Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Propriedades assintóticas para um problema semilinear de equações de evolução de segunda ordem com potências fracionárias

Maíra Fernandes Gauer Palma

Orientador: Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz

Florianópolis

Dezembro de 2017

Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Pós-Graduação em Matemática

Pura e Aplicada

Propriedades assintóticas para um problema semilinear de equações de evolução de segunda ordem com potências fracionárias

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, com Área de Concentração em EDP.

Maíra Fernandes Gauer Palma

Florianópolis

Dezembro de 2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Palma, Maíra Fernandes Gauer
Propriedades assintóticas para um problema semilinear de equações de evolução de segunda ordem com potências fracionárias / Maíra Fernandes Gauer Palma ; orientador, Cleverson Roberto da Luz, coorientador, Ruy Coimbra Charão, 2017.
179 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. edp. 3. propriedades assintóticas. 4. estabilidade. 5. problemas de evolução. I. Luz, Cleverson Roberto da. II. Charão, Ruy Coimbra. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

Propriedades assintóticas para um problema semilinear de equações de evolução de segunda ordem com potências fracionárias

por

Maíra Fernandes Gauer Palma*

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Cleverson Roberto da Luz
(Orientador - UFSC)

Prof. Dr. Gustavo Alberto Perla Menzala
(UFRJ e LNCC)

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
(USP)

Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira
(UFSC)

Prof. Dr. Miguel Ángel Alejo Plana
(UFSC)

Florianópolis, dezembro de 2017.

*Bolsista da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES

A Deus.

A minha família.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que nunca é vencido em generosidade e me deu muito mais do que eu merecia nestes anos do doutorado.

Ao meu esposo, Ricardo, que sempre me apoiou, ajudou, torceu por mim. Pela paciência, carinho e pelos sacrifícios que fez para que meu doutorado fosse finalizado com sucesso.

Aos meus pais, Tânia e Luiz Carlos (em memória), pelo cuidado e amor que sempre tiveram comigo e por vibrar com minhas conquistas.

Ao Prof. Cleverson, por ter aceitado ser meu orientador, pelo exemplo de professor dedicado e justo, pelos conselhos, paciência e amizade.

Ao Prof. Ruy, pelo exemplo de amor à profissão, sua sabedoria, amizade e pela preocupação com o sucesso de seus alunos.

Aos meus amigos que viveram esse período comigo, por proporcionar momentos de distração e diversão e também ouvir e compartilhar minhas preocupações, incertezas e motivações.

À Capes, pelo apoio financeiro no período de bolsa.

Resumo

Neste trabalho estudamos existência e unicidade de soluções e também o comportamento assintótico de soluções para equações diferenciais de evolução de segunda ordem no tempo com operadores fracionários de Laplace em $\mathbb{R}^n$. Nós obtemos melhores taxas de decaimento com menos hipóteses nos dados iniciais quando comparado a resultados anteriores na literatura. Para certos casos, observamos que a estrutura dissipativa da equação é do tipo de perda de regularidade. Devido a essa estrutura especial, quando obtemos estimativas na região de alta frequência no espaço de Fourier, é necessário impor regularidade adicional nos dados iniciais para obter a mesma estimativa de decaimento da região de baixa frequência. Os resultados obtidos neste trabalho podem ser aplicados para vários problemas de valor inicial de equações de segunda ordem, como por exemplo, equação da onda, equação de placas, equação IBq, entre outras.

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of solutions for evolution differential equations of second order in time with fractional Laplace operators in $\mathbb{R}^n$. We improve decay rates with less demands on the initial data when compared with previous results on the subject. In certain cases, we observe that the dissipative structure of the equation is of regularity-loss type. Due to that special structure, when we get estimates in the region of high frequencies in the Fourier space it is necessary to impose additional regularity on the initial data to obtain the same decay estimates as in the region of low frequencies. The results obtained in this work can be applied to several others initial value problems of second order equations, such as wave equation, plate equation, IBq equation, as well.

Sumário

Introdução

Consideremos a seguinte equação de evolução com operadores fracionários em $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\delta} u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\alpha} u(t,x) + (-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = f(u_t(t,x)) \tag{1}$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \tag{2}$$

onde $\alpha, \delta \in [0,2]$, $\theta \in [0,\alpha]$. O operador fracionário

$$(-\Delta)^{\sigma} : H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \quad (\sigma \geq 0)$$

é definido por

$$(-\Delta)^{\sigma} v(x) := \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2\sigma} \widehat{v}(\xi)\big)(x), \qquad v \in H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\mathcal{F}$ denota a transformada de Fourier usual em $L^2(\mathbb{R}^n)$ com respeito à variável x, $\widehat{v} = \mathcal{F}(v)$, $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço de Sobolev usual de funções L^2 equipadas com a norma $\|\cdot\|_{H^s}$ e $|\cdot|$ denota a norma usual em $\mathbb{R}^n$. O operador $(-\Delta)^\sigma$ é não negativo e autoadjunto em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A função f é definida por $f(v) = C|v|^p$ onde C é constante positiva e $p \geq 3$.

A energia total $E_u(t)$ associada à solução $u(t)$ da equação (1) é definida por

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\left\{||u_t(t)||^2 + ||(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u_t(t)||^2 + ||(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t)||^2\right\}. \tag{3}$$

Por simplicidade de notação, usaremos em todo o texto $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_{L^2}$ e $(\cdot,\cdot)$ ao invés de $(\cdot,\cdot)_{L^2}$.

Vamos encontrar a fórmula da solução para o problema (1)-(2). Para tanto, primeiramente consideramos a equação linear associada

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^\delta u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^\alpha u(t,x) + (-\Delta)^\theta u_t(t,x) = 0. \tag{4}$$

Aplicando a transformada de Fourier com respeito à variável x, temos

$$\begin{cases} (1+|\xi|^{2\delta})\widehat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t(t,\xi) + |\xi|^{2\alpha}\widehat{u}(t,\xi) = 0, \quad t \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

Os autovalores para o problema (5) tem parte real não positiva e são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\left(-1 \pm \sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})}\right).$$

Podemos escrever a solução de (5) como

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{K}_0(t,\xi)\widehat{u}_0(\xi) + \widehat{K}_1(t,\xi)\widehat{u}_1(\xi), \tag{6}$$

onde

$$\widehat{K}_0(t,\xi) = \frac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \qquad \text{e} \qquad \widehat{K}_1(t,\xi) = \frac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}. \tag{7}$$

Definimos $K_0(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{K}_0(t,\cdot)](x)$ e $K_1(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{K}_1(t,\cdot)](x)$.

Portanto a solução do problema linear é dada por

$$u(t) = kK_0(t) * u_0 + kK_1(t) * u_1,$$

com k constante tal que $\widehat{f}\cdot\widehat{g} = k(f*g)$.

Agora voltemos ao problema semilinear (1)-(2). Usando o princípio de Duhamel, a solução do problema (1)-(2) é dada por

$$u(t) = \overline{u}(t) + F(u_t)(t), \tag{8}$$

onde

$$\overline{u}(t) = kK_0(t) * u_0 + kK_1(t) * u_1, \tag{9}$$

$$F(v)(t) = \int_0^t K_1(t-s) * \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} f(v)(s)\, ds. \tag{10}$$

Note que $u = \overline{u}$ é a solução para o problema linear (4)-(2), enquanto $F(u_t)(x,t)$ denota a parte não linear da solução para o problema (1)-(2).

Para resolver a equação integral (8), é conveniente transformá-la em um sistema equivalente. Com este fim, derivamos a identidade (8) com relação a t, obtendo

$$u_t(t) = \overline{u}_t(t) + \dot{F}(u_t)(t), \tag{11}$$

em que

$$\overline{u}_t(t) = \partial_t K_0(t) * u_0 + \partial_t K_1(t) * u_1, \tag{12}$$

$$\dot{F}(v)(t) = \int_0^t \partial_t K_1(t-s) * \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} f(v)(s)\, ds. \tag{13}$$

Obtemos portanto o sistema de equações

$$u(t) = \overline{u}(t) + F(v)(t), \quad v(t) = \overline{u}_t(t) + \dot{F}(v)(t), \tag{14}$$

que é equivalente à equação integral dada em (8). No Capítulo 4, resolveremos a segunda equação de (14) com respeito a v e definiremos u pela primeira equação, obtendo assim $v = u_t$ e encontrando a solução para a equação integral.

Se $\theta < \delta$, observamos que a estrutura de decaimento para (1) é do tipo de perda de regularidade, que é caracterizada pela estrutura dos autovalores associados ao problema. A propriedade de perda de regularidade deixa de ocorrer no caso $\theta = \delta$. Devido a esta estrutura especial, ao encontrar as estimativas na região de alta frequência no espaço de Fourier, é necessário impor regularidade adicional nos dados iniciais para obter a mesma taxa de decaimento da região de baixa frequência. Se $\delta \leq \theta$, esse efeito não aparece, uma vez que a solução decai exponencialmente na região de alta frequência no espaço de Fourier (veja a Proposição 2.3). Esse tipo de dissipação com perda de regularidade também foi estudado para o sistema de Timoshenko [17, 18], a equação de placas sob efeitos de inércia rotacional em $\mathbb{R}^n$ [31, 4, 6] e um sistema elíptico hiperbólico [16, 24].

Vejamos alguns trabalhos anteriores importantes para o presente trabalho. Estimativas para a solução da equação da onda com decaimento estrutural

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + 2a\,(-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = 0\,, \qquad t \geq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

também foram encontradas em [19, 3, 10, 7, 8, 22], e o caso com coeficientes de decaimento dependentes do tempo é considerado em [9, 36, 12, 25]. Em [8], os autores decompõem a solução para (15) em duas partes, $u = u^+ + u^-$, cada uma relacionada a uma das duas raízes do símbolo completo (15). O comportamento assintótico da transformada de Fourier de cada parte sugere dois fenômenos de difusão diferentes. Esse tipo de problema foi amplamente estudado na literatura matemática e física (veja, por exemplo, [1, 5, 13, 33, 21]). Karch [22] estudou o comportamento assintótico de soluções para o problema de valor inicial (1) com $\delta = 0$, $0 \le 2\theta < \alpha$ e um termo não-linear $F(x, t, u, u_t, \nabla u)$. No artigo citado, uma análise da fórmula da solução do problema linear leva à conclusão de que elas se comportam, quando $t \to \infty$, como soluções de uma equação de difusão similar ao problema em [8]. D'Abbicco-Ebert [9] provaram que o perfil assintótico para a solução do problema (1) com $\delta = 0$ e um termo de decaimento estrutural dependente do tempo $2b(t)(-\Delta)^\theta$ depende da classe de coeficientes $b(t)$, das potências α e θ.

Sugitani-Kawashima [31] estudaram uma equação de placas semilinear com efeitos de inércia rotacional e dissipação friccional. No estudo do problema linear, usaram a solução explícita e equivalência para os autovalores. Para o problema não linear, introduziram um espaço de Banach X definido através da norma

$$||u||_X = \sum_{\sigma_0(k) \le s+1} \sup_{t \ge 0} (1+t)^{\frac{k}{4}} ||\partial_x^k u(t)||_{H^{s+1-\sigma_0(k)}}$$

com $\sigma_0(k) = k + \left[\frac{k+1}{2}\right]$ e $s \ge \sigma_0(k) - 1$. Eles provaram que o problema tem solução global no tempo no espaço de funções acima e encontraram taxas de decaimento ótimas utilizando regularidade adicional sobre os dados iniciais $u_0 \in H^{s+1}$ e $u_1 \in H^s$, para s suficientemente grande.

D'Abbicco-Reissig [10] estudaram a equação da onda semilinear com dissipação fracionária, obtendo taxas ótimas para a norma da solução e para os termos da energia e determinando a influência da dissipação fracionária no expoente crítico. O método usado para o problema linear é semelhante ao utilizado em [31]. Ver também [7, 36, 30].

Através do método da energia no espaço de Fourier, apresentado por Umeda-Kawashima-Shizuta [32], diversos trabalhos trazem resultados de decaimento para equações de evolução em $\mathbb{R}^n$, como [11, 17, 19, 20]. Charão-da Luz-Ikehata [3, 4] introduziram um novo método para obter estimativas de decaimento baseado no método da energia no espaço de Fourier com a desigualdade de Haraux-Komornik e a monotonicidade da densidade da energia no espaço de Fourier. Eles obtiveram em [3] decaimento quase-ótimo para equação da onda com decaimento fracionário e em [4] para a equação de placas com efeitos de inércia rotacional e decaimento fracionário. Em [26] eles estenderam estes resultados para um problema abstrato de uma equação diferencial de segunda ordem. A taxa de decaimento $E(t) = o(t^{-k})$ ser quase-ótima significa que

$$E(t) = o(t^{-k+\varepsilon}) \qquad (t \to +\infty)$$

para qualquer $\varepsilon > 0$.

Neste trabalho estudamos uma equação mais geral quando comparada aos problemas (ou o problema linear associado) estudados em [3, 4, 19, 7, 8, 10, 22, 30, 31, 28, 34, 35, 37]. Um dos objetivos deste trabalho é melhorar os resultados obtidos em [26]. Devido ao método utilizado em [26], os autores provaram taxas quase ótimas de decaimento somente para a energia total de ordem α do problema, ou seja, o método não permite obter taxas ótimas de decaimento para a energia total, bem como não permite estimar cada termo da energia separadamente. No entanto, como pode ser visto na Seção 2.3 deste trabalho, as taxas podem variar para cada termo da energia. Obtemos taxas ótimas de decaimento para $\|\partial_x^{\gamma_1} v(t)\|$, $\|\partial_x^{\gamma_2} v_t(t)\|$ e a regularidade correspondente dos dados iniciais.

Estudaremos o decaimento para o problema linear no Capítulo 2. Na Seção 2.1 trataremos da baixa frequência, utilizando as ideias apresentadas em [10] e [31], ou seja, consideramos a solução explícita do problema e estimamos os autovalores. Será necessário separar em dois casos: autovalores reais ($\alpha > 2\theta$) e autovalores complexos ($\alpha \leq 2\theta$).

Na Seção 2.2 estudaremos o problema na região de alta frequência através de uma reformulação do método da energia no espaço de Fourier apresentado por Charão-da Luz-Ikehata em [3, 4]. Nessa seção encontraremos a regularidade adicional exigida nos dados iniciais (caso $\theta < \delta$) para obtermos as taxas de decaimento desejadas. Na Seção

2.3 enunciamos e demonstramos os teoremas principais e apresentamos algumas aplicações, como equação da onda com dissipação fracionária, equação de placas com efeitos de inércia rotacional e dissipação fracionária e para uma equação de Boussinesq.

O método ainda pode ser aplicado para diversas outras equações de evolução em $\mathbb{R}^n$ com coeficientes constantes. Mais ainda, podemos adicionar termos do tipo $(-\Delta)^{\delta_1} v_{tt}$, $(-\Delta)^{\theta_1} v_t$, $(-\Delta)^{\alpha_1} v$ na equação (4) e obter taxas de decaimento para a solução do novo problema a partir dos resultados obtidos para o problema (4)-(2). Isto é possível pois, por exemplo, ao adicionar o termo $(-\Delta)^{\delta_1} v_{tt}$, obtemos

$$|\xi|^{2\delta} + |\xi|^{2\delta_1}$$

como coeficiente do termo $\widehat{u}_{tt}$ da equação no espaço de Fourier. Mas este termo é equivalente a $|\xi|^{2\delta_0}$, em que $\delta_0 = \min\{\delta, \delta_1\}$ na baixa frequência, e $\delta_0 = \text{máx}\{\delta, \delta_1\}$ na alta frequência. O mesmo ocorre ao adicionar termos do tipo $(-\Delta)^{\theta_1} v_t$, $(-\Delta)^{\alpha_1} v$ na equação (4). Isso significa que através do método apresentado neste trabalho, também é possível encontrar estimativas para este novo problema. Para não tornar este trabalho demasiadamente longo, vamos considerar somente um simples exemplo deste caso a fim de ilustração (ver Subseção 2.3.2).

O problema semilinear (1)-(2) será estudado no Capítulo 4, onde consideraremos o caso em que $n = 3$, $\theta < \frac{3}{4}$, $u_0 \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$

e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\delta \leq \alpha - 1$. Usaremos o teorema do ponto fixo de Banach e os resultados dos Capítulos 1 e 2 para obter existência e unicidade de soluções além de taxas de decaimento ótimas, com a hipótese adicional de dados iniciais pequenos.

Iniciaremos o trabalho provando existência e unicidade de soluções para o problema linear, no Capítulo 1, através de Teoria de Semigrupos.

Capítulo 1

Existência e Unicidade de Solução: Problema Linear

Neste capítulo, mostramos, através da Teoria de Semigrupos, a existência e unicidade de soluções para o seguinte problema de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\delta} u_{tt} + (-\Delta)^{\alpha} u + (-\Delta)^{\theta} u_t = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

com $u = u(t,x)$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0,2]$, $\delta \in [0,\alpha]$ e $\theta \in \left[0, \frac{\alpha+\delta}{2}\right]$.

1.1 Preliminares

Nesta seção apresentamos os principais resultados e lemas técnicos que serão utilizados na prova da existência e unicidade para o problema (1.1). Algumas demonstrações são omitidas por se tratarem de resultados bastante conhecidos e que podem ser facilmente encontrados na literatura. Sempre que for necessário citaremos referências.

1.1.1 Teorema de existência: Problema linear

Aqui faremos um pequeno resumo com os principais resultados necessários para mostrar a existência e unicidade do problema de Cauchy (1.1) linear.

Teorema de Lax-Milgram

Definição 1.1 *Seja H um espaço de Hilbert real. Uma aplicação*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

é chamada de forma bilinear se $B(.,y)$ é linear para cada $y \in H$ e $B(x,.)$ é linear para cada $x \in H$.

B é chamada de limitada (contínua) se existe uma constante C tal que

$$|B(x,y)| \leq C \, \|x\|_H \, \|y\|_H, \qquad \forall \; x, y \in H.$$

B é chamada coerciva se existe uma constante $\delta > 0$ tal que

$$B(x,x) \geq \delta \|x\|_H^2, \qquad \forall\, x \in H.$$

Teorema de Lax-Milgram 1.1 *Seja B uma forma bilinear, limitada e coerciva sobre um espaço de Hilbert H. Então para cada funcional linear contínuo F em H, existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(x,u) = F(x), \qquad \forall\, x \in H.$$

As definições e a demonstração do Teorema de Lax-Milgram podem ser encontradas em Brezis [2].

Semigrupos de Operadores Lineares

Para a teoria de semigrupos de operadores lineares citamos como referências Alvercio [14], Brezis [2] e Pazy [27].

Definição 1.2 *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Diz-se que uma aplicação*

$$S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$$

é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

ii) $S(t+s) = S(t)\,S(s), \qquad \forall\; t, s \in \mathbb{R}^+.$

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

iii) $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - I)\,x\|_X = 0, \qquad \forall\; x \in X.$

Teorema 1.1 *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então*

$$\lim_{s \to t} S(s)x = S(t)x, \qquad \forall\; x \in X.$$

Definição 1.3 *Se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \;\; \forall\; t > 0,\;\; S$ é denominado semigrupo de contrações de classe C_0.*

Definição 1.4 *O operador $B : D(B) \to X$ definido por*

$$D(B) = \left\{ \; x \in X \;\; / \;\; \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x \quad \textit{existe} \; \right\}$$

e

$$B(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - I}{h}\, x, \qquad \forall\; x \in D(B)$$

é denominado gerador infinitesimal do semigrupo S.

Teorema 1.2 *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear e fechado e seu domínio é um subespaço vetorial denso em X.*

Teorema 1.3 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e B o gerador infinitesimal de S. Se $x \in D(B)$, então $S(t)x \in D(B)$, para todo $t > 0$,* *e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = BS(t)x = S(t)Bx.$$

Definição 1.5 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e B seu gerador infinitesimal. Definimos $B^0 = I$, $B^1 = B$ e, supondo que B^{k-1} esteja definido, vamos definir B^k, cujo domínio é*

$$D(B^k) = \left\{ x \middle/ x \in D(B^{k-1}) \text{ e } B^{k-1}x \in D(B) \right\},$$

por

$$B^k x = B(B^{k-1}x)$$

para todo $x \in D(B^k)$.

Teorema 1.4 *Seja S um semigrupo de classe C_0 e B seu gerador infinitesimal. Então:*

i) $D(B^k)$ é um subespaço de X e B^k é um operador linear sobre $D(B^k) \subset X$;

ii) Se $x \in D(B^k)$ então $S(t)\,x \in D(B^k)$, $t > 0$, e

$$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = B^k S(t)x = S(t)B^k x, \quad \forall\, k \in \mathbb{N};$$

iii) $\bigcap_k D(B^k)$ é denso em X.

Lema 1.1 *Seja B um operador linear fechado de X. Para cada $x \in D(B^k)$, definimos*

$$|x|_k = \sum_{j=0}^{k} \|B^j x\|_X. \tag{1.2}$$

O funcional $|\cdot|_k$ é uma norma em $D(B^k)$ munido da qual $D(B^k)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.6 *A norma (1.2) é dita norma do gráfico. O espaço de Banach que se obtém munindo $D(B^k)$ da norma (1.2) será representado por $[D(B^k)]$.*

Teorema Lumer-Phillips

Definição 1.7 *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador linear $B : D(B) \subset H \to H$ é denominado dissipativo se,*

$$Re\langle Bx, x\rangle \leq 0, \qquad \forall\, x \in D(B).$$

Teorema 1.5 (Lumer-Phillips) *Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Banach X, então:*

i) B é dissipativo;

ii) $Im(\lambda I - B) = X,\ \ \lambda > 0 \quad (Im(\lambda I - B) =$ imagem de $\lambda I - B)$.

Reciprocamente, se

i) $D(B)$ *é denso em* X*;*

ii) B *é dissipativo;*

iii) $Im(\lambda_0 I - B) = X$ *para algum* $\lambda_0 > 0$,

então B *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe* C_0.

Teorema 1.6 *Se* B *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em um espaço de Banach* X *e* J *é um operador linear e limitado em* X *então* $B + J$ *é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *em* X.

Problema de Cauchy Abstrato

Seja X um espaço de Banach e B um operador linear de X. Considere o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = BU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $U_0 \in X$ e $t > 0$.

Definição 1.8 *Uma função* $u : \mathbb{R}^+ \to X$, *contínua para* $t \geq 0$, *continuamente diferenciável para todo* $t \geq 0$, *tal que* $u(t) \in D(B)$ *para todo* $t \geq 0$ *e que satisfaz (1.3) é dita solução forte do problema (1.3).*

Teorema 1.7 *Se B é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 então, para cada $U_0 \in D(B)$ o problema (1.3) tem uma única solução forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, D(B)),$$

onde S é o semigrupo gerado por B.

Se $U_0 \in X$ então dizemos que $U(t) = S(t)U_0 \in C(\mathbb{R}^+, X)$ é uma solução fraca para o problema (1.3).

1.1.2 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, com $s \in \mathbb{R}$

Vamos usar frequentemente a definição de espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ para $s \in \mathbb{R}$, que definimos da seguinte forma:

Definição 1.9 *Para $s \in \mathbb{R}$ define-se o espaço*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Big/ (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \Big\},$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Define-se também sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$, a norma

$$\|u\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}\|_{L^2}.$$

Na demonstração do resultado principal deste capítulo vamos usar um produto interno e uma norma equivalente ao produto interno e a norma usual de $H^s(\mathbb{R}^n)$. Os próximos lemas asseguram essa equivalência.

Lema 1.2 *Para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *e* $s \geq 0$ *temos que*

i) $\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$;

ii) $2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1}$.

Demonstração.

i) Primeiro vamos considerar o caso $|\xi| \leq 1$ assim

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq 1 \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

No caso $|\xi| \geq 1$ segue que

$$\frac{1}{2}(1+|\xi|^{2s}) \leq |\xi|^{2s} \leq (1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s}).$$

ii) De modo similar ao item (i) temos para $|\xi| \leq 1$ que

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq 2^{-s} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 1 \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1},$$

pois $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s$ e $1+|\xi|^{2s} \leq 2$.

No caso $|\xi| \geq 1$ segue que

$$2^{-s}(1+|\xi|^{2s})^{-1} \leq (1+|\xi|^2)^{-s} \leq 2(1+|\xi|^{2s})^{-1},$$

pois temos as seguintes desigualdades $(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s|\xi|^{2s} \leq 2^s(1+|\xi|^{2s})$ e $(1+|\xi|^{2s}) \leq 2|\xi|^{2s} \leq 2(1+|\xi|^2)^s$.

$\blacksquare$

Então em parte deste trabalho vamos usar uma norma equivalente a norma usual de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>0$, dada por

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})\, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

e o seguinte produto interno associado

$$(u,v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})\, \widehat{u}(\xi)\, \overline{\widehat{v}}(\xi)\, d\xi.$$

No caso $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ com $s>0$ vamos usar a seguinte norma

$$\|u\|_{H^{-s}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})^{-1}\, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi$$

com o seguinte produto interno associado

$$(u,v)_{H^{-s}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2s})^{-1}\, \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}}(\xi)\, d\xi.$$

1.2 Existência e unicidade de solução

Agora vamos provar a existência de soluções para o problema (1.1). O método aqui utilizado é semelhante ao apresentado em [15], com algumas diferenças: a potência α (no lugar de 2) e consequentemente os espaços trabalhados, o produto interno associado, a regularidade adicional r.

Consideramos o seguinte espaço como sendo o espaço da energia

$$X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n), \tag{1.4}$$

com $r \geq 0$.

Se $(u, u_t) \in X$, precisamos ser cuidadosos, pois para $\delta \leq \alpha$ o espaço X definido acima é adequado, mas no caso $\delta > \alpha$ teríamos que $u_t \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, u_t seria mais regular que u. Nos casos em que $\delta > \alpha$ precisaríamos considerar um espaço para os dados iniciais mais regulares mas isso não será feito neste trabalho.

Para mostrar a existência e unicidade de solução, precisamos dividir o problema em dois casos: *(i)* $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha \leq 2$; e *(ii)* $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha \leq 2$ com $\theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

Observamos, novamente, que podemos mostrar existência e unicidade de solução para outras condições sobre δ e θ, mas para isso é necessário considerar um espaço mais regular para os dados iniciais. Os casos citados acima são os mais importantes e é onde encontramos a maioria das aplicação físicas. Com essas condições a maior potência possível para o operador Laplaciano é 2, ou seja, teremos no máximo $(-\Delta)^2$ na equação (1.1).

Considerando o espaço da energia $X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ vamos reduzir a ordem do problema (1.1) e escrevê-lo na forma matricial

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = BU(t) + J(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

com $U = (u, u_t)$, $U(0) = (u_0, u_1)$ e os operadores B e J adequados para cada um dos casos citados acima. Usando o Teorema de Lumer-Phillips (ver Teorema 1.5), provamos o teorema a seguir.

Teorema 1.8 *Sejam $r \geq 0$, $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$. Se*

$$u_0 \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } \ u_1 \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$$

então o problema de Cauchy (1.1) *tem uma única solução u na seguinte classe*

$$u \in C^2\big([0,\infty); H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty); H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty); H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)\big) .$$

No Capítulo 3 provaremos existência e unicidade de solução para um problema semilinear associado ao problema (1.1). Para tanto precisaremos do seguinte resultado, que decorre diretamente do Teorema 1.8 (considerando $r = 2 - \alpha$):

Corolário 1.1 *Sejam $n \geq 1$, $0 \leq \delta \leq \alpha \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$. Se*

$$u_0 \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \ \text{ e } u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

então o problema de Cauchy (1.1) *tem uma única solução u na seguinte classe*

$$u \in C^2\big([0,\infty); H^{2-\alpha+\delta}(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^n)\big) \cap C\big([0,\infty); H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)\big)\,.$$

Antes de provarmos o Teorema 1.8 precisamos da definição de um operador que será útil na definição do operador B, onde B é o operador que será gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X.

1.3 Operador A_σ

Em toda esta seção vamos considerar $0 \leq \delta \leq \sigma$. Para definir o operador A_σ primeiro definimos seu domínio como sendo um subespaço de $H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\begin{aligned} D(A_\sigma) = \Big\{ & u \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n) \ / \ \exists\, y = y_u \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n), \\ & (u,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \psi\big) = (y,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \psi\big), \\ & \forall\, \psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n) \Big\}. \end{aligned}$$

Da definição de $D(A_\sigma)$ é natural definir o operador A_σ, como:

$$A_\sigma : D(A_\sigma) \longrightarrow H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$$

$$A_\sigma u = y_u, \qquad u \in D(A_\sigma). \tag{1.5}$$

Formalmente, temos que o operador A_σ é dado por

$$A_\sigma = \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(I + (-\Delta)^\sigma).$$

Mostraremos no próximo lema que A_σ está bem definido.

Lema 1.3 *Para qualquer $u \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ existe no máximo um*

$$y = y_u \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$(u,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\psi\big) = (y,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\big), \tag{1.6}$$

para qualquer $\psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração.

Suponha que para algum $u \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ existam y_1 e y_2 pertencentes a $H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a relação (1.6). Temos que

$$(y_1,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y_1, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\big) = (y_2,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y_2, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\big),$$

para qualquer $\psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$, ou ainda,

$$(y_1 - y_2, \psi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\right) = 0, \qquad \forall\ \psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n).$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ está densamente imerso em $H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$(y_1 - y_2, \psi) + \left((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}(y_1 - y_2), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\right) = 0, \tag{1.7}$$

para qualquer $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Considere $y := y_1 - y_2$, então $y \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$, existe $\{\psi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim\limits_{\nu\longrightarrow\infty} \psi_\nu = y$ em $H^\delta(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\|\psi_\nu - y\|_{H^\delta} \longrightarrow 0, \qquad \text{se} \quad \nu \longrightarrow \infty,$$

ou ainda,

$$\|\psi_\nu - y\|_{H^\delta}^2 = \|y\|_{H^\delta}^2 - 2Re(y, \psi_\nu)_{H^\delta} + \|\psi_\nu\|_{H^\delta}^2 \longrightarrow 0, \quad \text{se} \ \ \nu \longrightarrow \infty. \tag{1.8}$$

Como $\left|\|\psi_\nu\|_{H^\delta} - \|y\|_{H^\delta}\right| \leq \|\psi_\nu - y\|_{H^\delta}$ temos também que

$$\|\psi_\nu\|_{H^\delta} \longrightarrow \|y\|_{H^\delta} \qquad \text{se} \quad \nu \longrightarrow \infty. \tag{1.9}$$

Logo, usando (1.8) e (1.9) concluímos que

$$\lim_{\nu \longrightarrow \infty} Re(y, \psi_\nu)_{H^\delta} = \|y\|^2_{H^\delta}. \tag{1.10}$$

Da equação (1.7) e da definição do produto interno em H^δ, temos

$$0 = (y, \psi_\nu) + ((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \psi_\nu) = (y, \psi_\nu)_{H^\delta}, \tag{1.11}$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}$.

Assim, de (1.10) e (1.11) concluímos que

$$0 = \lim_{\nu \to \infty} Re(y, \psi_\nu)_{H^\delta} = \|y\|^2_{H^\delta},$$

ou seja, $\|y\|^2_{H^\delta} = 0$. Portanto, temos que $y_1 = y_2$.

■

Observação 1.1 *Como $u \equiv 0 \in D(A_\sigma)$, então $D(A_\sigma)$ é não vazio e segue do Lema 1.3 que A_σ está bem definido.*

Nosso próximo passo é encontrar uma caracterização para o domínio de A_σ. Nos Lemas 1.4 e 1.5 mostraremos que

$$D(A_\sigma) = H^{2\sigma - \delta + r}(\mathbb{R}^n).$$

Isto é possível pois $\delta \leq \sigma$ implica em $H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, esta condição garante que

$$H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n).$$

Lema 1.4 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$ então $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta+r}} \leq C\|A_\sigma u\|_{H^{\delta+r}},$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$.

Demonstração.

Dado $u \in D(A_\sigma)$, pela definição de $D(A_\sigma)$, existe um $y = y_u \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(u, \psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u, (-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} \psi\big) = (y, \psi) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}} \psi\big), \quad (1.12)$$

para todo $\psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$.

Como vale em $H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ então vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$u + (-\Delta)^\sigma u = y + (-\Delta)^\delta y,$$

em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a transformada de Fourier temos que

$$\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)\widehat{u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\widehat{y},$$

ou ainda,

$$\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{-1/2}\big(1+|\xi|^{2\sigma}\big)\widehat{u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{y}. \tag{1.13}$$

Sendo $y = A_\sigma u$ temos que

$$\widehat{y} = \widehat{A_\sigma u} = \frac{1+|\xi|^{2\sigma}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}. \tag{1.14}$$

Multiplicando por $\big(1+|\xi|^2\big)^{\frac{r}{2}}$ e calculando a norma L^2 para cada termo da identidade (1.13) temos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r(1+|\xi|^{2\delta})^{-1}(1+|\xi|^{2\sigma})^2|\widehat{u}|^2 d\xi\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r(1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{y}|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Como $\big(1+|\xi|^2\big)^r(1+|\xi|^{2\delta})^{-1}(1+|\xi|^{2\sigma})^2$ é equivalente a $(1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta+r)})$ e $\big(1+|\xi|^2\big)^r(1+|\xi|^{2\delta})$ é equivalente a $(1+|\xi|^{2(\delta+r)})$ (ver Lema 1.2), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^{2(2\sigma-\delta+r)}\big)|\widehat{u}|^2 d\xi \le C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^{2(\delta+r)})|\widehat{y}|^2 d\xi, \tag{1.15}$$

com C uma constante que depende de α, δ e r.

Logo de (1.15) temos pela definição de A_σ que

$$\|u\|_{H^{2\sigma-\delta+r}} \leq C\|y\|_{H^{\delta+r}} = C\|A_\sigma u\|_{H^{\delta+r}},$$

para todo $u \in D(A_\sigma)$, isto é, $D(A_\sigma) \subset H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

■

Lema 1.5 *Se $0 \leq \delta \leq \sigma$ então $H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subseteq D(A_\sigma)$, ou seja, dado $u \in H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ existe um $y \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$(u,\psi) + ((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi) = (y,\psi) + ((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi), \quad (1.16)$$

para todo $\psi \in H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração.

Sejam $u \in H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $G_1 : H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle G_1, \psi\rangle = (u,\psi) + ((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi).$$

Então G_1 está bem definido e é linear, pois $u \in H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, G_1 é contínuo, pois devido ao Teorema de Plancherel tem-se que

$$
\begin{aligned}
|\langle G_1, \psi\rangle| &\leq |(u,\psi)| + |((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi)| \\
&\leq C_1\, \|\widehat{u}\|\, \|\widehat{\psi}\| + C_1\| \,|\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u}\|\, \| \,|\xi|^{\delta}\widehat{\psi}\| \\
&\leq C_2\Big(\|\widehat{u}\| + \| \,|\xi|^{2\sigma-\delta}\widehat{u}\|\Big)\, \|\psi\|_{H^\delta} \\
&\leq C_3 \|u\|_{H^{2\sigma-\delta+r}}\; \|\psi\|_{H^\delta},
\end{aligned}
$$

para todo $\psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Assim, por dualidade temos que $G_1 \in H^{-\delta}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $a : H^\delta(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, a forma definida por

$$
a(\varphi,\psi) = (\varphi,\psi) + ((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\varphi, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi),
$$

para $\psi, \varphi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Então $a(\cdot,\cdot)$ está bem definida e é bilinear. Além disso, $a(\cdot,\cdot)$ é contínua sobre $H^\delta(\mathbb{R}^n) \times H^\delta(\mathbb{R}^n)$, pois

$$
\begin{aligned}
|a(\varphi,\psi)| &\leq C_1 \|\widehat{\varphi}\|\, \|\widehat{\psi}\| + \||\xi|^{\delta}\widehat{\varphi}\|\, \||\xi|^{\delta}\widehat{\psi}\| \\
&\leq C_2 \|\varphi\|_{H^\delta}\, \|\psi\|_{H^\delta},
\end{aligned}
$$

para $\varphi, \psi \in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Também notamos que $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois

$$a(\varphi,\varphi)=\|\widehat{\varphi}\|^2+\|\,|\xi|^\delta\widehat{\varphi}\|^2=\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{\varphi}|^2d\xi=\|\varphi\|^2_{H^\delta},$$

para todo $\varphi\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Logo, o problema variacional

$$a(y,\psi)=\langle G_1,\psi\rangle,\quad \psi\in H^\delta(\mathbb{R}^n) \tag{1.17}$$

tem, pelo Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.1), uma única solução $y\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Em particular (1.17) vale para cada $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe único $y\in H^\delta(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(y,\psi)+((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}y,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi)=(u,\psi)+((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi), \tag{1.18}$$

para todo $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Mas, para $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ notamos que

$$((-\Delta)^{\sigma-\frac{\delta}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi)=((-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u,(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\psi).$$

Substituindo a identidade acima em (1.18) e usando a densidade de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ em $H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ segue que a identidade na definição de $D(A_\sigma)$ é válida, com $u\in H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Para garantir que $u\in D(A_\sigma)$ e assim concluir que $H^{2\sigma-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset D(A_\sigma)$, resta provar que $y \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

De (1.18), concluímos que vale a seguinte identidade em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$y + (-\Delta)^\delta y = u + (-\Delta)^\sigma u.$$

Aplicando a transformada de Fourier e multiplicando por $(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}(1+|\xi|^{2\delta})^{-\frac{1}{2}}$ temos

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}(1+|\xi|^{2\delta})^{\frac{1}{2}}\widehat{y} = (1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}(1+|\xi|^{2\delta})^{-\frac{1}{2}}(1+|\xi|^{2\sigma})\widehat{u}.$$

Calculando a norma $L^2(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{y}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})^{-1}(1+|\xi|^{2\sigma})^2|\widehat{u}|^2 d\xi.$$

Usando o Teorema de Plancherel e o Lema 1.2 concluímos que

$$||y||_{H^{\delta+r}} \leq C||u||_{H^{2\sigma-\delta+r}} < +\infty,$$

como queríamos.

$\blacksquare$

1.4 Caso $0 \leq \theta < \delta \leq \alpha \leq 2$

A hipótese $0 \leq \delta \leq \alpha$, nos garante que $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Vamos considerar o espaço usual da energia

$$X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$$

com os seguintes produtos internos

$$(u,v)_{H^{\alpha+r}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r (1+|\xi|^{2\alpha})\, \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi, \tag{1.19}$$

$$(u,v)_{H^{\delta+r}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r (1+|\xi|^{2\delta})\, \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi \tag{1.20}$$

que são equivalentes aos produtos internos usuais, como mostramos na Subseção 1.1.2 (Ver Lema 1.2).

Nosso objetivo é definir operadores B_1 e J_1 tal que B_1 seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X e J_1 seja um operador limitado em X.

Vamos encontrar operadores B_1 e J_1 associados ao problema de Cauchy linear (1.1). Para $v = u_t$ temos de modo formal que

$$v_t = u_{tt} = -\big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(-\Delta)^\alpha u - \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}(-\Delta)^\theta v$$

com u uma solução do problema (1.1). Se somarmos e diminuirmos o termo $\big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}u$ temos a identidade abaixo

$$v_t = u_{tt} = -A_\alpha u - \big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\Big((-\Delta)^{\theta}v - u\Big),$$

onde A_α é o operador definido na Seção 1.3 (escolhendo $\sigma = \alpha$) da seguinte forma

$$A_\alpha = \big(I+(-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(I+(-\Delta)^{\alpha}\big).$$

Escrevendo o problema 1.1 na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = B_1U(t) + J_1(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$,

$$B_1 : D(A_\alpha) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \to X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$$

é dado por

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

com $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e o operador $J_1 : X \to X$ é definido por

$$J_1(U) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \end{array} \right).$$

Note que sendo $D(B_1) = D(A_\alpha) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ então $B_1 U \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $B_1(D(B_1)) \subset X$, como desejado.

Através dos resultados das subseções 1.4.1 e 1.4.2, garantimos (pelo Teorema 1.6) que $B_1 + J_1$ é gerador de um semigrupo de classe C_0. Seja

$$S_1 : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo de classe C_0 em X gerado por $B_1 + J_1$ então $U(t) = S_1(t)U_0$ é a solução para o problema (1.21). Assim podemos concluir que, se os dados iniciais são tais que

$$U_0 = (u_0, u_1) \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$$

temos que a solução $U(t)$ pertence à seguinte classe

$$U(t) = S_1(t)U_0 \in C\Big([0, \infty), H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big)$$

ou ainda, $u(t)$, a primeira componente de $U(t) = S_1(t)U_0$, é a única solução fraca do sistema linear (1.1) e satisfaz

$$u \in C\Big([0,\infty), H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty), H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Além disso, se os dados iniciais são tais que

$$U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_1) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$$

temos que

$$u \in C\Big([0,\infty); H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0,\infty); H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^2\Big([0,\infty); H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big)$$

é única solução forte do mesmo sistema.

1.4.1 B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0

Nosso objetivo aqui é mostrar que B_1 é um operador bem definido e é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 no espaço X.

Usando a definição do domínio do operador A_α podemos realizar o operador B_1 sobre o domínio $D(B_1) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e contradomínio o espaço $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$
\begin{aligned}
B_1 :\; & H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \to H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n) \\
& (u,v) \longmapsto B_1(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (v, -A_\alpha u),
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

pois pelos Lemas 1.4 e 1.5 temos que $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $A_\alpha u \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ se $u \in D(A_\alpha)$. Assim B_1 está bem definido.

Lema 1.6 *O operador B_1 definido em (1.22), é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração.

A ideia da prova é mostrar que B_1 atende as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips 1.5. Então aqui consideramos $(u,v) \in D(B_1)$, ou seja, $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$.

Para mostrar que B_1 é dissipativo calculemos o seguinte produto interno em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ (usando as definições (1.19) e (1.20) de produto interno de $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e $H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$)

$$
\begin{aligned}
&\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} = \big((v,-A_\alpha u),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} \\
&= (v,u)_{H^{\alpha+r}} + (-A_\alpha u, v)_{H^{\delta+r}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r (1+|\xi|^{2\alpha}) \widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\, d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r (1+|\xi|^{2\delta}) \widehat{A_\alpha u}\,\overline{\widehat{v}}\, d\xi
\end{aligned}
$$

Mas $\widehat{A_\alpha u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$ conforme calculado em (1.14). Assim

$$\begin{aligned}
\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})\frac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})\Big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}} - \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\Big)\,d\xi \\
&= 2i\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})Img\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)\,d\xi,
\end{aligned}$$

(Aqui "Img" indica a parte imaginária.)

Portanto, B_1 é dissipativo, já que $Re\Big(\big(B_1(u,v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}}\Big) = 0$, para todo $(u,v)\in D(B_1)$.

Vamos mostrar agora que $Im(I-B_1) = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Primeiro vamos mostrar que $Im(I-B_1)\subset H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Dado $(f,g)\in Im(I-B_1)$ temos que existe $(u,v)\in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$(I-B_1)(u,v) = (f,g).$$

Da definição de B_1 temos que $B_1(u,v)\in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e também $(u,v)\in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\subset H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ quando $0\le\delta\le\alpha$. Assim segue que

$$(f,g)\in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n).$$

Vamos agora mostrar que $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\subset Im(I-B_1)$.

Dado $(f,g) \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, vamos mostrar que existe $(u,v) \in D(B_1)$ tal que $(I-B_1)(u,v)=(f,g)$. Equivalentemente, pela definição de B_1, devemos mostrar que existe $(u,v) \in D(B_1)$ tal que

$$(u-v, v+A_\alpha u) = (f,g),$$

ou ainda,

$$\begin{cases} u - v = f \ \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \\ v + A_\alpha u = g \ \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Da primeira relação temos que $v = u - f$. Substituindo na segunda segue que

$$A_\alpha u + u = g + f. \tag{1.23}$$

Desse modo, precisamos mostrar que existe $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo a identidade (1.23). Ou ainda, multiplicando por $\big(I+(-\Delta)^r\big)\big(I+(-\Delta)^\delta\big)$ em ambos os lados da identidade (1.23) e usando a definição de A_α, queremos que u seja tal que

$$\begin{aligned} &\big(I+(-\Delta)^r\big)(I+(-\Delta)^\alpha)u + \big(I+(-\Delta)^r\big)(I+(-\Delta)^\delta)u \\ &\quad = \big(I+(-\Delta)^r\big)(I+(-\Delta)^\delta)(g+f). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Definimos o seguinte produto interno em $H^{\sigma+r}(\mathbb{R}^n)$ (para $\sigma \geq 0$)

$$(\eta, \psi)^0_{H^{\sigma+r}} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2r} + |\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2r+2\sigma})\, \widehat{\eta}\, \overline{\widehat{\psi}}\, d\xi. \qquad (1.25)$$

Notemos que este produto interno é equivalente ao produto interno usual $(\cdot, \cdot)_{H^{\sigma+r}}$. De fato, basta provar que

$$1 + |\xi|^{2r+2\sigma} \approx 1 + |\xi|^{2r} + |\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2r+2\sigma}.$$

Claro que $1+|\xi|^{2r+2\sigma} \leq 1+|\xi|^{2r}+|\xi|^{2\sigma}+|\xi|^{2r+2\sigma}$. Para ver o outro lado da equivalência, vamos primeiro considerar $|\xi| \leq 1$. Neste caso, $|\xi|^{2r} + |\xi|^{2\sigma} \leq 2 \leq 2(1 + |\xi|^{2r+2\sigma})$. E se $|\xi| > 1$, temos $|\xi|^{2r} + |\xi|^{2\sigma} \leq 2|\xi|^{2r+2\sigma} \leq 2(1 + |\xi|^{2r+2\sigma})$. Portanto, em ambos os casos segue que

$$1 + |\xi|^{2r} + |\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2r+2\sigma} \leq 3(1 + |\xi|^{2r+2\sigma}),$$

o que finaliza a equivalência entre os produtos internos considerados.

Definimos a forma $a(\cdot, \cdot) : H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(\eta, \psi) = (\eta, \psi)^0_{H^{\alpha+r}} + (\eta, \psi)^0_{H^{\delta+r}}.$$

Temos que a forma $a(\cdot, \cdot)$ está bem definida e é bilinear, pois $0 \leq \delta \leq \alpha$.

Vamos mostrar agora que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua. De fato, para todo $\eta, \psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$, como $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$
\begin{aligned}
|a(\eta,\psi)| &\leq |(\eta,\psi)^0_{H^{\alpha+r}}| + |(\eta,\psi)^0_{H^{\delta+r}}| \\
&\leq C\|\eta\|_{H^{\alpha+r}}\|\psi\|_{H^{\alpha+r}} + C\|\eta\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}} \\
&\leq 2C\|\eta\|_{H^{\alpha+r}}\|\psi\|_{H^{\alpha+r}}.
\end{aligned}
$$

Também $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois para todo $\eta \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$
\begin{aligned}
a(\eta,\eta) &= (\eta,\eta)^0_{H^{\alpha+r}} + (\eta,\eta)^0_{H^{\delta+r}} \\
&= C\|\eta\|^2_{H^{\alpha+r}} + C\|\eta\|^2_{H^{\delta+r}} \geq C\|\eta\|^2_{H^{\alpha+r}}.
\end{aligned}
$$

Agora, seja $F : H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$
\langle F,\psi\rangle = (g,\psi)^0_{H^{\delta+r}} + (f,\psi)^0_{H^{\delta+r}}.
$$

Note que F está bem definido pois $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Tem-se que F é linear e contínuo. De fato, a linearidade é imediata e a continuidade segue pois $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e

$$
\begin{aligned}
|\langle F,\psi\rangle| &\leq |(g,\psi)^0_{H^{\delta+r}}| + |(f,\psi)^0_{H^{\delta+r}}| \\
&\leq C\|g\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}} + C\|f\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}} \\
&\leq C\big(\|g\|_{H^{\delta+r}} + \|f\|_{H^{\alpha+r}}\big)\|\psi\|_{H^{\delta+r}},
\end{aligned}
$$

para todo $\psi \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Assim, por dualidade temos que $F \in H^{-(\delta+r)}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-(\alpha+r)}(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.1), existe uma única $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,\psi) = \langle F, \psi\rangle,$$

para todo $\psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$. Isto é, existe única $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que, pela definição de $a(\cdot,\cdot)$, F e do produto interno em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e $H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
&(u,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{r}{2}}\psi\big) + \big((-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\psi\big)\\
&\quad + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\alpha}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\alpha}{2}}\psi\big) + (u,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{r}{2}}\psi\big)\\
&\quad + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\big) + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\delta}{2}}u, (-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\delta}{2}}\psi\big)\\
&\ = (g+f,\psi) + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}}(g+f), (-\Delta)^{\frac{r}{2}}\psi\big) + \big((-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}(g+f), (-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}\psi\big)\\
&\quad + \big((-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\delta}{2}}(g+f), (-\Delta)^{\frac{r}{2}+\frac{\delta}{2}}\psi\big),
\end{aligned}$$

para todo $\psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$. Em particular vale a identidade variacional acima para todo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Isso implica que

$$\begin{aligned}
&(I + (-\Delta)^r)(I + (-\Delta)^\alpha)u + (I + (-\Delta)^r)(I + (-\Delta)^\delta)u\\
&\quad = (I + (-\Delta)^r)(I + (-\Delta)^\delta)(g+f),
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições, ou seja, em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Portanto

$$A_\alpha u + u = g + f$$

no sentido das distribuições.

Observe que $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a transformada de Fourier em $A_\alpha u + u = g + f$ temos que

$$\widehat{A_\alpha u} + \widehat{u} = \widehat{f} + \widehat{g}.$$

Podemos reescrever a identidade acima da seguinte forma

$$\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\widehat{A_\alpha u} = \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\big(\widehat{f}+\widehat{g}-\widehat{u}\big).$$

Usando (1.14) e o Lema 1.2 temos

$$\big(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\big)^{1/2}\widehat{u} \leq C\big(1+|\xi|^{2\delta}\big)^{1/2}\big(\widehat{f}+\widehat{g}-\widehat{u}\big).$$

Calculando a norma H^r em cada lado da desigualdade acima temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r \big(1+|\xi|^{2(2\alpha-\delta)}\big)|\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\qquad \leq C\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r \big(1+|\xi|^{2\delta}\big)\big|\widehat{f}+\widehat{g}-\widehat{u}\big|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Obtemos assim $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e

$$||u||_{H^{2\alpha-\delta+r}} \leq C(\|f\|^2_{H^{\delta+r}} + \|g\|^2_{H^{\delta+r}} + \|u\|^2_{H^{\delta+r}}),$$

pois $u, f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Temos $v = u - f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e vale que $v + A_\alpha u = g$.

Portanto, para todo $(f,g) \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ existe um par $(u,v) \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que $(I - B_1)(u,v) = (f,g)$, ou seja, $(f,g) \in Im(I - B_1)$.

Dessa forma, $Im(I - B_1) = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Também sabemos que o espaço $H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ é denso no espaço $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Então, pelo Teorema de Lumer-Phillips 1.5 temos que B_1 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.

■

1.4.2 J_1 é um operador limitado

Queremos agora mostrar que, para todo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, o operador

$$J_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} \left(u - (-\Delta)^\theta v\right) \end{pmatrix}$$

é linear e limitado, para então concluir que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Notamos que $J_1 : X \to X$ está bem definido pois $0 \le \theta < \delta \le \alpha$.

Lema 1.7 *O operador* $J_1 : H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n) \to H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ *definido da seguinte forma*

$$J_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \end{pmatrix}$$

é linear e limitado.

Demonstração.

É imediato ver que J_1 é um operador linear. Vamos agora mostrar que J_1 é limitado. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\|J_1(U)\|^2_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} &= \left\| \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u - (-\Delta)^\theta v\big) \right\|^2_{H^{\delta+r}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\widehat{u}(\xi) - |\xi|^{2\theta}\widehat{v}(\xi)}{1+|\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \\
&\le C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\quad + C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^r|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} |\widehat{v}(\xi)|^2\, d\xi \\
&\le C_2\|u\|_{H^{\alpha+r}} + C_2\|v\|_{H^{\delta+r}} \le C_3\|U\|_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}},
\end{aligned}$$

pois $\dfrac{|\xi|^{4\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \le 1 + |\xi|^{2\delta}$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, no caso $\theta < \delta$.

■

Com os dois lemas anteriores fica demonstrado que $B_1 + J_1$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0.

1.5 Caso $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha \leq 2$ e $\theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$

Da mesma forma que nas seções anteriores temos que $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Então consideraremos o mesmo espaço de energia

$$X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n).$$

Nosso objetivo nesta seção é definir operadores B_2 e J_2, associados com a equação (1.1), tais que B_2 seja gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e J_2 seja um operador limitado em X.

De modo formal, vamos encontrar os operadores B_2 e J_2. Considerando $v = u_t$ temos que

$$v_t = u_{tt} = -\big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}(-\Delta)^{\alpha}u - \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}(-\Delta)^{\theta}v.$$

Escolhendo $\sigma = \alpha$ e $\sigma = \theta$ na Seção 1.3 podemos definir os operadores

$$A_\alpha = \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^{\alpha}\big)$$

e

$$A_\theta = \big(I + (-\Delta)^{\delta}\big)^{-1}\big(I + (-\Delta)^{\theta}\big).$$

Sabemos que $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, as hipóteses $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$ e $\theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$ garantem que

$$H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n). \tag{1.26}$$

Escrevendo o problema de Cauchy (1.1) na forma matricial temos

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = B_2U(t) + J_2(U(t)) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

onde $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$, $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in X$, $B_2 : D(A_\alpha) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \to X$ é o operador dado por

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_\alpha & -A_\theta \end{pmatrix}$$

com $D(A_\alpha) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e o operador $J_2 : X \to X$ é dado por

$$J_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1}(u+v) \end{pmatrix}.$$

Na Subseção 1.5.1 mostraremos que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X e na Subseção 1.5.2 mostraremos que J_2 é um operador limitado em X. Então pelo Teorema 1.6 poderemos concluir que $B_2 + J_2$ é gerador de um semigrupo de classe

C_0. Seja

$$S_2 : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$$

o semigrupo gerado por $B_2 + J_2$. Então $U(t) = S_2(t)U_0$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}(t) = (B_2 + J_2)U(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

para todo $t > 0$, no sentido que se $U_0 = (u_0, u_1) \in X$ temos que

$$U(t) = S_2(t)U_0 \in C\Big([0, \infty), H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big).$$

Logo, a primeira componente $u(t)$ de $U(t) = S_2(t)U_0$ satisfaz

$$u \in C\Big([0, \infty), H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0, \infty), H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big)$$

e é a única solução fraca do sistema linear (1.1). Além disso, se os dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1) \in D(B_2) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ temos que a solução de (1.1) satisfaz

$$u \in C\Big([0, \infty); H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^1\Big([0, \infty); H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)\Big) \cap C^2\Big([0, \infty); H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)\Big)$$

e é a única solução forte do problema de Cauchy (1.1).

1.5.1 B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0

Para completar a prova da existência e unicidade de solução do problema de Cauchy (1.1) nosso objetivo agora é mostrar que B_2 é um operador bem definido e é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Consideramos o operador B_2 definido no espaço X, com domínio dado por

$$D(B_2) = H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$$

e definido por

$$B_2(u,v) = (v, -A_\alpha u - A_\theta v), \quad (u,v) \in D(B_2) \tag{1.27}$$

sendo A_α e A_θ os operadores definidos como na Seção 1.3.

Notamos que, se $v \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ então $v \in D(A_\theta) = H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ pois $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, como vimos em (1.26).

Lema 1.8 *O operador $B_2 : D(B_2) \subset X \longrightarrow X$, definido em (1.27), é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.*

Demonstração.

Como no Lema 1.6 a ideia da prova é mostrar que B_2 atende as hipóteses do Teorema de Lumer-Phillips. Para fazer isso consideramos

$(u,v) \in D(B_2)$, ou seja, $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$.

Para mostar que B_2 é dissipativo calculamos o seguinte produto interno em $X = H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$

$$
\begin{aligned}
&\big(B_2(u,v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} = \big((v,-A_\alpha u - A_\theta v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\alpha u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})\widehat{A_\theta v}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\,d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})\frac{(1+|\xi|^{2\alpha})}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\delta})\frac{(1+|\xi|^{2\theta})}{1+|\xi|^{2\delta}}\,\widehat{v}\,\overline{\widehat{v}}\,d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})\Big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}} - \widehat{u}\,\overline{\widehat{v}}\Big)d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\theta})|\widehat{v}|^2 d\xi\\
&= 2i\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^r(1+|\xi|^{2\alpha})Img\big(\widehat{v}\,\overline{\widehat{u}}\big)d\xi - \|v\|^2_{H^{\theta+r}},
\end{aligned}
$$

pois $\widehat{A_\alpha u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$ e $\widehat{A_\theta u} = \dfrac{1+|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}}\widehat{u}$, como vimos em (1.14).

Portanto, B_2 é dissipativo, pois

$$
Re\big(B_2(u,v),(u,v)\big)_{H^{\alpha+r}\times H^{\delta+r}} = -\|v\|^2_{H^{\theta+r}} \le 0,
$$

para todo $(u,v) \in D(B_2)$.

Vamos mostrar agora que $Im(I - B_2) = X$.

Primeiro vamos mostrar que $Im(I - B_2) \subset X$. Seja $(f,g) \in Im(I -$

B_2). Então existe $(u, v) \in D(B_2)$ tal que

$$(I - B_2)(u, v) = (f, g).$$

Como $B_2(u, v) \in X$ e $(u, v) \in D(B_2) \subset X$ temos que $(f, g) \in X$.

Vamos agora mostrar que $X \subset Im(I - B_2)$. Dado $(f, g) \in X$, vamos mostrar que existe $(u, v) \in D(B_2)$ tal que $(I - B_2)(u, v) = (f, g)$. Equivalentemente, da definição de B_2 temos que mostrar que

$$(u - v, v + A_\alpha u + A_\theta v) = (f, g)$$

para algum $(u, v) \in D(B_2)$.

Assim, deve-se mostrar que existem $u \in H^{2\alpha - \delta + r}(\mathbb{R}^n)$ e $v \in H^{\alpha + r}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{cases} u - v = f \\ v + A_\alpha u + A_\theta v = g, \end{cases}$$

com $f \in H^{\alpha + r}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in H^{\delta + r}(\mathbb{R}^n)$.

Substituindo $v = u - f$ na segunda equação acima, devemos apenas mostrar que existe $u \in H^{2\alpha - \delta + r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u - f + A_\alpha u + A_\theta u - A_\theta f = g$$

ou que

$$A_\alpha u + A_\theta u + u = g + f + A_\theta f. \tag{1.28}$$

Formalmente, multiplicando os dois lados da igualdade (1.28) por $(I + (-\Delta)^r)(I + (-\Delta)^\delta)$ temos

$$\begin{aligned}
&(I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\alpha\big)u + (I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\theta\big)u \\
&\quad + (I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)u \\
&= (I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)g + (I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)f \\
&\quad + (I + (-\Delta)^r)\big(I + (-\Delta)^\theta\big)f.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Para demonstrar que a equação (1.28) admite uma solução $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, definimos a forma $a(\cdot,\cdot) : H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(u,\psi) = (u,\psi)^0_{H^{\alpha+r}} + (u,\psi)^0_{H^{\theta+r}} + (u,\psi)^0_{H^{\delta+r}},$$

onde o produto interno $(\cdot,\cdot)^0_{H^{\sigma+r}}$ foi definido em (1.25).

É fácil ver que a forma $a(\cdot,\cdot)$ está bem definida e é bilinear, já que $\theta \leq \alpha$.

Para verificar que $a(\cdot,\cdot)$ é contínua, consideramos $u, \psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$

e notamos que

$$|a(u,\psi)| \leq C\|u\|_{H^{\alpha+r}}\|\psi\|_{H^{\alpha+r}} + C\|u\|_{H^{\theta+r}}\|\psi\|_{H^{\theta+r}} + C\|u\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}}$$
$$\leq 3C\|u\|_{H^{\alpha+r}}\|\psi\|_{H^{\alpha+r}}.$$

Também $a(\cdot,\cdot)$ é coerciva, pois para todo $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$a(u,u) = (u,u)^0_{H^{\alpha+r}} + (u,u)^0_{H^{\theta+r}} + (u,u)^0_{H^{\delta+r}}$$
$$= C\|u\|^2_{H^{\alpha+r}} + C\|u\|^2_{H^{\theta+r}} + C\|u\|^2_{H^{\delta+r}} \geq C\|u\|^2_{H^{\alpha+r}}.$$

Agora, definimos o funcional $F : H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$, baseados na equação (1.29), por

$$\langle F,\psi\rangle = (g,\psi)^0_{H^{\delta+r}} + (f,\psi)^0_{H^{\delta+r}} + (f,\psi)^0_{H^{\theta+r}},$$

para todo $\psi \in H^{\alpha+r}$. Notamos que F está bem definido pois $g \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$.

Tem-se que F é linear e contínuo pois

$$|\langle F,\psi\rangle| \leq C\|g\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}} + C\|f\|_{H^{\delta+r}}\|\psi\|_{H^{\delta+r}} + C\|f\|_{H^{\theta+r}}\|\psi\|_{H^{\theta+r}}$$
$$\leq C\Big(\|g\|_{H^{\delta+r}} + \|f\|_{H^{\delta+r}} + \|f\|_{H^{\theta+r}}\Big)\|\psi\|_{H^{\alpha+r}}$$

para todo $\psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$, pois $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha$.

Então pelo Lema de Lax-Milgram (ver Teorema 1.1), existe única $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,\psi) = \langle F, \psi \rangle, \qquad \text{para todo } \psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n).$$

Isto é, existe única $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\psi \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ vale a identidade

$$(u,\psi)^0_{H^{\alpha+r}} + (u,\psi)^0_{H^{\theta+r}} + (u,\psi)^0_{H^{\delta+r}} = (g,\psi)^0_{H^{\delta+r}} + (f,\psi)^0_{H^{\delta+r}} + (f,\psi)^0_{H^{\theta+r}}.$$

Em particular, a igualdade anterior vale para toda $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Isto implica que

$$\begin{aligned}
&\big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\alpha\big)u + \big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\theta\big)u \\
&\quad + \big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)u \\
&= \big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)g + \big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\delta\big)f \\
&\quad + \big(I + (-\Delta)^r\big)\big(I + (-\Delta)^\theta\big)f
\end{aligned}$$

no sentido das distribuições temperadas, ou seja, em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Portanto

$$A_\alpha u + A_\theta u + u = g + f + A_\theta f$$

no sentido das distribuições temperadas.

Aplicando a transformada de Fourier na identidade acima temos que

$$\widehat{A_\alpha u} = \widehat{g} + \widehat{f} + \widehat{A_\theta f} - \widehat{A_\theta u} - \widehat{u}. \tag{1.30}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^r \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) |\widehat{A_\alpha u}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^r \left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \left|\widehat{f} + \widehat{g} + \widehat{A_\theta f} - \widehat{u} - \widehat{A_\theta u}\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

e usando (1.14) concluímos que

$$\|A_\alpha u\|^2_{H^{\delta+r}} \leq C\left(\|f\|^2_{H^{\delta+r}} + \|g\|^2_{H^{\delta+r}} + \|u\|^2_{H^{\delta+r}} + \|f\|^2_{H^{2\theta-\delta+r}} + \|u\|^2_{H^{2\theta-\delta+r}}\right)$$

onde foi usado que $u \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$, $g \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{2\theta-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Assim concluímos que $A_\alpha u \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Do Lema 1.4 concluímos que $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Concluindo, definimos $v = u - f$. Como $u \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ então $v \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$. Da identidade (1.30) temos $\widehat{v} + \widehat{A_\alpha u} + \widehat{A_\theta v} = \widehat{g}$. Assim v, $A_\alpha u$, $A_\theta v \in H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando a transformada de Fourier inversa segue que

$$v + A_\alpha u + A_\theta v = g \quad \text{em } H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto dado $(f,g) \in H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$ existe

$$(u,v) \in H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $(I - B_2)(u,v) = (f,g)$, ou seja, $(f,g) \in Im(I - B_2)$.

Dessa forma, concluímos que $Im(I - B_2) = X$.

Também temos que $H^{2\alpha-\delta+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

Então, pelo Teorema de Lumer-Phillips temos que B_2 é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 em $H^{\alpha+r}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+r}(\mathbb{R}^n)$.

∎

1.5.2 J_2 é um operador limitado

Queremos agora mostrar que $J_2 : X \to X$ definido por

$$J_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(I + (-\Delta)^{\delta}\right)^{-1} \left(u + v\right) \end{pmatrix}$$

está bem definido e é um operador linear e limitado e concluir que $B_2 + J_2$ é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 em X, com $0 \leq \delta \leq \theta \leq \alpha \leq 2$ e $\theta \leq \frac{\alpha+\delta}{2}$.

Lema 1.9 *O operador $J_2 : X \to X$ definido da seguinte forma $J_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u+v\big) \end{pmatrix}$ é linear e limitado.*

Demonstração.

É fácil ver que J_2 é um operador linear. Vamos agora mostrar que J_2 é limitado, ou seja, mostrar que a norma de J_2 em X é limitada. De fato, para $U \in X$ temos que

$$\begin{aligned}
\|J_2(U)\|_X^2 &= \left\| \big(I + (-\Delta)^\delta\big)^{-1}\big(u+v\big) \right\|_{H^{\delta+r}}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r (1+|\xi|^{2\delta}) \left| \frac{\widehat{u}+\widehat{v}}{1+|\xi|^{2\delta}} \right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r |\widehat{u}|^2 \, d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \big(1+|\xi|^2\big)^r |\widehat{v}|^2 \, d\xi \\
&\leq C\|u\|_{H^{\alpha+r}}^2 + C\|v\|_{H^{\delta+r}}^2 \leq C\|U\|_X^2.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Estabilidade: Problema Linear

Para obter as estimativas para o problema (1)-(2) primeiro investigaremos propriedades de decaimento da equação linear correspondente (4)-(2).

Estudaremos o problema linear em duas situações diferentes: baixa e alta frequência. Para tanto, utilizaremos a notação abaixo.

Para $\varepsilon > 0$, denotamos por $E_0(t,x)$ e $E_\infty(t,x)$ a solução para (4) localizada para baixa e alta frequências, isto é,

$$E_0 = E_0(t,x)(v) = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{u}(t,\xi)), \tag{2.1}$$

$$E_\infty = E_\infty(t,x)(v) = \mathcal{F}^{-1}((1-\chi(\xi))\widehat{u}(t,\xi)), \tag{2.2}$$

onde $\chi(\xi)$ é a função característica de $\{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ |\xi| < \varepsilon\}$. Note que para estimar as normas das derivadas (em x) de u e u_t basta estimar as normas das derivadas de E_0, $\partial_t E_0$, E_∞, $\partial_t E_\infty$.

Na sequência, usaremos a notação $f \lesssim g$ significando $0 \leq f \leq Cg$ para alguma constante $C > 0$. A notação $g \approx f$ significa $g \lesssim f$ e $f \lesssim g$. Além disso, γ denota um multi-índice com entradas não negativas.

2.1 Região de baixa frequência: $|\xi| < \varepsilon$

Observemos que

$$\begin{aligned} ||\partial_t^j \partial_x^\gamma E_0(t)||^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t^j \widehat{u}(t)|^2 |\xi|^{2|\gamma|} \chi(\xi)^2 d\xi \\ &\lesssim ||\widehat{u}_0||_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t^j \widehat{K}_0(t)|^2 |\xi|^{2|\gamma|} \chi(\xi)^2 d\xi \\ &\quad + ||\widehat{u}_1||_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t^j \widehat{K}_1(t)|^2 |\xi|^{2|\gamma|} \chi(\xi)^2 d\xi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

com E_0 definido em (2.1) e $\widehat{K}_0$, $\widehat{K}_1$ definidos em (7). Denotando I_0 e I_1 pelas integrais

$$I_0^2(j, |\gamma|) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_t^j(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} |\xi|^{2|\gamma|} \chi(\xi)^2 d\xi \tag{2.4}$$

e

$$I_1^2(j, |\gamma|) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\partial_t^j(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} |\xi|^{2|\gamma|} \chi(\xi)^2 d\xi \tag{2.5}$$

temos por (7)

$$||\partial_t^j \partial_x^\gamma E_0(t)||^2 \lesssim ||u_0||_{L^1}^2 I_0^2(j,|\gamma|) + ||u_1||_{L^1}^2 I_1^2(j,|\gamma|). \tag{2.6}$$

Para obtermos os resultados principais desta seção, vamos estimar cada uma dessas integrais I_0 e I_1. Para isso vamos estudar separadamente dois casos, um onde os autovalores são reais e outro onde são complexos. Em ambos os casos usamos o lema abaixo para obter as estimativas.

Lema 2.1 *Sejam $k > -n$, $\beta > 0$ e $\kappa > 0$. Então*

$$\int_{|\xi|\leq\varepsilon} e^{-\kappa|\xi|^\beta t}|\xi|^k d\xi \lesssim (1+t)^{-\frac{n+k}{\beta}}, \quad \forall\, t > 0.$$

2.1.1 Caso $\alpha > 2\theta$: autovalores reais

Consideremos $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right)$ e $\varepsilon > 0$ definido por $\varepsilon^{\alpha-2\theta} = \frac{1}{4}$. Para $|\xi| < \varepsilon$ tem-se $|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} < \frac{1}{16}$ e portanto os autovalores são reais. Para estimarmos I_0 e I_1 usaremos as equivalências dos autovalores dadas pelo seguinte lema.

Lema 2.2 *Se $|\xi| < \varepsilon$ então:*

(i) $\lambda_+ \approx -|\xi|^{2(\alpha-\theta)}$

(mais especificamente, $-4\left(2-\sqrt{2}\right)|\xi|^{2(\alpha-\theta)} \leq \lambda_+ \leq -|\xi|^{2(\alpha-\theta)}$*);*

(ii) $\lambda_- \approx -|\xi|^{2\theta}$

(mais especificamente, $-|\xi|^{2\theta} \leq \lambda_- \leq -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|\xi|^{2\theta}$*);*

(iii) $\lambda_+ - \lambda_- \approx |\xi|^{2\theta}$.

Demonstração.

(i) Observe primeiramente que

$$|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} < \frac{1}{16} = \frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)-2}{16\left(2-\sqrt{2}\right)^2}.$$

Multiplicando por $4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
&-16\left(2-\sqrt{2}\right)|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} + 64\left(2-\sqrt{2}\right)^2|\xi|^{4(\alpha-2\theta)} \\
&\leq -8|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} \\
&\leq -4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right).
\end{aligned}$$

Notando que $1-16(2-\sqrt{2})|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} + 64(2-\sqrt{2})^2|\xi|^{4(\alpha-2\theta)} = \left(1-8(2-\sqrt{2})|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\right)^2$ e $1-8(2-\sqrt{2})|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} > 0$, segue que

$$-8\left(2-\sqrt{2}\right)|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} \leq -1+\sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})}.$$

Como $-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{2(1+|\xi|^{2\delta})}$ concluímos que

$$\begin{aligned}
&-4\left(2-\sqrt{2}\right)|\xi|^{2(\alpha-\theta)}\\
&\le \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\left(-1+\sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}\right)\\
&= \lambda_+.
\end{aligned}$$

Para provar que $\lambda_+ \le -|\xi|^{2(\alpha-\theta)}$ observe que

$$\left(-1+\sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})}\right) \le -2|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)$$

pois $1 - 4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \le \left(1-2|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)\right)^2$ e $1-2|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta}) \ge 0$. Multiplicando ambos os lados por $\frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}$ segue o resultado.

(ii) Notemos que $\frac{1}{2} \le 1-8|\xi|^{2(\alpha-2\theta)} \le 1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})$. Logo podemos afirmar que

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le \frac{1}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\left(1+\sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)}\right) \le 1.$$

Para obtermos o resultado multiplicamos ambos os lados por $-|\xi|^{2\theta}$.

(iii) Pela escolha de ε, temos $|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta}) \le \frac{1}{8}$. Portanto

$$-\frac{1}{2} \le -4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) \le 0.$$

Logo

$$\frac{|\xi|^{2\theta}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \sqrt{1-4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right)} \leq |\xi|^{2\theta}.$$

■

Lema 2.3 *Sejam I_0 e I_1 dadas em (2.4) e (2.5), $n \geq 1$ e γ multi-índice. Então para todo $t \geq 0$ tem-se:*

(i) para $n+2|\gamma| > 4\theta$, temos $I_1(0,|\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)}$;

$$\text{(ii)}\ I_1(1,|\gamma|) \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)} + (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-1}, & se\ \theta > 0 \\ (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-1}, & se\ \theta = 0; \end{cases}$$

(iii) $I_0(0,|\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)}$;

(iv) $I_0(1,|\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)-1}$.

Demonstração.

Vamos estimar (2.5) para obter *(i)* e *(ii)*. Os itens *(iii)* e *(iv)* são análogos usando (2.4).

(i) Pelo Lema 2.2 segue que

$$\frac{|e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} \lesssim \frac{e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}}{|\xi|^{4\theta}}.$$

Usando a estimativa acima e o Lema 2.1 obtemos

$$\begin{aligned} I_1^2(0,|\gamma|) &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\xi|^{2|\gamma|-4\theta}d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|-4\theta}{2(\alpha-\theta)}} \end{aligned}$$

já que $n+2|\gamma|-4\theta>0$.

(ii) Novamente, usando o Lema 2.2,

$$\frac{|\partial_t(e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t})|^2}{|\lambda_+-\lambda_-|^2} \lesssim \frac{\lambda_+^2e^{2\lambda_+t}+\lambda_-^2e^{2\lambda_-t}}{|\lambda_+-\lambda_-|^2} \lesssim |\xi|^{4(\alpha-2\theta)}e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}+e^{-c|\xi|^{2\theta}t},$$

com $c=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Analogamente ao feito em *(i)*, obtemos para $\theta\in(0,\frac{\alpha}{2})$

$$\begin{aligned} I_1^2(1,|\gamma|) &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon}\left(|\xi|^{4(\alpha-2\theta)}e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}+e^{-c|\xi|^{2\theta}t}\right)|\xi|^{2|\gamma|}d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|+4(\alpha-2\theta)}{2(\alpha-\theta)}}+(1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|}{2\theta}}. \end{aligned}$$

O caso $\theta=0$ é imediato.

(iii) Vamos primeiramente provar que

$$\frac{|\lambda_+e^{\lambda_-t}-\lambda_-e^{\lambda_+t}|^2}{|\lambda_+-\lambda_-|^2} \lesssim |\xi|^{4(\alpha-2\theta)}e^{-c|\xi|^{2\theta}t}+e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}, \tag{2.7}$$

com $c=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
|\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2 &= (\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})^2 \\
&= \lambda_+^2 e^{2\lambda_- t} + \lambda_-^2 e^{2\lambda_+ t} - 2\lambda_+\lambda_- e^{\lambda_+ t} e^{\lambda_- t}.
\end{aligned}
$$

E, pelo Lema 2.2, itens *(i)* e *(ii)*, temos

$$
\begin{aligned}
|\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2 &\leq \lambda_+^2 e^{2\lambda_- t} + \lambda_-^2 e^{2\lambda_+ t} \\
&\lesssim |\xi|^{4(\alpha-\theta)} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} + |\xi|^{4\theta} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)} t}.
\end{aligned}
$$

Mas já vimos que $|\lambda_+ - \lambda_-|^2 \approx |\xi|^{4\theta}$. Daí segue (2.7).

Portanto para $\theta \in (0, \frac{\alpha}{2})$

$$
\begin{aligned}
I_0^2(0, |\gamma|) &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} (|\xi|^{4(\alpha-2\theta)} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} + e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)} t}) |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\
&= \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-c|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2|\gamma|+4(\alpha-2\theta)} d\xi + \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)} t} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|+4(\alpha-2\theta)}{2\theta}} + (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|}{2(\alpha-\theta)}} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|}{2(\alpha-\theta)}},
\end{aligned}
$$

pois $\frac{n+2|\gamma|+4(\alpha-2\theta)}{2\theta} > \frac{n+2|\gamma|}{2(\alpha-\theta)}$. Na estimativa acima usamos o Lema 2.1.

O caso $\theta = 0$ é imediato.

(iv) Note que

$$
\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}) = \lambda_+\lambda_- e^{\lambda_- t} - \lambda_+\lambda_- e^{\lambda_+ t} = \lambda_+\lambda_- (e^{\lambda_- t} - e^{\lambda_+ t}).
$$

Pelo Lema 2.2, itens *(i)* e *(ii)*,

$$|\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})| = \lambda_+\lambda_- |e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}| \approx |\xi|^{2\alpha} |e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}|.$$

Mas já vimos que $|e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}| \leq e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}$, donde segue que

$$|\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|^2 \lesssim |\xi|^{4\alpha} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}.$$

Portanto, pela estimativa acima e pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned} I_0^2(1,|\gamma|) &= \int_{|\xi|<\varepsilon} \frac{|\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\ &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t} |\xi|^{2|\gamma|+4(\alpha-\theta)} d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|+4(\alpha-\theta)}{2(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

■

Usando o lema anterior provamos o seguinte resultado para o caso real na baixa frequência:

Proposição 2.1 *Sejam α, θ tais que $0 \leq 2\theta < \alpha \leq 2$, $\delta \in [0,2]$, γ multi-índice qualquer e $(u_0, u_1) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$. Então, para $t \geq 0$, valem as seguintes estimativas:*

(i) Se $n+2|\gamma|>4\theta$ então

$$||\partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)}; \tag{2.8}$$

(ii) Se $n+2|\gamma|<2\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ então

$$||\partial_t\partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)-1} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)}; \tag{2.9}$$

e se $n+2|\gamma|\geq 2\alpha$ ou $\theta \in \left[0, \frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)$ então

$$||\partial_t\partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)-1} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-1}. \tag{2.10}$$

Demonstração.

O item *(i)* decorre diretamente dos itens *(i)* e *(iii)* do Lema 2.3 e da estimativa (2.6) com $j=0$. Para provar o item *(ii)*, escolhemos $j=1$ em (2.6) e usamos o Lema 2.3, itens *(ii)* e *(iv)*. Para escolher a melhor taxa dada em *(ii)*, notemos que se $n+2|\gamma|<2\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ então

$$\frac{n+2|\gamma|+4(\alpha-2\theta)}{2(\alpha-\theta)} \geq \frac{n+2|\gamma|}{2\theta}$$

e portanto concluímos (2.9). Por outro lado, no caso em que $n+2|\gamma|\geq 2\alpha$ ou $\theta \in \left[0, \frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)$ temos a desigualdade contrária donde segue (2.10).

■

2.1.2 Caso $\alpha \leq 2\theta$: autovalores complexos

Consideramos $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right] \subset [0,2]$ e $\varepsilon \in (0,1)$ definido no caso anterior. Neste caso os autovalores são complexos, dados por

$$\lambda_\pm = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\left(-1 \pm i\sqrt{4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1}\right).$$

O resultado para o caso complexo é obtido seguindo as mesmas etapas do caso real.

Lema 2.4 *Se $|\xi| < \varepsilon$ então:*

(i) $|\lambda_+ - \lambda_-| \approx |\xi|^\alpha$;

(ii) $|\lambda_\pm|^2 \lesssim |\xi|^{2\alpha}$;

(iii) $|e^{\lambda_\pm t}| \lesssim e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2\theta}t}$.

Demonstração.

(i) Como $1 \leq 1+|\xi|^{2\delta} \leq 2$, a prova segue diretamente do fato de que

$$\frac{1}{8}\left(4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1\right) \leq |\xi|^{2(\alpha-2\theta)} \leq 4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1.$$

(iii) Como $\mathrm{Re}(\lambda_\pm) \leq -\frac{1}{4}|\xi|^{2\theta}$ segue que $|e^{\lambda_\pm t}| \leq e^{\mathrm{Re}(\lambda_\pm)t} \leq e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2\theta}t}$.

■

O próximo lema é similar ao Lema 2.3.

Lema 2.5 *Sejam I_0 e I_1 dadas em* (2.4) *e* (2.5), $n \geq 1$ *e* γ *multi-índice. Então, para todo $t \geq 0$ temos:*

(i) *para $n + 2|\gamma| > 2\alpha$, temos* $I_1(0, |\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

(ii) $I_1(1, |\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)}$;

(iii) $I_0(0, |\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)}$;

(iv) $I_0(1, |\gamma|) \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

É imediato que se $\alpha = \theta = 0$ então $I_i(j, |\gamma|) \lesssim e^{-\frac{t}{4}}$, $t \geq 0$, para todo $i, j \in \{0, 1\}$.

Demonstração*.*

(i) Usando o Lema 2.4, itens *(i)* e *(iii)*, obtemos

$$\frac{|e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} \lesssim \frac{|e^{\lambda_+ t}|^2 + |e^{\lambda_- t}|^2}{|\xi|^{2\alpha}} \lesssim \frac{e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}}{|\xi|^{2\alpha}}. \tag{2.11}$$

Portanto, pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned} I_1^2(0, |\gamma|) &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2|\gamma|-2\alpha} d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|-2\alpha}{2\theta}} \end{aligned}$$

já que $n + 2|\gamma| - 2\alpha > 0$.

(ii) Derivando $e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}$ e usando os itens *(ii)* e *(iv)* do Lema 2.4, segue que

$$
\begin{aligned}
|\partial_t(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})|^2 &\leq |\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}|^2 \\
&\lesssim |\lambda_+|^2 |e^{\lambda_+ t}|^2 + |\lambda_-|^2 |e^{\lambda_- t}|^2 \\
&\lesssim |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}.
\end{aligned}
$$

Do item *(i)* do Lema 2.4, obtemos $|\lambda_+ - \lambda_-|^2 \approx |\xi|^{2\alpha}$.

Usando o Lema 2.1 com $\beta = 2\theta$ e $k = 2|\gamma| \geq 0 > -n$ concluímos que

$$
\begin{aligned}
I_1^2(1,|\gamma|) &= \int_{|\xi|<\varepsilon} \frac{|\partial_t(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|}{2\theta}}.
\end{aligned}
$$

(iii) Pelos itens *(ii)* e *(iii)* do Lema 2.4, temos

$$
|\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2 \lesssim |\lambda_+|^2 |e^{\lambda_- t}|^2 + |\lambda_-|^2 |e^{\lambda_+ t}|^2 \lesssim |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}
$$

Novamente pelo Lema 2.4, item *(i)*, podemos escrever

$$
\frac{|\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} \lesssim \frac{|\xi|^{4\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}}{|\xi|^{2\alpha}} = |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}
$$

e assim

$$\begin{aligned} I_0^2(0,|\gamma|) &= \int_{|\xi|<\varepsilon} \frac{|\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\ &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2|\gamma|} d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|}{2\theta}}. \end{aligned}$$

(iv) Derivando $\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}$, temos

$$\begin{aligned} |\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|^2 &= |\lambda_+ \lambda_- e^{\lambda_- t} - \lambda_+ \lambda_- e^{\lambda_+ t}|^2 \\ &\lesssim |\lambda_+|^2 |\lambda_-|^2 (|e^{\lambda_+ t}|^2 + |e^{\lambda_- t}|^2). \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.4, itens *(i)*, *(ii)* e *(iii)*, segue que

$$\frac{|\partial_t(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|^2}{|\lambda_+ - \lambda_-|^2} \lesssim \frac{|\xi|^{4\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}}{|\xi|^{2\alpha}} = |\xi|^{2\alpha} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t}.$$

Portanto, obtemos

$$\begin{aligned} I_0^2(1,|\gamma|) &\lesssim \int_{|\xi|<\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2\theta} t} |\xi|^{2|\gamma|+2\alpha} d\xi \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n+2|\gamma|+2\alpha}{2\theta}} \end{aligned}$$

já que $n + 2|\gamma| + 2\alpha > 0$ para $n \geq 1$. ∎

Obtemos, da estimativa de (2.6) e do Lema 2.5, o seguinte resultado:

Proposição 2.2 *Sejam* $\delta, \alpha \in [0,2]$, $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$, γ *multi-índice qualquer e* $(u_0, u_1) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então, para* $t \geq 0$, *valem as seguintes estimativas:*

(i) Se $n + 2|\gamma| > 2\alpha$ *e* $\theta > 0$ *então*

$$||\partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)};$$

(ii) Se $n \geq 1$ *e* $\theta > 0$,

$$||\partial_t \partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}\right)};$$

(iii) Se $\alpha = \theta = 0$ *então* $||\partial_t^j \partial_x^\gamma E_0(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1} + ||u_1||_{L^1}\} e^{-\frac{t}{4}}$, *para* $j = 0, 1$.

2.2 Região de alta frequência

Os resultados obtidos na seção anterior completam as estimativas que precisamos para provar os Teoremas 2.1 e 2.2 na região de baixa frequência. Em seguida, vamos obter as estimativas para a região de alta frequência e a regularidade exigida nos dados iniciais para obtermos o decaimento desejado. Para esse propósito, aplicaremos o método dos multiplicadores no espaço de Fourier.

Definimos, para $|\xi| \geq \varepsilon$ (com $\varepsilon \in (0,1)$ definido na seção anterior), a seguinte função auxiliar:

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^{2\alpha+2\delta-4\theta}|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}, & \text{se } \alpha+\delta \geq 2\theta \\[2ex] \dfrac{\varepsilon^{-2\alpha+4\theta}|\xi|^{2\alpha-2\theta}}{4}, & \text{se } \alpha+\delta < 2\theta. \end{cases} \tag{2.12}$$

É fácil ver que

$$\rho(\xi) \leq \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})} \quad \text{e} \quad \rho(\xi) \leq \frac{|\xi|^{2\alpha-2\theta}}{2}. \tag{2.13}$$

Denotamos por $E_1(t)$ a energia de ordem σ da equação (5) no espaço de Fourier dada por

$$E_1(t) = \frac{1}{2}\,|\xi|^{2\delta+\sigma}|\widehat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\,|\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2, \quad t \geq 0.$$

Logo

$$2\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1-\chi(\xi))^2 \left\{|\xi|^{2\delta+\sigma}|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\right\} d\xi,$$

onde $\chi(\xi)$ é a função característica de $\{\xi \in \mathbb{R}^n \ / \ |\xi| < \varepsilon\}$.

Notemos também que escolhendo σ adequadamente e usando a identidade de Plancherel, a integral acima nos dá a norma L^2 das derivadas de E_∞ e $\partial_t E_\infty$ (ver definição de E_∞ em (2.2)). Nosso objetivo, portanto, é estimar $\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t)d\xi$.

A seguir enunciamos o principal resultado desta seção. Note que o decaimento em *(iii)* é do tipo de perda de regularidade. De fato, para obter taxas de decaimento para a energia na região de alta frequência precisamos assumir mais regularidade no dados iniciais. A taxa de decaimento está diretamente relacionada com a regularidade adicional nos dados iniciais ($\frac{\delta-\theta}{\beta}$, com $\theta < \delta$). Assim, quanto menor o β, melhor a taxa de decaimento porém mais se exige dos dados iniciais. Isso não ocorre no item *(i)*.

Proposição 2.3 *Sejam $\delta, \alpha \in [0,2]$, $\theta \in [0,\alpha]$ e $\sigma \in \mathbb{R}$.*

(i) Se $(u_0,\, u_1) \in H^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+\frac{\sigma}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\delta \leq \theta \leq \alpha$ então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)\, d\xi \,\lesssim\, \left\{||u_1||^2_{H^{\delta+\frac{\sigma}{2}}} + ||u_0||^2_{H^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}}\right\} e^{-ct}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

(ii) Se $(u_0,\, u_1) \in H^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}(\mathbb{R}^n) \times H^{\delta+\frac{\sigma}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\theta < \delta$ então

$$\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)\, d\xi \,\lesssim\, ||u_1||^2_{H^{\delta+\frac{\sigma}{2}}} + ||u_0||^2_{H^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

(iii) Se $(u_0,\, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^r(\mathbb{R}^n)$, $\beta > 0$ e $\theta < \delta$ então existe $C = C(\beta) > 0$ tal que

$$\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)\, d\xi \,\leq C\left\{||u_1||^2_{H^r} + ||u_0||^2_{H^s}\right\}(1+t)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall\, t \geq 0$$

com $s = \alpha + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$ e $r = \delta + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$.

Para provar a Proposição 2.3 precisamos de algumas estimativas e lemas para a solução $\widehat{v}(t,\xi)$ do problema (5) correspondente no espaço de Fourier. Multiplicando a equação (5) por $|\xi|^\sigma\overline{\widehat{u}_t}+\rho(\xi)|\xi|^\sigma\overline{\widehat{u}}$ e tomando a parte real temos

$$\frac{d}{dt}E(t)+F(t)=R(t), \quad t\geq 0 \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
E(t,\xi) &= \frac{1}{2}(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^\sigma|\widehat{u}_t(t)|^2+\frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2\\
&\quad +\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^\sigma\mathrm{Re}\{\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\}+\frac{1}{2}\rho(\xi)|\xi|^{2\theta+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2;\\
F(t,\xi) &= |\xi|^{2\theta+\sigma}|\widehat{u}_t(t)|^2+\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2;\\
R(t,\xi) &= \rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})|\xi|^\sigma|\widehat{u}_t(t)|^2.
\end{aligned}$$

Usando (2.13) segue que $R(t)\leq\frac{1}{2}F(t)$. Substituindo esta estimativa em (2.14), concluímos que

$$\frac{d}{dt}E(t)+\frac{1}{2}F(t)\leq 0, \tag{2.15}$$

para todo $t\geq 0$ e $|\xi|\geq\varepsilon$.

Lema 2.6 *Os funcionais $E(t,\xi)$ e $E_1(t,\xi)$ são equivalentes para todo $t\geq 0$ e $|\xi|\geq\varepsilon$.*

Demonstração.

Notemos primeiramente que

$$
\begin{aligned}
&\pm\rho(\xi)(1+|\xi|^{2\delta})\mathrm{Re}\{\widehat{u}_t(t)\overline{\widehat{u}}(t)\} \\
&\quad \le (1+|\xi|^{2\delta})\frac{|\widehat{u}_t(t)|^2}{2\eta} + \rho(\xi)^2(1+|\xi|^{2\delta})\frac{\eta|\widehat{u}(t)|^2}{2} \\
&\quad \le (1+|\xi|^{2\delta})\frac{|\widehat{u}_t(t)|^2}{2\eta} + |\xi|^{2\alpha}\frac{\eta|\widehat{u}(t)|^2}{8},
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

pois, por (2.13)

$$
\rho(\xi)^2(1+|\xi|^{2\delta}) \le \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\,\frac{|\xi|^{2\alpha-2\theta}}{2}\,(1+|\xi|^{2\delta}) = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{4}.
$$

Usando (2.16) com sinal positivo e $\eta = 1$, temos:

$$
E(t) \lesssim |\xi|^{\sigma}\left(\frac{1}{2}|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2\right) = E_1(t),
$$

já que por (2.13) $\rho(\xi)|\xi|^{2\theta} \le \frac{1}{2}|\xi|^{2\alpha}$ e $1+|\xi|^{2\delta} \le (\varepsilon^{-2\delta}+1)|\xi|^{2\delta}$.

Por outro lado, agora usando (2.16) com sinal negativo e $\eta = 2$, temos:

$$
E(t) \ge |\xi|^{\sigma}\left(\frac{1}{4}|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 + \frac{1}{4}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2\right) = \frac{1}{2}\,E_1(t).
$$

■

Lema 2.7 *Se $\delta \le \theta \le \alpha$, então para todo $t \ge 0$ e $|\xi| \ge \varepsilon$, temos $E_1(t,\xi) \lesssim F(t,\xi)$.*

Demonstração.

Notemos que para todo $t \geq 0$ e $|\xi| \geq \varepsilon$, temos

$$|\xi|^{2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 \lesssim |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t(t)|^2 \tag{2.17}$$

e

$$|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2 \lesssim \rho(\xi)|\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2. \tag{2.18}$$

Esta última desigualdade de fato vale, pois o caso $\alpha + \delta \geq 2\theta$ segue de (2.12) usando a hipótese $\delta \leq \theta$; e o caso $\alpha + \delta < 2\theta$ segue de $|\xi|^{2\alpha} \gtrsim |\xi|^{2\theta}$, que vale pela hipótese $\theta \leq \alpha$.

Multiplicando (2.17) e (2.18) por $|\xi|^{\sigma}$ e somando as duas desigualdades, segue o resultado.

■

Usando a estimativa (2.15) e os Lemas 2.6 e 2.7, existem constantes positivas c, c_1 tais que

$$\frac{d}{dt}E(t) + c\,E(t) \;\leq\; \frac{d}{dt}E(t) + c_1 E_1(t) \;\leq\; \frac{d}{dt}E(t) + \frac{1}{2}\,F(t) \leq 0.$$

Pela equivalência entre E e E_1 concluímos que

$$E_1(t,\xi) \lesssim e^{-ct}E_1(0,\xi).$$

Integrando em $|\xi| \geq \varepsilon$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)d\xi \\
&\quad\lesssim e^{-ct}\int_{|\xi|\geq\varepsilon}\left\{|\xi|^{2\delta+\sigma}|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}_0|^2\right\}d\xi \\
&\quad\lesssim e^{-ct}\int_{|\xi|\geq\varepsilon}(1+|\xi|^2)^{\delta+\frac{\sigma}{2}}|\widehat{u}_1|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq\varepsilon}(1+|\xi|^2)^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}|\widehat{u}_0|^2 d\xi \\
&\quad\lesssim \left\{||u_1||^2_{H^{\delta+\frac{\sigma}{2}}} + ||u_0||^2_{H^{\alpha+\frac{\sigma}{2}}}\right\}e^{-ct}.
\end{aligned}$$

Isto prova o item *(i)* da Proposição 2.3.

O lema abaixo trata o caso de perda de regularidade ($\theta < \delta$) sem nenhuma hipótese adicional sobre os dados iniciais, todavia não nos apresenta taxas de decaimento, somente limitação para $\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)d\xi$, provando o item *(ii)* da Proposição 2.3.

Lema 2.8 *Se $\theta < \delta$, então para todo $t \geq 0$*

$$\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)d\xi \lesssim \int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(0,\xi)d\xi.$$

Demonstração.

Para o caso $\theta < \delta$, temos $\alpha + \delta \geq 2\theta$ e portanto $\rho \approx \dfrac{|\xi|^\theta}{1+|\xi|^\delta}$.

Notemos que

$$E_1(t) \lesssim |\xi|^{2(\delta-\theta)}F(t).$$

De fato, pois $|\xi|^{2\delta+\sigma}|\widehat{u}_t(t)|^2 = |\xi|^{2(\delta-\theta)}|\xi|^{2\theta+\sigma}|\widehat{u}_t(t)|^2$ e também

$$|\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2 \lesssim \rho(\xi)|\xi|^{2(\delta-\theta)}|\xi|^{2\alpha+\sigma}|\widehat{u}(t)|^2,$$

já que $\rho(\xi)|\xi|^{2(\delta-\theta)} \approx \dfrac{|\xi|^{2\delta}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \dfrac{\varepsilon^{2\delta}}{1+\varepsilon^{2\delta}}$. (Lembre que $f(x) = \frac{x}{1+x}$ é crescente no domínio $\mathbb{R}^+$.)

Portanto concluímos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}E_1(t) + c|\xi|^{2(\theta-\delta)}F(t) \leq 0$$

e assim

$$E_1(t) \lesssim e^{-c|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}E_1(0).$$

De $e^{-c|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} < 1$, o resultado segue.

■

O próximo lema é importante para obter a estimativa da integral da energia na região de alta frequência no espaço de Fourier no caso do problema possuir a propriedade de perda de regularidade, ou seja, se $\theta < \delta$. Usando este resultado provaremos o item *(iii)* da Proposição 2.3. O teorema abaixo será utilizado na prova do Lema 2.9 e pode ser encontrado em [23].

Teorema (Lyapunov) *Sejam $C > 0$ e $\beta \geq 0$, $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável satisfazendo*

$$G'(t) + C[G(t)]^{1+\beta} \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Então:

Se $\beta > 0$ e $G(0) \neq 0$, temos $G(t) \leq K(1+t)^{-\frac{1}{\beta}}$.

Se $\beta = 0$ então $G(t) \leq E(0)e^{-Ct}$.

Lema 2.9 *Definimos*

$$I(t) = \int_{|\xi|\geq\varepsilon} E_1(t,\xi)\, d\xi \quad e \quad J(t) = \int_{|\xi|\geq\varepsilon} F(t,\xi)\, d\xi.$$

Sejam $\delta, \alpha \in [0,2]$, $\theta \in [0,\alpha]$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\theta < \delta$ e $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^r(\mathbb{R}^n)$. Então existe $C_\beta > 0$ tal que, para todo $t \geq 0$,

$$[I(t)]^{1+\beta} \leq C_\beta\{||u_1||_{H^r} + ||u_0||_{H^s}\}^\beta J(t)$$

com $s = \alpha + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$ e $r = \delta + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$.

Demonstração.

Para qualquer $\beta > 0$ temos

$$\begin{aligned}
&[I(t)]^{1+\beta} \\
&\lesssim \left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2\delta+\sigma}\,|\widehat{u}_t(t)|^2\,d\xi\right]^{1+\beta} + \left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2\alpha+\sigma}\,|\widehat{u}(t)|^2\,d\xi\right]^{1+\beta} \\
&= \left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{-\frac{2\theta+\sigma}{1+\beta}}\,|\xi|^{2\delta+\sigma}\,|\widehat{u}_t(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}}\,|\xi|^{\frac{2\theta+\sigma}{1+\beta}}\,|\widehat{u}_t(t)|^{\frac{2}{1+\beta}}\,d\xi\right]^{1+\beta} \\
&\quad + \left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} \Big(\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha+\sigma}\Big)^{-\frac{1}{1+\beta}}\,|\xi|^{2\alpha+\sigma}\,|\widehat{u}(t)|^{2-\frac{2}{1+\beta}}\right. \\
&\quad\quad \left.\Big(\rho(\xi)|\xi|^{2\alpha+\sigma}\Big)^{\frac{1}{1+\beta}}\,|\widehat{u}(t)|^{\frac{2}{1+\beta}}\,d\xi\right]^{1+\beta}
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Portanto, usando a desigualdade de Hölder em $L^{\frac{1+\beta}{\beta}}$ e $L^{1+\beta}$ nós obtemos

$$\begin{aligned}
[I(t)]^{1+\beta} \quad \lesssim \quad & \left\{\left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}+\sigma+2\delta+\frac{2\delta}{\beta}}\,|\widehat{u}_t(t)|^2\,d\xi\right]^{\beta}\right. \\
& \left.+\left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}\,|\xi|^{2\alpha+\sigma}\,|\widehat{u}(t)|^2\,d\xi\right]^{\beta}\right\} J(t) \quad (2.19)
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Agora vamos estimar as duas integrais do lado direito da última desigualdade em termos dos dados iniciais. Multiplicando a equação (5) por $\overline{\widehat{u}_t}$, tomando a parte real da identidade resultante e calculando a integral sobre o intervalo $(0, t)$ obtemos

$$\begin{aligned}
&(1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{u}_t(t)|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2 + 2\int_0^t |\xi|^{2\theta}|\widehat{u}_t(s)|^2 ds \\
&= (1+|\xi|^{2\delta})|\widehat{u}_1|^2 + |\xi|^{2\alpha}|\widehat{u}_0|^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da identidade acima por $|\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}+\sigma+\frac{2\delta}{\beta}}$ e integrando sobre $|\xi| \geq \varepsilon$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}+\sigma+\frac{2\delta}{\beta}+2\delta}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}+\sigma+\frac{2\delta}{\beta}+2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\ \lesssim \int_{|\xi|\geq\varepsilon} (1+|\xi|^2)^{\delta+\frac{\delta-\theta}{\beta}+\frac{\sigma}{2}}|\widehat{u}_1|^2 d\xi \\ + \int_{|\xi|\geq\varepsilon} (1+|\xi|^2)^{\alpha+\frac{\delta-\theta}{\beta}+\frac{\sigma}{2}}|\widehat{u}_0|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Observe que pelas hipóteses do lema temos que $\alpha+\delta \geq 2\theta$. Assim, pela definição de $\rho(\xi)$ dada em (2.12) tem-se

$$\int_{|\xi|\geq\varepsilon} \rho(\xi)^{-\frac{1}{\beta}}|\xi|^{2\alpha+\sigma}\,|\widehat{u}(t)|^2\,d\xi \leq K_\beta \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{-\frac{2\theta}{\beta}+\sigma+\frac{2\delta}{\beta}+2\alpha}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi. \tag{2.21}$$

Usando (2.20)-(2.21) em (2.19), obtemos

$$[I(t)]^{1+\beta} \leq C_\beta \left\{||u_1||^2_{H^r} + ||u_0||^2_{H^s}\right\}^\beta J(t), \quad \forall\, t \geq 0,$$

com $r = \delta + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$ e $s = \alpha + \frac{\delta-\theta}{\beta} + \frac{\sigma}{2}$.

■

Observemos agora que, pelo Lema 2.9, podemos escrever

$$\frac{K}{2}\,[I(t)]^{1+\beta} \leq \frac{1}{2}\,J(t), \quad \forall\, t \geq 0,$$

onde $K = \left(C_\beta\{||u_1||^2_{H^r} + ||u_0||^2_{H^s}\}^\beta\right)^{-1}$.

Do Lema 2.6 existem constantes m e M tais que

$$mE_1(t) \leq E(t) \leq ME_1(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E(t)\,d\xi + \frac{K}{2M^{1+\beta}}\left[\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E(t)\,d\xi\right]^{1+\beta} \\
&\quad \leq \frac{d}{dt}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} E(t)d\xi + \frac{1}{2}\,J(t) \\
&\quad \leq 0 \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade é verdadeira pela estimativa (2.15).

Portanto, aplicando o Teorema de Lyapunov em (2.22), concluímos o seguinte decaimento

$$I(t) \leq C\left\{||u_1||^2_{H^r} + ||u_0||^2_{H^s}\right\}(1+t)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

com $0 < C = C(\beta)$. Isto prova o item *(iii)* da Proposição 2.3.

2.3 Resultados e aplicações

2.3.1 Resultados principais

Nesta seção usaremos os resultados obtidos nas seções anteriores para encontrar taxas de decaimento para a norma L^2 de $\partial_x^{\gamma_1} u(t)$

e $\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)$ e a regularidade correspondente dos dados iniciais. Observe que para escolhas adequadas de γ_1 e γ_2 podemos obter estimativas para a norma L^2 da solução, para cada termo da energia definida em (3) e também para normas H^m de u e u_t. No Teorema 2.1 não determinamos valores para $\beta > 0$ a fim de deixar esta escolha livre para ser tomada de forma adequada em cada aplicação. O mesmo ocorrerá no Teorema 2.2. Pode-se escolher β de forma que dê as taxas ótimas e neste caso se exigirá mais da regularidade dos dados iniciais. Ou pode-se escolher também β de forma a exigir menos dos dados iniciais, o que resultará em taxas piores.

Teorema 2.1 *Se $\delta, \alpha \in [0,2]$, $\theta \in \left[0, \frac{\alpha}{2}\right)$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, para r e s especificados abaixo, então a solução do problema* (4)-(2) *satisfaz as seguintes estimativas para todo $t \geq 0$:*

(i) Se $n + 2|\gamma_1| > 4\theta$ então

$$\begin{aligned} ||\partial_x^{\gamma_1} u(t)|| \quad &\lesssim \quad ||u_0||_{L^1} (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_1|}{2}\right)} \\ &\quad +||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_1|}{2}-\theta\right)} \\ &\quad + \{||u_1||_{H^r} + ||u_0||_{H^s}\}\, f(t), \end{aligned}$$

com $f(t) = \begin{cases} e^{-ct} \ (c \in \mathbb{R}) & se \ \delta \leq \theta \\ (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} & se \ \theta < \delta \end{cases}$, $s = \begin{cases} |\gamma_1| & se \ \delta \leq \theta \\ |\gamma_1| + \frac{\delta-\theta}{\beta} & se \ \theta < \delta \end{cases}$

e $r = s + \delta - \alpha$.

(ii) Se $n+2|\gamma_2|<2\alpha$ *e* $\theta \in \left[\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ *então*

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| &\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)-1} \\
&+||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)} \\
&+\{||u_1||_{H^r}+||u_0||_{H^s}\} f(t),
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

e se $n+2|\gamma_2|\geq 2\alpha$ *ou* $\theta \in \left[0, \frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)$ *então*

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| &\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)-1} \\
&+||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}-\theta\right)-1} \\
&+\{||u_1||_{H^r}+||u_0||_{H^s}\} f(t),
\end{aligned} \tag{2.24}
$$

com $f(t)=\begin{cases} e^{-ct}\ (c\in\mathbb{R}) & se\ \delta\leq\theta \\ (1+t)^{-\frac{1}{2\beta}} & se\ \theta<\delta \end{cases}$, $r=\begin{cases} |\gamma_2| & se\ \delta\leq\theta \\ |\gamma_2|+\frac{\delta-\theta}{\beta} & se\ \theta<\delta \end{cases}$

e $s=r+\alpha-\delta$.

Demonstração.

(i) Pela definição de E_0 e E_∞ temos

$$||\partial_x^{\gamma_1} u(t)|| \leq ||\partial_x^{\gamma_1} E_0(t)|| + ||\partial_x^{\gamma_1} E_\infty(t)||.$$

Escolhemos $\gamma=\gamma_1$ na Proposição 2.1 e consideramos $n+2|\gamma_1|>4\theta$. Usando (2.8) e a Proposição 2.3 com $\sigma=2|\gamma_1|-2\alpha$ segue o resultado.

(ii) Podemos escrever

$$||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| \leq ||\partial_x^{\gamma_2} \partial_t E_0(t)|| + ||\partial_x^{\gamma_2} \partial_t E_\infty(t)||.$$

Escolhendo $\gamma = \gamma_2$ na Proposição 2.1 e $\sigma = 2|\gamma_2| - 2\delta$ na Proposição 2.3, temos duas opções. Se $n + 2|\gamma_2| < 2\alpha$ e $\theta \in \left[\frac{n}{4} + \frac{|\gamma_2|}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$ usamos (2.9) e obtemos (2.23). E se $n+2|\gamma_2| \geq 2\alpha$ ou $\theta \in \left[0, \frac{n}{4} + \frac{|\gamma_2|}{2}\right)$ usando (2.10) temos (2.24).

∎

Para o caso $\alpha \leq 2\theta$, de maneira análoga prova-se o seguinte resultado:

Teorema 2.2 *Se $\delta, \alpha \in [0, 2]$, $\theta \in \left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, com $f(t)$, r e s definidos da mesma forma que no Teorema 2.1, valem as seguintes estimativas para todo $t \geq 0$:*

(i) Se $n + 2|\gamma_1| > 2\alpha$ então para $\theta > 0$ tem-se

$$\begin{aligned} ||\partial_x^{\gamma_1} u(t)|| \quad \lesssim \quad & ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_1|}{2}\right)} \\ & + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_1|}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} \\ & + \{||u_1||_{H^r} + ||u_0||_{H^s}\} f(t), \end{aligned}$$

e, para $\theta = 0$,

$$||\partial_x^{\gamma_1} u(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1} + ||u_1||_{L^1}\} e^{-\frac{t}{4}} + \{||u_1||_{H^r} + ||u_0||_{H^s}\} f(t);$$

(ii) Se $n \geq 1$ e $\theta > 0$ então

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| \quad \lesssim \quad & ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{\alpha}{2}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)} \\
& +||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma_2|}{2}\right)} \\
& +\left\{||u_1||_{H^r}+||u_0||_{H^s}\right\} f(t),
\end{aligned}
$$

e, se $\theta = 0$,

$$
||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| \lesssim \left\{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}\right\} e^{-\frac{t}{4}}+\left\{||u_1||_{H^r}+||u_0||_{H^s}\right\} f(t).
$$

Observação 2.1 *Utilizando as Proposições 2.1, 2.2 e 2.3, garantimos que a solução v também satisfaz as limitações a seguir, quando consideramos $\delta, \alpha \in [0,2]$, $\theta \in [0, \alpha]$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$:*

(i) Se $|\gamma_1| \leq s$ e $n + 2|\gamma_1| > 2\alpha$ então, para todo $t \geq 0$,

$$
||\partial_x^{\gamma_1} u(t)|| \lesssim ||u_1||_{H^r \cap L^1}+||u_0||_{H^s \cap L^1};
$$

(ii) Se $|\gamma_2| \leq r$ e $n \geq 1$ então, para todo $t \geq 0$,

$$
||\partial_x^{\gamma_2} u_t(t)|| \lesssim ||u_1||_{H^r \cap L^1}+||u_0||_{H^s \cap L^1}.
$$

2.3.2 Aplicações

Agora vamos aplicar os resultados anteriores para vários problemas de valor inicial associados a algumas equações diferenciais parciais dissipativas de segunda ordem no tempo.

Equação de ondas com dissipação fracionária

Consideremos a equação (4)-(2) com $\delta = 0$ e $\alpha = 1$, ou seja, a equação de ondas

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) + (-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n$$

com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x),$$

e $\theta \in [0,1]$, cuja energia associada é definida por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \left\{ ||u_t(t)||^2 + ||\nabla u(t)||^2 \right\}.$$

Para esta escolha de α, temos que $\alpha > 2\theta$ se e somente se $\theta < \frac{1}{2}$. Portanto, aparece aqui a separação nos casos $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ (autovalores reais) e $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (autovalores complexos). Se $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, podemos aplicar o Teorema 2.1 resultando em

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^{-1}\cap L^1} + ||u_0||_{L^2\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)},$$

para todo $n > 4\theta$;

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{L^2\cap L^1} + ||u_0||_{H^1\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{n}{4\theta}},$$

se $n = 1$ e $\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$;

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{L^2\cap L^1} + ||u_0||_{H^1\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)-1},$$

se $n \geq 2$ ou $\theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$;

$$||\nabla u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{L^2\cap L^1} + ||u_0||_{H^1\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}-\theta\right)},$$

para $n \geq 1$.

Agora, se $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, temos $\alpha \leq 2\theta$. Usamos o Teorema 2.2 de forma análoga obtemos a estimativa para a norma da solução, para $n \geq 3$:

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^{-1}\cap L^1} + ||u_0||_{L^2\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right)};$$

e a taxa de decaimento para os termos da energia, para $n \geq 1$:

$$||u_t(t)|| + ||\nabla u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{L^2\cap L^1} + ||u_0||_{H^1\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{n}{4\theta}}.$$

Equação de placas com inércia rotacional e dissipação fracionária

Em trabalhos anteriores [4, 6] para a equação de placas com inércia rotacional e dissipação fracionária os autores consideraram a hipótese $\theta \in [0, 1]$. Nessa aplicação vamos generalizar esse intervalo assumindo que $\theta \in [0, 2]$. Notemos que $\alpha > 2\theta$ se $\theta \in [0, 1)$ e $\alpha \leq 2\theta$ se $\theta \in [1, 2]$, ou seja, para obtermos os resultados será necessário separar em dois casos. Essa situação é semelhante ao que ocorreu para a equação da onda com dissipação fracionária, quando foi separado nos intervalos $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ e $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (ver [3, 19, 10]).

Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + (-\Delta)^\theta u_t(t,x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, com $\theta \in [0, 2]$. Ou seja, consideramos $\delta = 1$ e $\alpha = 2$ em (4)-(2).

A energia associada é dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2} \left\{ ||u_t(t)||^2 + ||\nabla u_t(t)||^2 + ||\Delta u(t)||^2 \right\}.$$

Se $\theta \in [0, 1)$, consideremos $|\gamma_1| = 0$ e $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2-\theta} \left(\frac{n}{4} - \theta\right)$. Pelo item *(i)* do Teorema 2.1, temos a estimativa para a norma L^2 da solução para todo $n > 4\theta$:

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)},$$

com $r = \frac{(1-\theta)(n-4\theta)}{2(2-\theta)} - 1$ e $s = \frac{(1-\theta)(n-4\theta)}{2(2-\theta)}$.

Para encontrar a estimativa para a energia, basta estimar cada termo separadamente. Em cada uma das três próximas estimativas assumimos que $\theta \in [0,1)$. No item *(ii)* do Teorema 2.1 podemos escolher $|\gamma_2| = 0$ com $\frac{1}{2\beta} = \frac{n}{4\theta}$ em (2.23) e $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4} - \theta\right) + 1$ em (2.24), obtendo

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^p \cap L^1} + ||u_0||_{H^q \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{n}{4\theta}},$$

se $n < 4$ e $\theta \in \left[\frac{n}{4}, 1\right)$;

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)-1},$$

se $n \geq 4$ ou $\theta \in \left[0, \frac{n}{4}\right)$.

Nas estimativas acima consideramos $p = \frac{(1-\theta)n}{2\theta}$, $q = \frac{(1-\theta)n}{2\theta} + 1$, $r = \frac{(1-\theta)(n-8\theta+8)}{2(2-\theta)}$ e $s = \frac{(1-\theta)(n-8\theta+8)}{2(2-\theta)} + 1$.

Por outro lado, se $|\gamma_2| = 1$, com $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2}\right)$ em (2.23) e $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} - \theta\right) + 1$ em (2.24), pelo item *(ii)* do Teorema 2.1 segue que

$$||\nabla u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^p \cap L^1} + ||u_0||_{H^q \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)},$$

se $n=1$ e $\theta \in \left[\frac{3}{4},1\right)$;

$$||\nabla u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r\cap L^1} + ||u_0||_{H^s\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}-\theta\right)-1},$$

se $n \geq 2$ ou $\theta \in \left[0,\frac{3}{4}\right)$.

Acima denotamos $p = 1+\frac{(1-\theta)(n+2)}{2\theta}$, $q = 2+\frac{(1-\theta)(n+2)}{2\theta}$, $r = 1+\frac{(1-\theta)(n-8\theta+10)}{2(2-\theta)}$ e $s = 2+\frac{(1-\theta)(n-8\theta+10)}{2(2-\theta)}$.

Por outro lado, se $|\gamma_1| = 2$ e $\frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4}+1-\theta\right)$, o Teorema 2.1, item *(i)*, nos dá:

$$||\Delta u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r\cap L^1} + ||u_0||_{H^s\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{2-\theta}\left(\frac{n}{4}+1-\theta\right)}$$

onde $r = 1+\frac{(1-\theta)(n-4\theta+4)}{2(2-\theta)}$ e $s = 2+\frac{(1-\theta)(n-4\theta+4)}{2(2-\theta)}$

O resultado para o caso $\theta \in [1,2]$ é obtido de maneira semelhante ao caso anterior, usando o Teorema 2.2 ao invés do Teorema 2.1. As taxas encontradas para a norma L^2 da solução são:

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^{-1}\cap L^1} + ||u_0||_{L^2\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}-1\right)},$$

para $n>4$. Para os termos da energia obtemos:

$$||u_t(t)|| \lesssim ||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{L^2\cap L^1} + ||u_0||_{H^1\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{n}{4\theta}};$$

$$||\nabla u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^1\cap L^1} + ||u_0||_{H^2\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)};$$

$$||\Delta u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^1\cap L^1} + ||u_0||_{H^2\cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{n}{4\theta}}.$$

Observação 2.2 *A equação de placas sem o termo de inércia rotacional, ou seja,* (4)-(2) *com* $\alpha = 2$ *e* $\delta = 0$*, não possui a propriedade de perda de regularidade. Nesse caso as taxas de decaimento são iguais as taxas acima, mas não é necessário assumir regularidade adicional nos dados iniciais.*

Equação de Boussinesq com dissipação fracionária

Nesta subseção, queremos mostrar que é possível adicionar termos do tipo $(-\Delta)^{\delta_1}u_{tt}$, $(-\Delta)^{\theta_1}u_t$, $(-\Delta)^{\alpha_1}u$ na equação (4) e obter taxas de decaimento para a energia total e a norma L^2 da solução a partir dos resultados anteriores. No entanto, vamos considerar apenas um exemplo simples para ilustrar este caso.

Em [28] os autores estudaram a equação de Boussinesq (IBq) com uma dissipação forte Δu_t (ver também [34, 35]). No que segue vamos considerar um caso mais geral do que o problema linear estudado em [28], considerando a seguinte IBq com dissipação fracionária em $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt}(t,x) - \Delta u(t,x) - \Delta u_{tt}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) + (-\Delta)^\theta u_t(t,x) = 0, \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.25}$$

com $\theta \in [0,1]$ e dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \tag{2.26}$$

A energia associada a esta equação é dada por

$$E_u(t) = \frac{1}{2}\left\{||u_t(t)||^2 + ||\nabla v(t)||^2 + ||\nabla u_t(t)||^2 + ||\Delta u(t)||^2\right\}.$$

Notemos que, ao aplicar a transformada de Fourier em (2.25) e (2.26), obtemos

$$\begin{cases} (1+|\xi|^2)\widehat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^{2\theta}\widehat{u}_t(t,\xi) + (|\xi|^2 + |\xi|^4)\widehat{u}(t,\xi) = 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi), \quad \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{u}_1(\xi). \end{cases}$$

Este problema não é um caso específico do nosso problema inicial. Mas notemos que para $|\xi| < \varepsilon$ é válida a equivalência

$$|\xi|^2 \approx |\xi|^2 + |\xi|^4,$$

o que nos leva a concluir que as estimativas na baixa frequência para esta equação são as mesmas das Proposições 2.1 e 2.2 considerando $\alpha = \delta = 1$.

Por outro lado, se $|\xi| \geq \varepsilon$, então

$$|\xi|^4 \approx |\xi|^2 + |\xi|^4,$$

e portanto as estimativas e a regularidade nos dados iniciais para esta equação na alta frequência são dadas pela Proposição 2.3, com $\alpha = 2$ e $\delta = 1$. Com isso obtemos os seguintes resultados:

Teorema 2.3 *Se* $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ *e* $(u_0,\, u_1) \in [H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)] \times [H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)]$, *com* r *e* s *especificados em cada caso abaixo, então a solução do problema* (2.25)-(2.26) *satisfaz as seguintes estimativas:*

(i) Se $n > 4\theta$ *então para* $t \geq 0$

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)},$$

com $r = \frac{n-4\theta}{2} - 1$ *e* $s = \frac{n-4\theta}{2}$.

(ii) Se $n \geq 1$ *então para* $t \geq 0$

$$||\nabla u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}-\theta\right)},$$

com $r = \frac{n+2-4\theta}{2}$ *e* $s = 1 + \frac{n+2-4\theta}{2}$;

$$||\Delta u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}+1-\theta\right)},$$

com $r = 1 + \frac{n+4-4\theta}{2}$ *e* $s = 2 + \frac{n+4-4\theta}{2}$;

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^{r_1} \cap L^1} + ||u_0||_{H^{s_1} \cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{n}{4\theta}},$$

se $n = 1$ *e* $\theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, *com* $r_1 = \frac{(1-\theta)n}{2\theta}$, $s_1 = 1 + \frac{(1-\theta)n}{2\theta}$;

$$||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^{r_2} \cap L^1} + ||u_0||_{H^{s_2} \cap L^1}\}\,(1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}-\theta\right)-1},$$

se $n \geq 2$ *ou* $\theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$, *com* $r_2 = \frac{n-8\theta+4}{2}$ *e* $s_2 = 1 + \frac{n-8\theta+4}{2}$;

$$||\nabla u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{1-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}-\theta\right)-1},$$

com $r = 1 + \frac{n-8\theta+6}{2}$ *e* $s = 2 + \frac{n-8\theta+6}{2}$.

Teorema 2.4 *Se* $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *e* $(u_0, u_1) \in [H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)] \times [H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)]$, *com* r *e* s *definidos em cada caso, valem as seguintes estimativas:*

(i) Se $n > 2$ *então para* $t \geq 0$

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{2}\right)},$$

com $r = -1$ *e* $s = 0$ *no caso* $\theta = 1$, *e com* $r = \frac{(1-\theta)(n-2)}{2\theta} - 1$ *e* $s = \frac{(1-\theta)(n-2)}{2\theta}$ *no caso* $\theta < 1$.

(ii) Se $n \geq 1$ *então para* $t \geq 0$

$$||\nabla u(t)|| + ||u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{n}{4\theta}},$$

com $r = 0$ *e* $s = 1$ *no caso* $\theta = 1$, *e com* $r = \frac{(1-\theta)n}{2\theta}$ *e* $s = 1 + \frac{(1-\theta)n}{2\theta}$ *no caso* $\theta < 1$;

$$||\Delta u(t)|| + ||\nabla u_t(t)|| \lesssim \{||u_1||_{H^r \cap L^1} + ||u_0||_{H^s \cap L^1}\} (1+t)^{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right)},$$

com $r = 1$ *e* $s = 2$ *no caso* $\theta = 1$, *e com* $r = 1 + \frac{(1-\theta)(n+2)}{2\theta}$ *e* $s = 2 + \frac{(1-\theta)(n+2)}{2\theta}$ *no caso* $\theta < 1$.

Capítulo 3

Outras Estimativas para as Soluções do Problema Linear

Neste capítulo vamos encontrar outras estimativas de decaimento para a solução do problema linear usando resultados obtidos no capítulo anterior.

No Capítulo 2, considerando $\alpha, \delta \in [0, 2]$ e $\theta \in [0, \alpha]$, encontramos estimativas para a norma L^2 de u e u_t e de suas derivadas. Na próxima seção vamos obter resultados para as seguintes normas: $||u(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)}$, $||u_t(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)}$ ($q \in [2, +\infty]$), $||u(t)||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}$ e $||u_t(t)||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)}$ para o caso de autovalores complexos na região de alta frequência, autovalores reais na região de baixa frequência e para o caso em que o problema possui a propriedade da perda de regularidade. Esses casos correspondem as restrições: $\alpha - 2\theta > 0$ e $\theta < \delta$. Resultados para os outros casos poderiam ser obtidos de maneira completamente análoga.

Antes de provarmos os resultados principais deste capítulo, vamos obter limitações pontuais para $|\partial_t^k \widehat{u}(t,\xi)|$ com $t > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ nas regiões de alta e baixa frequência.

Região de alta frequência: Caso $\alpha - 2\theta + \delta \geq 0$: autovalores complexos

Para $|\xi| \geq M$ com $M > 1$ temos

$$|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}\left(1+|\xi|^{2\delta}\right) = |\xi|^{2(\alpha-2\theta)} + |\xi|^{2(\alpha-2\theta+\delta)} > 1 \geq \frac{1}{4}$$

e portanto os autovalores são complexos, dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\left(-1 \pm i\sqrt{4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1}\right).$$

O lema abaixo nos dá informações sobre o comportamento dos autovalores.

Lema 3.1 *Se $|\xi| \geq M$ então:*

(i) $|\lambda_\pm| \approx |\xi|^{\alpha-\delta}$*;*

(ii) $|\lambda_+ - \lambda_-| \approx |\xi|^{\alpha-\delta}$*;*

(iii) $|e^{\lambda_\pm t}| \lesssim e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}$*, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração.

(i) Segue diretamente de

$$|\lambda_\pm|^2 = \frac{|\xi|^{4\theta}\left(1+4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1\right)}{4(1+|\xi|^{2\delta})^2} = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq |\xi|^{2(\alpha-\delta)}$$

e

$$|\lambda_\pm|^2 = \frac{|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \geq \frac{|\xi|^{2\alpha}}{M^{-2\delta}|\xi|^{2\delta}+|\xi|^{2\delta}} \gtrsim |\xi|^{2(\alpha-\delta)}.$$

(ii) Notemos que

$$\begin{aligned}
|\lambda_+ - \lambda_-|^2 &= \left|\frac{2i|\xi|^{2\theta}\sqrt{4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1}}{2(1+|\xi|^{2\delta})}\right|^2 \\
&= \frac{|\xi|^{4\theta}(4|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}(1+|\xi|^{2\delta})-1)}{(1+|\xi|^{2\delta})^2} \\
&= \frac{4|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} - \frac{|\xi|^{4\theta}}{(1+|\xi|^{2\delta})^2}.
\end{aligned}$$

De $|\xi|^{2\delta} \leq 1+|\xi|^{2\delta} \leq 2|\xi|^{2\delta}$, por um lado temos

$$|\lambda_+ - \lambda_-|^2 \leq \frac{4|\xi|^{2\alpha}}{1+|\xi|^{2\delta}} \leq 4|\xi|^{2(\alpha-\delta)}$$

e, por outro, usando que $2\alpha - 2\delta \geq 4\theta - 4\delta$ tem-se

$$|\lambda_+ - \lambda_-|^2 \geq \frac{4|\xi|^{2\alpha}}{2|\xi|^{2\delta}} - \frac{|\xi|^{4\theta}}{|\xi|^{4\delta}} = 2|\xi|^{2(\alpha-\delta)} - |\xi|^{4(\theta-\delta)} \geq |\xi|^{2(\alpha-\delta)}.$$

(iii) Como $\Re(\lambda_\pm) = -\frac{|\xi|^{2\theta}}{2(1+|\xi|^{2\delta})} \leq -\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}$ segue que

$$|e^{\lambda_\pm t}| \leq e^{\Re(\lambda_\pm)t} \leq e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t},$$

para todo $t \geq 0$. ∎

Proposição 3.1 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Para todo $|\xi| \geq M$ e $t \geq 0$ temos*

$$|\partial_t^k \widehat{u}(t,\xi)| \lesssim |\xi|^{k(\alpha-\delta)} e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}(|\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{-(\alpha-\delta)}|\widehat{u}_1(\xi)|).$$

Demonstração.

Usando (6)-(7) temos

$$\begin{aligned} |\partial_t^k \widehat{u}(t,\xi)| &\leq |\partial_t^k \widehat{K}_0(t,\xi)|\,|\widehat{u}_0(\xi)| + |\partial_t^k \widehat{K}_1(t,\xi)|\,|\widehat{u}_1(\xi)| \\ &= \frac{|\partial_t^k(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|}{|\lambda_+ - \lambda_-|}\,|\widehat{u}_0(\xi)| \\ &\quad + \frac{|\partial_t^k(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})|}{|\lambda_+ - \lambda_-|}\,|\widehat{u}_1(\xi)|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pelo Lema 3.1 segue que

$$\begin{aligned}
\frac{|\partial_t^k(\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t})|}{|\lambda_+ - \lambda_-|} &= \frac{|\lambda_+(\lambda_-)^k e^{\lambda_- t} - \lambda_-(\lambda_+)^k e^{\lambda_+ t}|}{|\lambda_+ - \lambda_-|} \\
&\leq \frac{|\lambda_+||\lambda_-|^k e^{\lambda_- t} + |\lambda_-||\lambda_+|^k e^{\lambda_+ t}}{|\lambda_+ - \lambda_-|} \\
&\lesssim |\xi|^{k(\alpha-\delta)} e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)} t}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{|\partial_t^k(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t})|}{|\lambda_+ - \lambda_-|} &= \frac{|(\lambda_+)^k e^{\lambda_+ t} - (\lambda_-)^k e^{\lambda_- t}|}{|\lambda_+ - \lambda_-|} \\
&\leq \frac{|\lambda_+|^k e^{\lambda_+ t} + |\lambda_-|^k e^{\lambda_- t}}{|\lambda_+ - \lambda_-|} \\
&\lesssim |\xi|^{k(\alpha-\delta)-(\alpha-\delta)} e^{-\frac{1}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)} t}.
\end{aligned}$$

Usando as duas últimas desigualdades em (3.1), segue o resultado.

■

Região de baixa frequência: Caso $\alpha > 2\theta$: autovalores reais

Usando as estimativas que aparecem na demonstração do Lema 2.3 obtemos

$$|\widehat{u}(t,\xi)| \lesssim e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)} t} \left(|\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{-2\theta}|\widehat{u}_1(\xi)|\right) \tag{3.2}$$

e

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u}_t(t,\xi)| \quad &\lesssim \quad |\xi|^{2(\alpha-\theta)}e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_0(\xi)| \\
&\quad + \left(|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t} + e^{-C|\xi|^{2\theta}t}\right)|\widehat{u}_1(\xi)| \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

para todo $|\xi| \leq M$, com $C = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

3.1 Estimativas para outras normas de u

Na prova da próxima proposição vamos usar os seguintes lemas:

Lema 3.2 *Se $\kappa > 0$, $a > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, então*

$$e^{-\kappa|\xi|^\beta t} \lesssim t^{-a}|\xi|^{-\beta a}, \qquad \forall\, t > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi \neq 0.$$

Lema 3.3 *Sejam $M > 1$, $\kappa > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$ e $\beta, \sigma \in \mathbb{R}$ com $\beta \neq 0$ satisfazendo*

$$\begin{cases} n - \sigma l > 0, & se \quad \beta > 0, \\ n - \sigma l < 0, & se \quad \beta < 0. \end{cases}$$

Para todo $t \geq 0$ temos

$$||\,|\xi|^{-\sigma}e^{-\kappa|\xi|^\beta t}||_{L^l(|\xi|\geq M)} \lesssim (1+t)^{-\frac{n-\sigma l}{\beta l}}.$$

Demonstração.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
\| |\xi|^{-\sigma} e^{-\kappa|\xi|^\beta t}\|_{L^l(|\xi|\geq M)} &= \left(\int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{-\sigma l} e^{-\kappa l|\xi|^\beta t} d\xi\right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \left(\int_M^\infty \int_{|\xi|=r} |\xi|^{-\sigma l} e^{-\kappa l|\xi|^\beta t} dS_\xi dr\right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \left(\int_M^\infty r^{-\sigma l} e^{-\kappa l r^\beta t} \left(\int_{|\xi|=r} dS_\xi\right) dr\right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \left(\int_M^\infty r^{-\sigma l} e^{-\kappa l r^\beta t} \left(w_n r^{n-1}\right) dr\right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \left(w_n \int_M^\infty r^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l (t^{\frac{1}{\beta}} r)^\beta} dr\right)^{\frac{1}{l}} \\
&=: \left(w_n I(t)\right)^{\frac{1}{l}} \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

onde $w_n > 0$ é uma constante que depende somente de n.

Consideremos $\beta > 0$. Fazendo a substituição $s = t^{\frac{1}{\beta}} r$, temos

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_{t^{\frac{1}{\beta}} M}^\infty \left(\frac{s}{t^{\frac{1}{\beta}}}\right)^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^\beta} \frac{1}{t^{\frac{1}{\beta}}} \, ds \\
&\leq \int_0^\infty s^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^\beta} t^{-\frac{n-\sigma l}{\beta}} \, ds \\
&= t^{-\frac{n-\sigma l}{\beta}} \int_0^\infty s^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^\beta} \, ds. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Note que $\int_0^\infty s^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^\beta} \, ds < +\infty$ se $n-\sigma l > 0$. De fato, temos

$$\int_0^\infty s^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^\beta} ds = \int_0^\infty s^{n-\sigma l+1} e^{-\kappa l s^\beta} s^{-2} ds.$$

Como $\lim_{s\to\infty} s^{n-\sigma l+1} e^{-\kappa l s^\beta} = 0$, existe $s_0 > 0$ tal que se $s \geq s_0$

então $s^{n-\sigma l+1}e^{-\kappa l s^{\beta}} < 1$. Além disso, é claro que $e^{-\kappa l s^{\beta}} \leq 1$ se $s \geq 0$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} s^{n-\sigma l+1}e^{-\kappa l s^{\beta}}s^{-2}ds \\
&\quad = \int_0^{s_0} s^{n-\sigma l-1}e^{-\kappa l s^{\beta}}ds + \int_{s_0}^{\infty} s^{n-\sigma l+1}e^{-\kappa l s^{\beta}}s^{-2}ds \\
&\quad \leq \int_0^{s_0} s^{n-\sigma l-1}ds + \int_{s_0}^{\infty} s^{-2}ds \\
&\quad < +\infty,
\end{aligned}$$

pois

$$\int_0^{s_0} s^{n-\sigma l-1}ds = \left.\frac{s^{n-\sigma l}}{n-\sigma l}\right|_0^{s_0} = \frac{s_0^{n-\sigma l}}{n-\sigma l}$$

e

$$\int_{s_0}^{\infty} s^{-2}ds = \lim_{z\to+\infty}\int_{s_0}^{z} s^{-2}ds = \lim_{z\to+\infty}\left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{s_0}\right] = \frac{1}{s_0}.$$

Considerando a conclusão acima em (3.5) e (3.4), tem-se que

$$||\,|\xi|^{-\sigma}e^{-\kappa|\xi|^{\beta}t}||_{L^l(|\xi|\geq M)} \lesssim t^{-\frac{n-\sigma l}{\beta l}} \lesssim (1+t)^{-\frac{n-\sigma l}{\beta l}},$$

se $\beta > 0$ e $n-\sigma l > 0$.

Agora voltemos à (3.4), com o caso $\beta < 0$. Fazendo a substituição $s = t^{-\frac{1}{\beta}} r^{-1}$, temos

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_M^\infty r^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l (t^{-\frac{1}{\beta}} r^{-1})^{-\beta}} dr \\
&= \int_{\frac{t^{-\frac{1}{\beta}}}{M}}^0 \left(t^{-\frac{1}{\beta}} s^{-1}\right)^{n-\sigma l-1} e^{-\kappa l s^{-\beta}} \left(-t^{-\frac{1}{\beta}} s^{-2}\right) ds \\
&\leq \int_0^\infty s^{-n+\sigma l-1} e^{-\kappa l s^{-\beta}} t^{-\frac{n-\sigma l}{\beta}} ds \\
&= t^{-\frac{n-\sigma l}{\beta}} \int_0^\infty s^{-n+\sigma l-1} e^{-\kappa l s^{-\beta}} ds.
\end{aligned}$$

De modo análogo ao caso anterior, prova-se que $n - \sigma l < 0$ implica em $\int_0^\infty s^{-n+\sigma l-1} e^{-\kappa l s^{-\beta}} ds < +\infty$.

Substituindo em (3.4), para $n - \sigma l < 0$ e $\beta < 0$, temos:

$$|| \, |\xi|^{-\sigma} e^{-\kappa |\xi|^\beta t} ||_{L^l(|\xi| \geq M)} \lesssim (1+t)^{-\frac{n-\sigma l}{\beta l}}.$$

∎

Na proposição abaixo as taxas e as condições para o caso $q = +\infty$ corresponde ao limite do quociente quando q tende ao infinito.

Proposição 3.2 *Se* $\alpha - 2\theta > 0$*,* $\theta < \delta$*,* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^r(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *com* s *e* r *reais positivos satisfazendo* $r = s + \delta - \alpha$ *então:*

(i) Se $q \in [2, +\infty]$ *e* $n > \frac{2\theta q}{q-1}$ *e* $n < \frac{2sq}{q-2}$ *(caso* $q > 2$*) então* $u \in$

$L^q(\mathbb{R}^n)$ *e satisfaz*

$$
\begin{aligned}
||u(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}} \\
&+||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}+\frac{\theta}{\alpha-\theta}} \\
&+\{||u_0||_{H^s}+||u_1||_{H^r}\}(1+t)^{\frac{s}{2(\theta-\delta)}-\frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}
$$

(ii) Se $q \in [2,+\infty]$ *e* $n < \frac{2rq}{q-2}$ *(caso* $q > 2$*) então* $u_t \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *e, para* $\theta > 0$ *tem-se*

$$
\begin{aligned}
||u_t(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}-1} \\
&+||u_1||_{L^1}\left\{(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}+\frac{\theta}{\alpha-\theta}-1}+(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2\theta q}}\right\} \\
&+\{||u_0||_{H^s}+||u_1||_{H^r}\}(1+t)^{\frac{r}{2(\theta-\delta)}-\frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}
$$

Se $\theta = 0$ *então*

$$
\begin{aligned}
||u_t(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}\}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2\alpha q}-1} \\
&+\{||u_0||_{H^s}+||u_1||_{H^r}\}(1+t)^{-\frac{r}{2\delta}+\frac{n}{2\delta}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}
$$

Demonstração.

(i) Seja $q \in [2, +\infty]$ e q' seu conjugado. Por Hausdorff-Young, temos

$$\begin{aligned}
||u(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim ||\widehat{u}(t)||_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim ||\widehat{u}(t)||_{L^{q'}(|\xi|<M)} + ||\widehat{u}(t)||_{L^{q'}(|\xi|\geq M)} \\
&=: J_1 + J_2. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Na região de baixa frequência usamos (3.2) (pois $\alpha - 2\theta > 0$) e o Lema 2.1, obtendo

$$\begin{aligned}
J_1 &\lesssim ||\, e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_0|\,||_{L^{q'}(|\xi|<M)} + ||\,|\xi|^{-2\theta}e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_1|\,||_{L^{q'}(|\xi|<M)} \\
&\lesssim ||u_0||_{L^1}\left(\int_{|\xi|<M} e^{-q'|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}d\xi\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\quad +||u_1||_{L^1}\left(\int_{|\xi|<M} |\xi|^{-2\theta q'}e^{-q'|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}d\xi\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n}{2(\alpha-\theta)q'}} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n-2\theta q'}{2(\alpha-\theta)q'}} \\
&= ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}+\frac{\theta}{\alpha-\theta}} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

desde que $2\theta q' < n$.

Por outro lado, na região de alta frequência, usamos a Proposição 3.1, obtendo

$$J_2 \lesssim \left(\int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{-\sigma}e^{-\frac{q'}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}|\xi|^{\sigma}\left(|\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{\delta-\alpha}|\widehat{u}_1(\xi)|\right)^{q'}d\xi\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Caso $q = 2$, escolhemos $\sigma = 2s$ e assim, pelo Lema 3.2, temos

$$\begin{aligned} J_2 &\lesssim \left(\int_{|\xi| \geq M} |\xi|^{-2s} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} \left(|\xi|^s |\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{s+\delta-\alpha} |\widehat{u}_1(\xi)| \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \{ ||u_0||_{H^s} + ||u_1||_{H^r} \} (1+t)^{\frac{s}{2(\theta-\delta)}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Agora, se $q > 2$, usamos Hölder com $\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1$:

$$\begin{aligned} J_2 \lesssim & \left(\int_{|\xi| \geq M} |\xi|^{-\sigma l} e^{-\frac{lq'}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} d\xi \right)^{\frac{1}{lq'}} \\ & \left(\int_{|\xi| \geq M} |\xi|^{\sigma l'} \left(|\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{\delta-\alpha} |\widehat{u}_1(\xi)| \right)^{l'q'} d\xi \right)^{\frac{1}{l'q'}}. \end{aligned}$$

Escolhemos $2s = \sigma l'$ e $q'l' = 2$ e, no Lema 3.3, $\beta = 2(\theta - \delta) < 0$, $\kappa = \frac{q'}{4}$. Logo

$$\left(\int_{|\xi| \geq M} |\xi|^{-\sigma l} e^{-\frac{lq'}{4}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} d\xi \right)^{\frac{1}{lq'}} \lesssim (1+t)^{-\frac{n-\sigma l}{\beta l q'}}$$

para $n < \sigma l$.

Portanto, se $n < \frac{2sq}{q-2}$, temos

$$\begin{aligned} J_2 &\lesssim (1+t)^{\frac{s}{2(\theta-\delta)} - \frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_{|\xi| \geq M} \left(|\xi|^s |\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^{s+\delta-\alpha} |\widehat{u}_1(\xi)| \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \{ ||u_0||_{H^s} + ||u_1||_{H^r} \} (1+t)^{\frac{s}{2(\theta-\delta)} - \frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

com $r=s+\delta-\alpha$, já que

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma l-n}{2(\theta-\delta)lq'} &= \frac{1}{q'}\left(\frac{\sigma}{2(\theta-\delta)}-\frac{n}{2(\theta-\delta)l}\right)\\
&= \frac{1}{q'}\left(\frac{2s}{2(\theta-\delta)l'}\right)-\frac{1}{q'}\left(\frac{n}{2(\theta-\delta)}\right)\left(1-\frac{1}{l'}\right)\\
&= \frac{s}{2(\theta-\delta)}-\frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q'l'}\right)\\
&= \frac{s}{2(\theta-\delta)}-\frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo (3.7), (3.8) e (3.9) em (3.6) segue o resultado.

(ii) A demonstração é análoga a do item *(i)*. Por Hausdorff-Young,

$$\begin{aligned}
||u_t(t)||_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\lesssim ||\widehat{u}_t(t)||_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim ||\widehat{u}_t(t)||_{L^{q'}(|\xi|<M)}+||\widehat{u}_t(t)||_{L^{q'}(|\xi|\geq M)}\\
&=: G_1+G_2. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Para estimar G_1 usamos (3.3) e o Lema 2.1, obtendo

$$\begin{aligned}
G_1 &\lesssim ||\,|\xi|^{2(\alpha-\theta)}e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_0|\,||_{L^{q'}(|\xi|<M)}\\
&\quad +\left|\left|\left(|\xi|^{2(\alpha-2\theta)}e^{-|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}+e^{-C|\xi|^{2\theta}t}\right)|\widehat{u}_1|\right|\right|_{L^{q'}(|\xi|<M)}\\
&\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n+2(\alpha-\theta)q'}{2(\alpha-\theta)q'}}\\
&\quad +||u_1||_{L^1}\left\{(1+t)^{-\frac{n+2(\alpha-2\theta)q'}{2(\alpha-\theta)q'}}+(1+t)^{-\frac{n}{2\theta q'}}\right\}\\
&= ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}-1}\\
&\quad +||u_1||_{L^1}\left\{(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2(\alpha-\theta)q}+\frac{\theta}{\alpha-\theta}-1}+(1+t)^{-\frac{n(q-1)}{2\theta q}}\right\} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

para $\theta > 0$. O caso $\theta = 0$ é imediato.

Finalmente, para estimar G_2, usa-se argumentos análogos aos da estimativa de J_2, no item anterior, através da Proposição 3.1 e do Lema 3.3. Concluímos que

$$\begin{aligned} G_2 &\lesssim (1+t)^{\frac{r}{2(\theta-\delta)} - \frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_{|\xi|\geq M} \left(|\xi|^{r+\alpha-\delta} |\widehat{u}_0(\xi)| + |\xi|^r |\widehat{u}_1(\xi)| \right)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \{||u_0||_{H^s} + ||u_1||_{H^r}\}(1+t)^{\frac{r}{2(\theta-\delta)} - \frac{n}{2(\theta-\delta)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

com $s = r + \alpha - \delta$ e $n < \frac{2rq}{q-2}$ (no caso $q > 2$).

Para obter o resultado basta substituir (3.11)-(3.12) em (3.10).

∎

Proposição 3.3 *Sejam s_1 e s_2 números reais positivos tal que $s_2 > s_1$. Então:*

(i) Se $n + 2s_1 > 4\theta$, $u_0 \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^{s_2+\delta-\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ então $u \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n+2s_1}{4(\alpha-\theta)}} + ||u_1||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n+2s_1-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} \\ &\quad + \{||u_0||_{\dot{H}^{s_2}} + ||u_1||_{\dot{H}^{s_2+\delta-\alpha}}\}(1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{2(\theta-\delta)}}. \end{aligned}$$

(ii) Se $u_0 \in H^{s_2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $u_1 \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ *então, para* $\theta > 0$, $u_t \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *e satisfaz*

$$
\begin{aligned}
||u_t(t)||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \quad \lesssim \quad & ||u_0||_{L^1}(1+t)^{-\frac{n+2s_1}{4(\alpha-\theta)}-1} \\
& +||u_1||_{L^1}\left\{(1+t)^{-\frac{n+2s_1-4\theta}{4(\alpha-\theta)}-1}+(1+t)^{-\frac{n+2s_1}{4\theta}}\right\} \\
& +\left\{||u_0||_{\dot{H}^{s_2+\alpha-\delta}}+||u_1||_{\dot{H}^{s_2}}\right\}(1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{2(\theta-\delta)}}.
\end{aligned}
$$

Se $\theta = 0$ *então* $u_t \in \dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ *e satisfaz*

$$
\begin{aligned}
||u_t(t)||_{\dot{H}^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \quad \lesssim \quad & \left\{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}\right\}(1+t)^{-\frac{n+2s_1}{4\alpha}-1} \\
& +\left\{||u_0||_{\dot{H}^{s_2+\alpha-\delta}}+||u_1||_{\dot{H}^{s_2}}\right\}(1+t)^{-\frac{s_2-s_1}{2\delta}}.
\end{aligned}
$$

Demonstração.

(i) Notemos que

$$
\begin{aligned}
||u(t)||^2_{\dot{H}^{s_1}} \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s_1}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\leq \quad \int_{|\xi|<M} |\xi|^{2s_1}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi + \int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{2s_1}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

A estimativa segue das duas desigualdades abaixo:

Se $n+2s_1>4\theta$, a estimativa (3.2) e o Lema (2.1) implicam em

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|<M}|\xi|^{2s_1}|\widehat{u}(t)|^2d\xi &\lesssim \int_{|\xi|<M}|\xi|^{2s_1}e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_0(\xi)|^2d\xi \\
&\quad+\int_{|\xi|<M}|\xi|^{2s_1-4\theta}e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_1(\xi)|^2d\xi \\
&\lesssim ||u_0||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n+2s_1}{2(\alpha-\theta)}} \\
&\quad+||u_1||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{n+2s_1-4\theta}{2(\alpha-\theta)}}.
\end{aligned}$$

E, por outro lado, a Proposição 3.1 e o Lema 3.2 nos dão, para $s_2>s_1$

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{2s_1}|\widehat{u}(t)|^2d\xi \\
&\quad\lesssim \int_{|\xi|\geq M}|\xi|^{2s_1-2s_2}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}|\xi|^{2s_2}\left(|\widehat{u}_0(\xi)|^2+|\xi|^{2(\delta-\alpha)}|\widehat{u}_1(\xi)|^2\right)d\xi \\
&\quad\lesssim \int_{|\xi|\geq M}(1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{\theta-\delta}}|\xi|^{2s_2}(|\widehat{u}_0(\xi)|^2+|\xi|^{2(\delta-\alpha)}|\widehat{u}_1(\xi)|^2)d\xi \\
&\quad\lesssim \left\{||u_0||_{\dot{H}^{s_2}}^2+||u_1||_{\dot{H}^{s_2+\delta-\alpha}}^2\right\}(1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{\theta-\delta}}.
\end{aligned}$$

(ii) A demonstração é análoga ao item *(i)* e segue das estimativas abaixo.

De (3.3) e do Lema 2.1 temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|<M} |\xi|^{2s_1}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi \\
&\quad \lesssim \int_{|\xi|<M} |\xi|^{2s_1+4(\alpha-\theta)} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t}|\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad\quad + \int_{|\xi|<M} \left(|\xi|^{2s_1+4(\alpha-2\theta)} e^{-2|\xi|^{2(\alpha-\theta)}t} + |\xi|^{2s_1} e^{-2C|\xi|^{2\theta}t}\right) |\widehat{u}_1(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad \lesssim ||u_0||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{n+2s_1}{2(\alpha-\theta)}-2} \\
&\quad\quad + ||u_1||_{L^1}^2 \left\{(1+t)^{-\frac{n+2s_1-4\theta}{2(\alpha-\theta)}-2} + (1+t)^{-\frac{n+2s_1}{2\theta}}\right\}
\end{aligned}
$$

para $\theta > 0$. O caso $\theta = 0$ é imediato.

Da Proposição 3.1 e do Lema 3.2 temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{2s_1}|\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi \\
&\quad \lesssim \int_{|\xi|\geq M} |\xi|^{2s_1-2s_2} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}|\xi|^{2s_2} \left(|\xi|^{\alpha-\delta}|\widehat{u}_0(\xi)| + |\widehat{u}_1(\xi)|\right)^2 d\xi \\
&\quad \lesssim \int_{|\xi|\geq M} (1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{\theta-\delta}} |\xi|^{2s_2} \left(|\xi|^{2(\alpha-\delta)}|\widehat{u}_0(\xi)|^2 + |\widehat{u}_1(\xi)|^2\right) d\xi \\
&\quad \lesssim \left\{||u_0||_{\dot{H}^{s_2+\alpha-\delta}}^2 + ||u_1||_{\dot{H}^{s_2}}^2\right\} (1+t)^{-\frac{s_1-s_2}{\theta-\delta}},
\end{aligned}
$$

para $s_2 > s_1$. ■

3.2 Caso particular

Tendo em vista o caso considerado no estudo do problema semi-linear, vamos obter estimativas de decaimento para uma regularidade particular nos dados iniciais. Observe que assumimos a condição $\delta \leq \alpha - 1$ para que $\partial_x^3 u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver (3.13)).

O próximo lema é uma consequência imediata dos resultados da seção anterior.

Lema 3.4 *Sejam $n > 4\theta$, $\alpha > 2\theta$, $\theta < \delta$, $\delta \leq \alpha - 1$, $u_0 \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. Denotando*

$$E_1(u_0, u_1) = \{||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta} \cap L^1} + ||u_1||_{H^2 \cap L^1}\},$$

a solução u do problema linear (4) satisfaz $u \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n)$, $u_t \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e as seguintes estimativas:

$$||\partial_x^k u(t)|| \lesssim E_1(u_0, u_1)(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right), \frac{2-k+\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}\right\}}, \quad (3.13)$$

$$||u(t)||_{H^{2+\alpha-\delta}} \lesssim E_1(u_0, u_1), \quad (3.14)$$

para $k \in \{0, 1, 2, 3\}$;

$$||\partial_x^k u_t(t)|| \lesssim E_1(u_0, u_1)(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)-1, \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}\right\}}, \quad (3.15)$$

$$||\partial_x^2 u_t(t)|| \lesssim E_1(u_0, u_1), \quad (3.16)$$

$$||u_t(t)||_{L^\infty} \lesssim E_1(u_0, u_1)(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{2}-\theta\right)-1, \frac{4-n}{4(\delta-\theta)}\right\}}, \quad (3.17)$$

onde $k \in \{0, 1\}$ e, para (3.17), $n < 4$.

***Demonstração**.*

As estimativas para $||u(t)||$, $||u_t(t)||$ e $||u_t(t)||_{L^\infty}$ seguem diretamente da Proposição 3.2 (com $q = 2$ nos dois primeiros e $q = +\infty$ no terceiro, $s = 2 + \alpha - \delta$ e $r = 2$) e das relações abaixo:

• A hipótese $n > 4\theta$ garante que

$$\frac{n}{4\theta} \geq \frac{n - 4\theta}{4(\alpha - \theta)} + 1, \tag{3.18}$$

pois esta desigualdade vale se e somente se

$$n(\alpha - \theta) \geq \theta(n - 4\theta) + 4\theta\alpha - 4\theta^2,$$

ou seja, $n(\alpha - 2\theta) \geq 4\theta(\alpha - 2\theta)$.

• A condição $n > 4\theta \geq 2\theta$ garante que

$$\frac{n}{2\theta} \geq \frac{n - 2\theta + 2(\alpha - \theta)}{2(\alpha - \theta)}.$$

As estimativas para $||\partial_x^k u(t)||$ $(k = 1, 2, 3)$ e $||u(t)||_{H^{2+\alpha-\delta}}$ seguem da Proposição 3.3, item *(i)* com $s_2 = 2 + \alpha - \delta$ e, para $||\partial_x^k u_t(t)||$ $(k = 1, 2)$, do item *(ii)* da mesma proposição, com $s_2 = 2$ e do fato que $n + 2s_1 > 4\theta$ implica na desigualdade $\frac{n+2s_1}{4\theta} \geq \frac{n+2s_1-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$ (de forma análoga ao feito acima).

■

Observação 3.1 *A seguir estão algumas conclusões tiradas a partir do lema acima para o caso particular $n = 3$ e assumindo em alguns itens condições adicionais.*

- *Notamos que a desigualdade* $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} < \frac{2+\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$ *é equivalente a*

$$3\delta + 4\theta^2 + \theta + 2\alpha\theta + 2\alpha\delta < 4\alpha + 2\alpha^2 + 6\theta\delta,$$

que vale pois a hipótese $\delta \leq \alpha - 1$ *implica em* $3\delta + 2\alpha\delta \leq \alpha - 3 + 2\alpha^2$ *e pois* $3 > 4\theta$ *garante que* $4\theta^2 + 2\alpha\theta < 3\theta + \frac{3}{2}\alpha$. *Usando* (3.13) *(*$k = 0$*) concluímos que*

$$||u(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1} + ||u_1||_{L^1} + ||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}} + ||u_1||_{H^2}\}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{3}{4}-\theta\right)}.$$

- *A desigualdade* $\frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)} < \frac{1+\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$ *é equivalente a*

$$5\delta + 4\theta^2 + 2\alpha\theta + 2\alpha\delta \leq 2\alpha + 3\theta + 6\delta\theta + 2\alpha^2$$

e esta desigualdade vale pois $5\delta + 2\alpha\delta \leq 3\alpha - 5 + 2\alpha^2$ *e* $4\theta^2 + 2\alpha\theta < 3\theta + \frac{3}{2}\alpha$. *Portanto, de* (3.13) *(*$k = 1$*), temos*

$$||\partial_x u(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1} + ||u_1||_{L^1} + ||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}} + ||u_1||_{H^2}\}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{5}{4}-\theta\right)}.$$

- *Se* $\delta - \theta \geq \frac{5}{14}$, *a desigualdade* $\frac{9-4\theta}{4(\alpha-\theta)} \geq \frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}$ *é verdadeira. De* *fato, basta ver que* $9-4\theta \geq \frac{28(\alpha-\theta)(\alpha-\delta-1)}{5}$, *ou seja,*

$$45+28\alpha\delta+28\alpha\theta+28\alpha \geq 28\alpha^2+28\delta\theta+48\theta$$

pois $28\alpha\delta \geq 28\alpha\theta+10\alpha$, $56\alpha\theta \geq 56\delta\theta+56\theta$ *e* $45+38\alpha \geq 28\alpha^2$. *Segue de* (3.13) *(*$k=3$*) que*

$$||\partial_x^3 u(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}+||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}}+||u_1||_{H^2}\}(1+t)^{-\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}.$$

- *Se* $\delta-\theta \geq \frac{5}{14}$, *sempre vale* $\frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \geq \frac{1}{2(\delta-\theta)}$. *De fato, a desigualdade acima vale se e somente se* $5+4\alpha-8\theta \geq \frac{2(\alpha-\theta)}{\delta-\theta}$. *Como* $\frac{2}{\delta-\theta} \leq \frac{28}{5}$ *tem-se* $\theta \leq \frac{9}{14}$ *logo*

$$\frac{2(\alpha-\theta)}{\delta-\theta}+8\theta \leq \frac{28}{5}\alpha+\frac{12}{5}\theta \leq \frac{28}{5}\alpha+\frac{54}{35} \leq 4\alpha+5.$$

Assim (3.15) *(*$k=1$*) garante que*

$$||\partial_x u_t(t)|| \lesssim \{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}+||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}}+||u_1||_{H^2}\}(1+t)^{-\frac{1}{2(\delta-\theta)}}.$$

- *Usando a desigualdade* $\frac{1}{2(\delta-\theta)} \leq \frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1$ *provada no item anterior, concluímos que* $\frac{1}{4(\delta-\theta)} \leq \frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{3-2\theta}{2(\alpha-\theta)}+1$. *Usando* (3.17), *o único caso possível é*

$$||u_t(t)||_{L^\infty} \lesssim \{||u_0||_{L^1}+||u_1||_{L^1}+||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}}+||u_1||_{H^2}\}(1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}}.$$

Capítulo 4

Problema Semilinear

Neste capítulo vamos estudar o problema semilinear

$$u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\delta} u_{tt}(t,x) + (-\Delta)^{\alpha} u(t,x) + (-\Delta)^{\theta} u_t(t,x) = f(u_t(t,x)) \tag{4.1}$$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, com dados iniciais

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x). \tag{4.2}$$

A função f é dada por $f(v) = C|v|^p$ com $C \in \mathbb{R}$ constante e $p \geq 3$.

Como visto nos capítulos anteriores, as taxas de decaimento do problema linear dependem das condições assumidas para α, δ e θ, da dimensão e da regularidade dos dados iniciais. Com isso a forma como o problema semilinear será tratado depende das condições assumidas.

Com o propósito de não tornar este trabalho excessivamente extenso, vamos assumir neste capítulo as seguintes condições: $n = 3$, $0 \leq 2\theta < \alpha \leq 2$, $\delta \leq \alpha - 1$, $\delta - \theta \geq \frac{5}{14}$, $u_0 \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos as normas abaixo:

$$\begin{aligned} ||u||_X &= \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)}||\partial_x^k u(t)|| + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\tau}||\partial_x^2 u(t)|| \\ &\quad + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}||\partial_x^3 u(t)|| + \sup_{t\geq 0}||\partial_x^{2+\alpha-\delta} u(t)||, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde

$$\tau = \min\left\{\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}, \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}\right\}; \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} ||v||_Y &= \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\psi}||v(t)|| + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{2(\delta-\theta)}}||\partial_x v(t)|| \\ &\quad + \sup_{t\geq 0}||\partial_x^2 v(t)|| + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{4(\delta-\theta)}}||v(t)||_{L^\infty}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$\psi = \min\left\{\frac{1}{\delta-\theta}, \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1\right\}. \tag{4.6}$$

Assim podemos definir os espaços de Banach X e Y abaixo:

$$X = \left\{u \in C^0([0,+\infty); H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n))\ ;\ ||u||_X < +\infty\right\},$$

$$Y = \left\{v \in C^0([0,+\infty); H^2(\mathbb{R}^n))\ ;\ ||v||_Y < +\infty\right\}.$$

Lema 4.1 *Sejam $\gamma \in (0,1)$ e $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$||\partial_x^\gamma \phi|| \leq ||\phi||^{1-\gamma}||\partial_x \phi||^\gamma.$$

Demonstração.

Pela desigualdade de Plancherel e pela desigualdade de Hölder, temos, para $p > 1$:

$$\begin{aligned}
||\partial_x^\gamma \phi||^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\gamma}|\widehat{\phi}(\xi)|\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\gamma}|\widehat{\phi}(\xi)|^{\frac{2}{p}}|\widehat{\phi}(\xi)|^{\frac{2(p-1)}{p}}\, d\xi \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{\frac{2\gamma p}{p-1}}|\widehat{\phi}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $p = \frac{1}{1-\gamma}$ temos $\frac{p-1}{p} = \gamma$ e o resultado segue.

■

Devido a potência $\psi = \min\left\{\frac{1}{\delta-\theta}, \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1\right\}$ que aparece na norma Y, no próximo resultado precisaremos considerar duas possibilidades.

Lema 4.2 *A função dada por $f(s) = C|s|^p$, com $C \in \mathbb{R}$ constante e $p \geq 3$, satisfaz as seguintes desigualdades, para todo $v, w \in Y$:*

(i) Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, então

$$||\partial_x^k f(v)||_{L^1} \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+6-2k}{4(\delta-\theta)}}, \quad k \in \{0,1,2\};$$

e se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, *então*

$$||f(v)||_{L^1} \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{2(\alpha-\theta)}},$$

$$||\partial_x^k f(v)||_{L^1} \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+2-2k}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}, \quad k \in \{1,2\}.$$

(ii) *Se* $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1$, *temos*

$$||\partial_x^k f(v)|| \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}, \quad k \in [0,2];$$

e, se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, *então*

$$||\partial_x^k f(v)|| \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1+2k}{4(\delta-\theta)}-(1-k)\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}, \quad k \in [0,1]$$

$$||\partial_x^k f(v)|| \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}, \quad k \in [1,2].$$

(iii) *Se* $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1$, *então*

$$||f(v)-f(w)||_{L^1} \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}};$$

e se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, *então*

$$||f(v)-f(w)||_{L^1} \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{2(\alpha-\theta)}}.$$

(iv) Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, *temos*

$$||\partial_x^k f(v) - \partial_x^k f(w)|| \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}$$

para $k \in [0,2]$. *Se* $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, *então*

$$||\partial_x^k f(v) - \partial_x^k f(w)|| \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p-1+2k}{4(\delta-\theta)} - (1-k)\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}},$$

para $k \in [0,1]$ *e*

$$||\partial_x^k f(v) - \partial_x^k f(w)|| \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}, \quad k \in [1,2].$$

Aqui usamos a notação $||(v,w)|| = \text{máx}\{||v||, ||w||\}$ *(a notação pode ser usada para qualquer norma no decorrer do texto).*

Demonstração.

Iniciamos notando que

$$\partial_x f(v) = \partial_x |v(x)|^p = p|v(x)|^{p-2} v(x) \partial_x v(x) \tag{4.7}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x^2 |v(x)|^p &= \partial_x (p|v(x)|^{p-2} v(x) \partial_x v(x)) \\ &= p(p-1)|v(x)|^{p-2} (\partial_x v(x))^2 + p|v(x)|^{p-2} v(x) \partial_x^2 v(x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

(i) Pela definição da norma Y, temos, para $k = 0$:

$$\begin{aligned} ||f(v)||_{L^1} &= ||v||^p_{L^p} \\ &\leq ||v||^{p-2}_{L^\infty} ||v||^2 \\ &\lesssim ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-2\psi}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, então

$$\begin{aligned} ||f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{2}{\delta-\theta}} \\ &= ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, então

$$\begin{aligned} ||f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3-4\theta}{2(\alpha-\theta)}-2} \\ &= ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{2(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

Para $k = 1$, usamos (4.7), a desigualdade de Hölder e a norma Y, concluindo que

$$\begin{aligned} ||\partial_x f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||^{p-2}_{L^\infty} ||v|| \, ||\partial_x v|| \\ &\lesssim ||v||^p_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\psi-\frac{1}{2(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, então

$$\begin{aligned} ||\partial_x f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)} - \frac{1}{\delta-\theta} - \frac{1}{2(\delta-\theta)}} \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+4}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$ temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)} - \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} - 1 - \frac{1}{2(\delta-\theta)}} \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p}{4(\delta-\theta)} - \frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

E de maneira análoga obtemos a estimativa para $k = 2$, através de (4.8) e da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ($||\partial_x v|| \lesssim ||\partial_x^2 v||^{\frac{1}{2}} ||v||^{\frac{1}{2}}$):

$$\begin{aligned} ||\partial_x^2 f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-2} ||\partial_x v||^2 + ||v||_{L^\infty}^{p-2} ||v||\, ||\partial_x^2 v|| \\ &\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-2} ||v||\, ||\partial_x^2 v|| \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)} - \psi}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x^2 f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)} - \frac{1}{\delta-\theta}} \\ &= ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+2}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, então

$$\begin{aligned} ||\partial_x^2 f(v)||_{L^1} &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}-1} \\ &= ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

(ii) Para $k=0$ temos

$$\begin{aligned} ||f(v)|| &= ||\,|v|^p|| \\ &\leq ||v||_{L^\infty}^{p-1}||v|| \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-\psi}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1$, segue que

$$\begin{aligned} ||f(v)|| &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-\frac{1}{\delta-\theta}} \\ &= ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+3}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, então

$$\begin{aligned} ||f(v)|| &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}-1} \\ &= ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

Agora, se $k=1$, de (4.7) segue que

$$\begin{aligned}
||\partial_x f(v)|| &= p|| \, |v|^{p-1}\partial_x v|| \\
&\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-1}||\partial_x v|| \\
&\lesssim ||v||_Y^p(1+t)^{-\frac{p+1}{4(\delta-\theta)}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $k=2$, usamos (4.8), a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg ($||\partial_x v||_{L^4} \lesssim ||\partial_x^2 v||^{\frac{1}{2}}||v||_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}$) e a definição da norma Y, obtendo

$$\begin{aligned}
||\partial_x^2 f(v)|| &\lesssim || \, |v|^{p-2}(\partial_x v)^2|| + || \, |v|^{p-1}\partial_x^2 v|| \\
&\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-2}||\partial_x v||_{L^4}^2 + ||v||_{L^\infty}^{p-1}||\partial_x^2 v|| \\
&\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-1}||\partial_x^2 v|| \\
&\lesssim ||v||_Y^p(1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}}.
\end{aligned}$$

Para as derivadas fracionárias, onde $k \in (0,1)$, usamos o Lema 4.1, de onde segue que

$$\begin{aligned}
||\partial_x^k f(v)|| &\leq ||f(v)||^{1-k}||\partial_x f(v)||^k \\
&\lesssim ||v||_Y^p(1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-(1-k)\psi-\frac{k}{2(\delta-\theta)}}.
\end{aligned}$$

Se $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$, temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x^k f(v)|| &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)} - \frac{2(1-k)}{2(\delta-\theta)} - \frac{k}{2(\delta-\theta)}} \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

Se $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$, então

$$\begin{aligned} ||\partial_x^k f(v)|| &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)} - (1-k)\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} - (1-k) - \frac{k}{2(\delta-\theta)}} \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1+2k}{4(\delta-\theta)} - (1-k)\frac{3+4\alpha-8\theta}{4(\alpha-\theta)}}. \end{aligned}$$

Analogamente, para $k \in (1,2)$ temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x^k f(v)|| &= ||\partial_x^{k-1} \partial_x f(v)|| \\ &\leq ||\partial_x f(v)||^{2-k} ||\partial_x^2 f(v)||^{k-1} \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)} - \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}} \\ &= ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{p+3-2k}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

(iii) Sejam $\sigma \geq 1$ e φ função real satisfazendo $|\partial_s \varphi(s)| \lesssim |s|^{\sigma-1}$. Usando a desigualdade do valor médio, temos

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq C|a-b|(|a|^{\sigma-1} + |b|^{\sigma-1}), \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Escolhendo $\varphi(s) = |s|^p$ na desigualdade acima, usando a desigualdade de Hölder e a definição da norma Y, podemos escrever

$$\begin{aligned}
||f(v) - f(w)||_{L^1} &\lesssim || \, |v-w| \, \text{máx}\,\{|v|, |w|\}^{p-1}||_{L^1} \\
&\lesssim ||(v,w)||_{L^\infty}^{p-2} ||(v,w)|| \, ||v-w|| \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p-2}{4(\delta-\theta)} - 2\psi}.
\end{aligned}$$

Segue como feito no item *(i)*.

(iv) As taxas são encontradas de forma análoga ao item *(ii)*.

O caso $k = 0$ segue como no item anterior:

$$\begin{aligned}
||f(v) - f(w)|| &\lesssim || \, |v-w| \, \text{máx}\,\{|v|, |w|\}^{p-1}|| \\
&\leq ||(v,w)||_{L^\infty}^{p-1} ||v-w|| \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)} - \psi}.
\end{aligned}$$

Para $k = 1$ primeiramente usamos (4.9) (com $\varphi(s) = |s|^{p-2}s$ e $\sigma = p-1$) para obter

$$\begin{aligned}
&|\partial_x(|v(x)|^p - |w(x)|^p)| = p\left||v(x)|^{p-2}v(x)\partial_x v(x) - |w(x)|^{p-2}w(x)\partial_x w(x)\right| \\
&\lesssim |v(x)|^{p-1}|\partial_x(v(x) - w(x))| \\
&\quad + |\partial_x w(x)| \left||v(x)|^{p-2}v(x) - |w(x)|^{p-2}w(x)\right| \\
&\lesssim |v(x)|^{p-1}|\partial_x(v(x) - w(x))| \\
&\quad + |\partial_x w(x)| \, \text{máx}\,\{|v(x)|^{p-2}, |w(x)|^{p-2}\}|v(x) - w(x)|.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos:

$$
\begin{aligned}
||\partial_x(f(v)-f(w))|| &\lesssim ||v||_{L^\infty}^{p-1}||\partial_x(v-w)|| + ||\partial_x w||\,||(v,w)||_{L^\infty}^{p-2}||v-w||_{L^\infty} \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y(1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}-\frac{1}{2(\delta-\theta)}}.
\end{aligned}
$$

Para $k=2$, notemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\partial_x^2(|v(x)|^p-|w(x)|^p)\right| \leq\, & p(p-1)\left||v(x)|^{p-2}(\partial_x v(x))^2-|w(x)|^{p-2}(\partial_x w(x))^2\right| \\
& + p\left||v(x)|^{p-2}v(x)\partial_x^2 v(x)-|w(x)|^{p-2}w(x)\partial_x^2 w(x)\right| \\
\lesssim\, & |v(x)|^{p-2}|(\partial_x v(x))^2-(\partial_x w(x))^2| \\
& +|\partial_x w(x)|^2\left||v(x)|^{p-2}-|w(x)|^{p-2}\right| \\
& +|v(x)|^{p-1}|\partial_x^2 v(x)-\partial_x^2 w(x)| \\
& +|\partial_x^2 w(x)|\left||v(x)|^{p-2}v(x)-|w(x)|^{p-2}w(x)\right|.
\end{aligned}
$$

Usamos novamente (4.9) (uma vez com $\varphi(s)=s^2$, outra com $\varphi(s)=|s|^{p-2}$ e outra com $\varphi(s)=|s|^{p-2}s$) concluindo que

$$
\begin{aligned}
& \left|\partial_x^2(|v(x)|^p-|w(x)|^p)\right| \\
& \lesssim |v(x)|^{p-2}\,\text{máx}\,\{|\partial_x v(x)|,|\partial_x w(x)|\}|\partial_x(v(x)-w(x))| \\
& \quad +|\partial_x w(x)|^2\,\text{máx}\,\{|v(x)|^{p-3},|w(x)|^{p-3}\}|v(x)-w(x)| \\
& \quad +|v(x)|^{p-1}|\partial_x^2(v(x)-w(x))| \\
& \quad +|\partial_x^2 w(x)|\,\text{máx}\,\{|v(x)|^{p-2},|w(x)|^{p-2}\}|v(x)-w(x)|.
\end{aligned}
$$

Portanto, por Gagliardo-Nirenberg ($||\partial_x v||_{L^4} \lesssim ||\partial_x^2 v||^{\frac{1}{2}} ||v||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty}$),

$$
\begin{aligned}
&||\partial_x^2(f(v) - f(w))|| \\
&\quad \lesssim ||v||^{p-2}_{L^\infty} ||(\partial_x v, \partial_x w)||_{L^4} ||\partial_x(v-w)||_{L^4} \\
&\qquad + ||\partial_x w||^2_{L^4} ||(v,w)||^{p-3}_{L^\infty} ||v-w||_{L^\infty} + ||v||^{p-1}_{L^\infty} ||\partial_x^2(v-w)|| \\
&\qquad + ||\partial_x^2 w||\, ||(v,w)||^{p-2}_{L^\infty} ||v-w||_{L^\infty} \\
&\quad \lesssim ||(v,w)||^{p-\frac{3}{2}}_{L^\infty} ||v-w||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty} ||(\partial_x^2 v, \partial_x^2 w)||^{\frac{1}{2}} ||\partial_x^2(v-w)||^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad + ||\partial_x^2 w||\, ||(v,w)||^{p-2}_{L^\infty} ||v-w||_{L^\infty} + ||v||^{p-1}_{L^\infty} ||\partial_x^2(v-w)|| \\
&\quad \lesssim ||(v,w)||^{p-1}_{Y} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{p-1}{4(\delta-\theta)}}.
\end{aligned}
$$

Os casos $k \in (0,1) \cup (1,2)$ seguem pelo Lema 4.1 de modo análogo ao feito no item *(ii)*.

■

Proposição 4.1 *Seja* $|\gamma| \in \{0,1,2\}$, $q \geq 0$ *e* $(a)_+ = máx\{0,a\}$.

(i) Se $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, *sendo* $s = (|\gamma| - \alpha - \delta + (\delta-\theta)q)_+$, *temos*

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^\gamma K_1(t) * (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\phi|| \quad &\lesssim \quad ||\phi||_{L^1} (1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4} + \frac{|\gamma|}{2} - \theta\right)} \\
&\quad + ||\partial_x^s \phi|| (1+t)^{-\frac{q}{2}}.
\end{aligned}
$$

(ii) Se $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, sendo $s = (|\gamma| - 2\delta + (\delta - \theta)q)_+$, temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x^\gamma \partial_t K_1(t) * (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\phi|| &\lesssim ||\phi||_{L^1}(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-1} \\ &\quad + ||\partial_x^s \phi||(1+t)^{-\frac{q}{2}}. \end{aligned}$$

Demonstração.

(i) Seja $\varphi \in H^{\gamma_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, com $\gamma_0 = (|\gamma| - \alpha + \delta + (\delta - \theta)q)_+$. Temos

$$\begin{aligned} ||\partial_x^\gamma K_1(t) * \varphi||^2 &\approx \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2|\gamma|} |\widehat{K}_1(t)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\approx \int_{|\xi|<\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\widehat{K}_1(t)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\widehat{K}_1(t)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 2.3, item (i), estimamos a primeira integral:

$$I_1 \lesssim ||\varphi||_{L^1}^2 \int_{|\xi|<\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\widehat{K}_1(t)|^2 d\xi \lesssim ||\varphi||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)}.$$

Escolhendo $u_0 = 0$ e $u_1 = \varphi$, podemos escrever $\widehat{u}(t) = \widehat{K}_1 \widehat{\varphi}$ e assim, usando a Proposição 3.1 e o Lema 3.2, tem-se que

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|}|\widehat{u}(t)|^2 d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|}\left(|\xi|^{-2(\alpha-\delta)}e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\right)d\xi \\
&\lesssim (1+t)^{-q}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|-2(\alpha-\delta)+2(\delta-\theta)q}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}
$$

onde $q \geq 0$.

Portanto

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^\gamma K_1(t)*\varphi||^2 &\lesssim ||\varphi||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)} \\
&\quad +(1+t)^{-q}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|-2(\alpha-\delta)+2(\delta-\theta)q}|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}
$$

Agora, escolhendo $\varphi = (I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\phi$ com $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n)\cap L^1(\mathbb{R}^n)$

$$
\begin{aligned}
&||\partial_x^\gamma K_1(t)*(I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\phi||^2 \\
&\quad\lesssim ||(I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\phi||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)} \\
&\qquad +(1+t)^{-q}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|-2(\alpha-\delta)+2(\delta-\theta)q}(1+|\xi|^{2\delta})^{-2}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad\lesssim ||(I+(-\Delta)^\delta)^{-1}\phi||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)} \\
&\qquad +(1+t)^{-q}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|-2(\alpha-\delta)+2(\delta-\theta)q-4\delta}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad\lesssim ||\phi||_{L^1}^2(1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)} + ||\partial_x^s\phi||^2(1+t)^{-q},
\end{aligned}
$$

com $s = (|\gamma|-\alpha-\delta+(\delta-\theta)q)_+$.

(ii) A demonstração é análoga. Para $\varphi \in H^{\gamma_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, com $\gamma_0 = (|\gamma| + (\delta - \theta)q)_+$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
||\partial_x^\gamma \partial_t K_1(t) * \varphi||^2 &\approx \int_{|\xi|<\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\partial_t \widehat{K}_1(t)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\partial_t \widehat{K}_1(t)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&=: J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

com

$$J_1 \lesssim ||\varphi||_{L^1}^2 \int_{|\xi|<\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\partial_t \widehat{K}_1(t)|^2 d\xi \lesssim ||\varphi||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-2}$$

e (escolhendo $u_0 = 0$ e $u_1 = \varphi$)

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} |\widehat{u}_t(t)|^2 d\xi \\
&\lesssim \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|} \left(e^{-\frac{1}{2}|\xi|^{2(\theta-\delta)}t} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\right) d\xi \\
&\lesssim (1+t)^{-q} \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|+2(\delta-\theta)q} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

onde $q \geq 0$.

Portanto

$$\begin{aligned}
||\partial_x^\gamma \partial_t K_1(t) * \varphi||^2 &\lesssim ||\varphi||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-2} \\
&\quad + (1+t)^{-q} \int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|+2(\delta-\theta)q} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Escolhemos $\varphi = (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\phi$ com $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
&||\partial_x^\gamma \partial_t K_1(t) * (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\phi||^2 \\
&\lesssim ||(I + (-\Delta)^\delta)^{-1}\phi||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-2} \\
&\quad +(1+t)^{-q}\int_{|\xi|\geq\varepsilon} |\xi|^{2|\gamma|+2(\delta-\theta)q-4\delta}|\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\lesssim ||\phi||_{L^1}^2 (1+t)^{-\frac{2}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{|\gamma|}{2}-\theta\right)-2} + ||\partial_x^s \phi||^2 (1+t)^{-q},
\end{aligned}$$

com $s = (|\gamma| - 2\delta + (\delta-\theta)q)_+$.

$\blacksquare$

Agora vamos enunciar e provar o resultado que nos dá existência global e decaimento ótimo para o problema (4.1)-(4.2).

Teorema 4.1 *Suponhamos que $n = 3$, $0 \leq 2\theta < \alpha \leq 2$, $\delta \leq \alpha - 1$, $\delta - \theta \geq \frac{5}{14}$, $u_0 \in H^{2+\alpha-\delta}(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e $u_1 \in H^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ e consideramos*

$$E_1 = ||u_0||_{H^{2+\alpha-\delta}\cap L^1} + ||u_1||_{H^2\cap L^1}.$$

Então existe uma constante positiva δ_1 tal que se $E_1 \leq \delta_1$, o problema semilinear (4.1)-(4.2) tem uma única solução global $u \in X$ tal que $u_t \in Y$. Mais ainda, a solução obtida satisfaz o seguinte decaimento:

$$||\partial_x^k u(t)|| \leq CE_1(1+t)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)}, \quad k \in \{0,1\}; \tag{4.10}$$

$$||\partial_x^2 u(t)|| \leq CE_1(1+t)^{-\min\left\{\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}, \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}\right\}}; \tag{4.11}$$

$$||\partial_x^3 u(t)|| \leq CE_1(1+t)^{-\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}; \tag{4.12}$$

$$||u_t(t)|| \leq CE_1(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{\delta-\theta}, \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1\right\}}; \tag{4.13}$$

$$||\partial_x^k u_t(t)|| \leq CE_1(1+t)^{-\frac{2-k}{2(\delta-\theta)}}, \quad k \in \{1,2\}. \tag{4.14}$$

Evidentemente podemos obter outras estimativas, como por exemplo, para os termos que aparecem na energia, usando o teorema acima e o Lema 4.1.

A prova do Teorema 4.1 depende de algumas estimativas para os termos não lineares $F(v)$ e $\dot{F}(v)$ dados em (10) e (13) respectivamente.

Proposição 4.2 *Com as mesmas hipóteses do Teorema 4.1 tem-se*

$$||F(v)||_X \leq C||v||_Y^p \tag{4.15}$$

para $v \in Y$*, com* $C = C(||v||_Y)$ *constante dependendo de* $||v||_Y$*.*

Proposição 4.3 *Com as mesmas hipóteses do Teorema 4.1 tem-se*

$$||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)||_Y \leq C||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y \tag{4.16}$$

para $v, w \in Y$*, com* $C = C(||(v,w)||_Y)$ *onde* $||(v,w)||_Y = $ *máx*$\{||v||_Y, ||w||_Y\}$*.*

Demonstração do Teorema 4.1.

Vamos provar este resultado utilizando o Teorema da Contração. Definimos em Y a função

$$\Phi[v](t) = \overline{u}_t(t) + \dot{F}(v)(t),$$

onde $\overline{u}_t(t)$ e $\dot{F}(v)(t)$ são dadas por (12) e (13), respectivamente. Nosso objetivo é encontrar um ponto fixo v para a função Φ e este será uma solução para a equação (11).

Notemos que (4.5), Lema 3.4 e Observação 3.1 implicam em

$$\begin{aligned}
||\overline{u}_t||_Y &= \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\min\left\{\frac{1}{\delta-\theta},\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1\right\}}||\overline{u}_t(t)|| + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{2(\delta-\theta)}}||\partial_x\overline{u}_t(t)|| \\
&\quad + \sup_{t\geq 0}||\partial_x^2\overline{u}_t(t)|| + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{4(\delta-\theta)}}||\overline{u}_t(t)||_{L^\infty} \\
&\leq \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\min\left\{\frac{1}{\delta-\theta},\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1\right\}}CE_1(1+t)^{-\min\left\{\frac{1}{\delta-\theta},\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1\right\}} \\
&\quad + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{2(\delta-\theta)}}CE_1(1+t)^{-\frac{1}{2(\delta-\theta)}} \\
&\quad + \sup_{t\geq 0}CE_1 + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{4(\delta-\theta)}}CE_1(1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}} \\
&\leq C_1E_1 \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

com $C_1 > 0$ constante.

Consideremos S o subespaço fechado e convexo de Y dado por

$$S = \{v \in Y \ / \ ||v||_Y \leq 2C_1E_1\}.$$

Vamos mostrar que $\Phi : S \to S$ é contração.

Primeiramente vejamos que esta função está bem definida. Se $v \in S$ então $\Phi[v] \in S$ pois, usando (4.17) e a Proposição 4.3, temos

$$\begin{aligned} ||\Phi[v]||_Y &\leq ||\overline{u}_t||_Y + ||\dot{F}(v)||_Y \\ &\leq C_1 E_1 + C||v||_Y^p \\ &\leq C_1 E_1 + 2^p C C_1^p E_1^p \\ &\leq 2C_1 E_1 \end{aligned}$$

desde que $E_1 \leq \delta_1$ e que $\delta_1 > 0$ satisfaça $2^p C C_1^{p-1} \delta_1^{p-1} < 1$.

A fim de provar que Φ é contração, usamos a Proposição 4.3 e concluímos que, dados v, $w \in S$, temos

$$\begin{aligned} ||\Phi[v] - \Phi[w]||_Y &= ||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)||_Y \\ &\leq C\,||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y \\ &\leq 2^{p-1} C C_1^{p-1} E_1^{p-1} ||v-w||_Y \\ &\leq \widetilde{C}\,||v-w||_Y, \end{aligned}$$

com $\widetilde{C} = 2^{p-1} C C_1^{p-1} E_1^{p-1} \leq 2^p C C_1^{p-1} \delta_1^{p-1} < 1$.

Portanto Φ é contração e v é ponto fixo de Φ, ou seja, existe $v \in S$ satisfazendo $v(t) = \overline{u}_t(t) + \dot{F}(v)(t)$. Para este v definimos $u(t) := \overline{u}(t) + F(v)(t)$ e assim, pelo Lema 3.4, pela Observação 3.1 e pela Proposição 4.2, temos

$$
\begin{aligned}
||u||_X &\leq ||\overline{u}||_X + ||F(v)||_X \\
&\leq \sum_{k=0}^{1} \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{3}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)}||\partial_x^k \overline{u}(t)|| \qquad (4.18)\\
&\quad + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\min\left\{\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)},\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{7}{4}-\theta\right)\right\}}||\partial_x^2 \overline{u}(t)|| \\
&\quad + \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}||\partial_x^3 \overline{u}(t)|| + \sup_{t\geq 0}||\partial_x^{2+\alpha-\delta}\overline{u}(t)|| \\
&\quad + C||v||_Y^p \\
&\leq C_2 E_1 + 2^p C C_1^p E_1^p \\
&\leq C_0 E_1. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

Portanto $u \in X$. Além disso, u satisfaz

$$
u_t(t) = \overline{u}_t(t) + \frac{d}{dt}F(v)(t) = \overline{u}_t(t) + \dot{F}(v)(t),
$$

pois

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(v)(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t K_1(t-s) * \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} f(v)(s)\,ds \\
&= \int_0^t \partial_t K_1(t-s) * \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} f(v)(s)\,ds \\
&\quad + K_1(0) * \left(I + (-\Delta)^\delta\right)^{-1} f(v) \\
&= \dot{F}(v).
\end{aligned}
$$

Ou seja, $u \in X$ é solução de (4.1)-(4.2) tal que $u_t = v \in Y$, como queríamos.

■

Resta provar, portanto, as Proposições 4.2 e 4.3. A observação abaixo será útil para este fim.

Observação 4.1 *Sejam a, b e τ reais positivos. Vamos identificar as hipóteses sobre a e b que garantem a estimativa*

$$I(t) := \int_0^t (1+t-s)^{-b}(1+s)^{-a}ds \lesssim (1+t)^{-\tau}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-s)^{-b}(1+s)^{-a}ds + \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-s)^{-b}(1+s)^{-a}ds \\
&\lesssim (1+t)^{-b} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-a}ds + (1+t)^{-a} \int_{\frac{t}{2}}^t (1+t-s)^{-b}ds \\
&= (1+t)^{-b} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-a}ds + (1+t)^{-a} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-b}ds.
\end{aligned}$$

É imediato que

$$\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-a}ds \lesssim \begin{cases} 1, & se \quad a > 1 \\ (1+t)^{1-a}, & se \quad a < 1 \\ \log(1+t), & se \quad a = 1 \end{cases}$$

e o mesmo vale para b no lugar de a.

Usando a estimativa acima, vejamos o que ocorre em cada caso:

(i) Caso $a > 1$:

Temos

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-b} + (1+t)^{-a} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-b} ds.$$

Para $b \geq 0$ satisfazendo $b < 1$ e $b \geq \tau$, segue que

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-b} + (1+t)^{1-a-b} \lesssim (1+t)^{-b} \lesssim (1+t)^{-\tau}.$$

Para $b = 1$, $b \geq \tau$ e $a > \tau$, segue que

$$\begin{aligned} I(t) &\lesssim (1+t)^{-b} + (1+t)^{-a} \log(1+t) \\ &\lesssim (1+t)^{-\tau} + (1+t)^{-a}(1+t)^{\varepsilon} \\ &< (1+t)^{-\tau} + (1+t)^{-\tau+\varepsilon} \end{aligned}$$

para t suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ qualquer. Pela arbitrariedade de ε, $I(t) \lesssim (1+t)^{-\tau}$, para t suficientemente grande.

Para $b > 1$, $b \geq \tau$ e $a \geq \tau$ temos

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-b} + (1+t)^{-a} \lesssim (1+t)^{-\tau}.$$

(ii) Caso $a<1$:

Temos

$$I(t) \lesssim (1+t)^{1-a-b} + (1+t)^{-a}\int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-b} ds.$$

Para $b \geq 0$ satisfazendo $b<1$ e $b+a-1 \geq \tau$, segue que

$$I(t) \lesssim (1+t)^{1-a-b} \lesssim (1+t)^{-\tau}.$$

Para $b=1$ e $a>\tau$, segue (para t suficientemente grande)

$$\begin{aligned} I(t) &\lesssim (1+t)^{-a} + (1+t)^{-a}\log(1+t) \\ &\lesssim (1+t)^{-\tau} + (1+t)^{-a}(1+t)^{\varepsilon} \\ &< (1+t)^{-\tau} + (1+t)^{-\tau+\varepsilon} \end{aligned}$$

com $\varepsilon>0$ qualquer. Pela arbitrariedade de ε, $I(t) \lesssim (1+t)^{-\tau}$, para t suficientemente grande.

Para $b>1$ e $a \geq \tau$ temos

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-a} \lesssim (1+t)^{-\tau}.$$

(iii) Caso $a = 1$:

Temos (para t suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ qualquer)

$$\begin{aligned} I(t) &\lesssim (1+t)^{-b}\log(1+t) + (1+t)^{-1}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+s)^{-b}ds \\ &\lesssim (1+t)^{-b+\varepsilon} + (1+t)^{-1}\int_0^{\frac{t}{2}}(1+s)^{-b}ds. \end{aligned}$$

Para $b \geq 0$ satisfazendo $b \leq 1$ e $b - \varepsilon \geq \tau$, segue que

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-b+\varepsilon} \lesssim (1+t)^{-\tau},$$

para t suficientemente grande.

Para $b > 1 = a \geq \tau$ temos

$$I(t) \lesssim (1+t)^{-b+\varepsilon} + (1+t)^{-b} < (1+t)^{-\tau+\varepsilon} + (1+t)^{-\tau}.$$

Pela arbitrariedade de ε, $I(t) \lesssim (1+t)^{-\tau}$, para t suficientemente grande.

Demonstração da Proposição 4.2.

Seja $v \in Y$. Queremos provar as seguintes estimativas:

$$
\begin{aligned}
||F(v)(t)|| &\leq C||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)}}, &(4.20)\\
||\partial_x F(v)(t)|| &\leq C||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)}}, &(4.21)\\
||\partial_x^2 F(v)(t)|| &\leq C||v||_Y^p (1+t)^{-\tau}, &(4.22)\\
||\partial_x^3 F(v)(t)|| &\leq C||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}, &(4.23)\\
||\partial_x^{2+\alpha-\delta} F(v)(t)|| &\leq C||v||_Y^p, &(4.24)
\end{aligned}
$$

para todo $t \geq 0$, onde $\tau = \min\left\{\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}, \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}\right\}$.

Usando a Proposição 4.1, com $\phi = f(v)$, segue que

$$
\begin{aligned}
||\partial_x^k F(v)(t)|| &\leq \int_0^t ||\partial_x^k K_1(t-s) * (I + (-\Delta)^\delta)^{-1} f(v)(s)||\, ds\\
&\lesssim \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)} ||f(v)(s)||_{L^1} ds\\
&\quad + \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{q}{2}} ||\partial_x^{k_0} f(v)(s)||\, ds\\
&=: I_1 + I_2 \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

com $q \geq 0$ e $k_0 := (k - \alpha - \delta + (\delta-\theta)q)_+$.

(1) Caso $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$:

(1.1) Estimativa para I_1:

Usando o item *(i)* do Lema 4.2, temos

$$I_1 \lesssim ||v||_Y^p \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} (1+s)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}} ds.$$

Note que

$$\frac{p+6}{4(\delta-\theta)} > 1,$$

pois $p \geq 0 > 4(\delta-\theta) - 6$.

Além disso, para $k \in \{0,1,2,3\}$ e $p \geq 2$, vale a desigualdade

$$\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)} \leq \frac{p+6}{4(\delta-\theta)}.$$

De fato, basta provar para $k = 3$ e $p = 2$. Nestas condições, a desigualdade acima é equivalente a $9\delta + 4\theta^2 \leq 8\alpha + \theta + 4\theta\delta$ que vale pois $\theta < \delta \leq \alpha - 1$.

Usando a Observação 4.1, item *(i)*, obtemos

$$I_1 \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}}, \tag{4.26}$$

para $k \in \{0,1,2,3\}$.

Mais ainda, se $k = 2$,

$$I_1 \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} \leq ||v||_Y^p (1+t)^{-\tau}; \tag{4.27}$$

e, se $k = 3$,

$$I_1 \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{9-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} \leq ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}, \tag{4.28}$$

pois como provado na Obs. 3.1 item *(iv)* tem-se que $\frac{9-4\theta}{2(\alpha-\theta)} \geq \frac{\alpha-\delta-1}{\delta-\theta}$.

Agora, se $k = 2 + \alpha - \delta$, também pelo item *(i)* da Observação 4.1, temos

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim ||v||_Y^p \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{7+2\alpha-2\delta-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} (1+s)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}} ds \\ &\lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\text{mín}\left\{\frac{7+2\alpha-2\delta-4\theta}{4(\alpha-\theta)}, \frac{p+6}{4(\delta-\theta)}\right\}} \\ &\leq ||v||_Y^p. \end{aligned} \tag{4.29}$$

(1.2) Estimativa para I_2:

Agora, pelo item *(ii)* do Lema 4.2, segue que

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{q}{2}} (1+s)^{-a} ds, \tag{4.30}$$

com $a := \frac{p+3-2k_0}{4(\delta-\theta)}$ e $k_0 = (k - \alpha - \delta + (\delta-\theta)q)_+$.

Nossa ideia é escolher q de maneira adequada para utilizar a Observação 4.1 e assim conseguir as estimativas desejadas para I_2.

(1.2.1) Estimativa para I_2 - Caso $k = 0$ e $k = 1$:

Se $k = 0$, ou $k = 1$ com $\alpha > \frac{5}{4}$, basta escolher $\frac{q}{2} = \frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)} < 1$. Assim $k_0 = 0$, pois a hipótese $\delta \leq \alpha - 1$ implica em

$$k - \alpha - \delta + 2(\delta - \theta)\frac{q}{2} \ < \ 1 - \alpha + \delta - 2\theta \ \leq \ 0.$$

Neste caso, temos $a = \frac{p+3}{4(\delta-\theta)} > 1$ (pois $p \geq 2$ e $\delta \leq 1$).

Agora, se $k = 1$ e $\alpha \leq \frac{5}{4}$, escolhemos $\frac{q}{2} = \frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)} \geq 1$. Não conseguimos garantir $k_0 = 0$, mas sim $k_0 \leq 1$. De fato, pois

$$5\delta < 6\delta \leq 2\alpha(1+\delta) + 2\alpha\delta \leq 2\alpha^2 + 2\alpha\delta$$

e

$$4\theta^2 + 2\theta\alpha \leq 2\theta\frac{3}{4} + 2\theta\delta + 2\theta\frac{5}{4} \leq 5\theta + 2\theta\delta$$

implicam em $5(\delta - \theta) - 4\theta(\delta - \theta) \leq 2\alpha(\alpha + \delta) - 2\theta(\alpha + \delta)$, ou seja, $1 - \alpha - \delta + 2(\delta - \theta)\frac{q}{2} \leq 1$.

Agora, usando $p \geq 2$ e $\alpha \leq \frac{5}{4}$, obtemos

$$a = \frac{p + 3 - 2k_0}{4(\delta - \theta)} \geq \frac{3}{4(\delta - \theta)} > \frac{5 - 4\theta}{4(\alpha - \theta)}.$$

A última desigualdade vale pois $2\alpha < 5$ e $4\theta^2 \leq 4\theta\delta$ implicam em

$$5\delta + 4\theta^2 \leq 5\alpha - 5 + 4\theta\delta < 3\alpha + 4\theta\delta + 2\theta,$$

ou seja

$$(5-4\theta)\delta-(5-4\theta)\theta<3(\alpha-\theta).$$

Note que se $\alpha \leq \frac{5}{4}$ temos $a > \frac{5-4\theta}{4(\alpha-\theta)} \geq 1$.

Nos casos acima usamos (4.30) e a Observação 4.1, item *(i)*, (com $b=\frac{q}{2}$ e $\tau=\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$), concluindo que

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p(1+t)^{-\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}}, \tag{4.31}$$

para $k \in \{0,1\}$.

(1.2.2) Estimativa para I_2 - Caso $k=2$:

Para estudar o que ocorre quando $k=2$, vamos separar em dois casos: $\tau=\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$ e $\tau=\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$.

(1.2.2.1) Estimativa para I_2 - Caso $k=2$ com $\tau=\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$:

Definimos $\frac{q}{2}=\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$. Notemos que esta escolha garante $k_0 \leq 2$, pois

$$(\delta-\theta)q \leq \alpha+\delta$$

é equivalente a

$$7\delta+4\theta^2+2\theta\alpha \leq 2\alpha^2+2\alpha\delta+7\theta+2\delta\theta,$$

que é sempre verdadeira pois $4\theta^2+2\theta\alpha \leq 3\theta+2\theta(2)=7\theta \leq 7\theta+2\delta\theta$ e $7\delta \leq 7\alpha-7 \leq 2\alpha^2+\frac{5}{7}\alpha \leq 2\alpha^2+2\alpha\delta$.

(1.2.2.1.1) Caso $k_0 = 0$:

Por um lado, se q satisfaz $2 + (\delta - \theta)q \leq \alpha + \delta$ então $k_0 = 0$. Neste caso, $a = \frac{p+3}{4(\delta-\theta)} > 1$.

- Consideremos $\alpha < \frac{7}{4}$ (e portanto $\frac{q}{2} > 1$).

Vale $a > \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$, pois das desigualdades $2\alpha < 7$ e $4\theta^2 \leq 4\theta\delta$ temos $7\delta + 4\theta^2 \leq 7\alpha - 7 + 4\theta\delta < 5\alpha + 4\theta\delta + 2\theta$, que implica em

$$a = \frac{p+3}{4(\delta - \theta)} \geq \frac{5}{4(\delta - \theta)} > \frac{7 - 4\theta}{4(\alpha - \theta)}.$$

Portanto temos $1 < \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)} = \frac{q}{2} < a$.

- Consideremos $\alpha \geq \frac{7}{4}$.

Neste caso temos $\frac{q}{2} = \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)} \leq 1 < a$.

(1.2.2.1.2) Caso $k_0 > 0$:

Novamente escolhemos $\frac{q}{2} = \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$ e separamos nos casos: $\alpha < \frac{7}{4}$ e $\alpha \geq \frac{7}{4}$.

- Se $\alpha < \frac{7}{4}$ então $\frac{q}{2} > 1$.

Vamos provar que $a > \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$ (e consequentemente $a > 1$).

Nosso objetivo é provar a desigualdade

$$\frac{p - 1 + 2\alpha + 2\delta - 2(\delta - \theta)q}{4(\delta - \theta)} > \frac{q}{2},$$

ou ainda, usando que $p \geq 2$,

$$\frac{1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} > q = \frac{7-4\theta}{2(\alpha-\theta)}. \tag{4.32}$$

Portanto queremos mostrar que

$$14\delta + 8\theta^2 + 2\theta\alpha < 6\theta\delta + 13\theta + 2\alpha^2 + 2\delta\alpha + \alpha.$$

Note que $\alpha < \frac{7}{4}$ implica em $4\alpha^2 - 15\alpha + 14 > 0$ e assim temos $14\delta - 2\delta\alpha = \delta(14-2\alpha) \leq (\alpha-1)(14-2\alpha) = -2\alpha^2 + 16\alpha - 14 < 2\alpha^2 + \alpha$. Portanto $14\delta < 2\alpha^2 + 2\delta\alpha + \alpha$. Além disso $8\theta^2 < 8\theta$ (pois $\theta < 1$) e $2\theta\alpha \leq 4\theta$. Assim segue a desigualdade desejada.

- Se $\alpha \geq \frac{7}{4}$ então $\frac{q}{2} \leq 1 < a$.

De fato, $a > 1$ se e somente se

$$\frac{p-1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} - \frac{(\delta-\theta)\frac{7-4\theta}{\alpha-\theta}}{4(\delta-\theta)} > 1,$$

e para $p \geq 2$ basta ter

$$\frac{1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} > 1 + \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)},$$

que é equivalente a

$$7\delta + 8\theta^2 + 2\delta\alpha < \alpha + 2\alpha^2 + 6\theta + 2\theta\alpha + 6\theta\delta.$$

Neste caso (de τ), temos

$$\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)} \geq \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}, \tag{4.33}$$

ou seja, $7\delta+4\theta^2+2\delta\alpha+2\theta\alpha \leq 7\theta+2\alpha^2+6\theta\delta$.

Portanto, usando também $4\theta^2-2\theta\alpha \leq 3\theta-2\theta\alpha$ e $4\theta \leq 4\theta\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned} 7\delta+8\theta^2+2\delta\alpha &\leq 2\alpha^2+10\theta+6\theta\delta-2\theta\alpha \\ &\leq 2\alpha^2+6\theta+6\theta\delta+(4\theta-2\theta\alpha) \\ &< \alpha+2\alpha^2+6\theta+6\theta\delta+2\theta\alpha, \end{aligned}$$

como queríamos.

Concluímos que se $k=2$ e $\tau=\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$ então para os dois casos de k_0 tem-se:

- $1<\dfrac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}=\dfrac{q}{2}<a$ se $\alpha<\dfrac{7}{4}$;
- $\dfrac{q}{2}=\dfrac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}\leq 1<a$ se $\alpha\geq\dfrac{7}{4}$.

Usando a Observação 4.1, item *(i)*, obtemos

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p(1+t)^{-\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}} = ||v||_Y^p(1+t)^{-\tau}. \tag{4.34}$$

(1.2.2.2) Estimativa para I_2 - Caso $k = 2$ com $\tau = \frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$:

Definimos $\frac{q}{2} = \frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$. Lembre que, neste caso, temos

$$\frac{\alpha - \delta}{2(\delta - \theta)} \leq \frac{7 - 4\theta}{4(\alpha - \theta)}. \tag{4.35}$$

Portanto, da mesma forma que no caso anterior, temos $k_0 \leq 2$.

Ocorre $k_0 = 0$ quando q satisfaz $2 + (\delta - \theta)q \leq \alpha + \delta$. Temos novamente $a = \frac{p+3}{4(\delta-\theta)} > 1$.

Se $k_0 > 0$, também ocorre $a > 1$, pois $p \geq 2$ implica em

$$\begin{aligned} a &= \frac{p + 3 - 2(2 - \alpha - \delta + (\delta - \theta)q)}{4(\delta - \theta)} \\ &= \frac{p + 3 - 4 + 2\alpha + 2\delta - 2(\alpha - \delta)}{4(\delta - \theta)} \\ &\geq \frac{1 + 4\delta}{4(\delta - \theta)} > 1. \end{aligned}$$

Vamos provar que $a > \frac{q}{2}$.

- Caso $\alpha + 2\theta \leq 3\delta$ (ou seja, $\frac{q}{2} \leq 1$).

Aqui temos $a > 1 \geq \frac{q}{2} = \frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}$.

- Caso $\alpha + 2\theta > 3\delta$ (ou seja, $\frac{q}{2} > 1$).

Vimos que $k_0 = 0$ implica em $a > \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$. De (4.35), temos $1 < \frac{q}{2} \leq \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)} < a$.

Por outro lado, se $k_0 > 0$, temos por (4.35) que $1 < \frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}$, que é equivalente a $\alpha < \frac{7}{4}$. Para este caso vimos em (4.32) que $\frac{p-1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} >$

$\frac{7-4\theta}{2(\alpha-\theta)}$ e usando novamente (4.35) concluímos que

$$\frac{p-1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} > \frac{\alpha-\delta}{\delta-\theta} = q.$$

Portanto

$$a = \frac{p-1+2\alpha+2\delta}{4(\delta-\theta)} - \frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)} > \frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)} = \frac{q}{2}.$$

Ou seja, também temos $1 < \frac{q}{2} < a$.

Novamente, usando a Observação 4.1, item *(i)*, obtemos

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-\frac{\alpha-\delta}{2(\delta-\theta)}} = ||v||_Y^p (1+t)^{-\tau}. \tag{4.36}$$

(1.2.3) Estimativa para I_2 - Caso $k = 3$:

Escolhemos $\frac{q}{2} = \frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}$. Como $\alpha+\delta \leq 3$ e $\delta > \theta$ sempre temos $0 \leq 3-\alpha-\delta+(\delta-\theta)q$.

Logo

$$\begin{aligned} k_0 &= 3-\alpha-\delta+(\delta-\theta)q \\ &= 3-\alpha-\delta+(\delta-\theta)\frac{\alpha-\delta-1}{\delta-\theta} \\ &= 3-\alpha-\delta+(\alpha-\delta-1) = 2-2\delta \end{aligned}$$

e portanto $k_0 \leq 2$.

Também temos, usando $p \geq 2$ e $k_0 = 2 - 2\delta$,

$$a = \frac{p + 3 - 2k_0}{4(\delta - \theta)} \geq \frac{5 - 2(2 - 2\delta)}{4(\delta - \theta)} = \frac{1 + 4\delta}{4(\delta - \theta)} > 1.$$

Agora vamos verificar que $a \geq \frac{q}{2}$. Usando $\frac{q}{2} = \frac{\alpha - \delta - 1}{2(\delta - \theta)} \leq \frac{9 - 4\theta}{4(\alpha - \theta)}$ (ver Observação 3.1 item *(iv)*) e $a \geq \frac{1+4\delta}{4(\delta-\theta)}$, basta provar que

$$\frac{9 - 4\theta}{4(\alpha - \theta)} \leq \frac{1 + 4\delta}{4(\delta - \theta)},$$

ou equivalentemente,

$$9\delta + 4\theta^2 \leq \alpha + 4\delta\alpha + 8\theta.$$

Como $4\theta^2 \leq 8\theta$ e

$$9\delta - 4\delta\alpha \leq (9 - 4\alpha)(\alpha - 1) = -4\alpha^2 + 13\alpha - 9 \leq \alpha$$

(de fato pois sempre temos $4\alpha^2 - 12\alpha + 9 \geq 0$) a desigualdade desejada segue.

Portanto temos sempre $a > 1$ e $a \geq \frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}$. Mais ainda, se ocorrer $\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)} = 1$, segue que $a > \frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}$.

Pela Observação 4.1, item *(i)*, quando $k = 3$ segue que

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p (1 + t)^{-\frac{\alpha-\delta-1}{2(\delta-\theta)}}. \tag{4.37}$$

(1.2.4) Estimativa para I_2 - Caso $k = 2 + \alpha - \delta$:

Escolhemos $\frac{q}{2} = \frac{\delta}{\delta-\theta} \geq 1$. Assim $k_0 = (2+\alpha-\delta)-\alpha-\delta+(\delta-\theta)q = 2$ e $a = \frac{p-1}{4(\delta-\theta)} > 0$.

Basta escolher $0 < T < \min\{\frac{q}{2}, a\}$. Pela Observação 4.1, temos

$$I_2 \lesssim ||v||_Y^p (1+t)^{-T} \leq ||v||_Y^p. \tag{4.38}$$

(Obs.: Aqui sai direto se $\frac{q}{2} > 1$. O caso $\frac{q}{2} = 1$ depende de a. Para $a > 1$ ou $a < 1$ basta ter $a > T$. Se $a = 1$ precisamos de $\frac{q}{2} - \varepsilon \geq T$, que vale para ε suficientemente pequeno.)

O resultado segue de (4.25), das estimativas para I_1 obtidas em (4.26)-(4.29) e das estimativas para I_2 obtidas em (4.31), (4.34), (4.36), (4.37) e (4.38).

(2) Caso $\frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{1}{\delta-\theta}$:

Este caso é provado com argumentação análoga, utilizando os mesmos lemas e observações.

■

Demonstração da Proposição 4.3.

Queremos mostrar que

$$
\begin{aligned}
||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)|| &\leq C||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y(1+t)^{-\psi}, && (4.39)\\
||\partial_x\dot{F}(v) - \partial_x\dot{F}(w)|| &\leq C||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y(1+t)^{-\frac{1}{2(\delta-\theta)}}, && (4.40)\\
||\partial_x^2\dot{F}(v) - \partial_x^2\dot{F}(w)|| &\leq C||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y, && (4.41)\\
||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)||_{L^\infty} &\leq C||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y(1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}}, && (4.42)
\end{aligned}
$$

onde $C > 0$ e $\psi = \min\left\{\frac{1}{\delta-\theta}, \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1\right\}$.

Para provar as estimativas acima, usamos a Proposição 4.1, item (ii), com $\phi = f(v) - f(w)$, obtendo

$$
\begin{aligned}
&||\partial_x^k\dot{F}(v)(t) - \partial_x^k\dot{F}(w)(t)||\\
&\quad\leq \int_0^t ||\partial_x^k\partial_t K_1(t-s) * (I + (-\Delta)^\delta)^{-1}(f(v)(s) - f(w)(s))||ds\\
&\quad\lesssim \int_0^t ||f(v)(s) - f(w)(s)||_{L^1}(1+t-s)^{-\frac{1}{\alpha-\theta}\left(\frac{n}{4}+\frac{k}{2}-\theta\right)-1}ds\\
&\qquad + \int_0^t ||\partial_x^{k_0}(f(v)(s) - f(w)(s))||(1+t-s)^{-\frac{q}{2}}ds\\
&\quad= J_1 + J_2 && (4.43)
\end{aligned}
$$

com $q > 0$ e $k_0 = (k - 2\delta + (\delta-\theta)q)_+$.

(1) Caso $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1$:

Temos $\psi = \frac{1}{\delta-\theta}$.

(1.1) Estimativa para J_1:

Usamos o Lema 4.2, item *(iii)*. Para $k \in \{0,1\}$ temos

$$
\begin{aligned}
J_1 &\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}-1}(1+s)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}}ds \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{2-k}{2(\delta-\theta)}}, \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

usando a Observação 4.1, item *(i)*, e as desigualdades

$$\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1>1, \quad \frac{p+6}{4(\delta-\theta)}>1,$$

$$\frac{3+2k-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \geq \frac{2-k}{2(\delta-\theta)} \quad \text{e} \quad \frac{p+6}{4(\delta-\theta)} > \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}.$$

Agora, para $k=2$, de maneira análoga temos

$$
\begin{aligned}
J_1 &\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}-1}(1+s)^{-\frac{p+6}{4(\delta-\theta)}}ds \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}} \\
&\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

pois

$$\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1>1, \quad \frac{p+6}{4(\delta-\theta)}>1,$$

$$\frac{7-4\theta}{4(\alpha-\theta)}+1 \geq \frac{1}{2(\delta-\theta)} > \frac{1}{4(\delta-\theta)} \quad \text{e} \quad \frac{p+6}{4(\delta-\theta)} > \frac{1}{4(\delta-\theta)}.$$

(1.2) Estimativa para J_2:

Usamos a Observação 4.1, item *(iv)*, obtendo:

$$J_2 \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y \int_0^t (1+s)^{-a}(1+t-s)^{-\frac{q}{2}}ds,$$

com $a = \frac{p+3-2k_0}{4(\delta-\theta)}$ e $k_0 = (k-2\delta+(\delta-\theta)q)_+$.

(1.2.1) Estimativa para J_2 - Caso $k=0$ e $k=1$:

Consideremos $k \in \{0,1\}$ e $\frac{q}{2} = \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}$.

Como $k-2\delta+2(\delta-\theta)\frac{2-k}{2(\delta-\theta)} \leq 2-2\delta$ então $k_0 \leq 2$.

Se $k_0 = 0$ então

$$a = \frac{p+3}{4(\delta-\theta)} > 1,$$

pois $p \geq 2$. Além disso, é fácil ver que $a > \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}$. Ou seja, $\frac{q}{2} < a$ com $a > 1$. Pela Observação 4.1, item *(i)*, temos

$$J_2 \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1}||v-w||_Y(1+t)^{-\frac{2-k}{2(\delta-\theta)}},$$

para $k \in \{0,1\}$.

Por outro lado, se $k_0 > 0$ segue que

$$\begin{aligned} a &= \frac{p+3-2k+4\delta-2(\delta-\theta)q}{4(\delta-\theta)} \\ &= \frac{p+3-2k+4\delta}{4(\delta-\theta)} - \frac{q}{2}. \end{aligned}$$

Note que $\frac{p+3-2k+4\delta}{4(\delta-\theta)} > 1 + \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}$ é equivalente a $p+4\theta > 1$, que sempre vale para $p \geq 2$. Assim $\frac{p+3-2k+4\delta}{4(\delta-\theta)} > 1 + \frac{q}{2}$, ou seja, $a > 1$.

É suficiente mostrar que $a > \frac{2-k}{2(\delta-\theta)}$, ou seja

$$\frac{p+3-2k+4\delta}{4(\delta-\theta)} > \frac{4-2k}{2(\delta-\theta)}.$$

Esta desigualdade é equivalente a $p > 5-2k-4\delta$, que sempre vale pois $p \geq 3$ garante que $p \geq \frac{19}{7} > 5-4\delta$. De fato, note que $\alpha-\theta > \alpha-\delta \geq 1$ implica em $\frac{1}{\delta-\theta} \leq \frac{3-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{3}{4} + 1$ e assim $\delta > \delta - \theta \geq \frac{4}{7}$.

Portanto temos para $k=0$ ou $k=1$

$$J_2 \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{2-k}{2(\delta-\theta)}}. \tag{4.46}$$

(1.2.2) Estimativa para J_2 - Caso $k=2$:

Definimos $\frac{q}{2} = \frac{\delta}{\delta-\theta} \geq 1$. Assim

$$k_0 = 2 - 2\delta + (\delta-\theta)\frac{2\delta}{\delta-\theta} = 2.$$

Temos então

$$a = \frac{p-1}{4(\delta-\theta)} > \frac{1}{4(\delta-\theta)}$$

e

$$\frac{q}{2} = \frac{\delta}{\delta-\theta} > \frac{1}{4(\delta-\theta)} \quad \left(\text{pois} \quad \delta > \frac{4}{7} > \frac{1}{4}\right).$$

Pela Observação 4.1, segue que

$$J_2 \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}} \leq ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y, \tag{4.47}$$

para $k = 2$.

Concluímos então, subtituindo (4.44)-(4.47) em (4.43), que valem as estimativas (4.39)-(4.41). Mais ainda,

$$||\partial_x^2 \dot{F}(v) - \partial_x^2 \dot{F}(w)|| \lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}}. \tag{4.48}$$

Agora, para provar (4.42), usamos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e as estimativas (4.39) e (4.48), obtendo

$$\begin{aligned} ||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)||_{L^\infty} &\lesssim ||\dot{F}(v) - \dot{F}(w)||^{\frac{1}{4}} ||\partial_x^2 \dot{F}(v) - \partial_x^2 \dot{F}(w)||^{\frac{3}{4}} \\ &\lesssim ||(v,w)||_Y^{p-1} ||v-w||_Y (1+t)^{-\frac{1}{4(\delta-\theta)}}. \end{aligned}$$

(2) Caso $\frac{n-4\theta}{4(\alpha-\theta)} + 1 \leq \frac{2}{2(\delta-\theta)}$:

Como na proposição anterior, o caso **(2)** é provado de maneira análoga ao caso **(1)**.

■

Referências Bibliográficas

[1] P. Biler, G. Karch and W. Woyczyński, *Asymptotics for conservation laws involving Lévy diffusion generators*. Studia Math. **148** (2001), no. 2, 171–192.

[2] H. Brezis, *Análisis funcional Teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[3] R. C. Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *Sharp decay rates for wave equations with a fractional damping via new method in the Fourier space*. J. Math. Anal. Appl. **408** (2013), no. 1, 247–255.

[4] R. Coimbra Charão, C. R. da Luz and R. Ikehata, *New decay rates for a problem of plate dynamics with fractional damping*. J. Hyperbolic Differ. Equ. **10** (2013), no. 3, 563–575.

[5] A. Córdoba and D. Córdoba, *A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations*. Comm. Math. Phys. **249** (2004), 511–528.

[6] M. D'Abbicco, R. Coimbra Charão and C. R. da Luz, *Sharp time decay rates on a hyperbolic plate model under effects of an intermediate damping with a time-dependent coefficient*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A **36** (2016), 2419–2447.

[7] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, *An application of L^p-L^q decay estimates to the semi-linear wave equation with parabolic-like structural damping*. Nonlinear Anal. **99** (2014), 16–34.

[8] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, *Diffusion phenomena for the wave equation with structural damping in the L^p-L^q framework*. J. Differential Equations **256** (2014), no. 7, 2307–2336.

[9] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, *A classification of structural dissipations for evolution operators*. Math. Methods Appl. Sci., (2015), Available from: http://dx.doi.org/10.1002/mma.3713.

[10] M. D'Abbicco and M. Reissig, *Semilinear structural damped waves*. Math. Methods Appl. Sci. **37** (2014), no. 11, 1570–1592.

[11] P. M. N. Dharmawardane, J. E. M. Rivera and S. Kawashima, *Decay property for second order hyperbolic systems of viscoelastic materials*. J. Math. Anal. Appl. **366** (2010), 621–635.

[12] D. Fang, X. Lu and M.Reissig, *High-order energy decay for structural damped systems in the electromagnetical field*. Chin. Ann. Math. Ser. B **31** (2010), no. 2, 237–246.

[13] A. Fino and G. Karch, *Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian*. Monatsh. Math. **160** (2010), no. 4, 375–384.

[14] A. M. Gomes, *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro (1985).

[15] J. L. Horbach, *Existência de soluções e comportamento assintótico ótimo para equações dissipativas generalizadas tipo placas/Boussinesq generalizadas em R^n*. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina (2016).

[16] T. Hosono and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type and application to some nonlinear hyperbolic-elliptic system.* Math. Models Methods Appl. Sci. **16** (2006), no. 11, 1839–1859.

[17] K. Ide, K. Haramoto and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type for dissipative Timoshenko system.* Math. Models Methods Appl. Sci. **18** (2008), no. 5, 647–667.

[18] K. Ide and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type and nonlinear effects for dissipative Timoshenko system.* Math. Models Methods Appl. Sci. **18** (2008), no. 7, 1001–1025.

[19] R. Ikehata and M. Natsume, *Energy decay estimates for wave equations with a fractional damping.* Differential Integral Equations **25** (2012), no. 9-10, 939–956.

[20] R. Ikehata, G. Todorova and B. Yordanov, *Wave equations with strong damping in Hilbert spaces*. J. Differential Equations **254** (2013), no. 8, 3352–3368.

[21] N. Ju, *The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations*. Commun. Math. Phys. **255** (2005), 161–181.

[22] G. Karch, *Selfsimilar profiles in large time asymptotics of solutions to damped wave equations*. Studia Math. **143** (2000), no. 2, 175-197.

[23] V. Komornik, *Differential and integral inequalities: Theory and applications*. Academic Press (1996), Volume I, 55-67.

[24] T. Kubo and S. Kawashima, *Decay property of regularity-loss type and nonlinear effects for some hyperbolic-elliptic system*. Kyushu J. Math. **63** (2009), no. 1, 139–159.

[25] X. Lu and M. Reissig, *Rates of decay for structural damped models with decreasing in time coefficients*. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. **2** (2009), no. 1-2, 21–55.

[26] C. R. da Luz, R. Ikehata and R. Coimbra Charão, *Asymptotic Behavior for Abstract Evolution Differential Equations of Second Order*. J. Differential Equations **259** (2015), 5017–5039.

[27] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[28] N. Polat and A. Ertas, *Existence and blow-up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation.* J. Math. Anal. Appl. **349** (2009), no. 1, 10–20.

[29] I. E. Segal, *Dispersion for non-linear relativistic equations II.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 1 (1968) 459–497.

[30] Y. Shibata, *On the rate of decay of solutions to linear viscoelastic equation.* Math. Models Methods Appl. Sci. **23** (2000), no. 3, 203–226.

[31] Y. Sugitani and S. Kawashima, *Decay estimates of solutions to a semi-linear dissipative plate equation.* J. Hyperbolic Differ. Equ. **7** (2010), no. 3, 471-501.

[32] T. Umeda, S. Kawashima and Y. Shizuta, *On the decay of solutions to the linearized equations of electro-magneto-fluid dynamics.* Japan J. Appl. Math. **1** (1984), no. 2, 435–457.

[33] J. L. Vázquez, *Nonlinear diffusion with fractional Laplacian operators*, in: Nonlinear Partial Differential Equations, 271–298, The Abel Symposium 2010, in: Abel Symp., vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

[34] S. Wang and H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with Stokes damped term.* Z. Angew. Math. Phys. **64** (2013), no. 3, 719–731.

[35] S. Wang and H. Xu, *On the asymptotic behavior of solution for the generalized IBq equation with hydrodynamical damped term.* J. Differential Equations **252** (2012), no. 7, 4243–4258.

[36] J. Wirth, *Wave equations with time-dependent dissipation. I. Non-effective dissipation.* J. Differential Equations **222** (2006), no. 2, 487–514.

[37] H. Xu and W. Wang, *Large time behavior of solutions for the nonlinear wave equation with viscosity in odd dimensions.* Nonlinear Anal. **75** (2012), no. 2, 543–549.