor  $V_a$  é obtido através da diferença entre a velocidade em relação ao solo, representada no sistema  $\mathcal{F}^i$ , e a velocidade do vento, representada no sistema  $\mathcal{F}^w$ . Como ambas estão em sistemas de coordenadas diferentes, na Seção 2.3 do Capítulo 2 de Beard e McLain (2012) são apresentadas, em detalhes, as operações de rotação entre os sistemas até chegar a representação final de  $V_a$ , conforme expressão a seguir:

$$V_a = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (3.1)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as velocidades ao longo dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ , respectivamente. Com base nas componentes de  $V_a$ , o ângulo de ataque pode ser representado da seguinte forma:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) \quad (3.2)$$

Os sistemas de coordenadas  $\mathcal{F}^b$  e  $\mathcal{F}^s$  coincidem quando  $\alpha = 0$ . Em muitos casos é conveniente, no início dos cálculos, converter forças que são representadas no sistema  $\mathcal{F}^s$  para o sistema  $\mathcal{F}^b$ . Segundo Beard e McLain (2012), isso ocorre devido ao fato dos cálculos baseados em características aerodinâmicas, por exemplo velocidades, forças e momentos, serem mais facilmente compreendidos quando expressados

pelo sistema  $\mathcal{F}^b$ . As equações que descrevem os momentos são similares em ambos os sistemas  $\mathcal{F}^b$  e  $\mathcal{F}^s$ , desde que tenham suas origens no centro de massa da aeronave. As matrizes contendo as funções trigonométricas para transformação entre sistemas de coordenadas não são apresentadas por estarem fora do escopo deste trabalho, mas podem ser vistas em detalhes no Capítulo 2, Seção 2.2, de Beard e McLain (2012).

O principal objetivo desta seção foi introduzir alguns conceitos básicos sobre os sistemas de coordenadas e suas diferentes nomenclaturas, uma vez que elas aparecerão com certa frequência em algumas expressões matemáticas que contribuem para a modelagem da dinâmica do VANT.

### 3.2 VARIÁVEIS DE ESTADO

A dinâmica de voo de uma aeronave de asa fixa pode ser representada pela composição de dois tipos de movimentos: o translacional e o rotacional (NELSON, 1989). Ainda segundo Nelson (1989), esses movimentos podem ser representados matematicamente através de doze variáveis de estado. Relacionados ao movimento translacional, existem três estados de posição e três de velocidade. De forma similar, relacionados ao movimento rotacional, existem três estados de posição angular e três de velocidade angular (BEARD; MCLAIN, 2012). As doze variáveis de estado estão listadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Variáveis de estado do VANT.

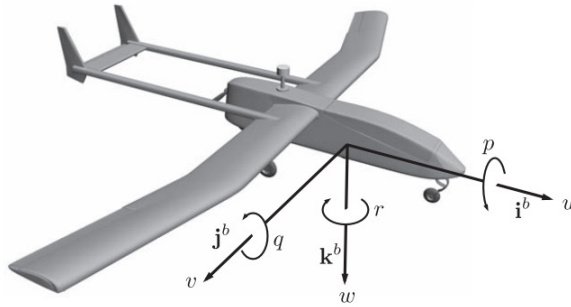
Movimento	Descrição	Eixo x	Eixo y	Eixo z
Translacional	Posições	$p_n$	$p_e$	$p_d$
	Velocidades	$u$	$v$	$w$
Rotacional	Posições angulares	$\phi$	$\theta$	$\psi$
	Velocidades angulares	$p$	$q$	$r$

Fonte: Do Autor

Em relação as variáveis de estado listadas na Tabela 2, seguem algumas observações:

- As variáveis  $p_n$ ,  $p_e$  e  $p_d$  são posições medidas, respectivamente, ao longo dos eixos  $i^i$ ,  $j^i$  e  $k^i$  do sistema  $\mathcal{F}^i$ ;
- As variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$  são velocidades medidas, respectivamente, ao longo dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$  do sistema  $\mathcal{F}^b$ ;

Figura 6 – Representação das variáveis de estado.



Fonte: Adaptado de (BEARD; MCLAIN, 2012)

- As variáveis  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  são posições angulares medidas respectivamente sobre os sistemas  $\mathcal{F}^{v2}$ ,  $\mathcal{F}^{v1}$  e  $\mathcal{F}^v$ ;
- As variáveis  $p$ ,  $q$  e  $r$  são velocidades angulares medidas respectivamente em torno dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$  do sistema  $\mathcal{F}^b$ .

As variáveis de estado são esquematicamente ilustradas através da Figura 6 e referem-se apenas aquelas representadas através do sistema  $\mathcal{F}^b$ . Devido as diferenças entre sistemas discutidas anteriormente, as demais variáveis de estado não poderiam ser representadas na mesma figura. Conforme será visto posteriormente, quando  $\phi = \theta = 0$ , teremos  $p = \dot{\phi}$ ,  $q = \dot{\theta}$  e  $r = \dot{\psi}$ . Geralmente, as velocidades angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$  são funções de derivadas em relação ao tempo dos ângulos de atitude  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  e dos ângulos  $\phi$  e  $\theta$  (BEARD; MCLAIN, 2012). As seções seguintes são dedicadas a demonstrar as equações de movimento correspondentes a cada uma das variáveis de estado listadas na Tabela 2.

### 3.3 CINEMÁTICA

Nesta seção, as equações que definem a cinemática de voo do *VANT* descrevem os movimentos translacional e rotacional. De acordo com Beard e McLain (2012), a velocidade translacional de um *VANT* é geralmente expressada em relação as componentes da velocidade em cada eixo direcional do sistema  $\mathcal{F}^b$ . As variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem

a velocidade da aeronave projetadas ao longo dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ , respectivamente. Em contrapartida, a posição translacional de um VANT é geralmente medida e expressada através do sistema  $\mathcal{F}^i$ . A relação entre velocidade e posição translacional requer diferenciação e pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{p}_n &= u(\cos\theta\cos\psi) + v(\sen\phi\sen\theta\cos\psi - \cos\phi\sen\psi) \\ &\quad + w(\cos\phi\sen\theta\cos\psi + \sen\phi\sen\psi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_e &= u(\cos\theta\sen\psi) + v(\sen\phi\sen\theta\sen\psi + \cos\phi\cos\psi) \\ &\quad + w(\cos\phi\sen\theta\sen\psi - \sen\phi\cos\psi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\dot{p}_d = -u\sen\theta + v(\sen\phi\cos\theta) + w(\cos\phi\cos\theta) \quad (3.5)$$

onde as derivadas  $\dot{p}_n$ ,  $\dot{p}_e$  e  $\dot{p}_d$  foram obtidas a partir da transformação de  $\mathcal{F}^b$  em  $\mathcal{F}^v$  das variáveis  $u$ ,  $v$  e  $w$ . Essa, é uma representação da cinemática que relaciona as derivadas das posições em termo das velocidades em cada eixo, sendo que forças e aceleração não são consideradas (BEARD; MCLAIN, 2012).

Quanto ao movimento rotacional, Beard e McLain (2012) demonstram que as relações entre as posições angulares  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  e as velocidades angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$  são mais complicadas devido ao fato das velocidades angulares estarem representadas pelo sistema  $\mathcal{F}^b$ , enquanto as posições angulares por três sistemas de coordenadas distintos:  $\phi$  é uma transformação de  $\mathcal{F}^{v2}$  para  $\mathcal{F}^b$ ,  $\theta$  é uma transformação de  $\mathcal{F}^{v1}$  para  $\mathcal{F}^{v2}$  e  $\psi$ , é uma transformação de  $\mathcal{F}^v$  para  $\mathcal{F}^{v1}$ .

As velocidades angulares com base no sistema  $\mathcal{F}^b$ , podem ser expressadas em termos das derivadas das posições angulares  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , tomado as devidas transformações entre sistemas (detalhes nas Equações 3.2 e 3.3 de Beard e McLain (2012)), resultando nas seguintes equações:

$$\dot{\phi} = p + q(\sen\phi\tan\theta) + r(\cos\phi\tan\theta) \quad (3.6)$$

$$\dot{\theta} = q\cos\phi - r\sen\phi \quad (3.7)$$

$$\dot{\psi} = q(\sin\phi\sec\theta) + r(\cos\phi\sec\theta) \quad (3.8)$$

As Equações (3.6), (3.7) e (3.8), expressam as derivadas dos três estados de posição angular em termos das posições angulares  $\phi$  e  $\theta$  e das velocidades angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$ .

### 3.4 DINÂMICA

Nesta seção, as equações que definem a dinâmica de voo do *VANT* são apresentadas. Estas equações descrevem os movimentos translacional e rotacional levando-se em consideração as causas que os gerou, ou seja, haverá relações das forças e momentos que incidem sobre o corpo da aeronave. Para obter as equações da dinâmica de um *VANT*, Beard e McLain (2012) fazem uso da segunda lei de Newton, primeiro aplicando aos graus de liberdade do movimento translacional e, na sequência, repetindo o processo para o movimento rotacional.

#### 3.4.1 Movimento Translacional

A aplicação da segunda lei de Newton sobre um *VANT* baseia-se na terra como referência, ou seja, utiliza o sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^i$ . Embora o movimento seja referenciado em um ponto fixo, ele pode ser expressado usando componentes de um vetor associado a outro sistema de coordenadas, por exemplo o sistema  $\mathcal{F}^b$ . Beard e McLain (2012) fazem isso para o vetor velocidade em relação ao solo ( $V_g$ ), que, por conveniência, é expressado através do sistema  $\mathcal{F}^b$  pela expressão:

$$V_g^b = (u \quad v \quad w)^T \quad (3.9)$$

A segunda lei de Newton aplicada a um corpo em movimento de translação pode ser descrita como:

$$m \frac{dV_g}{dt_i} = f \quad (3.10)$$

onde  $m$  é a massa da aeronave,  $\frac{d}{dt_i}$  é a derivada em relação ao tempo no sistema  $\mathcal{F}^i$ , e  $f$  é a soma de todas as forças externas agindo sobre o corpo do *VANT*. As forças externas incluem gravidade, forças aerodinâmicas e forças de propulsão. A derivada da velocidade em relação ao sistema  $\mathcal{F}^i$  pode ser escrita em termos da derivada no sistema  $\mathcal{F}^b$  e da velocidade angular, sendo representada da seguinte forma:

$$\frac{dV_g}{dt_i} = \frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g \quad (3.11)$$

onde  $\omega_{b/i}$  é a velocidade angular do *VANT* em relação ao sistema  $\mathcal{F}^i$ .

Combinando as Equações (3.10) e (3.11), resulta em uma repre-



sentação alternativa da segunda lei de Newton, direcionada ao sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^b$ :

$$m \left( \frac{dV_g}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V_g \right) = f \quad (3.12)$$

Por se tratar de uma aeronave manobrável, pode-se aplicar novamente a segunda lei expressando as forças e velocidades no sistema  $\mathcal{F}^b$ , da seguinte forma:

$$m \left( \frac{dV_g^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times V_g^b \right) = f^b \quad (3.13)$$

onde os vetores  $\omega_{b/i}^b$  e  $f^b$  são dados por:

$$\omega_{b/i}^b = (p \quad q \quad r)^T \quad (3.14)$$

$$f^b = (f_x \quad f_y \quad f_z)^T \quad (3.15)$$

A expressão  $\frac{dV_g^b}{dt_b}$  é a taxa de variação da velocidade do VANT representada no sistema  $\mathcal{F}^b$ . Considerando que as velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  são projeções instantâneas de  $V_g^b$  ao longo dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ , obtém-se:

$$\frac{dV_g^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Com base na Equação (3.16), expandindo o produto da Equação (3.13) e reagrupando os termos, obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\dot{u} = rv - qw + \frac{1}{m} F_x \quad (3.17)$$

$$\dot{v} = pw - ru + \frac{1}{m} F_y \quad (3.18)$$

$$\dot{w} = qu - pv + \frac{1}{m} F_z \quad (3.19)$$

As forças  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são as respectivas forças externas agindo sobre o corpo da aeronave ao longo dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ . Estas forças serão descritas com mais detalhes no Capítulo 4.

### 3.4.2 Movimento Rotacional

Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento rotacional obtém-se:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \mathbf{m} \quad (3.20)$$

onde  $\mathbf{h}$  é o vetor momento angular e  $\mathbf{m}$  é a soma de todos os momentos externos aplicados em torno do centro de massa do *VANT*. A derivada do momento angular tomada no sistema  $\mathcal{F}^i$  pode ser expandida e representada da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \omega_{b/i} \times \mathbf{m} \quad (3.21)$$

Para o movimento translacional, é mais conveniente expressar a Equação (3.21) no sistema  $\mathcal{F}^b$  da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{h}^b}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times \mathbf{m}^b \quad (3.22)$$

Considerando o *VANT* como um corpo rígido, o momento de inércia é definido como o produto da matriz de inércia  $\mathbf{J}$  pelo vetor velocidade angular, resultando:

$$\mathbf{h}^b = \mathbf{J}\omega_{b/i}^b \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{J}$  é dado por:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & -\mathbf{J}_{xy} & -\mathbf{J}_{xz} \\ -\mathbf{J}_{xy} & \mathbf{J}_y & -\mathbf{J}_{yz} \\ -\mathbf{J}_{xz} & -\mathbf{J}_{yz} & \mathbf{J}_z \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Os termos da diagonal principal de  $\mathbf{J}$  são chamados de momentos de inércia, enquanto os demais termos são chamados de produtos de inércia. O momento de inércia mede a tendência da aeronave se opor a aceleração em torno de um específico eixo de rotação (BEARD; MCLAIN, 2012).

Implícito a cada termo da matriz  $\mathbf{J}$  existe uma integral que é calculada em relação aos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$  do sistema  $\mathcal{F}^b$ . Isso implica que  $\mathbf{J}$  é constante quando vista a partir de  $\mathcal{F}^b$  e, consequentemente,  $\frac{d\mathbf{J}}{dt_b} = 0$ . Calculando as derivadas e substituindo na Equação (3.22)

obtém-se:

$$\mathbf{J} \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} + \omega_{b/i}^b \times (\mathbf{J}\omega_{b/i}^b) = \mathbf{m}^b \quad (3.25)$$

A expressão  $\frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b}$  é a taxa de variação da velocidade angular expressada no sistema  $\mathcal{F}^b$ , conforme visto por um observador no corpo em movimento.

Considerando  $p$ ,  $q$  e  $r$  projeções instantâneas de  $\omega_{b/i}^b$  em torno dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = \frac{d\omega_{b/i}^b}{dt_b} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Rearranjando a Equação (3.25), obtém-se:

$$\dot{\omega}_{b/i}^b = \mathbf{J}^{-1} \left[ -\omega_{b/i}^b \times (\mathbf{J}\omega_{b/i}^b) + \mathbf{m}^b \right] \quad (3.27)$$

De acordo com Beard e McLain (2012), as aeronaves de asa fixa são frequentemente simétricas em relação ao plano formado pelos eixos  $i^b$  e  $k^b$ , o que torna os produtos de inércia  $\mathbf{J}_{xy} = \mathbf{J}_{yz} = 0$ . Sendo assim, a matriz  $\mathbf{J}$  pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x & 0 & -\mathbf{J}_{xz} \\ 0 & \mathbf{J}_y & 0 \\ -\mathbf{J}_{xz} & 0 & \mathbf{J}_z \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Diante destas considerações de simetria, a matriz inversa de  $\mathbf{J}$  pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{adj(\mathbf{J})}{det(\mathbf{J})} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{J}_z}{\Gamma} & 0 & \frac{\mathbf{J}_{xz}}{\Gamma} \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{J}_y} & 0 \\ \frac{\mathbf{J}_{xz}}{\Gamma} & 0 & \frac{\mathbf{J}_x}{\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

onde  $\Gamma$  é definido por:

$$\Gamma = \mathbf{J}_x \mathbf{J}_z - \mathbf{J}_{xz}^2 \quad (3.30)$$

Os momentos externos em torno dos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$  são definidos como:

$$\mathbf{m}^b = (l \quad m \quad n)^T \quad (3.31)$$

Desta forma, a Equação (3.27) pode ser reescrita através destas com-

ponentes:

$$\dot{p} = \Gamma_1 pq - \Gamma_2 qr + \Gamma_3 l + \Gamma_4 n \quad (3.32)$$

$$\dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6 (p^2 - r^2) + \frac{1}{\mathbf{J}_y} m \quad (3.33)$$

$$\dot{r} = \Gamma_7 pq - \Gamma_1 qr + \Gamma_4 l + \Gamma_8 n \quad (3.34)$$

onde as variáveis  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_8$  são operações entre momentos de inércia e produtos de inércia, e podem ser vistas em detalhes na Equação 3.32 da Subseção 3.3.2 do Capítulo 3 de Beard e McLain (2012).

Neste capítulo, foram apresentadas as doze variáveis de estado que descrevem a cinemática e dinâmica de um *VANT* de asa fixa. Estas equações não estão completas, pois as forças e momentos que agem sobre o corpo do *VANT* ainda não foram definidas. No Capítulo 4 são definidas as forças e momentos gravitacionais, aerodinâmicas e de propulsão.

## 4 FORÇAS E MOMENTOS

Neste capítulo, as forças e momentos que agem sobre o corpo do *VANT* são apresentadas. O objetivo é proporcionar uma visão geral das expressões que definem as forças gravitacional, aerodinâmica e de propulsão, que somadas formam as forças  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$ , e os momentos  $l$ ,  $m$  e  $n$ , citados anteriormente no Capítulo 3. Os procedimentos para dedução de cada equação podem ser vistos em detalhes no Capítulo 4 de Beard e McLain (2012).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 4.1 são apresentadas as forças gravitacionais. Em seguida, na Seção 4.2, são obtidas as forças e momentos causados pelas forças aerodinâmicas. Por fim, na Seção 4.3, são descritas as forças e momentos causados pela força de propulsão.

### 4.1 FORÇAS GRAVITACIONAIS

O efeito do campo gravitacional sobre um *VANT* pode ser modelado como uma força proporcional a massa que atua no centro de massa da aeronave (BEARD; MCLAIN, 2012). Essa força age no sentido do eixo  $k^i$  e é proporcional a massa da aeronave multiplicada pela constante gravitacional  $g$ . Se analisada pelo sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^v$ , a força gravitacional agindo no centro de massa da aeronave é dada pela seguinte expressão:

$$f_g^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

No Capítulo 3, as forças foram expressadas com base no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^b$ . Desta forma, a força gravitacional representada pela Equação (4.1) deve ser transformada de  $\mathcal{F}^v$  para  $\mathcal{F}^b$ , resultando em:

$$f_g^b = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Conforme pode-se observar na Equação (4.2), existem componentes de força gravitacional nos eixos  $i^b$ ,  $j^b$  e  $k^b$ . Também é possível observar que, quando representada no sistema  $\mathcal{F}^b$ , a força gravitacional passa a ser função também dos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ .

Desde que a força da gravidade atue em torno do centro de massa do *VANT*, não haverá nenhum momento sobre a aeronave produzido pela gravidade (BEARD; MCLAIN, 2012).

## 4.2 FORÇAS AERODINÂMICAS E MOMENTOS

Nesta seção, as forças aerodinâmicas e momentos que atuam sobre o *VANT* são discutidas e apresentadas de forma resumida. De acordo com Beard e McLain (2012), quando uma aeronave de asa fixa se desloca através do ar, uma distribuição de pressão é gerada em torno de suas asas. A forma mais comum de representar essa pressão é através da combinação das forças e momentos ocasionados por essa pressão, sendo ela uma função do vetor  $V_a$ , da densidade do ar  $\rho$ , do formato do aerofólio (perfil) das asas e do ângulo de ataque  $\alpha$  das asas em relação à  $V_a$ . Ainda segundo Beard e McLain (2012), é comum decompor as forças aerodinâmicas e momentos em dois grupos: longitudinal e lateral.

### 4.2.1 Aerodinâmica Longitudinal

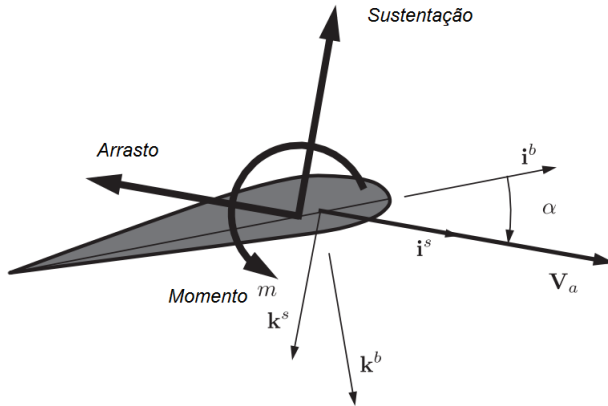
As forças aerodinâmicas e momentos longitudinal, causam movimento da aeronave no plano  $i^b - k^b$ . Essas forças e momentos são nomeadas de sustentação, arrasto e momento de inclinação (ou momento de arfagem), respectivamente. Por definição, as forças de sustentação e arrasto estão alinhadas com os eixos  $i^s$  e  $k^s$  do sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^s$ , conforme ilustrado na Figura 7.

Quando representado na forma vetorial, o momento de arfagem também se alinha com o eixo  $j^s$  do sistema  $\mathcal{F}^s$ . As forças de sustentação e arrasto e o momento de arfagem são fortemente influenciados pelo ângulo  $\alpha$ , velocidade angular  $q$  e deflexão do elevador  $\delta_e$  (BEARD; MCLAIN, 2012). Com base nestas afirmações, as forças de sustentação e arrasto e momentos de arfagem podem ser computadas em função de  $\alpha$ ,  $q$  e  $\delta_e$  da seguinte forma:

$$F_L = \frac{1}{2}\rho V a^2 S C_L(\alpha, q, \delta_e) \quad (4.3)$$

$$F_D = \frac{1}{2}\rho V a^2 S C_D(\alpha, q, \delta_e) \quad (4.4)$$

Figura 7 – Forças e momentos sobre o VANT.



Fonte: Adaptado de (BEARD; MCLAIN, 2012)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c C_m(\alpha, q, \delta_e) \quad (4.5)$$

onde  $S$  é a área das asas,  $c$  é o comprimento da corda da asa,  $C_L$  é o coeficiente de sustentação,  $C_D$  é o coeficiente de arrasto e  $C_m$  é o coeficiente de momento de arfagem.

Os coeficientes de sustentação, arrasto e momento de arfagem são adimensionais e não lineares. Porém, para pequenos valores de  $\alpha$ , o fluxo de ar em torno das asas se manterá laminar e preso a sua superfície (BEARD; MCLAIN, 2012). Desta forma,  $F_L$ ,  $F_D$  e  $\mathbf{m}$  podem ser modelados usando aproximação linear. Por exemplo, a força de sustentação pode ser aproximada usando série de Taylor de primeira ordem e escrita como:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[ C_{L_0} + \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial q} q + \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e} \delta_e \right] \quad (4.6)$$

onde  $C_{L_0}$  é o valor de  $C_L = q = \delta_e = 0$ .

De acordo com Beard e McLain (2012), é comum não atribuir dimensões as derivadas parciais na aproximação linear realizada na obtenção da Equação (4.6). Pelo fato de  $q$  ser expresso em  $rad/s$  e  $C_L$  em  $rad$ , substitui-se a derivada parcial  $\frac{\partial C_L}{\partial q}$  pelo fator padrão  $\frac{c}{2V_a}$ . Desta

forma, a Equação (4.6) é reescrita como:

$$F_L = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[ C_{L_o} + C_{L\alpha} \alpha + C_{Lq} \frac{c}{2V_a} q + C_{L\delta_e} \delta_e \right] \quad (4.7)$$

onde  $C_{L\alpha} = \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$ ,  $C_{Lq} = \frac{\partial C_L}{\partial \frac{qc}{2V_a}}$  e  $C_{L\delta_e} = \frac{\partial C_L}{\partial \delta_e}$ , sendo agora todos os coeficientes adimensionais.

Seguindo os mesmos procedimentos, obtém-se as aproximações lineares para a força de arrasto e momento de arfagem, representados pelas seguintes equações:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S \left[ C_{D_o} + C_{D\alpha} \alpha + C_{Dq} \frac{c}{2V_a} q + C_{D\delta_e} \delta_e \right] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \rho V_a^2 S c \left[ C_{m_o} + C_{m\alpha} \alpha + C_{mq} \frac{c}{2V_a} q + C_{m\delta_e} \delta_e \right] \quad (4.9)$$

onde:

- $C_{D_o}$  é o coeficiente de arrasto quando  $\alpha = 0$ ;
- $C_{D\alpha}$  é o coeficiente de arrasto pela variação de  $\alpha$ ;
- $C_{Dq}$  é o coeficiente de arrasto pela variação de  $q$ ;
- $C_{D\delta_e}$  é o coeficiente de arrasto pela variação de  $\delta_e$ ;
- $C_{m_o}$  é o coeficiente de momento de arfagem quando  $\alpha = 0$ ;
- $C_{m\alpha}$  é o coeficiente de momento de arfagem pela variação de  $\alpha$ ;
- $C_{mq}$  é o coeficiente de momento de arfagem pela variação de  $q$ ;
- $C_{m\delta_e}$  é o coeficiente de momento de arfagem pela variação de  $\delta_e$ .

As forças de sustentação e arrasto, representadas pelas Equações (4.7) e (4.8), estão descritas no sistema de coordenadas  $\mathcal{F}^s$ . Para representá-las no sistema  $\mathcal{F}^b$ , é necessário rotação de  $\mathcal{F}^s$  para  $\mathcal{F}^b$  pelo ângulo  $\alpha$  da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_D \\ -F_L \end{pmatrix} \quad (4.10)$$



o que resulta nas equações:

$$\begin{aligned}
 f_x &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S [-C_D(\alpha) \cos \alpha + C_L(\alpha) \sin \alpha] \\
 &\quad + [-C_{Dq} \cos \alpha + C_{Lq} \sin \alpha] \frac{c}{2V_a} q \\
 &\quad + [-C_{D\delta_e} \cos \alpha + C_{L\delta_e} \sin \alpha] \delta_e
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 f_z &= \frac{1}{2} \rho V_a^2 S [-C_D(\alpha) \sin \alpha - C_L(\alpha) \cos \alpha] \\
 &\quad + [-C_{Dq} \sin \alpha - C_{Lq} \cos \alpha] \frac{c}{2V_a} q \\
 &\quad + [-C_{D\delta_e} \sin \alpha - C_{L\delta_e} \cos \alpha] \delta_e
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

As funções  $C_L(\alpha)$  e  $C_D(\alpha)$  apresentadas nas Equações (4.11) e (4.12), são funções não lineares, mas sob pequenas variações de  $\alpha$  podem ser modeladas da seguinte forma:

$$C_L(\alpha) = C_{L_0} + C_{L\alpha} \alpha \tag{4.13}$$

$$C_D(\alpha) = C_{D_0} + C_{D\alpha} \alpha \tag{4.14}$$

Segundo Beard e McLain (2012), o momento de arfagem é geralmente uma função não linear de  $\alpha$  e deve ser determinado através de ensaios em túnel de vento ou em voos de testes. Assumindo-se as mesmas condições para  $\alpha$  sob pequenas variações, a função  $C_{m\alpha}$  pode ser representada da seguinte forma:

$$C_m(\alpha) = C_{m_0} + C_{m\alpha} \alpha \tag{4.15}$$

Para grandes variações de  $\alpha$ , na Seção 4.2.2 do Capítulo 4 de Beard e McLain (2012) é demonstrada em detalhes a obtenção na forma não linear das funções  $F_L$ ,  $F_D$  e  $\mathbf{m}$ .

## 4.2.2 Aerodinâmica Lateral

A força e os momentos causados pela aerodinâmica lateral geram movimento translacional ao longo do eixo  $j^b$  (BEARD; MCLAIN, 2012). Isso resulta em movimentos rotacionais de rolamento e guinada, fazendo com que a trajetória de voo da aeronave seja modificada. A aerodinâmica lateral sofre uma influência significativa do ângulo de der-

rapagem lateral  $\beta$ , que é o ângulo entre o vetor  $V_a$  e o plano  $i^b - k^b$ . Também é influenciada pelas velocidades angulares  $p$  e  $r$  e pela deflexão das superfícies de controle  $\delta_a$  e  $\delta_r$ .

Beard e McLain (2012) denotam a força lateral como  $f_y$  e os momentos de rolamento e guinada como  $l$  e  $n$ , respectivamente, resultando nas seguintes equações:

$$f_y = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S C_Y(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (4.16)$$

$$l = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_l(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (4.17)$$

$$n = \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b C_n(\beta, p, r, \delta_a, \delta_r) \quad (4.18)$$

onde:

- $C_Y$  é coeficiente de força aerodinâmica ao longo do eixo  $j^b$ ;
- $C_l$  é o coeficiente de momento aerodinâmico em torno do eixo  $i^b$ ;
- $C_n$  é o coeficiente de momento aerodinâmico em torno do eixo  $k^b$ ;
- $b$  é a envergadura das asas da aeronave.

Os coeficientes  $C_Y$ ,  $C_l$  e  $C_n$  são adimensionais e não lineares. Assumindo pequenas variações do ângulo  $\beta$  e seguindo os mesmos procedimentos realizados para a aerodinâmica longitudinal, obtém-se as respectivas equações da força lateral e momentos de rolamento e guinada:

$$f_y = \left[ C_{Y_o} + C_{Y\beta}\beta + C_{Yp}\frac{b}{2V_a}p + C_{Yr}\frac{b}{2V_a}r + C_{Y\delta_a}\delta_a + C_{Y\delta_r}\delta_r \right] \times \frac{1}{2}\rho V_a^2 S \quad (4.19)$$

$$l = \left[ C_{l_o} + C_{l\beta}\beta + C_{lp}\frac{b}{2V_a}p + C_{lr}\frac{b}{2V_a}r + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r \right] \times \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b \quad (4.20)$$

$$n = \left[ C_{no} + C_{n\beta}\beta + C_{np}\frac{b}{2V_a}p + C_{nr}\frac{b}{2V_a}r + C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r \right] \times \frac{1}{2}\rho V_a^2 S b \quad (4.21)$$

onde:

- $C_{Y_o}$  é o coeficiente de força aerodinâmica quando  $\beta = 0$ ;
- $C_{Y\beta}$  é o coeficiente de força aerodinâmica pela variação de  $\beta$ ;
- $C_{Yp}$  é o coeficiente de força aerodinâmica pela variação de  $p$ ;
- $C_{Yr}$  é o coeficiente de força aerodinâmica pela variação de  $r$ ;
- $C_{Y\delta_a}$  é o coeficiente de força aerodinâmica pela variação de  $\delta_a$ ;
- $C_{Y\delta_r}$  é o coeficiente de força aerodinâmica pela variação de  $\delta_r$ ;
- $C_{l_o}$  é o coeficiente de momento de rolamento quando  $\beta = 0$ ;
- $C_{l\beta}$  é o coeficiente de momento de rolamento pela variação de  $\beta$ ;
- $C_{lp}$  é o coeficiente de momento de rolamento pela variação de  $p$ ;
- $C_{lr}$  é o coeficiente de momento de rolamento pela variação de  $r$ ;
- $C_{l\delta_a}$  é o coeficiente de momento de rolamento pela variação de  $\delta_a$ ;
- $C_{l\delta_r}$  é o coeficiente de momento de rolamento pela variação de  $\delta_r$ ;
- $C_{n_o}$  é o coeficiente de momento de guinada quando  $\beta = 0$ ;
- $C_{n\beta}$  é o coeficiente de momento de guinada pela variação de  $\beta$ ;
- $C_{np}$  é o coeficiente de momento de guinada pela variação de  $p$ ;
- $C_{nr}$  é o coeficiente de momento de guinada pela variação de  $r$ ;
- $C_{n\delta_a}$  é o coeficiente de momento de guinada pela variação de  $\delta_a$ ;
- $C_{n\delta_r}$  é o coeficiente de momento de guinada pela variação de  $\delta_r$ .

De acordo com Beard e McLain (2012), a força e momentos da aerodinâmica lateral estão alinhados com os eixos da aeronave no sistema  $\mathcal{F}^b$ , sendo que não precisam passar por transformação rotacional entre sistemas de coordenadas. Para aeronaves que são simétricas em torno do plano  $i^b - k^b$ ,  $C_{Y_o}$ ,  $C_{l_o}$  e  $C_{n_o}$ , são tipicamente iguais a zero.

### 4.3 FORÇAS DE PROPULSÃO E MOMENTOS

Nesta seção, a força de propulsão e momento gerados pelo grupo motopropulsor são apresentados. Os componentes que formam o grupo motopropulsor são o motor e a hélice do *VANT*.

#### 4.3.1 Propulsão da Hélice

Segundo Beard e McLain (2012), um modelo simples de força de propulsão pode ser desenvolvido aplicando-se o princípio de Bernoulli. Calculam-se as pressões a frente e atrás da hélice e, desta forma, obtém-se a diferença de pressão em torno da área da hélice. Aplicando o princípio de Bernoulli a frente e atrás da hélice, são obtidas as seguintes equações:

$$P_f = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_a^2 \quad (4.22)$$

$$P_b = P_0 + \frac{1}{2}\rho V_e^2 \quad (4.23)$$

onde  $P_0$  é a pressão estática,  $\rho$  a densidade do ar,  $V_e$  é a velocidade em que ar deixa a hélice,  $P_f$  e  $P_b$  as respectivas pressões a frente e atrás da hélice.

Ignorando-se os transientes que ocorrem no motor, Beard e McLain (2012) afirmam que existe uma relação linear entre o comando de aceleração do motor ( $\delta_t$ ) e a velocidade angular da hélice. Desta forma, a hélice em rotação faz com que a  $V_e$  possa ser representada da seguinte forma:

$$V_e = K_m \delta_t \quad (4.24)$$

onde  $K_m$  é a constante de eficiência do motor. O movimento circular da hélice pode ser visto como um disco que possui uma área de cobertura chamada  $S_h$ . Sendo assim, a força de propulsão gerada pelo grupo motopropulsor pode ser definida através da seguinte expressão:

$$F_{xp} = S_h C_h (P_b - P_f) \quad (4.25)$$

onde  $F_{xp}$  é a força de propulsão e  $C_h$  é o coeficiente aerodinâmico da hélice. Substituindo as Equações (4.22), (4.23) e (4.24) na Equação (4.25) e simplificando os termos, obtém-se:

$$F_{xp} = \frac{1}{2}\rho S_h C_h [(K_m \delta_t)^2 - V_a^2] \quad (4.26)$$

De acordo com Beard e McLain (2012), as aeronaves da asa fixa costumam ser projetadas de tal forma que, a força de propulsão atuará somente sobre o eixo  $i^b$ , sem produzir nenhum momento em torno do centro de massa do *VANT*, resultando na seguinte equação:

$$f_p = \frac{1}{2} \rho S_h C_h \begin{pmatrix} (K_m \delta_t)^2 - V_a^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

### 4.3.2 Torque da Hélice

Quando a hélice rotaciona, surge uma força sobre o ar que passa através dela, aumentando o momento do ar enquanto estiver gerando força de propulsão na aeronave (BEARD; MCLAIN, 2012). Forças iguais e opostas são aplicadas pelo movimento do ar na hélice. Ainda segundo Beard e McLain (2012), o efeito total destas forças é um torque em torno do eixo de rotação da hélice. O torque aplicado pelo motor a hélice, e esta ao ar, geram torques iguais e opostos aplicados pela hélice ao motor que está fixado na estrutura do *VANT*.

O torque resultante é oposto a direção de rotação da hélice e proporcional ao quadrado da velocidade angular da hélice, definido pela seguinte equação:

$$T_p = -K_{Tp}(K_\Omega \delta_t)^2 \quad (4.28)$$

onde  $T_p$  é o torque gerado pela força de propulsão,  $K_{Tp}$  é a constante de torque da hélice, e o produto  $K_\Omega \delta_t$ , é a velocidade de rotação da hélice. Os momentos produzidos pelo grupo motopropulsor são representados no sistema  $F^b$  da seguinte forma:

$$\mathbf{m}_p = \begin{pmatrix} -K_{Tp}(K_\Omega \delta_t)^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

De acordo com Beard e McLain (2012), o momento gerado pela força de propulsão é consideravelmente pequeno. Quando significativo, esse momento causa uma pequena tendência de rotacionar (movimento de rolamento) o *VANT*, em sentido oposto ao de rotação da hélice, facilmente corrigido por uma pequena deflexão da superfície de controle aileron.

Neste capítulo, foram apresentadas as forças e momentos que

agem sobre o corpo de uma aeronave de asa fixa. As expressões que representam cada tipo de força foram demonstradas de forma genérica, mas aplicam-se a qualquer uma das três classes de *VANTs*, independente de seu tamanho. A seguir, no Capítulo 5, essas equações são agrupadas e simplificadas para a formulação do modelo matemático que descreve a dinâmica de um *VANT* de asa fixa.

## 5 MODELAGEM DA DINÂMICA DE UM VANT

O objetivo deste capítulo é demonstrar uma forma de representação matemática da dinâmica de movimento longitudinal do *VANT Rascal 110*, necessária para o projeto do seu controlador de altitude. A formulação da dinâmica lateral do *VANT* não será demonstrada por estar fora do escopo deste trabalho. Os procedimentos e equações foram obtidos com base no Capítulo 5 de Beard e McLain (2012).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 5.1 são demonstradas as equações não lineares acopladas da dinâmica longitudinal do *VANT*. Em seguida, na Seção 5.2, as equações são desacopladas e linearizadas sob uma condição de equilíbrio do movimento longitudinal. Por fim, na Seção 5.3, é obtido o modelo da dinâmica longitudinal do *VANT Rascal 110* com a representação do sistema em espaço de estados.

### 5.1 EQUAÇÕES NÃO LINEARES DO MOVIMENTO LONGITUDINAL

Nesta seção, é apresentado um conjunto composto por cinco equações não lineares e acopladas, que representam a dinâmica do movimento longitudinal do *VANT*. De acordo com Nelson (1989), diz-se acoplado porque existe uma dependência entre as variáveis de estado relacionadas a cada eixo direcional. Por exemplo, a dinâmica existente no eixo longitudinal é levemente afetada pela dinâmica dos eixos transversal e vertical, e assim sucessivamente. Algumas das equações de cinemática, dinâmica, forças e momentos demonstradas anteriormente nos Capítulos 3 e 4 são agrupadas e simplificadas para a obtenção das expressões.

A variação da velocidade ao longo do eixo  $i^b$  foi obtida somando-se as forças  $f_x$  (4.11) e  $f_p$  (4.27) e substituindo na Equação (3.17), resultando:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & rv - qw - g\sin\theta + \frac{\rho V_a^2 S}{2m} [C_X(\alpha) + C_{X_q}(\alpha) \frac{cq}{2V_a} + C_{X_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e] \\ & + \frac{\rho S_h C_h}{2m} [(K_m \delta_t)^2 - V_a^2] \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde as funções  $C_{X*}$  representam os coeficientes de forças aerodinâmicas ao longo do eixo  $i^b$  e podem ser determinadas pelas seguintes

expressões:

$$C_X(\alpha) = -C_D(\alpha)\cos\alpha + C_L(\alpha)\sen\alpha \quad (5.2)$$

$$C_{X_q}(\alpha) = -C_{D_q}\cos\alpha + C_{L_q}\sen\alpha \quad (5.3)$$

$$C_{X_{\delta_e}} = -C_{D_{\delta_e}}\cos\alpha + C_{L_{\delta_e}}\sen\alpha \quad (5.4)$$

A variação da velocidade ao longo do eixo  $k^b$  foi obtida substituindo-se a força  $f_z$  (4.12) na Equação (3.19), resultando:

$$\begin{aligned} \dot{w} = qu - pv + g(\cos\theta\cos\phi) + \frac{\rho Va^2 S_w}{2m} [C_Z(\alpha) + C_{Z_q} \frac{cq}{2Va} \\ + C_{Z_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e] \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde as funções  $C_{Z^*}$  representam os coeficientes de forças aerodinâmicas ao longo do eixo  $k^b$ , dadas por:

$$C_Z(\alpha) = -C_D(\alpha)\sen\alpha - C_L(\alpha)\cos\alpha \quad (5.6)$$

$$C_{Z_q}(\alpha) = -C_{D_q}\sen\alpha - C_{L_q}\cos\alpha \quad (5.7)$$

$$C_{Z_{\delta_e}} = -C_{D_{\delta_e}}\sen\alpha - C_{L_{\delta_e}}\cos\alpha \quad (5.8)$$

$$(5.9)$$

A variação da velocidade angular em torno do eixo  $j^b$  foi obtida substituindo-se o momento  $\mathbf{m}$  (4.9) na Equação (3.33), resultando:

$$\begin{aligned} \dot{q} = \Gamma_5 pr - \Gamma_6(p^2 - r^2) + \frac{\rho Va^2 S_w c}{2J_y} [C_{m0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_q} \frac{cq}{2Va} \\ + C_{m_{\delta_e}}\delta_e] \end{aligned} \quad (5.10)$$

A variação da posição angular em torno do eixo  $j^b$  é uma repetição da Equação (3.7), resultando:

$$\dot{\theta} = qc\cos\phi - r\sen\phi \quad (5.11)$$

A variação de altitude da aeronave foi obtida fazendo-se  $\dot{h} = -\dot{p}_d$  na Equação (3.5), obtendo-se:

$$\dot{h} = u\sen\Theta - v(\sen\Phi\cos\Theta) - w(\cos\Phi\cos\Theta) \quad (5.12)$$

As equações não lineares apresentadas nesta seção descrevem a dinâmica longitudinal do *VANT* através das relações entre as forças gravitacional, aerodinâmica e propulsão, mediante estímulos das variá-



veis de entrada elevador  $\delta_e$  e aceleração do motor  $\delta_t$ . As maneiras de obtenção dos coeficientes aerodinâmicos e de momentos apresentados, não fazem parte do escopo deste trabalho, mas podem ser vistas em detalhes na literatura, conforme demonstrado nas obras de (NELSON, 1989), (ROSKAM, 1998), (BEARD; MCLAIN, 2012), entre outros.

## 5.2 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Nesta seção, as equações da dinâmica longitudinal descritas na Seção 5.1 são desacopladas e linearizadas. Para isso, são seguidos os procedimentos descritos no Capítulo 5 de Beard e McLain (2012). Através da teoria de pequenos distúrbios, as equações da dinâmica longitudinal são linearizadas em torno de uma condição de voo em equilíbrio do *VANT*.

### 5.2.1 Condições de Equilíbrio

Dado um sistema genérico de equações não lineares:

$$\dot{x} = f(x, \mathbf{u}) \quad (5.13)$$

onde  $x$  são os estados e  $\mathbf{u}$  é o vetor de controle. Supondo que na condição de voo em equilíbrio temos os estados  $x^*$  e o vetor de controle  $\mathbf{u}^*$ , pode-se afirmar que que o sistema está em equilíbrio se:

$$\dot{x}^* = f(x^*, \mathbf{u}^*) = 0 \quad (5.14)$$

Assumindo  $\bar{x} = x - x^*$ , obtemos:

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} - \dot{x}^* \quad (5.15)$$

Substituindo as Equações (5.13) e (5.14) na Equação (5.15) e efetuando as simplificações, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(x, \mathbf{u}) - f(x^*, \mathbf{u}^*) \\ \dot{\bar{x}} &= f(x + x^* - x^*, \mathbf{u} + \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^*) - f(x^*, \mathbf{u}^*) \\ \dot{\bar{x}} &= f(x^* + \bar{x}, \mathbf{u}^* + \bar{\mathbf{u}}) - f(x^*, \mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Fazendo a expansão em série de Taylor da Equação (5.16) em torno das condições de equilíbrio:

$$\dot{\hat{x}} = f(x^*, \mathbf{u}^*) + \frac{\partial f(x^*, \mathbf{u}^*)}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial f(x^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} + \dots - f(x^*, \mathbf{u}^*) \quad (5.17)$$

Simplificando e mantendo apenas os termos de primeira ordem, obtém-se:

$$\dot{\hat{x}} \approx \frac{\partial f(x^*, \mathbf{u}^*)}{\partial x} \bar{x} + \frac{\partial f(x^*, \mathbf{u}^*)}{\partial \mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.18)$$

Desta forma, é realizada a linearização do sistema determinando as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$  em torno das condições de equilíbrio (BEARD; MCLAIN, 2012).

Considerando-se apenas a dinâmica do movimento longitudinal, para atender as condições de equilíbrio descrita pela Equação (5.14), assume-se que o *VANT* estará sob as seguintes condições:

1. Sobre o corpo da aeronave não haverão distúrbios externos causados por influência de ventos ou qualquer outro tipo de interferência atmosférica;
2. A aeronave estará voando estabilizada, em uma dada altitude  $h$ ;
3. A velocidade  $V_a$  será constante;
4. As asas estarão niveladas;
5. A superfície de controle elevador atuará somente sobre a dinâmica longitudinal da aeronave;
6. Não haverão influências da dinâmica de voo lateral sobre a dinâmica de voo longitudinal.

Sendo assim, os ângulos  $\phi$  e  $\psi$  e as velocidades angulares  $p$  e  $r$  são considerados iguais a zero, ou seja, para o projeto do controlador apenas as variáveis que influenciam a dinâmica de movimento longitudinal do *VANT* serão consideradas. Adicionalmente, considera-se também que a aeronave voará com pequenos ângulos de ataque, sendo utilizadas aproximações lineares para as funções  $C_{L\alpha}$ ,  $C_{D\alpha}$  e  $C_{m\alpha}$ .

Diante destas considerações e utilizando as definições para  $V_a$  e  $\alpha$  nas Equações (3.1) e (3.2), as cinco equações do movimento longitudinal

são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -qw - g\text{sen}\theta + \frac{\rho(u^2 + w^2)S}{2m} [C_{X_0} + C_{X_\alpha} \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) + C_{X_{\delta_e}} \delta_e] \\ & + \frac{\rho\sqrt{u^2 + w^2}S}{4m} C_{X_q} cq + \frac{\rho S_h C_h}{2m} [(K_m \delta_t)^2 - (\sqrt{u^2 + w^2})] \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & qu + g\text{cos}\theta + \frac{\rho(u^2 + w^2)S}{2m} [C_{Z_0} + C_{Z_\alpha} \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) + C_{Z_{\delta_e}} \delta_e] \\ & + \frac{\rho\sqrt{u^2 + w^2}S}{4m} C_{Z_q} cq \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{q} = & \frac{1}{2J_y} \rho (u^2 + w^2) cS [C_{m_0} + C_{m_\alpha} \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right) + C_{m_{\delta_e}} \delta_e] \\ & + \frac{1}{4J_y} \rho \sqrt{u^2 + w^2} S C_{m_q} c^2 q \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\dot{\theta} = q \quad (5.22)$$

$$\dot{h} = u\text{sen}\Theta - w\text{cos}\Theta \quad (5.23)$$

Conforme pode-se observar, as Equações (5.19) à (5.23) continuam sendo não lineares, porém desacopladas, ou seja, sem componentes da dinâmica do movimento lateral. Posteriormente elas serão linearizadas e calculadas as suas derivadas parciais de acordo com as seguintes matrizes Jacobianas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial h} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial w} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_t} \\ \frac{\partial \dot{h}}{\partial \delta_e} & \frac{\partial \dot{h}}{\partial \delta_t} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  é chamada matriz de estabilidade e  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ , a matriz de controle (BEARD; MCLAIN, 2012).

Essas matrizes são uma representação analítica para a compreensão da dinâmica longitudinal do *VANT*. Na Seção 5.3, são feitas mais algumas considerações e simplificações para deixar as Jacobianas em um formato mais adequado, necessário ao projeto do controlador de altitude proposto neste trabalho.

### 5.2.2 Teoria de Pequenos Distúrbios

A teoria de pequenos distúrbios assume que cada variável do conjunto de equações não lineares possuirá um valor nominal (valor obtido da condição de equilíbrio) adicionado de um pequeno valor de distúrbio (NELSON, 1989). Tomando-se como exemplo a velocidade ao longo eixo  $i^b$ , obtém-se:

$$u = u^* + \Delta u \quad (5.26)$$

onde  $u^*$  é o valor da velocidade na condição de equilíbrio e  $\Delta u$ , um pequeno distúrbio sobre essa variável. Supondo que os desvios da condição de equilíbrio sejam bem pequenos, espera-se obter um modelo linearizado capaz de fornecer uma representação útil e razoavelmente precisa do sistema não linear (BAGHERI, 2014).

Como exemplo de sua aplicação, considere  $X$  como sendo a soma das forças ao longo do eixo  $i^b$  na condição de equilíbrio. Somando a Equação (3.17) com o primeiro termo da Equação (4.2) e rearranjando os termos, obtém-se:

$$X^* - mg \sin \theta^* = m(\dot{u}^* + q^* w^* - r^* v^*) \quad (5.27)$$

Aplicando a mesma notação da Equação (5.26) e simplificando o resultado conforme descrito no Capítulo 3 de Nelson (1989), obtém-se:

$$\Delta X - mg \Delta \theta \cos \theta^* = m \Delta \dot{u} + m w^* \Delta q \quad (5.28)$$

De acordo com Nelson (1989), é possível expressar  $\Delta X$  em termos dos distúrbios  $\Delta u$ ,  $\Delta w$ ,  $\Delta \delta_e$  e  $\Delta \delta_t$ , através de expansão em série de Taylor, resultando na seguinte expressão:

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_t} \Delta \delta_t \quad (5.29)$$

Substituindo (5.29) em (5.28) e reagrupando os termos, obtém-se

$$\left(\frac{d}{dt} - X_u\right)\Delta u - X_w\Delta w + (g\cos\theta^*)\Delta\theta = X_{\delta_e}\Delta\delta_e + X_{\delta_t}\Delta\delta_t + w^*\Delta q \quad (5.30)$$

onde as derivadas parciais da Equação (5.24) foram divididas pela massa da aeronave e ganharam nova notação ( $X_u = \partial X/\partial u/m$ , etc).

O procedimentos adotados para a linearização da força  $X$  podem ser repetidos para as demais forças e momentos, através dos seguintes passos (BAGHERI, 2014):

1. Substituir todas as variáveis das equações não lineares pela notação utilizada na Equação (5.26);
2. Expandir a equação resultante do passo 1 utilizando série de Taylor, considerando apenas as variáveis com influência significativa nas equações de força e momento em uma dada direção em particular;
3. Substituir a equação resultante do passo 2 na equação obtida no passo 1;
4. Dividir todas as derivadas parciais obtidas no passo 3 pela massa da aeronave para obter a forma final de cada equação.

### 5.2.3 Obtenção das Derivadas de Estabilidade e Controle

Aplicando a teoria de pequenos distúrbios descrita na Subseção 5.2.2, as matrizes Jacobianas (5.24) e (5.25) são calculadas. Vale ressaltar que cada derivada parcial deve ser dividida pela massa da aeronave, assumindo uma nova notação, conforme visto nas equações descritas a

seguir:

$$X_u = \frac{u^* \rho S}{m} [C_{X0} + C_{X\alpha} \alpha^* + C_{X\delta_e} \delta_e^*] - \frac{\rho S C_{X\alpha} w^*}{2m} + \frac{\rho S c C_{Xq} u^* q^*}{4m V_a^*} - \frac{\rho S_h C_h u^*}{m} \quad (5.31)$$

$$X_w = -q^* + \frac{w^* \rho S}{m} [C_{X0} + C_{X\alpha} \alpha^* + C_{X\delta_e} \delta_e^*] + \frac{\rho S C_{X\alpha} u^*}{2m} + \frac{\rho S c C_{Xq} w^* q^*}{4m V_a^*} - \frac{\rho S_h C_h w^*}{m} \quad (5.32)$$

$$X_q = -w^* + \frac{\rho V_a^* S C_{Xq} c}{4m} \quad (5.33)$$

$$Z_u = q^* + \frac{u^* \rho S}{m} [C_{Z0} + C_{Z\alpha} \alpha^* + C_{Z\delta_e} \delta_e^*] - \frac{\rho S C_{Z\alpha} w^*}{2m} + \frac{u^* \rho S C_{Zq} c q^*}{4m V_a^*} \quad (5.34)$$

$$Z_w = \frac{w^* \rho S}{m} [C_{Z0} + C_{Z\alpha} \alpha^* + C_{Z\delta_e} \delta_e^*] + \frac{\rho S C_{Z\alpha} u^*}{2m} + \frac{w^* \rho S C_{Zq} c q^*}{4m V_a^*} \quad (5.35)$$

$$Z_q = u^* + \frac{\rho V_a^* S C_{Zq} c}{4m} \quad (5.36)$$

$$Z_{\delta_e} = \frac{\rho V_a^{*2} S C_{Z\delta_e}}{2m} \quad (5.37)$$

$$M_u = \frac{u^* \rho S c}{J_y} [C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha^* + C_{m\delta_e} \delta_e^*] - \frac{\rho S c C_{m\alpha} w^*}{2J_y} + \frac{\rho S c^2 C_{mq} u^* q^*}{4J_y V_a^*} \quad (5.38)$$

$$M_w = \frac{w^* \rho S c}{J_y} [C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha^* + C_{m\delta_e} \delta_e^*] + \frac{\rho S c C_{m\alpha} u^*}{2J_y} + \frac{\rho S c^2 C_{mq} w^* q^*}{4J_y V_a^*} \quad (5.39)$$

$$M_q = \frac{\rho V_a^* S c^2 C_{mq}}{4J_y} \quad (5.40)$$

$$M_{\delta_e} = \frac{\rho V_a^{*2} S c C_{m\delta_e}}{2J_y} \quad (5.41)$$

$$X_{\delta_e} = \frac{\rho V_a^{*2} S C_{X\delta_e}}{2m} \quad (5.42)$$

$$X_{\delta_t} = \frac{\rho S_h C_h K^2 \delta_t^*}{m} \quad (5.43)$$

onde,  $X_u = \partial \dot{u} / \partial u / m$ ,  $X_w = \partial \dot{u} / \partial w / m$ , etc.

As Equações (5.31) a (5.41) são as derivadas de estabilidade e as Equações (5.42) e (5.43) as derivadas de controle. Na seção seguinte, essas equações serão reagrupadas e organizadas em representação de espaço de estados.

## 5.2.4 Representação em Espaço de Estados

Nesta seção, as Equações (5.31) à (5.43) são reescritas em espaço de estados. Segundo Ogata (2010), quando se trata de projetos de controladores que envolvam sistemas mais complexos, por exemplo sistemas com múltiplas entradas e saídas, é conveniente a representação do sistema em espaço de estados, com todos os seus elementos representados no domínio do tempo. Esta forma de representação possibilita uma relação direta das derivadas de estabilidade e controle que atuam sobre a dinâmica do sistema, facilitando o entendimento do sistema como um todo e o projeto do controlador.

Seja um sistema multivariável, linear e invariante no tempo, pode-se escrever sua representação em espaço de estados na forma matricial como:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}(t) + B\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (5.44)$$

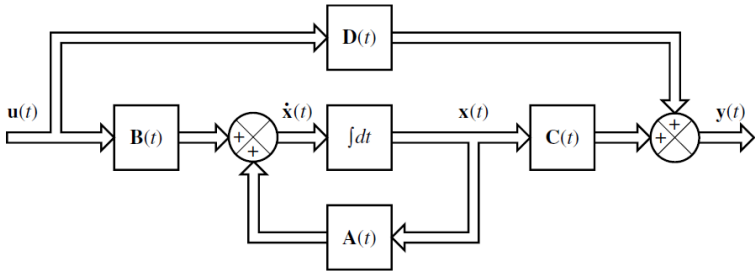
$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (5.45)$$

onde:

- $\bar{x}(t)$  é o vetor de estados, cujos elementos são as variáveis de estados;
- $\bar{\mathbf{u}}(t)$  é o vetor dos sinais de entrada de controle;
- $\bar{y}(t)$  é o vetor dos sinais de saída;
- $A$  é a matriz que contém as derivadas de estabilidade;
- $B$  é a matriz que contém as derivadas de controle;
- $C$  é a matriz de saída;
- $D$  é a matriz de transmissão direta, geralmente igual a zero, desde que nenhum sinal de entrada seja aplicado diretamente a saída.

As Equações (5.44) e (5.45) são representadas graficamente no diagrama de blocos visto na Figura 8.

Figura 8 – Espaço de estados em diagrama de blocos.



Fonte: (OGATA, 2010)

Para fazer a representação da dinâmica longitudinal do *Rascal 110* em espaço de estado, considera-se novamente que o *VANT* estará voando sob as condições de equilíbrio descritas na Subseção 5.2.1 e, além disso, assumindo mais algumas condições:

1. Não haverá variação de  $\dot{u}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{q}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{h}$  em relação a altitude  $h$ , ou seja, as derivadas parciais  $\frac{\partial \dot{u}}{\partial h} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial h} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial h} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial h} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial h} = 0$ ;
2. Não haverá variação angular de  $\dot{q}$  em relação ao ângulo  $\theta$ , ou seja, a derivada parcial  $\frac{\partial \dot{q}}{\partial \theta} = 0$ ;
3. Não haverá variação de  $\dot{\theta}$  em relação as variáveis  $u$ ,  $w$ ,  $\theta$  e  $h$ , ou seja, as derivadas parciais  $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial w} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial h} = 0$ .
4. Não haverá variação de  $\dot{\theta}$  e  $\dot{h}$  em relação a variável  $\delta_e$ , ou seja, as derivadas parciais  $\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_e} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial \delta_e} = 0$ ;
5. Não haverá variação de  $\dot{w}$ ,  $\dot{q}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{h}$  em relação a variável  $\delta_t$ , ou seja, as derivadas parciais  $\frac{\partial \dot{w}}{\partial \delta_t} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \delta_t} = \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \delta_t} = \frac{\partial \dot{h}}{\partial \delta_t} = 0$ .

Com base nas condições 1 à 5 assumidas anteriormente, as Equações (5.24) e (5.25) são reorganizadas na forma de representação em espaço de estados. Desta forma, as derivadas obtidas anteriormente representam os coeficientes das matrizes de estabilidade e controle res-



pectivamente, conforme descrito a seguir:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{\theta}} \\ \dot{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u & X_w & X_q & -g\cos\theta^* & 0 \\ Z_u & Z_w & Z_q & -g\sin\theta^* & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta^* & -\cos\theta^* & 0 & u^*\cos\theta^* + w^*\sin\theta^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \\ \bar{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_t} \\ Z_{\delta_e} & 0 \\ M_{\delta_e} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\delta}_e \\ \bar{\delta}_t \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \\ \bar{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \\ \bar{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

onde as Equações (5.46) e (5.47) representam respectivamente, as Equações (5.44) e (5.45).

Desta forma, através das Equação (5.46) e (5.47), dispõem-se de um modelo matemático linear e desacoplado, que representa a dinâmica do movimento longitudinal do *VANT*. Através desta representação em espaço de estados, é obtida na Seção 5.3 a modelagem da dinâmica longitudinal do *VANT Rascal 110*.

### 5.3 MODELAGEM DO RASCAL 110

Nesta seção, através do modelo analítico proposto pela Equação (5.46) é realizada a modelagem da dinâmica longitudinal do *VANT Rascal 110* existente no simulador de voo *FlighGear*. O objetivo é cal-

Tabela 3 – Coeficientes aerodinâmicos, de momentos e inercial.

<b>Coeficiente</b>	<b>Valor</b>	<b>Coeficiente</b>	<b>Valor</b>
$J_y$	1,55	$C_{D\alpha}$	0,028
$C_h$	0,0518	$C_{Dq}$	0
$C_{m0}$	-0,0015	$C_{D\delta_e}$	0,03
$C_{m\alpha}$	-0,5	$C_{L0}$	0,25
$C_{m\delta_e}$	-0.85	$C_{L\alpha}$	5
$C_{mq}$	-12	$C_{Lq}$	0
$C_{D0}$	0,0309	$C_{L\delta_e}$	-0.2

Fonte: Do autor

cular suas derivadas de estabilidade e controle a partir de uma condição de voo em equilíbrio e, então, representá-las em espaço de estados. As informações referentes a ficha técnica e coeficientes foram obtidos a partir da documentação do *VANT*.

Os coeficientes aerodinâmicos, de momentos e inercial estão listados na Tabela 3. Através de um voo simulado no programa *FlightGear*, foi estabelecida uma condição de voo em equilíbrio para o *Rascal 110*. Os parâmetros de referência desse voo estão listados na Tabela 4.

A simulação começou com a aeronave já em voo, a uma altitude de aproximadamente 900 *ft*. O controlador *PID* padrão do simulador foi configurado para a altitude de referência  $h^*$  e para manter as asas da aeronave niveladas e sem nenhum movimento lateral, ou seja, fazendo os ângulos  $\phi = \psi = 0$ . Durante a simulação, não houve variação no controle de potência sobre o motor, sendo que  $\delta_t^*$  foi mantido constante com o valor iniciado pelo simulador. O tempo de simulação durou aproximadamente 60 s, tempo suficiente para o *VANT* atingir a altitude de referência e todas as variáveis atingirem um ponto de maior estabilidade.

Aplicando os dados das Tabelas 1, 3 e 4 nas Equações (5.31) à (5.43) e substituindo seus resultados nos coeficientes da Equação (5.46),

Tabela 4 – Condições de voo em equilíbrio.

Variáveis	Valores
$h^*$	1000 <i>ft</i>
$Va^*$	90 <i>ft/s</i>
$u^*$	89,984 <i>ft/s</i>
$w^*$	-1,709 <i>ft/s</i>
$\alpha^*$	-0,019 <i>rad</i>
$\theta^*$	-0,019 <i>rad</i>
$q^*$	0 <i>rad/s</i>
$\delta_e^*$	0,00032 <i>rad</i>
$\delta_t^*$	50 %

Fonte: Do autor

foi obtido o seguinte sistema representado em espaço de estados:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{\theta}} \\ \dot{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1732 & -0,3057 & 1,7099 & -32,1682 & 0 \\ -1,0137 & -12,5389 & 89,9838 & 0,6113 & 0 \\ 0,0050 & -0,4201 & -11,5907 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,0190 & -0,9998 & 0 & 90,0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{q} \\ \bar{\theta} \\ \bar{h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5,9219 \\ 45,3348 \\ -64,2528 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (\bar{\delta}_e) \quad (5.48)$$

Conforme pode-se observar na Equação (5.48), a matriz de controle foi modelada considerando-se apenas variações de  $\delta_e$ . O projeto de

controlador proposto neste trabalho, refere-se ao controle de altitude somente através de  $\delta_e$ , sem variações na potência do motor, ou seja, mantendo  $\delta_t$  constante, por isso o excluindo do modelo. As matrizes  $C$  e  $D$  (Equação 5.47), não foram apresentadas por permanecerem as mesmas.

Em termos matemáticos, a dinâmica do movimento longitudinal do *Rascal 110* é definida pelos autovalores da matriz  $A$ , que neste caso em particular é numericamente definida em (5.48), sendo eles:

$$\begin{aligned} & 0.0000 + 0.0000i \\ & -12,0812 + 6,1291i \\ & -12,0812 - 6,1291i \\ & -0,0702 + 0,2845i \\ & -0,0702 - 0,2845i \end{aligned}$$

Estes autovalores representam os polos da dinâmica longitudinal do *Rascal 110*. Exceto pelo polo na origem (valor zero), pode-se observar que os sinais negativos indicam que os demais polos estão no semi-plano esquerdo do lugar das raízes, o que garante a estabilidade estática da aeronave sobre pequenas perturbações.

Também é possível observar que existem dois pares de polos complexos conjugados. Esses polos definem as propriedades modais da dinâmica longitudinal do *Rascal 110*, sendo classificados por Peters e Konyak (2003) em dois modos: curto período e longo período.

- Curto período: suas propriedades são definidas pelas variáveis  $w$  e  $q$ . Tem como principal característica oscilações rápidas em torno do eixo  $j^b$ , sem provocar significativa alteração de velocidade e altitude. Sua frequência de oscilação costuma ser pelo menos dez vezes maior que a frequência de oscilação do modo de longo período;
- Longo período: suas propriedades são definidas pelas variáveis  $u$  e  $\theta$ . Tem como principal característica oscilações lentas em torno do eixo  $j^b$ , provocando alterações de velocidade e altitude e mudando a trajetória longitudinal da aeronave.

A Figura 9 ilustra as propriedades modais de curto e longo período que atuam na dinâmica longitudinal de um *VANT* de asa fixa. O polo na origem, refere-se a variável  $h$  e, segundo Peters e Konyak (2003), essa variável, apesar de ser um dos estados do sistema, tem influência desprezível na dinâmica longitudinal e, por isso, não é incluída

Figura 9 – Propriedades modais.

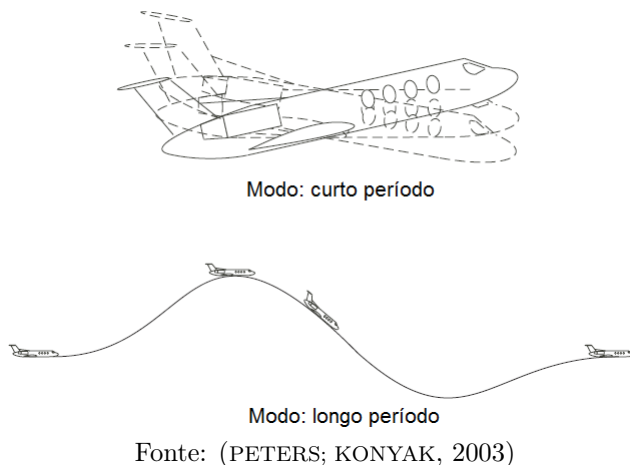


Tabela 5 – Análise modal do sistema.

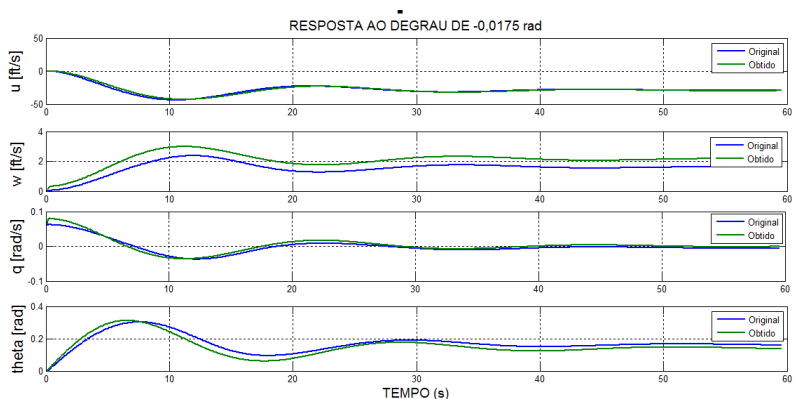
Modos	Polos	$\xi$	$\omega_n$ (rad/s)
Curto Período	$-12,0812 \pm 6,1291i$	0,8918	13,547
Longo Período	$-0,0702 \pm 0,2845i$	0,2396	0,2931

Fonte: Do autor

na análise modal. A Tabela 5 lista as propriedades oscilatórias dos dois modos da dinâmica longitudinal. onde  $\xi$  é o fator de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural de oscilação. Conforme se pode observar na Tabela 5, a frequência do modo de curto período é muito maior que a frequência do modo de longo período, confirmando as afirmações feitas por Peters e Konyak (2003).

Para validação do modelo, a Figura 10 ilustra uma comparação do sistema modelado e simulado através do *Matlab* com o sistema original (*Rascal 110*), simulado através do *FlighGear*, ambos submetidos a uma entrada do tipo degrau, correspondente a uma deflexão de  $-0,0175$  rad ( $1^\circ$ ) sobre  $\delta_e$ . Conforme se pode observar na Figura 10, existe uma pequena diferença de amplitude entre as duas respostas, provavelmente

Figura 10 – Validação do sistema modelado.



Fonte: Do autor

devido a linearização do sistema e ao grande número de condições assumidas para linearizá-lo. Porém, é possível perceber que as oscilações de ambas as respostas são muito próximas.

Neste capítulo, a modelagem da dinâmica longitudinal do *VANT Rascal 110* foi obtida. Partindo das equações não lineares até a obtenção do seu modelo linear, representado em espaço de estados, conseguiu-se um modelo analítico com acurácia suficiente para dar início ao projeto do controlador de altitude, que é realizado no Capítulo 6.

## 6 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO - LQR

Neste capítulo, é realizado o projeto do controlador de altitude do *VANT Rascal 110*, através da técnica de controle *LQR*. O modelo matemático da dinâmica longitudinal do *VANT*, obtido anteriormente na Seção 5.3 do Capítulo 5, é utilizado no projeto do controlador. A teoria e equações apresentadas no decorrer deste capítulo são baseadas no Capítulo 8 de Nelson (1989) e no Capítulo 10 de Ogata (2010).

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 6.1 é apresentada a teoria relacionada à técnica de controle *LQR*. Na Subseção 6.1.1 é demonstrada a técnica de redução de erro em regime permanente através da inserção de um integrador no sistema de controle para seguimento de referência da variável  $h$ . Na Seção 6.2 é realizado o projeto do controlador de altitude do *Rascal 110*. Por fim, na Seção 6.3, são apresentados os resultados dos testes do controlador de altitude.

### 6.1 TEORIA DO CONTROLADOR LINEAR QUADRÁTICO

O controlador *LQR* é uma técnica de controle que pertence a classe chamada controle ótimo (OGATA, 2010). Essa classe tem sua formulação baseada na Teoria de Controle Moderno, permitindo uma aproximação mais sistemática no projeto do controlador.

Seja um sistema linear representado pela Equação (5.44). Para resolver um problema de controle ótimo, dado um estado inicial  $x(t_0)$ , deseja-se encontrar um vetor de controle  $\mathbf{u}$  que direciona o estado  $x(t_0)$  para o estado final desejado  $x_d(t_f)$  de tal maneira que o índice de performance selecionado na forma

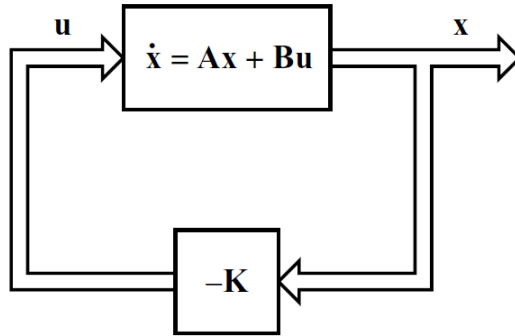
$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(\bar{x}, \bar{\mathbf{u}}, t) dt \quad (6.1)$$

seja minimizado (NELSON, 1989). Uma forma prática para expressar o índice  $J$  é representá-lo da seguinte forma:

$$J = \int_0^{t_f} \bar{x}^T Q \bar{x} dt \quad (6.2)$$

onde  $Q$  é uma matriz de penalização de estados. Segundo Nelson (1989), para muitos problemas de controle é desejável incluir também penalidades para restrições físicas, afim de reduzir a energia gasta pelo

Figura 11 – Sistema regulador ótimo.



Fonte: (OGATA, 2010)

controlador. Sendo assim, o índice  $J$  pode ser reescrito através da seguinte expressão:

$$J = \int_0^{t_f} (\bar{\mathbf{x}}^T Q \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{u}}^T R \bar{\mathbf{u}}) dt \quad (6.3)$$

onde  $R$  é a matriz de penalização de controle.

Através do índice de performance  $J$ , definido pela Equação (6.3), pode ser mostrado que, para um controlador linear realimentado, uma lei de controle ótimo pode ser definida como:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -K\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (6.4)$$

onde  $K$  é uma matriz de ganho desconhecida a ser definida. A Figura 11 ilustra a aplicação da realimentação de estados, definida em (6.4), no sistema linear, visto em (5.44), em forma de diagrama de blocos simplificado.

O sistema de controle ilustrado na Figura 11 é geralmente referenciado como problema do regulador linear (NELSON, 1989). O termo "quadrático", incluso no nome da técnica de controle  $LQR$ , refere-se a matriz  $Q$ , presente na Equação (6.3), que possui ordem  $m \times m$ , ou seja, é uma matriz quadrada. Uma possível solução para o problema do controle ótimo pode ser encontrada através dos seguintes procedimentos.

Inicialmente, substitui-se a Equação (6.4) na Equação (5.44),



resultando:

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} - BK\bar{x} = (A - BK)\bar{x} \quad (6.5)$$

A partir desse ponto, assume-se que a matriz  $A - BK$  é estável, ou seja, seus autovalores possuem suas partes reais negativas.

Substituindo a Equação (6.4) na Equação (6.3) e colocando em evidência  $\bar{x}^T$  e  $\bar{x}$ , obtém-se:

$$J = \int_0^{t_f} \bar{x}^T (Q + K^T RK) \bar{x} dt \quad (6.6)$$

Agora assume-se que:

$$\bar{x}^T (Q + K^T RK) \bar{x} = -\frac{d}{dt} (\bar{x}^T P \bar{x}) \quad (6.7)$$

onde  $P$  é uma matriz real simétrica. Logo, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{x}^T (Q + K^T RK) \bar{x} &= -\dot{\bar{x}}^T P \bar{x} - \bar{x}^T P \dot{\bar{x}} \\ &= -\bar{x}^T \left[ (A - BK)^T P + P (A - BK) \right] \bar{x} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Comparando ambos os lados da Equação (6.8), observa-se que para esta equação ser verdadeira para qualquer valor de  $\bar{x}$ , é necessário que:

$$(A - BK)^T P + P (A - BK) = -(Q + K^T RK) \quad (6.9)$$

Ogata (2010) afirma que se a matriz  $A - BK$  é estável, é possível provar que existe uma matriz  $P$  positiva definida que satisfaz a Equação (6.9). Ainda segundo Ogata (2010), existe mais que uma matriz  $P$  que satisfaz a Equação (6.9) e, se o sistema é estável, sempre existirá uma matriz  $P$  positiva definida que satisfaz essa equação. Isso significa que, se a equação for resolvida e for obtida uma matriz  $P$  positiva definida, o sistema é estável. Outras matrizes  $P$  que satisfazem a Equação (6.9) mas que não sejam positivas definidas, devem ser descartadas (OGATA, 2010).

Com base nas considerações feitas para a matriz  $P$  e assumindo que  $t_f \rightarrow \infty$ , o índice  $J$  da Equação (6.6) pode ser reescrito em função

de  $P$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \bar{x}^T (Q + K^T R K) \bar{x} dt \\ &= -\bar{x}^T P \bar{x} \Big|_0^{\infty} = -\bar{x}^T(\infty) P \bar{x}(\infty) + \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Desde que todos os autovalores da matriz  $A - BK$  tenham suas partes reais negativas, temos  $\bar{x}(\infty) \rightarrow 0$ . Sendo assim, obtém-se:

$$J = \bar{x}^T(0) P \bar{x}(0) \quad (6.11)$$

Desta forma, o índice  $J$  pode ser obtido em termo das condições iniciais  $\bar{x}(0)$  e da matriz  $P$  (OGATA, 2010).

Continuando com a resolução do problema do controle ótimo, assume-se  $R$  como sendo uma matriz real simétrica, sendo representada da seguinte forma:

$$R = T^T T \quad (6.12)$$

onde  $T$  é uma matriz não singular. Utilizando a matriz  $R$ , a Equação (6.9) pode ser escrita como:

$$(A^T - B^T K^T) P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0 \quad (6.13)$$

podendo ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A^T P + P A + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] \\ - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

A minimização de  $J$  em relação a  $K$  requer a minimização de

$$\bar{x}^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] \bar{x} \quad (6.15)$$

em relação a  $K$  (OGATA, 2010).

Desde que a Equação (6.15) não seja negativa, seu valor mínimo ocorre quando atinge o valor zero ou quando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P \quad (6.16)$$

e consequentemente  $K$  será definido como:

$$K = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P \quad (6.17)$$

A Equação (6.17) fornece a matriz  $K$  ótima. Desta forma, a lei de controle ótima para o problema do controle ótimo quando o índice  $J$  é linear é dada por:

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -K\bar{\mathbf{x}}(t) = -R^{-1}B^T P\bar{\mathbf{x}}(t) \quad (6.18)$$

A matriz  $P$  na Equação (6.17) deve satisfazer a Equação (6.9) na seguinte equação reduzida:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.19)$$

A Equação (6.19) é chamada matriz reduzida da equação de Ricatti (OGATA, 2010).

A teoria até aqui apresentada refere-se a um controlador  $LQR$  na sua forma mais simples. Na sequência, será apresentada uma maneira mais completa desta técnica de controle, sendo esta posteriormente aplicada no projeto do controle de altitude do *VANT Rascal 110*.

### 6.1.1 Eliminação do Erro em Regime Permanente

Segundo Ogata (2010), quando a planta a ser controlada não possui um polo na origem, o esquema de controle ilustrado na Figura 11 seria insuficiente. Devido a natureza física do sistema, haverão erros em regime permanente para sinais de referência do tipo degrau, impedindo que o controlador alcance a referência desejada. Para resolver esse problema, uma das possíveis soluções é a inserção de um integrador no circuito para a eliminação do erro em regime permanente. A Figura 12 ilustra, de forma genérica, o diagrama de blocos de um controlador  $LQR$  com integrador.

Com as Equações (5.44) e (5.45) com  $D = 0$  e, a partir do diagrama ilustrado na Figura 12, obtém-se uma nova representação matemática para o controlador com:

$$\bar{\mathbf{u}} = -K\bar{\mathbf{x}} + K_I \xi \quad (6.20)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - C\bar{\mathbf{x}} \quad (6.21)$$

onde:

- $K_I$  é o ganho integral;
- $\xi$  é a saída do integrador;



$r$  é do tipo degrau. Na sequência, para  $t > 0$ , fazendo a combinação das Equações (5.44) e (6.21), obtém-se a seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (6.22)$$

Deseja-se obter um sistema estável de tal forma que  $\bar{x}(\infty)$ ,  $\xi(\infty)$  e  $\bar{\mathbf{u}}(\infty)$ , aproximem-se de valores constantes. Então, em regime permanente,  $\dot{\xi}(t) = 0$ , o que resulta em  $\bar{y}(\infty) = r$ . Ogata (2010) ainda afirma que, em regime permanente, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (6.23)$$

Observando que  $r(t)$  é uma entrada do tipo degrau, temos  $r(\infty) = r(t) = r$  (constante) para  $t > 0$ . Subtraindo a Equação (6.22) pela Equação (6.23), obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) - \dot{\bar{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) - \bar{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(\infty)] \end{aligned} \quad (6.24)$$

Definindo

$$\bar{x}(t) - \bar{x}(\infty) = \bar{x}_e(t)$$

$$\xi(t) - \xi(\infty) = \xi_e(t)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(\infty) = \bar{u}_e(t)$$

A Equação (6.24) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}_e(t) \quad (6.25)$$

onde:

$$\bar{u}_e(t) = -K\bar{x}_e(t) + K_I\xi_e(t) \quad (6.26)$$

Definindo o vetor de erro  $e(t)$  por:

$$e(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

A Equação (6.25) pode ser representada pela expressão:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (6.28)$$

onde:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

e a Equação (6.26), torna-se:

$$u_e = -\hat{K}e \quad (6.30)$$

onde:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} K & \vdots & K_I \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Por fim, a equação de erro de estado pode ser obtida substituindo a Equação (6.30) na Equação (6.28):

$$\dot{e} = \left( \hat{A} + \hat{B}\hat{K} \right) e \quad (6.32)$$

Com base na teoria de controle ótimo e as equações obtidas nesta subseção, na seção seguinte é realizado o projeto do *LQR* com integrador, que será aplicado ao *VANT*.

## 6.2 PROJETO DO CONTROLADOR

Nesta seção, o projeto do controlador de altitude do *Rascal 110* é apresentado. A estrutura de controle foi definida com base na Figura 11, da seguinte forma:

- A saída do sistema é  $\bar{y} = h$ , ou seja, a altitude, realimentada através do laço mais externo com  $C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ ;
- A entrada de referência é  $r = h^*$ , ou seja, a altitude definida nas condições de voo em equilíbrio;

- O erro de controle é dado por  $\dot{\xi} = h^* - \dot{h}$ , ou seja, a diferença entre a altitude de referência e a altitude medida;
- O sinal de controle  $\bar{\mathbf{u}}$  é aplicado sobre a variável  $\delta_e$ , ou seja, o controlador atua somente no elevador da aeronave;
- São realimentadas cinco variáveis de estados através do vetor  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{u} \ \bar{w} \ \bar{q} \ \bar{\theta} \ \bar{h}]^T$ .

As cinco variáveis de estado do vetor  $\bar{\mathbf{x}}$  estão disponíveis para leitura através do *FlightGear*. As variáveis  $u$  e  $w$ , são obtidas a partir da decomposição do vetor  $V_a$  da seguinte forma:

$$u = V_a \cos(\alpha) \quad (6.33)$$

$$w = V_a \sin(\alpha) \quad (6.34)$$

onde  $V_a$  e  $\alpha$  também estão disponíveis para leitura direta, da mesma forma que as variáveis  $q$ ,  $\theta$  e  $h$ .

Para dar continuidade ao projeto do controlador, algumas condições devem ser atendidas:

1. O modelo linear obtido para o *VANT* é completamente controlável;
2. Todas as variáveis de estado estão disponíveis para leitura e o sistema será observável;
3. O projeto do controlador não leva em consideração possíveis distúrbios de qualquer natureza;
4. O controlador é projetado somente para voo em velocidade de cruzeiro.

Para garantir a condição 1, é necessário verificar a controlabilidade do sistema. Segundo Ogata (2010), um sistema é dito completamente controlável no tempo  $t_0$  se, através de um vetor de controle  $\mathbf{u}(t)$ , é possível transferir o sistema de um estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado em um intervalo de tempo finito. É possível verificar matematicamente a controlabilidade de um sistema através da seguinte expressão matricial:

$$C_x = \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & A^2B & \vdots & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

onde  $C_x$  é a matriz de controlabilidade do sistema. Através da Equação (6.35), o sistema será dito completamente controlável se o posto da matriz  $C_x$  for da mesma ordem da matriz  $A$ .

Sejam as respectivas matrizes de estabilidade e controle  $A$  e  $B$ , obtidas anteriormente na Equação (5.48), a Equação (6.35) foi resolvida através do programa *Matlab* que forneceu como resultado  $\text{posto}(C_x) = 5$ , ou seja, é igual a ordem da matriz  $A$ , logo o sistema é completamente controlável.

Para garantir a condição 2, é necessário que o sistema seja observável. De acordo com Ogata (2010), o conceito de observabilidade é muito importante na prática, principalmente quando se trata da aplicação de sistemas de controles com realimentação de estados, como é caso do *LQR*. Um sistema é dito completamente observável se cada estado  $x(t_0)$  pode ser determinado através da observação da saída  $y(t)$  sobre um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$  (OGATA, 2010). É possível verificar matematicamente a observabilidade de um sistema através da seguinte expressão matricial:

$$O_x = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

onde  $O_x$  é a matriz de observabilidade do sistema. Através da Equação (6.36), o sistema será dito completamente observável se o posto da matriz  $O_x$  for da mesma ordem da matriz  $A$ .

Sejam as respectivas matrizes de estabilidade e saída  $A$  e  $C$ , a Equação (6.36) foi resolvida através do programa *Matlab*, que forneceu como resultado  $\text{posto}(O_x) = 5$ , ou seja, é igual a ordem da matriz  $A$ , logo o sistema é completamente observável.

A condição 3 foi garantida ao desabilitar, no simulador de voo *FlightGear*, todas as funções que produzem distúrbios atmosféricos, tais como vento, turbulência, etc. Por fim, embora existam vários estágios em um voo (decolagem, subida, cruzeiro, etc.), durante os testes a condição 4 é garantida mantendo-se o *Rascal 110* voando em regime de cruzeiro antes do acionamento do controlador.

A obtenção do vetor de ganhos  $\hat{K}$ , definido pela Equação (6.31), foi realizada através da função *care()* do programa *Matlab* da seguinte



forma:

$$K_c = \text{care}(\hat{A}, \hat{B}, Q, R) \quad (6.37)$$

onde  $K_c$  é o vetor de ganhos do controlador  $LQR$ ,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  as matrizes aumentadas definidas pela Equação (6.29). Esta função calcula os ganhos ótimos com base na equação de Ricatti representada pela Equação (6.19).

Nesta seção, foi apresentado o projeto do controlador  $LQR$  com integrador para o controle de altitude do *VANT Rascal 110*. Na seção seguinte, os ganhos obtidos são apresentados e o controlador é testado, primeiro em simulações através do programa *Simulink* e, na sequência, através de implementação no simulador de voo *FlightGear*.

### 6.3 RESULTADOS

Nesta seção, o controlador  $LQR$  com integrador projetado para o controle de altitude do *VANT Rascal 110* foi testado. Através da Equação (6.37), foram obtidos cinco diferentes vetores de ganhos  $\hat{K}$ , mediante cinco variações das matrizes  $Q$  e  $R$ , conforme listados nas Tabelas 6 e 7. No projeto do controlador, a matriz  $Q$  foi definida para

Tabela 6 – Valores aplicados a  $Q$  e  $R$  para obtenção de  $\hat{K}$ .

$Q$	$Q_{\bar{u}}$	$Q_{\bar{w}}$	$Q_{\bar{q}}$	$Q_{\bar{\theta}}$	$Q_{\bar{h}}$	$Q_I$	$R$
<b>1</b>	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	10000
<b>2</b>	0,01	0,01	0,01	0,01	0,001	0,01	10000
<b>3</b>	1	1	1	1	0,001	0,01	10000
<b>4</b>	1	10	1	10	0,001	0,01	10000
<b>5</b>	1	10	1	100	0,001	0,01	10000

Fonte: Do autor

apresentar termos não nulos na diagonal principal e os demais termos iguais a zero. Para cada modelo calculado, a matriz  $R$  possui apenas um valor. Isso se deve ao fato de existir apenas uma entrada de controle definida pela variável  $\delta_e$ .

Os identificados das Tabelas 6 e 7 são correspondentes. Por exemplo, o vetor  $\hat{K}_1 = [K_{\bar{u}} \ K_{\bar{w}} \ K_{\bar{q}} \ K_{\bar{\theta}} \ K_{\bar{h}} \ K_I]$  foi obtido a partir

Tabela 7 – Ganhos obtidos para o vetor  $\hat{K}$ .

$\hat{K}$	$K_{\bar{u}}$	$K_{\bar{w}}$	$K_{\bar{q}}$	$K_{\bar{\theta}}$	$K_{\bar{h}}$	$K_I$
<b>1</b>	-0,0007	0,0009	-0,0222	-0,3574	-0,003	0,001
<b>2</b>	-0,0007	0,0009	-0,0213	-0,3419	-0,0028	0,001
<b>3</b>	0,0006	0,0007	-0,0334	-0,4747	-0,0043	0,001
<b>4</b>	0,0003	-0,0036	-0,0671	-0,5105	-0,0044	0,001
<b>5</b>	0,0003	-0,0036	-0,0676	-0,5214	-0,0044	0,001

Fonte: Do autor

das matrizes  $Q_1 = \text{diag}[Q_{\bar{u}}, Q_{\bar{w}}, Q_{\bar{q}}, Q_{\bar{\theta}}, Q_{\bar{h}}, Q_I]$  e  $R_1$ . O mesmo exemplo aplica-se aos demais identificadores de ambas as tabelas. Os cinco controladores foram simulados, primeiro através do programa *Simulink* e, após, através do simulador de voo *FlightGear*. Os resultados são demonstrados através de gráficos e tabelas demonstrativas entre os modelos.

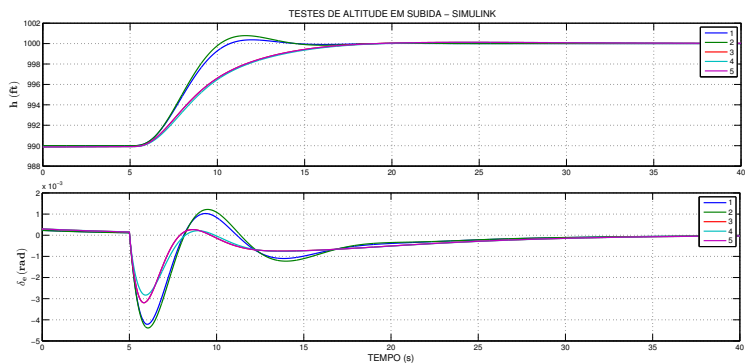
### 6.3.1 Resultados e Discussões do *Simulink*

Para a realização dos testes através do programa *Simulink*, um modelo em diagrama de blocos do controlador, semelhante ao ilustrado na Figura 12, foi montado. Individualmente, cada um dos cinco controladores foram testados.

No primeiro teste de simulação, cada controlador foi submetido ao teste de subida, ou seja, a aeronave estava abaixo da altitude de referência. A Figura 13 ilustra um gráfico comparativo de altitude e ação de controle entre os cinco controladores, sendo que demonstra suas respectivas respostas temporais durante o movimento de subida.

Conforme se pode observar na Figura 13, os controladores 1 e 2 obtiveram uma resposta mais rápida que os demais, porém provocando pequenos sobressinais. Isso se deve aos valores escolhidos para as suas matrizes  $Q$ . Conforme listado na Tabela 6, os controladores 1 e 2 possuem valores para  $Q$  menores que aqueles escolhidos para os controladores 3, 4 e 5. Isso implica que os estados dos controladores 1 e 2 sofreram menor penalização por parte do controlador, ou seja, tiveram maior liberdade. Conseqüentemente, com menor penalidade

Figura 13 – Testes de subida no *Simulink*.

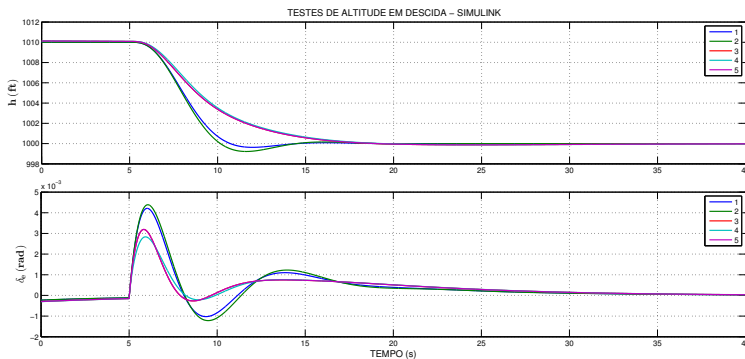


Fonte: Do autor

sobre os estados, maiores serão os valores das respostas transitórias, o que justifica a maior resposta e sobressinal observados.

No segundo teste de simulação, cada controlador foi submetido ao teste de descida, ou seja, a aeronave estava acima da altitude de referência. A Figura 14 ilustra um gráfico comparativo de altitude e ação de controle, entre os cinco controladores, sendo que demonstra suas respectivas respostas temporais durante o movimento de descida.

Figura 14 – Testes de descida no *Simulink*.



Fonte: Do autor

Semelhante ao que ocorreu com os testes de subida, observa-se na Figura 14 que, durante os testes de descida, os controladores 1 e 2 também obtiveram respostas e sobressinais maiores que os controladores 3, 4 e 5. Devido ao fato das configurações de cada um dos controladores serem as mesmas, conclui-se que as considerações sobre as matrizes  $Q$ , feitas anteriormente para os testes de subida, são as mesmas para os testes de descida.

Para quantificar as observações gráficas feitas nas Figuras 13 e 14, uma análise numérica entre os cinco controladores  $LQR$  foi realizada. Através da Tabela 8, são demonstrados os valores aproximados de sobressinal ( $Mp$ ), tempo de pico ( $Tp$ ), tempo de acomodação ( $Ts$ ), erro em regime e máxima amplitude de deflexão do elevador.

Tabela 8 – Resultados numéricos do *Simulink*.

LQR	$\bar{h}$				$\delta_e$
	Mp [%]	Tp [s]	Ts [s]	Erro [ft]	Max [rad]
<b>1</b>	3,70	4,61	9,38	0	$\pm 0,00432$
<b>2</b>	7,78	4,65	10,89	0	$\pm 0,00449$
<b>3</b>	1,27	3,59	4,98	0	$\pm 0,00333$
<b>4</b>	1,28	3,80	6,00	0	$\pm 0,00297$
<b>5</b>	1,29	3,88	5,84	0	$\pm 0,00293$

Fonte: Do autor

Os valores listados na Tabela 8 referem-se aos testes de subida e descida. Pelo fato do programa *Simulink* estar simulando um sistema linear em condições ideais (sem distúrbios), os resultados de ambos os testes são simétricos. Por isso, a tabela não faz distinção entre os testes, exceto pelos valores de  $\delta_e$ , diferenciados pelo símbolo  $\pm$ , onde  $(-)$  refere-se a subida e  $(+)$  a descida. Outro fator que se pode observar na Tabela 8 é o erro em regime ser igual a zero para todos os casos. É provável que esse fato também seja influenciado pela linearização do sistema somado a ação do integrador, que naturalmente tende a anular o erro em regime permanente.

Nesta subseção, foram demonstrados os resultados dos cinco projetos do controlador  $LQR$ . Através de simulações no programa *Simulink*, o controlador de altitude para o *Rascal 110* foi testado em situações

ideais sobre um sistema linearizado. Apenas dois testes (subida e descida) foram realizados para cada controlador. Este trabalho não tem como objetivo fazer uma análise detalhada de desempenho entre controladores, por isso a pequena quantidade de testes, considerada suficiente para demonstrar o funcionamento dos controladores. Na sequência, os mesmos controladores testados foram implementados para o controle de altitude do *VANT* no simulador de voo *FlightGear*, onde o *LQR* controlou um sistema não linear.

### 6.3.2 Resultados e Discussões do *FlightGear*

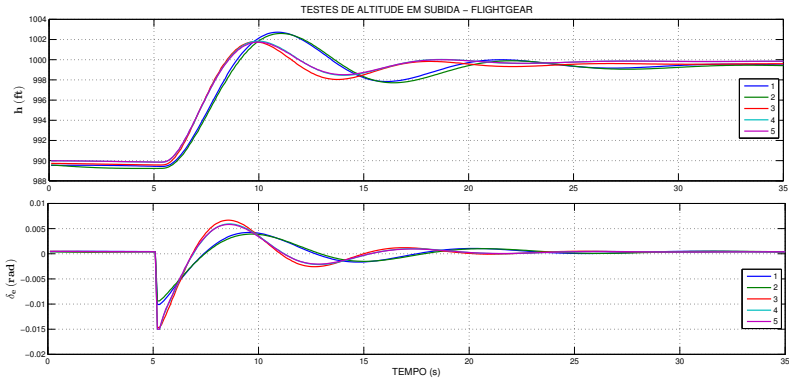
A aplicação do controlador *LQR* sobre o *Rascal 110* através do *FlightGear*, se deu através de comunicação via o protocolo *UDP*. Inicialmente o controlador foi discretizado por emulação utilizando transformação *Bilinear* com tempo de amostragem de 0,001 s, conforme descrito em detalhes no Capítulo 13 de Nise (2007). Essa transformação foi necessária pois a comunicação entre o simulador e o controlador ocorre de forma discreta no tempo. A discretização ocorreu sobre o integrador do *LQR* porque nos testes realizados no *Simulink* ele foi implementado em tempo contínuo.

Após sua discretização, o controlador foi implementado em linguagem de programação *C*, sendo que ambos, *LQR* e *FlightGear*, funcionaram conjuntamente no mesmo sistema operacional. A comunicação entre o controlador e o *VANT* ocorreu a uma frequência de 10 Hz, ou seja, foi possível trocar informações entre eles a cada 0,1 s. Essa frequência foi definida em testes experimentais e foi suficiente para permitir a troca de informações sem causar lentidão ao sistema. Os testes de subida e descida foram efetuados em etapas diferentes.

Para os testes de subida, o *Rascal 110* iniciou a simulação já em voo estabilizado pelo controlador *PID* padrão do *FlightGear*. Para cada teste de subida, a aeronave foi posicionada a uma altitude inicial de 990 *ft*, com asas niveladas, sem qualquer movimento lateral e potência do motor mantida constante a 50%. O objetivo de cada teste foi fazer o *Rascal 110* mover-se verticalmente para cima, partindo da altitude inicial até a altitude de 1000 *ft*. A Figura 15 ilustra um gráfico comparativo entre altitude e ação de controle, entre os cinco controladores, sendo que esta figura demonstra suas respectivas respostas temporais durante os movimentos de subida.

Conforme se pode observar na Figura 15, as respostas transitórias oscilam um pouco mais que nos testes realizados anteriormente

Figura 15 – Testes de subida no *FlightGear*.



Fonte: Do autor

no *Simulink*. É provável que isso tenha ocorrido pelo fato do *LQR*, que é uma técnica de controle linear, estar atuando sobre um sistema não linear. Outro fator que pode ter contribuído para esse comportamento é o fato do *Rascal 110* possuir alta sensibilidade no movimento de arfagem, observada em testes preliminares ao projeto do controlador. Foi observado que no estágio de voo em cruzeiro, mantendo-se a potência do motor constante e aplicando ao elevador uma entrada do tipo degrau com deflexão de apenas  $-0,0175$  rad, seria o suficiente para, rapidamente, gerar altos valores de  $\theta$ , reduzindo bruscamente a velocidade de voo e, conseqüentemente, causando perda de sustentação na aeronave, o que reforça o comportamento mais oscilatório durante as transições.

Semelhante aos testes realizados no *Simulink*, também observa-se na Figura 15 que, os controladores 1 e 2 obtiveram respostas transitórias maiores em relação aos demais controladores. Novamente, as afirmações feitas anteriormente para os testes no *Simulink* sobre a escolha das matrizes  $Q$ , podem ter influenciado na resposta transitória de cada um dos cinco controladores. Porém, ao contrário do que foi demonstrado nas Figuras 13 e 14, é possível observar que, mesmo possuindo maior resposta transitória, os controladores 1 e 2 tiveram menor esforço de controle  $\delta_e$ , provavelmente ocasionado pelos altos valores atribuídos a  $R$  e também as não linearidades do sistema.

Para os testes de descida, repetiu-se o mesmo procedimento efe-

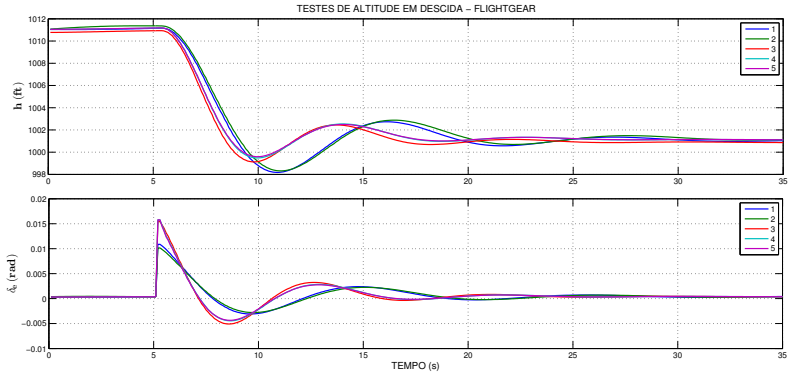


Figura 16 – Testes de descida no *FlightGear*.

tuado para os testes anteriores, porém, com a aeronave posicionada a uma altitude de 1010 *ft*. Desta vez, o objetivo foi fazer a aeronave mover-se verticalmente para baixo até atingir a altitude de referência em 1000 *ft*. A Figura 16 ilustra um gráfico comparativo entre os cinco controladores em movimento de descida. Durante os testes de descida, ilustrados na Figura 16, todos os controladores também apresentaram maiores oscilações nos períodos transitórios. Os controladores 1 e 2 mantiveram seus comportamentos, com transitórios um pouco maiores que os demais controladores. As variações de  $\delta_e$  dos controladores 1 e 2 mantiveram-se menores que os demais controladores.

Para quantificar as observações gráficas feitas nas Figuras 15 e 16, uma simples análise numérica entre os cinco controladores *LQR* testados no *FlightGear* foi realizada e demonstrada para os movimentos de subida e descida, respectivamente, através das Tabelas 9 e 10.

É possível observar na Tabela 9 que os valores de sobressinal dos controladores 1 e 2 reduziram consideravelmente se comparados com os resultados da Tabela 8. Isso pode ter ocorrido devido as escolhas dos valores das matrizes  $Q$  e  $R$ , além de outras não linearidades naturais do sistema. Da mesma forma que ocorreu nos testes realizados através do *Simulink*, os sobressinais dos controladores 1 e 2 foram maiores que os demais controladores, reforçando as observações feitas em relação as matrizes  $Q$ . O sinal positivo para os valores de erro significam que, em regime permanente, o *Rascal 110* estabilizou um pouco abaixo da altitude de referência.

Tabela 9 – Análise dos testes em subida no *FlighGear*.

LQR	$\bar{h}$				$\delta_e$
	Mp [%]	Tp [s]	Ts [s]	Erro [ft]	Max [rad]
<b>1</b>	2,72	5,50	11,80	0,60	-0,010
<b>2</b>	2,60	5,70	12,50	0,68	-0,009
<b>3</b>	1,80	4,60	7,20	0,63	-0,015
<b>4</b>	1,80	4,60	7,70	0,36	-0,015
<b>5</b>	1,70	4,60	7,80	0,35	-0,015

Fonte: Do autor

Tabela 10 – Análise dos testes em descida no *FlighGear*.

LQR	$\bar{h}$				$\delta_e$
	Mp [%]	Tp [s]	Ts [s]	Erro [ft]	Max [rad]
<b>1</b>	1,82	5,80	13,00	-1,06	0,011
<b>2</b>	1,68	6,00	13,90	-1,17	0,010
<b>3</b>	0,86	4,70	10,00	-0,96	0,015
<b>4</b>	0,52	4,90	10,60	-1,18	0,016
<b>5</b>	0,41	4,90	10,60	-1,20	0,016

Fonte: Do autor

Na Tabela 10, os valores de sobressinal para os controladores 1 e 2 também foram maiores que os demais controladores, porém menores se comparados com os testes de subida descritos na Tabela 9. Além da questão da influência na escolha das matrizes  $Q$  e das não linearidades do sistema, também pode ter ocorrido um aumento da energia cinética da aeronave durante os movimentos de descida, provocando um ganho na sensibilidade do movimento de arfagem gerado pela ação do controlador sobre  $\delta_e$ . Outra provável causa do sobressinal maior para os controladores 1 e 2, em ambos os movimentos (subida e descida), pode ser uma pequena diferença na velocidade dos controladores 1 e 2. Ana-



lisando a variação de  $\delta_e$  nas Figuras 15 e 16, tem-se a percepção que, ao chegar muito próximo das altitudes de referência, os controladores 1 e 2 foram mais lentos em relação aos controladores 3, 4 e 5. Entretanto, essa pequena diferença de velocidade dos controladores nos períodos transitórios, não determina, através desta simples análise, que os controladores 1 e 2 foram menos eficientes quanto os demais controladores. Os valores negativos para os erros de altitude em regime permanente, significa que, durante os testes, a aeronave estabilizou um pouco acima das altitudes de referências.

Os resultados demonstrados pelas Tabelas 9 e 10 são apenas aproximações. Os dados foram obtidos a partir de inspeções visuais através dos gráficos ilustrados pelas Figuras 15 e 16. Este trabalho não tem como objetivo realizar uma análise quantitativa através de comparações entre os cinco controladores testados. O propósito das tabelas é fornecer uma percepção numérica e aproximada dos comportamentos observados nos gráficos.

O controlador *LQR* aqui proposto atingiu seus objetivos ao possibilitar o deslocamento vertical do *Rascal 110* para as altitudes de referências. Não há como determinar ou estimar, com esses resultados, seu grau de robustez se comparado, por exemplo, à técnica de cascateamento proposta por Ahsun et al. (2015), ilustrada anteriormente na Figura 1. O controlador proposto por Ahsun et al. (2015), tem a vantagem de proporcionar maior robustez ao sistema, pois cada controlador foi sintonizado individualmente para atuar dentro de uma faixa de operação especificada pelo projetista.

Em contrapartida, Ahsun et al. (2015) necessitou sintonizar individualmente cada controlador, utilizando-se de técnicas de controle clássico. Para isso, foi necessário efetuar o cálculo dos ganhos através da análise do lugar das raízes, tomando os devidos cuidados para evitar saturações entre os controladores. Para o emprego desta técnica, foi necessário conhecer a função de transferência de cada controlador, considerando-se não só as posições dos polos, mas também as posições dos zeros do sistema.

O controlador *LQR* apresentado neste trabalho, tem como vantagem não levar em consideração a existência de zeros no sistema, bem como não precisar calcular separadamente os ganhos de cada laço de realimentação. Outra vantagem é que os ganhos  $\hat{K}$  do controlador *LQR* são considerados ótimos e foram calculados simultaneamente, através de uma só operação, pela definição das matrizes de penalização  $Q$  e  $R$ . Obter ganhos ótimos significa que os valores de  $\hat{K}$  farão a melhor alocação dos polos do sistema mediante a minimização do índice  $J$ .

Por outro lado, a técnica de controle  $LQR$  necessita de um modelo matemático preciso do sistema, algo difícil de se obter, principalmente em sistemas com vários graus de liberdade, como é o caso de um *VANT*. Outra característica do  $LQR$  é a impossibilidade de se poder alocar os polos do sistema onde o projetista desejar.

Neste capítulo, foi comprovada a possibilidade de implementação de um controlador de altitude para um *VANT* de asa fixa, utilizando uma metodologia mais simples para o projeto do controlador. Um sistema baseado na técnica de controle  $LQR$  foi projetado para o *Rascal 110* e simulado utilizando o *Simulink* (sistema linearizado) e o *Flight-Gear* (sistema não linear). Os resultados dos testes, em ambos os casos, demonstraram a capacidade do controlador atingir as referências e lá manter-se de forma estabilizada. Embora não tenham sido realizados testes comparativos com outras técnicas de controle, o sistema de controle de altitude proposto para o *Rascal 110* atingiu seus objetivos.

## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou uma metodologia para simplificar o projeto de um controlador de altitude para um *VANT* de asa fixa, através da técnica de controle moderno *LQR*. Utilizando ferramentas computacionais contendo programas de simulações, tais como o *Matlab/Simulink* e *FlighGear*, foi possível desenvolver o controlador *LQR* e testá-lo sob condições ideais, primeiro em um sistema linear e, após, em um sistema não linear. Os resultados obtidos nos testes demonstraram ser possível, empregando-se a técnica *LQR*, projetar um controlador de altitude eficiente e sem a necessidade de realizar a sintonia individual de cada um dos ganhos do controlador.

Durante os testes, o *LQR* conseguiu fazer o *VANT Rascal 110* mover-se verticalmente para as altitude de referências selecionadas, com pequenos sobressinais e erros em regime muito baixos. Embora não tenha sido possível uma análise comparativa com outras técnicas de controle, os resultados obtidos através da técnica de controle *LQR* demonstraram-se satisfatórios para os objetivos propostos neste trabalho.

Com o intuito de dar continuidade neste trabalho, seguem algumas propostas de trabalhos futuros:

1. Adicionar distúrbios de qualquer natureza, mas que sejam reproduzíveis, para testar a robustez do controlador de altitude, tanto no *Simulink* quanto no *FlightGear*;
2. Comparar o controlador *LQR* com outras técnicas de controle, tais como o *PID*, entre outras;
3. Refazer o projeto do controlador de altitude considerando também o controle de potência do motor;
4. Reprojetar o controlador de altitude para operar em outras fases de voo, tais como: voo em subida, descida e aproximação para pouso;
5. Implementar o controlador *LQR* em uma aeronave radiocontrolada (aeromodelo) para verificar seu comportamento em um sistema real.

## REFERÊNCIAS

- Agência Nacional de Aviação Civil - ANAC. *Requisitos Gerais para Aeronaves Não Tripuladas de Uso Civil*. [S.l.], 2017. 26 p. <<http://www.anac.gov.br/assuntos/legislacao/legislacao-1/rbha-e-rbac/rbac/rbac-e-94-emd-00>>.
- AHSUN, U. et al. Height Control Scheme Without Using Pitch Angle for Fixed Wing UAVs. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier Ltd., v. 28, n. 9, p. 25–30, 2015. ISSN 24058963.
- BAGHERI, S. *Modeling, Simulation and Control System Design for Civil Unmanned Aerial Vehicle (UAV)*. 1–115 p. Tese (Doutorado) — Umea University, 2014.
- BEARD, R. W.; MCLAIN, T. W. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. [S.l.: s.n.], 2012. 320 p. ISBN 1400840600.
- BOON, M.; DRIJFHOUT, A. P.; TEFAMICHAEL, S. Comparison of a fixed-wing and multi-rotor uav for environmental mapping applications: A case study. *ISPRS - International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XLII-2/W6, p. 47–54, 08 2017.
- CAI, G.; DIAS, J.; SENEVIRATNE, L. A Survey of Small-Scale Unmanned Aerial Vehicles: Recent Advances and Future Development Trends. *Unmanned Systems*, v. 02, n. 02, p. 175–199, 2014. ISSN 2301-3850.
- ÇAKIR, Z. *Development of a UAV Testbed*. Tese (Doutorado) — Middle East Technical University, 2011.
- CHAO, H.; CAO, Y.; CHEN, Y. Autopilots for small unmanned aerial vehicles: A survey. *International Journal of Control, Automation and Systems*, v. 8, n. 1, p. 36–44, 2010. ISSN 15986446.
- DCEA. *Sistemas de Aeronaves Remotamente Pilotadas e o Acesso ao Espaço Aéreo Brasileiro*. [S.l.], 2015. 76 p.
- DEZHI, T.; XIAOJUN, T. Design of UAV attitude controller based on improved robust LQR control. *Proceedings - 2017 32nd Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation, YAC 2017*, p. 1004–1009, 2017.

- ELSAIED, A. et al. Design of Longitudinal Motion Controller of a Small Unmanned Aerial Vehicle. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, v. 7, n. 10, p. 37–47, 2015. ISSN 2074904X.
- ESTEVEES, D. J.; MOUTINHO, A.; AZINHEIRA, J. R. Stabilization and altitude control of an indoor low-cost quadrotor: Design and experimental results. *Proceedings - 2015 IEEE International Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions, ICARSC 2015*, n. 3, p. 150–155, 2015.
- FURTADO, V. H. et al. Aspectos de Segurança na Integração de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANT) no Espaço Aéreo Brasileiro. *VII SITRAER - Simpósio de Transporte Aéreo. Rio de Janeiro.*, v. 7, p. 506–517, 2008.
- JENKINS, D.; VASIGH, B. The Economic Impact of Unmanned Aircraft Systems Integration in the United States. *Association for Unmanned Vehicle Systems International*, n. March, p. 1–40, 2013.
- JETLEY, P.; SUJIT, P. B. Safe Landing of Fixed Wing UAVs. *47th Annual IEEE/IFIP International Conference on Dependable Systems and Networks Workshops*, p. 2–9, 2017.
- JODEH, N. M. *Air force institute of technology. Tese (Doutorado) — Air Force Institute of Technology - Air University, 2006.*
- LONGHITANO, G. A. *Vants para sensoriamento remoto: aplicabilidade na avaliação e monitoramento de impactos ambientais causados por acidentes com cargas perigosas.* 148 p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2010.
- MURRIETA-RICO, F. N. et al. Resolution improvement of accelerometers measurement for drones in agricultural applications. *IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)*, p. 1037–1042, 2016.
- NELSON, R. C. *Flight stability and automatic control.* 1st. ed. New York: [s.n.], 1989. 284 p. ISBN 0-07-046218-6.
- NERIS, L. D. O. *Um Piloto Autmático para as Aeronaves do Projeto ARARA.* Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2001.
- NISE, N. S. *Control Systems Engineering.* 6th. ed. Hoboken: [s.n.], 2007. 948 p. ISSN 1388-7491. ISBN 9780470547564.

- NOUR, B. A.; SOUFIENE, B.; JOSEPH, H. Modeling and Sliding Mode Control of a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle. *3rd International Conference on Automation, Control, Engineering and Computer Science (ACECS)*, v. 3, n. 1, 2016.
- OGATA, K. *Modern control engineering*. [S.l.: s.n.], 2010. 836 p. ISBN 0130432458.
- ÖZDEN, G. S. et al. Design of a Flight Stabilizer for Fixed-Wing Aircrafts Using *H<sub>∞</sub>finityLoopShapingMethod*.p.790 – –795, 2015.
- PETERS, M.; KONYAK, M. *The Engineering Analysis and Design of the Aircraft Dynamics Model For the FAA Target Generation Facility*. 2003.
- PUTTIGE, R. V. *Neural Network Based a Daptive Control for a Utonomous Flight of Fixed Wing Unmanned Aerial Vehicles*. Tese (Doutorado) — University of New South Wales., 2008.
- RODRIGUES, E. S. Aspectos Regulatórios Da Operação De Veículo Aéreo Não Tripulado. *XIII Rio de Transportes. Rio de*, n. 2001, 2015.
- ROSKAM, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls - Part II*. 1st. ed. Kansas: [s.n.], 1998. 424 p. ISBN 1884885187.
- SARHAN, A.; QIN, S. Autonomous Intelligent Flight Control of Fixed-Wing Uav Based on Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System. *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*, eISSN pISS, p. 2319–1163, 2016.
- SHAH, M.; SAMAR, R.; ALI, U. Altitude Controller Design and Flight Demonstration for a Research UAV. *8th Ankara Internationall Aerospace Conference*, n. September, p. 1–20, 2015.
- VURAL, S. Y.; HAJIYEV, C. A comparison of longitudinal controllers for autonomous UAV. *International Journal of Sustainable Aviation*, v. 1, n. 1, p. 58, 2014. ISSN 2050-0467.
- WARSI, F. A. et al. Yaw, Pitch and Roll controller design for fixed-wing UAV under uncertainty and perturbed condition. *Proceedings - 2014 IEEE 10th International Colloquium on Signal Processing and Its Applications, CSPA 2014*, p. 151–156, 2014.
- ZHAI, R. et al. Control and navigation system for a fixed-wing unmanned aerial vehicle. *AIP Advances*, v. 4, n. 3, 2014. ISSN 21583226.