UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Elídio Louzada Gomes Júnior

Abordagens do algoritmo da raiz quadrada lidas nos livros didáticos no Brasil: final do século XIX e na primeira década do século XX.

Florianópolis
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

CAMPUS REITOR JOÃO DAVID FERREIRA LIMA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Elídio Louzada Gomes Júnior

Abordagens do algoritmo da raiz quadrada lidas nos livros didáticos no Brasil: final do século XIX e na primeira década do século XX

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática, sob orientação do Professor Dr. David Antonio da Costa.

Florianópolis
2018

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela banca Examinadora designada.

Florianópolis, 28 de junho de 2018.

Profª Drª Sonia Elena Palomino Castro

Coordenadora do Curso de Graduação em Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr.David Antonio da Costa

Orientador

Iara Zimmer

ProfªDrªIara Zimmer

UFSC

Nereu E. Burin

Prof.Me. Nereu EstanislauBurin

UFSC

AGRADECIMENTOS

Em oração por estar aqui!

Aos meus pais, por todo apoio que me deram.

Aos meus irmãos, pelas lembranças boas que guardo de vocês.

À minha família pelo companheirismo e pela paciência.

Aos amigos e professores que encontrei no curso de licenciatura.

Ao grupo de pesquisa GHEMAT pelo bom acolhimento e pelas reuniões inspiradoras. Especialmente à Anieli, ao Cleber e à Yohana.

Ao professor David Antonio da Costa, pela orientação e pelo constante estímulo transmitido durante a elaboração deste trabalho.

E a todos que contribuíram direta ou indiretamente, na execução deste trabalho.

RESUMO

Esta investigação se insere no campo da história da educação matemática (HEM) e tem como objetivo escrutinar diferentes abordagens do algoritmo da raiz quadrada encontrados em livros didáticos de aritmética, publicados no período de 1879 a 1907. A pesquisa se apoia principalmente nas perspectivas teóricas de Wagner Rodrigues Valente relacionadas aos estudos da história da educação matemática, nas contribuições de Alain Choppin sobre categorizações históricas de livros didáticos e finalmente no conceito denominado de vulgata inaugurado por André Chervel. Utilizando o Repositório de Conteúdo Digital (RCD) da Universidade Federal de Santa Catarina, foram analisadas oito obras didáticas. Os resultados da pesquisa apontam que os autores das obras analisadas abordaram o algoritmo da raiz quadrada de pelo menos duas distintas formas. Esse conteúdo é majoritariamente tratado como separado das operações fundamentais, associado à "potência" ou em apêndices.

Palavras-chave: História da educação matemática. Livro didático. Raiz quadrada.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 1
Algumas considerações de ordem teórico-metodológica 4

CAPÍTULO 1 7
Um breve olhar para a história... 7
A raiz quadrada em livros didáticos no Brasil 10

CAPÍTULO 2 17
Algoritmo da raiz quadrada 17
Método de radiciação por aproximação por uma fração 22
Método de extração de raiz quadrada 23

CAPÍTULO 3 26
Análise dos livros didáticos 26
3.1. *Arithmetica para meninos*, 5ª edição - José Theodoro de Souza Lobo (1879) 27
3.2. *Curso de Arithmetica Elementar*, 2ª edição - B. Alves Carneiro (1880) 34
3.3. *Arithmetica da Infancia* - Joaquim Maria de Lacerda (1890) 38
3.4. *Curso Elementar de Mathematica - Arithmetica* - Aarão e Lucano Reis (1892) 44
3.5. *Arithmetica Primária*, 2ª edição - Cezar Pinheiro (1902) 49
3.6. *Lições de arithmética*, volume 1, de Odorico Castello Branco (1904) 52
3.7. *Elementos de Arithmetica* - 11ª edição - João José Luiz Vianna (1906) 56
3.8. *Curso Normal de Mathematica - Arithmetica* – J. Eulalio (1907) 62

CONSIDERAÇÕES FINAIS 67

REFERÊNCIAS 69

INTRODUÇÃO

Inicio narrando as razões da escolha do tema deste trabalho de conclusão de curso ser na área de Educação Matemática. Durante a minha graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), comecei a me interessar, também, pelos autores e reflexões proporcionadas pelas leituras e discussões em salas de aula de disciplinas de educação, desde Teorias da Educação até Metodologia do Ensino da Matemática e Estágios Supervisionados. Participei do PIBID[1], e depois como professor em escolas da rede estadual de ensino. Esse convívio, externo à universidade, com professores que atuam na rede pública de ensino avivou ainda mais o meu interesse pela área da Educação Matemática.

Por indicação, da professora Rosilene Beatriz Machado[2], procurei o professor David Antonio da Costa e após conversarmos sobre a minha intenção de fazer o meu trabalho de conclusão de curso voltado para a área de Educação Matemática, ele me convidou a participar do grupo de estudos sobre História da Educação Matemática (HEM), para me familiarizar com a sua área de pesquisa e assim me decidir pelo tema da minha investigação inserida na linha de trabalho dos pesquisadores do GHEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática[3].

O tema original da minha pesquisa era analisar o conteúdo de geometria do curso de Agrimensura do Instituto Politécnico[4] de Florianópolis, a primeira instituição de ensino superior do Estado de Santa Catarina, criado em 13 de março de 1917.

---

[1] Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência. Coordenado pelo Professor Me. Nereu Estanislau Burin.
[2] Professora do Departamento de Metodologia de Ensino da UFSC.
[3] Mais informações no site: <http://www2.unifesp.br/centros/ghemat/paginas/about_ghemat.htm>
[4] Situava-se na Av. Hercílio Luz, nº 47 (atualmente nº 532), hoje sede da Academia de Comércio de Santa Catarina.

Mas no ano passado, após uma aula, onde discutimos sobre ensino de logaritmos, curiosamente, encontrei uma publicação que trazia os "Ossos[5] de Napier" e como ele era empregado em cálculos de números considerados muito grandes[6], envolvendo multiplicação, divisão e até extração de raiz quadrada. Alguns dias depois, ao assistir a apresentação do trabalho de conclusão de curso de um amigo da licenciatura, ele mencionou algo sobre o algoritmo da radiciação. Após a apresentação, conversando com a professora Carmem Suzane Comitre Gimenez[7], que participara da banca examinadora, conversamos sobre o algoritmo da radiciação e o assunto nos levou até John Napier e como ele resolvia problemas dessa natureza utilizando os "Ossos de Napier".

A ideia de investigar sobre o algoritmo de extração de raízes foi me agradando tanto, que durante pesquisas que realizava no Repositório de Conteúdo Digital[8] (RCD) da UFSC, com a palavra-chave "raiz quadrada", encontrei na pasta Livros Didáticos e Manuais Pedagógicos, vinte e seis resultados. Desses selecionei apenas livros didáticos totalizando oito (listados adiante) que traziam "regras" ou procedimentos para extração da raiz quadrada. Assim retornei a busca, apoiando-me principalmente no RCD, por textos que me ajudassem a recolher elementos para desenvolver o estudo sobre o novo tema escolhido: o algoritmo da raiz quadrada lidos nos livros didáticos.

Para prosseguir, além da palavra-chave "raiz quadrada", busquei também pelos nomes dos autores das obras que encontrei, pois alguns livros tiveram várias edições. Por exemplo, Elementos de Aritmética de João José Luiz Vianna, com a primeira edição em 1883, alcançou em 1918 sua 17ª edição. Os livros de Antonio Trajano; Aritmética Elementar Ilustrada com a primeira edição em 1879 e 136ª edição em 1958; e Aritmética Progressiva, primeiramente, lançado em 1880, atingiu em 1954 a sua 84ª edição. E as obras de José Theodoro de Souza Lobo as quais encontramos no RCD as seguintes

---

[5] Dispositivo de cálculo de funcionamento manual (não-logaritmo) criado por John Napier. Funcionava como um ábaco.

[6] São números; com muitas casas decimais; com muitos algarismos; irracionais e etc..

[7] Professora Mestre da Universidade Federal de Santa Catarina, aposentada.

[8] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>

edições: Arithmetica para meninos, 1879 e 1932; Segunda Aritmética, 1931, 1933 e 1953; e Segunda Aritmética para meninos, 1893, 1926 e 1931. A 1ª edição deste último livro foi impressa em 1870, a 33ª edição em 1939 e em 1980 foi lançada a sua 43ª edição, segundo Pais (2010, p.129).

Oito livros didáticos de aritmética foram selecionados para análise. De acordo com os dados obtidos no RCD, tais publicações circularam no Brasil se situam, entre os anos de 1879 até 1907 e foram escritas pelos seguintes autores:

Quadro 1: Relação de livros selecionados para a pesquisa.

Autor	**Livro**	**Ano**	**Edição**
José Theodoro de Souza Lobo	Arithmetica para meninos[9]	1879	5ª
B. Alves Carneiro	Curso de Arithmetica Elementar[10]	1880	2ª
Joaquim Maria de Lacerda	Arithmetica da Infancia[11]	1890	-
Aarão Reis; Lucano Reis	Curso Elementar de Mathematica - Arithmetica[12]	1892	2ª
Cezar Pinheiro	Arithmetica Primária[13]	1902	2ª
Odorico Castello Branco	Lições de arithmética[14], volume 1	1904	-
João José Luiz Vianna	Elementos de Aritmética[15]	1906	11ª
J. Eulalio	Curso Normal de Mathematica - Arithmetica[16]	1907	-

Fonte: Autoria minha.

Diante destes dados coletados, busquei neste trabalho responder a seguinte questão: como se apresentam os algoritmos de raiz quadrada nos livros didáticos do final do século XIX e na primeira década do século XX?

[9] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769>
[10] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161370>
[11] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161622>
[12] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/100349>
[13] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/127570>
[14] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/134440>
[15] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/163585>
[16] Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105103>

Algumas considerações de ordem teórico-metodológica

O tema desta pesquisa está inserido na linha de trabalho dos pesquisadores do GHEMAT - Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática, criado em 2000 e registrado no Diretório de Grupos de Pesquisas do CNPq, liderado pelos professores Neuza Bertoni Pinto (PUC–PR) e Wagner Rodrigues Valente (UNIFESP–Campus Guarulhos), e desenvolve pesquisas que têm como objetivo produzir história da educação matemática.

As pesquisas desenvolvidas pelos membros deste grupo possuem objetivos determinados, que apoiam-se, principalmente, nas perspectivas teóricas de Wagner Rodrigues Valente relacionadas aos estudos da história da educação matemática, que segundo ele:

> pensar os saberes escolares como elementos da cultura escolar, ou mais especificamente, realizar o estudo histórico da matemática escolar, da matemática praticada no interior das escolas, exige que se deva considerar os produtos dessa cultura do ensino de matemática, os elementos que foram elaborados ao longo do tempo, que deixaram traços que permitem o seu estudo (VALENTE, 2008, p.5).

Valente salienta a importância da história da educação matemática, devido:

> a dimensão formativa da história da educação matemática parece ser de outra natureza àquela da História da Matemática. Ela aponta para a formação profissional do professor, para a sua necessidade de compreender que heranças reelaboradas o seu ofício traz de outros tempos e que estão presentes na sua prática pedagógica cotidiana (idem, 2010, p.133).

Partindo disso, o professor pode descontruir algumas representações do passado “em benefício de novas representações mais alicerçadas na crítica aos documentos e fontes das práticas pedagógicas realizadas noutros tempos” (ibidem, p.134).

Os conteúdos escolares encontrados em livros didáticos de matemática de outrora fornecem instrumentos para a produção de fatos históricos relacionados à história da educação matemática. A reorganização destes fatos, construídos a fim de responder indagações dos pesquisadores, elevam as categorias dos documentos em fontes de pesquisas. Neste particular texto, primeiro procurei responder quais são as abordagens do algoritmo da raiz quadrada encontradas em livros didáticos, no final do século XIX e na primeira década do século XX no Brasil. A partir do interesse em responder esta pergunta norteadora de pesquisa, desdobram-se as ações para a compreensão e análise dos dados históricos contidos nesses livros e a sua relação com a proposta da pesquisa, ou seja, entender como se apresentam os algoritmos nos livros didáticos. Dessa forma, busco respostas às minhas indagações, que me propiciará compreender, por exemplo, alguma regularidade nas abordagens didáticas sobre este particular tema escolar.

Ainda, conforme Bittencourt:

> As pesquisas e reflexões sobre o livro didático permitem apreendê-lo em sua complexidade. Apesar de ser um objeto bastante familiar e de fácil identificação, é praticamente impossível defini-lo. Pode-se constatar que o livro didático assume ou pode assumir funções diferentes, dependendo das condições, do lugar e do momento em que é produzido e utilizado nas diferentes situações escolares. Por ser um objeto de "múltiplas facetas", o livro didático é pesquisado enquanto produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais (BITTENCOURT, 2004, p.471).

Os livros didáticos assumem quatro funções essenciais conforme Choppin (2004), que podem variar significativamente conforme o ambiente sociocultural, as disciplinas, a época, os níveis de ensino, os métodos e como são utilizados: função referencial (curricular ou programática), na qual o livro didático é um suporte para conteúdos educativos, técnicas e conhecimentos considerados necessários a serem ensinados; função instrumental, como ferramenta que auxilia a memorização, a aquisição e aperfeiçoamento de competências e habilidades; função ideológica e cultural, por se constituir um instrumento de construção de identidade nacional e de importante serventia política; e função documental, sem que sua leitura seja dirigida, pode oferecer condições ao aluno de desenvolver sua autonomia e seu espírito crítico.

Portanto, esta pesquisa dialoga com o quadro teórico de Choppin, uma vez que consideramos os livros didáticos portadores das referências; referencial, sendo uma ferramenta de apoio às atividades do professor em sala de aula; e instrumental, por disponibilizarem exemplos, exercícios e procedimentos tais como as regras para extração da raiz quadrada, que pretendem apoiar a aprendizagem, facilitar a memorização e a aquisição de competências, aprimorar habilidades e resolver problemas.

Da mesma forma, esta pesquisa se apoia no conceito estabelecido por Chervel da “vulgata”.

> Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem então a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a tecnologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do corpus de conhecimentos, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p.203).

Compreendemos que a mobilização deste conceito da vulgata apoiado na categoria de Choppin do livro didático visto como função referencial, poderemos melhor compreender o papel dos algoritmos no ensino deste conteúdo escolar.

Resumidamente, os aportes teóricos adotados nesta pesquisa se encontram alinhados no âmbito da história da educação matemática, em Valente (2008), Choppin (2004).

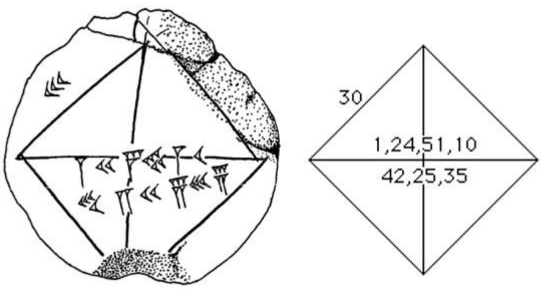
CAPÍTULO 1

Um breve olhar para a história...

Percebemos que na Antiguidade, se tem indícios de resoluções de cálculos envolvendo a radiciação e potenciação. Em papiros egípcios, por exemplo, foram encontrados cálculos com potências, para volumes de pirâmides, armazéns, etc, com o desenho de um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número. Também há evidências de cálculos semelhantes que foram realizados na Babilônia, na Índia, na Grécia Antiga, na Roma Antiga e na Europa durante a Idade Média.

Os babilônios, por exemplo, além das quatro operações fundamentais calculavam também potências e raízes quadradas. Esses cálculos eram registrados em tabletes de argila, e um dos exemplares mais conhecidos desses tabletes é o YBC 7289[17] (cerca de 1800–1600 a.C.), no qual aparece o cálculo ou uma regra para o cálculo da $\sqrt{2}$ (ROQUE; DE CARVALHO, 2012, p.16).

Figura 1: Desenho do tablete de argila babilônico (YBC 7289) da Universidade de Yale.



Fonte: Institute for the Preservation of Cultural Heritage (Apud ROQUE).

Nesta figura é mostrado que eles conseguiram uma boa aproximação para $\sqrt{2}$. Pois temos um quadrado (no qual o lado “s” (acima à esquerda) tem

[17] Disponível em <https://ipch.yale.edu/news/3d-print-ancient-history-one-most-famous-mathematical-texts-mesopotamia>

30 unidades de medida) e suas diagonais desenhados. Ao longo de uma diagonal, conforme o sistema numérico sexagesimal posicional babilônico (base 60), aparecem grafados os números: 1,24,51,10 (acima) e 42,25,35 (abaixo), que expressam o comprimento da diagonal do quadrado.

O número 1,24,51,10 representa a aproximação utilizada para o valor de $\sqrt{2}$. Então ao multiplicarmos a medida do lado "s" de um quadrado qualquer por 1;24,51,10, em base 60, obtemos a medida aproximada de sua diagonal "d". Assim,

$$d = s\cdot(1;24,51,10) = s\cdot[1 + (24\div 60) + (51 \div 60^2) + (10 \div 60^3)] \cong s\cdot[1,414212963] \cong s\cdot \sqrt{2}.$$

No tablete de argila, o lado do quadrado mede 30, logo, $d = 30\cdot(1;24,51,10) = 30\cdot(1,414212963) = 42;25,35 = 42 + (25\div 60) + (35 \div 60^2) \cong 42,42638889$. Um valor aproximado para $30\cdot\sqrt{2} \cong 30\cdot 1,414213562 \cong 42,42640687$ (com erro menor do que 10^{-4}).

Segundo Domingues (2009, p.255) quando eles obtinham uma raiz que não era racional, o resultado era aproximado por alguma fração ou um número natural, como o exemplo mostrado acima. Assim, criaram um método para aproximar $\sqrt{N}$, no qual *N* era a área de um quadrado qualquer.

Em textos religiosos indianos escritos entre 800 e 600 a.C., os *Sulbasutras*, encontra-se um método[18] ou regra para o cálculo de $\sqrt{2}$, que em notação atual, se traduz em:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 34}= \frac{577}{408} \cong 1,414215686 \cong \sqrt{2} \cong 1,414213562$ (o erro é menor do que 10^{-5}).

Os gregos questionaram a incomensurabilidade dos números irracionais e Hipaso de Metaponto (século V a.C.), possivelmente, foi quem verificou que o lado e a diagonal de um quadrado não são mensuráveis, entretanto não definiram o número irracional como conhecemos (DOMINGUES, 2009, p.256).

[18] Disponível em <http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC11Completo.pdf>

E Aristóteles expunha, com a técnica de raciocínio por absurdo, a prova da incomensurabilidade dos números irracionais (ROQUE; DE CARVALHO, 2012, p.62).

Os romanos conquistaram um elevado nível de engenharia, com um conhecimento em álgebra e aritmética evoluído, entretanto "nunca tiveram inclinação para a matemática abstrata; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam", Eves (2004, p.289).

Em Eves (2004) lemos que, na Europa medieval, o início do Renascimento ocorre no século XV com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453, e a queda do Império Bizantino. A Itália recebe muitos refugiados e com eles muito do conhecimento grego reaparece, e com a invenção da imprensa por Johann Gutenberg na década de 1430, se acelera a disseminação do conhecimento.

Nessa época, o matemático e astrônomo alemão Johann Müller (1436–1476) em sua obra *De triangulis omnimodis*, escrito por volta de 1464, publicada em 1533, composta de cinco livros, sendo os dois primeiros sobre trigonometria plana e os outros três sobre trigonometria esférica, apresentava cálculo de raízes de uma equação quadrática, Eves (2004).

O frade franciscano e matemático italiano Luca Bartolomeo de Pacioli (1445–1509) teve impressa a primeira edição de sua *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* (coleção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), ou apenas *Suma*, em 1494 e seu conteúdo de aritmética "começa com algoritmos para as quatro operações fundamentais e para a extração da raiz quadrada", (ibidem, p.298).

O símbolo do radical √, que parece um r[19], de radix ("raiz" em latim), minúsculo sem o traço horizontal e sem mostrar índices, surgiu pela primeira vez, nas páginas do livro de álgebra *Die Coss* do alemão Christoff Rudolff (1499–1545), escrito em 1525 (ibid, p.301). Esse símbolo não teve aceitação imediatamente, pois a letra ℓ (latus, "lado") era muita utilizada para essa

[19] Citado em Barroso (2007, p.27).

finalidade. Antes de Rudolff era, normalmente, encontrada a seguinte notação do latim “radix quadratum 49 aequalis 7” ou ainda “radix 49 æ 7”, que significava $\sqrt{49}$ = 7.

O livro *Arithmetica Integra* do alemão Michael Stifel (1487–1567), publicada em 1544, foi a mais importante das publicações de álgebras alemãs do século XVI. Também emprega o símbolo do radical tal como o de Rudolff.

O índice aparece no radical (como em notação moderna) com o matemático francês Albert Girard (1595–1632). Alguns anos depois, o matemático britânico John Wallis (1616–1703) escreveu em 1655 o índice da seguinte maneira: $\sqrt{{}^3x}$ (muito próximo da representação atual, $\sqrt[3]{x}$).

O traço horizontal do radical utilizado atualmente apareceu com o filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596–1650) em seu *La Géométrie*[20], onde declara que: toda a Aritmética é composta, de apenas quatro ou cinco operações, que são a Adição, a Subtração, a Multiplicação, a Divisão e a Extração das Raízes, que pode ser considerada um tipo de Divisão.

A raiz quadrada em livros didáticos no Brasil

Valente (1999) apresenta sua extensa pesquisa, no Brasil vista nos livros didáticos sobre o ensino de matemática, desde o período de enquanto colônia portuguesa (1500–1822), avançando em tempos de Império (1822-1889) e finalmente início da República.

Nos primórdios desse período surgem os primeiros livros de matemática do engenheiro militar português José Fernandes Pinto Alpoim (1695-1765): *Exame de Artilheiros* em 1744 e *Exame de Bombeiros* em 1748, dedicados à preparação de alunos para ingressar nessas funções de ordem militar. Os livros de Alpoim não foram impressos no Brasil, vieram de Lisboa, conforme escrito na página de rosto dos seus livros. Apenas em 1792 com a criação da Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho no Rio de Janeiro, onde se

[20] Disponível em <https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/cadernos/article/view/556/436>. Acesso em 19 maio 2018.

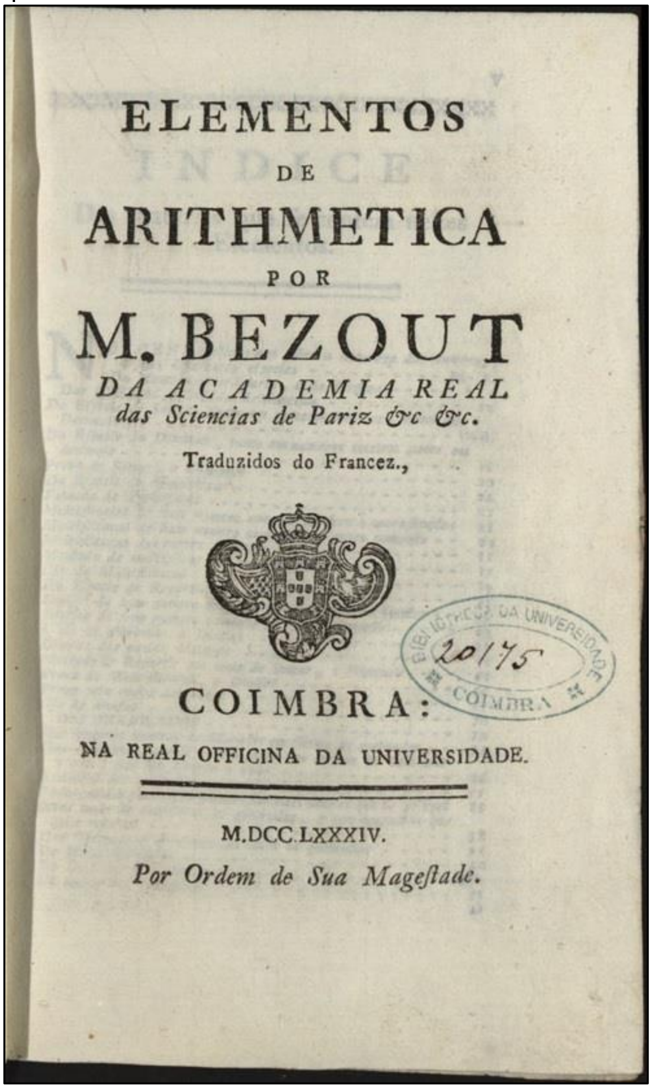
utilizava a *Geometria Prática* do engenheiro francês Bernard Forest de Bélidor em adição ao *Elementos de Aritmética*[21] do matemático também francês Étienne Bézout.

Os livros de José Alpoim e as obras dos franceses Bélidor e Bézout constituíram referências importantes para as futuras matrizes escolares da Matemática no Brasil. A adoção de Bélidor e Bézout inaugura a separação entre Geometria e Aritmética, duas disciplinas autônomas e posteriormente vem a Álgebra. Assim, temos essa matemática voltada diretamente à prática, desenvolvida pedagogicamente nas escolas técnico-militares que passará aos colégios e preparatórios do século XIX, e orientará os autores brasileiros a escreverem seus próprios livros.

A obra de Étienne Bézout é organizada de seguinte maneira: Números e as quatro operações da aritmética; Quebrados ou frações; Números complexos; Números quadrados e cúbicos e extração de raízes; Razões e proporções e Logaritmos.

[21]Disponível em <https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/9254/globalItems.html>

Figura 2: Capa[22] do livro Elementos de Arithmetica de Étienne Bézout – 1784.


ELEMENTOS

DE

ARITHMETICA

POR

M. BEZOUT

DA ACADEMIA REAL

das Sciencias de Pariz &c &c.

Traduzidos do Francez.,

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXIV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

Fonte: Universidade de Coimbra.

Nesse livro, as operações fundamentais da aritmética são ditas como, somar, diminuir, multiplicar e repartir. Potenciação e radiciação sucedem as quatro operações básicas. A extração de raiz é mostrada como a operação inversa da potenciação. Notamos que é enfatizado saber os quadrados dos nove primeiros números inteiros[23], para sua utilização no cálculo da extração da raiz quadrada, conforme figura 3.

[22]Disponível em <https://digitalis-dsp.uc.pt/html/10316.2/9254/Capa.jpg>.

[23]"Se a quantidade se compõem tão somente de unidades, o número que a exprime se chama inteiro" (BÉZOUT, 1784, p.2).

Figure 3: Quadrados dos números de 1 a 9 no livro de Étienne Bézout.

Se o numero propoſto conſtar de hum ou dous algariſmos, a ſua raiz, em numero inteiro, ſerá algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados ſaõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Aſſim v. gr. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, ſerá 8; porque eſtando 72 entre 64 e 81, a ſua raiz tambem ſe achará entre as raizes dos ditos numeros, que ſaõ 8, e 9; e por conſeguinte ſerá 8 com hum quebrado. Eſte quebrado porem nunca ſe póde determinar exactamente, mas póde approximar-ſe continuamente, como mais abaixo ſe moſtrará.

132 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-ſe numero *ſurdo irracional*, ou *incommenſuravel*.

Fonte: Bézout (1784, p.128).

No item 136, é explicado, utilizando como exemplo $\sqrt{2916}$, que previamente fora calculado, 54^2 = 2916, E no item 137 “Do que acabamos de mostrar concluiremos em geral o methodo tirar a raiz quadrada de qualquer número, que não tiver mais que quatro letras, nem menos de trez" (BÉZOUT, 1784, p.132).

Figure 4: Exemplo I da extração de raiz quadrada.

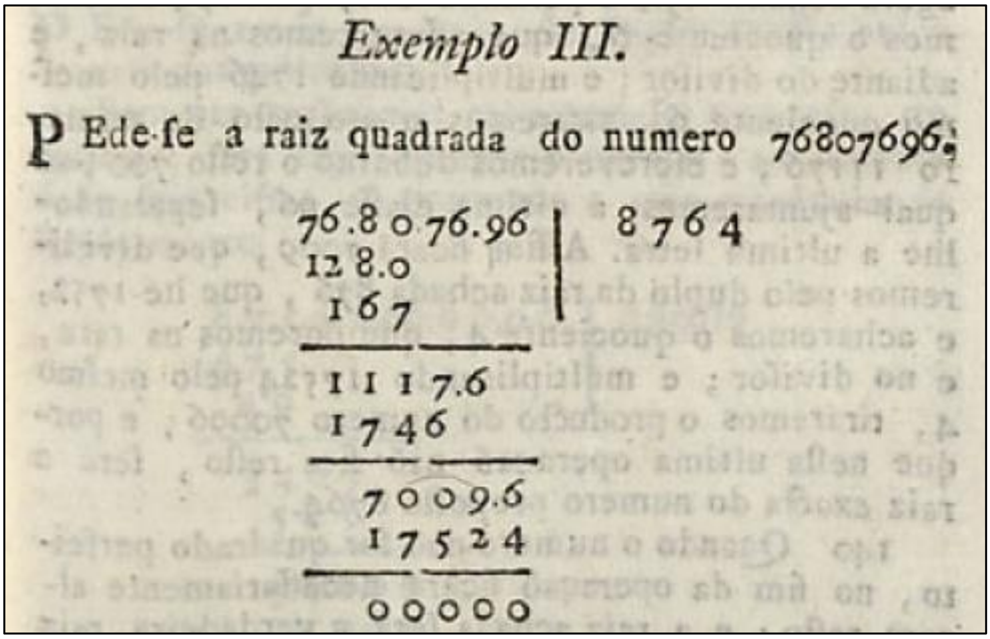
Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Fonte: Bézout (1784, p.130).

Na página 135 (figura 5), se tem outro cálculo para $\sqrt{76807696}$, nele não vemos detalhes de como surgem os valores no dividendo e no divisor, conforme mostraremos no capítulo 3, com o método de extração de raiz quadrada, porém o autor descreve em texto a explicação da obtenção do resultado.

Figure 5: Exemplo de extração de raiz quadrada no livro de Étienne Bézout.



Exemplo III.

PEde-se a raiz quadrada do numero 76807696.

76.8 0 76.96 | 8 7 6 4
12 8.0
1 6 7
1 1 1 7.6
1 7 4 6
7 0 0 9.6
1 7 5 2 4
0 0 0 0 0

Fonte: Bézout (1784, p.135).

Assim descrita a operação do exemplo III:

> Tendo distribuido o numero proposto em classes de duas letras cada huma da direita para a esquerda, buscaremos a raiz da ultima classe à esquerda 76, que acharemos ser proximadamente 8, e aí sentaremos este algarismo adiante da risca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, escrevemos por baixo o resto 12 para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 80, separando-lhe com hum ponto a ultima letra 0. Debaixo da parte que fica 128 escreveremos o divisor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a divisão, acharemos o quociente 7, que escrevemos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem adiante do divisor 16. Então multiplicaremos 167 pelo mesmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, escrevendo por baixo o resto 111, para junto do qual traremos a classe seguinte 76, separando nella a ultima letra. Por baixo da parte restante 1117 escreveremos o divisor 174, que he dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que assentaremos na raiz, e adiante do divisor; e multiplicando 1746 pelo mesmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e escreveremos debaixo o resto 700, ao

> qual ajuntaremos a ultima classe 96, separando-lhe a ultima letra. Assim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no divisor; e multiplicando 17524 pelo mesmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque nesta ultima operação não fica resto, será a raiz exacta do numero proposto 8764 (BÉZOUT, 1784, p.135-136).

No exemplo IV, na página 137, é calculado para uma raiz quadrada com três casas decimais. Adiante, é exposto como se procede para extração de raízes cúbicas, de modo idêntico ao descrito para raízes quadradas. Encerrando o conteúdo de radiciação nesse livro.

A Família Real Portuguesa de mudança para o Brasil em 1808, traz consigo a Academia Real dos Guardas-Marinha e em 1810 é fundada a Academia Real Militar com as atividades iniciadas em 1811, onde se criou um Curso de Ciências Físicas, Matemáticas e Naturais, com duração de quatro anos. Os livros adotados eram de Leonhard Paul Euler, Étienne Bézout, Adrien-Marie Legendre, Gaspard Monge, Sylvestre-François Lacroix e além de eminentes textos franceses.

Lacroix escreveu os seguintes livros: *Traité élémentaire d'arithmétique* (1797), *Traité élémentaire de trigonométrie* (1798), *Elémens de géométrie* (1799), *Complément des élémens d'algèbre* (1800) e *Traité élémentaire de calcul differéntiel et du calcul intégral* (publicado integralmente em 1802). Ele foi a grande referência inicial para o ensino de álgebra no Brasil e as suas obras adotadas foram o *Tratado Elementar de Aritmética*, o *Complemento dos Elementos de Álgebra* e *Elementos de Geometria*. Entretanto diferentemente de Bézout, extração de raízes e teoria dos logaritmos são conteúdos de álgebra e não de aritmética.

A Álgebra de Lacroix carregava os seguintes conteúdos:

- Noções preliminares sobre a passagem da Aritmética para a Álgebra.
- Equações.
- Da resolução das equações do primeiro grau a uma só incógnita.
- Métodos para efetuar operações com quantidades literais.
- Adição de quantidades algébricas.
- Multiplicação.

- Divisão.
- Frações algébricas.
- Questões a duas incógnitas e quantidades negativas.
- Resolução de um número qualquer de equações do primeiro grau com número igual de incógnitas.
- Fórmula geral para resolução de equações de primeiro grau.
- Equações de segundo grau a uma incógnita.
- Extração de raiz quadrada das quantidades algébricas.
- Formação de potências dos monômios e extração de suas raízes.
- Formação de potências das quantidades complexas.
- Extração de raízes das quantidades complexas.
- Cálculo de radicais.
- Resolução por aproximação das equações numéricas.
- Proporções e progressões.
- Teoria das quantidades exponenciais e logaritmos.

Os primeiros autores de livros didáticos destinados às nascentes escolas de primeiras letras e liceus orientam-se por Bézout e Lacroix, oriundos da Academia de Marinha e da Academia Militar, onde, respectivamente, as obras de Bézout e Lacroix eram adotadas (VALENTE, 1999).

Como se apresenta o algoritmo da raiz quadrada nos livros indicados e selecionados para análise? Será que diferem nas suas abordagens em função de possíveis diferentes algoritmos para a extração da raiz quadrada dos números?

No próximo capítulo apresentaremos as fundamentações matemáticas subjacentes aos algoritmos da radiciação, particularmente dos algoritmos da raiz quadrada.

CAPÍTULO 2

Algoritmo da raiz quadrada

Um algoritmo[24] é uma Sequência de raciocínios ou operações que oferece a solução de certos problemas. Com o algoritmo da radiciação podemos extrair a raiz quadrada de qualquer número, exata ou com um erro de aproximação desejado.

Nos livros didáticos contemporâneos, encontramos explicações interessantes acerca do cálculo da raiz quadrada. Vejamos um exemplo extraído em (DANTE, 2015, p.15): um valor aproximado para $\sqrt{18}$, fazendo aproximações sucessivas. Veja:

- É maior do que 4, pois 4^2 = 16 e 16 < 18.
- É menor do que 5, pois 5^2 = 25 e 25 > 18.

Portanto, $\sqrt{18}$ fica entre 4 e 5, ou seja, 4 < $\sqrt{18}$ < 5.

Como $(4{,}1)^2$ = 16,81; $(4{,}2)^2$ = 17,64; $(4{,}3)^2$ = 18,49; então, $\sqrt{18}$ está entre 4,2 e 4,3, ou seja, 4,2 < $\sqrt{18}$ < 4,3 (aproximação até décimos: 4,2 por falta e 4,3 por excesso).

Como $(4{,}21)^2$ ≅ 17,72; $(4{,}22)^2$ ≅ 17,81; $(4{,}23)^2$ ≅ 17,89; $(4{,}24)^2$ ≅ 17,98; $(4{,}25)^2$ ≅ 18,06; então, $\sqrt{18}$ está entre 4,24 e 4,25, ou seja, 4,24 < $\sqrt{18}$ < 4,25 (aproximação até centésimos: 4,24 por falta e 4,25 por excesso). Indicamos $\sqrt{18}$ ≅ 4,24 (por falta) e $\sqrt{18}$ ≅ 4,25 (por excesso).

E em (MORI; ONAGA, 2005, p.48): Qual é a $\sqrt{6{,}25}$?

- $\sqrt{6{,}25}$ está entre 2 e 3. Logo, a parte inteira é 2.
- Determinamos os algarismos dos décimos de $\sqrt{6{,}25}$, por tentativa, observando o algarismo dos centésimos, que é 5.
- Vamos experimentar 2,5.
- $(2{,}5)^2$= 6,25. Logo, $\sqrt{6{,}25}$ = 2,5.

[24] Disponível em <https://www.dicio.com.br/algoritmo/>

Nestes dois exemplos foi adotado o procedimento conhecido por *tentativa e erro*, que é um dispositivo para extração da raiz quadrada de um número (que sabemos antecipadamente é um quadrado perfeito), entretanto pode precisar de muitas iterações para obter o resultado, apresentamos com o seguinte exemplo:

Calcularemos $\sqrt{289}$ utilizando esse método.

Seja x = $\sqrt{289}$ = $\sqrt{200+89}$.

Como, $\sqrt{100} < \sqrt{289} < \sqrt{400}$, temos que 10 < x < 20.

Logo, x = (***d*** ·10 + ***u***).

Vemos que, 10 = $\sqrt{100} \leq \sqrt{\mathbf{200}} \leq \sqrt{400}$ = 20 e, 1 = $\sqrt{1} \leq \sqrt{\mathbf{89}} \leq \sqrt{100}$ = 10.

Primeiramente, encontraremos o valor de ***d***.

De, 1·10 = 10 = $\sqrt{100} \leq \sqrt{200} \leq \sqrt{400}$ = 20 = 2·10, temos 1·10 $\leq$ ***d*** ·10 $\leq$ 2·10.

Contudo, ***d*** não pode ser 2, senão $(\mathbf{2}\ \cdot 10\ +\ \boldsymbol{u})^2 \geq (2\cdot 10)^2$ = 400, o que não ocorre!

Logo, ***d*** = 1. E obtivemos x = (***1*** ·10 + ***u***).

Agora, o número ***u*** será escolhido aleatoriamente, pois não há uma regra explícita para selecionarmos o seu valor, tomamos intuitivamente um número que consideramos plausível e testamos até obter a resposta.

Para prosseguirmos, observemos o seguinte:

De, 1 = $\sqrt{1} \leq \sqrt{89} \leq \sqrt{100}$ = 10. Precisamente, 9 = $\sqrt{81} \leq \sqrt{89} \leq \sqrt{100}$ = 10.

Já temos que, x = (***d*** ·10 + ***u***) = (***1*** ·10 + ***u***). Verificando para ***u*** = 9.

$(10\ +\ 9)^2$ = $(19)^2$ = 361 > 289, assim, ***u*** = 9 não serve. Com ***u*** = 8?

$(10\ +\ 8)^2$ = $(18)^2$ = 324 > 289, então não vale para ***u*** = 8. E para ***u*** = 7.

$(10 + 7)^2 = (17)^2 = 289$.

Logo, ***u*** = 7.

Concluímos que, x = (***1*** ·10 + ***7***) = 17 = $\sqrt{289}$. ■

Outro método de extração de raiz quadrada, encontrados em livros atuais, é a fatoração, ou decomposição em fatores primos. Quando nos debruçamos nos livros de referência da Matemática superior, encontraremos a fundamentação teórica para a extração da raiz quadrada para este método, que se baseia no Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). É um método para obtenção da raiz quadrada, desde que saibamos de antemão, que o número a ser fatorado seja um quadrado perfeito.

Antes, entretanto, precisamos de algumas definições pertinentes à prova do TFA. Conforme Domingues (2009):

Definição de número primo: Um número $p \in \mathbb{N}$, é dito primo quando:

1) $p \neq 0$ e $p \neq 1$;
2) Os únicos divisores de p são 1 e p;
3) Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ e $n \neq 1$, é denominado composto, se n não é primo. Deste modo, um número composto pode, sempre, ser fatorado em um produto $n = a \cdot b$, no qual $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

Observação: os números 0 e 1 não são primos e nem compostos.

Proposição: Se p é primo e $p \mid a \cdot b$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração: Suponhamos que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Consideremos que $p \nmid a$, provaremos que mdc $(a, p) = 1$. Se $c \mid a$ e $c \mid p$, então $c = 1$ ou $c = p$, pois p é primo (por hipótese), entretanto, $p \nmid a$, logo c = 1. Portanto mdc $(a, p) = 1$. ■

Proposição: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ e $n \neq 1$. O mínimo de S = { $x \in \mathbb{N} : x > 1$ e $x \mid n$ } é um primo.

Demonstração: S ≠ ∅, pois $n \in$ S. Seja p o mínimo de S, logo $p \neq 0$ e $p \neq 1$. Suponhamos a fim de obter uma contradição que p não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$, com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, tais que $p = a \cdot b$, então $a \mid p$. Como $a \mid p$ e $p \mid n$ logo, por transitividade, $a \mid n$, e a é menor do que p, temos que $a \neq 1$. Como, por hipótese, p o mínimo de S. Temos uma contradição. ■

Teorema Fundamental da Aritmética: Para todo natural a > 1 existem primos p_1, p_2, ..., p_r, (r ≥ 1), de maneira que a = $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r$. Além disso, se também a = $q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, (s ≥ 1), onde os q_j são igualmente primos, então r = s e cada p_i é igual a algum dos q_j (DOMINGUES, 2009, p.75).

Demonstração: Utilizaremos o segundo princípio de indução. Sejam a, b ∈ ℕ. Tomemos a ≥ 2. Se a = 2, como 2 é um número primo, existe uma decomposição trivial em fatores primos, logo o teorema é válido.

Agora, suponhamos o teorema válido para todo b, com 2 ≤ b < a. Seja a = b + 1. Se a é um número primo, logo existe uma decomposição trivial em fatores primos, e encerramos a demonstração.

Se a não é um número primo, então existem x, y ∈ ℕ tais que a = b + 1 = x· y. Notemos que x < (b + 1) e y < (b + 1). E pela hipótese de indução, x e y admitem uma decomposição por fatores primos logo, x = $p'_1 \cdot p'_2 \cdot ... \cdot p'_m$, (m ≥ 1) e y = $p"_1 \cdot p"_2 \cdot ... \cdot p"_n$, (n ≥ 1). Assim, a = (b + 1) = $(p'_1 \cdot p'_2 \cdot ... \cdot p'_m) \cdot (p"_1 \cdot p"_2 \cdot ... \cdot p"_n)$. Portanto, a é um produto de fatores primos.

Se $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s$, então p_1 divide $(q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_s)$, logo divide algum q_j, por exemplo, q_1. Como p_1 e q_1 são números primos, então p_1 divide q_1. Cancelando p_1 e q_1 na igualdade acima, temos $p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_r = q_2 \cdot q_3 \cdot ... \cdot q_s$. Procedendo dessa forma, sempre que necessário, obtemos a unicidade da decomposição por fatores primos. ■

Essa abordagem considerada no texto de Domingues (2009) é encontrada em livros didáticos contemporâneos. Encontramos um exemplo no livro de Dante (2015, p.14), onde é calculada $\sqrt{256}$ por decomposição em fatores primos.

Calcularemos $\sqrt{7225}$ através desse método.

Iremos decompor o número 7225 em fatores primos. Primeiramente, à direita do número 7225 riscamos um traço vertical, e à direita desse traço escreveremos os divisores primos de 7225, conforme mostrado abaixo.

Por convenção começamos com o menor primo que divide 7225, que é 5. Dessa divisão obtemos 1445, que é escrito embaixo do número 7225. O número 1445 é divisível por 5, ao dividir encontramos 289, que é posto sob o número 1445.

O menor divisor primo para 289 é 17, e o resultado dessa divisão é 17, que é escrito abaixo de 289 e finalmente, dividindo 17 por 17 resulta em 1, terminada assim a fatoração. Com isso, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 7225 & 5 \\ 1445 & 5 \\ 289 & 17 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, 7225 = $5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 17 = 5^2 \cdot 17^2$.

Logo, $\sqrt{7225} = \sqrt{5^2 \cdot 17^2} = \sqrt{(5 \cdot 17)^2} = (5 \cdot 17)^{\frac{2}{2}} = 5 \cdot 17 = 85$. ■

Nas obras analisadas foram encontrados dois procedimentos ou métodos, de *radiciação por aproximação por uma fração* e da *extração da raiz quadrada* (denotado por regra de extração da raiz quadrada), que apresentamos a seguir:

Método de radiciação por aproximação por uma fração,

Consiste em um procedimento para obter uma aproximação para um número irracional da forma $\sqrt{n}$, no qual *n* é um número inteiro positivo e o erro (aproximação) é menor do que $\frac{1}{d}$, com *d* > 1, por uma fração, como em Vianna (1906, p.168).

Pela propriedade arquimediana dos números reais, temos para $x \in \mathbb{N}$ qualquer,

$$\frac{x}{d} < \sqrt{n} < \frac{x+1}{d} \Rightarrow x < d\sqrt{n} < x+1 \Rightarrow x^2 < d^2 n < (x+1)^2$$

Como $d^2 n$ está situado entre dois números inteiros quadrados perfeitos consecutivos, e $n,\ d$ são conhecidos, logo podemos encontrar o valor de x, e substituir na desigualdade dada:

$$\frac{x}{d} < \sqrt{n} < \frac{x+1}{d}$$

Deste modo, obtemos duas frações com erro menor do que $\frac{1}{d}$ para $\sqrt{n}$.

Quando x = 1, temos,

$$\sqrt{n} = \frac{d \cdot \sqrt{n}}{d} = \frac{\sqrt{d^2 n}}{d}$$

Tomemos um exemplo retirado de Vianna (1906, p.168):

1º Exemplo: Achar a raiz quadrada de 28, sem erro de $\frac{1}{7}$.

$$\sqrt{28} = \frac{7 \cdot \sqrt{28}}{7} = \frac{\sqrt{7^2 \cdot 28}}{7} = \frac{\sqrt{49 \cdot 28}}{7} = \frac{\sqrt{1372}}{7} = \frac{37}{7}$$

No comentário, no livro, sobre o cálculo efetuado não é mostrado como foi obtida a aproximação de $\sqrt{1372}$ = 37. Sabemos que $\sqrt{1372}$ = $14 \cdot \sqrt{7} \cong$ 37,04051835. Contudo é apenas argumentado para tirar a raiz quadrada do produto $\sqrt{49 \cdot 28}$.

Na análise do livro de Vianna, este exemplo sucede a descrição da regra para extração da raiz quadrada, que é método seguinte que apresentamos.

Método da extração da raiz quadrada

Este método aparece nos livros didáticos analisados para esta pesquisa e é denotado por **regra da extração da raiz quadrada**, sendo descrito em forma de breve texto acompanhado por algum exemplo. Na demonstração que segue, adotamos para um número com três algarismos, todavia a demonstração pode se estender para um número com qualquer quantidade de algarismos.

Seja *n* um número formado por três algarismos, logo *n* é a soma de *c* centenas + *d* dezenas + *u* unidades, assim *n* = *cdu*, no qual $0 \leq c, d, u \leq 9$. Consideremos *n* = $\sqrt{N}$.

Temos $N = (c10^2 + d10 + u)^2 = (c10^2 + d10 + u) \cdot (c10^2 + d10 + u) =$

$(c^2 10^4 + c10^2 d10 + c10^2 u) + (d10c10^2 + d10d10 + d10\mathrm{u}) + (uc10^2 + ud10 + u^2) =$

$c^2 10^4 + 2c10(d10^2) + d(d10^2) + 2c10^2 u + 2d10\mathrm{u} + u^2 =$

$c^2 10^4 + 2c10(d10^2) + d(d10^2) + [2c10^2 + 2d10 + u]u =$

$c^2 10^4 + 2c10(d10^2) + d(d10^2) + [(2c10 + 2d)10 + u]u =$

$c^2 10^4 + (2c10 + d)(d10^2) + [2(c10 + d)10 + u]u.$

Adotando, A = c^2, B = $(2c10 + d)d$, C = $[2(c10 + d)10 + \ u]u$.

Temos, N = A10^4 + B10^2 + C, com A, B, C ∈ $\mathbb{Z}$ e 0 ≤ A, B, C ≤ 99.

Exemplo: Calculemos $\sqrt{751689}$.

Observemos que, 751689 = 75$\cdot$ $10^4 + 16 \cdot 10^2 + 89$, comparando com o resultado acima, podemos escrever A = 75, B = 16 e C = 89. Este fato justifica a separação em classes binárias da direita para a esquerda no algoritmo da raiz quadrada. Assim, separamos 754689 em três classes, e obteremos como resposta da radiciação um número de três algarismos, n = *cdu*. Encontraremos durante a operação de extração da raiz quadrada, nessa sequência, os valores para *c, d, u*.

Para calcular o valor de *c*, temos c^2 ≤ A = 75, assim, c^2 = 64 ≤ 75, logo *c* = 8. Procedendo como no algoritmo da divisão, traçamos um segmento de reta vertical entre os números 751689 e 8. E sob o número 8 traçamos outro segmento de reta horizontal. A seguir subtraímos 64 de 75.

75.16.89	8
-64	8^2 = 64
11	

75.16.89	8
-64	8^2 = 64
1116	

Obtido o valor de *c*, “baixamos” a classe seguinte 16 e obtemos o número 1116. Para determinar o valor de *d* de modo que $(2c10 + d)d\ \leq$ 1116, logo, $(2 \cdot 8 \cdot 10 + d)d\ \leq$ 1116. Multiplicamos por 2 e por 10 o valor de *c* = 8 conforme continuamos a operação.

Dividimos 1116 por 160, 1116 ÷ 160 = 6,975. Consideramos a parte inteira desse resultado, o número 6, que é o valor de *d*.

75.16.89	8
-64	8² = 64
1116	(2·8·10 + d)·d = (160 + d)·d

75.16.89	86
-64	8² = 64
1116	(2·8·10 + d)·d = (160 + 6)·6 = 996

75.16.89	86
-64	8² = 64
1116	(2·8·10 + d)·d = (160 + 6)·6 = 996
-996	
12089	

Ao substituirmos $d = 6$ no quociente, teremos (160 + 6)·6 = 996, que devemos subtrair de 1116, obtendo 120. "Baixamos" a classe seguinte 89 e temos o número 12089. Para encontrar o valor de u, tal que $[2(c \cdot 10+d)10+ u] \cdot u \leq 12089$. Como já temos os valores de $c = 8$ e $d = 6$, ao substituí-los temos, $[2(8 \cdot 10 + 6)10 + u] \cdot u = [1720 + u] \cdot u \leq 12089$.

Agora dividimos 12089 por 1720, $12089 \div 1720 \cong 7{,}028$. Novamente tomamos a parte inteira do resultado, que é 7, que é o valor de u. Assim, [1720 + 7]·7 = 12089.

75.16.89	867
-64	8² = 64
1116	(2·8·10 + d)·d = (160 + 6)·6 = 996
-996	[1720 + u]·u = [1720 + 7]·7 = 12089
12089	
-12089	

Portanto, $\sqrt{751689} = 867$. ■

Mas como se apresentam os algoritmos nos livros didáticos selecionados do final do século XIX, e na primeira década do século XX?

CAPÍTULO 3

Análise dos livros didáticos

As fontes históricas que pesquisei foram os oito (8) livros de aritmética discriminados anteriormente, publicados no período de 1879 a 1907, do império à república. A análise dessas fontes apoia-se nas perspectivas teóricas de Choppin, dizendo que o livro didático constitui "o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações" (CHOPPIN, 2004, p.553). As orientações e prescrições presentes no livro didático assumem a característica de orientar o ensino deste conteúdo.

Ao iniciar essa pesquisa realizei uma busca no RCD onde encontrei as fontes e foram mapeadas vinte e seis publicações das quais oito (8) se tratavam de livros didáticos, que oferecem uma amostragem do propósito da pesquisa, no período de 1879 a 1907. E segundo Valente:

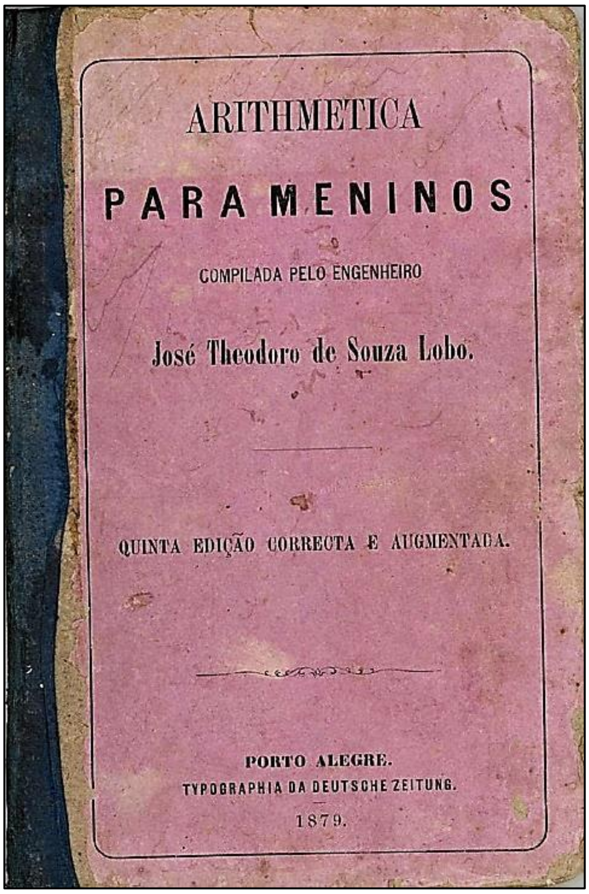
> Realizar o estudo histórico da matemática escolar, da matemática praticada no interior das escolas, exige que se deva considerar os produtos dessa cultura do ensino de matemática, os elementos que foram elaborados ao longo do tempo, que deixaram traços que permitem o seu estudo. Livros didáticos de matemática, documentos contidos nos arquivos escolares, provas e exames, materiais de professores e alunos dentre outros, são exemplos desses produtos (VALENTE, 2008, p.81).

Mostraremos que analisando as obras, que tratam do tema dessa pesquisa, é possível destacar que os autores ao descrever o algoritmo ou regra para extração da raiz quadrada caracterizaram uma vulgata, conforme Chervel, pois descrevem o conteúdo de modo semelhante, mesmo no decorrer dos anos que separam as publicações.

3.1. *Arithmetica para meninos*, 5ª edição – José Theodoro de Souza Lobo (1879)

Um pouco sobre o autor: José Theodoro de Souza Lobo (1846–1913), ou José Teodoro de Souza Lobo, natural de Porto Alegre, seus primeiros estudos foram no Colégio Caraça, Minas Gerais. Depois foi para o Rio de Janeiro, onde se formou engenheiro geógrafo pela Escola Central, ex Escola Militar da Corte. Regressou a Porto Alegre, lecionou matemática elementar e superior, português, francês e latim no Colégio Gomes, foi professor e diretor do seu próprio colégio (Colégio Souza Lobo), professor de matemática na Escola Normal, diretor geral da Instrução Pública na Província, diretor da Escola Normal, Inspetor de Ensino, e ainda escreveu livros didáticos, entre os quais “Geographia Elementar”, “Primeira Arithmetica para meninos” e “Segunda arithmetica para meninos”, “Segunda Arithmetica” (HILZENDEGER, 2009).

Figura 6. Capa do livro *Arithmetica para meninos* de José Theodoro de Souza Lobo.



Fonte: Lobo (1879).

Descrição da obra: esse livro possui 135 páginas, expõe inicialmente, uma seção com quarenta princípios elementares, de grandeza a “base de um systema de numeração” e “arithmetica”. Depois é dividido em três seções: a primeira delas é intitulada Primeira Parte, sendo subdivida em seis capítulos respectivamente:

- “Operações fundamentaes (addição, subtracção, multiplicação e divisão)”;
- Algumas proposições sobre números;
- "Origem dos numeros: – inteiro, quebrado ou fracção, e mixto";
- "Fracções ordinarias";
- "Fracções decimaes" e
- "Metrologia e numeros complexos".

A seguir aquela que foi denominada Segunda Parte, contém dois capítulos, a saber:

- Razões e proporções; e “Applicações”.

E a última é o "Appendice – Extracção das raizes quadradas e cubicas dos números".

No capítulo 1 da Primeira parte, item 41, é definido o seguinte “chamam-se OPERAÇÕES as differentes maneiras por que se compõem e se decompõem os números”. A seguir, são apresentadas as quatro operações: "addição, subtracção, multiplicação e divisão. Uns designam estas quatro operações pelos nomes de: sommar, diminuir, multiplicar e dividir" (LOBO, 1879, p. 11).

O apêndice contém sete páginas, nele o autor começa definindo: "Quadrado, ou segunda potencia de um número, é o producto de dois factores iguaes a esse numero, ou producto do numero por si mesmo” e "Raiz quadrada, ou raiz 2ª de um numero, é o numero que sendo multiplicado por si mesmo, ou elevado ao quadrado, produz o numero proposto" (LOBO, 1879, p. 129).

O autor enfatiza que para se extrair a raiz quadrada de um número, se deve conhecer os quadrados dos nove primeiros números inteiros, mostrados nas duas linhas abaixo:

Quadro 2: Raízes quadradas x quadrados dos nove primeiros números

Raizes quadradas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados..........	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Fonte: Lobo (1879, p. 129).

Figura 7: Regra para a extração da raiz quadrada dos números inteiros

REGRA PARA A EXTRACÇÃO DA RAIZ QUADRADA DOS NUMEROS INTEIROS.

Divide-se o numero dado em classes de 2 algarismos começando-se da direita para a esquerda; podendo a ultima constar de um só algarismo.

Procura-se o maior quadrado contido na 1ª classe da esquerda e a sua raiz (que será o primeiro algarismo da raiz pedida) se escreve á direita do numero proposto, d'elle separando-se por um traço vertical.

Da classe considerada subtrahe-se o maior quadrado nella contido, e á direita do resto se escreve a classe seguinte.

Do numero assim formado separa-se o ultimo algarismo da direita, e divide-se o numero resultante pelo dobro da raiz achada. O quociente se escreverá á direita da raiz

Fonte: Lobo (1879, p. 129).

Figura 8: Continuação da regra para a extração da raiz quadrada com exemplo

achada e á direita do numero que serviu de divisor. Este divisor assim augmentado multiplica-se pelo ultimo algarismo da direita, e subtrahe-se o producto do dividendo com o algarismo que se havia separado.

A' direita do resto escreve-se a 3ª classe, e continúa-se do mesmo modo, até se haver considerado todos os algarismos.

Quando não ha resto, o numero dado é quadrado perfeito; se houver resto, a raiz achada é a raiz do maior quadrado contido no numero dado.

Exemplo: 58.52.25	765	
49	$(7 \times 2) = 14$	1º divisor
95.2	146	
876	6	
762.5	876	
7625	$(76 \times 2) = 152$ . . .	2º divisor
0	1525	
	5	
	7625	

A raiz quadrada de 585225 é 765 (exactamente).

Fonte: Lobo (1879, p.130).

A regra da extração da raiz quadrada[25] é descrita no livro de modo sucinto. Destacamos a orientação para separar o número em classes com dois algarismos, começando da direita para esquerda e que a última classe à esquerda pode ter só um algarismo. A seguir o autor separa em três casos a extração de raízes fracionárias, conforme as figuras mostradas abaixo:

[25] Capítulo 2, item 3: Método de extração de raiz quadrada.

Figura 9: Regra do 1º caso para a extração de raízes fracionárias

REGRA DO 1º CASO. - *Ajuntam-se ao inteiro tantas classes de dois zeros quantas fôrem as casas de dizima que se quizer na raiz. Extrahe-se depois a raiz pela regra geral, e á direita d'ella separam-se as casas de dizima pedidas.*

Exemplo: Extrahir a raiz quadrada de 1328 sem erro de um centesimo.

13.28.00.00	3644
9	66
42.8	6
396	396
320.0	724
2896	4
3040.0	2896
29136	7284
1264	4
	29136

A raiz quadrada de 1328 sem erro de um centesimo é 36,44.

Fonte: Lobo (1879, p.130).

No caso 1, quando o número não é um quadrado perfeito, Lobo diz que para cada casa decimal requerida se adiciona uma classe de dois zeros após os algarismos do número dado.

Para o caso 2, a ênfase é para o completamento de zeros à direita do número dado para obtenção de classes com dois algarismos, zeros.

Figura 10: Regra do 2º caso para a extração de raízes fracionárias

Regra do 2º caso. — *Se a fracção decimal tiver um numero par de casas de dizima, extrahe-se a raiz como de um numero inteiro, tomando-se depois a metade das casas de dizima existentes na fracção dada.*

Quando é impar o numero de casas de dizima da fracção, torna-se primeiramente par, accrescentando-se zero á sua direita e opera-se como acima.

Vindo determinado o numero das casas de dizima que se quizer na raiz, é preciso, quando se accrescentam zeros, fazer com que o numero das casas de dizima do numero dado se torne duplo das que se pedem na raiz.

Exemplo: 1º Extrahir a raiz quadrada de 0,5929.

59.29	77
49	147
102.9	7
1029	1029
0	

A raiz quadrada de 0,5929 é 0,77 (approximadamente).

Fonte: Lobo (1879, p.131).

Figura 11: Regra do 3º caso para a extração de raízes fracionárias

Regra do 3º caso. — *Se os dous termos da fracção proposta fôrem quadrados perfeitos, extrahe-se separadamente a raiz ao numerador e ao denominador, e divide-se depois a primeira raiz pela segunda.*

Se unicamente o denominador fôr quadrado perfeito, extrahe-se a raiz approximada do numerador e a exacta do denominador.

Os dous termos não sendo quadrados perfeitos, multiplicam-se ambòs pelo denominador, extrahindo-se depois a raiz approximada do numerador e a exacta do denominador.

Exemplo 1º $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

Ex. 2º $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{2.645}{4} = 0,661$ (approximadamente).

Ex. 3º $\sqrt{\frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{5 \times 7}{7 \times 7}} = \sqrt{\frac{35}{49}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{49}} = \frac{5,916}{7} = 0,845$ (approximadamente.)

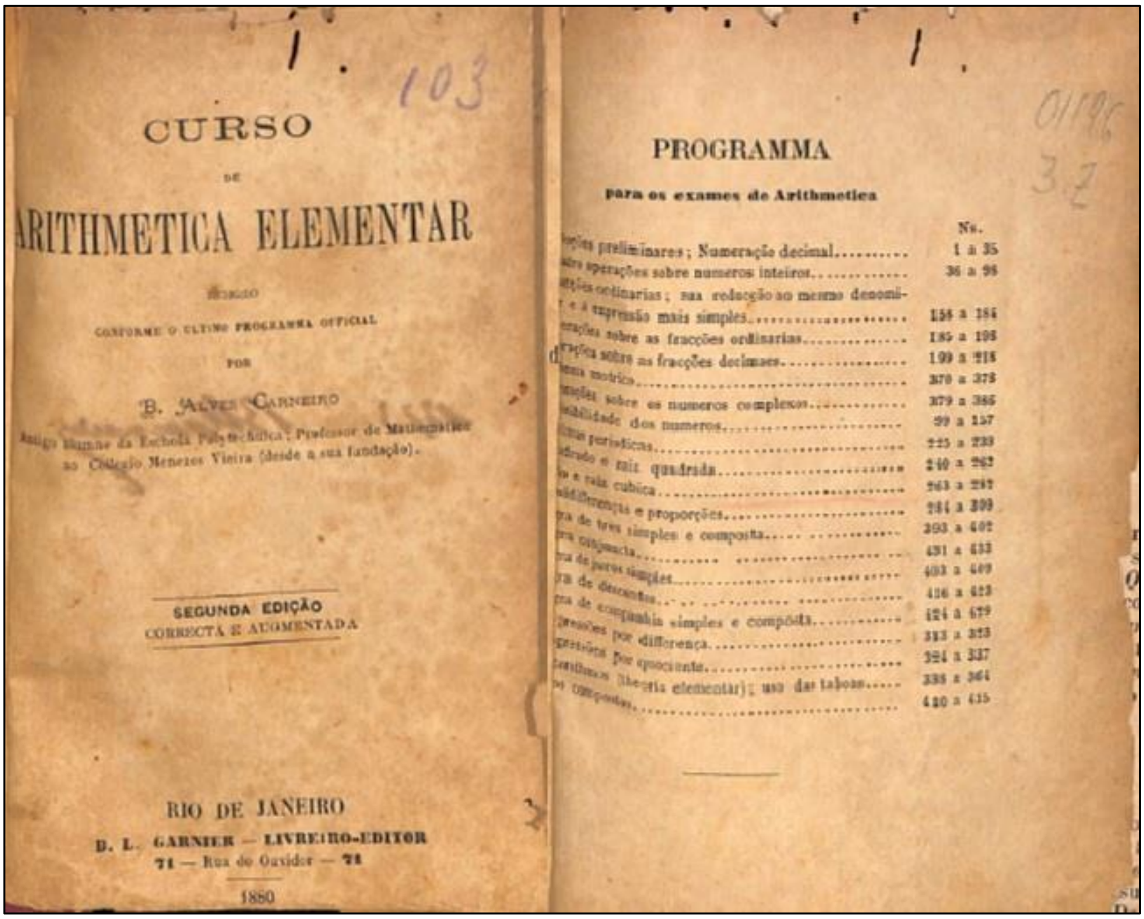
Fonte: Lobo (1879, p.131–132).

Para o caso 3, o tratamento é para radiciação de frações com numeradores e denominadores quadrados perfeitos ou não. Com isso, terminamos o conteúdo de radiciação desse livro.

3.2: *Curso de Arithmetica Elementar*, 2ª edição – B. Alves Carneiro (1880)

Descrição da obra: o livro possui 358 páginas. A sua capa digitalizada no RCD, não contém qualquer informação, por isso anexamos ao texto a folha de rosto com algumas informações relevantes.

Figura 12. Folha de rosto e Programa do livro *Arithmetica Elementar* de B. Alves Carneiro



Fonte: Carneiro (1880).

No livro há uma seção inicial com noções preliminares, que depois é dividida em duas "Partes", sendo a primeira destinada ao cálculo aritmético, apresenta oito "Livros" descritos a seguir:

Livro I: Operações fundamentais sobre números inteiros.

- Capítulo I: Operações.
- Capítulo II: propriedades da multiplicação e da divisão.

Livro II: Propriedades elementares dos números inteiros.

- Capítulo I: Divisibilidade.
- Capítulo II: Máximo divisor comum.
- Capítulo III: Números primos.
- Capítulo IV: Menor múltiplo comum.
- Capítulo V: Aplicações da decomposição em fatores primos.

Livro III: Operações fundamentais sobre frações ordinárias.

- Capítulo I: Propriedades.
- Capítulo II: Transformações.
- Capítulo III: Operações.

Livro IV: Operações fundamentais sobre números decimais.

- Capítulo I: Propriedades.
- Capítulo II: Operações.
- Capítulo III: Conversões.

Livro V: Potências e raízes.

- Capítulo I: Raiz quadrada.
- Capítulo II: Cubo e raiz cúbica.

Livro VI: Complemento do cálculo aritmético.

- Capítulo I: equidiferenças e proporções
- Capítulo II: Progressões.
- Capítulo III: Logaritmos.

A segunda parte: Aplicações em dois "Livros":

Livro VII: Sistemas metrológicos.

- Capítulo I: Sistema metrológico decimal.
- Capítulo II: Sistemas metrológicos complexos.
- Capítulo III: Conversões.

Livro VIII: Problemas usuais.

- Capítulo I: Regra de três.
- Capítulo II: Regra de juro.
- Capítulo III: Regra de desconto.
- Capítulo IV: Regra de companhia.
- Capítulo V: Regra de conjunta - misturas e ligas.

No Livro V da Parte I, o autor inicia definindo raiz quadrada, índice, extração de raízes e quadrado. Em seguida para a extração de raízes de número menor do que 100, aconselha que "Para facilitar a operação, convem que seja entregue à memoria a tabella seguinte" (Carneiro, 1880, p.179), idêntica àquela na página 129 do livro de José Theodoro de Souza Lobo (quadro 4), que replicamos abaixo:

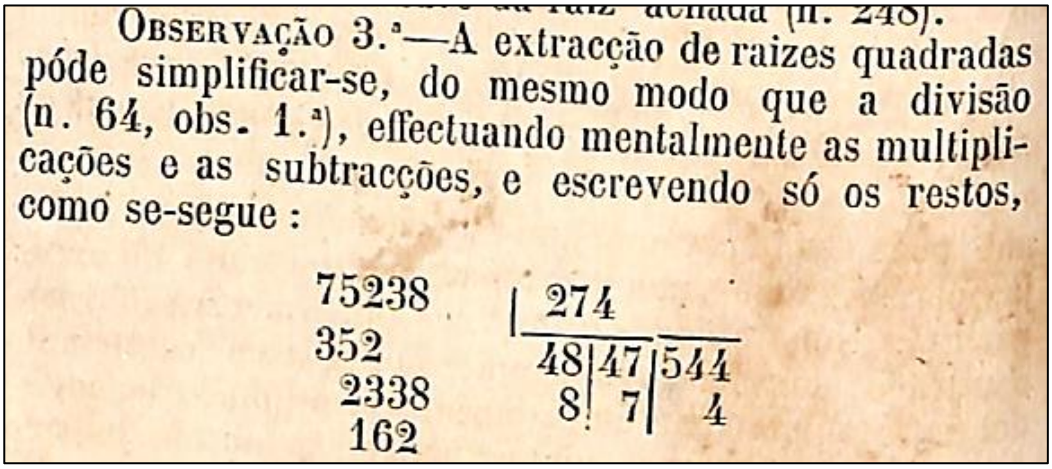
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrados
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Raízes

Para número maior do que 100, o algoritmo da extração da raiz quadrada é descrito em detalhes ao longo de seis páginas, com um exemplo ao finalizar, para então apresentar a regra escrita de modo abreviado:

> Regra. - Escreve-se o numero dado e à direita delle um traço vertical e outro horizontal (como na divisão).
>
> Para achar o algarismo das mais altas unidades, divide-se o numero em classes de dous algarismos, da direita para a esquerda, e extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na ultima classe à esquerda. Desta ultima classe tira-se o quadrado do algarismo que se-obtiver.
>
> Para achar o algarismo seguinte, escreve-se à direita do resto a segunda classe, a contar da esquerda, e divide-se as dezenas do numero resultante pelo dobro da raiz achada: o quociente é um numero egual ou superior ao algarismo pedido.
>
> Para verificar o algarismo obtido no quociente, escreve-se este algarismo à direita do dobro da raiz achada e por elle se-multiplica o numero assim formado: se o producto não exceder o numero constituido pelo primeiro resto e a segunda classe, o dicto algarismo é exacto; no caso contrario verifica-se, do mesmo modo, o algarismo immediatamente inferior.
>
> O terceiro, quarto, etc., algarismo da raiz quadrada determina-se como o segundo. Continua-se a operação até haver considerado todas as classes (CARNEIRO, 1880).

Da página 185 até a 195, o autor argumenta sobre raiz quadrada de qualquer número a menos de uma unidade fracionária e de número fracionários ordinários ou decimais.

Figura 12. Exemplo de extração da raiz quadrada


OBSERVAÇÃO 3.ª—A extracção de raizes quadradas póde simplificar-se, do mesmo modo que a divisão (n. 64, obs. 1.ª), effectuando mentalmente as multiplicações e as subtracções, e escrevendo só os restos, como se-segue:

75238	274		
352	48	47	544
2338	8	7	4
162			

Fonte: Carneiro (1880, p.186).

No exemplo apresentado acima, Carneiro diz que o cálculo pode ser simplificado e realizado mentalmente, em especial aparece no quociente um caso de tentativa e erro, quando do número 352, consideramos apenas os algarismos das centenas e das dezenas, 35 e dividimos pelo dobro do divisor que é 2, assim 35 ÷ 4 = 8. Adicionando 8 a 40[26], obtemos 48, que multiplicado por 8, 48 x 8 = 384, maior do que 352. Assim desprezando esse resultado, é tomado o número 7, desse modo, 47 x 7 = 329, que é subtraído de 352; e prossegue com a operação.

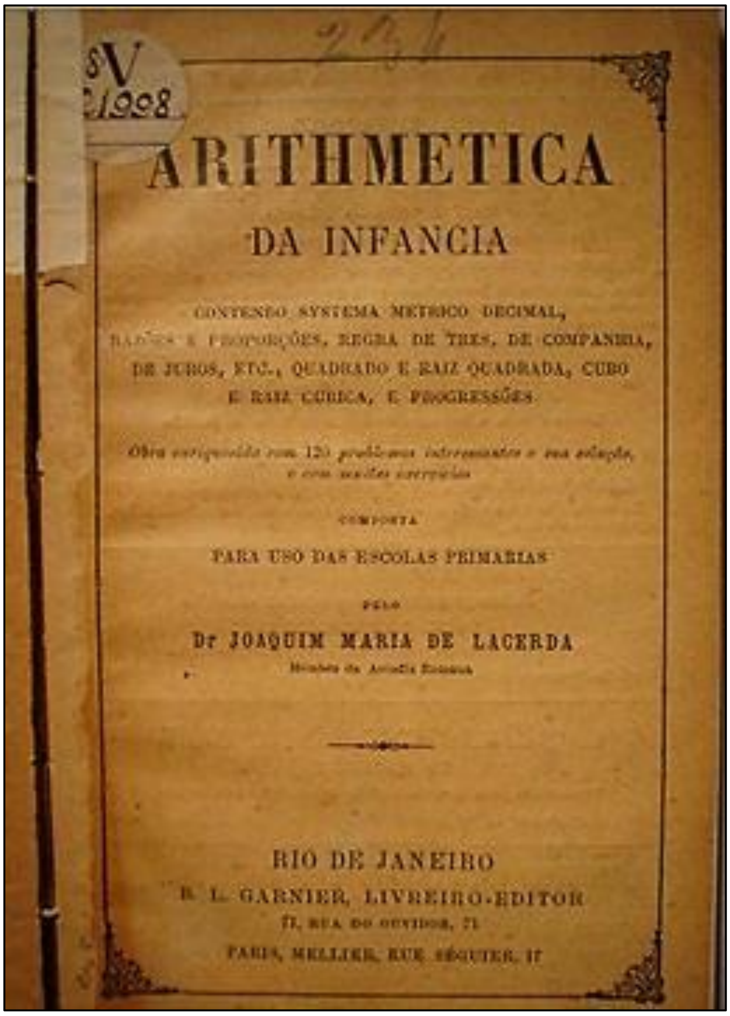
Damos por terminada a abordagem de raiz quadrada nesse livro.

[26] Da expressão $(2c10 + d)d$, na qual c = 2.

3.3: *Arithmetica da Infancia* – Joaquim Maria de Lacerda (1890)

A obra do Doutor Joaquim Maria de Lacerda (1838–1887), natural da cidade do Rio de Janeiro, em sua capa traz alguns dos conteúdos tratados no livro: "systema métrico decimal, razões e proporções, regra de três, de companhia, de juros, etc., quadrado e raiz quadrada, cubo e raiz cúbica, e progressões"; além de enfatizar que a obra era “enriquecida com 120 problemas interessantes e sua solução, e com muitos exercícios".

Figura 13. Capa do livro *Arithmetica da Infancia* de Joaquim Maria de Lacerda



Fonte: Lacerda (1890).

Este livro também serviu de fonte na pesquisa de Costa (2010), onde é mencionado que:

> O autor desse texto didático é advogado e mais uma vez encontramos a erudição do tom das descrições, isto é, extensas descrições acompanhadas de alguns exemplos mostrando para os alunos a forma de fazer as operações e as verificações. O livro avaliado possui 72 páginas. Encontra-se em uma estruturação de conteúdos separados em pontos permitindo que isso seja um instrumento de acompanhamento do ritmo da matéria pelo professor. A observação do índice ilustra os conteúdos e a estrutura desta obra, sendo que há exercícios e problemas de alguns assuntos abordados. Cada tópico é subdividido em vários pontos. E uma vez que todos os conteúdos são pontuados, parece que isto facilitaria a regência das aulas (COSTA, 2010, p. 168).

O livro foi editado após a morte do autor e era destinado às escolas primárias. O conteúdo era distribuído ao longo de suas 72 páginas trazendo no início desse o índice das matérias:

Figura 14. Índice das matérias do livro *Arithmetica da Infancia*

Arithmetica.

	Pag.		Pag.
Primeiras definições	3	Razões e proporções	46
Numeração	4	Regra de tres	48
As quatro especies ou operações fundamentaes	11	Problemas sobre a mesma	51
Pesos e medidas	16	Regra de companhia	51
Dinheiro em réis	17	Problemas sobre a mesma	52
Moedas brazileiras	18	Regra de juros	52
Exercicios sobre o que precede	19	Problemas sobre a mesma	54
Problemas sobre as quatro operações fundamentaes	20	Regra de desconto	54
Das fracções ordinarias	21	Regra de liga	55
Exercicios sobre os quebrados	27	Regra de falsa posição	55
Problemas sobre os mesmos	28	Quadrado e raiz quadrada	56
Numeros decimaes	29	Problemas sobre os mesmos	58
Exercicios e problemas sobre os decimaes	32	Cubo e raiz cubica	59
Numeros complexos	32	Problemas sobre os mesmos	61
Exercicios e problemas sobre os numeros complexos	41	Das progressões	62
Systema metrico decimal	42	Progressão arithmetica	62
Exercicios sobre o mesmo	45	Problemas sobre a mesma	63
		Progressão geometrica	64
		Problemas sobre a mesma	65
		Solução dos problemas d'este tratado de Arithmetica	65

Ligeiro esboço da Historia do Brazil 69

Fonte: Lacerda (1890).

Da página 10 até a 16 são apresentadas as “quatro espécies ou operações fundamentais da arithmetica: addição, subtracção, multiplicação e divisão". A extração de uma raiz quadrada surge a partir da página 56, no item 179 é apresentado o procedimento "para extrahir a raiz quadrada de um número inteiro":

Figura 15. Item 179 do livro *Arithmetica da Infancia*

179. Para extrahir a raiz quadrada de um numero inteiro, distribue-se o numero em classes de duas letras da direita para a esquerda, podendo a ultima classe á esquerda constar só de uma letra. Extrahe-se a raiz do maior quadrada contido na 1ª classe á esquerda; e essa raiz será o 1º algarismo da raiz pedida, o qual se escreve á direita do numero como se fosse um divisor, e subtrahe se o seu quadrado da 1ª classe á esquerda. A' direita do resto escreve-se a 2ª classe, separa-se com um ponto a letra da direita, dividem-se as restantes pelo dobro da raiz achada, e escreve-se o quociente á direita do 1º algarismo da raiz e á direita do numero que serviu de divisor. Multiplica-se este assim augmentado pelo seu ultimo algarismo, e subtrahe-se o producto do dividendo, comprehendida n'este a letra que se tinha separado. Ao lado do resto abaixa-se a 3ª classe, e pratica-se com elle assim augmentado o mesmo que com o resto precedente; e continua-se da mesma fórma até á ultima classe.

Fonte: Lacerda (1890, p.57).

No item seguinte, é dito que, se não ficar resto conclui-se que o número dado é um quadrado perfeito, mas se houver resto, a raiz achada é o maior quadrado contido nele, e pode continuar com a extração até uma aproximação desejada por decimais. E a raiz sempre deve constar de tantos algarismos quantos são as classes em que se dividiu o número.

No item 181, é mostrado um exemplo numérico, com algoritmo da extração da raiz quadrada conforme o item 179, onde aparece a separação do número em três classes e a semelhança com o algoritmo da divisão:

Figura 16. Item 181 do livro *Arithmetica da Infancia*

181. Se no decurso da operação em alguma subtracção não ficar resto, procede-se da mesma maneira, escrevendo á direita das cifras a classe seguinte. Se apparecer qualquer divisor maior que o respectivo dividendo, n'esse caso escreve se cifra na raiz, abaixa-se nova classe, separa-se a letra da direita, forma-se novo divisor e continua-se a operação conforme a regra dada.

EXEMPLO 1º. Extrahir a raiz quadrada de 130321.

```
1 3.0 3.2 1 | 361
  4 0.3     |-----
    7 2.1   | 66
      0 0 0 | 721
```

A raiz do maior quadrado contido na 1ª classe a esquerda é 3, que escrevo como se fosse divisor, e cujo quadrado 9 subtraio de 13. A' direita do resto 4 escrevo a 2ª classe 03, separo o algarismo 3, divido os outros dous 40 por 6, dôbro da raiz 3, e o quociente 6 escrevo ao lado da raiz 3 e á direita de 6 dôbro da mesma. Multiplico depois 66 por 6, subtraio o producto de 403, e á direita do resto 7 escrevo a ultima classe 21, separando o ultimo algarismo 1. Divido os outros dous algarismos 72 por 72 dôbro da raiz 36, e escrevo o quociente 1 á direita tanto de 36 como do seu dôbro 72. Multiplicando 721 por seu ultimo algarismo 1 e subtrahindo o producto do dividendo, augmentado 721, não fica resto algum : logo 361 é a raiz quadrada exacta de 130321.

EXEMPLO 2º. Extrahir a raiz quadrada de 3247694.

```
3.2 4.7 6.9 4 | 1802
2 2.4         |------
0 0 0 7 6 9.4 | 28
        4 9 0 | 3602
```

A raiz do maior quadrado contido na 1ª classe 3 é 1 cujo quadrado 1 subtraio de 3, ao resto 2 ajunto a 2ª classe 24, separo 4, divido 22 por 2 dôbro da raiz 1, e por ser 9 demasiado grande para por elle multiplicar 29, escrevo 8 á direita de 1 e do seu dôbro 2, multiplico 28 por 8 e subtraio o producto de 224. Como não fica resto, abaixo a 3ª classe 76, separo 6, e vendo que 7 é menor que o divisor 36, escrevo 0 na raiz, abaixo a ultima classe 94, separo o algarismo 4, divido os outros 769 por 360 dôbro da raiz 180, escrevo o quociente 2 á direita da raiz 180 e do seu dôbro 360, multiplico 3602 por 2, e subtraio o producto de 7694, o que dá 490 por resto. Logo a raiz quadrada pedida é incommensuravel.

EXEMPLO 3º Pede-se a raiz quadrada de 87567 até a casa dos millesimos.

```
8.7 5.6 7          | 295,917
4 7.5              |------------
  3 4 6.7          | 49    5909
    5 4 20.0       | 585   59181
      1 0  90.0           591827
        42 71 9 0.0
         1 29 1 1 1
```

Como fica um resto 542, contino a extracção da raiz ajuntando 2 cifras ao resto para obter decimos na raiz, e ao resto 1019 ajunto outras 2 cifras para obter centesimos na raiz, e ao resto 42719 ajunto ainda 2 cifras para obter millesimos na raiz, e poderia continuar assim indefinidamente.

182. A PROVA da extracção de uma raiz quadrada consiste em elevar ao quadrado a raiz achada e ajuntar-lhe o resto.

Fonte: Lacerda (1890, p.58-59).

Nesses dois exemplos são "pulados" passos intermediários que facilitariam a sua compreensão por um estudante, e que enunciamos aqui: como foi obtido o número 66 no quociente do exemplo 1º? Porque no exemplo

2º, a escolha do 28 no quociente não foi mais detalhada e a súbita conclusão de que a raiz quadrada era incomensurável?

No item posterior (182), o autor explica que a prova da extração da raiz quadrada consiste em elevar ao quadrado o resultado encontrado e lhe ajustar o resto. No item 183 é apresentado um exemplo para extrair a raiz quadrada de um “número quebrado” (fração), extraindo separadamente as raízes quadrada do numerador e do denominador, ou transformá-lo em um número decimal e prosseguir com a extração:

$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7} \cong$ 0,85714286 ou reduzir a fração $\frac{36}{49}$ em 0,73469388 (no livro está escrito 0,73469487) e $\sqrt{0{,}73469487} \cong$ 0,85714344 (no livro aparece $\sqrt{0{,}73469487}$ = 0,8571).

No último item, é descrito que se extrai a raiz quadrada de um número fracionário ou misto reduzindo-o a "quebrado" ou a decimais. E se encerra o tópico propondo problemas sobre o quadrado e a raiz quadrada:

Figura 17. Problemas sobre quadrado e raiz quadrada

PROBLEMAS SOBRE O QUADRADO E A RAIZ QUADRADA

1. Elevar ao quadrado 6472 unidades.

2. Elevar ao quadrado os numeros decimaes 246,75 e 0,025.

3. A superficie de um quadrado em unidades de uma certa especie obtem-se elevando ao quadrado o numero que indica a medida de um dos lados em unidades lineares correspondentes: assim a superficie de um quadrado que tem 4 metros em cada lado, é egual a 16 metros quadrados. Achar as superficies dos quadrados que teem em cada lado : 56 metros; 361 braças; 24 met. 3 decimet.

4. Que representa o numero 5,647255 em metros quadrados e submultiplos ?

5. Quer-se cercar de muro um terreno quadrado que tem 3600 metros quadrados de superficie; qual será o comprimento do muro?

6. Um jardineiro quer plantar em quadrado 3969 arbustos, de sorte que formem linhas rectas e parallelas em comprimento e em largura : quantos arbustos haverá em cada linha nas quatro faces ?

7. Quer-se tornar quadrado um terreno que tem 625 braças de comprimento sobre 400 de largura : quanto deve-se augmentar a largura e diminuir o comprimento para que o terreno tenha a mesma superficie ?

8. Extrahir a raiz quadrada dos numeros 6[illegible]3616 e 60883,5625.

9. A superficie de um campo quadrado é de 289 metros quadrados : qual é o seu perimetro ou contorno ?

10. Duas propriedades teem de superficie, uma 384,16 ares, a outra 216ª,09. Reunidas formam um quadrado : qual é o lado d'este ? quaes são as duas dimensões de cada propriedade ?

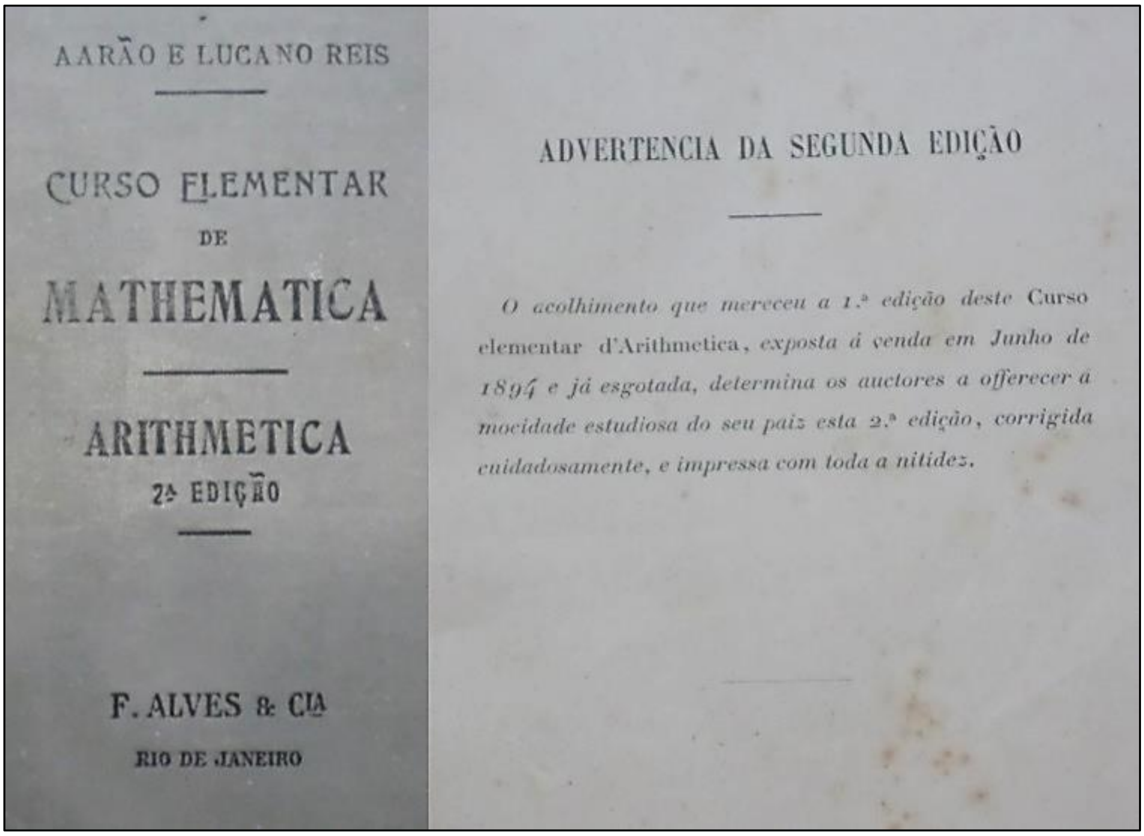
Fonte: Lacerda (1890, p.59).

Na parte interna da contracapa do livro são descritas as obras escolásticas do autor. Finalizamos o estudo nesse livro.

3.4: *Curso Elementar de Mathematica – Arithmetica* – Aarão e Lucano Reis (1892)

Descrição da obra: esta é a segunda edição do livro "Curso Elementar de Mathematica - Arithmetica", com 713 páginas, organizado pelos irmãos Aarão Reis, engenheiro civil e ex-professor de matemática elementar na "Escola Politechnica" do Rio de Janeiro, e Lucano Reis, professor de matemática elementar e oficial da Contadoria Geral de Guerra[27]. O livro traz uma advertência, que, em 1894, se esgotaram as vendas da primeira edição.

Figura 18. Capa e folha de rosto do livro *Curso Elementar de Mathematica – Arithmetica*



AARÃO E LUCANO REIS

CURSO ELEMENTAR

DE

MATHEMATICA

ARITHMETICA

2ª EDIÇÃO

F. ALVES & Cia

RIO DE JANEIRO

ADVERTENCIA DA SEGUNDA EDIÇÃO

O acolhimento que mereceu a 1.ª edição deste Curso elementar d'Arithmetica, *exposta á venda em Junho de 1894 e já esgotada, determina os auctores a offerecer á mocidade estudiosa do seu paiz esta 2.ª edição, corrigida cuidadosamente, e impressa com toda a nitidez.*

Fonte: Reis (1892).

Há uma transcrição da parte editorial do "Jornal do Commercio" de 21 de maio de 1893, de autoria do Dr. Eugênio Gabaglia, engenheiro civil e bacharel em matemática, "lente do Gymnasio Nacional e da eschola Naval", que elogia o

[27]Informação obtida no livro.

livro e os autores, mas critica alguns detalhes teóricos e históricos que percebera e Aarão e Lucano por serem adeptos da corrente positivista. Nesta, a terceira seção aparece escrita erroneamente como quarta seção.

A introdução traz três capítulos: Noções preliminares, com a definição de matemática dada pelo filósofo francês Auguste Comte; Numeração; e Noções de lógica. A primeira seção é referente aos números inteiros. Está dividida em dois livros: Operações; e Propriedades. A segunda consta de três livros: Frações ordinárias; decimais; e contínuas. A terceira é sobre os números incomensuráveis. A quarta; com título: Comparação dos números; é composta por dois livros sobre razões e proporções, e progressões e logaritmos, respectivamente. E a quinta seção compreende dois livros: Metrologia; e problemas aritméticos usuais.

Na primeira seção, livro I, encontram-se seis operações da aritmética, distribuídas em seis capítulos. Radiciação é tema do último capítulo, onde contém sua definição (figura 19):

Figura 19. Definição de radiciação do livro

190. — Radiciação — *é a operação que tem por fim combinar dous numeros dados de modo a formar um terceiro que, repetido como factor tantas vezes quantas forem as unidades de um dos dous numeros dados, reproduza o outro.*

Fonte: Reis (1892, p.150).

Na figura 20, é dito que o radical, sinal √, foi introduzido por Michel Stifel, porém no capítulo I, vimos que foi, o também alemão, Christoff Rudolff o autor do sinal sem o traço horizontal e que o radical como em notação atual foi introduzido pelo francês Albert Girard.

Figura 20. Nota de rodapé sobre a origem: da palavra raiz e do radical

1. — A palavra *raiz* (em arabe *gird*, de *gard*, que significa *raiz de uma planta*) foi introduzida por *Mohammed-ben-Mousa Abou-Djefar al Khowarezmi* (em 820) nos seus *Al-gebr w'el mukabala* (Elementos de Algebra), de que Rose publicou uma traducção ingleza em 1831.

2. — O signal $\sqrt{\ }$ foi introduzido por MIGUEL STIFEL (ou STIEFEL, ou ainda STIFELIUS), illustre sabio allemão, nascido em *Esslingen* (Saxe) em 1486 e fallecido em *Iena* em 1567. Monge da Ordem dos Agostinhos, converteu-se ao *lutheranismo* e, como pastor protestante, exerceu seu ministerio em Saxe, na Austria e na Prussia. Tornou-se notavel como mathematico, deixando a respeito duas obras importantes: a *Arithmetica integra* (impressa em Nuremberg em 1544) e um tratado de *Algebra*.

Fonte: Reis (1892, p.151).

Figura 21. Descrição dos quadrados perfeitos menores do que 100

198. — Primeiro caso : — *O numero dado é menor que 100.* — Sendo, como vimos, 10 a raiz quadrada de 100, serão numeros digitos — isto é, de um só algarismo — as raizes quadradas dos numeros *menores* que 100; e como os quadrados dos *nove* numeros digitos

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9,

são, respectivamente,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 e 81,

segue-se que :

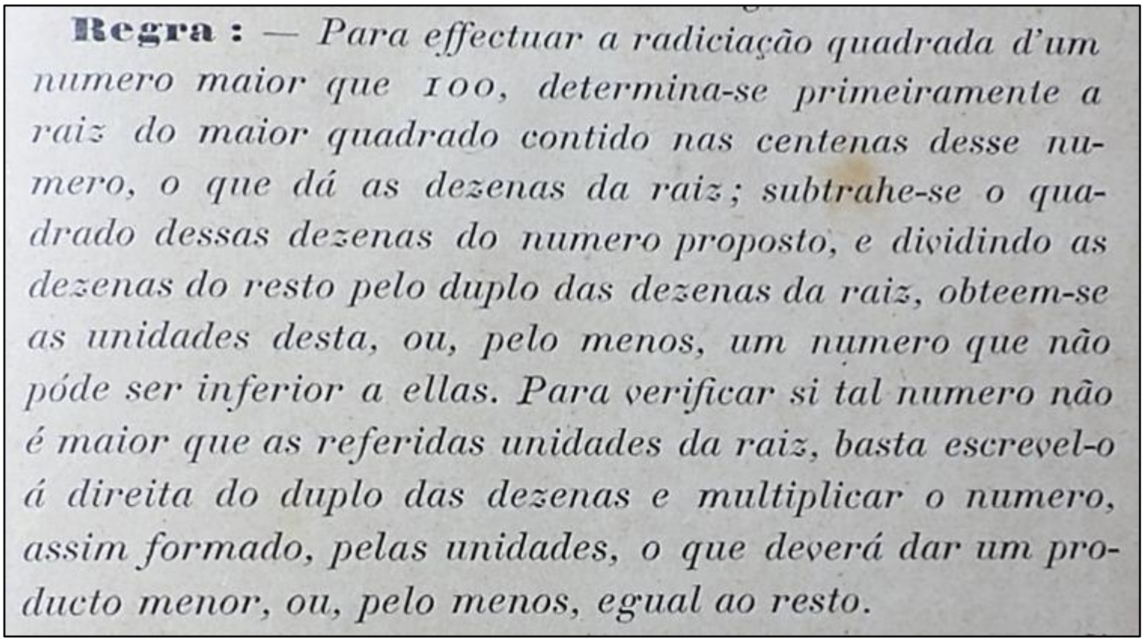
1.º — Só os nove numeros indicados nesta 2.ª linha teem raizes quadradas exactas que sejam numeros digitos;

Fonte: Reis (1892, p.154).

Os quadrados perfeitos menores do que 100 são descritos de modo semelhante ao observado nos livros anteriores, como podemos ler na figura 21:

O texto explicativo sobre a regra para extração da raiz condiz com dizeres observados, anteriormente, nos livros de Lobo, Carneiro e Lacerda, na figura 22:

Figura 22. Regra para a extração da raiz quadrada



Regra : — *Para effectuar a radiciação quadrada d'um numero maior que 100, determina-se primeiramente a raiz do maior quadrado contido nas centenas desse numero, o que dá as dezenas da raiz; subtrahe-se o quadrado dessas dezenas do numero proposto, e dividindo as dezenas do resto pelo duplo das dezenas da raiz, obteem-se as unidades desta, ou, pelo menos, um numero que não póde ser inferior a ellas. Para verificar si tal numero não é maior que as referidas unidades da raiz, basta escrevel-o á direita do duplo das dezenas e multiplicar o numero, assim formado, pelas unidades, o que deverá dar um producto menor, ou, pelo menos, egual ao resto.*

Fonte: Reis (1892, p.157).

No decorrer das páginas seguintes, são detalhados os casos para números maiores do que 10 (quadrados perfeitos e ou), com os exemplos devidos. Contudo termina na página 163, sem tratar os casos de números “quebrados” ou “fracionários”, por exemplo, como vimos nos livros anteriores.

No capítulo de operações, na página 390, tem exemplo de raiz quadrada de uma fração decimal:

$$\sqrt{0,000064} = \sqrt{\frac{64}{1000000}} = 0,008$$

Na página 434, em conversão de frações ordinárias em contínuas, é empregado o método para aproximar o valor da raiz quadrada por uma fração para $\sqrt{7}$, para uma prova da incomensurabilidade deste número.

No Livro I, capítulo I, iniciando no item 524, página 461, é exibido método citado no parágrafo anterior para um número incomensurável por uma fração, de modo similar ao cálculo encontrado no tablete YBC 7289.

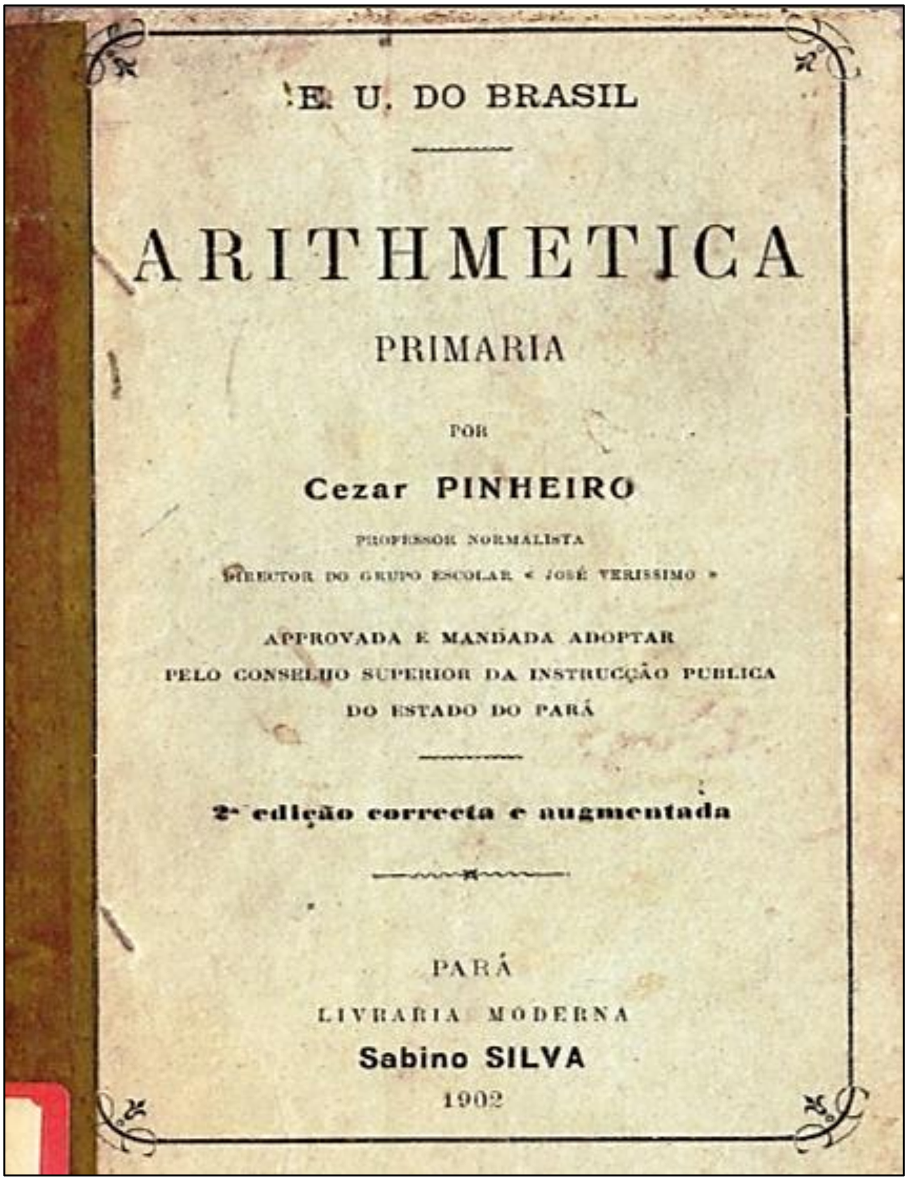
E nas páginas 545 e 570, retomam exemplos que utilizam o mesmo método demonstrado nas páginas 434 e 524.

Encerramos o nosso exame do livro dos irmãos Reis.

3.5: *Arithmetica Primária*, 2ª edição – Cezar Pinheiro (1902)

Descrição da obra: o “Compendio de Arithmetica” do professor normalista Cezar Pinheiro ou Cezar Augusto de Andrade Pinheiro (nome completo), com setenta e oito páginas, foi aprovado e adotado nos Grupos Escolares pelo Conselho Superior da Instrução Pública do Estado do Pará em 1886 e a sua segunda edição foi publicada em 1902 (MENDES; MACHADO, 2015, p. 42).

Figura 23. Capa do livro *Arithmetica Primária* de Cezar Pinheiro



Fonte: Pinheiro (1902).

Ao iniciar o livro, há duas páginas dedicadas às "Approvações", na qual o Compêndio de Aritmética de Cezar Pinheiro é indicado às escolas elementares e efetivas da província.

O compêndio apresenta algumas definições na introdução, por exemplo: "Chama-se operação fundamental toda combinação feita com os numeros" (PINHEIRO, 1902, p. 11). Na segunda parte traz as operações fundamentais, que o autor; define como toda combinação feita com números; descreve as quatro operações: "somma ou addição, subtracção, multiplicação e divisão" e comenta que autores modernos que falam em seis, incluindo potenciação e radiciação. Entretanto René Descartes escrevera que a extração das raízes podia ser considerada um tipo de divisão.

Na página 19, o autor traz uma definição para radiciação, "operação que tem por fim, dado um numero, achar os factores iguaes que o produziram".

Nas duas páginas seguintes é descrita a regra para extração da raiz quadrada de um número “inteiro”, com um exemplo numérico para ilustrar o procedimento, $\sqrt{248390}$. Porém não contém descrições e nem exemplos para números quebrados[28] ou números decimais.

Observamos na figura 24 que a descrição dada pelo autor para a regra da extração da raiz quadrada, neste livro, está em concordância com os textos lidos nos quatro livros que o precederam.

[28]Fracção ou quebrado é toda quantidade menor que a unidade.

Figura 24. Regra da extração da raiz quadrada do livro *Arithmetica Primária*

Extracção da raiz quadrada

REGRA. — *Divide-se o numero em classe de dois algarismos da direita para a esquerda podendo a ultima classe conter um ou dois algarismos. Extrahe-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na primeira classe á esquerda e assim se obtem o primeiro algarismo da raiz que se eleva ao quadrado e o quadrado se subtrahe da primeira classe á esquerda. Escreve-se á direita do resto a classe seguinte; separa-se o primeiro algarismo á direita por meio de um ponto e dividindo a parte restante á esquerda pelo dobro da raiz achada, obtem-se o segundo algarismo da raiz. Verifica-se se este algarismo é ou não maior do que convem multiplicando por si mesmo e pelo dobro da raiz achada e subtrahindo o producto do numero formado pelo primeiro resto e pela segunda classe. A direita do novo resto escreve-se a classe seguinte, e assim successivamente até se ter abaixado a ultima classe.* Exemplo:

$\sqrt{24.83.90}$	498	
16	89	988
088.3	9	8
801	801	7904
0829.0		
7904		
0386		

Fonte: Pinheiro (1902, p.20-21).

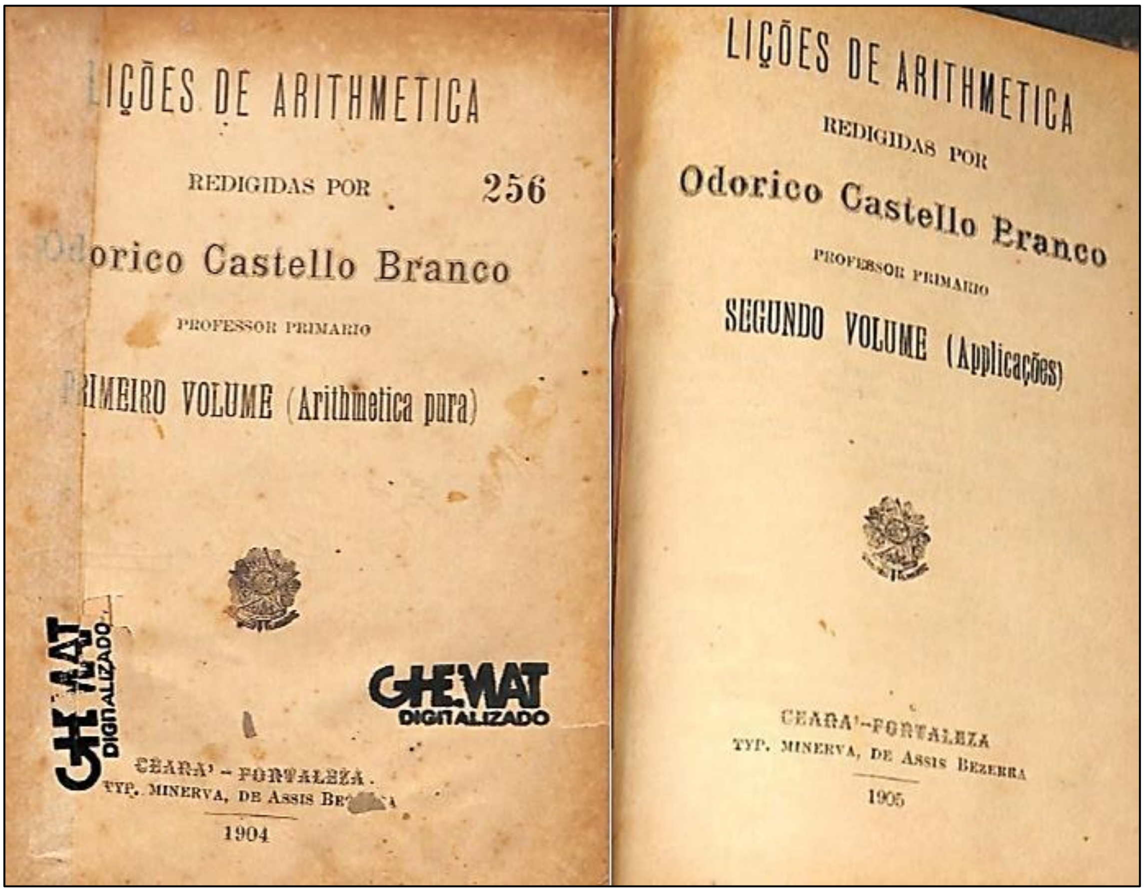
A prova da radiciação é dita como uma regra, "Eleva-se a raiz à potencia determinada pelo gráo e ajuntando-se o resto, se houver, o resultado deve ser igual ao numero dado" (PINHEIRO, 1902, p. 23).

Concluímos a apreciação do conteúdo desse livro.

3.6: *Lições de arithmética*, v. 1, de Odorico Castello Branco (1904)

Descrição da obra: dois volumes constituem este livro. O primeiro (412 páginas) é intitulado “Aritmetica pura” e apresenta a parte teórica com definições e exemplos explicativos. O segundo (142 páginas) com o título “Applicações”, exibe aplicações e exercícios sobre metrologia e operações com números.

Figura 25. Capas internas dos dois volumes do livro *Lições de arithmética*



Fonte: Branco (1904).

Ao iniciar o conteúdo de radiciação, o autor a define da seguinte maneira "A questão inversa da resolvida pela potenciação pode ser enunciada assim. A base recebe então o nome de raiz e a operação que resolve a questão proposta é a radiciação". E a seguir apresenta uma tabela (figura 26), de duas linhas, com a sequência de bases[29] menores do que 10 e os respectivos quadrados menores do que 100.

Figura 26. Descrição das bases para os quadrados perfeitos menores do que 100

A questão inversa da resolvida pela potenciação pode ser enunciada assim:—dada uma potencia e o grau respectivo, determinar a base.

A base recebe então o nome de *raiz* e a operação que resolve a questão proposta é a *radiciação*.

Podemos, pois, definir:—RADICIAÇÃO é a operação que tem por fim, dada uma potencia e o grau respectivo, determinar a base ou raiz.

Nem sempre, porem, o numero proposto é potencia exacta ou perfeita do grau dado; o contrario se dá a maior parte das vezes.

Assim, se considerarmos os quadrados dos numeros simples teremos:

Bases	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Fonte: Branco (1904, p.120).

Nas páginas subsequentes, o autor não apresenta uma regra sucinta, com as que lemos nos livros anteriores, mas exibe das páginas 122 a 135 demonstrações algébricas e exemplos justificando cada etapa por divisões sucessivas. As classes de dois algarismos são separadas com vírgulas.

Há um tópico destinado às provas das operações, na parte destinada à radiciação, na página 182, a prova aparece descrita como a relação, N = n^m + r, sendo *n* a raiz *m* de N e o *r* é o resto, que consiste em elevar a raiz *n* a potência *m* e “juntar” o resto.

[29] As bases são os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

A radiciação é trabalhada separadamente nos capítulos de operações e propriedades dos números, neste reaparece em frações ordinárias e frações decimais.

A partir da página 313, mostra como desenvolver $\sqrt{14}$ em fração contínua. Por meio de um método que permite uma aproximação em forma de fração para um dado limite, no caso apresentado é obtido o valor de,

$$\sqrt{14} \cong 3{,}741657387 < \frac{116}{31} \cong 3{,}741935484.$$

Figura 27. Exemplo de radiciação quadrada por aproximação por uma fração

Vejamos como desenvolver $\sqrt{14}$ em fracção continua.

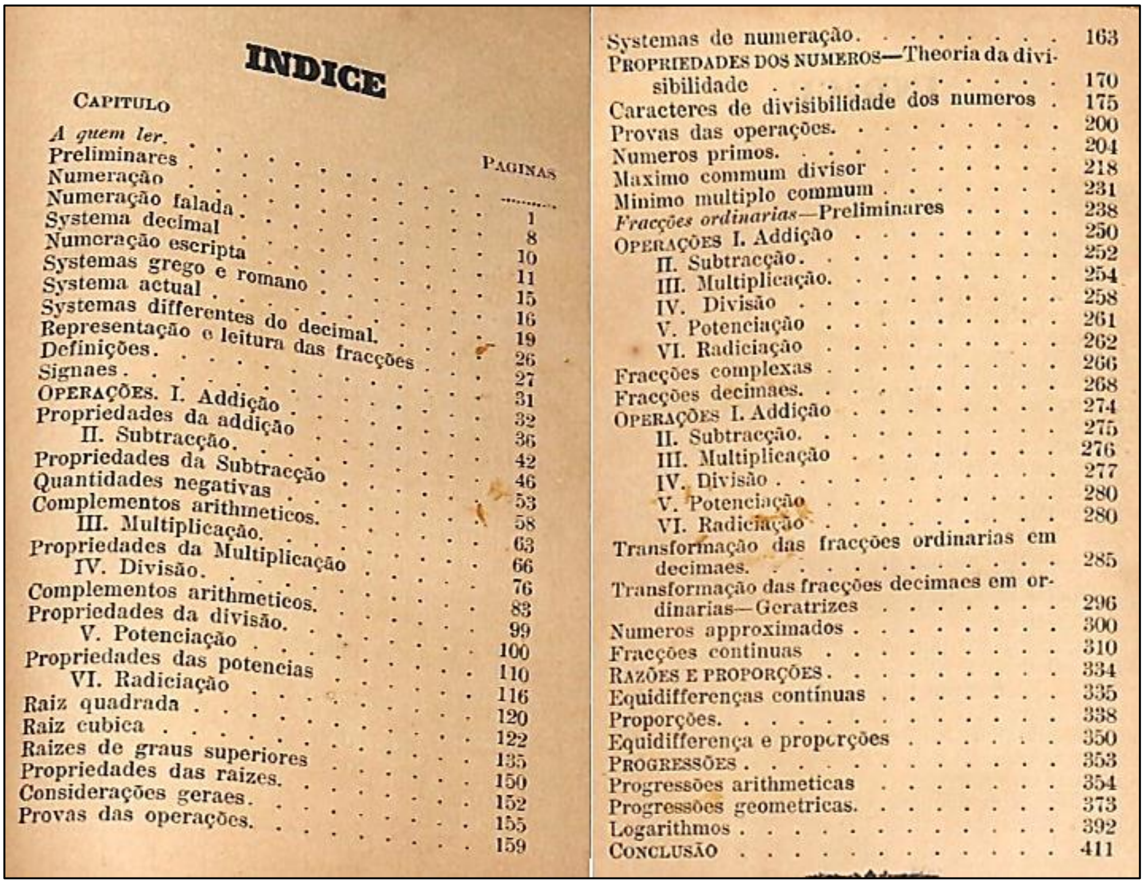
Sendo $3 < \sqrt{14} < 4$

façamos $\sqrt{14} = 3 + \frac{1}{x}$ $\qquad A$

Fonte: Branco (1904, p.313).

Ao consultar o índice (figura 28), situado nas páginas entre os dois volumes, constatamos que para o autor são seis as operações fundamentais: as quatro operações fundamentais, a potenciação e a radiciação. O conteúdo de radiciação é tratado separadamente, distribuído ao longo do livro de acordo com as aplicações nos tópicos dos capítulos.

Figura 28. Índice de livro *Lições de arithmética*



INDICE

Capitulo	Paginas
A quem ler.	....
Preliminares	1
Numeração	8
Numeração falada	10
Systema decimal	11
Numeração escripta	15
Systemas grego e romano	16
Systema actual	19
Systemas differentes do decimal	26
Representação e leitura das fracções	27
Definições	31
Signaes	32
OPERAÇÕES. I. Addição	36
Propriedades da addição	42
II. Subtracção	46
Propriedades da Subtracção	53
Quantidades negativas	58
Complementos arithmeticos	63
III. Multiplicação	66
Propriedades da Multiplicação	76
IV. Divisão	83
Complementos arithmeticos	99
Propriedades da divisão	100
V. Potenciação	110
Propriedades das potencias	116
VI. Radiciação	120
Raiz quadrada	122
Raiz cubica	135
Raizes de graus superiores	150
Propriedades das raizes	152
Considerações geraes	155
Provas das operações	159
Systemas de numeração	163
PROPRIEDADES DOS NUMEROS—Theoria da divisibilidade	170
Caracteres de divisibilidade dos numeros	175
Provas das operações	200
Numeros primos	204
Maximo commum divisor	218
Minimo multiplo commum	231
Fracções ordinarias—Preliminares	238
OPERAÇÕES I. Addição	250
II. Subtracção	252
III. Multiplicação	254
IV. Divisão	258
V. Potenciação	261
VI. Radiciação	262
Fracções complexas	266
Fracções decimaes	268
OPERAÇÕES I. Addição	274
II. Subtracção	275
III. Multiplicação	276
IV. Divisão	277
V. Potenciação	280
VI. Radiciação	280
Transformação das fracções ordinarias em decimaes	285
Transformação das fracções decimaes em ordinarias—Geratrizes	296
Numeros approximados	300
Fracções continuas	310
RAZÕES E PROPORÇÕES	334
Equidifferenças contínuas	335
Proporções	338
Equidifferença e proporções	350
PROGRESSÕES	353
Progressões arithmeticas	354
Progressões geometricas	373
Logarithmos	392
CONCLUSÃO	411

Fonte: Branco (1904).

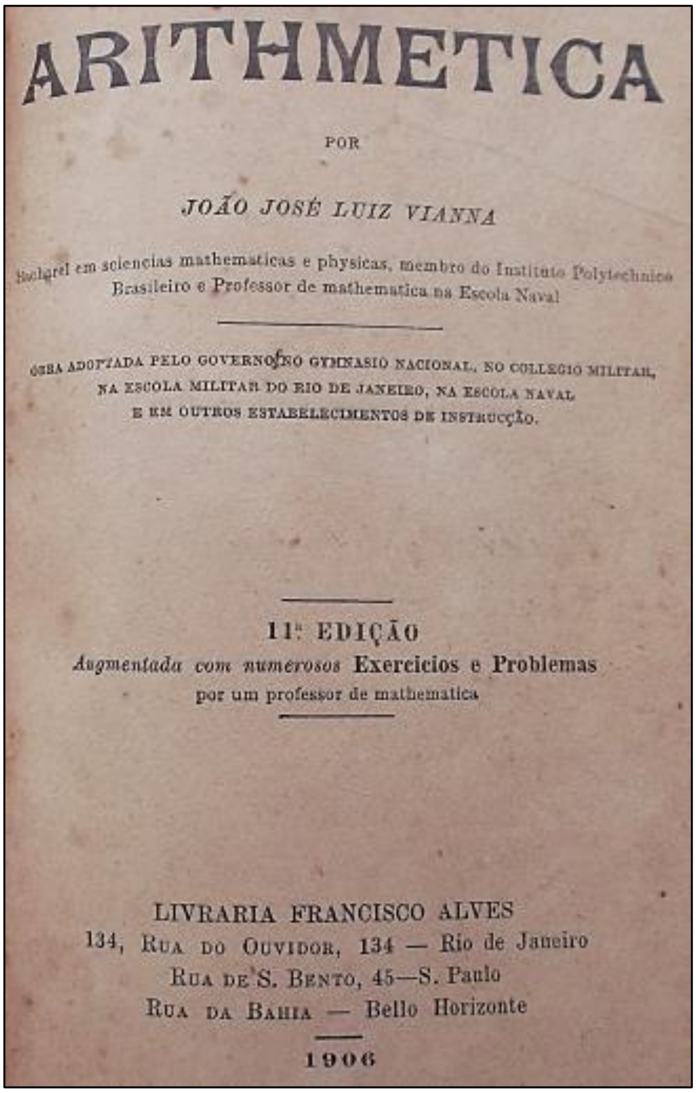
Concluímos a análise do livro de Odorico Castello Branco.

3.7: *Elementos de Arithmetica* – 11ª edição – João José Luiz Vianna (1906)

Descrição da obra: essa edição possui 296 páginas, que estão distribuídas nas seguintes seções: noções preliminares; primeira parte com seis capítulos; segunda parte com três capítulos; e exercícios e problemas.

Na folha rosto está posto que a obra foi adotada pelo Governo no "Gymnasio Nacional", no Colégio Militar, na Escola Militar do Rio de Janeiro, na Escola Naval e em outros estabelecimentos de instrução. Além de indicação que se trata da 11ª edição do livro.

Figura 29. Folha de rosto do livro *Elementos de Arithmetica* de João José Luiz Vianna



ARITHMETICA

POR

JOÃO JOSÉ LUIZ VIANNA

Bacharel em sciencias mathematicas e physicas, membro do Instituto Polytechnico Brasileiro e Professor de mathematica na Escola Naval

OBRA ADOPTADA PELO GOVERNO NO GYMNASIO NACIONAL, NO COLLEGIO MILITAR, NA ESCOLA MILITAR DO RIO DE JANEIRO, NA ESCOLA NAVAL E EM OUTROS ESTABELECIMENTOS DE INSTRUCÇÃO.

11ª EDIÇÃO

Augmentada com numerosos Exercicios e Problemas

por um professor de mathematica

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

134, Rua do Ouvidor, 134 — Rio de Janeiro

Rua de S. Bento, 45—S. Paulo

Rua da Bahia — Bello Horizonte

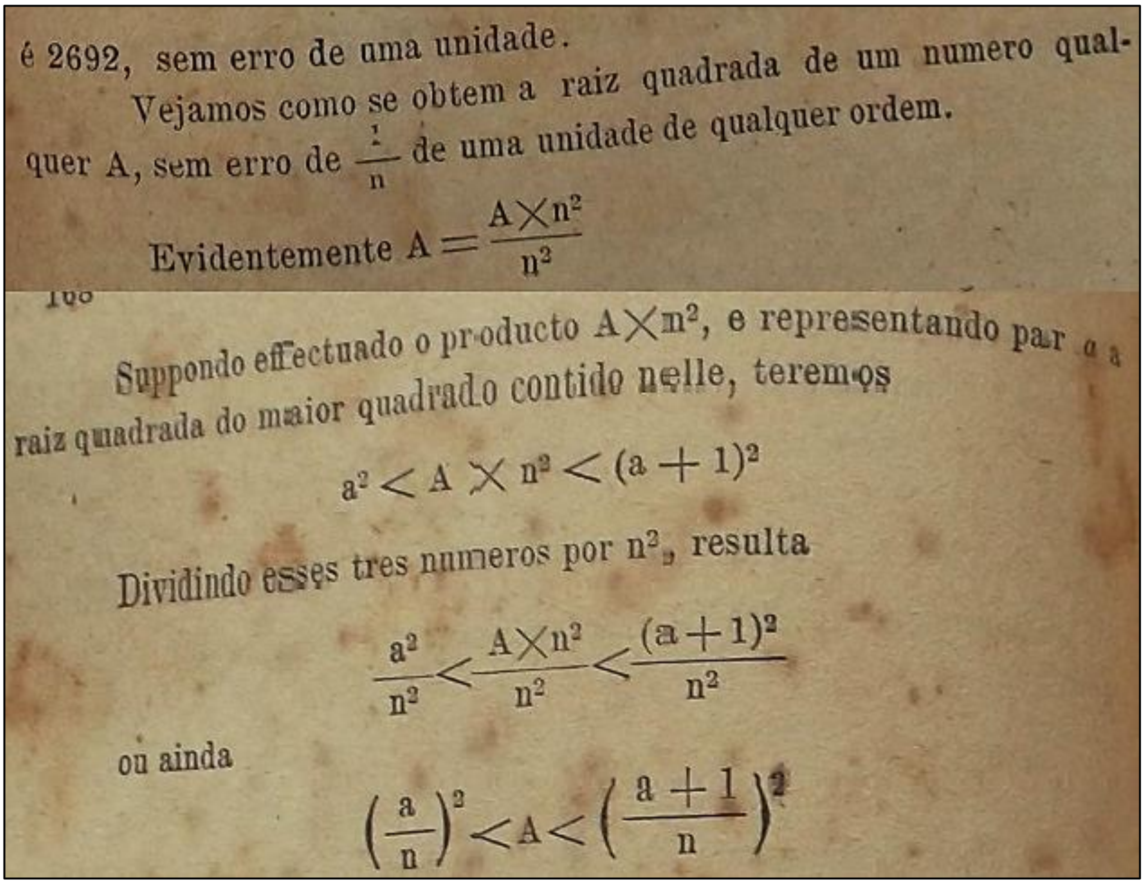
1906

Fonte: Vianna (1904).

Na primeira parte do livro se dedica as operações nas propriedades gerais dos números, na teoria das frações ordinárias, na teoria dos números decimais, sobre números complexos e por último, o Capítulo VI onde se inicia o estudo de potências e raízes dos números.

Na página 167, se mostra como obter a raiz quadrada de um número A qualquer, sem erro de $\frac{1}{n}$ de uma unidade de qualquer ordem, com essa demonstração:

Figura 30. Aproximação de uma raiz quadrada com erro desejado



é 2692, sem erro de uma unidade.

Vejamos como se obtem a raiz quadrada de um numero qualquer A, sem erro de $\frac{1}{n}$ de uma unidade de qualquer ordem.

Evidentemente $A = \frac{A \times n^2}{n^2}$

Suppondo effectuado o producto $A \times n^2$, e representando por a a raiz quadrada do maior quadrado contido nelle, teremos

$$a^2 < A \times n^2 < (a+1)^2$$

Dividindo esses tres numeros por n^2, resulta

$$\frac{a^2}{n^2} < \frac{A \times n^2}{n^2} < \frac{(a+1)^2}{n^2}$$

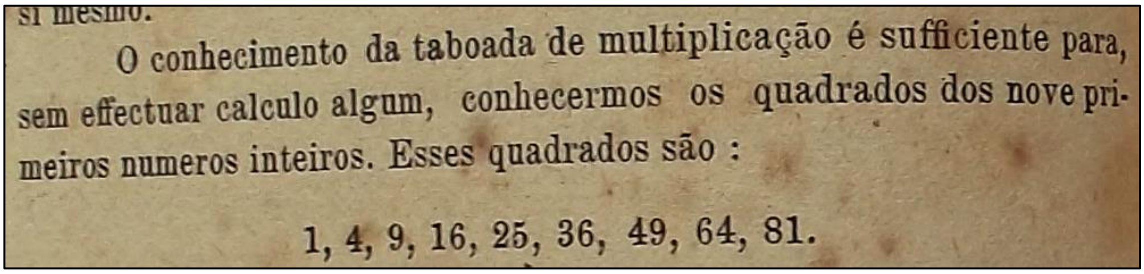
ou ainda

$$\left(\frac{a}{n}\right)^2 < A < \left(\frac{a+1}{n}\right)^2$$

Fonte: Vianna (1904, p.167).

No item 193, raiz é descrita como “Raiz de qualquer gráo de um numero é o numero que elevado ao gráo da raiz produz o número dado" (Vianna, 1904, p.159). Indo a página seguinte, Vianna declara que o conhecimento de “taboada” é suficiente para reconhecer os quadrados dos nove primeiros números inteiros:

Figura 31. Quadrados dos noves primeiros números inteiros



si mesmo.

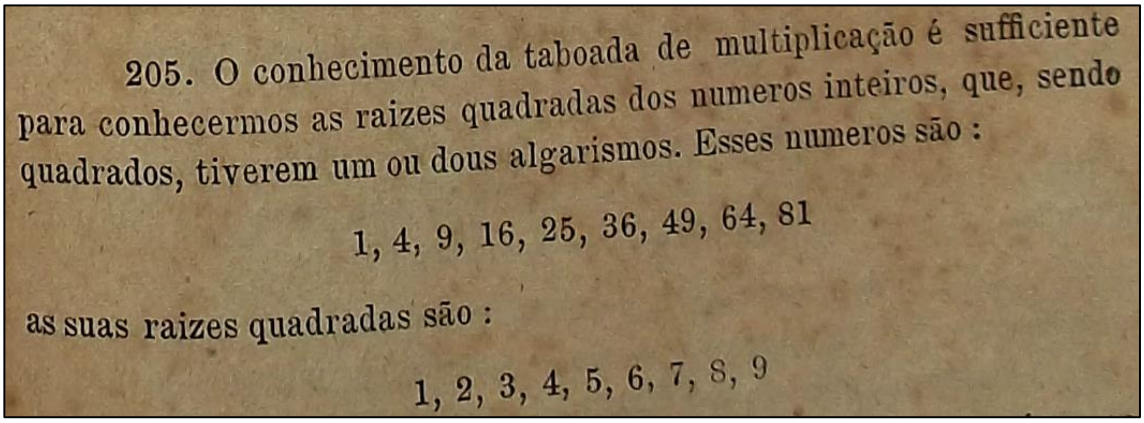
O conhecimento da taboada de multiplicação é sufficiente para, sem effectuar calculo algum, conhecermos os quadrados dos nove primeiros numeros inteiros. Esses quadrados são :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Fonte: Vianna (1904, p.160).

Como nos livros que já analisamos, o autor reitera o modo de apresentação dos primeiros nove são mostrados. E é repetida essa frase, na página 163, com duas sequências em duas linhas, a primeira com os quadrados dos nove primeiros números inteiros, e estes na segunda linha:

Figura 32. Quadrados dos noves primeiros números inteiros



205. O conhecimento da taboada de multiplicação é sufficiente para conhecermos as raizes quadradas dos numeros inteiros, que, sendo quadrados, tiverem um ou dous algarismos. Esses numeros são :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

as suas raizes quadradas são :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Fonte: Vianna (1904, p.163).

Adiante, não é empregado o termo “regra para extrair raiz quadrada”, no seu lugar surge “processo para determinar as raízes quadradas dos números”, com exemplos: de números de três ou quatro algarismos divididos em duas classes de dois algarismos; números distribuídos em três classes binárias com cinco ou seis algarismos. Após esses exemplos citados acima, a regra é descrita abreviadamente:

Figura 33. Trecho inicial do texto da regra da radiciação.

mos do numero dado, podemos estabelecer a seguinte

REGRA.—*Divide-se o numero em classes de dous algarismos da direita para a esquerda. Extrae-se a raiz quadrada do maior quadrado contido na primeira classe á esquerda, e subtrae-se esse maior quadrado da classe considerada.*

Fonte: Vianna (1904, p.165).

Figura 34. Continuação do texto da regra da radiciação.

166

Á direita do resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo da direita e divide-se a parte á esquerda pelo dobro da raiz achada. O quociente escreve-se á direita da raiz e á direita do dobro da raiz. Este ultimo numero assim formado multiplica-se pelo quociente e subtrahe-se o producto do numero que serviu de dividendo, seguido do algarismo separado.

Á direita do segundo resto escreve-se a classe seguinte, separa-se o ultimo algarismo da direita, e divide-se a parte á esquerda pelo dobro da raiz achada; o quociente escreve-se á direita da raiz e á direita do dobro da raiz. Este ultimo numero assim formado multiplica-se pelo quociente, e o producto subtrae-se do numero que serviu de dividendo, seguido do algarismo separado.

Á direita do terceiro resto escreve-se a classe seguinte, e assim se continúa até ter considerado todas as classes do numero dado.

Escrevendo á direita de um dos restos a classe seguinte e separando-se o ultimo algarismo á direita, se a parte á esquerda fôr menor que o dobro da raiz achada, escreve-se um zero á direita d'essa raiz achada, e considera-se a classe seguinte.

Póde acontecer que se escreva na raiz um algarismo menor do que deve ser. Á simples inspecção do resto se conhece o erro.

Supponhamos que se trate de extrair a raiz quadrada do numero 576. Achado o algarismo 2 das dezenas da raiz e subtraindo o quadrado das dezenas do numero dado, o algarismo das unidades se obtem dividindo 17 por 4. Escrevendo na raiz o algarismo 3, multiplicando depois 43 por 3 e subtraindo o producto de 176, acharemos o resto 47; e como esse resto é igual ao dobro de 23 augmentado de uma unidade, concluiremos que o algarismo 3 é fraco.

Com effeito, $576 = 23^2 + 47$, e como $24^2 = (23 + 1)^2 = 23^2 + 2 \times 23 + 1$, sendo $47 = 2 \times 23 + 1$, segue-se que 576 é o quadrado do numero 24. O algarismo das unidades é 4 e não 3.

Se o resto fosse maior que o dobro da raiz augmentado de uma unidade, o algarismo das unidades seria ainda menor do que devia ser. O resto deve, pois, ser sempre menor que o dobro da raiz augmentado de uma unidade.

206. Os numeros inteiros não têm todos para raizes quadradas numeros inteiros.

Fonte: Vianna (1904, p.166).

São expostos exemplos da operação ditada pela regra. E o autor trata separadamente as raízes dos números fracionários em seguida, com um exemplo na página 168 para calcular uma fração aproximada para $\sqrt{28}$.

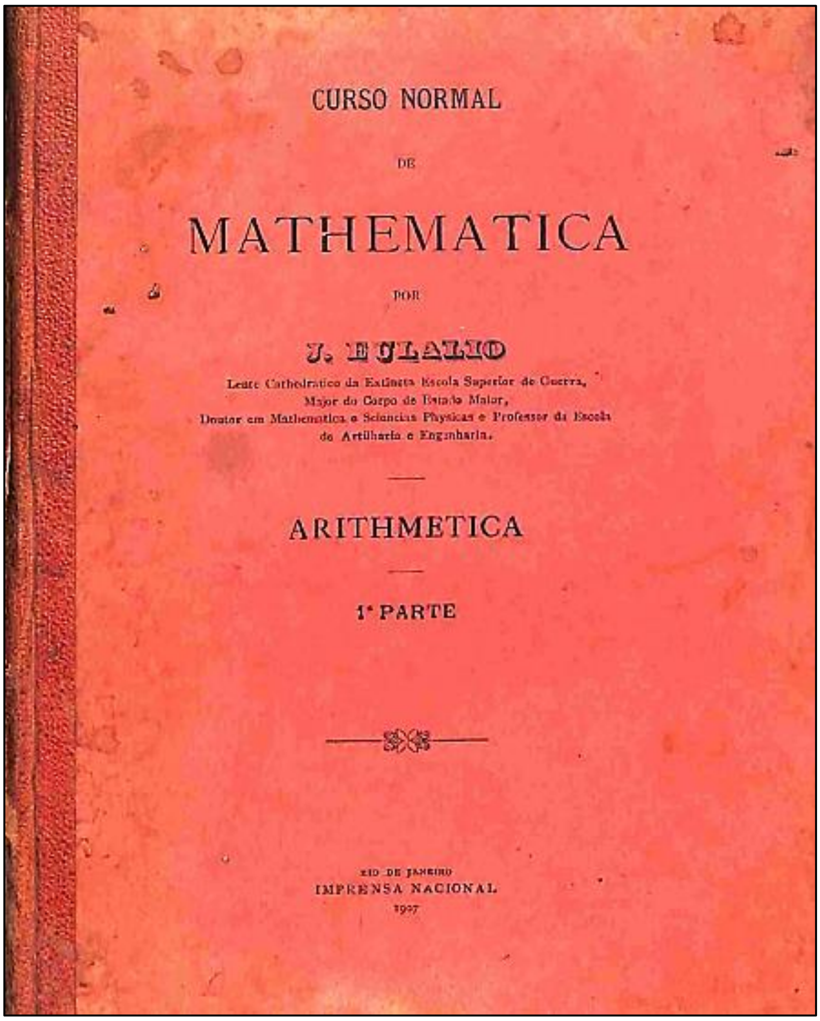
Finalizamos a verificação na obra de João José Luiz Vianna.

3.8: *Curso Normal de Mathematica – Arithmetica* – J. Eulalio (1907)

O livro é composto por sete capítulos distribuídos em 171 páginas, onde constam:

- Capítulo I: Definição de Aritmética.
- Capítulo II: Notação e numeração.
- Capítulo III: Cálculo fundamental (quatro operações).
- Capítulo IV: Teoria das frações ordinárias.
- Capítulo V: Teoria das frações decimais.
- Capítulo VI: Teoria das raízes quadrada e cúbica.
- Capítu lo VII: Teoria das progressões aritméticas.

Figura 35. Capa do livro *Curso Normal de Mathematica* de J. Eulalio



Fonte: Eulalio (1907).

Inicia-se o conteúdo, de raiz quadrada, no Capítulo IV com definições básicas e são apresentados em duas linhas (figura 36), os nove primeiros números inteiros e seus respectivos quadrados.

Figura 36. Quadrados dos noves primeiros números inteiros

126. Um numero que tiver um inteiro para sua raiz quadrada, chama-se Quadrado Perfeito.

127. Dos quadrados perfeitos menores que 100 facil é conhecer as raizes quadradas. Assim conhecemos que

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

são as raizes quadradas dos quadrados perfeitos

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81

Fonte: Eulalio (1907, p.133).

Na página seguinte a regra para extração da raiz quadrada é apresentada na forma de um exemplo, $\sqrt{1225}$, $\sqrt{622521}$ e $\sqrt{189475225}$.

Figura 37. Descrição da extração da raiz quadrada de 1225

Supponhamos, primeiramente, que temos de achar a raiz quadrada de 1225. Faremos deste modo:

Separamos por uma linha os dois algarismos da direita:

12 | 25

Os algarismos 12 formam o primeiro periodo.

Os algarismos 25 formam o segundo periodo.

Procuramos o maior quadrado perfeito mais proximo de 12, que é 9; collocamos este quadrado abaixo de 12 e escrevemos a sua raiz quadrada, que é 3, como primeiro algarismo da raiz quadrada que temos a calcular, assim :

12 | 25 (3
9

Subtrahimos 9 de 12, e annexamos ao resto 3 o segundo periodo 25, para formar um dividendo; dobramos o primeiro algarismo da raiz, e este dobro será o primeiro termo de um divisor. Fazemos assim:

12 | 25 (3
9
6 | 325

Temos de annexar um outro algarismo ao 6; portanto, este algarismo representa seis dezenas, ou 60. Então, vejamos o numero de vezes que 60 se contem em 325; isto sendo cinco vezes, ponhamos 5 como segundo algarismo da raiz e tambem annexemos 5 ao 6. Façamos assim:

12 | 25 (35
9
65 | 325

Multipliquemos agora 65 por 5, e escrevamos o producto abaixo de 325. Subtrahindo o producto de 325, não

Fonte: Eulalio (1907, p.134).

Figura 38. Continuação da extração da raiz quadrada de 1225 e raiz de 622521

encontramos resto ; concluimos, pois, que 35 é a raiz quadrada de 1225. O processo completo será :

```
        12 | 25 (35
         9
65     | 325
       | 325
```

Agora procuremos a raiz quadrada de 622521.

Separemos por um traço vertical os dois algarismos da direita e por outro traço vertical os outros dois algarismos seguintes. O processo para achar os primeiros dois algarismos da raiz é o mesmo que o do primeiro exemplo. Assim, teremos:

```
        62 | 25 | 21 (78
        49
148    | 1325
       | 1184
          141
```

Annexemos ao resto o terceiro periodo, 21. e dobremos a parte da raiz já achada, 78, considerando o resultado 156 como um divisor parcial. Annexemos o quociente 9 á raiz e ao divisor e multiplicando 1569 por 9, escrevamos o producto abaixo de 14121. O processo, por completo, será:

```
        62 | 25 | 21 (789
        49
148    | 1325
       | 1184
1569   |  14121
       |  14121
```

Donde a raiz procurada, será 789.

NOTA —Na pratica, em vez de dividirmos 1325 por 140, podemos dividir 132 por 14; e em vez de dividirmos 14121 por 1560, podemos dividir 1412 por 156. O quociente assim obtido é, não obstante, algumas vezes muito forte.

Fonte: Eulalio (1907, p.135).

Dois exemplos se seguem, um para o caso de uma fração decimal, $\sqrt{5{,}322249}$ e o outro para frações ordinárias:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

A partir da página 142 é estudada raiz cúbica, obedecendo a mesma estrutura adotada para raiz quadrada.

Concluindo o conteúdo de radiciação nesse livro.

Observação: ainda que nos livros que aqui analisamos apresentem o método da fatoração, ou decomposição de um número em fatores primos, esse conteúdo não se encontra associado à extração de raízes quadradas. Esse fato vemos em: Lobo (1879, p.36), Carneiro (1880, p.103), Reis (1892, p.270), Vianna (1906, p.82) e Eulalio (1907, p.39).

A seguir mostramos uma síntese de como os algoritmos de extração de raiz quadrada se encontram nos livros didáticos dos autores selecionados, conforme foram apresentados neste trabalho:

3.1. Método da fatoração.

3.2. Método de radiciação por aproximação por uma fração.

3.3. Método de extração de raiz quadrada.

Tabela 3: Relação entre os métodos de radiciação e as obras dos autores selecionados

Métodos	**Autores das obras analisadas**							
	Lobo	Carneiro	Lacerda	Reis	Pinheiro	Branco	Vianna	Eulalio
3.1								
3.2		x		x		x	x	
3.3	x	x	x	x	x	x	x	x

Fonte: Autoria minha.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa apresentada é fruto do meu trabalho de conclusão de curso de licenciatura em matemática, com a finalidade de conhecer mais sobre um conteúdo matemático inserido em livros didáticos de aritmética, publicados no período de 1879 a 1907. Como aporte teórico para a narrativa, a pesquisa se ampara: nos estudos relacionados aos livros didáticos em Alain Choppin e Wagner Rodrigues Valente; e relativo à história das disciplinas escolares em André Chervel com fenômeno que ele denomina vulgata.

Choppin (2004) evidencia que "a história dos livros e das edições didáticas passou a constituir um domínio de pesquisa em pleno desenvolvimento", e reconhece no livro didático uma referência para o professor em sala que ampara o seu oficio, dadas as funções que ele desempenha.

Valente (2008) ressalta a importância de se fazer pesquisas em história da educação matemática, que utilizam livros didáticos. Pesquisas, dessa natureza, têm sido desenvolvidas em maior amplitude no âmbito do grupo de pesquisa GHEMAT.

A escrita desse trabalho objetivou a responder aos nossos questionamentos sobre a pergunta: como se apresentam os algoritmos de raiz quadrada nos livros didáticos do final do século XIX e início do século XX no Brasil?

Da análise dos livros mapeados encontramos dois métodos (ou regras) de radiciação quadrada; por aproximação por uma fração e de extração de raiz quadrada; descritos como procedimentos práticos para o conteúdo abordado.

E ainda foi possível ressaltar, que os autores ao descrever o algoritmo ou regra para extração da raiz quadrada caracterizaram uma vulgata, conforme Chervel, pois notamos uma similitude nas apresentações desse conteúdo, de como foram escritos, organizados, os seus exemplos e exercícios, e isso desde os Elementos de Arithmetica de Bézout, ao longo de mais um século.

Como sugestão, para futuras pesquisas, muitos outros conteúdos matemáticos poderão ser investigados em livros didáticos, inclusive estender o estudo para análise das raízes cúbicas, que também estão presentes nas obras analisadas.

REFERÊNCIAS

BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. Em Foco: História, produção e memória do livro didático. **Educação e Pesquisa. Revista da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo**. São Paulo, v. 30, n 3, p. 471 – 473., set/dez, 2004.
Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a07v30n3.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2018.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Projeto Araribá**: Matemática/obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2007.

CHERVEL, André. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. **Teoria & educação**, v. 2, n. 1, p. 177-229, 1990.

CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e pesquisa**, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris – Matemática**: 9º ano. 2.ed. São Paulo: Ática, 2015.

DOLCE, Osvaldo; IEZZI, Gelson; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**. 6º ao 9º ano. **LOCAL: EDITORA** 2009.

DOMINGUES, Hygino Hugueros. **Fundamentos de aritmética**. Ed. da UFSC, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GHEMAT - Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil. Disponível em: <http://www2.unifesp.br/centros/ghemat/paginas/about_ghemat.htm>.

HILZENDEGER, M. A. M. **Primeira Arithmetica para meninos e a constituição de masculinidade na província de São Pedro do Rio Grande do Sul**. 115f. Dissertação (Mestrado) – UFRGS, Porto Alegre, 2009.

MENDES, Iran Abreu; MACHADO, Benedito Fialho. Mathematics in primary education in the state of Pará (Brazil), between 1890 and 1930: on rules, regulations and textbooks. **International Journal for Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 2, p. 32-50, 2015.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática**: idéias e desafios, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª série. São Paulo, Editora, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. Traços históricos do ensino da aritmética nas últimas décadas do século XIX: livros didáticos escritos por José Theodoro de Souza Lobo. 2010.
Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/161275>. Acesso em 16 mar. 2018.

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de história da matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
Disponível em <http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Topicos_20de_20Historia_20da_20Matematica_28PROFMAT_29_TatianaRoque_Pitombeira.pdf>.
Acesso em 18 mar. 2018.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930. São Paulo: Annablume, 1999.

_____________, Wagner Rodrigues. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. 2008.

Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160373>. Acesso em 18 mar. 2018.

______________, Wagner Rodrigues. Considerações sobre a matemática escolar numa abordagem histórica. **Cadernos de História da Educação**, v. 3, 2008. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/160367>. Acesso em 12 mar. 2018.

______________, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 23, n. 35, 2010.