UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

NAYARA CAROLINE LUIZ

DIFERENCIABILIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH

Blumenau

2018

Nayara Caroline Luiz

DIFERENCIABILIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH

Trabalho de Conclusão de Curso submetida ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu

Blumenau

2018

Catalogação na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 23:44h do dia 26 de junho de 2018.

Nayara Caroline Luiz
Diferenciabilidade em Espaços de Banach : / Nayara Caroline Luiz; Orientador, Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu; , - Blumenau, 23:44, 18 de junho de 2018.
53 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Diferenciabilidade. 2. Espaço de Banach. 3. Derivada de Fréchet. 4. Derivada de Gâteaux. I. Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu II. III. Curso de Licenciatura em Matemática IV. Diferenciabilidade em Espaços de Banach

CDU 02:141:005.7

Nayara Caroline Luiz

DIFERENCIABILIDADE EM ESPAÇOS DE BANACH

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Grau de Licenciatura em Matemática, aprovado m sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 18 de junho de 2018.

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Maicon José Benvenutti
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Este trabalho é dedicado à todos que acreditaram em mim e me apoiaram nesta etapa.

AGRADECIMENTOS

Agradecimento ao orientador Profº Dr. Rafael dos Reis Abreu por toda dedicação e esforço na colaboração deste trabalho, que buscou sempre orientar-me da melhor maneira e acreditou em mim.

À minha família e meu namorado que me apoiaram e incentivaram, proporcionando um maior amadurecimento ao longo da elaboração do trabalho. Agradecimento especial também a Universidade Federal de Santa Catarina pela oportunidade de estudar em uma instituição como esta e aos professores que sempre contribuíram de forma significativa, me ajudando no que era necessário.

"Não confunda jamais conhecimento com sabedoria. Um o ajuda a ganhar a vida; o outro a construir uma vida."

Sandra Carey

"A essência do conhecimento consiste em aplicá-lo, uma vez possuído."

Confúcio

RESUMO

O presente trabalho trata de alguns resultados sobre diferenciabilidade de funções definidas sobre Espaços de Banach. Desta forma, o seu objetivo é apresentar estes resultados e relacioná-los com a noção de derivada estudada nas disciplinas de graduação. O terceiro capítulo, intitulado "Regras operacionais", permite que essa relação seja facilmente feita. Por fim, o último capítulo traz o conceito de diferenciabilidade em espaços produtos, ou seja, os resultantes do produto cartesiano entre dois espaços de Banach.

Palavras-chaves: Diferenciabilidade. Espaço de Banach. Derivada de Fréchet. Derivada de Gâteaux.

ABSTRACT

This assignment deals with some results about differentiability of definited functions on Banach spaces. This way, its objective is to show these results and associate them with derivate notion studied in the graduations courses. The third chapter, named "Operations Rules", allows this relation be made easily. In the end, the last chapter brings the differentiability in product spaces concept, that is, those resulting from the Cartesian product between two Banach spaces.

Keywords: Differentiability. Banach Space. Fréchet Derivative. Gâteaux Derivative.

SUMÁRIO

NOTAÇÕES

Neste texto usamos as seguintes notações:

- $|x|$ denota o módulo de um número real x;
- $\mathbb{R}^n$ denota o Espaço Euclidiano n-dimensional munido da norma $||x||_{\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ e do produto interno $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$, em que $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $||x||_E$ denota a norma de um elemento x pertencente ao espaço normado E;
- 0_E denota o elemento nulo do espaço normado E;
- $L(E, F)$ denota o espaço normado das transformações lineares e contínuas definidas no espaço normado E e que assumem valores no espaço normado F;
- $T.x$ denota uma transformação linear e continua T aplicada no elemento x de seu domínio;
- $\frac{df}{dx}(a)$ denota a derivada de uma função real f, de uma variável real, no ponto a de seu domínio, ou seja,

$$\frac{df}{dx}(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ denota a i-ésima derivada parcial de uma função real f, de n variáveis reais, no ponto $a = (a_1, ..., a_n)$ de seu domínio, ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) : \quad &= \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_n)}{t} \\ &\quad - \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{t}.\end{aligned}$$

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de alguns resultados importantes do Cálculo Diferencial para funções definidas sobre espaços de Banach. Para o bom entendimento deste, recomendamos que se tenha boa familiaridade com os principais conceitos da Análise Real e com os conceitos introdutórios da Análise Funcional Linear.

Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, sabemos que f é diferenciável, ou derivável, no ponto $a \in I$ quando existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{1.1}$$

Neste caso, o limite em (1.1) é denotado por $f'(a)$, ou por $\dfrac{df}{dx}(a)$.

O objetivo então é generalizar a noção de diferenciabilidade para quando se tem uma função $f : U \to F$, em que $U \subset E$ é um conjunto aberto e E e F são espaços de Banach. Notemos que, para este caso, o quociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pode não estar bem definido. Desta forma, é interessante obter uma forma equivalente à definição de diferenciabilidade e que seja passível de generalização. Quando $f : I \to \mathbb{R}$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é diferenciável em $a \in I$, temos que

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a).h}{|h|} \right] = 0,$$

que por sua vez é equivalente a existência de uma função ε tal que, para todo $h \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 0, tem-se

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \varepsilon(h) \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{|h|} = 0. \tag{1.2}$$

Observando que a função $h \in \mathbb{R} \mapsto f'(a).h \in \mathbb{R}$ é uma transformação linear e contínua, temos que (1.2) pode ser generalizado para quando se tem $f : U \to F$, em que $U \subset E$ é um conjunto aberto e E e F são espaços de Banach. No Capítulo 2, tratamos precisamente da generalização da noção de diferenciabilidade, para funções que estão definidas em conjuntos abertos de um espaço de Banach e que assumem valores em outro espaço de Banach, e as relações disto com o conceito de continuidade.

Tal como ocorre em um curso de Cálculo I, é interessante, para efeitos de cálculo, que se tenham bem estabelecidas as regras operacionais para esta noção de diferenciabilidade em espaços de Banach. Isso é precisamente feito no Capítulo 3.

Um detalhe interessante a ser observado é que nos Capítulos 2 e 3 não é de forma alguma assumido que os espaços de Banach considerados são também produtos cartesianos de espaços normados. No Capítulo 4, então, estabelecemos alguns resultados sobre diferenciabilidade de funções $f : U \to F$, em que $U \subset E$ é um conjunto aberto e E e F são espaços de Banach que são também produtos cartesianos de espaços normados.

O estudo deste trabalho se baseou principalmente na obra de Kesavan (2004), mas também usa resultados que podem ser encontrados nas obras de Kreyszig (1989) e Lima (2010).

2 A NOÇÃO DE DIFERENCIABILIDADE

Neste trabalho, E, F e G sempre irão denotar espaços de Banach.

Definição 1. Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto, $f : U \to F$ uma função e $h \in E$. Dizemos que f possui a derivada de Gâteaux em $a \in U$, na direção h, se existe o limite

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Se, para todo $h \in E$, f possui a derivada de Gâteaux em a, na direção h, dizemos que f é Gâteaux derivável, ou Gâteaux diferenciável, em a.

Uma questão natural que ocorre é se Gâteaux diferenciabilidade implica em continuidade. A resposta para esta questão é negativa, conforme veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{x^6 + y^3} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Considerando $a = (0,0)$ e $h = (h_1, h_2)$, temos que

$$\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^5 h_1^4 h_2}{t^6 h_1^6 + t^3 h_2^3} \cdot \frac{1}{t} = \frac{h_1^4 h_2}{t^2 h_1^6 + \dfrac{h_2^3}{t}}$$

e daí,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{h_1^4 h_2}{t^2 h_1^6 + \dfrac{h_2^3}{t}} = 0,$$

ou seja, f é Gâteaux derivável em a. Por outro lado, considerando as curvas $\gamma_1(t) = (0,t)$ e $\gamma_2(t) = (\sqrt{t}, t)$, temos que $\lim\limits_{t \to 0} \gamma_1(t) = (0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \gamma_2(t)$, $\lim\limits_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = 0$ e $\lim\limits_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3}{2t^3} = \dfrac{1}{2}$, e com isso concluímos que f não é contínua em a.

Definição 2. Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função. Dizemos que f é diferenciável, ou Fréchet diferenciável, em $a \in U$ se existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0_F.$$

Se f é diferenciável em x, para todo $x \in U$, dizemos que f é diferenciável.

Observação 1. *Notemos que, de forma equivalente, podemos dizer que a função $f : U \to F$ é diferenciável em $a \in U$ se existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se*

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x - a) + \varepsilon(x - a)$$

e

$$\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(x - a)}{\| x - a \|_E} = 0_F,$$

ou

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x - a) + \eta(x)$$

e

$$\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\eta(x)}{\| x - a \|_E} = 0_F.$$

Proposição 1. *Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função. Se f é diferenciável em $a \in U$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Se f é diferenciável em $a \in U$, então existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0_F.$$

Notemos que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{\|h\|_E \to 0} \| h \|_E \cdot \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0_F.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\|_E \to 0} f(a+h) &= \lim_{\|h\|_E \to 0} [f(a) + f'(a) \cdot h + \varepsilon(h)] \\ &= \lim_{\|h\|_E \to 0} f(a) + \lim_{\|h\|_E \to 0} f'(a) \cdot h + \lim_{\|h\|_E \to 0} \varepsilon(h) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0_E + 0_F \\ &= f(a), \end{aligned}$$

ou seja, f é contínua em a. ■

Proposição 2. *Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função. Se f é diferenciável em $a \in U$, então f é Gâteaux derivável em a e*

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = f'(a) \cdot h,$$

para todo $h \in E$.

Demonstração. Se f é diferenciável em a, então existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $v \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a+v) = f(a) + f'(a).v + \varepsilon(v)$$

e

$$\lim_{\|v\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(v)}{\| v \|_E} = 0_F.$$

Desta forma, dado arbitrariamente $h \in E$ e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 0, tem-se

$$f(a+th) = f(a) + f'(a) \cdot (th) + \varepsilon(th) \tag{2.1}$$

e

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = \lim_{\|th\|_E\to 0}\frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = 0_F.$$

De (2.1), temos que

$$\begin{aligned}\varepsilon(th) &= f(a+th) - f(a) - f'(a)\cdot(th)\\ &= f(a+th) - f(a) - t\cdot f'(a)\cdot h\end{aligned}$$

e daí,

$$\| h \|_E \cdot \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = \frac{\varepsilon(th)}{|t|} = \frac{f(a+th) - f(a) - t\cdot f'(a)\cdot h}{|t|}.$$

Notemos que

$$\lim_{t\to 0}\left[\| h \|_E \cdot \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E}\right] = \| h \|_E \cdot \lim_{t\to 0}\frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = 0_F.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th) - f(a) - t\cdot f'(a)\cdot h}{|t|} = 0_F$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(a+th) - f(a)}{t} - f'(a)\cdot h\right] = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th) - f(a) - t\cdot f'(a)\cdot h}{t} = 0_F,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a)\cdot h.$$

■

A proposição a seguir trata da unicidade da diferencial.

Proposição 3. *Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função diferenciável em $a \in U$. Se existe $T \in L(E,F)$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se*

$$f(a+h) = f(a) + T\cdot h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0_F,$$

então

$$T = f'(a).$$

Demonstração. Se existe $T \in L(E, F)$ tal que, para todo $v \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a + v) = f(a) + T \cdot v + \varepsilon(v)$$

e

$$\lim_{\|v\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(v)}{\| v \|_E} = 0_F,$$

então, dado arbitrariamente $h \in E$ e $t \in \mathbb{R}$ suficientemente próximo de 0, tem-se

$$f(a + th) = f(a) + T \cdot (th) + \varepsilon(th) \tag{2.2}$$

e

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = \lim_{\|th\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = 0_F.$$

De (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon(th) &= f(a + th) - f(a) - T \cdot (th) \\ &= f(a + th) - f(a) - t \cdot T \cdot h \end{aligned}$$

e daí,

$$\| h \|_E \cdot \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = \frac{\varepsilon(th)}{|t|} = \frac{f(a + th) - f(a) - t \cdot T \cdot h}{|t|}.$$

Como

$$\lim_{t \to 0} \left[\| h \|_E \cdot \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} \right] = \| h \|_E \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\varepsilon(th)}{\| th \|_E} = 0_F,$$

temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a) - t\cdot T\cdot h}{|t|} = 0_F$$

e consequentemente

$$\lim_{t\to 0} \left[\frac{f(a+th) - f(a)}{t} - T\cdot h\right] = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a) - t\cdot T\cdot h}{t} = 0_F,$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = T\cdot h.$$

Então, da Proposição 2, temos que

$$f'(a)\cdot h = \frac{\partial f}{\partial h}(a) = T.h,$$

para todo $h \in E$. Logo, $f'(a) = T$.

■

Corolário 1. *Sejam $U \in E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função diferenciável em $a \in U$. Se existe $T \in L(E, F)$ tal que, para todo $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se*

$$f(x) = f(a) + T.(x-a) + \eta(x)$$

e

$$\lim_{||x-a||_E\to 0} \frac{\eta(x)}{||x-a||_E} = 0_F,$$

então

$$T = f'(a).$$

Exemplo 2. Vamos mostrar que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, é diferenciável. Para isto, devemos exibir uma transformação $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + T.h + \varepsilon(h),$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0.$$

Uma questão natural que ocorre é como determinar uma transformação $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ que satisfaça as condições acima. Sabendo que toda função diferenciável é Gâteaux derivável e que, neste caso, temos $f'(a).h = \dfrac{\partial f}{\partial h}(a)$, para todo $h \in \mathbb{R}^2$, então a "candidata" à T é a função $h \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial h}(a)$. Dada arbitrariamente $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ e $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+th) - f(a)}{t} &= \frac{(a_1 + th_1)^2 + (a_2 + th_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{t} \\
&= \frac{a_1^2 + 2ta_1h_1 + t^2h_1^2 + a_2^2 + 2ta_2h_2 + t^2h_2^2 - a_1^2 - a_2^2}{t} \\
&= 2a_1h_1 + th_1^2 + 2a_2h_2 + th_2^2
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = 2a_1h_1 + 2a_2h_2.$$

Notemos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T.h = 2a_1h_1 + 2a_2h_2$, para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, é linear. De fato, para quaisquer $h = (h_1, h_2)$ e $k = (k_1, k_2)$ em $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
T.(h + \lambda k) &= 2a_1(h_1 + \lambda k_1) + 2a_2(h_2 + \lambda k_2) \\
&= 2a_1h_1 + \lambda 2a_1k_1 + 2a_2h_2 + \lambda 2a_2k_2 \\
&= 2a_1h_1 + 2a_2h_2 + \lambda(2a_1k_1 + 2a_2k_2) \\
&= T.h + \lambda T.k.
\end{aligned}$$

Além disso, sendo $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial de dimensão finita, segue da linearidade de T que T também é contínua. Finalmente, para mostrar que f é diferenciável em a, notemos que, fazendo

$$\varepsilon(h) := f(a + h) - f(a) - T.h,$$

temos

$$f(a + h) = f(a) + T.h + \varepsilon(h).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &= (a_1+h_1)^2+(a_2+h_2)^2-(a_1^2+a_2^2)-(2a_1h_1+2a_2h_2)\\ &= a_1^2+2a_1h_1+h_1^2+a_2^2+2a_2h_2+h_2^2-a_1^2-a_2^2-2a_1h_1-2a_2h_2\\ &= h_1^2+h_2^2\\ &= \| h \|_{\mathbb{R}^2}^2\end{aligned}$$

e consequentemente

$$\lim_{\|h\|_{\mathbb{R}^2}\to 0}\frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_{\mathbb{R}^2}} = \lim_{\|h\|_{\mathbb{R}^2}\to 0}\| h \|_{\mathbb{R}^2}=0.$$

Logo, pela Proposição 3, temos que f é diferenciável em $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ e

$$f'(a).h = 2a_1h_1+2a_2h_2,$$

para todo $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

Observação 2. *Notemos que, do Exemplo 1 e da Proposição 1, é possível concluir que nem toda função Gâteaux derivável é diferenciável. De fato, a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^6+y^3}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

é Gâteaux derivável em $a=(0,0)$, mas não é contínua em $a=(0,0)$ e, consequentemente, pela Proposição 1, não é diferenciável em $a=(0,0)$.

Proposição 4. *Sejam $U\subset\mathbb{R}$ um conjunto aberto e $a\in U$. Se $f:U\to\mathbb{R}$ é uma função, então são equivalentes as seguintes afirmações:*
(a) f é derivável em a;
(b) f é diferenciável em a;
(c) f é Gâteaux derivável em a.
Neste caso, temos

$$\frac{df}{dx}(a).h = f'(a).h = \frac{\partial f}{\partial h}(a),$$

para todo $h\in\mathbb{R}$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que (a) implica em (b). Se f é derivável em a, então existe

$$\frac{df}{dx}(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a transformação linear e contínua definida por

$$T.h = \frac{df}{dx}(a)\cdot h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$. Fazendo

$$\varepsilon(h) := f(a+h) - f(a) - T.h,$$

temos que

$$f(a+h) = f(a) + T.h + \varepsilon(h),$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{|h|\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} &= \lim_{|h|\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)-T.h}{h}\right] \\
&= \lim_{|h|\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)-\dfrac{df}{dx}(a)\cdot h}{h}\right] \\
&= \lim_{|h|\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{df}{dx}(a)\right]. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{|h|} = 0.$$

Logo, f é diferenciável em a e

$$f'(a).h = T\cdot h = \frac{df}{dx}(a)\cdot h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Sobre (b) implicar em (c), segue da Proposição 2.

Finalmente, vamos mostrar que (c) implica em (a). Se f é Gâteaux derivável em a, então, para todo $h \in \mathbb{R}$, existe o limite

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t \cdot 1) - f(a)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial h_o}(a), \end{aligned}$$

em que $h_o = 1$. Logo f é derivável em a.

■

Exemplo 3. Sejam $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f_1(x) = sen(x)$, $f_2(x) = x^4$ e $f_3(x) = e^x$, respectivamente. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, temos que f_1, f_2 e f_3 são deriváveis em a e, pela Proposição 4, são também diferenciáveis em a e $f_1'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_3'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as funções definidas por

$$\begin{aligned} f_1'(a) \cdot h &= (cos(a)) \cdot h, \\ &= f_2'(a) \cdot h \\ &= 4a^3 \cdot h \end{aligned}$$

e

$$f_3'(a) \cdot h = e^a \cdot h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

3 REGRAS OPERACIONAIS

Neste capítulo, iremos estabelecer as regras operacionais para funções diferenciáveis em Espaços de Banach.

Proposição 5. *Seja $U \subset E$ um conjunto aberto. Se $f : U \to F$ e $g : U \to F$ são funções diferenciáveis em $a \in U$, então a função $(f+g) : U \to F$ é diferenciável em a e*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demonstração. Se $f : U \to F$ e $g : U \to F$ são funções diferenciáveis em a, então existem $f'(a) \in L(E,F)$ e $g'(a) \in L(E,F)$ tais que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \varepsilon_1(h),$$

$$g(a+h) = g(a) + g'(a).h + \varepsilon_2(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E} = 0_F = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_2(h)}{\| h \|_E}.$$

Daí, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$\begin{aligned}(f+g)(a+h) &= f(a+h) + g(a+h) \\ &= f(a) + f'(a).h + \varepsilon_1(h) + g(a) + g'(a).h + \varepsilon_2(h) \\ &= f(a) + g(a) + f'(a).h + g'(a).h + \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h) \\ &= (f+g)(a) + (f'(a) + g'(a)).h + \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h).\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)$, temos

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + (f'(a) + g'(a)).h + \varepsilon(h)$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} &= \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(h)}{\| h \|_E} \\
&= \lim_{\|h\|_E \to 0} \left[\frac{\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E} + \frac{\varepsilon_2(h)}{\| h \|_E} \right] \\
&= \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E} + \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_2(h)}{\| h \|_E} \\
&= 0_F + 0_F \\
&= 0_F.
\end{aligned}$$

Então, pela Proposição 3, concluímos que $f + g : U \to F$ é diferenciável em a e

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

$\blacksquare$

Corolário 2. *Seja $U \subset E$ um conjunto aberto. Se $f_1 : U \to F$, $f_2 : U \to F$, ..., $f_n : U \to F$ são funções diferenciáveis em $a \in U$, então a função $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) : U \to F$ é diferenciável em a e*

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \ldots + f_n'(a).$$

Exemplo 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 + sen(x) + e^x$. Segue do Exemplo 3 e do Corolário 2 que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, f é diferenciável em a e $f'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f'(a).h = (4a^3 + cos(a) + e^a).h$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Proposição 6. *Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $f : U \to F$ é uma função diferenciável em $a \in U$, então a função $(\lambda f) : U \to F$ é diferenciável em a e*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Demonstração. Se $f : U \to F$ é diferenciável em a, então existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \varepsilon_1(h),$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E} = 0_F.$$

Daí, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$\begin{aligned} (\lambda f)(a+h) &= \lambda f(a+h) \\ &= \lambda[f(a) + f'(a).h + \varepsilon_1(h)] \\ &= \lambda f(a) + \lambda.f'(a).h + \lambda\varepsilon_1(h) \\ &= (\lambda f)(a) + (\lambda f'(a)).h + \lambda\varepsilon_1(h). \end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon(h) = \lambda\varepsilon_1(h)$, temos

$$(\lambda f)(a+h) = (\lambda f)(a) + (\lambda f'(a)).h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\lambda\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E} = \lambda \lim_{\|h\|_E \to 0} \left[\frac{\varepsilon_1(h)}{\| h \|_E}\right] = \lambda \cdot 0_F = 0_F.$$

Então, pela Proposição 3, concluímos que $(\lambda f) : U \to F$ é diferenciável em a e

$$(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

■

Exemplo 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \frac{1}{4}.x^4$. Segue do Exemplo 3 e da Proposição 6 que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, f é diferenciável em a e $f'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$f'(a).h = \frac{1}{4}.4a^3h = a^3.h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Lema 1. *Seja $U \subset E$ um conjunto aberto. Se $f : U \to F$ é diferenciável em $a \in U$, então existe $k > 0$ tal que, para $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se*

$$\| f(x) - f(a) \|_F < k \| x - a \|_E .$$

Demonstração. Se $f : U \to F$ diferenciável em a, então existe $f'(a) \in L(E, F)$ tal que, para todo $h \in E$ suficientemente próximo de 0_E, tem-se

$$f(a + h) = f(a) + f'(a).h + \varepsilon(h)$$

e

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = 0_F.$$

Sendo $f'(a) \in L(E, F)$, temos que

$$\| f'(a) \|_{L(E,F)} = \sup\{\| f'(a).h \|_F : h \in E, \| h \|_E = 1\} < +\infty.$$

Fazendo $k = ||f'(a)||_{L(E,F)} + 1$, temos que

$$\sup\{\| f'(a).h \|_F : h \in E, \| h \|_E = 1\} < k$$

e, consequentemente, para todo $h \in E$, $\| h \|_E = 1$, temos

$$\| f'(a).h \|_F \leq \sup\{\| f'(a).h \|_F : h \in E, \| h \|_E = 1\} < k.$$

Então, pela Proposição 2, obtemos

$$\left\| \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right\|_F = ||f'(a).h||_F < k$$

e da continuidade da norma, segue que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right\|_F = \left\| \lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right\|_F < k.$$

Fazendo $x = a + th$, segue que $th = x - a$ e $t \to 0$ implica que

$\| x - a \|_E \to 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{||f(x) - f(a)||_F}{\| x - a \|_E} &= \lim_{\|th\|_E \to 0} \frac{||f(a+th) - f(a)||_F}{\| th \|_E} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{||f(a+th) - f(a)||_F}{|t|} \\
&= \lim_{t \to 0} \left\| \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \right\|_F \\
&< k.
\end{aligned}$$

Logo, para $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se

$$\frac{||f(x) - f(a)||_F}{\| x - a \|_E} < k$$

e consequentemente

$$||f(x) - f(a)||_F < k \| x - a \|_E \ .$$

■

Proposição 7. *Sejam $U \subset E$ e $V \subset F$ conjuntos abertos e $f : U \to F$ e $g : V \to G$ funções tais que $f(U) \subset V$. Se f é diferenciável em $a \in U$ e g é diferenciável em $b = f(a) \in V$, então $(g \circ f) : U \to G$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$.*

Demonstração. Se f é diferenciável em $a \in U$ e g é diferenciável em $b \in V$, então, de acordo com a Observação 1, existem $f'(a) \in L(E, F)$ e $g'(b) \in L(F, G)$ tais que, para todo $x \in E$ suficientemente próximo de a e todo $y \in F$ suficientemente próximo de b, tem-se

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x - a) + \varepsilon_1(x - a), \tag{3.1}$$

$$g(y) = g(b) + g'(b).(y - b) + \varepsilon_2(y - b),$$

$$\lim_{||x-y||_E \to 0} \frac{\varepsilon_1(x - a)}{||x - a||_E} = 0_F \tag{3.2}$$

e

$$\lim_{||y-b||_F \to 0} \frac{\varepsilon_2(y - b)}{||y - b||_F} = 0_G. \tag{3.3}$$

Sendo f diferenciável em a, temos que f é contínua em a; logo, para todo $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se $f(x)$ suficientemente próximo de $b = f(a)$ e consequentemente

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)).(f(x) - f(a)) + \varepsilon_2(f(x) - f(a)).\end{aligned}$$

De (3.1), segue que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(a)) + g'(f(a)).[f'(a).(x-a) + \varepsilon_1(x-a)] + \varepsilon_2(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)).f'(a).(x-a) + g'(f(a)).\varepsilon_1(x-a) \\ &\quad + \varepsilon_2(f(x) - f(a)) \\ &= (g \circ f)(a) + [g'(f(a)) \circ f'(a)].(x-a) + g'(f(a)).\varepsilon_1(x-a) \\ &\quad + \varepsilon_2(f(x) - f(a)).\end{aligned}$$

Fazendo $\eta(x) = g'(f(a)).\varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(f(x) - f(a))$, para todo $x \in E$ suficientemente próximo de a, tem-se que

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) + [g'(f(a)) \circ f'(a)].(x-a) + \eta(x). \tag{3.4}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{\| x-a \|_E \to 0} \frac{\eta(x)}{\| x-a \|_E} = 0_G. \tag{3.5}$$

De fato, notemos que, de (3.2),

$$\begin{aligned}\lim_{\| x-a \|_E \to 0} \frac{g'(f(a)) \cdot \varepsilon_1(x-a)}{\| x-a \|_E} &= \lim_{\| x-a \|_E \to 0} g'(f(a)) \cdot \frac{\varepsilon_1(x-a)}{\| x-a \|_E} \\ &= g'(f(a)) \cdot 0_F \\ &= 0_G.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Notemos também que

$$\lim_{\| x-a \|_E \to 0} \frac{\varepsilon_2(f(x) - f(a))}{\| x-a \|_E} = 0_G. \tag{3.7}$$

De fato, do Lema 1, existem $k > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\| x-a \|_E < \delta_1 \Rightarrow \| f(x) - f(a) \|_F < k \| x-a \|_E . \tag{3.8}$$

Além disso, de (3.3), tem-se que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$0 <\| y - b \|_F < \eta \Rightarrow \frac{\| \varepsilon_2(y-b) \|_G}{\| y - b \|_F} = \left\| \frac{\varepsilon_2(y-b)}{\| y - b \|_F} \right\|_G < \frac{\varepsilon}{k}. \quad (3.9)$$

Ainda, sendo f contínua em a, tem-se que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\| x - a \|_E < \delta_2 \Rightarrow \| f(x) - f(a) \|_F < \eta. \quad (3.10)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tem-se que

$$0 <\| x - a \|_E < \delta, \| f(x) - f(a) \|_F = 0$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\varepsilon_2(f(x) - f(a))}{\| x - a \|_E} \right\|_G = 0 < \varepsilon \quad (3.11)$$

e, combinando (3.8), (3.9) e (3.10), tem-se também que

$$0 <\| x - a \| < \delta, \| f(x) - f(a) \|_F > 0$$

$$\Rightarrow 0 <\| f(x) - f(a) \|_F < \eta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \frac{\varepsilon_2(f(x) - f(a))}{\| x - a \|_E} \right\| &= \frac{\| \varepsilon_2(f(x) - f(a)) \|_G}{\| x - a \|_E} < k \cdot \frac{\| \varepsilon_2(f(x) - f(a) \|_G}{\| f(x) - f(a) \|_F} \\ &< k \cdot \frac{\varepsilon}{k} \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Então, das implicações (3.11) e (3.12), concluímos exatamante (3.7). Daí, de (3.6) e (3.7),

$$\begin{aligned} \lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\eta(x)}{\| x - a \|_E} &= \lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{g'(f(a)).\varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_2(f(x) - f(a))}{\| x - a \|_E} \\ &= \lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{g'(f(a)).\varepsilon_1(x-a)}{\| x - a \|_E} \\ &\quad + \lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\varepsilon_2(f(x) - f(a))}{\| x - a \|_E} \\ &= 0_G + 0_G \\ &= 0_G. \end{aligned}$$

Desta forma, de (3.4), (3.5) e do Corolário 1, concluímos que $(g \circ f) : U \to G$ é diferenciável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

■

Exemplo 6. Sejam $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f_1(x) = sen(x)$ e $f_2(x) = x^4$, respectivamente. Para cada $a \in \mathbb{R}$, temos que f e g são deriváveis em a e, pela Proposição 4, são diferenciáveis em a. Então, pela Proposição 7, temos para cada $a \in \mathbb{R}$ que $(f_1 \circ f_2)$ é diferenciável em a e

$$\begin{aligned}
(f_1 \circ f_2)'(a).h &= (f_1'(f_2(a)) \circ f_2'(a)).h \\
&= f_1'(f_2(a)).(f_2'(a).h) \\
&= f_1'(f_2(a)).(4a^3.h) \\
&= cos(f_2(a)).4a^3.h \\
&= cos(a^4).4a^3.h,
\end{aligned}$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelos Exemplo 2 e Exemplo 3, temos que f e g são diferenciáveis. Então, pela Proposição 7, temos para cada $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ que $(g \circ f)$ é diferenciável em a e

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a).h &= (g'(f(a)) \circ f'(a)).h \\
&= (g'(f(a))).(f'(a).h) \\
&= (g'(f(a))).(2a_1h_1 + 2a_2h_2) \\
&= 4.(f(a))^3.(2a_1h_1 + 2a_2h_2) \\
&= 4.(a_1^2 + a_2^2)^3.(2a_1h_1 + 2a_2h_2) \\
&= 8.(a_1^2 + a_2^2)^3.(a_1h_1 + a_2h_2),
\end{aligned}$$

para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 8. *Seja $b \in F$. Se $f : E \to F$ é a função definida por $f(x) = b$, para todo $x \in E$, então f é diferenciável e*

$$f'(x) = 0_{L(E,F)},$$

para todo $x \in E$.

Demonstração. Se $f : E \to F$ é a função definida por $f(x) = b$, para todo $x \in E$, então, para quaisquer $x, h \in E$, temos

$$f(x+h) = f(x) = f(x) + 0_{L(E,F)} \cdot h + \varepsilon(h),$$

em que $\varepsilon : E \to F$ é a função definida por $\varepsilon(h) = 0_F$, para todo $h \in E$. Como

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{0_F}{\| h \|_E} = 0_F,$$

segue da Proposição 3 que

$$f'(x) = 0_{L(E,F)},$$

para todo $x \in E$.

■

Exemplo 8. Sejam $[a_{ij}]_{2x2} \in M_2(\mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ a função definida por $f(x) = [a_{ij}]$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 8, temos que f é diferenciável e, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(x).h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Proposição 9. *Se $f : E \to F$ é uma transformação linear e contínua, então f é diferenciável e*

$$f'(x) = f,$$

para todo $x \in E$.

Demonstração. Se $f : E \to F$ é uma transformação linear e contínua, então, para quaisquer $x, h \in E$, temos

$$f.(x+h) = f.x + f.h = f.x + f.h + \varepsilon(h),$$

em que $\varepsilon : E \to F$ é a função definida por $\varepsilon(h) = 0_F$, para todo $h \in E$. Como

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\varepsilon(h)}{\| h \|_E} = \lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{0_F}{\| h \|_E} = 0_F,$$

segue da Proposição 3 que

$$f'(x) = f,$$

para todo $x \in E$.

■

Exemplo 9. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a transformação linear e contínua definida por $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 9, temos que f é diferenciável e, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(x).h = f(h) = ah,$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

4 DIFERENCIABILIDADE EM ESPAÇOS PRODUTOS

Neste capítulo, vamos considerar algumas situações em que E ou F é um espaço produto normado; mais precisamente, vamos assumir que $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ ou $F = F_1 \times \ldots \times F_m$, em que $\{E_1, \ldots, E_n\}$ e $\{F_1, \ldots, F_m\}$ são famílias de espaços normados. No caso em que $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, vamos considerar sobre E a norma produto, ou seja,

$$||x||_E = ||x_1||_{E_1} + \ldots + ||x_n||_{E_n},$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, vamos considerar a projeção $p_i : E \to E_i$ definida por

$$p_i(x) = x_i,$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, e a injeção $u_i : E_i \to E$ definida por

$$u_i(x) = (0_{E_1}, \ldots, 0_{E_{i-1}}, x, 0_{E_{i+1}}, \ldots, 0_{E_n}),$$

para todo $x \in E_i$. De maneira análoga, no caso em que $F = F_1 \times \ldots \times F_m$, vamos considerar sobre F a norma produto e, para cada $i = 1, \ldots, m$, vamos considerar a projeção $p_i : F \to F_i$ e a injeção $u_i : F_i \to F$.

Observação 3. *Notemos que*

$$p_i \circ u_i = I_{F_i}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$, *e*

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i \circ p_i) = I_F.$$

Observação 4. *Notemos que, para cada* $i = 1, \ldots, m$, *as funções* $p_i : F \to F_i$ *e* $u_i : F_i \to F$ *são transformações lineares e contínuas e, pela Proposição 9, são diferenciáveis e satisfazem*

$$p_i'(x) = p_i,$$

para todo $x \in F$, *e*

$$u_i'(x) = u_i,$$

para todo $x \in F_i$.

Proposição 10. *Sejam* $F = F_1 \times \ldots \times F_m$, $U \subset E$ *um conjunto aberto e* $f : U \to F$ *uma função. Então,* f *é diferenciável em* $a \in U$ *se, e somente se,* $f_i := p_i \circ f$ *é diferenciável em* a, *para cada* $i = 1, \ldots, m$. *Neste caso, temos*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{m} [u_i \circ f_i'(a)].$$

Demonstração. Se f é diferenciável em a, então, sendo p_i diferenciável, segue da Proposição 7 que $f_i := p_i \circ f$ é diferenciável em a e

$$f_i'(a) = (p_i \circ f)'(a) = p_i'(f(a)) \circ f'(a) = p_i \circ f'(a),$$

para cada $i = 1, \ldots, m$.

Reciprocamente, se $f_i := p_i \circ f$ é diferenciável em a, para cada $i = 1, \ldots, m$, então, sendo u_i diferenciável e

$$\begin{aligned} f &= I_F \circ f \\ &= \left[\sum_{i=1}^{m} (u_i \circ p_i) \right] \circ f \\ &= \sum_{i=1}^{m} [(u_i \circ p_i) \circ f] \\ &= \sum_{i=1}^{m} [u_i \circ (p_i \circ f)] \\ &= \sum_{i=1}^{m} (u_i \circ f_i), \end{aligned}$$

segue da Proposição 5 e da Proposição 7 que f é diferenciável em a

e

$$\begin{aligned} f'(a) &= \left[\sum_{i=1}^{m}(u_i \circ f_i)\right]'(a) \\ &= \sum_{i=1}^{m}(u_i \circ f_i)'(a) \\ &= \sum_{i=1}^{m}[u_i'(f_i(a)) \circ f_i'(a)] \\ &= \sum_{i=1}^{m}(u_i \circ f_i'(a)). \end{aligned}$$

■

Exemplo 10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a função definida por $f(x) = (sen(x), x^4, e^x)$. Do Exemplo 3 temos que, para cada $a \in \mathbb{R}$, as funções $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = sen(x)$, $f_2(x) = x^4$ e $f_3(x) = e^x$, respectivamente, são diferenciáveis em a. Então pela Proposição 10 temos que, para cada $a \in \mathbb{R}$, f é diferenciável em a e

$$\begin{aligned} f'(a).h &= [(u_1 \circ f_1'(a)) + (u_2 \circ f_2'(a)) + (u_3 \circ f_3'(a))].h \\ &= (u_1 \circ f_1'(a)).h + (u_2 \circ f_2'(a)).h + (u_3 \circ f_3'(a)).h \\ &= u_1.(f_1'(a).h) + u_2.(f_2'(a).h) + u_3.(f_3'(a).h) \\ &= u_1.((cos(a)).h) + u_2.(4a^3.h) + u_3.(e^a.h) \\ &= ((cos(a)).h, 0, 0) + (0, 4a^3.h, 0) + (0, 0, e^a.h) \\ &= ((cos(a)).h, 4a^3.h, e^a.h), \end{aligned}$$

para todo $h \in \mathbb{R}$.

Observação 5. *Notemos que, quando $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ e $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$, podemos considerar, para cada $i = 1, \ldots, n$, a função $\lambda_i : E_i \to E$ definida por*

$$\lambda_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

para todo $x \in E_i$.

Proposição 11. *Sejam $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, $U \subset E$ um conjunto aberto e $f : U \to F$ uma função. Se f é diferenciável em $a = (a_1, ..., a_n) \in U$, então $(f \circ \lambda_i)$ é diferenciável em a_i, para cada $i = 1, \ldots, n$, e*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{n} [(f \circ \lambda_i)'(a_i) \circ p_i].$$

Demonstração. Notemos que, para todo $x \in E_i$, tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda_i(x) &= (a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n) \\
&= (a_1, ..., a_{i-1}, a_i + x - a_1, a_{i+1}, ..., a_n) \\
&= (a_1, ..., a_n) + (0_{E_1}, ..., 0_{E_{i-1}}, x - a_i, 0_{E_{i+1}}, ..., 0_{E_n}) \\
&= a + u_i.(x - a_i).
\end{aligned}$$

Consideremos $\varphi : E_i \to E$ definida por $\varphi(x) = a$, para todo $x \in E_i$, $\chi : E_i \to E_i$ definida por $\chi(x) = -a_i$, para todo $x \in E_i$, e $\psi : E_i \to E_i$ definida por $\psi(x) = I_{Ei}(x) + \chi(x)$, para todo $x \in E_i$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\lambda_i(x) &= a + u_i.(x - a_i) \\
&= \varphi(x) + u_i.(\psi(x)) \\
&= \varphi(x) + (u_i \circ \psi)(x) \\
&= [\varphi + (u_i \circ \psi)](x).
\end{aligned}$$

Desta forma, λ_i é diferenciável e

$$\begin{aligned}
\lambda_i'(x) &= [\varphi + (u_i \circ \psi)]'(x) \\
&= \varphi'(x) + (u_i \circ \psi)'(x) \\
&= 0_E + u_i'(\psi(x)) \circ \psi'(x) \\
&= u_i \circ I_E \\
&= u_i,
\end{aligned}$$

para todo $x \in E_i$. Portanto, se f é diferenciável em a, então $(f \circ \lambda_i)$ é diferenciável em a_i e

$$(f \circ \lambda_i)'(a_i) = f'(\lambda_i(a_i)) \circ \lambda_i'(a_i) = f'(a) \circ u_i.$$

Lembrando que

$$I_E = \sum_{i=1}^{n} (u_i \circ p_i),$$

concluímos que

$$\begin{aligned}
f'(a) &= f'(a) \circ I_E \\
&= f'(a) \circ \left[\sum_{i=1}^{n} (u_i \circ p_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f'(a) \circ (u_i \circ p_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(f'(a) \circ u_i) \circ p_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(f \circ \lambda_i)'(a_i) \circ p_i].
\end{aligned}$$

■

Exemplo 11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Do Exemplo 2 temos que, para cada $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, a função f é diferenciável em a e, da Proposição 11, segue que as funções $(f \circ \lambda_1) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $(f \circ \lambda_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$(f \circ \lambda_1)(x) = f(\lambda_1(x)) = x^2 + a_2^2$$

e

$$(f \circ \lambda_2)(x) = f(\lambda_2(x)) = a_1^2 + x^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, são diferenciáveis em a_1 e a_2, respectivamente, e

$$\begin{aligned}
f'(a).h &= [(f \circ \lambda_1)'(a_1) \circ p_1].h + [(f \circ \lambda_2)'(a_2) \circ p_2].h \\
&= (f \circ \lambda_1)'(a_1).(p_1.h) + (f \circ \lambda_2)'(a_2).(p_2.h) \\
&= (f \circ \lambda_1)'(a_1).h_1 + (f \circ \lambda_2)'(a_2).h_2 \\
&= \frac{d(f \circ \lambda_1)}{dx}(a_1).h_1 + \frac{d(f \circ \lambda_2)}{dx}(a_2).h_2 \\
&= 2.a_1.h_1 + 2.a_2.h_2,
\end{aligned}$$

para todo $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Observação 6. *Notemos que, quando E é um espaço de Hilbert, $U \subset E$ é um conjunto aberto, $a \in U$ e $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em a, tem-se, pelo Teorema da Representação de Riesz, que existe $\nabla f(a) \in E$ tal que*

$$f'(a).h =< \nabla f(a), h >,$$

para todo $h \in E$.

Proposição 12. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $a \in U$. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em a, então*

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

e

$$f'(a).h = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i \right),$$

para todo $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em a, então existe $f'(a) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e, sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço de Hilbert, existe $\nabla f(a) = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f'(a).h =< \nabla f(a), h >= \sum_{i=1}^{n} (b_i.h_i),$$

para todo $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Então, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos

$$b_j =< \nabla f(a), e_j >= f'(a).e_j$$

e, da Proposição 11, segue que

$$\begin{aligned}
b_j &= f'(a).e_j \\
&= \left\{\sum_{i=1}^{n}[(f\circ\lambda_i)'(a_i)\circ p_i]\right\}.e_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{[(f\circ\lambda_i)'(a_i)\circ p_i].e_j\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(f\circ\lambda_i)'(a_i).(p_i.e_j)] \\
&= (f\circ\lambda_j)'(a_j).1 \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(f\circ\lambda_j)(a_j+t.1)-(f\circ\lambda_j)(a_j)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(\lambda_j(a_j+t))-f(\lambda_j(a_j))}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,\ldots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nabla f(a) &= (b_1,\ldots,b_n) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)
\end{aligned}$$

e

$$f'(a).h=\sum_{i=1}^{n}(b_i.h_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i\right).$$

■

REFERÊNCIAS

KESAVAN, S. *Nonlinear functional analysis, a first course*. 1. ed. New York: Springer/Hindustan Book Agency, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 20, 52, 53.

KREYSZIG, E. *Introductory to functional analysis*. New York: Wiley, 1989. Citado 1 vez na página 20.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 1. Citado 1 vez na página 20.

APÊNDICE A – DEFINIÇÕES E RESULTADOS COMPLEMENTARES

Definição 3. Seja E um espaço vetorial. Uma função $||.||_E : E \to \mathbb{R}$ é chamada norma se satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $||x||_E \geq 0$, para todo $x \in E$;
(ii) $||x||_E = 0$ se, e somente se, $x = 0_E$;
(iii) $||tx||_E = |t|||x||_E$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in E$;
(iv) $||x + y||_E \leq ||x||_E + ||y||_E$, para todos $x, y \in E$.
Neste caso, diz-se que o par $(E, ||.||_E)$ é um espaço normado.

Definição 4. Sejam $(E, ||.||_E)$ um espaço normado e (x_n) uma sequência em E. Diz-se que o ponto $x \in E$ é limite da sequência (x_n) quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - x||_E < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$. Neste caso, diz-se que (x_n) é uma sequência convergente.

Definição 5. Sejam $(E, ||.||_E)$ um espaço normado e (x_n) uma sequência em E. Diz-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||x_n - x_m||_E < \varepsilon,$$

para todo $n, m > n_0$.

Definição 6. Seja $(E, ||.||_E)$ um espaço normado. Diz-se que $(E, ||.||_E)$ é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em E é convergente.

Definição 7. Seja E um espaço vetorial. Um função $< .,. >_E$: $E \times E \to \mathbb{R}$ é chamada produto interno se satisfaz as seguintes propriedades:
(i) $< x, x >_E \geq 0$, para todo $x \in E$;
(ii) $< x, x >_E = 0$ se, e somente se, $x = 0_E$;
(iii) $< x_1 + x_2, y >_E = < x_1, y >_E + < x_2, y >_E$, para todos $x_1, x_2, y \in E$;

(iv) $< tx, y >_E = \ t < x, y >_E$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todos $x, y \in E$;
(v) $< x, y >_E = < y, x >_E$, para todos $x, y \in E$.
Neste caso, diz-se que o par $(E, < .,. >_E)$ é um espaço com produto interno.

Definição 8. Seja $(E, < .,. >_E)$ um espaço com produto interno e $||.||_E : E \to \mathbb{R}$ a norma definida por

$$||x||_E = \sqrt{< x, x >_E},$$

para todo $x \in E$. Diz-se que $(E, < .,. >_E)$ é um espaço de Hilbert se $(E, ||.||_E)$ é um espaço de Banach.

Definição 9. Sejam $(E, ||.||_E)$ e $(F, ||.||_F)$ espaços normados e $T : E \to F$ uma transformação linear. Diz-se que T é uma transformação linear limitada se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$||Tx||_F \leq k||x||_E,$$

para todo $x \in E$. No caso em que $F = \mathbb{R}$, diz-se que T é um funcional linear limitado.

Proposição 13. *Sejam $(E, ||.||_E)$ e $(F, ||.||_F)$ espaços normados e $T : E \to F$ uma transformação linear. São equivalentes as seguintes afirmações:*
(i) T é limitada;
(ii) T é uniformemente contínua;
(iii) T é contínua.

Demonstração. Consultar Kesavan (2004).

■

Proposição 14. *Sejam $(E, ||.||_E)$ e $(F, ||.||_F)$ espaços normados. Se $L(E, F)$ é o espaço vetorial das transformações lineares limitadas, então a função $||.||_{L(E,F)} : L(E, F) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$||T||_{L(E,F)} = \sup \left\{ \frac{||Tx||_F}{||x||_E} \ : \ x \in E \ , \ x \neq 0_E \right\},$$

para todo $T \in L(E, F)$, é uma norma.

Demonstração. Consultar Kesavan (2004).

■

Proposição 15. *Sejam* $(E, ||.||_E)$ *e* $(F, ||.||_F)$ *espaços normados. Se* $T : E \to F$ *é uma transformação linear limitada, então*

$$\begin{aligned} \sup\left\{ \frac{||Tx||_F}{||x||_E} \ : \ x \in E \ , \ x \neq 0_E \right\} &= \sup\left\{ ||Tx||_F \ : \ x \in E \ , \ ||x||_E < 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ ||Tx||_F \ : \ x \in E \ , \ ||x||_E = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Consultar Kesavan (2004).

■

Teorema 1 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Seja* $(E, < ., . >_E)$ *um espaço de Hilbert. Se* $f : E \to \mathbb{R}$ *é um funcional linear limitado, então existe um único* $u_0 \in E$ *tal que*

$$f(u) = < u, u_0 >_E,$$

para todo $u \in E$.

Demonstração. Consultar Kesavan (2004).

■