

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
LEONARDO DE LIZ BROCKVELD

**UM ESTUDO SOBRE CURVAS NO PLANO E NO
ESPAÇO**

Blumenau

2018

Leonardo de Liz Brockveld

UM ESTUDO SOBRE CURVAS NO PLANO E NO
ESPAÇO

Trabalho de Conclusão de Curso submetida ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: André Vanderlinde da Silva, Dr.

Blumenau

2018

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 20:22h do dia vinte e um de junho de dois mil e dezoito.

Leonardo de Liz Brockveld

Um Estudo Sobre Curvas no Plano e no Espaço : / Leonardo de Liz Brockveld; Orientador, André Vanderlinde da Silva, Dr.; , - Blumenau, 20:22, vinte e um de junho de dois mil e dezoito.

63 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática (MAT), Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. \LaTeX . 2. $\text{abn}\text{\LaTeX}2$. 3. editoração de texto. I. André Vanderlinde da Silva, Dr. II. III. Curso de Licenciatura em Matemática IV. Um Estudo Sobre Curvas no Plano e no Espaço

CDU 02:141:005.7

Leonardo de Liz Brockveld

UM ESTUDO SOBRE CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgada adequada para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática (MAT), Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, vinte e um de junho de dois mil e dezoito.

André Vanderlinde da Silva, Dr.
Coordenador do Curso de Licenciatura em
Matemática

Banca Examinadora:

André Vanderlinde da Silva, Dr.
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Jorge Luiz Deolindo Silva, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof^ª. Naiara Vergian de Paulo Costa, Dr^ª.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Venho a partir deste agradecer meus familiares por terem me apoiado durante todos esses anos da graduação e primordialmente durante esse semestre, onde precisei de todo incentivo para continuar.

Agradecer também a todos meus amigos, pessoal do "Garrão de Potro" e a "Quinta dos Amigos" que no momento em que pensei em desistir da faculdade, estiveram comigo a cada visita a minha cidade natal Lages. Mas em especial agradecer Douglas Simon, Guilherme Moraes e Renan Amorim.

Porém, esse trabalho só foi possível por conta da ajuda do meu professor orientador Dr. André Vanderlinde da Silva. Sou muito grato pela sua dedicação, existiu empenho de ambos para que pudéssemos trabalhar juntos.

*“Sempre ouço a mente, dou atenção ao coração. Quero alcançar o céu
sem tirar o pé do chão ”*

Cacife Clandestino

*“Estupidez trará mais autoconfiança do que o conhecimento e a bravura
juntas.”*

Adriano Ruseler

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar componentes de curvas regulares, ou seja, relacionar uma função a alguma característica da mesma - por exemplo, "quanto curva" uma curva é, é o que se denomina curvatura. Outra função que definimos para curvas no espaço é a torção. Que está relacionada com quanto a curva "deixa de estar" contida em um plano. Sempre que a curva, tanto no plano quanto no espaço, estiver parametrizada por comprimento de arco - norma do vetor tangente sempre unitário - as contas sobre essas funções serão mais simples, porém nem sempre é fácil ou possível expressá-las. O principal objetivo do trabalho é demonstrar dois teoremas: o primeiro é o Teorema Fundamental das Curvas Planas e o segundo é o Teorema Fundamental das Curvas no Espaço.

ABSTRACT

The following paper aims to study regular curves, in other words, to relate a function to any of its characteristics - for example, "how much a" curve can be curved. Another function a the space curves is the torsion, which say how much a curve "is not contained in a plane". every curve can be parameterized by an arc length - the tangential vector unitary norm - it makes the calculations simpler. However, it is not always easy or possible to get such a parameterization. The main objective of this study is to prove two theorems: the first is the Fundamental Theorem of Plane Curves and the second is Fundamental Theorem of Space Curves.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO . . .	19
2.1	COMPRIMENTO DE ARCO	24
3	CURVAS REGULARES PLANAS	29
3.1	PARAMETRIZAÇÃO POR COMPRIMENTO DE ARCO	31
3.2	CURVATURA	34
3.3	DIEDRO DE FRENET	38
3.4	TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS	42
4	CURVAS REGULARES NO ESPAÇO . . .	47
4.1	TORÇÃO E TRIEDO DE FRENET	51
4.2	TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO ESPAÇO	59
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	Bibliografia	63

1 INTRODUÇÃO

A geometria diferencial é uma união da geometria com o cálculo, com muitas aplicações em física, biologia, computação gráfica e em entre outras áreas. A Teoria da Relatividade Geral, Teoria Clássica de Campos e o Retículo Endoplasmático Rugoso, são exemplos onde a geometria diferencial está inclusa. O primeiro a estudar foi Pierre de Fermat quando descobriu como expressar algebricamente tangentes de curvas dadas. Após ele Newton a investigou a curvatura por meio do cálculo infinitesimal.

Este trabalho utilizou como referência base o livro do Ronaldo Freire Lima, "Introdução a Geometria Diferencial" (LIMA, 2016), e o do Manfredo Perdigão do Carmo "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies" (CARMO, 2014), além de outros que se encontram nas referências. O mesmo está dividido em três capítulos e apresenta o estudo de curvas tanto no plano como no espaço. No começo do segundo capítulo definimos parametrização de uma curva e apresentamos alguns exemplos que são usados até o final deste trabalho. Em seguida, apresentamos a demonstração da fórmula do comprimento de uma curva. Esta fórmula será útil na definição de curva parametrizada por comprimento de arco no capítulo seguinte.

No terceiro capítulo, dividimos as curvas planas do Capítulo 2 em curvas regulares e curvas não-regulares. Mostramos que uma curva não-regular pode ser uma curva regular em um certo intervalo. Após, introduzimos a definição de curvatura de uma curva. Neste trabalho calculamos a curvatura de diversas curvas, tanto no plano como no espaço. E concluímos o capítulo com a demonstração do teorema fundamental das curvas planas.

No quarto capítulo tratamos das curvas no espaço. Apresentamos um invariante a mais de uma curva, que chamaremos de torção. Apresentamos o Triedro de Frenet e alguns exemplos de como calcular a curvatura e a torção de curvas regulares. E, por fim, enunciamos o Teorema fundamental das curvas no espaço.

Em todos os capítulos, muitas figuras são apresentadas. A

intuição geométrica é importante para entender o comportamento dos escalares de uma curva. As figuras foram produzidas a partir do programa livre, Geogebra.

2 CURVAS NO PLANO E NO ESPAÇO

Este capítulo tem intuito de apresentar algumas curvas clássicas da Geometria Diferencial. Esses exemplos serão importantes no Capítulo 3, onde definimos curvas regulares. Neste mesmo capítulo, demonstramos a fórmula do comprimento de uma curva, geralmente visto em Cálculo 2, mais precisamente, no estudo de funções de uma variável real a valores em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, é denominada uma *curva parametrizada*. Dizemos que uma curva parametrizada é *suave* quando α é uma função suave¹. O *traço* de α é o conjunto-imagem $\alpha(I)$.

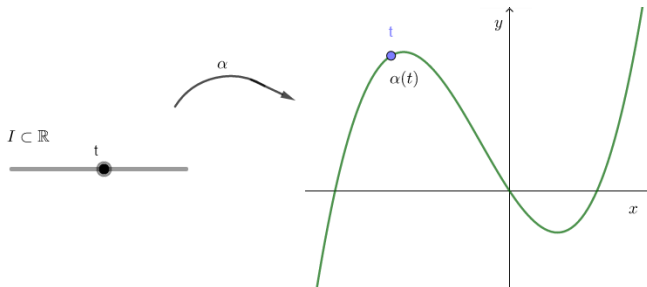


Figura 2.1 – Traço de uma curva parametrizada em \mathbb{R}^2 .

A seguir, apresentaremos alguns exemplos de curvas parametrizadas.

Exemplo 2.1 (Circunferência). A aplicação $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$t \mapsto \alpha(t) = r(\cos(t), \sin(t))$$

é uma parametrização para uma circunferência de raio $r > 0$ centrada na origem.

Exemplo 2.2 (Cicloide). Por definição, a *cicloide* é a curva descrita

¹ Isto é, quando todas as derivadas α' , α'' , α''' , \dots existem.

por um ponto fixo em uma circunferência de raio $r > 0$ que rola sem escorregar sobre uma reta.

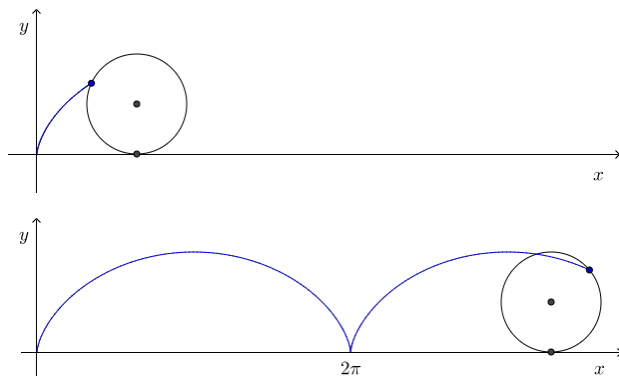


Figura 2.2 – Cicloide.

Uma parametrização para a cicloide é dada por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = r(t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t)). \end{aligned}$$

Exemplo 2.3 (Catenária). A catenária tem a forma de um fio flexível suspenso por dois pontos. É o caso, por exemplo, de cabos de alta tensão entre dois postes. Mesmo parecendo uma função quadrática, ela não é uma função polinomial. A catenária pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (t, \text{cosh}(t)) \end{aligned}$$

Na Figura 2.3, comparamos uma parábola e uma catenária. Note a diferença.

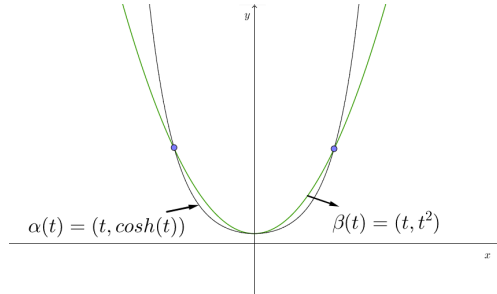


Figura 2.3 – Catenária e a parábola.

Exemplo 2.4 (Hélice circular). Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$. Uma parametrização da hélice circular é dada por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) \end{aligned}$$

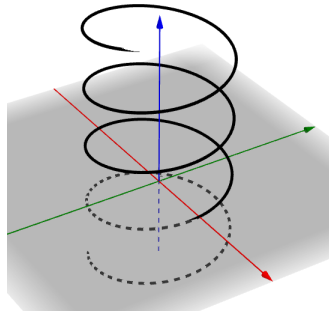


Figura 2.4 – Hélice circular.

De agora em diante, por simplicidade, as curvas parametrizadas serão denominadas apenas por curvas.

Definição 2.2 (Vetor Tangente). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, uma curva. O vetor tangente (também chamado de vetor velocidade) a $\alpha(t)$ no ponto $t_0 \in I$ é a derivada de α no ponto no t_0 , ou seja, $\alpha'(t_0)$.

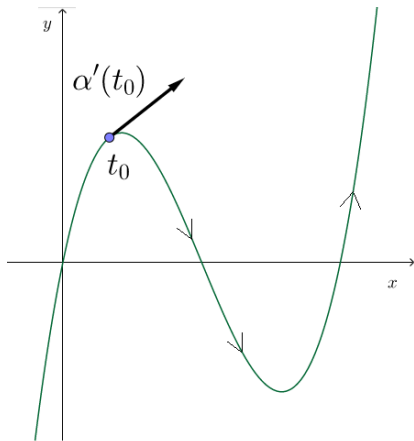


Figura 2.5 – Vetor tangente.

Note que o vetor tangente indica o sentido do movimento da curva e, a norma desse vetor, é um escalar que representa a velocidade com que a curva passa pelo ponto.

Definição 2.3 (Reta Tangente). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, uma curva. A reta tangente a α no ponto $t_0 \in I$ é aquela que contém $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$.

Exemplo 2.5 (Circunferência). Seja α a parametrização da circunferência dada no Exemplo 2.1. Temos que

$$\alpha'(t) = r(-\text{sen}(t), \cos(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in [0, 2\pi],$$

pois $-\text{sen}(t)$ e $\cos(t)$ não se anulam simultaneamente. De fato, quando um se anular, o outro será 1 ou -1 . Calculando $\|\alpha'(t)\|$, temos

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-r \text{sen}(t))^2 + (r \cos(t))^2} = r\sqrt{\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)} = r.$$

Observe que a norma de $\alpha(t)$ é constante, $\forall t \in [0, 2\pi]$. Usaremos este fato posteriormente quando falarmos de curvas parametrizadas por comprimento de arco.

Exemplo 2.6 (Cicloide). Considere a parametrização α da cicloide apresentada no Exemplo 2.2. Segue que

$$\alpha'(t) = r(1 - \cos(t), \text{sen}(t)).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{r^2((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t))} \\ &= r\sqrt{2(1 - \cos(t))} \\ &= 2r \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.7 (Catenária). Do Exemplo 2.3, temos que $\alpha'(t) = (1, \operatorname{senh}(t))$ e que, $\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2(t)} = \sqrt{\cosh^2(t)} = \cosh(t),$$

uma vez que $\cosh(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.8 (Hélice circular). Seja α parametrização da hélice circular visto no Exemplo 2.4, temos que $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen}(t), a \cos(t), b)$ e

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a \operatorname{sen}(t))^2 + (a \cos(t))^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

É possível observar que existem infinitas parametrizações para uma dada curva. Uma maneira de relacioná-las é através de uma mudança de parâmetros. Vejamos o exemplo, seja

$$\alpha(t) = (\cos(nt), \operatorname{sen}(nt))$$

uma parametrização da circunferência com $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Para cada n temos uma parametrização diferente, porém com o mesmo traço.

Definição 2.4 (Mudança de parâmetro e reparametrização). Uma *mudança de parâmetro* é uma bijeção $\phi : J \rightarrow I$ entre intervalos de \mathbb{R} , tal que ϕ e ϕ^{-1} são suaves. Para uma dada curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e uma mudança de parâmetro $\phi : J \rightarrow I$, a composição $\beta = \alpha \circ \phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita uma *reparametrização de α* .

Exemplo 2.9 (Reparametrização da circunferência). Seja

$$\begin{aligned}\alpha : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = r(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\end{aligned}$$

a parametrização para a circunferência de raio $r > 0$ introduzida no Exemplo 2.1. Considere a mudança de parâmetro

$$\begin{aligned}\phi : [0, 2\pi r] &\rightarrow [0, 2\pi] \\ s &\mapsto \phi(s) = \frac{s}{r}\end{aligned}$$

A curva $\beta = \alpha \circ \phi : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s)) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

Dizemos que β é uma reparametrização de α .

Lema 2.1. *Uma bijeção suave $\phi : J \rightarrow I$ é uma mudança de parâmetro se, e somente se, ϕ' nunca se anula.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (PICADO, 2006).

2.1 COMPRIMENTO DE ARCO

Pretendemos calcular o comprimento de uma curva entre dois pontos. Grosso modo, é a distância percorrida de um ponto até o outro andando sobre a curva, usaremos uma ideia bem intuitiva.

Definição 2.5 (Comprimento de arco). O comprimento de arco, é o supremo de todos os comprimentos de um caminho sobre a curva.

Seja α uma curva suave tal que

$$\begin{aligned}\alpha : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t)).\end{aligned}$$

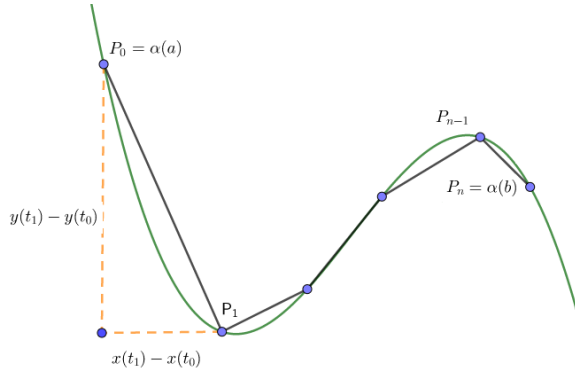


Figura 2.6 – Pontos sobre a curva.

Considere uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ do intervalo $[a, b]$ de modo que $\alpha(t_i) = P_i$ com $i = 0, 1, \dots, n$. Vamos denotar por L o comprimento de uma curva suave α de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$. De acordo com (GUIDORIZZI, 2001), note que

$$L \approx d(P_0, P_1) + d(P_1, P_2) + \dots + d(P_{n-1}, P_n),$$

e quantos mais pontos tivermos entre P_0 e P_n , mais próximos estaremos de L . Lembre que, se $P_{i-1} = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ e $P_i = (x(t_i), y(t_i))$, então

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\delta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\beta_i)(t_i - t_{i-1}),$$

com $\beta_i, \delta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $i = 1, \dots, n$. Se $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, temos:

$$d(P_{i-1}, P_i) = \sqrt{(y'(\beta_i))^2 + (x'(\delta_i))^2} \Delta t_i.$$

E, portanto,

$$L = \lim_{\sup \Delta t_i \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{(y'(\beta_i))^2 + (x'(\delta_i))^2} \Delta t_i \right)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \quad (2.1)$$

Então podemos definir o *comprimento de arco*, de uma curva α suave, entre os pontos a e t como $L(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds$, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.10. No Exemplo 2.5, verificamos que $\|\alpha'(t)\| = r$ com $\alpha(t) = r(\cos(t), \sin(t))$. Segue da geometria elementar que o comprimento de uma circunferência é de $2\pi r$. Veremos que esse resultado é válido utilizando a Fórmula (2.1). De fato,

$$\int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r - r0 = 2\pi r.$$

Exemplo 2.11 (Cicloide). Seja α a parametrização da cicloide tal como no Exemplo 2.2. Um fato interessante é que o comprimento da cicloide, quando a circunferência completa uma volta, corresponde a 8 vezes o raio da própria circunferência.

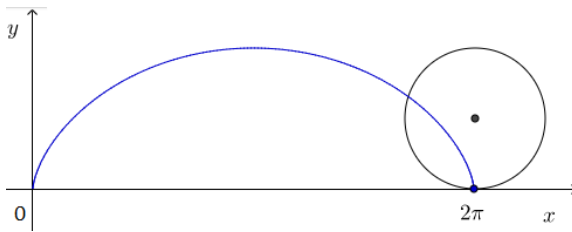


Figura 2.7 – Cicloide.

De fato, vimos no Exemplo 2.6, como $\alpha'(t) = r(1 - \cos(t), \sin(t))$, e que

$$\|\alpha'(t)\| = 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Então, de (2.1), temos que

$$\int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2r \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4r \cos(\pi) + 4r \cos(0) = 8r.$$

Exemplo 2.12 (Catenária). Seja α a parametrização da catenária tal como no Exemplo 2.3. Calcularemos o comprimento da catenária no intervalo $[0, s]$.

$$\begin{aligned} \int_0^s \sqrt{1 + \sinh^2(t)} dt &= \int_0^s \sqrt{\cosh^2(t)} dt \\ &= \sinh(t) \Big|_0^s = \sinh(s) - \sinh(0) \\ &= \sinh(s). \end{aligned}$$

Exemplo 2.13 (Espiral logarítmica plana). A espiral logarítmica foi estudada por Bernoulli e por ele chamada de "espiral maravilhosa" por conta do seu comportamento e da sua expressão algébrica. Uma parametrização é dada por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t)). \end{aligned}$$

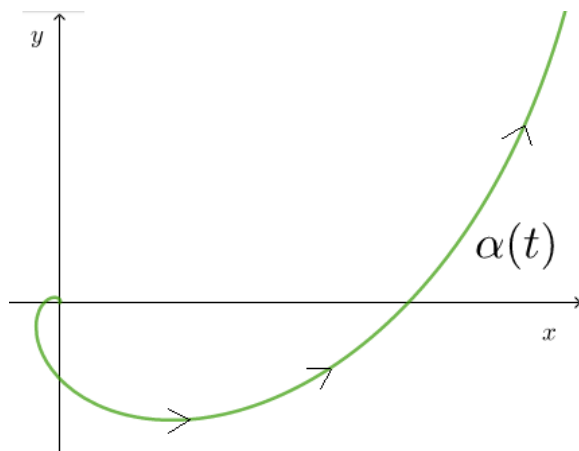


Figura 2.8 – Espiral

Vamos calcular o comprimento de arco desta curva. Sejam

$$\alpha'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)))$$

e

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{2e^{2t}(-\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t) + \cos(t)\sin(t))} \\ &= \sqrt{2e^{2t}} \\ &= \sqrt{2}e^t. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento dessa curva, de um ponto inicial 0 até um ponto qualquer $s \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$\int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^s \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}(e^s - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2.14 (Hélice circular). Pelo Exemplo 2.8, o comprimento da Hélice circular do ponto inicial 0 até um $s \in \mathbb{R}$ é dado por:

$$\int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^s \sqrt{a^2 + b^2} dt = s\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Teorema 2.2. *O comprimento de uma curva é invariante por reparametrizações.*

A demonstração pode ser encontrada em (LIMA, 2016).

Exemplo 2.15. Nos Exemplos 2.1 e 2.9, apresentamos duas parametrizações diferentes para uma circunferência de raio r centrada na origem. Pelo Teorema 2.2, o comprimento deve ser invariante por reparametrização. De fato, vimos no Exemplo 2.10 que o comprimento da circunferência é $2\pi r$ utilizando a parametrização $\alpha(t) = r(\cos(t), \sin(t))$. Agora usando a parametrização apresentada no Exemplo 2.9, vamos recalculer o comprimento da circunferência. Lembre que

$$\begin{aligned} \beta : [0, 2\pi r] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto \beta(s) = r \left(\cos\left(\frac{s}{r}\right), \sin\left(\frac{s}{r}\right) \right). \end{aligned}$$

Note que ao invés de calcularmos no intervalo de $[0, 2\pi]$ como feito no Exemplo 2.10, devemos alterar esse intervalo para $[0, 2\pi r]$, por conta da reparametrização. Note que a curva β necessita deste intervalo para completar uma volta completa. E $\|\beta'(s)\| = 1$ Portanto,

$$L(s) = \int_0^{2\pi r} \|\beta'(s)\| ds = \int_0^{2\pi r} 1 ds = 2\pi r$$

3 CURVAS REGULARES PLANAS

Nesse capítulo, tratamos de curvas em \mathbb{R}^2 . Interessamos-nos falar sobre curvas que admitem uma única reta tangente em cada um de seus pontos. Isso permite estudar propriedades geométricas de tais curvas.

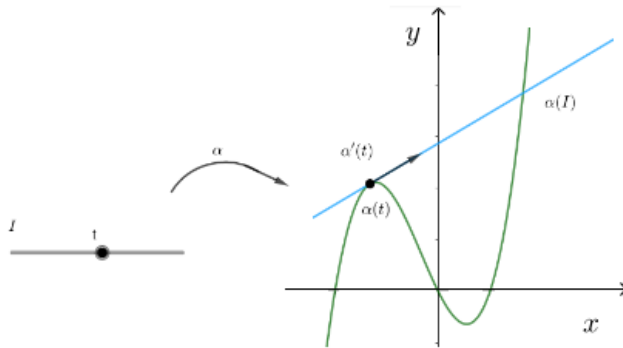


Figura 3.1 – Reta tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$.

Note que o vetor tangente, de uma curva suave $\alpha(t)$, denominado por $\alpha'(t)$ dá a direção da reta tangente.

Definição 3.1 (Curva Regular). Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Dizemos que α é *regular* quando $\alpha'(t)$ é não nulo, $\forall t \in I$

Geometricamente, as curvas que possuem *bicos*, não são regulares, mas nem todas curvas não regulares tem bicos, ou seja, em algum o ponto vetor tangente é nulo. Abaixo, temos duas curvas, uma regular e a outra não regular.

Exemplo 3.1. Uma parametrização para a curva na Figura 3.2 abaixo é $\alpha(t) = (t, t^3 - 6t^2 + 8t)$ com $t \in \mathbb{R}$. Calculando $\alpha'(t)$ temos

$$\alpha'(t) = (1, 3t^2 - 12t + 8).$$

Como $\alpha'(t) \neq (0, 0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, pela Definição 3.1 $\alpha(t)$ é regular.

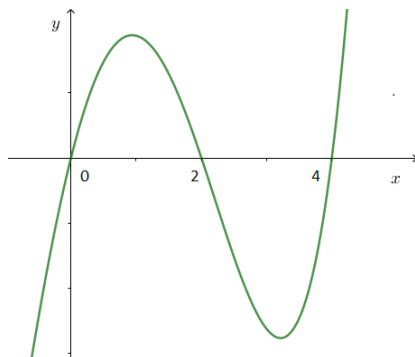


Figura 3.2 – Curva regular.

Exemplo 3.2. Uma parametrização da curva da Figura 3.3 é $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ $t \in \mathbb{R}$. Como queremos saber se $\alpha(t)$ é regular ou não, precisamos calcular $\alpha'(t)$. Note que no ponto $(0,0)$ o vetor tangente se anula, logo $\alpha(t)$ não é regular.

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$$

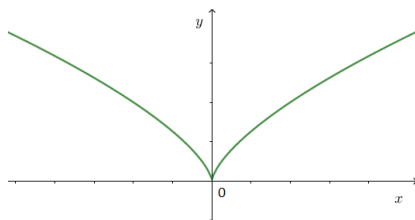


Figura 3.3 – Curva não regular.

Exemplo 3.3 (Parábola). Seja $\alpha(t) = (t, t^2)$ uma parametrização da parábola $x^2 - y = 0$. Vejamos que a parábola com essa parametrização é uma curva regular. De fato, como $\alpha'(t) = (1, 2t)$, temos que $\alpha'(t)$ é não nulo, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Note que toda curva parametrizada da forma $\alpha(t) = (t, f(t))$ com f diferenciável é regular. No Capítulo 2, estudamos algumas curvas. Os Exemplos 2.1, 2.3 e 2.4 são curvas regulares, enquanto que a curva do Exemplo 2.2 não é regular, conforme podemos visualizar no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.4 (Cicloide). Do Exemplo 2.2, temos que $\alpha(t) = r(t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$ e, conseqüentemente, $\alpha'(t) = r(1 - \text{cos}(t), \text{sen}(t))$. Logo,

$$\alpha'(0) = r(1 - \text{cos}(0), \text{sen}(0)) = (0, 0).$$

Por isso, a curva cicloide não é uma curva regular. Note que ela é regular em $\{t \in \mathbb{R} | t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Exemplo 3.5 (Parametrização não regular da Parábola). Considere $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $t \mapsto \tilde{\alpha}(t) = (t^3, t^6)$. Note que o traço de $\tilde{\alpha}$ coincide com a curva do Exemplo 3.3. Calculando $\tilde{\alpha}'(t) = (3t^2, 6t^5)$ vemos que, no ponto $t = 0$, o vetor tangente se anula, logo $\tilde{\alpha}$ não é regular.

3.1 PARAMETRIZAÇÃO POR COMPRIMENTO DE ARCO

A partir desta seção, consideremos apenas curvas regulares.

Definição 3.2 (Curvas parametrizadas por comprimento de arco). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva. Dizemos que α é *parametrizada por comprimento de arco* se a norma do vetor velocidade (tangente) é unitária em todos os pontos pertencentes a curva, ou seja, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.

Exemplo 3.6. Agora iremos encontrar uma parametrização por comprimento de arco da circunferência. Vamos usar os Exemplos 2.1 e 2.5. Considere a curva $\alpha(t) = r(\text{cos}(t), \text{sen}(t))$, com $t \in \mathbb{R}$ temos que $\|\alpha(t)\| = r$ e por conseguinte

$$L(s) = \int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^s r dt = rs.$$

Defina $\phi(s) = L^{-1}(s) = \frac{s}{r}$. A função ϕ será a mudança de parâmetro necessária para obter uma parametrização por comprimento de arco, isto é, para obtermos que o vetor velocidade com norma igual a 1. Uma ideia para isso é considerar a composição de α e ϕ . Fazendo

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s)) = r \left(\text{sen} \left(\frac{s}{r} \right), \text{cos} \left(\frac{s}{r} \right) \right).$$

Note que $\|\beta'(s)\| = r \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 \left(\text{sen}^2 \left(\frac{s}{r}\right) + \text{cos}^2 \left(\frac{s}{r}\right)\right)} = 1, \forall s$ e, portanto, β é parametrizada por comprimento de arco.

O teorema abaixo nos garante que sempre existe uma função ϕ tal como no exemplo anterior. Basta que a curva seja regular. No entanto, não podemos garantir que seja possível expressá-la explicitamente.

Teorema 3.1 (Reparametrização por comprimento de arco). *Toda curva regular admite uma reparametrização por comprimento de arco.*

Demonstração. Vamos determinar uma função ϕ e definir a composição $\beta = \alpha \circ \phi$ tal que β é a reparametrização por comprimento de arco da curva α . Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $t_0 \in I$ e lembre que a função comprimento $L(t)$ é dada por

$$L(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau. \quad (3.1)$$

A Figura 3.4 mostra o gráfico de duas funções, $\alpha(t)$ e $L(t)$, em que $L(t)$ é a função comprimento da curva $\alpha(t)$. Podemos notar que a $L(t)$ é crescente e, portanto, admite inversa.

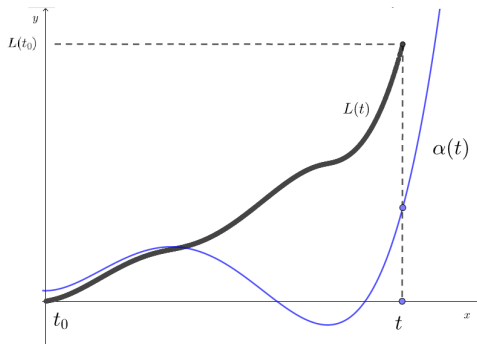


Figura 3.4 – Função comprimento de arco.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos derivar ambos os lados de (3.1) e concluir que $L'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0 \forall t \in I$ pois α é regular. Como assumimos que α é suave, segue que L é também suave. Logo, L é suave, crescente e injetora. Considere $J = L(I)$

e defina $\phi := L^{-1} : J \rightarrow I$. Pelo Lema 2.1, segue que ϕ é também suave. Como $L(\phi(s)) = s$, $\forall s \in J$, derivando em relação a s e utilizando a regra da cadeia, encontramos $L'(\phi(s))\phi'(s) = 1$. Isolando $\phi'(s)$ e trocando $L'(\phi(s)) = \|\alpha'(\phi(s))\|$, temos que $\phi'(s) = \frac{1}{\|\alpha'(\phi(s))\|}$. Portanto, basta definir $\beta(s) = \alpha \circ \phi(s)$ e teremos que β está parametrizada por comprimento de arco. De fato, derivando e calculando a norma, temos

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\phi(s))\| \cdot |\phi'(s)| = \|\alpha'(\phi(s))\| \frac{1}{\|\alpha'(\phi(s))\|} = 1.$$

■

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3.7 (Catenária). Seja $\alpha(t) = (t, \cosh(t))$ a parametrização da catenária apresentada no Exemplo 2.3. Vimos no Exemplo 2.7 que

$$\|\alpha'(t)\| = \cosh(t)$$

e portanto,

$$L(s) = \int_0^s \cosh(t) dt = \sinh(s).$$

Se $\phi(s)$ inversa de L , e como $L(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$

$$s = \frac{e^{\phi(s)} - e^{-\phi(s)}}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= e^{2\phi(s)} - 2se^{\phi(s)} + 1 \\ e^{\phi(s)} &= \frac{2s \pm \sqrt{(-2s)^2 + 4}}{2} \\ e^{\phi(s)} &= s + \sqrt{s^2 + 1} \\ \phi(s) &= \ln(s + \sqrt{s^2 + 1}). \end{aligned}$$

Portanto, uma reparametrização por comprimento de arco da curva $\alpha(t)$ é dada por $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ tal que

$$\beta(s) = (\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}), \cosh(\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}))).$$

Exemplo 3.8 (Espiral logarítmica). Seja $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ a parametrização da espiral logarítmica vista no Exemplo 2.13. Lembre que o comprimento da curva de 0 até s é

$$\int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \sqrt{2}(e^s - 1).$$

Fazendo $\phi(s) = L^{-1}(s)$, segue que:

$$\phi(s) = \ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right),$$

e, portando, uma parametrização por comprimento de arco para a espiral logarítmica é $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ dada por

$$\beta(s) = \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$

3.2 CURVATURA

Um conceito de suma importância para o estudo de geometria diferencial é a curvatura. Grosso modo, podemos dizer que a curvatura de uma curva diferencial é a velocidade em que uma curva "deixa de ser uma reta" ou como professor o Ronaldo Freire de Lima traz no seu livro "Introdução à Geometria Diferencial":

Intuitivamente, a curvatura de uma curva diferenciável, num determinado ponto, é uma medida da variação de direção da reta tangente numa vizinhança desse ponto, isto é, quanto maior for essa variação de direção, maior será, em valor absoluto, a curvatura. (LIMA, 2016)

Nosso objetivo, nessa seção, é procurar um valor, isto é um número real, que represente essa curvatura para cada ponto. Relembremos que estamos considerando apenas curvas regulares. Pelos exemplos apresentados a seguir, veremos que $\|\beta''(s)\|$ com β parametrizada por comprimento de arco, é um bom candidato para representar a curvatura de uma curva.

Exemplo 3.9 (Reta). É natural esperar que a curvatura de uma reta seja nula. Vamos apresentar uma parametrização da reta. Seja v

um vetor unitário em \mathbb{R}^2 e p um ponto do plano. Seja β uma curva parametrizada por comprimento de arco dada por $\beta(s) = sv + p$. Calculando, temos $\beta'(s) = v$ e $\beta''(s) = 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.10 (Espiral logarítmica). A parametrização por comprimento de arco da espiral encontrada no Exemplo 3.8 é

$$\beta(s) = \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right), \sin \left(\ln \left(\frac{s + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right) \right).$$

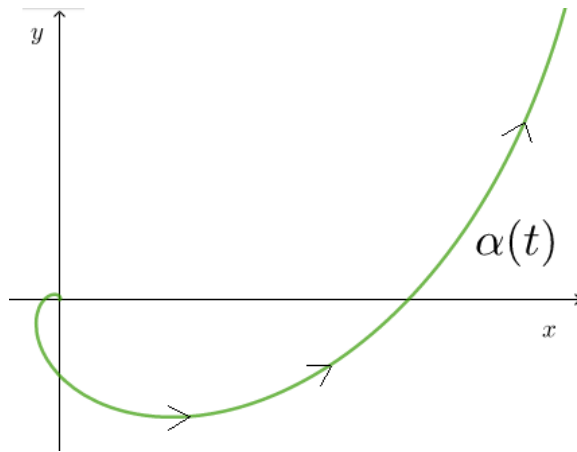


Figura 3.5 – Espiral

Note que, para s muito grande, no intervalo $]s - \epsilon, s + \epsilon[$, "a curva está perto de ser uma reta". Calculando

$$\|\beta''(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{4e^s}$$

vemos que $\|\beta''(s)\|$ é próximo de zero, quando s é grande.

Definição 3.3. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. A *curvatura* $k(s)$ de α em s é $k(s) = \|\alpha''(s)\|$, $\forall t \in I$.

Exemplo 3.11 (Curvatura da circunferência). Pelo Exemplo 3.6, uma parametrização por comprimento de arco da circunferência é

$\alpha(s) = r(\text{sen}(s/r), \text{cos}(s/r))$. Vamos calcular $k(s) = \|\alpha''(s)\|$:

$$\alpha''(s) = \frac{-1}{r}(\text{sen}(s/r), \text{cos}(s/r)).$$

Portanto,

$$\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{r} \sqrt{\text{sen}^2(s/r) + \text{cos}^2(s/r)} = \frac{1}{r}$$

A curvatura da circunferência independe de s , ou seja, ela é constante, para todo $s \in [0, 2\pi r]$. É também inversamente proporcional ao raio, isto é, quanto maior o raio, menor a curvatura da circunferência. Se pensarmos em um raio muito grande, a curvatura está próxima de zero. Em uma pequena vizinhança da circunferência, a circunferência quase chega a ser uma reta.

Nas figuras abaixo, temos duas curvas mostrando a diferença entre curvatura constante e não constante.

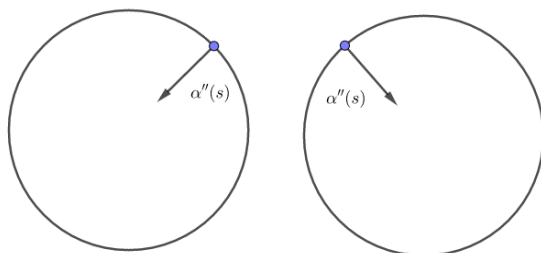


Figura 3.6 – Curvatura constante.



Figura 3.7 – Curvatura não constante.

Exemplo 3.12 (Catenária). Do Exemplo 3.7, temos uma parametrização por comprimento de arco da catenária dada por

$$\beta(s) = (\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}), \cosh(\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}))).$$

Vamos calcular $\|\beta''(s)\|$. Como

$$\begin{aligned}\beta(s) &= \left(\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}), \frac{s\sqrt{s^2 + 1} + s^2 + 1}{s + \sqrt{s^2 + 1}} \right) \\ \beta'(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}, \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right)\end{aligned}$$

segue que

$$\beta''(s) = \left(-\frac{s}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(s^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Se $k(s) = \|\beta''(s)\|$, então

$$\begin{aligned}\|\beta''(s)\| &= \sqrt{\frac{s^2}{(s^2 + 1)^3} + \frac{1}{(s^2 + 1)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{s^2 + 1}{(s^2 + 1)^3}} = \sqrt{\frac{1}{(s^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

Como já comentado, nem sempre podemos expressar explicitamente uma reparametrização por comprimento de arco. A proposição abaixo traz uma forma de calcular a curvatura, para qualquer curva regular.

Proposição 3.2. *Seja $\alpha(t) := (x(t), y(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. Então, para cada $t \in I$,*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^3}}. \quad (3.2)$$

A demonstração pode ser encontrada em (ALENCAR, 2007).

Exemplo 3.13 (Parábola). Seja a curva $\alpha(t) = (t, t^2)$ utilizada no Exemplo 3.3 onde mostramos que α é regular e $\alpha'(t) = (1, 2t)$. Logo, $\alpha''(t) = (0, 2)$ calculando então a curvatura

$$k(t) = \frac{2}{\sqrt{(1 + 4t^2)^3}}.$$

3.3 DIEDRO DE FRENET

Um fato importante das curvas parametrizadas por comprimento de arco é que sempre, não importando a curva, α' é ortogonal a α'' . Para provar isso, usaremos a única restrição para que uma curva esteja parametrizada por comprimento de arco.

Lema 3.3. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Então α' e α'' são ortogonais.*

Demonstração. Como α está parametrizada por comprimento de arco, temos que $\|\alpha'(t)\| = 1$. Logo, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 1$. Derivando em relação a t , temos que

$$\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$. Produto interno entre dois vetores igual zero, significa que eles são perpendiculares. Podemos notar isso na imagem abaixo. ■

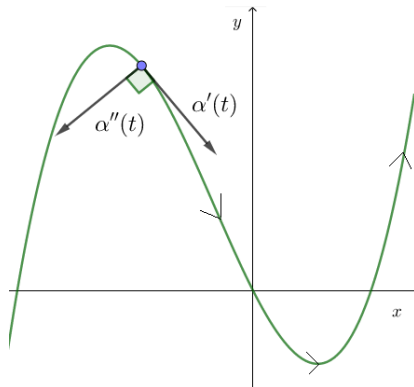


Figura 3.8 – $\alpha'(t)$ ortogonal a $\alpha''(t)$.

Seja J o operador linear ortogonal $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Note que J realiza uma rotação em 90° no sentido anti-horário. É possível verificar que

$$\langle Jv, w \rangle = -\langle v, Jw \rangle, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^2. \quad (3.3)$$

Definição 3.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização por comprimento de arco. Dado $s \in I$, indicamos por $T(s) = \alpha'(s)$ o *vetor tangente* de α em s e por $N(s) = JT(s)$, o *vetor normal* em s . $T(s), N(s)$ é chamado de *Diedro de Frenet*.

Observe que T e N são unitários, pois α esta parametrizada por comprimento de arco. Além disso, como

$$\begin{aligned} \langle N(s), T'(s) \rangle &= \langle JT(s), T'(s) \rangle, \\ \langle T(s), N'(s) \rangle &= \langle T(s), JT'(s) \rangle, \end{aligned}$$

a Equação (3.3) implica que

$$\begin{aligned} \langle N(s), T'(s) \rangle &= \pm \|T'(s)\| = \pm k(s), \\ \langle T(s), N'(s) \rangle &= \mp \|T'(s)\| = \mp k(s). \end{aligned}$$

caso simples para visualizar que $\langle N(s), T'(s) \rangle = \pm \|T'(s)\| = \pm k(s)$, sendo $\alpha'(s) = T(s)$, o vetor $T(s)$ é ortogonal ao vetor $T'(s)$, mas $N(s)$ também é perpendicular a $T(s)$, portanto são paralelos. Vamos definir a curvatura com sinal, isto é, k_σ tal que

$$T'(s) = k_\sigma(s)N(s), \quad \forall s \in I. \quad (3.4)$$

Disso segue que $N'(s) = -k_\sigma(s)T(s)$. As equações

$$\begin{aligned} T' &= k_\sigma N \\ N' &= -k_\sigma T. \end{aligned}$$

São chamadas de *Fórmulas de Frenet*. Veja que de (3.4) segue que

$$k_\sigma(s) = \pm k(s), \quad \forall s \in I \quad (3.5)$$

Não podemos dizer que os vetores T' e N sempre têm o mesmo sentido, isso vai depender do valor de k_σ , se $k_\sigma(s)$ for maior que zero $N(s)$ e α'' têm o mesmo sentidos, e opostos quando $k_\sigma(s)$ for menor que zero.

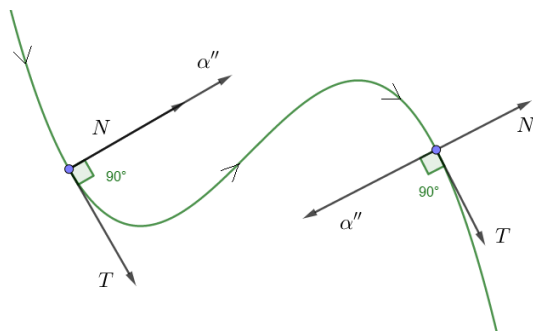


Figura 3.9 – Estudo do sinal de k_σ .

A proposição a seguir apresenta uma forma de calcular k_σ que será útil na próxima seção.

Proposição 3.4. *Seja $v = (0, 1)$ e $\theta(s)$ o ângulo marcado no sentido positivo entre o vetor $u = (1, 0)$ e o vetor tangente $T(s)$. Então, $k_\sigma(s) = \theta'(s)$.*

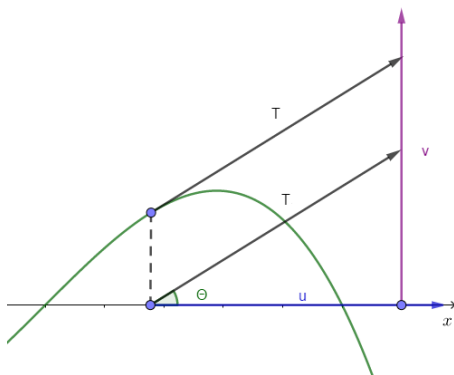


Figura 3.10 – Vetor tangente.

Demonstração. Utilizando as relações trigonométricas em um triângulo retângulo, podemos escrever $T(s)$ da forma

$$T(s) = \cos \theta(s)u + \operatorname{sen} \theta(s)v$$

e

$$T'(s) = \theta'(s)(-\operatorname{sen} \theta(s)u + \cos \theta(s)v).$$

Logo $\langle T'(s), u \rangle = -\operatorname{sen} \theta(s)\theta'(s)$. Por outro lado, pela definição de curvatura com sinal, $\langle T'(s), u \rangle = \langle k_\sigma(s)N(s), u \rangle$. Como o ângulo entre $N(s)$ e u é igual a $\frac{\pi}{2} + \theta(s)$, por conta que $N = JT$ e J realiza uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, temos que

$$\langle T'(s), u \rangle = k_\sigma(s) \cos \left(\theta(s) + \frac{\pi}{2} \right) = -k_\sigma(s) \operatorname{sen} \theta(s)$$

Se $\operatorname{sen} \theta(s) = 0$, basta repetir a demonstração calculando $\langle T'(s), v \rangle$. Concluimos, $k_\sigma(s) = \theta'(s)$. ■

Quanto ao sinal de k , quando $k(s) > 0$, implica que $\theta'(s) > 0$, ou seja θ é crescente em um intervalo em torno de s e $\alpha'(s)$ varia no sentido anti-horário. De mesma forma, para quando $k(s) < 0$, o vetor tangente varia no sentido oposto. Vamos calcular a curvatura de uma circunferência, utilizando a Proposição 3.4.

Exemplo 3.14 (Curvatura da circunferência). Seja

$$\alpha(s) = r(\cos(s/r), \operatorname{sen}(s/r))$$

a parametrização encontrada no Exemplo 3.6. Nessa segunda forma de encontrar a curvatura, precisamos que o vetor tangente esteja na forma $T(s) = \cos \theta(s)u + \operatorname{sen} \theta(s)v$. Como

$$\begin{aligned} T(s) = \alpha'(s) &= \left(-\operatorname{sen} \left(\frac{s}{r} \right), \cos \left(\frac{s}{r} \right) \right) \\ &= \left(\cos \left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{r} + \frac{\pi}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Podemos considerar $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ e $\theta(s) = \frac{s}{r} + \frac{\pi}{2}$. Como $k(s) = \theta'(s)$, derivando $\theta(s)$ temos

$$\theta'(s) = \frac{1}{r}.$$

3.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS PLANAS

Em poucas palavras, o Teorema Fundamental das Curvas Planas diz que toda função real pode ser vista como a curvatura de alguma curva plana e se duas curvas têm a mesma curvatura, elas são iguais a não ser por um movimento rígido. Antes de demonstrar essa afirmação, precisamos definir algumas propriedades, como a translação e a rotação.

A translação é um movimento que certo objeto faz, de forma paralela e em linha reta, de um lugar para outro.

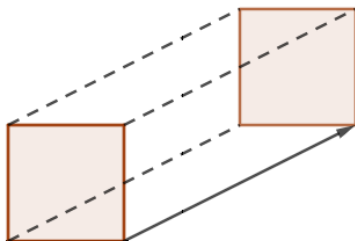


Figura 3.11 – Translação de um quadrado.

Já a rotação, acontece a partir de um giro do objeto em um certo ângulo. A matriz associada a uma rotação por um ângulo θ é

$$R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

A Imagem 3.12 mostra a rotação de um quadrado em $\frac{\pi}{4}$ rad a partir do seu centro.

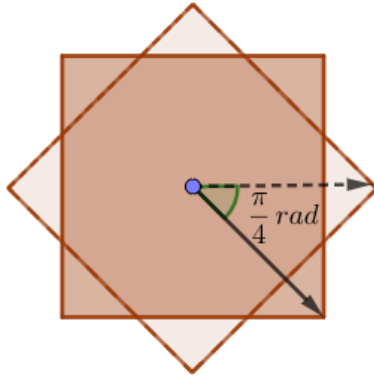


Figura 3.12 – Rotação de um quadrado em um ângulo de $\frac{\pi}{4}$.

Usando translação e rotação, podemos definir os movimentos rígidos.

Definição 3.5 (Movimento rígido). Um movimento rígido é uma aplicação $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $M = T_a \circ R_\theta$, que desloca a curva sem alterar suas propriedades. Tal deslocamento, é uma composição de uma translação T_a definida pela direção do vetor a , isto é, $T_a(v) = v + a$, com uma rotação R_θ de centro na origem no sentido anti-horário pelo ângulo θ , isto é,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

Agora temos condições de enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental de Curvas no Plano.

Teorema 3.5 (Teorema Fundamental das Curvas Planas). *Sejam I um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, cuja função curvatura k coincide com f . Além disso, para toda curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, que cumpre $k_\beta = k$, existe um movimento rígido $M_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\alpha = M_\theta \circ \beta$.*

Demonstração. Para provar a primeira parte do teorema, iremos encontrar uma curva α , a partir de uma função $\theta(s_0)$, com $s_0 \in I$ fixo, onde a curvatura de $\alpha(s)$ coincide com $\theta'(s)$. Pela Proposição 3.4, temos

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s f(u)du.$$

Assim, podemos definir α por

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t)dt, \int_{s_0}^s \sen \theta(t)dt \right).$$

Note que a curva $\alpha(s)$ é parametrizada por comprimento de arco, pois $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sen \theta(s))$ e $\|\alpha'(s)\| = \sqrt{\cos^2 \theta(s) + \sen^2 \theta(s)} = 1$, respeitando a tese. Como $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), \sen \theta(s))$, este vetor tangente faz um ângulo $\theta(s)$ com o vetor $u = (1, 0)$ como a Proposição 3.4 vista anteriormente. Portanto a curvatura de α é dada por $\theta'(s) = f(s)$.

Na segunda parte da demonstração, queremos provar que se duas curvas têm a mesma curvatura, então elas são iguais a menos de um movimento rígido. Sejam α_1 uma curva parametrizada por comprimento de arco com curvatura f e $\theta_1(s)$ o ângulo entre o vetor $u = (0, 1)$ e $\alpha'_1(s)$. Logo $\alpha'_1(s) = (\cos \theta_1(s), \sen \theta_1(s))$ e

$$\alpha_1(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \theta_1(t)dt, \int_{s_0}^s \sen \theta_1(t)dt \right) + \alpha_1(s_0).$$

Como já vimos na Proposição 3.4, temos $\theta'_1(s) = f(s)$ e

$$\theta_1(s) = \int_{s_0}^s f(u)du + \theta_1(s_0) = \theta(s) + \theta_1(s_0).$$

Substituindo $\theta_1(s) = \theta(s) + \theta_1(s_0)$ em α_1 e indicando $\alpha_1(s_0)$ por a

e $\theta_1(s_0)$ por θ_0 , obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= T_a \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t) + \theta_0) dt, \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(t) + \theta_0) dt \right) \\ &= T_a \left(\int_{s_0}^s (\cos(\theta(t)) \cos(\theta_0) - \text{sen}(\theta(t)) \text{sen}(\theta_0)), \right. \\ &\quad \left. \int_{s_0}^s (\text{sen}(\theta(t)) \cos(\theta_0) + \cos(\theta(t)) \text{sen}(\theta_0)) \right) \\ &= T_a \left(\cos(\theta_0) \int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) - \text{sen}(\theta_0) \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(t)), \right. \\ &\quad \left. \cos(\theta_0) \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(t)) + \text{sen}(\theta_0) \int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) \right). \end{aligned}$$

Portanto

$$\alpha_1(s) = T_a \circ R_{\theta_0} \left(\int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) dt, \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(t)) dt \right) = T_a \circ R_{\theta_0}(\alpha(s))$$

■

Exemplo 3.15. Seja $f(s) = s$ uma função real. Pelo Teorema acima, existe uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco cuja curvatura coincide com f . De acordo com a demonstração do Teorema 3.5, basta considerar

$$\theta(s) = \int_0^s u du = \frac{s^2}{2}.$$

e $\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos(\theta(t)) dt, \int_0^s \text{sen}(\theta(t)) dt \right)$, ou seja,

$$\alpha(s) = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{t^2}{2}\right) dt, \int_0^s \text{sen}\left(\frac{t^2}{2}\right) dt \right).$$

Porém, não podemos expressar essas integrais de forma explícita com funções elementares. Mas, sabemos que α está parametrizada por comprimento de arco. De fato, derivando $\alpha(s)$ pelo teorema fundamental do cálculo temos $\alpha'(s) = \left(\cos\left(\frac{s^2}{2}\right), \text{sen}\left(\frac{s^2}{2}\right) \right)$, ou seja norma sempre igual a 1.

4 CURVAS REGULARES NO ESPAÇO

Grande parte dos teoremas que vimos para curvas no plano, de modo análogo, serão válidos para curvas no espaço. Por exemplo, o Teorema 3.1 cuja afirmação é "toda curva regular admite parametrização por comprimento de arco".

Começamos definindo um escalar para a curvatura.

Definição 4.1 (Curvatura no espaço). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Definimos a *curvatura* como

$$k(s) = \|\alpha''(s)\|,$$

para todo s pertencente ao intervalo I

Exemplo 4.1 (Hélice circular). Sejam $a, b \in \mathbb{R}^*$ $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Uma parametrização da hélice circular é

$$\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt).$$

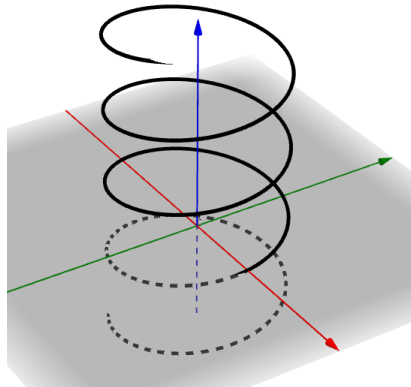


Figura 4.1 – Hélice circular.

Iremos verificar se ela está parametrizada por comprimento de arco, que seria o caso se a norma do vetor tangente for igual a 1

para todo $t \in \mathbb{R}$ Como $\alpha'(t) = (-a \operatorname{sen}(t), a \operatorname{cos}(t), b)$, temos

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a \operatorname{sen}(t))^2 + (a \operatorname{cos}(t))^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podemos ver que a norma nem sempre será igual 1, dependendo dos parâmetros a e b da hélice, precisamos, antes de calcular a curvatura, reparametrizar a curva por comprimento de arco. O processo é idêntico ao feito com a circunferência no Exemplo 3.6.

$$L(s) = \int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^s \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} s.$$

Calculando a função inversa $\phi(s) = L^{-1}(s)$, temos que $\phi(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Composto com $\alpha(t)$, temos

$$\beta(s) = \alpha(\phi(s)) = \left(a \operatorname{cos} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

A hélice circular agora está parametrizada por comprimento de arco pela curva $\beta(s)$. Iremos calcular a curvatura que é dada por $k(s) = \|\beta''(s)\|$.

$$\beta'(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-a \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \operatorname{cos} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), b \right)$$

$$\beta''(s) = \frac{-a}{a^2 + b^2} \left(\operatorname{cos} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), 0 \right).$$

Portanto a curvatura da hélice circular é dada por

$$\|\beta''(s)\| = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

Como na circunferência, a curvatura da hélice independe do parâmetro s . Geometricamente é fácil notar, basta uma visão superior da mesma.

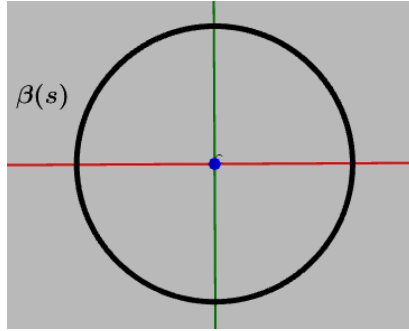


Figura 4.2 – Vista superior da hélice.

Exemplo 4.2 (Espiral logarítmica no espaço). Seja

$$\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$$

uma parametrização para a espiral logarítmica no Espaço. Como de praxe, iremos verificar se a curva está parametrizada por comprimento de arco. Como $\alpha'(t) = (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t)$, segue que

$$\|\alpha'(s)\| = e^t \sqrt{(\cos(t) - \sin(t))^2 + (\sin(t) + \cos(t))^2 + 1} = e^t \sqrt{3}.$$

Seja

$$L(s) = \int_0^s \|\alpha'(t)\| dt = e^s \sqrt{3} \Leftrightarrow L^{-1}(s) = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right).$$

Em notação matricial, a curva reparametrizada é dada por $\beta(s)$

$$\beta(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\sqrt{3}} \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ \frac{s}{\sqrt{3}} \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ \frac{s}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\beta'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\beta''(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}s} \left(-\operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) - \cos \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3}s} \left(-\operatorname{sen} \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) + \cos \left(\ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} \right) \right) \right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como queremos encontrar a curvatura, basta calcular $\|\beta''(s)\|$

$$\|\beta''(s)\| = \sqrt{\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle} = \frac{\sqrt{2}}{s\sqrt{3}}.$$

Podemos obter a curvatura de curvas em que a reparametrização por comprimento de arco, não pode ser expressada explicitamente, utilizando a proposição abaixo.

Proposição 4.1. *Seja $\alpha(t) := (x(t), y(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Então, para cada $t \in I$,*

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (4.1)$$

Demonstração. Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização por comprimento de arco de α , ou seja, $\alpha(t) = \beta(\phi(t))$, sendo $k(t)$ a curvatura de ambas as curvas, então $\phi'(t) = \|\alpha'(t)\|$ e $k(t) = \|\beta''(\phi(t))\|$ derivando $\alpha(t)$, temos

$$\alpha'(t) = \beta'(\phi(t))\phi'(t) = \|\alpha'(t)\|\beta'(\phi(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \beta''(\phi(t))(\phi'(t))^2 + \beta'(\phi(t))\phi''(t) \\ &= \|\alpha'(t)\|^2\beta''(\phi(t)) + \phi''(t)\beta'(\phi(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \|\alpha(t)\|^3\beta'(\phi(t)) \wedge \beta''(\phi(t)).$$

Como β esta parametrizada por comprimento de arco, então $\|\beta'(\phi(t))\| = 1$ e $\beta' \perp \beta''$, por fim

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3\|\beta''(\phi)\| \Leftrightarrow k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

■

A Equação (4.1) é análoga a Equação 3.2 apresentada na Proposição 3.2.

Exemplo 4.3. Seja $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (t, t^2, t)$. Iremos calcular a curvatura utilizando Equação (4.1), temos que $\alpha'(t) = (1, 2t, 1)$ e $\alpha''(t) = (0, 2, 0)$

$$k(t) = \frac{2}{(2 + 4t^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

4.1 TORÇÃO E TRIÊDO DE FRENET

O teorema fundamental das curvas no plano não irá servir para curvas no espaço. Toda função é curvatura de alguma curva plana, mas nem todas as curvas do espaço estão contidas em um plano. Teremos que adicionar mais um invariante, que estará relacionado a quanto a curva deixa de estar contida em um plano.

Dado uma curva suave $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\alpha''(t) \neq 0, \forall t \in I$, seja

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

o vetor tangente e

$$N(t) = \frac{T'(t)}{k(t)}$$

vetor normal associados à curva α , ambos unitários. Portanto os vetores $T(t), N(t)$ formam uma base ortogonal para o plano tangente à curva α no ponto $\alpha(t)$, que chamaremos de *plano osculador*. De modo análogo ao Lema 3.3 de curvas no planos, os vetores $T(t)$ e $N(t)$ são ortogonais.

Mas em vez de estudarmos a variação do plano osculador para calcularmos quanto a curva deixa de estar contida em um plano, iremos analisar a variação de um vetor unitário e ortogonal ao plano osculador, que chamaremos de *vetor binormal*, encontrado a partir do produto vetorial entre $T(t)$ e $N(t)$

$$B(t) = T(t) \wedge N(t).$$

Exemplo 4.4 (Plano Osculador). Neste exemplo encontramos o plano osculador referente à curva

$$\alpha(t) = e^t(1, \text{sen}(t), \text{cos}(t))$$

no ponto com $t_0 = 0$. Da álgebra linear, para encontrarmos a equação de um plano, precisamos de um ponto por onde o plano passa e de um vetor ortogonal ao plano. Como já comentamos, $\{T(t), N(t)\}$ é uma base para o plano osculador e calculando $B(t) = T(t) \wedge N(t)$, encontramos um vetor perpendicular ao plano. Primeiro temos que encontrar $T(s)$ e $N(s)$, temos

$$\alpha'(t) = e^t(1, \text{cos}(t) + \text{sen}(t), \text{cos}(t) - \text{sen}(t))$$

e $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{3}e^t$. Então, o vetor tangente é dado por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \text{cos}(t) + \text{sen}(t), \text{cos}(t) - \text{sen}(t)).$$

Em $t = 0$ encontramos o vetor $T(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Para calcular $N(t)$, precisamos calcular

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -\text{sen}(t) + \text{cos}(t), -\text{sen}(t) - \text{cos}(t))$$

e

$$\begin{aligned} \|T'(t)\| &= \sqrt{2 \text{sen}^2(t) - 2 \text{sen}(t) \text{cos}(t) + 2 \text{cos}^2(t) + 2 \text{sen}(t) \text{cos}(t)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\text{sen}(t) + \text{cos}(t), -\text{sen}(t) - \text{cos}(t)).$$

Precisamos do vetor $N(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$. Para encontrar o vetor $B(0)$, basta fazer $B(t) = T(t) \wedge N(t)$, ou seja, .

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, \text{cos}(t) + \text{sen}(t), \text{cos}(t) - \text{sen}(t))$$

Agora temos o vetor ortogonal ao plano osculador, ou seja, $B(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)$. A equação do plano é dado por $a(x - x_0) + b(y - y_0) +$

$c(z - z_0) = 0$, onde (a, b, c) é o vetor ortogonal e (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas do ponto por onde o plano passa, que nesse caso, são $\alpha(0) = (1, 0, 1)$. Portanto, a equação do plano osculador à α em $t = 0$ é $-2(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 1) = 0$ ou $-2x + y + z + 1 = 0$.

Daqui em diante, consideraremos curvas parametrizada por comprimento de arco. Como nas curvas planas temos o Diedro de Frenet, em curvas no espaço temos o Triedro de Frenet, formado pelos vetores $T(s), N(s), B(s)$. Temos que $T(s) = \alpha'(s)$, precisamos encontrar $B(s)$. Como $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, derivando ambos os lados, deparamos com

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s).$$

Mas, $T'(s) \wedge N(s) = k(s)N(s) \wedge N(s) = 0$, logo $B'(s) = T(s) \wedge N'(s)$. Como $B'(s)$ é ortogonal a $T(s)$ e $B \perp B'$, obrigatoriamente $B'(s)$ tem que ser paralelo a $N(s)$. Veja a figura abaixo.

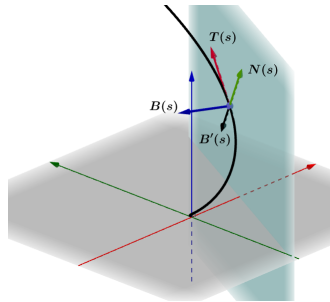


Figura 4.3 – Vetor $B'(s)$ paralelo a $N(s)$.

Definição 4.2 (Torção). Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave parametrizada por comprimento de arco tal que $\alpha''(t) \neq 0, \forall t$. A função $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ é denominada *torção* da curva α em s .

Observe que calcular $|\tau(s)|$ é equivalente a calcular $\|B'(s)\|$, pois $N(s)$ é unitário, ou seja,

$$\|B'(s)\| = |\tau(s)|.$$

Note que, diferente da curvatura, a torção de uma curva no espaço pode ser positiva ou negativa. Por conta que os três vetores unitários formam uma base para \mathbb{R}^3 e $B(s) = T(s) \wedge N(s)$, usando que $N(s) = B(s) \wedge T(s)$, e repetindo o processo anterior obtemos

$$\begin{aligned} N'(s) &= B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s) \\ &= -\tau(s)N(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge k(s)N(s) \\ &= +\tau(s)B(s) - k(s)T(s) \\ &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s). \end{aligned}$$

Retomando as equações importantes anteriores, temos

1. $T'(s) = k(s)N(s)$,
2. $N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$,
3. $B'(s) = -\tau(s)N(s)$.

Essas são chamadas as equações de Frenet e dão origem a uma matriz anti-simétrica na base $\{T, N, B\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}.$$

No próximo exemplo iremos encontrar a curvatura e a torção a partir das equações de Frenet.

Exemplo 4.5 (Torção da hélice circular). Considere a parametrização por comprimento de arco

$$\beta(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

obtida no Exemplo 4.1, a torção pode ser encontrada se calcularmos $B'(s)$ e $N(s)$ e substituí-los na equação $B'(s) = -\tau(s)N(s)$. Lembre que no Exemplo 4.1 calculamos $T(s) = \beta'(s)$, $T'(s) = \beta''(s)$ e

$\|T'(s)\|$, logo

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\frac{-a}{a^2+b^2} \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), 0 \right)}{\frac{|a|}{a^2+b^2}} \\ &= \frac{-a}{|a|} \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), 0 \right). \end{aligned}$$

Precisamos ainda de $B'(s)$, temos que $B(s) = T(s) \wedge N(s)$

$$\begin{aligned} B(s) &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-a \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right) & \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right) & b \\ \frac{-a}{|a|} \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) & \frac{-a}{|a|} \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) & 0 \end{bmatrix}. \\ B(s) &= \frac{-a}{|a|\sqrt{a^2+b^2}} \left(-b \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), b \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), -a \right). \end{aligned}$$

Então, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} B'(s) &= \frac{a}{|a|\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), b \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), 0 \right) \right) \\ &= \frac{ab}{|a|(a^2+b^2)} \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), \operatorname{sen} \left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right), 0 \right) \\ &= \frac{-b}{a^2+b^2} N(s) = -\tau(s)N(s). \end{aligned}$$

Portanto, $\tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}$. Note que a torção não depende do parâmetro s e isso significa, grosso modo, que o tanto que a hélice está deixando de estar contida em um plano é constante em todo s . Podemos ter uma visão melhor em qualquer visão lateral da hélice circular.

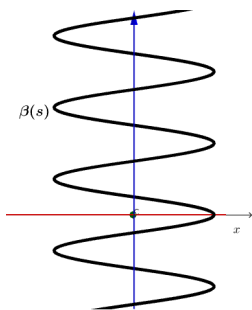


Figura 4.4 – Vista lateral da hélice.

Lembrando que a torção da hélice circular, parametrizada por comprimento de arco, é dada por $\tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}$, podemos olhar abaixo a torção em dois exemplos. No primeiro temos os parâmetros $a = 2.5$ e $b = 0.9$ e no segundo matemos o valor do parâmetro a e consideramos o $b = 0.1$

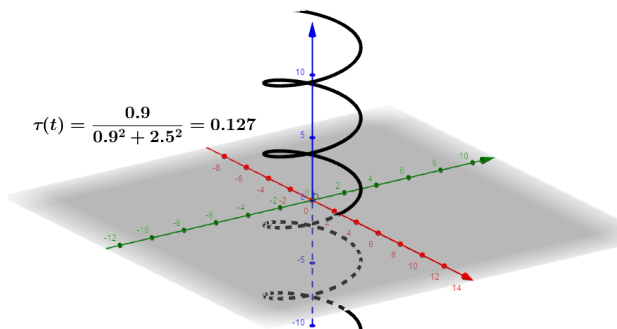


Figura 4.5 – Torção da hélice.

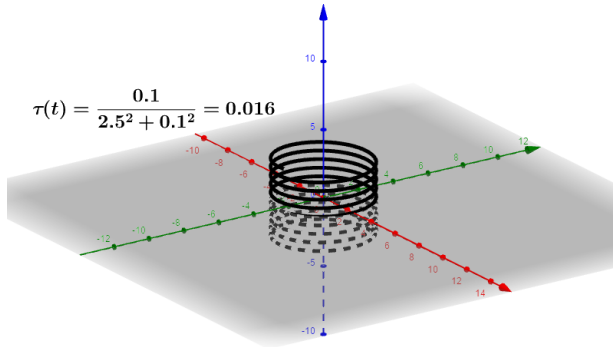


Figura 4.6 – Torção da hélice perto de zero.

O exemplo acima indica que se a torção é próxima de zero, a hélice circular em uma vizinhança está quase "contida em um plano".

Proposição 4.2. *Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave parametrizada por comprimento de arco. Então, β é plana se, e somente se, sua torção τ é nula.*

Demonstração. (\Rightarrow) Pela hipótese, o traço de β está contido em um plano. Tomemos v um vetor ortogonal a este plano e escolha um ponto $s_0 \in I$. Logo,

$$\langle \beta(t) - \beta(t_0), v \rangle = 0, \quad \forall s \in I.$$

Derivando duas vezes em relação a t , obtemos

$$\langle \beta'(s), v \rangle = 0$$

$$\langle \beta''(s), v \rangle = 0.$$

Portanto, v é ortogonal ao plano osculador, para todo s . Como $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ e $\|B(s)\| = 1$, então podemos dizer que B é sempre paralelo a v para todo s , logo B é constante. Uma vez que $|\tau(s)| = \|\beta'(s)\|$ e $B'(s) = 0$ podemos concluir que $\tau(s) = 0 \quad \forall s$

(\Leftarrow) Na recíproca, temos $B'(s) = 0$ e, portanto, B é constante. Podemos dizer que β está contido em um plano ortogonal a

B . De fato, considerando $s_0 \in I$ e seja a função

$$f(s) = \langle \beta(s) - \beta(s_0), B \rangle .$$

Derivando em relação a s ,

$$f'(s) = \langle \beta'(s), B \rangle = \langle T(s), B \rangle = 0, \forall s.$$

Por fim, temos que f é constante. Como $f(s_0) = 0$, concluímos que f é nula, e o vetor $\beta(s) - \beta(s_0)$ é ortogonal a B . Logo, β está no plano ortogonal a B . ■

Exemplo 4.6 (Circunferência no espaço). Seja $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização por comprimento de arco da circunferência no espaço $\alpha(t) = (r \cos(\frac{t}{r}), r \sin(\frac{t}{r}), a)$. Temos que

1. $T(t) = (-\sin(\frac{t}{r}), \cos(\frac{t}{r}), 0)$,
2. $N(t) = \frac{1}{r}(-\cos(\frac{t}{r}), -\sin(\frac{t}{r}), 0)$,
3. $B(t) = T(t) \wedge N(t) = (0, 0, \frac{1}{r})$.

Como a torção é calculada por $\|B'(t)\| = |\tau(s)|$ e $B(t)$ é constante, então a torção é nula. Portanto a circunferência está contida em um plano. Neste caso, contida no plano $\pi : z - a = 0$.

Como em curvas planas, nem sempre é fácil encontrar a reparametrização por comprimento de arco de forma explícita. Outra forma de calcular a curvatura de uma curva que não necessariamente esteja parametrizada por comprimento de arco é:

Proposição 4.3. *Seja $\alpha(t)$ um curva regular, cuja curvatura nunca seja nula, então:*

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$

Exemplo 4.7 (Torção pela fórmula). Seja a curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$. Temos que

1. $\alpha'(t) = (1, 2t, 3t^2)$,

2. $\alpha''(t) = (0, 2, 6t),$
3. $\alpha'''(t) = (0, 0, 6).$

E

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 12$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{bmatrix} = (6t^2, 6t, 2).$$

Logo,

$$\tau(t) = \frac{12}{36t^4 + 36t^2 + 4} = \frac{3}{9t^2(t^2 + 1) + 1}.$$

4.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS CURVAS NO ESPAÇO

Neste capítulo, trabalhamos com dois escalares associados aos pontos de uma curva, a curvatura e torção. Juntos esses escalares determinam o comportamento de uma curva no espaço. A curvatura, do mesmo modo que no capítulo anterior, calcula o quanto a curva deixa de ser uma reta, e a torção o quanto essa curva deixa de estar contida em um plano.

Teorema 4.4 (Teorema Fundamental das Curvas no espaço). *Sejam I um intervalo aberto, $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva diferenciável, e $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, existe uma curva diferenciável, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, cujas funções curvatura e torção coincidem com k e τ , respectivamente. Além disso, para toda curva $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por comprimento de arco, cujas curvatura e torção coincidem com k e τ , existe um movimento rígido $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha = M \circ \beta$.*

Um movimento rígido de \mathbb{R}^3 é uma função $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é uma composição de uma translação (T_a) na direção de a e uma rotação (R_θ) em torno da origem, logo $M = T_a \circ R_\theta$.

Para demonstrar o teorema acima, é necessário considerar as equações de Frenet abaixo como um sistema de equações diferenciais em $\mathbb{R}^9 \times I$

1. $T'(s) = k(s)N(s)$,
2. $N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s)$,
3. $B'(s) = -\tau N(s)$.

Sabemos que toda EDO de primeira ordem tem solução a partir de um ponto inicial. A unicidade da curva α é de forma análoga a vista por movimentos rígidos como provado para curvas no plano.

Exemplo 4.8. Podemos pensar se existe outra curva que tenha a peculiaridade igual da hélice circular, na qual a curvatura e a torção são constantes. Mas, pelo teorema fundamental das curvas no espaço, se tiver duas curvas com curvaturas e torções iguais, elas são as mesmas a não ser por um movimento rígido.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho proporcionou um primeiro contato com a pesquisa na área acadêmica. Trata-se de uma introdução à geometria diferencial, considerando curvas regulares no plano e no espaço, podendo definir e calcular, a curvatura e a torção de curvas regulares.

Como em muitas áreas da matemática, o aprofundamento de um conteúdo em que se aprofunde o mínimo, abre um leque muito grande para continuar estudando, podendo mesclar com outras áreas tanto na matemática quanto fora dela. Uma continuação, que seguiria dentro da mesma linha, é o estudo de superfícies. Tal como no caso de curvas, existem superfícies regulares e não-regulares. Uma outra direção é relacionar com aplicações em Física. Por exemplo, há conexão entre a curvatura com a força centrípeta.

BIBLIOGRAFIA

ALENCAR, Hilário. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. 2. ed. [S.l.]: Instituto do Milênio: Avanço Global e Integrado da Matemática Brasileira, 2007. Citado 1 vez na página 37.

CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014. Citado 1 vez na página 17.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo 2*. 4. ed. São Paulo: Livros Técnicos e Científica, 2001. Citado 1 vez na página 25.

LIMA, Ronaldo Freire. *Introdução a Geometria Diferencial*. 1. ed. Macapa: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28, 34.

PICADO, Jorge. *Apontamentos de Geometria Diferencial*. 1. ed. Coimbra: Departamento de Matemática, 2006. Citado 1 vez na página 24.