Natã Machado

Sistemas semirramificados de funções e álgebras de Cuntz–Krieger

Florianópolis

Fevereiro de 2018

Natã Machado

Sistemas semirramificados de funções e álgebras de Cuntz–Krieger

Dissertação submetida ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Orientador: Professor Doutor Gilles Gonçalves de Castro

Florianópolis

Fevereiro de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Machado, Natã
Sistemas semirramificados de funções e álgebras de Cuntz-Krieger / Natã Machado ; orientador, Gilles Gonçalves de Castro, 2018.
131 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de Cuntz-Krieger. 3. Sistemas semirramificados de funções. 4. Espaço de Hilbert das semi-densidades. 5. Representações Mônicas. I. Gonçalves de Castro, Gilles . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Natã Machado[1]

Sistemas semirramificados de funções e álgebras de Cuntz–Krieger

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre" e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Professor Doutor Ruy Coimbra Charão
Coordenador

Banca examinadora:

Professor Doutor Gilles Gonçalves de Castro
Orientador

[1] Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq.

Professor Doutor Artur Oscar Lopes
UFRGS

Professor Doutor Danilo Royer
UFSC

Professor Doutor Giuliano Boava
UFSC

Florianópolis

Fevereiro de 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço àquele que com uma simples palavra formou todo o universo.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, sou o que sou por causa do amor e cuidado de vocês.

Agradeço à Paula Savana pela dose diária de amor, carinho e compreensão.

Agradeço a todos os meus amigos pelo suporte emocional nestes dois anos. Em especial agradeço aos queridos Cesar Smaniotto Júnior e Luiz Fernando Bossa, com os quais toda conversa termina em futebol, política e muita risada.

O pouco que sei é devido a todos os mestres que me ajudaram ao longo desta caminhada. Por isso, agradeço a todos os professores que transmitiram a mim os seus conhecimentos durante este mestrado: Daniel Gonçalves, Danilo Royer, Fábio Botelho, Fernando Mortari, Ivan Pontual, Vladimir Pestov. Agradeço também ao professor Eliezer Batista pelas inúmeras conversas de corredor que servem como motivação àqueles que um dia almejam tornar-se matemáticos. Em especial, agradeço ao meu orientador Gilles Gonçalves de Castro por toda a atenção e paciência concedidas a mim na confecção deste trabalho e também no direcionamento da minha vida acadêmica. Agradeço aos professores que aceitaram participar da banca examinadora deste trabalho, Artur Lopes, Danilo Royer e por último, mas não menos importante, Giuliano Boava, a quem agradeço também pela amizade e prestatividade.

Para finalizar, agradeço a todos os funcionários administrativos do Departamento de Matemática e também ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

Apresentamos representações de álgebras de Cuntz–Krieger associadas a sistemas semirramificados de funções e também introduzimos o operador de Perron–Frobenius associado a um tal sistema. Além disso, mostramos que quando a álgebra de Cuntz–Krieger é representada no espaço de Hilbert das semi-densidades, o operador de Perron–Frobenius pertence à imagem da representação. Por fim, fornecemos uma caracterização de quando uma representação associada a um sistema mônico é mônica e mostramos que a representação da álgebra de Cuntz–Krieger no espaço das semi-densidades é universal no sentido de conter todas as representações associadas a sistemas mônicos não negativos.

Palavras-chave: álgebras de Cuntz–Krieger; sistemas semirramificados de funções; espaço das semi-densidades; representações mônicas.

ABSTRACT

We present Cuntz–Krieger algebras representations associated with semibranching function systems and we show that if such a representation is on the half densities Hilbert space, then the Perron–Frobenius operator associated with semibranching function system is in the representation range. Finally, we show a necessary and sufficient condition for a representation associated with a monic system to be monic and also that the half densities space representation has an universal property.

Key-words: Cuntz–Krieger algebras; semibranching function systems; half densities space; monic representations.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As álgebras de Cuntz–Krieger foram originalmente apresentadas no artigo [5] e surgiram da tentativa de generalizar as álgebras de Cuntz que, por sua vez, vieram à tona como o primeiro exemplo de uma C^*-álgebra concreta, simples e separável de dimensão infinita. A generalização deu-se no sentido de introduzir um parâmetro matricial (uma matriz quadrada M com entradas 0 e 1) na construção de tais álgebras, sendo que se na construção M for escolhida com todas as entradas iguais a 1, então recupera-se a álgebra de Cuntz.

Sistemas semirramificados de funções podem ser entendidos com uma generalização da dinâmica gerada pelo operador shift e suas inversas parciais nos espaços shift. Esta dinâmica, por sua vez, é o plano de fundo de um conceito muito importante na área de sistemas dinâmicos que é o conceito de autossimilaridade, presente nos fractais.

Neste trabalho, construímos representações de álgebras de Cuntz–Krieger relacionadas a um sistema semirramificado de funções de tal maneira que possamos extrair informações sobre a representação olhando apenas para o sistema semirramificado. Por exemplo, podemos concluir que as projeções $T_iT_i^*$ e $T_i^*T_i$ são não nulas se os conjuntos D_i e R_i têm medida positiva (página 61).

Seja Y um espaço topológico compacto e Hausdorff. Sabemos que se $\phi : Y \to Y$ é um homeomorfismo, então a aplicação $\widetilde{\phi} : C(Y) \to C(Y)$, dada por $\widetilde{\phi}(f) = f \circ \phi$ é um $*-$isomorfismo unital. Migrando da estrutura topológica para a estrutura mensurável, considere um espaço de medida boreliano $(X, \mathcal{B}, \nu)$ e um automorfismo boreliano $\phi : X \to X$, isto é, ϕ é uma bijeção bimensurável tal que[2] $\nu \sim \nu \circ \phi^{-1}$. Denote por $\mathrm{d}_\nu(\nu \circ \phi^{-1})$ a derivada de Radon–Nikodým de $\nu \circ \phi^{-1}$ com relação a ν. Gostaríamos que $T_\phi(\psi) := \psi \circ \phi$ fosse um operador linear e limitado em $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$, no entanto, temos que

$$\int |\psi \circ \phi|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = \int |\psi|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \phi^{-1}) = \int |\psi|^2 \,\mathrm{d}_\nu(\nu \circ \phi^{-1}) \,\mathrm{d}\,\nu$$

e não é possível garantir que $|\psi|^2 \,\mathrm{d}_\nu(\nu \circ \phi^{-1})$ seja $\nu-$integrável. Porém, introduzindo um *fator de correção* e fazendo $T_\phi(\psi) := \frac{\psi}{\mathrm{d}_\nu(\nu\circ\phi^{-1})} \circ \phi$, temos que T_ϕ é um operador linear, limitado e de norma menor ou igual a 1. Note que introduzimos o fator de correção porque não conseguimos garantir que $|\psi \circ \phi|^2$ é $\nu-$integrável e isto nos leva a pensar que o espaço $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ é "pequeno" para abrigar as funções obtidas através da composição com ϕ. Assim, com base nas construções feitas em [2, p.419] e [19, p.84], apresentamos no Capítulo 1 duas maneiras de associar um espaço de Hilbert a uma classe de medidas sobre um espaço mensurável (nas referências citadas o espaço tomado é sempre boreliano). Um desses espaços é o chamado espaço de Hilbert das semi-densidades $\mathbb{W}$, no qual é possível representar álgebras de Cuntz–Krieger a partir de um sistema semirramificado de funções. Estas representações tomam papel principal quando falamos do operador de Perron–Frobenius e representações associadas a sistemas mônicos (Capítulos 2 e 3). Quando a álgebra de Cuntz–Krieger é representada através dos operadores T_i (ver página 60) é necessário o fator de correção na definição do operador, já quando a representação se dá no espaço das semi-densidades, através dos operadores W_i

2 ver Definição A.26 na página 119.

(ver página 76), este fator já não se faz mais necessário. Toda esta problemática que acabamos de mencionar é um sub-problema de um problema maior que é o de encontrar representações unitárias do grupo de automorfismos de uma classe de medidas.

No Capítulo 2, fixamos uma matriz $\mathbb{A}$ e revisamos alguns detalhes da construção dos espaços shift e da álgebra de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. Apresentamos também os sistemas semirramificados de funções e uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada a um tal sistema. Em seguida, associamos o operador de Perron–Frobenius (estudado em teoria ergódica) ao nosso sistema semirramificado e relacionamos o operador à nossa representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. A teoria que desenvolvemos neste Capítulo é baseada nas duas primeiras seções do artigo [17], no qual são empregadas as técnicas que desenvolvemos para construir sistemas ortonormais de wavelets.

No Capítulo final, apresentamos duas outras novas classes de representações de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$: representações mônicas e representações associadas a sistemas mônicos, sendo que esta última generaliza a representação que apresentamos no Capítulo 2. O objetivo principal do Capítulo é caracterizar quando uma representação associada a um sistema mônico é mônica. Este Capítulo é baseado nos Capítulos 4 de [1] e 5 de [4], que além do assunto aqui tratado relaciona sistemas semirramificados de funções a diagramas de Bratteli.

Pressupomos que o leitor desta dissertação esteja familiarizado com conceitos de teoria da medida, análise funcional e álgebras de operadores. Com o objetivo de facilitar a leitura, o apêndice 1 foi escrito para que o leitor possa estar a par do enunciado dos principais teoremas que usamos ao longo do texto.

Todos os espaços de funções $(C(X), L^2(X, \mathcal{B}, \mu), \text{etc.})$ são considerados com contradomínio em $\mathbb{C}$ e, além disso, neste trabalho consideramos os produtos internos como formas conjugado-lineares na primeira entrada e lineares na segunda entrada. Para indicar a função característica de um conjunto A, usamos o símbolo χ_A e no caso em que A é o conjunto universo, escrevemos $\mathbb{1}_A$. Além disso, o símbolo $\mathbb{I}_W$ é usado para expressar o operador identidade de um dado espaço vetorial W. Os índices serão omitidos sempre que estiver claro no contexto qual o conjunto que estamos trabalhando. A menos de menção em contrário, todas as medidas neste trabalho são positivas e finitas e, além disso, quando escrevermos que uma propriedade vale $\nu-$qtp, queremos dizer que o conjunto dos pontos em que tal propriedade não é válida está contido num conjunto mensurável cuja medida ν é zero. Algumas vezes, omitiremos o espaço mensurável na notação de $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, isto é, escreveremos apenas $L^2(\mu)$.

1 ESPAÇOS DE HILBERT ASSOCIADOS À CLASSES DE MEDIDA

Neste Capítulo, apresentamos o conceito de classe de medidas e também o de espaço de Hilbert L^2 associado a uma tal classe. Em suma, este espaço codifica os espaços L^2 de todas as medidas que estão na classe. Além disso, quando a classe é o conjunto de todas as medida finitas sobre um espaço mensurável dado, existe uma segunda maneira de construir um espaço de Hilbert associado a esta classe. Encerramos o Capítulo provando um Teorema que relaciona as duas construções.

1.1 O espaço L^2 de uma classe de medidas

Definição 1.1. Sejam $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ o conjunto de todas as ***medidas finitas*** em $(X, \mathcal{B})$ e $\mathcal{C}$ um subconjunto de $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. A tripla $(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ é dita uma ***classe de medidas*** se $\mathcal{C}$ satisfaz a seguinte propriedade[1]: se $\mu \in \mathcal{C}$ e $\nu \sim \mu$, então $\nu \in \mathcal{C}$.

Observação 1.2. Em outras palavras, uma classe de medidas é uma união de classes de equivalência. Pode ser que $\mathcal{C} = [\mu]$, em que μ é uma medida qualquer em $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, ou pode acontecer $\mathcal{C} = \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$.

[1] ver Definição A.26 na página 119.

Agora, vamos apresentar um dos conceitos mais importantes deste Capítulo, que é o conceito de *média geométrica* entre duas medidas. Fixamos uma classe de medidas $(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ e reiteramos que todas as medidas tratadas neste Capítulo são sobre $(X, \mathcal{B})$ e finitas. Denotaremos por $B_\infty(X)$ a C^*-álgebra comutativa das funções $\mathcal{B}-$mensuráveis e limitadas de X a valores em $\mathbb{C}$.

Observação 1.3. A notação padrão para $B_\infty(X)$ é $B_\infty(X, \mathcal{B})$ pois estamos tratando de funções $\mathcal{B}-$mensuráveis. Porém, como fixamos um espaço mensurável para todo o Capítulo 1, vamos omitir a $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ na notação $B_\infty(X, \mathcal{B})$.

Definição 1.4. Sejam μ e ν medidas. Definimos $C^{\mu,\nu}$ como o conjunto de todas as medidas σ que satisfazem a seguinte propriedade:

$$\left|\int f\bar{g}\ \mathrm{d}\,\sigma\right|^2 \leq \int |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mu \int |g|^2 \,\mathrm{d}\,\nu,\ \forall\ f, g \in B_\infty(X).$$

Proposição 1.5. [2] *Sejam μ, ν e ω medidas tais que $\mu \ll \omega$ e $\nu \ll \omega$. Então a medida ω', dada por*

$$\omega'(A) = \int_A \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu\ \ \mathrm{d}_\omega\,\nu}\ \ \mathrm{d}\,\omega$$

pertence a $C^{\mu,\nu}$ e, além disso, $\sigma \leq \omega'$, $\forall\ \sigma \in C^{\mu,\nu}$.

Demonstração. Sejam f, g em $B_\infty(X)$, $\sigma \in C^{\mu,\nu}$ e $\varepsilon > 0$. Observemos primeiramente que $\omega' \in C^{\mu,\nu}$. Com efeito, note que $\mathrm{d}_\omega\,\omega' = \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu\ \ \mathrm{d}_\omega\,\nu}$ e que

[2] ver apêndice A, Teorema A.28 e Definição A.29 na página 120.

$$\begin{aligned}
\left|\int f\bar{g}\ \mathrm{d}\,\omega'\right|^2 &\overset{A.32}{=} \left|\int f\bar{g}\ \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu\ \ \mathrm{d}_\omega\,\nu}\ \ \mathrm{d}\,\omega\right|^2 \\
&\leq \left(\int |f|\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu}\ \ |\bar{g}|\ \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu}\ \ \mathrm{d}\,\omega\right)^2 \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \int |f|^2\,\mathrm{d}_\omega\,\mu\ \ \mathrm{d}\,\omega \int |g|^2\,\mathrm{d}_\omega\,\nu\ \ \mathrm{d}\,\omega \\
&= \int |f|^2\,\mathrm{d}\,\mu \int |g|^2\,\mathrm{d}\,\nu.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\int f\bar{g}\ \mathrm{d}\,\sigma\right|^2 &\leq \int |f|^2\,\mathrm{d}\,\mu \int |g|^2\,\mathrm{d}\,\nu \\
&= \int |f|^2\,\mathrm{d}_\omega\,\mu\ \ \mathrm{d}\,\omega \int |g|^2\,\mathrm{d}_\omega\,\nu\ \ \mathrm{d}\,\omega \\
&\leq \int |f|^2\,(\mathrm{d}_\omega\,\mu+\varepsilon)\,\mathrm{d}\,\omega \int |g|^2\,(\mathrm{d}_\omega\,\nu+\varepsilon)\,\mathrm{d}\,\omega \\
&= \int \left|f\,(\mathrm{d}_\omega\,\mu+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}\,\omega \int \left|g\,(\mathrm{d}_\omega\,\nu+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}\,\omega.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Defina $f_1 = \frac{f}{\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu+\varepsilon}}$ e $g_1 = \frac{f}{\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu+\varepsilon}}$. Queremos verificar que f_1 e g_1 também se aplicam à estimativa (1.1), para isso precisamos garantir que tais funções são limitadas. Observe que para todo $x \in X$,

$$|f_1(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu(x)+\varepsilon}} \leq \frac{|f(x)|}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{||f||_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}$$

e também

$$|g_1(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu(x)+\varepsilon}} \leq \frac{|f(x)|}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{||f||_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Logo, f_1 e g_1 pertencem à $B_\infty(X)$ e, portanto, temos por (1.1) que

$$\left|\int f_1\bar{g_1}\ \mathrm{d}\,\sigma\right|^2 \leq \int \left|f_1\,(\mathrm{d}_\omega\,\mu+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}\,\omega \int \left|g_1\,(\mathrm{d}_\omega\,\nu+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\right|^2\mathrm{d}\,\omega.$$

Explicitando, temos que

$$\int \frac{|f|^2}{\sqrt{(\mathrm{d}_\omega \mu + \varepsilon)(\mathrm{d}_\omega \nu + \varepsilon)}} \, \mathrm{d}\,\sigma \leq \int |f|^2 \, \mathrm{d}\,\omega, \ \forall\ f \in B_\infty(X). \tag{1.2}$$

Pela Proposição A.23, existe uma sequência crescente $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{N}^+(X, \mathcal{B})$ de funções simples, e portanto limitadas, convergindo para $\sqrt[4]{(\mathrm{d}_\omega \mu + \varepsilon)(\mathrm{d}_\omega \nu + \varepsilon)}$. Assim, pelo Teorema da convergência monótona A.24, temos que para todo $A \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \int_A \mathrm{d}\,\sigma \overset{A.24}{=} \lim_{n\to\infty} \int_A \frac{|\varphi_n|^2}{\sqrt{(\mathrm{d}_\omega \mu + \varepsilon)(\mathrm{d}_\omega \nu + \varepsilon)}} \, \mathrm{d}\,\sigma \\ &\overset{(1.2)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \int_A |\varphi_n|^2 \, \mathrm{d}\,\omega \overset{A.24}{=} \int_A \sqrt{(\mathrm{d}_\omega \mu + \varepsilon)(\mathrm{d}_\omega \nu + \varepsilon)} \, \mathrm{d}\,\omega.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{m}$, para $m \in \mathbb{N}^*$, podemos concluir que para todo $A \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned}\sigma(A) &\leq \lim_{m\to\infty} \int_A \sqrt{\left(\mathrm{d}_\omega \mu + \frac{1}{m}\right)\left(\mathrm{d}_\omega \nu + \frac{1}{m}\right)} \, \mathrm{d}\,\omega \\ &\overset{(*)}{=} \int_A \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu \ \ \mathrm{d}_\omega \nu} \, \mathrm{d}\,\omega = \omega'(A).\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$ usamos o Teorema da convergência dominada de Lebesgue A.25 para fazer a passagem do limite sob o sinal de integração. Uma função que domina a sequência de funções $\left\{\sqrt{(\mathrm{d}_\omega \mu + \frac{1}{m})(\mathrm{d}_\omega \nu + \frac{1}{m})}\right\}_{m\geq 1}$ é $\varphi = \sqrt{(\mathrm{d}_\omega \mu + 1)(\mathrm{d}_\omega \nu + 1)}$. A integrabilidade de φ é consequência direta da desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}\int \varphi \ \mathrm{d}\,\omega &\leq \left(\int (\mathrm{d}_\omega \mu + 1) \ \mathrm{d}\,\omega\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (\mathrm{d}_\omega \nu + 1) \ \mathrm{d}\,\omega\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(\mu(X) + \omega(X))}\sqrt{(\nu(X) + \omega(X))} < \infty.\end{aligned}$$

□

Se ς é uma outra medida que satisfaz $\mu \ll \varsigma$ e $\nu \ll \varsigma$, a Proposição 1.5 garante que as medidas ς' e ω' são iguais, sendo $\varsigma'(A) = \displaystyle\int_A \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \mu \ \mathrm{d}_\varsigma \nu}\ \mathrm{d}\,\varsigma,\ \forall\ A \in \mathcal{B}$.

Definição 1.6. Sejam μ e ν medidas em $(X, \mathcal{B})$. A ***média geométrica*** entre μ e ν é a medida $\sqrt{\mu\nu}$, dada por:

$$\sqrt{\mu\nu}(A) = \int_A \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu \ \mathrm{d}_\omega \nu}\ \mathrm{d}\,\omega,\ A \in \mathcal{B},$$

em que ω é qualquer medida tal que $\mu \ll \omega$ e $\nu \ll \omega$.

Observação 1.7. Nas condições da Definição de média geométrica, note que é sempre possível encontrar uma tal ω, por exemplo, $\omega = \mu + \nu$. Além disso, note que $\sqrt{\mu\mu} = \mu$.

Iniciemos agora nossa tentativa de associar à nossa classe um espaço de Hilbert que contenha os espaços L^2 das medidas que estão na classe. Seja $V = B_\infty(X) \times \mathcal{C}$. Por um motivo que ficará claro ao longo da nossa construção, escreveremos os elementos de V como $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, em vez do par ordenado (f, μ). Seja $\mathbb{V}$ o $\mathbb{C}-$espaço vetorial livre gerado por V. Os elementos de $\mathbb{V}$ são as somas formais finitas da forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, com $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $u_i \in V$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Observação 1.8. De maneira formal, o $\mathbb{K}-$*espaço vetorial livre gerado por um conjunto S* é a soma direta de $\#S$ cópias do corpo $\mathbb{K}$. Assim, rigorosamente temos que

$$\mathbb{V} = \bigoplus_V \mathbb{C} := \{\xi : V \to \mathbb{C} |\ \#\operatorname{supp}(\xi) < \infty\}.$$

Fixe ξ pertencente a $\mathbb{V}$ e considere o seu suporte $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Definindo $\gamma_j := \xi(v_j)$, obtemos que $\xi = \sum_{j=1}^m \gamma_j \chi_{\{v_j\}}$. Além disso, abusando da notação e denotando $\chi_{\{v_j\}}$ por v_j, obtemos que ξ se escreve como a soma $\sum_{j=i}^{m} \gamma_j v_j$, sendo este motivo dos elementos de $\mathbb{V}$ serem considerados como somas formais.

Considere a aplicação $\Psi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$, dada por

$$\Psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}, \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j}\ \Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i} \beta_j \int \overline{f_i} g_j \ \mathrm{d} \sqrt{\mu_i \nu_j}.$$

Pela Proposição 1.5, temos que Ψ está bem definida. Agora, vejamos algumas propriedades de Ψ satisfaz.

Afirmação 1.9. *Para quaisquer u, v e $w \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ vale que:*

1. $\Psi(u, v + \alpha w) = \Psi(u, v) + \alpha \Psi(u, w)$.
2. $\Psi(u, v) = \overline{\Psi(v, u)}$.
3. $\Psi(u, u) \geq 0$.
4. $|\Psi(u, v)| \leq \sqrt{\Psi(u, u)} \sqrt{\Psi(v, v)}$.

Demonstração. Nos ateremos apenas aos itens 3 e 4, visto que os itens 1 e 2 são triviais. Sejam $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}$ e $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j}$ em $\mathbb{V}$. Defina $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{m} \nu_i$ e observe que as medidas μ_i e ν_j são absolutamente contínuas com relação a ω. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi(u, u) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \int \overline{f_i} f_j \ \mathrm{d} \sqrt{\mu_i \mu_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \int \overline{f_i} \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\ f_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_j}\ \ \mathrm{d}\,\omega \\
&= \int \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_j \overline{f_i} \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\ f_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_j}\ \ \mathrm{d}\,\omega
\end{aligned}$$

$$= \int \overline{\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\,\Big)}\ \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_j}\,\Big)\,\mathrm{d}\,\omega \geq 0. \tag{1.3}$$

Mostremos agora o item 4. Observe que

$$\begin{aligned}
&|\Psi(u,v)| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i}\beta_j \int \overline{f_i} g_j \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu_i\nu_j} \right| \\
&= \left| \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i}\beta_j \overline{f_i}\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\ g_j\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j}\ \mathrm{d}\,\omega \right| \\
&= \left| \int \overline{\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\,\Big)}\ \Big(\sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j}\,\Big)\ \mathrm{d}\,\omega \right| \\
&\leq \int \left| \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}} \right| \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j} \right| \mathrm{d}\,\omega \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sqrt{\int \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i} \right|^2 \mathrm{d}\,\omega}\ \sqrt{\int \left| \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j} \right|^2 \mathrm{d}\,\omega} \\
&= \sqrt{\int \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j \overline{f_i} f_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_j}\ \mathrm{d}\,\omega} \qquad\qquad \text{(multiplicação)} \\
&\quad \sqrt{\int \sum_{i,j=1}^{m} \overline{\beta_i}\beta_j \overline{g_i} g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_i}\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j}\ \mathrm{d}\,\omega} \\
&= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j \int \overline{f_i} f_j \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu_i\mu_j}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} \overline{\beta_i}\beta_j \int \overline{g_i} g_j \,\mathrm{d}\,\sqrt{\nu_i\nu_j}} \\
&= \sqrt{\Psi(u,u)}\sqrt{\Psi(v,v)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Observação 1.10. Os itens $1, 2$ e 3 nos dizem que Ψ é uma forma sesquilinear semi-definida positiva.

Infelizmente, não podemos garantir que $\Psi(u, u) = 0$ se, e só se, $u = 0$. Com efeito, se $\mu \in \mathcal{C}$ e $A \in \mathcal{B}$ é tal que $\mu(A) = 0$, então $\chi_A \sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \neq 0$ e $\Psi\left(\chi_A \sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, \chi_A \sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right) = \int_A \mathrm{d}\,\mu = 0$. Assim, para que obtenhamos um espaço munido de um produto interno induzido por Ψ, o caminho natural é fazer o quociente de $\mathbb{V}$ por $N := \{v \in \mathbb{V} \mid \Psi(v, v) = 0\}$. Para isso, precisamos garantir que N é um subespaço vetorial $\mathbb{V}$. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $w, v \in N$. Note que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \Psi(v + \alpha w, v + \alpha w) \\
&= \Psi(v, v) + |\alpha|^2 \Psi(w, w) + \bar{\alpha}\Psi(w, v) + \alpha\Psi(v, w) \\
&= 2\,\mathrm{Re}(\alpha\Psi(v, w)) \leq 2\,|\mathrm{Re}(\alpha\Psi(v, w))| \\
&\leq 2\,|\alpha\Psi(v, w)| \leq 2|\alpha|\sqrt{\Psi(w, w)}\sqrt{\Psi(v, v)} = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, N é subespaço de $\mathbb{V}$ e assim podemos definir o *espaço vetorial quociente* $\mathbb{V}_N$, que é o quociente de $\mathbb{V}$ por N.

Defina $\langle ., . \rangle : \mathbb{V}_N \times \mathbb{V}_N \to \mathbb{C}$, dada por $\langle [u], [v] \rangle = \Psi(u, v)$. Verifiquemos que a aplicação $\langle .\ , . \rangle$ independe da escolha dos representantes das classes de equivalência. Com efeito, sejam u, u_1, v e v_1 elementos de $\mathbb{V}$ tais que $[u] = [u_1]$ e $[v] = [v_1]$. Dado $w \in \mathbb{V}$, temos que $|\Psi(u, w) - \Psi(u_1, w)| = |\Psi(u - u_1, w)| \leq \sqrt{\Psi(u - u_1, u - u_1)}\sqrt{\Psi(w, w)} = 0$. Logo, para todo $w \in \mathbb{V}$, $\Psi(u, w) = \Psi(u_1, w)$ e analogamente, para todo $w \in \mathbb{V}$, $\Psi(w, v) = \Psi(w, v_1)$. Concluíndo, temos que $\Psi(u, v) = \Psi(u_1, v) = \Psi(u_1, v_1)$ e, portanto, $(\mathbb{V}_N, \langle .\ , . \rangle)$ é um espaço vetorial com produto interno.

Observação 1.11. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in B_\infty(X)$ e $\mu \in \mathcal{C}$. A priori, os elementos $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$ e $(f + g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$ de $\mathbb{V}$ não tem relação alguma entre si, bem como os elementos $(\alpha f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$ e $\alpha(f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu})$. Na construção de $\mathbb{V}$, os elementos de V desempenham apenas um papel simbólico. No entanto, vamos verificar que quando passamos ao quociente $\mathbb{V}_N$ tais igualdades são válidas, ou seja, os elementos deixam ser apenas símbolos e passam a satisfazer certas relações. Para tanto, tome $w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \in \mathbb{V}$ e observe que

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left[f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + \alpha g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right] - \left[(f+\alpha g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right], [w] \right\rangle \\
&= \left\langle \left[f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + \alpha g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} - (f+\alpha g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right], [w] \right\rangle \\
&= \Psi\Big(f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + \alpha g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} - (f+\alpha g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu},\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{f} h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} + \overline{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{g} h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} \\
&- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{(f+\alpha g)}\, h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \left(\overline{f} + \overline{\alpha}\ \overline{g} \right) h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{(f+\alpha g)}\, h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Agora, se $\nu \in \mathcal{C}$ é tal que $\nu \ll \mu$ e $\mathrm{d}_\mu\,\nu \in B_\infty(X)$, temos também que

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \left[\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right] - \left[f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \right], [w] \right\rangle \\
&= \left\langle \left[\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\mu} - f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \right], [w] \right\rangle \\
&= \Psi\Big(\big(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu} \big)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} - f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i h_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu}}\, h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu_i} - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{f} h_i \,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \int \overline{f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu}}\, h_i \sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\mu\, \mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\mu_i}\, \mathrm{d}(\mu+\mu_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\sqrt{\mathrm{d}_{\mu}\,\nu\,\mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\mu\,\mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\mu_i}\,\mathrm{d}(\mu+\mu_i)\\
&-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\nu\,\mathrm{d}_{\mu+\mu_i}\,\mu_i}\,\mathrm{d}(\mu+\mu_i)\\
&-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i}-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int \overline{f}h_i\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\mu_i}=0.
\end{aligned}
$$

Como w foi qualquer, segue que

$$\left[f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+\alpha g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right]-\left[(f+\alpha g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right]=0$$

e também

$$\left[\left(f\sqrt{\mathrm{d}_{\mu}\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right]-\left[f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right]=0.$$

Não podemos assegurar que $(\mathbb{V}_N,\langle .,.\rangle)$ é um espaço de Hilbert, mas é bem sabido que para obter um espaço de Hilbert a partir de espaço com produto interno basta fazer o completamento.

Definição 1.12. O completamento de $(\mathbb{V}_N,\langle .\,,.\rangle)$, denotado por $L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$, será chamado de ***espaço de Hilbert associado à classe de medida*** $(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$.

Exemplo 1.13. Sejam M^n uma variedade diferenciável e $\widetilde{\mathcal{B}}$ a sua $\sigma-$álgebra de Borel. Denote por $\mathcal{M}(M,\widetilde{\mathcal{B}})$ o conjunto de todas as medidas finitas em $(M,\widetilde{\mathcal{B}})$ e λ^n a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, munido com a $\sigma-$álgebra de Borel. Defina

$$\widetilde{\mathcal{C}}=\{\mu\in\mathcal{M}(M,\widetilde{\mathcal{B}})\mid \mu\circ\varphi^{-1}\sim\lambda^n,\ \forall\ (U,\varphi)\text{ carta local de }M\}.$$

Note que $(M, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{C})$ é uma classe de medidas e, portanto, procedendo como anteriormente, é possível associar o espaço de Hilbert $L^2(M, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathcal{C}})$ a M.

É possível mostrar que a associação $M \mapsto L^2(M, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathcal{C}})$ dá origem a um funtor da categoria das variedades diferenciáveis na categoria dos espaços de Hilbert (ver detalhes em [2, p.422]).

Seja $\mu \in \mathcal{C}$. Como μ é finita, $B_\infty(X) \subseteq L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ e além disso, pelo Teorema A.37, $\overline{B_\infty(X)}^{\|.\|_{L^2(\mu)}} = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, pois as funções simples são limitadas. Agora, defina a função $\mathcal{L} : (B_\infty(X), \| \,.\|_{L^2(\mu)}) \to L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, dada por

$$\mathcal{L}(f) = I([f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}]).$$

Em que I é a isometria linear canônica de $\mathbb{V}_N$ em $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Pela Observação 1.11, $\mathcal{L}$ é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(f)\|^2 &= \left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right\rangle \\ &= \int |f|^2 \,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu} \\ &= \int |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mu = \|f\|^2_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{L}$ é uma isometria e pelo Teorema A.7 se estende a uma isometria entre $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $\overline{\mathcal{L}(B_\infty(X))}$. Assim $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um subespaço fechado de $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$.

Teorema 1.14. *Existe único* $\Pi : B_\infty(X) \to B(L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C}))$, *$*-$homomorfismo, tal que* $\Pi(f)(g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) = (fg)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, *para toda função f e g pertencente $B_\infty(X)$ e para toda medida μ pertencente à $\mathcal{C}$.*[3]

[3] Neste enunciado há um abuso de notação que é devidamente explicado na demonstração.

Demonstração. Fixe $h \in B_\infty(X)$. Defina $\theta_h : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, dado por

$$\theta_h\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\ \Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (h f_i) \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}.$$

Claramente θ_h é linear. Além disso, se $v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j}$, note que

$$\Psi(\theta_h(v), \theta_h(v)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \overline{\beta_i} \beta_j \int |h|^2 \overline{g_i} g_j \,\mathrm{d}\, \sqrt{\nu_i \nu_j} \leq ||h||_\infty^2\, \Psi(v, v). \tag{1.4}$$

Queremos que θ_h induza um operador linear em $\mathbb{V}_N$, para tanto, defina $\Theta_h : \mathbb{V}_N \to \mathbb{V}_N$, dado por

$$\Theta_h([v]) = [\theta_h(v)].$$

Por (1.4) e pela linearidade de θ_h, temos que se $v_1 - v_2 \in N$, então $\theta_h(v_1) - \theta_h(v_2) \in N$, logo Θ_h está bem definido. Agora, note que para qualquer $v \in \mathbb{V}$ vale

$$\begin{aligned} ||\Theta_h([v])||^2 = ||[\theta_h(v)]||^2 &= \Psi(\theta_h(v), \theta_h(v)) \\ &\leq \|h\|_\infty^2 \Psi(v, v) = \|h\|_\infty^2 \left\langle [v], [v] \right\rangle . \end{aligned}$$

Portanto, Θ_h é limitada e $||\Theta_h|| \leq ||h||_\infty$. Pelo Teorema A.7, temos que existe um único operador linear e limitado $\pi_h : L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \to L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ que faz comutar o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_N \arrow[r, "\Theta_h"] \arrow[d, "I"'] & \mathbb{V}_N \arrow[d, "I"] \\ L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \arrow[r, "\pi_h"] & L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C}), \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

em que I é a isometria canônica de $\mathbb{V}_N$ em $L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$. Agora, defina $\Pi : B_\infty(X) \to B(L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C}))$, dado por $\Pi(f) = \pi_f$, e note que

$$\begin{aligned}\Pi(f)(I([g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}])) &= \pi_f(I([g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}]))\\ &= I(\Theta_f([g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}]))\\ &= I([fg\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}]).\end{aligned}$$

Abusando da notação, isto é, omitindo I e a notação de classes de equivalência, temos que $\Pi(f)(g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) = (fg)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, como no enunciado. Verifiquemos que Π é um $*-$homomorfismo unital.

Para ver que Π é unital, note que $\theta_{\mathbb{1}} = \mathbb{I}_{\mathbb{V}}$ e portanto $\Theta_{\mathbb{1}} = \mathbb{I}_{\mathbb{V}_N}$. Assim, como $\mathbb{I}_{L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})}$ faz comutar o diagrama (1.5), temos pela unicidade da extensão que $\Pi(\mathbb{1}) = \pi_{\mathbb{1}} = \mathbb{I}_{L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})}$.

Sejam $f, g \in B_\infty(X)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Considere também $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \in \mathbb{V}$ e $v = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j} \in \mathbb{V}$. Note que

$$\begin{aligned}\Theta_{f+\alpha g}([u]) &= \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i\{(f+\alpha g)f_i\}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\left[(f+\alpha g)f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]\\ &\overset{1.11}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\left(\left[(ff_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right] + \alpha\left[(gf_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]\right)\\ &= \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i(ff_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right] + \alpha\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i(gf_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]\\ &= \Theta_f([u]) + \alpha\Theta_g([u]) = (\Theta_f + \alpha\Theta_g)([u]).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}I\circ(\Theta_{f+\alpha g}) &= I\circ(\Theta_f + \alpha\Theta_g) = I\circ\Theta_f + \alpha\,(I\circ\Theta_g)\\ &= \pi_f\circ I + \alpha\pi_g\circ I = (\pi_f + \alpha\pi_g)\circ I.\end{aligned}$$

Assim, se $h = f + \alpha g$, então $\pi_f + \alpha\pi_g$ comuta o diagrama (1.5). Logo, $\Pi(f + \alpha g) = \pi_{f+\alpha g} = \pi_f + \alpha\pi_g = \Pi(f) + \alpha\Pi(g)$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\Theta_{fg}([u]) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\{(fg)f_i\}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\{f(gf_i)\}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right] \\
&= \Theta_f(\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(gf_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]) \\
&= \Theta_f(\ \Theta_g(\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(f_i)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right])) \\
&= \Theta_f \circ \Theta_g([u]).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I \circ (\Theta_{fg}) = I \circ (\Theta_f \circ \Theta_g) &= (I \circ \Theta_f) \circ \Theta_g = (\pi_f \circ I) \circ \Theta_g \\
&= \pi_f \circ (I \circ \Theta_g) = \pi_f \circ (\pi_g \circ I) = (\pi_f \circ \pi_g) \circ I.
\end{aligned}$$

Assim, se $h = fg$, então $\pi_f \circ \pi_g$ comuta o diagrama (1.5). Portanto, $\Pi(fg) = \pi_{fg} = \pi_f \circ \pi_g = \Pi(f) \circ \Pi(g)$.

Com o que mostramos até agora, obtemos que Π é um homomorfismo de álgebras. Por fim, vejamos que Π é um $*-$homomorfismo. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\langle\Theta_f([u]), [v]\rangle = \langle[\theta_f(u)]\,, [v]\rangle &= \Psi(\theta_f(u), v) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i}\beta_j \int \overline{f f_i} g_j \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu_i\nu_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i}\beta_j \int \overline{f_i}\,(\overline{f} g_j)\,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu_i\nu_j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Psi(u, \theta_{\overline{f}}(v)) = \Big\langle [u], [\theta_{\overline{f}}(v)] \Big\rangle \\
&= \Big\langle [u], \Theta_{\overline{f}}([v]) \Big\rangle .
\end{aligned}
$$

Agora, sejam w e z pertencentes a $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$. Então, existem sequências $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{V}_N$ tais que $w = \lim\limits_{n\to\infty} I(w_n)$, $z = \lim\limits_{n\to\infty} I(z_n)$ e, além disso, por definição temos que

$$
\langle w, z\rangle_{L^2} := \lim_{n\to\infty} \langle w_n, z_n\rangle .
$$

Em particular, se $w = I(w')$ então $\langle w, z\rangle_{L^2} := \lim\limits_{n\to\infty} \langle w', z_n\rangle .$ Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
\langle \pi_f(w), z\rangle_{L^2} &= \lim_{m\to\infty} \langle \pi_f(I(w_m)), z\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \langle I(\Theta_f(w_m)), z\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \langle \Theta_f(w_m), z_n\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big\langle w_m, \Theta_{\overline{f}}(z_n) \Big\rangle \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big\langle I(w_m), I(\Theta_{\overline{f}}(z_n)) \Big\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Big\langle I(w_m), \pi_{\overline{f}}(I(z_n)) \Big\rangle_{L^2} \\
&= \lim_{m\to\infty} \Big\langle I(w_m), \pi_{\overline{f}}(z) \Big\rangle_{L^2} = \Big\langle w, \pi_{\overline{f}}(z) \Big\rangle_{L^2} .
\end{aligned}
$$

Segue que $\Pi(f)^* = \pi_f^* = \pi_{\overline{f}} = \Pi\left(\overline{f}\right)$.

Será que Π é injetora? Note que se $\Pi(f) = 0$, então $\Theta_f = 0$ e assim $\theta_f(v) \in N$, para todo $v \in \mathbb{V}$. Em particular, $\theta_f(\mathbb{1}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) \in N$, para toda $\mu \in \mathcal{C}$. Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \Psi\left(\theta_f(\mathbb{1}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}), \theta_f(\mathbb{1}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu})\right) \\
&= \Psi\left(f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right) \\
&= \int |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mu.
\end{aligned}
$$

Portanto, $f = 0$, $\mu-$qtp, para toda $\mu \in \mathcal{C}$. Porém, não podemos assegurar que $f = 0$.

Seja $\Pi_1 : B_\infty(X) \to B(L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C}))$ um $*-$homomorfismo que satisfaz $\Pi_1(f)(g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) = (fg)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, $\forall f, g \in B_\infty(X)$, $\forall\ \mu \in \mathcal{C}$. Seja $f \in B_\infty(X)$ e $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \in \mathbb{V}$. Note que

$$\begin{aligned}
\Pi_1(f)(I([u])) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi_1(f)(I([f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\ ])) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I([f f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\ ]) \\
&= I(\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]) \\
&= I(\Theta_f[u]).
\end{aligned}$$

Assim, com f no lugar de h, obtemos que $\Pi_1(f)$ comuta o diagrama (1.5). Logo, pela unicidade da extensão, temos que $\Pi_1(f) = \pi_f = \Pi(f)$. $\square$

1.2 O espaço de Hilbert das semi-densidades

Além da construção do espaço $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{M}(X, \mathcal{B}))$, há uma segunda maneira de associar um espaço de Hilbert a $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. A seguir, apresentaremos outra construção de um espaço de Hilbert associado a $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, denominado espaço de Hilbert das semi-densidades e denotado por $\mathbb{W}$. Ao fim do Capítulo (ver Teorema 1.23), mostraremos que, apesar de construídos independentemente, os espaços $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{M}(X, \mathcal{B}))$ e $\mathbb{W}$ coincidem.

Defina $\mathcal{W} = \{(f, \mu) \mid \mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B}) \text{ e } f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)\}$. Diremos que um par $(f, \mu) \in \mathcal{W}$ se relaciona com um par $(g, \nu) \in \mathcal{W}$

se existir uma medida $\omega \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ tal que $\mu \ll \omega$, $\nu \ll \omega$ e $f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}$, $\omega-$qtp, e neste caso escreveremos $(f, \mu)\Re(g, \nu)$.

Observação 1.15. Quando nos referimos aos pares (f, μ), (g, ν) em $\mathcal{W}$, as letras f e g representam classes de equivalência em $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ e $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$, respectivamente. Por outro lado, quando escrevemos $f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}$, $\omega-$qtp, estamos nos referindo às funções f e g. Vejamos que tal igualdade vale para qualquer representante das classes e, portanto, que $\Re$ está bem definida. Sejam f_1 e f_2 representantes de uma mesma classe em $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, isto é, $f_1 = f_2, \mu-$qtp. Considere também $\omega \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ tal que $\mu \ll \omega$. Note que

$$\int |f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} - f_2\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu}|^2 \,\mathrm{d}\,\omega = \int |f_1 - f_2|^2 \,\mathrm{d}_\omega \mu \,\mathrm{d}\,\omega$$
$$= \int |f_1 - f_2|^2 \,\mathrm{d}\,\mu \overset{A.22}{=} 0.$$

Assim, novamente por A.22, temos que $f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = f_2\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu}$, $\omega-$qtp. Logo, se $f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}$, $\omega-$qtp, para ω tal que $\mu \ll \omega$ e $\nu \ll \omega$, então $f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = g_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}$, $\omega-$qtp, para quaisquer representantes f_1 e g_1 das classes de equivalência de f e g, respectivamente.

Afirmação 1.16. *Sejam (f, μ) e (g, ν) elementos de $\mathcal{W}$, tais que $(f, \mu)\Re(g, \nu)$. Se $\omega' \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$, $\mu \ll \omega'$ e $\nu \ll \omega'$, então*

$$f\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \nu},\ \omega' - qtp.$$

Demonstração. Fixe $\omega' \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ tal que $\mu \ll \omega'$ e $\nu \ll \omega'$. Por hipótese, existe uma medida $\omega \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ tal que

$$f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu},\ \omega - \mathrm{qtp}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int \left(f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} - g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}\right)\left(\overline{f\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu} - g\sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu}}\right)\mathrm{d}\,\omega \\
&= \int |f|^2 \,\mathrm{d}_\omega \mu \,\mathrm{d}\,\omega + \int |g|^2 \,\mathrm{d}_\omega \nu \,\mathrm{d}\,\omega \\
&- \int \left(\overline{f}g + \overline{g}f\right)\sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu \,\mathrm{d}_\omega \nu}\,\mathrm{d}\,\omega \\
&= \int |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mu + \int |g|^2 \,\mathrm{d}\,\nu - \int \left(\overline{f}g + \overline{g}f\right)\mathrm{d}\sqrt{\mu\nu} \\
&= \int |f|^2 \,\mathrm{d}_{\omega'} \mu \,\mathrm{d}\,\omega' + \int |g|^2 \,\mathrm{d}_{\omega'} \nu \,\mathrm{d}\,\omega' \\
&- \int \left(\overline{f}g + \overline{g}f\right)\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \mu \,\mathrm{d}_{\omega'} \nu}\,\mathrm{d}\,\omega' \\
&= \int \left(f\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \mu} - g\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \nu}\right)\left(\overline{f\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \mu} - g\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \nu}}\right)\mathrm{d}\,\omega'.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_{\omega'} \nu},\ \omega' - \text{qtp}.$$

□

Proposição 1.17. $\Re$ *é uma relação de equivalência.*

Demonstração. É fácil ver que $\Re$ é *reflexiva* e *simétrica*, por isso vamos apenas mostrar a *transitividade*. Sejam (f,μ), (g,ν) e (h,ω) tais que $(f,\mu)\Re(g,\nu)$ e $(g,\nu)\Re(h,\omega)$. Definindo $\theta = \mu+\nu+\omega$, temos pela afirmação anterior que

$$f\sqrt{\mathrm{d}_\theta \mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_\theta \nu} = h\sqrt{\mathrm{d}_\theta \omega},\ \theta - \text{qtp}.$$

□

Defina $\mathbb{W}$ como o conjunto quociente de $\mathcal{W}$ por $\Re$. Em $\mathbb{W}$ denotaremos a classe de um elemento (f,u) por $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, isto pois mais adiante vamos relacionar a construção da primeira seção com esta. O fato é que $\mathbb{W}$ não é apenas um conjunto, $\mathbb{W}$ é um espaço de Hilbert, que é chamado ***espaço de Hilbert das semi-densidades*** de $(X, \mathcal{B})$. A seguir, apresentamos a estrutura de adição e multiplicação por escalar em $\mathbb{W}$. Defina

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{W} \times \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{W} \\ (f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) & \longmapsto & \left(f\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu} + g\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \end{array}$$

em que $\omega \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ é uma medida tal que $\mu \ll \omega$ e $\nu \ll \omega$.

Afirmação 1.18. *A função + está bem definida, ou seja, independe da escolha dos representantes das classes e da medida ω. Ainda mais, $(\mathbb{W}, +)$ é um grupo abeliano.*

Demonstração. Sejam (f_1, μ_1), (g_1, ν_1), (f_2, μ_2) e (g_2, ν_2) pertencentes a $\mathcal{W}$ e ω_1, ω_2 em $\mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ tais que $\mu_1 \ll \omega_1$, $\nu_1 \ll \omega_1$, $\mu_2 \ll \omega_2$, $\nu_2 \ll \omega_2$, $(f_1, \mu_1)\Re(f_2, \mu_2)$ e $(g_1, \nu_1)\Re(g_2, \nu_2)$. Queremos verificar que

$$\left(f_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\mu_1} + g_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\nu_1}, \omega_1\right)\Re\left(f_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\,\mu_2} + g_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\,\nu_2}, \omega_2\right).$$

Antes de tudo, vejamos que tais pares estão bem definidos, ou seja, vejamos que $f_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\mu_1} + g_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\nu_1}$ e $f_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\,\mu_2} + g_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\,\nu_2}$ são ω_1 e ω_2 quadrado integráveis, respectivamente. Faremos apenas uma conta, a outra é análoga. Note que

$$\begin{aligned} &\int \left|f_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\mu_1} + g_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\nu_1}\right|^2 \mathrm{d}\,\omega_1 \\ &= \int |f_1|^2\,\mathrm{d}\,\mu_1 + \int |g_1|^2\,\mathrm{d}\,\nu_1 \\ &+ \int (\overline{f_1}g_1 + f_1\overline{g_1})\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\mu_1\ \ \mathrm{d}_{\omega_1}\,\nu_1}\,\mathrm{d}\,\omega_1 \\ &= \int |f_1|^2\,\mathrm{d}\,\mu_1 + \int |g_1|^2\,\mathrm{d}\,\nu_1 \\ &+ \int 2\,\mathrm{Re}(\overline{f_1}g_1)\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\,\mu_1\ \ \mathrm{d}_{\omega_1}\,\nu_1}\,\mathrm{d}\,\omega_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int |f_1|^2 \, \mathrm{d}\,\mu_1 + \int |g_1|^2 \, \mathrm{d}\,\nu_1 + 2 \int |\overline{f_1} g_1| \sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1} \mu_1 \;\; \mathrm{d}_{\omega_1} \nu_1} \, \mathrm{d}\,\omega_1 \\
&\overset{Holder}{\leq} \int |f_1|^2 \, \mathrm{d}\,\mu_1 + \int |g_1|^2 \, \mathrm{d}\,\nu_1 \\
&+ 2 \sqrt{\int |f_1|^2 \, \mathrm{d}_{\omega_1} \mu_1 \, \mathrm{d}\,\omega_1} \sqrt{\int |g_1|^2 \, \mathrm{d}_{\omega_1} \nu_1 \, \mathrm{d}\,\omega_1} \\
&= \int |f_1|^2 \, \mathrm{d}\,\mu_1 + \int |g_1|^2 \, \mathrm{d}\,\nu_1 + 2 \sqrt{\int |f_1|^2 \, \mathrm{d}\,\mu_1} \sqrt{\int |g_1|^2 \, \mathrm{d}\,\nu_1} \\
&= \|f_1\|^2_{L^2(\mu_1)} + 2 \|f_1\|_{L^2(\mu_1)} \|g_1\|_{L^2(\nu_1)} + \|g_1\|^2_{L^2(\nu_1)} \\
&= (\|f_1\|_{L^2(\mu_1)} + \|g_1\|_{L^2(\nu_1)})^2.
\end{aligned}
$$

Prosseguindo, defina $\varsigma = \omega_1 + \omega_2$ e note que as medidas μ_i, ν_i e ω_i são absolutamente contínuas com relação a ς, com $i = 1, 2$. Além disso, por hipótese

$$
f_1 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \mu_1} = f_2 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \mu_2}, \;\; \varsigma - \text{qtp},
$$

e também

$$
g_1 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \nu_1} = g_2 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \nu_2}, \;\; \varsigma - \text{qtp}.
$$

Somando as duas igualdades acima, obtemos

$$
f_1 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \mu_1} + g_1 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \nu_1} = f_2 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \mu_2} + g_2 \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \nu_2}, \;\; \varsigma - \text{qtp}. \quad (1.6)
$$

Relembrando a *Regra da cadeia* A.33 para as derivadas de Radon–Nikodým temos que

$$
\mathrm{d}_\varsigma \, \mu_i = \mathrm{d}_{\omega_i} \, \mu_i \, \mathrm{d}_\varsigma \, \omega_i \text{ e } \mathrm{d}_\varsigma \, \nu_i = \mathrm{d}_{\omega_i} \, \nu_i \, \mathrm{d}_\varsigma \, \omega_i, \;\; i = 1, 2.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\left(f_1 \sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1} \, \mu_1} + g_1 \sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1} \, \nu_1} \right) \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \omega_1} \\
&= \left(f_2 \sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2} \, \mu_2} + g_2 \sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2} \, \nu_2} \right) \sqrt{\mathrm{d}_\varsigma \, \omega_2}, \;\; \varsigma - \text{qtp}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\left(f_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\mu_1}+g_1\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_1}\nu_1},\omega_1\right)\Re\left(f_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\mu_2}+g_2\sqrt{\mathrm{d}_{\omega_2}\nu_2},\omega_2\right).$$

Sejam $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, $g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$ e $h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}$ pertencentes a $\mathbb{W}$. Queremos verificar a *associatividade* de $+$, para tanto, defina $\varsigma=\mu+\nu+\omega$ e observe que

$$\begin{aligned}
&\left(f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right)+h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\\
&=\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma}+h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\\
&=\left(\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\varsigma}+h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma}\\
&=\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}+h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma}\\
&=\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\mu}+\left(g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}+h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega}\right)\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\varsigma}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma}\\
&=f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+\left(g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}+h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma}\\
&+f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+\left(g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}+h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\right).
\end{aligned}$$

Seja $\eta : X \to \mathbb{C}$ a função nula. Note que para quaisquer duas medidas μ e ν em $\mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ vale que $(\eta,\mu)\Re(\eta,\nu)$. De fato, $\eta\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\mu}=0=\eta\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\nu}$.

Seja $0_{\mathbb{W}}$ a classe das funções $\eta\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$. Mostremos que $0_{\mathbb{W}}$ é o *elemento neutro* de $\mathbb{W}$. De fato,

$$\begin{aligned}
f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+0_{\mathbb{W}}&=f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+\eta\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\
&=\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}+\eta\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\
&=f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+(-f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}&=\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}+(-f)\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\
&=\eta\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}=0_{\mathbb{W}}.
\end{aligned}$$

Logo, como $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$ foi qualquer, temos que $0_{\mathbb{W}}$ é o elemento neutro de $\mathbb{W}$ e, além disso, todo elemento de $\mathbb{W}$ admite um *inverso* com respeito a $+$. Concluindo, note que a *comutatividade* de $+$ é trivial. $\square$

Observação 1.19. Note que valem as seguintes igualdades:

1. $$\begin{aligned} f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} &= \left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}+g\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\mu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \\ &= (f+g)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}. \end{aligned}$$

2. Seja $\nu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{B})$ tal que $\nu \ll \mu$. Então, vale que
$$\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} = f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}.$$
De fato, tome $\omega = \mu$ e observe que $\mathrm{d}_\omega\,\mu = 1$, $\omega-$qtp, e $\nu \ll \omega$. Assim, $\left(f\sqrt{\mathrm{d}_\mu\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu} = f\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu}$, $\omega-\text{qtp}$.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \odot:\mathbb{C}\times\mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{W} \\ (\alpha, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) & \longmapsto & (\alpha f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}. \end{array}$$

Afirmação 1.20. *$\odot$ está bem definido e satisfaz:*

1. $1\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} = f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu},\ \forall f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\in\mathbb{W}$.

2. $(\alpha_1+\alpha_2)\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} = \alpha_1\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}+\alpha_2\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$,
$\forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C},\ f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\in\mathbb{W}$.

3. $(\alpha_1\alpha_2)\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} = \alpha_1\odot\left(\alpha_2\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right),\ \forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$,
$\forall\ f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\in\mathbb{W}$.

4. $\alpha\odot\left(f_1\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1}+f_2\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}\right) = \alpha\odot f_1\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1}+\alpha\odot f_2\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}$,
$\forall\alpha\in\mathbb{C},\forall\ f_1\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1},\ f_2\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}\in\mathbb{W}$.

Demonstração. Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, (f,μ) e (g,ν) em $\mathbb{W}$ tais que $(f,\mu)\Re(g,\nu)$. Então $f\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\mu} = g\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\nu}$, $(\mu+\nu)-$qtp e assim $\alpha f\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\mu} = \alpha g\sqrt{\mathrm{d}_{\mu+\nu}\,\nu}$, $(\mu+\nu)-$ qtp. Logo, $(\alpha f,\mu)\Re(\alpha g,\nu)$ e consequentemente $\odot$ está bem definido. Vamos agora à demonstração dos itens 1 a 4.

1. Trivial!

2. $$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2)\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} &= [(\alpha_1+\alpha_2)f]\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &= (\alpha_1 f+\alpha_2 f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &\overset{1.19}{=} (\alpha_1 f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + (\alpha_2 f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &= \alpha_1\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} + \alpha_2\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(\alpha_1\alpha_2)\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} &= [(\alpha_1\alpha_2)f]\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &= [\alpha_1(\alpha_2 f)]\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &= \alpha_1\odot(\alpha_2 f)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\\ &= \alpha_1\odot\left(\alpha_2\odot f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right).\end{aligned}$$

4. Defina $\omega = \mu_1+\mu_2$ e observe que:

$$\begin{aligned}&\alpha\odot\left(f_1\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1} + f_2\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}\right)\\ &= \alpha\odot\left(f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_1} + f_2\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_2}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\\ &= \left(\alpha f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_1} + \alpha f_2\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_2}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\\ &\overset{1.19}{=} \left(\alpha f_1\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_1}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} + \left(\alpha f_2\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_2}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\\ &\overset{1.19}{=} (\alpha f_1)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1} + (\alpha f_2)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}\\ &= \alpha\odot f_1\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_1} + \alpha\odot f_2\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_2}.\end{aligned}$$

$\square$

Do que fizemos acima, segue que a tripla $(\mathbb{W}, +, \odot)$ é um espaço vetorial. Além disso, segue do item 1 da Observação 1.19 e da definição de $\odot$ que, para toda medida μ, a função $\mathcal{L} : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathbb{W}$ dada por $\mathcal{L}(\psi) = \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, é uma transformação linear. A seguir, vamos definir uma estrutura de espaço com produto interno em $\mathbb{W}$ e esta, por sua vez, garantirá que $\mathcal{L}$ é uma isometria e que portanto $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um subespaço fechado de $\mathbb{W}$.

Defina

$$\begin{aligned} \langle .\ ,.\rangle_{\mathbb{W}} : \mathbb{W} \times \mathbb{W} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &\longmapsto \int \overline{f} g \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Afirmação 1.21. *A função $\langle .\ ,.\rangle_{\mathbb{W}}$ está bem definida e é um produto interno em $\mathbb{W}$.*

Demonstração. Vejamos a boa definição de $\langle .\ ,.\rangle_{\mathbb{W}}$. Observe que se $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, $g \in L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ e $\theta = \mu + \nu$, então

$$\begin{aligned} \left| \int \overline{f} g \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\nu} \right| &\leq \int |\overline{f} g| \sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\mu \ \ \mathrm{d}_\theta\,\nu} \,\mathrm{d}\,\theta \\ &\leq \sqrt{\int |f|^2 \,\mathrm{d}_\theta\,\mu \,\mathrm{d}\,\theta} \sqrt{\int |g|^2 \,\mathrm{d}_\theta\,\nu \,\mathrm{d}\,\theta} \\ &= \|f\|_{L^2(\mu)} \|g\|_{L^2(\nu)}. \end{aligned}$$

Além disso, supondo que $(f, \mu)\Re(f_1, \mu_1)$, $(g, \nu)\Re(g_1, \nu_1)$ e redefinindo $\theta = \mu + \mu_1 + \nu + \nu_1$, temos que $f\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\mu} = f_1\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\mu_1},\ \theta - \text{qtp}$ e também $g\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu} = g_1\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu_1},\ \theta - \text{qtp}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \overline{f} g \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\nu} &= \int \overline{f} \sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\mu}\, g \sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu} \,\mathrm{d}\,\theta. \\ &= \int \overline{f_1} \sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\mu_1}\, g_1 \sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu_1} \,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \int \overline{f_1} g_1 \,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu_1\nu_1}. \end{aligned}$$

Agora, mostremos que $\langle . \, , . \rangle_{\mathbb{W}}$ é um produto interno. Para tanto, escolha $h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \in \mathbb{W}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e defina $\varsigma = \mu + \nu + \omega$.

1. *Linearidade no segundo argumento*:

$$\begin{aligned}
&\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} + \alpha \odot h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \right\rangle_{\mathbb{W}} \\
&= \left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, \left(g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu} + \alpha h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega} \right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma} \right\rangle_{\mathbb{W}} \\
&= \int \overline{f}\left(g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu} + \alpha h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega} \right)\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\varsigma} \\
&= \int \overline{f} g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu}\,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\varsigma} + \alpha\int \overline{f} h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega}\,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\varsigma} \\
&= \left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, \left(g\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\nu} \right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma} \right\rangle_{\mathbb{W}} \\
&+ \alpha\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, \left(h\sqrt{\mathrm{d}_\varsigma\,\omega} \right)\sqrt{\mathrm{d}\,\varsigma} \right\rangle_{\mathbb{W}} \\
&= \left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \right\rangle_{\mathbb{W}} + \alpha\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \right\rangle_{\mathbb{W}}.
\end{aligned}$$

2. *Antissimetria*:

$$\begin{aligned}
\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \right\rangle_{\mathbb{W}} &= \overline{\overline{\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \right\rangle_{\mathbb{W}}}} = \overline{\overline{\int \overline{f} g\,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\nu}}} \\
&= \overline{\int f\overline{g}\,\mathrm{d}\,\sqrt{\mu\nu}} = \overline{\left\langle g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right\rangle_{\mathbb{W}}}.
\end{aligned}$$

3. *Positividade*: Note que $\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right\rangle_{\mathbb{W}} = \int |f|^2\,\mathrm{d}\,\mu \geq 0$. Além disso, se $\left\langle f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right\rangle_{\mathbb{W}} = 0$ então $f = 0$, $\mu-$qtp. Logo $(f, \mu)\Re(\eta, \mu)$ e, portanto, $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} = 0_{\mathbb{W}}$.

Como os elementos $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}, g\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$ e $h\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \in \mathbb{W}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ foram tomados sem particularidades, temos que as propriedades acima valem em geral e assim $\langle . \, , . \rangle_{\mathbb{W}}$ é um produto interno em $\mathbb{W}$. $\square$

Agora, note que

$$\begin{aligned}\|\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\|_{\mathbb{W}}^2 &= \left\langle\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu},\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\right\rangle_{\mathbb{W}}\\ &= \int|\psi|^2\,\mathrm{d}\sqrt{\mu\mu} \qquad (1.7)\\ &= \int|\psi|^2\,\mathrm{d}\,\mu = \|\psi\|_{L^2(\mu)}^2.\end{aligned}$$

Daí, segue que $\mathcal{L} : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \to \mathbb{W}$, dada por $\mathcal{L}(\psi) = \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, é uma isometria. Assim, dada $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$ qualquer, temos que $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ é isomorfo a um subespaço fechado de $\mathbb{W}$.

Proposição 1.22. $(\mathbb{W}, \langle .\ , . \rangle_{\mathbb{W}})$ *é um espaço Hilbert.*

Demonstração. Seja $\{f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{W}$ e $P = \{n \in \mathbb{N} \mid \mu_n(X) \neq 0\}$. Defina

$$\nu = \sum_{n\in P} \frac{1}{2^n}\frac{\mu_n}{\mu_n(X)}.$$

É claro que ν é uma medida finita e que $\mu_n \ll \nu$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, pela Equação 1.7 temos que

$$\begin{aligned}\left\|f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n} - f_m\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_m}\right\|^2 &= \left\|\left(f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n} - f_m\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_m}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right\|^2\\ &= \left\|f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n} - f_m\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_m}\right\|_{L^2(\nu)}^2.\end{aligned}$$

Logo, a sequência $\{f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$ e, portanto, converge para uma função $\varphi \in L^2(X, \mathcal{B}, \nu)$. Vamos mostrar que $f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n}$ converge para $\varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$, para isso basta notar que

$$\begin{aligned}\left\|f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n} - \varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right\|^2 &\overset{1.19}{=} \left\|\left(f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n} - \varphi\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\nu}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right\|^2\\ &\overset{(1.7)}{=} \left\|f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n} - \varphi\right\|_{L^2(\nu)}^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left|f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n}-\varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right|\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left|f_n\sqrt{\mathrm{d}_\nu\,\mu_n}-\varphi\right|\right|_{L^2(\nu)}=0.$$

Logo, $f_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_n}$ converge para $\varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$. □

Fomos apresentados até agora a duas construções, a primeira associa o espaço de Hilbert $L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$ a uma classe de medidas qualquer e a segunda construção associa o espaço $\mathbb{W}$ a classe $\mathcal{M}(X,\mathcal{B})$. Gostaríamos de saber qual a relação entre estas construções e se as duas resultam no mesmo espaço no caso em que $\mathcal{C}=\mathcal{M}(X,\mathcal{B})$. O próximo Teorema responde à nossa questão.

Teorema 1.23. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de medidas. Então, existe um isomorfismo isométrico entre $L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$ e um subespaço fechado de $\mathbb{W}$. Além disso, se $\mathcal{C}=\mathcal{M}(X,\mathcal{B})$, então $L^2(X,\mathcal{B},\mathcal{C})$ é isometricamente isomorfo a $\mathbb{W}$.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{C}$ uma classe de medidas. Respeitando as notações da primeira seção, defina o operador $T:\mathbb{V}_N\to\mathbb{W}$, dado por $T\left(\left[\sum_{i=1}^n\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}\right]\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\odot f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}$. Vejamos que T está bem definido. Sejam $u=\sum_{i=1}^n\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}$ e $v=\sum_{j=1}^m\beta_j g_j\sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j}$ em $\mathbb{V}$ tais que $u-v\in N$, ou seja, $\Psi(u-v,u-v)=0$. Definindo $\omega=\sum_{i=1}^n\mu_i+\sum_{i=1}^m\nu_i$, pela Equação (1.3), temos que

$$\int\left|\sum_{i=1}^n\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_i}-\sum_{j=1}^m\beta_j g_j\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu_j}\right|^2\mathrm{d}\,\omega=\Psi(u-v,u-v)=0.$$

Assim, $\sum_{i=1}^n\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_i}=\sum_{j=1}^m\beta_j g_j\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu_j}$, $\omega-$qtp, e portanto,

$$\left(\ \sum_{i=1}^n\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_i},\omega\ \right)\Re\left(\ \sum_{j=1}^m\beta_j g_j\sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu_j},\omega\ \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_i} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu_j} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \odot g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j}.\end{aligned}$$

Assim, T está bem definida. Agora, verifiquemos que T é linear e isométrica. Para tanto, tome $u, v \in \mathbb{V}$ e ω como antes, e também um escalar $\alpha \in \mathbb{C}$. Note que

$$\begin{aligned}T([u] + \alpha[v]) &= T([u + \alpha v]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} + \sum_{j=1}^{m} (\alpha\beta_j) \odot g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} + \sum_{j=1}^{m} \alpha \odot \left(\beta_j \odot g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i} + \alpha \odot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \odot g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j} \right) \\ &= T([u]) + \alpha \odot T([v]).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\langle T([u]), T([v]) \rangle_{\mathbb{W}} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i \sqrt{\mathrm{d}\,\mu_i}, \sum_{j=1}^{m} \beta_j \odot g_j \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_j} \right\rangle_{\mathbb{W}}$$

$$= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\mu_i} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\omega}, \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega\,\nu_j} \right) \sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \right\rangle$$

$$= \int \overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i}\right)} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j}\right) \mathrm{d}\,\omega$$

$$= \int \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i} \beta_j \overline{f_i} g_j \sqrt{\mathrm{d}_\omega \mu_i} \sqrt{\mathrm{d}_\omega \nu_j} \, \mathrm{d}\,\omega$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i} \beta_j \int \overline{f_i} g_j \ \mathrm{d}\sqrt{\mu_i \nu_j} = \Psi(u, v) = \langle [u], [v] \rangle.$$

Segue que T é uma isometria linear e, pelo Teorema A.7, se estende a uma isometria linear entre $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ e $\overline{T(\mathbb{V}_N)}$, que é um subespaço fechado de $\mathbb{W}$.

Suponha $\mathcal{C} = \mathcal{M}(X, \mathcal{B})$. Tome $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \in \mathbb{W}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema A.37, existe uma função simples, e portanto, limitada, φ tal que $||f - \varphi||_{L^2(\mu)} < \varepsilon$. Neste caso, temos que $T([\varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}]) = \varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$. Assim,

$$\begin{aligned} \left|\left| f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} - \varphi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right|\right| &= \left|\left| (f - \varphi)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \right|\right| \\ &= ||f - \varphi||_{L^2(\mu)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que $T(\mathbb{V}_N)$ é denso em $\mathbb{W}$ e, portanto, T se estende a uma isometria linear entre $L^2(X, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ e $\mathbb{W}$. □

2 SISTEMAS SEMIRRAMIFICADOS DE FUNÇÕES E ÁLGEBRAS DE CUNTZ–KRIEGER

Neste Capítulo vamos introduzir os sistemas semirramificados de funções e construir representações da álgebra de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associadas a tais sistemas. Falaremos também sobre o operador de Perron–Frobenius P_σ associado a um sistema semirramificado de funções e construiremos uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ que assegura que P_σ pertence à imagem desta representação. Para começar, revisaremos os espaços Shift e a construção das álgebras de Cuntz–Krieger.

2.1 Espaços Shift e álgebras de Cuntz–Krieger

Os espaços *Shift* e *Shift admissível* aparecem naturalmente no estudo das álgebras de Cuntz–Krieger, por isso fazemos aqui uma breve introdução destes objetos. Fixe um número natural $m \geq 2$ e uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_m(\{0,1\})$ que tem linhas não nulas. Denotaremos $I = \{1, \ldots, m\}$ e $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j \in I}$.

Definição 2.1. Um elemento $\alpha \in I^n = I \times \cdots \times I$ é dito uma ***palavra finita*** de comprimento n do alfabeto I. Denotaremos por E_F o conjunto de todas as palavras finitas do alfabeto I, ou seja, $E_F = \bigcup_{n\geq 0} I^n$. O ***Shift*** gerado por I é o conjunto $E = I^{\mathbb{N}}$ de todas as palavras infinitas do alfabeto I.

Observação 2.2. Existe uma única palavra de tamanho 0, esta é chamada de palavra vazia e é denotada por Λ. Não escreveremos os elementos de E_F e E como n-uplas ou sequências, uma palavra finita $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ será denotada por $x_1x_2\ldots x_n$ e uma sequência $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ por $x_1x_2x_3\ldots$. Para nos referirmos ao *comprimento* de uma palavra α, usaremos a notação $|\alpha|$.

Definição 2.3. Uma palavra finita ou infinita $x = x_1x_2\ldots x_n\ldots$ é dita $\mathbb{A}-$***admissível*** se $a_{x_kx_{k+1}} = 1$ para todo $1 \leq k < |x|$. Denotaremos por $E_F^{\mathbb{A}}$ o conjunto de todas as palavras (finitas) $\mathbb{A}-$admissíveis de E_F. O ***Shift admissível*** gerado por $\mathbb{A}$ é o subconjunto $E_{\mathbb{A}}$ de E de todas as palavras (infinitas) $\mathbb{A}-$admissíveis.

Observação 2.4. Por vacuidade, Λ é $\mathbb{A}-$admissível. Quando não houver risco de confusão, chamaremos uma palavra apenas de admissível, em vez de $\mathbb{A}-$admissível.

Definição 2.5. Sejam $\alpha \in E_F$ e $\beta \in E_F \cup E$. Definimos a ***concatenação*** $\alpha\beta$ de α com β como a palavra obtida ao listar os caracteres de α seguidos dos caracteres de β. Se existir $\gamma \in E_F \cup E$ tal que $\beta = \alpha\gamma$, diremos que α é um ***prefixo*** de β e escreveremos $\alpha \leq \beta$. Quando $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \neq \beta$, escrevemos $\alpha < \beta$. O ***cilindro*** gerado por α é o conjunto $[\alpha] = \{\alpha\gamma |\ \gamma \in E\}$ de todas as palavras infinitas que tem α como prefixo. Denotaremos por $\mathcal{C}(I) = \{[\alpha] |\ \alpha \in E_F\} \cup \{\emptyset\}$ o conjunto de todos os cilindros de E mais o conjunto vazio.

Definição 2.6. Seja $\alpha \in E_F^{\mathbb{A}}$. O ***cilindro admissível*** gerado por α é o conjunto $[\alpha]_{\mathbb{A}} = [\alpha] \cap E_{\mathbb{A}} = \{\alpha\gamma |\ \gamma \in E_{\mathbb{A}} \text{ e } a_{|\alpha|\gamma_1} = 1\}$ de todas as palavras infinitas admissíveis que tem α como prefixo.

Note que $\emptyset, E \in \mathcal{C}(I)$, pois $[\Lambda] = E$. Ademais, para quaisquer $\alpha, \beta \in E_F$ vale que

$$[\alpha] \cap [\beta] = \begin{cases} [\alpha], & \text{se } \beta \leq \alpha \\ [\beta], & \text{se } \alpha \leq \beta \\ \emptyset, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Por fim, para qualquer palavra não vazia α, temos que $E \setminus [\alpha] = \bigcup_{\gamma \in J} [\gamma]$, em que J é o conjunto finito $I^{|\alpha|} \setminus \{\alpha\}$. Concluímos então que, conforme a Definição A.9, a família $\mathcal{C}(I)$ forma uma semiálgebra de subconjuntos de E.

Em [16, p.17], mostra-se que E admite uma métrica d com a qual E é compacto e cuja família das bolas abertas de (E, d), bem como a família das bolas fechadas, coincide com $\mathcal{C}(I)$. Assim, $\mathcal{C}(I)$ forma uma base *clopen* para a topologia de E.

Partindo deste pressuposto, é fácil perceber que o complementar de $E_{\mathbb{A}}$ é um conjunto aberto. Com efeito, tomando $x \in E \setminus E_{\mathbb{A}}$, temos que existe $k \geq 1$ tal que $a_{x_k x_{k+1}} = 0$. Segue que $x \in [x_1 \ldots x_{k+1}] \subseteq E \setminus E_{\mathbb{A}}$ e $E \setminus E_{\mathbb{A}}$ é aberto. Portanto, $E_{\mathbb{A}}$ é fechado e, consequentemente, compacto. Assim, $E_{\mathbb{A}}$ é um subespaço métrico de E, que é compacto, separável e tem uma base *clopen* para a sua topologia, a saber, $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I) := \{[\alpha] \cap E_{\mathbb{A}} |\ \alpha \in E_F\} \cup \{\emptyset\} = \{[\alpha]_{\mathbb{A}} |\ \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} \cup \{\emptyset\}$.

Futuramente, vamos apenas trabalhar com $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$, portanto, vamos abandonar o uso do índice $\mathbb{A}$ nos cilindros $[\alpha]_{\mathbb{A}}$ supondo que o leitor entenda o contexto.

Observação 2.7. A topologia de (E, d) é exatamente a topologia produto em $E = I^{\mathbb{N}}$, considerando I com a topologia discreta. Fazemos menção da métrica pois vamos considerar $E_{\mathbb{A}}$ como um espaço mensurável boreliano munido da medida de Hausdorff, sendo que esta pressupõe uma estrutura métrica. Explicitamente, a métrica d é dada por $d(\rho, \tau) = \left(\frac{1}{2}\right)^c$, sendo c o comprimento do maior *prefixo comum* entre ρ e τ. O fator $\frac{1}{2}$ em d poderia ser trocado por qualquer $r \in (0, 1)$ e mesmo assim d manteria as propriedades mencionadas até aqui.

Agora que conhecemos a estrutura de E e $E_{\mathbb{A}}$ podemos falar de funções nestes espaços. Uma função que merece destaque tanto em E quanto em $E_{\mathbb{A}}$ é a função *shift unilateral a esquerda* $\mathbf{s}$, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{s} : E \quad &\longrightarrow \quad E \\ x_1 x_2 x_3 \ldots \quad &\longmapsto \quad x_2 x_3 x_4 \ldots \quad . \end{aligned}$$

Note que se α é uma palavra finita, então $\mathbf{s}^{-1}([\alpha]) = \bigcup_{i \in I} [i\alpha]$ e assim $\mathbf{s}$ é contínua e também sua restrição a $E_{\mathbb{A}}$. Note que ao restringir o domínio de $\mathbf{s}$ para $E_{\mathbb{A}}$ a imagem de $\mathbf{s}$ fica contida em $E_{\mathbb{A}}$.

A função $\mathbf{s}$ retira a primeira letra das palavras, mas podemos pensar em funções que adicionam uma letra às palavras. Para cada $i \in I$, considere a função $\mathbf{s}_i : E \to E$, dada por $\mathbf{s}_i(\alpha) = i\alpha$. Se $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$, temos que $\alpha_1 = i$ ou $\alpha_1 \neq i$ e assim respectivamente temos que $\mathbf{s}_i^{-1}([\alpha]) = [\alpha_2 \ldots \alpha_k]$ ou $\mathbf{s}_i^{-1}([\alpha]) = \emptyset$. Logo, para cada $i \in I$, $\mathbf{s}_i$ é contínua.

Se quisermos restringir o contradomínio de $\mathbf{s}_i$ para $E_{\mathbb{A}}$, obteremos que o domínio das funções $\mathbf{s}_i$ deve ser o subconjunto D_i de todas as palavras de $E_{\mathbb{A}}$ que podem receber a letra i na primeira posição, a saber,

$$D_i = \{x = x_1 x_2 \cdots \in E_{\mathbb{A}} \mid a_{ix_1} = 1\}.$$

Note que

$$D_i = \bigcup_{\substack{j \in I \\ a_{ij}=1}} [j]_{\mathbb{A}},$$

logo, é *clopen* e, além disso, compacto. Observe também que, como $\mathbb{A}$ tem linhas não nulas, os conjuntos D_i são não vazios e também que $\mathbf{s}_i : D_i \to E_{\mathbb{A}}$ é contínua relativa às topologias induzidas em D_i e $E_{\mathbb{A}}$.

2.1.1 Álgebras de Cuntz–Krieger

Nesta subseção vamos introduzir a álgebra de Cuntz–Krieger associada a matriz $\mathbb{A}$ e mostrar algumas propriedades que ela detém. Fixemos o conjunto $\mathcal{G} = \{S_i\}_{i \in I}$, denominado conjunto de *geradores*. Note que $\mathcal{G}$ é uma cópia de I com os elementos renomeados.

Definição 2.8. A álgebra de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ é a C^*−álgebra universal gerada pelo conjunto $\mathcal{G} = \{S_i\}_{i \in I}$ e que satisfaz as seguintes relações:

1. $S_i S_i^* S_i = S_i, \ \forall i \in I.$

2. $\sum_{i=1}^{m} S_i S_i^* = \mathbb{1}$, sendo $\mathbb{1}$ a unidade de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$.

3. $S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} S_j S_j^*, \ \forall i \in I.$

As itens $1, 2$ e 3 da Definição acima são chamadas de ***relações de Cuntz–Krieger***. Note que a primeira relação nos diz que os elementos de $\mathcal{G}$ são isometrias parciais. Já a segunda relação implica que há uma certa relação de ortogonalidade, a saber, $S_i^* S_j = 0$ sempre que $i \neq j$ (ver [6, p.12]).

Podemos falar de palavras do alfabeto $\mathcal{G}$ e para isso vamos utilizar o que já vimos a respeito de palavras do alfabeto I.

Definição 2.9. Seja $\alpha \in E_F$. Definimos o elemento S_α de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ por:

$$S_\alpha = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } \alpha = \Lambda \\ S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \dots S_{\alpha_k}, & \text{se } \alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k. \end{cases}$$

Nas condições da Definição anterior, note que

$$S_\alpha^* = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{se } \alpha = \Lambda \\ S_{\alpha_k}^* S_{\alpha_{k-1}}^* \dots S_{\alpha_1}^*, & \text{se } \alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k. \end{cases}$$

Agora, vamos elencar uma série de propriedades de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ cujas demonstrações podem ser encontradas em [23] a partir da página 30 e em [6] a partir da página 11.

Proposição 2.10. *Sejam $\alpha, \beta \in E_F$. São válidas as seguintes asserções:*

1. *$S_\alpha \neq 0$ se, e somente se, α é admissível.*
2. *$S_\alpha S_\alpha^* S_\alpha = S_\alpha$, ou seja, S_α é uma isometria parcial.*
3. $$S_\alpha S_\alpha^* S_\beta S_\beta^* = \begin{cases} S_\alpha S_\alpha^*, & \textit{se } \beta \leq \alpha \\ S_\beta S_\beta^*, & \textit{se } \alpha \leq \beta \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue como corolário do item 3 da Proposição acima que[1]

$$\mathcal{D}_{\mathbb{A}} := \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{S_\alpha S_\alpha^* \mid \alpha \in E_F\}$$

[1] Pelo item 1 da Prop. 2.10 as palavras podem ser restringidas apenas às admissíveis.

é uma (C^*-)subálgebra comutativa de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. Além disso, em [23] mostra-se que[1]

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}} = \overline{\text{span}_{\mathbb{C}}}\{S_\alpha S_\beta^* \mid \alpha, \beta \in E_F\}.$$

A relação $\sum_{i=1}^{m} S_i S_i^* = \mathbb{1}$ implica que $\mathbb{1} \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ e, portanto, $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ é uma C^*-álgebra comutativa com unidade. Assim, o Teorema de Gelfand (ver [18, p.44]) garante que $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ é $*-$isomorfa a uma C^*-álgebra de funções contínuas partindo de um espaço topológico X compacto e Hausdorff. Na página 254 do artigo de Cuntz e Krieger ([5]), os autores estabelecem quem é o tal espaço X, e este surpreendentemente é o *shift admissível* $E_{\mathbb{A}}$.

Teorema 2.11. *Existe um $*-$isomorfismo $\Gamma : \mathcal{D}_{\mathbb{A}} \to C(E_{\mathbb{A}})$ que satisfaz*

$$\Gamma(S_\alpha S_\alpha^*) = \chi_{[\alpha]}, \ \forall \alpha \in E_F.$$

Demonstração. Ver [6, p.23]. □

Definição 2.12 (REPRESENTAÇÃO DE $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$)**.** Uma ***representação*** de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ é um par $(\pi, \mathcal{A})$, sendo $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{A}} \to \mathcal{A}$ um $*-$homomorfismo unital. Uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ será dita ***fiel*** se for injetora.

Observação 2.13. Sejam $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra e $\{b_i\}_{i \in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{A}$ que satisfazem as relações de Cuntz–Krieger. Pela propriedade universal das C^*-álgebras universais (ver [23, p.24-29]) aplicada a $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$, temos que existe uma única representação $(\pi, \mathcal{A})$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ tal que $\pi(S_i) = b_i$, para todo $i \in I$.

Para encerrar nossa breve revisão a respeito das álgebras de Cuntz–Krieger, vamos falar a respeito da simplicidade de tais álgebras.

Teorema 2.14. [2] *Se a matriz $\mathbb{A}$ é irredutível, então $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ é simples, ou seja, os únicos ideias fechados de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ são os triviais.*

Demonstração. ver [5, p.257]. □

Observação 2.15. Se $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ é simples, toda representação não nula $(\pi, \mathcal{A})$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ é fiel. Isso se deve ao fato de núcleos de $*-$homomorfismos serem ideais fechados.

2.2 Sistemas semirramificados de funções

Nesta seção, apresentamos o objeto de estudo principal deste trabalho que são os sistemas semirramificados de funções. Fixamos um espaço de medida finita $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e relembramos que a matriz $\mathbb{A}$ e o conjunto de índices I são como no inicio do Capítulo. Queremos obter uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ na C^*-álgebra de operadores lineares e limitados $B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$ que seja compatível com a dinâmica imposta por um sistema semirramificado de funções, a qual apresentamos a seguir.

Definição 2.16. Seja $\mathcal{S} = \{\sigma_i : D_i \to X\}_{i \in I}$ uma família de funções mensuráveis, em que $\{D_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{S}$ é um ***sistema semirramificado de funções*** se são satisfeitas as condições:

1. $\sigma_i(A \cap D_i) \in \mathcal{F}, \forall A \in \mathcal{F},\ \forall i \in I.$

2. $\mu(X \setminus \bigcup_{i \in I} R_i) = 0$ e $\mu(R_i \cap R_j) = 0$ se $i \neq j$, em que $R_i := \sigma_i(D_i)$.

[2] Veja a seção de matrizes no apêndice A

3. Para cada $i \in I$, existe a derivada de Radon–Nikodým $\Phi_i := \mathrm{d}_\mu(\mu \circ \sigma_i)$ e, além disso, $\Phi_{i_{|D_i}} > 0$, $\mu-$qtp, em que $\mu \circ \sigma_i$ é a medida dada por:

$$\mu \circ \sigma_i(A) = \mu(\sigma_i(A \cap D_i)), \ A \in \mathcal{F}.$$

Além disso, se existe uma função mensurável $\sigma : X \to X$ tal que $\sigma \circ \sigma_i = \mathbb{I}_{D_i}$ para todo $i \in I$, dizemos que σ é uma ***função de codificação*** para $\mathcal{S}$.

A partir de agora, fixamos um sistema de funções semirramificado $\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i \in I}$ junto de uma função de codificação σ, as notações usadas serão as mesmas da Definição que acabamos de fornecer.

Observação 2.17. Note que $\int_{X \setminus D_i} \Phi_i \, \mathrm{d}\, \mu = (\mu \circ \sigma_i)(X \setminus D_i) = 0$. Logo, pela Proposição A.22, temos que $\Phi_{i_{|X \setminus D_i}} = 0$, $\mu-$qtp. Assim, temos que $\Phi_i = \Phi_i \chi_{D_i}$, $\mu-$qtp.

Lema 2.18. *Sejam $i \in I$, $A \subseteq X$ e $B \subseteq D_i$ mensuráveis. Então, vale a igualdade $\sigma^{-1}(A) \cap \sigma_i(B) = \sigma_i(A \cap B)$.*

Demonstração. $\subseteq$: Se $x \in \sigma^{-1}(A) \cap \sigma_i(B)$, então temos que $x = \sigma_i(y)$, para algum $y \in B$. Além disso $y = \sigma(\sigma_i(y)) = \sigma(x) \in A$. Então $y \in A \cap B$ e portanto $x \in \sigma_i(A \cap B)$.
$\supseteq$: Se $x \in \sigma_i(A \cap B)$, existe $y \in A \cap B$ tal que $\sigma_i(y) = x$. Assim, $x \in \sigma_i(B)$ e $\sigma(x) = y \in A$ e portanto $x \in \sigma^{-1}(A) \cap \sigma_i(B)$. $\square$

Decorre do Lema que, sob a hipótese da existência de uma função de codificação para $\mathcal{S}$, não precisaríamos exigir que $\sigma_i(A \cap D_i) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}$, bastaria apenas exigir que as imagens R_i fossem mensuráveis (tome $B = D_i$ no enunciado do Lema). Ainda sob esta hipótese, assegura-se que $\mu \circ \sigma_i$ é uma medida, pois ganhamos a injetividade de σ_i. Caso contrário, deve-se subentender que $\mu \circ \sigma_i$ é uma medida por definição.

A seguir, fornecemos um Exemplo simples de sistema semirramificado de funções. Embora trivial, julgamos importante fornecer um tal Exemplo para que o leitor possa melhor compreender as ideias que motivaram a Definição. Vamos utilizar as mesmas notações do texto, no entanto, tenhamos sempre em mente que já temos um sistema semirramificado de funções fixado e isto seguirá após o Exemplo.

Exemplo 2.19. Sejam X o intervalo fechado $[0, 2]$, $\mathcal{F}$ a $\sigma-$álgebra de Borel de X e λ a medida de Lebesgue em X. Defina $D_1 = [0, 1]$ e $D_2 = [1, 2]$ e note que os mesmos são mensuráveis. Defina

$$\begin{aligned} \sigma : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x, \end{aligned}$$

e também para cada $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned} \sigma_i : D_i &\rightarrow X \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Claramente, σ, σ_1 e σ_2 são mensuráveis e $\sigma \circ \sigma_i = \mathbb{I}_{D_i}$, para todo $i \in \{1, 2\}$. Note que $\sigma_i(D_i) = D_i$, $i = 1,\ 2$, ou seja, a imagem da funções σ_i são mensuráveis. Vejamos que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é um sistema semirramificado de funções em $(X, \mathcal{F}, \lambda)$. Pelo Lema 2.18 e a observação logo abaixo do Lema, segue que é satisfeito o item 1 da Definição 2.16. Além disso,

$$\bigcup_{i=1}^{2} \sigma_i(D_i) = [0, 1] \bigcup [1, 2] = [0, 2] = X,$$

e também

$$\lambda\Big(\bigcap_{i=1}^{2} \sigma_i(D_i) \ \Big) = \lambda([0,1] \bigcap [1,2]) = \lambda(\{1\}) = 0.$$

Finalizando, note que $\lambda \circ \sigma_i(A) = \lambda(A \cap D_i)$, para todo $A \subseteq X$ mensurável e para todo $i \in \{1,2\}$. Assim,

$$\int_A \chi_{D_i} \,\mathrm{d}\,\lambda = \lambda(A \cap D_i) = \lambda \circ \sigma_i(A)$$

e, portanto,

$$\mathrm{d}_\lambda(\lambda \circ \sigma_i) = \chi_{D_i}, \forall\ i \in \{1,2\}.$$

Assim, são satisfeitos os itens da Definição 2.16 e, portanto, $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é um sistema semirramificado de funções cuja função de codificação é σ.

Proposição 2.20. [3] *Sejam $f \in \mathcal{N}(X, \mathcal{F})$ e $i \in I$. Então, para todo $B \subseteq D_i$, vale que*

$$\int_{\sigma_i(B)} f \circ \sigma \,\mathrm{d}\,\mu = \int_B f \,\mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i) = \int_B f \Phi_i \,\mathrm{d}\,\mu,\ \ \forall i \in I.$$

No sentido que $\chi_{\sigma_i(B)}(f \circ \sigma)$ é $\mu-$integrável se, e só se, $\chi_B f$ é $\mu \circ \sigma_i-$integrável se, e só se, $\chi_B f \Phi_i$ é $\mu-$integrável e neste caso as integrais coincidem.

Demonstração. Começamos supondo que $f \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ é simples, ou seja, $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{E_j}$, com $a_j \geq 0$, $E_j \in \mathcal{F}$ e $X = \bigcup_{j=1}^k E_j$. Neste caso, $f \circ \sigma = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{\sigma^{-1}(E_j)}$ e assim

[3] Ver página 117.

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_i(B)} f \circ \sigma \, \mathrm{d}\, \mu &= \int \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\sigma^{-1}(E_j) \cap \sigma_i(B)} \, \mathrm{d}\, \mu \\
&\overset{2.18}{=} \int \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{\sigma_i(E_j \cap B)} \, \mathrm{d}\, \mu \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(\sigma_i(E_j \cap B)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j \mu \circ \sigma_i(E_j \cap B) \\
&= \int \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{E_j \cap B} \, \mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i) \\
&= \int_B f \, \mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i).
\end{aligned}$$

Agora, passamos ao caso que $f \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ é qualquer. Podemos pela Proposição A.23 escolher uma sequência crescente em $\mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ de funções simples $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergindo a f. Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona A.24 e pelo caso anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_i(B)} f \circ \sigma \, \mathrm{d}\, \mu &= \lim_{n \to \infty} \int_{\sigma_i(B)} \varphi_n \circ \sigma \, \mathrm{d}\, \mu \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_B \varphi_n \, \mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i) \\
&= \int_B f \, \mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i).
\end{aligned}$$

Para o caso em que f é uma função real qualquer, vamos novamente recorrer ao caso anterior e escrever f como diferença de funções reais positivas, a saber $f = f^+ - f^-$. Assim

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_i(B)} f\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu &= \int_{\sigma_i(B)} f^+\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu - \int_{\sigma_i(B)} f^-\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu \\ &= \int_B f^+ \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i) - \int_B f^- \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i) \\ &= \int_B f \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i).\end{aligned}$$

Para o caso que f é qualquer, escrevemos $f = f_1 + if_2$, em que f_1 e f_2 são funções reais e obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_i(B)} f\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu &= \int_{\sigma_i(B)} f_1\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu + i\int_{\sigma_i(B)} f_2\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu \\ &= \int_B f_1 \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i) + i\int_B f_2 \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i) \\ &= \int_B f \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i).\end{aligned}$$

Em todos os quatro casos, é fácil ver que $(f\circ\sigma)\chi_{\sigma_i(B)}$ é $\mu-$integrável, se e só se, $f\chi_B$ é $\mu\circ\sigma_i-$ integrável. Além disso, segue do Teorema A.32 que

$$\int_{\sigma_i(B)} f\circ\sigma \,\mathrm{d}\,\mu = \int_B f \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i) = \int_B f\Phi_i \,\mathrm{d}\,\mu.$$

□

O que fizemos acima foi mostrar como se comporta a integral diante da mudança de variável $x = \sigma_i(u)$. No caso $B = D_i$, por causa da Observação 2.17, vamos omitir o símbolo D_i na integral $\int_{D_i} f\Phi_i \,\mathrm{d}\,\mu$.

A partir de agora, vamos em busca de construir uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ em $B(L^2(X,\mathcal{F},\mu))$. Para cada $i\in I$, defina o operador $T_i : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, dado por [4]

$$T_i(\psi) = \chi_{R_i} \left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \psi \right) \circ \sigma.$$

Afirmação 2.21. *Para todo $i \in I$, $T_i \in B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$.*

Demonstração. Sejam $i \in I$ e $\psi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. A linearidade de T_i é óbvia. Agora, note que

$$\begin{aligned}\int |T_i(\psi)|^2 \, \mathrm{d}\,\mu &= \int_{R_i} \frac{|\psi \circ \sigma|^2}{\Phi_i \circ \sigma} \, \mathrm{d}\,\mu \overset{2.20}{=} \int \frac{|\psi|^2}{\Phi_i} \Phi_i \, \mathrm{d}\,\mu \\ &= \int_{D_i} |\psi|^2 \, \mathrm{d}\,\mu \leq \int |\psi|^2 \, \mathrm{d}\,\mu.\end{aligned}$$

Esta conta mostra que T_i está bem definido e que $||T_i(\psi)|| \leq ||\psi||$. Logo, T_i é contínuo e $||T_i|| \leq 1$. $\square$

Podemos então nos perguntar, qual o adjunto dos operadores T_i. Sejam ψ e $\xi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $i \in I$, observe que

$$\begin{aligned}\langle T_i(\psi), \xi \rangle &= \int_{R_i} \overline{\left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \psi \right) \circ \sigma} \; \xi \, \mathrm{d}\,\mu \\ &\overset{(*)}{=} \int_{R_i} \overline{\left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \psi \right) \circ \sigma} \; (\xi \circ \sigma_i) \circ \sigma \, \mathrm{d}\,\mu \\ &\overset{2.20}{=} \int \overline{\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \; \psi} \; (\xi \circ \sigma_i) \Phi_i \, \mathrm{d}\,\mu \\ &= \int \Phi_i^{\frac{1}{2}} \; \overline{\psi} \, (\xi \circ \sigma_i) \, \mathrm{d}\,\mu \\ &= \left\langle \psi, \Phi_i^{\frac{1}{2}} \xi \circ \sigma_i \right\rangle.\end{aligned}$$

[4] Convencionamos que $0 \times$(algo não definido) $= 0$.

Na igualdade $(*)$ usamos o fato que $\xi\chi_{R_i} = (\xi \circ \sigma_i \circ \sigma)\chi_{R_i}$. Segue que para todo $\xi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, $T_i^*(\xi) = \Phi_i^{\frac{1}{2}}(\xi \circ \sigma_i)$.

Note que para qualquer $Y \subseteq X$ mensurável, a aplicação $P_Y(\psi) = \chi_Y\psi$ é uma projeção ortogonal em $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. De fato, P_Y é linear e limitado, além disso, $P_Y^2(\psi) = (\chi_Y)^2\psi = \chi_Y\psi = P_Y(\psi)$ e $\langle P_Y(\psi), \xi\rangle = \int \overline{\chi_Y\psi}\,\xi \,\mathrm{d}\,\mu = \int \overline{\psi}\,\chi_Y\xi \,\mathrm{d}\,\mu = \langle \psi, P_Y(\xi)\rangle$, implicando que $P_Y^2 = P_Y^* = P_Y$. Então podemos associar ao nosso sistema de funções semirramificado $\mathcal{S}$ as projeções $Q_i := P_{D_i}$ e $P_i := P_{R_i}$, que são respectivamente chamadas de *projeção inicial* e *projeção final*. Vejamos algumas relações que estes operadores satisfazem.

Proposição 2.22. *Valem as asserções:*

1. $T_iT_i^* = P_i, \ \forall i \in I$.
2. $T_i^*T_i = Q_i$ *e* $T_iT_i^*T_i = T_i, \ \forall i \in I$.
3. *Se* $i \neq j$, *então* $P_iP_j = 0$ *e* $\sum_{i\in I} P_i = \mathbb{I}_{L^2(X,\mathcal{F},\mu)}$.

Demonstração. Seja $\xi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

1. Fixe $i \in I$ e note que

$$\begin{aligned} T_iT_i^*(\xi) &= \chi_{R_i}\left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}}T_i^*(\xi)\right)\circ\sigma \\ &= \chi_{R_i}\left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}}\Phi_i^{\frac{1}{2}}\xi\circ\sigma_i\right)\circ\sigma \\ &\overset{2.17}{=} \chi_{R_i}\left(\chi_{D_i}\circ\sigma\right)(\xi\circ\sigma_i\circ\sigma) \\ &= \chi_{R_i}\xi = P_i(\xi). \end{aligned}$$

Portanto, $T_iT_i^* = P_i, \ \forall i \in I$.

2. Fixe $i \in I$ e note que

$$\begin{aligned}
T_i^*T_i(\xi) &= \Phi_i^{\frac{1}{2}} T_i(\xi) \circ \sigma_i \\
&= \Phi_i^{\frac{1}{2}} \left(\chi_{R_i} \left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \xi \right) \circ \sigma \right) \circ \sigma_i \\
&= \chi_{R_i} \circ \sigma_i \Phi_i^{\frac{1}{2}} \Phi_i^{-\frac{1}{2}} \xi \\
&\overset{2.17}{=} \chi_{D_i} \xi = Q_i(\xi).
\end{aligned}$$

Logo $T_i^*T_i = Q_i$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
T_iT_i^*T_i(\xi) &= T_iQ_i(\xi) \\
&= \chi_{R_i} \left(\chi_{D_i} \Phi_i^{-\frac{1}{2}} \xi \right) \circ \sigma \\
&= \chi_{R_i} \left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}} \xi \right) \circ \sigma \\
&= T_i(\xi).
\end{aligned}$$

3. Por hipótese, $\mu(X \setminus \cup_{i \in I} R_i) = 0$ e $\mu(R_i \cap R_j) = 0$, se $i \neq j$. Assim, $P_iP_j(\xi) = \chi_{R_i \cap R_j} \xi = 0$ e, portanto, $P_iP_j = 0$. Além disso, note que

$$\sum_{i \in I} P_i(\xi) = \sum_{i \in I} \chi_{R_i} \xi = \chi_{\cup_{i \in I} R_i} \xi = \mathbb{1}_X \xi = \xi.$$

Logo,

$$\sum_{i \in I} P_i = \mathbb{I}_{L^2(X, \mathcal{F}, \mu)} .$$

□

A Proposição 2.22 assegura que a família $\{T_i\}_{i \in I}$ satisfaz as relações 1 e 2 da Definição da álgebra de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. Assim, para que a família $\{T_i\}_{i \in I}$ nos dê uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ precisamos apenas que seja verificada a relação $T_i^* T_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} T_j T_j^*$, $\forall i \in I$, ou seja, $Q_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} P_j$, $\forall i \in I$. Logo, se exigirmos que valha a igualdade

$$D_i = \bigcup_{\substack{j \in I \\ a_{ij}=1}} R_j, \ \mu - qtp, \ \forall i \in I, \tag{2.2}$$

obteremos que a família $\{T_i\}_{i\in I}$ gera uma representação da álgebra $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ em $B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$ (ver Observação 2.13).

Observação 2.23. A igualdade (2.2) é chamada de condição *C-K* e daqui por diante a suporemos válida para o sistema semirramificado $\mathcal{S}$.

Exemplo 2.24 (SISTEMA SEMIRRAMIFICADO ASSOCIADO AO SHIFT ADMISSÍVEL[5])**.** Sejam δ a dimensão de Hausdorff de $E_{\mathbb{A}}$, $\mathcal{H}$ a sua respectiva medida de Hausdorff e $\mathcal{B}$ a $\sigma-$álgebra de Borel de $E_{\mathbb{A}}$. Vejamos que a família $\{\mathbf{s}_i\}_{i\in I}$ que definimos na página 50 forma um sistema semirramificado de funções em $(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ e que $\mathbf{s}$ é a função de codificação do sistema.

Lembre de que os conjuntos D_i são *clopen* e, portanto, borelianos. Além disso, as funções $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}_i$ são contínuas e, portanto, Borel-mensuráveis. Claramente, $\mathbf{s} \circ \mathbf{s}_i = \mathbb{I}_{D_i}$ e $\mathbf{s}_i(D_i) \cap \mathbf{s}_j(D_j) = \emptyset$, se $i \neq j$. Assim, pelo Lema 2.18, temos que as imagens diretas de conjuntos mensuráveis via as funções $\mathbf{s}_i$ são mensuráveis, pois $R_i = [i]_{\mathbb{A}}$ é mensurável. Também nota-se facilmente que $E_{\mathbb{A}} = \bigcup_{i\in I} R_i$. Por fim, note que as funções $\mathbf{s}_i$ são tais que $d(\mathbf{s}_i(\rho), \mathbf{s}_i(\tau)) = \dfrac{d(\rho,\tau)}{2}$ e portanto são similaridades de razão $\frac{1}{2}$. Segue do Teorema A.19 que para todo boreliano B con-

[5] Para melhor compreender algumas ferramentas usadas neste Exemplo, o leitor é convidado a consultar o apêndice *A* no assunto compreendido entre a Definição A.11 e o Teorema A.19.

tido em D_i, $\mathcal{H}(\mathbf{s}_i(B)) = \dfrac{1}{2^\delta}\mathcal{H}(B)$. Portanto, para todo $i \in I$, $\mathrm{d}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \circ \mathbf{s}_i) = \dfrac{1}{2^\delta}\chi_{D_i}$. Concluindo, $\{\mathbf{s}_i\}_{i\in I}$ é um sistema semirramificado de funções em $E_{\mathbb{A}}$ e $\mathbf{s}$ é a função de codificação do sistema.

Observação. Para aplicar o Teorema A.19, os conjuntos D_i e $E_{\mathbb{A}}$ precisam ser Poloneses. De fato, é bem sabido que conjuntos compactos são completos e que em espaços métricos, subespaços herdam a separabilidade do espaço. Sendo assim, estamos sob as hipóteses necessárias.

Perceba também que é válida a condição *C-K* (equação (2.2)). Assim, podemos obter uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ em $B(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{H}))$ se definirmos os operadores T_i como antes. Neste caso, explicitando T_i e T_i^*, temos que:

$$T_i(\psi)(x_1x_2x_3\dots) = \begin{cases} (\sqrt{2})^\delta \psi(x_2x_3\dots), & \text{se } x_1 = i \\ 0, & \text{se } x_1 \neq i \end{cases},$$

e também

$$T_i^*(\psi)(x_1x_2x_3\dots) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{2})^\delta}\psi(ix_1x_2\dots), & \text{se } a_{ix_1} = 1 \\ 0, & \text{se } a_{ix_1} = 0. \end{cases}$$

Queremos entender com mais detalhe a estrutura mensurável do Shift Admissível $E_{\mathbb{A}}$, no caso em que $\mathbb{A}$ é irredutível. Para isso suponha que $\mathcal{H}(E_{\mathbb{A}}) \in (0, +\infty)$ e lembre do seguinte resultado da teoria de matrizes.

Teorema 2.25 (TEOREMA DE PERRON–FROBENIUS)**.** *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ irredutível e com entradas não negativas. Então valem as asserções a seguir:*

1. *$\boldsymbol{r}(A)$ é um autovalor não nulo de A com multiplicidade algébrica 1, em que $\boldsymbol{r}(A)$ é o raio espectral de A.*

2. *Existe único vetor real $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $Av = \boldsymbol{r}(A)v$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$; v é um vetor cujas entradas são todas positivas.*

3. *Existe único vetor real $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tal que $w^T A = \boldsymbol{r}(A)w^T$ e $\sum_{i=1}^{n} v_i w_i = 1$; w é um vetor cujas entradas são todas positivas.*

*$\boldsymbol{r}(A)$, v e w são chamados de **raiz de Perron**, **vetor de Perron à direita** e **vetor de Perron à esquerda** da matriz A, respectivamente.*

Demonstração. [12, p.534]. □

Corolário 2.26. *Nas condições do Teorema de Perron–Frobenius, sejam $\lambda > 0$ e $u = (u_1, \ldots, u_n) \neq 0$, com entradas não negativas, tais que $Au = \lambda u$. Então $\lambda = \boldsymbol{r}(A)$ e assim u é múltiplo de v, que é o vetor de Perron à direita de A.*

Demonstração. Seja w o vetor de Perron à esquerda de A. Note que $w^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i w_i > 0$ e também

$$\mathbf{r}(A) w^T u = w^T A u = w^T \lambda u = \lambda w^T u.$$

Dividindo a igualdade por $w^T u$ obtemos $\mathbf{r}(A) = \lambda$. Além disso, $\mathbf{r}(A)$ é um autovalor de multiplicidade algébrica (e portanto geométrica) 1, segue que $u = \kappa v$. □

Sejam $\mathbf{r}$ e $p = (p_1, \ldots, p_m)$ a raiz e o vetor de Perron à direita de $\mathbb{A}$. A partir de p vamos definir uma medida de probabilidade em $E_{\mathbb{A}}$, nossa estratégia será definir uma função $\sigma-$aditiva em uma semiálgebra de $E_{\mathbb{A}}$ e então usar o Teorema de Carathéodory A.10.

Observamos anteriormente que $\mathcal{C}(I)$ é uma semiálgebra de conjuntos de E. É fácil ver que esta propriedade se transfere para $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$, ou seja, $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$ é uma semiálgebra de conjuntos de $E_{\mathbb{A}}$ (cuja $\sigma-$álgebra gerada é a de Borel $\mathcal{B}$). Defina a função $\eta : \mathcal{C}(I) \to [0, +\infty]$ da seguinte forma:

$$\eta(C) = \begin{cases} 0, & \text{se } C = \emptyset \\ \mathbf{r}^{1-k} p_{\alpha_k}, & \text{se } C = [\alpha_1 \dots \alpha_k] \\ 1, & \text{se } C = [\Lambda] = E. \end{cases}$$

Devemos verificar que η restrita a $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$ satisfaz a $\sigma-$aditividade. No entanto, como os elementos de $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$ são compactos, a hipótese de que um cilindro $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$ pode ser expresso como uma união enumerável disjunta de elementos não vazios de $\mathcal{C}_{\mathbb{A}}(I)$ não se realiza. Sendo assim, é suficiente verificar que η é *aditiva*, isto é, $\eta\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \eta(A_i)$, se os conjuntos A_i são disjuntos dois a dois.[6]

Lema 2.27. *η é aditiva.*

Demonstração. Seja $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_k$. Note que

$$[\alpha] = \bigcup_{\substack{j \in I \\ a_{\alpha_k j} = 1}} [\alpha j].$$

vejamos que neste caso particular η satisfaz a propriedade aditiva.

[6] A partir daqui o índice $\mathbb{A}$ é suprimido nos cilindros admissíveis.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\sum_{a_{\alpha_k j}=1} \eta([\alpha j]) &= \sum_{j=1}^{m} a_{\alpha_k j}\eta([\alpha j]) = \sum_{j=1}^{m} a_{\alpha_k j}\mathbf{r}^{1-(k+1)}p_j \\ &= \mathbf{r}^{-k}\sum_{j=1}^{m} a_{\alpha_k j}p_j \overset{(*)}{=} \mathbf{r}^{-k}\mathbf{r}p_{\alpha_k} = \mathbf{r}^{1-k}p_{\alpha_k} \\ &= \eta([\alpha]).\end{aligned}$$

Na igualdade $(*)$, usamos o fato de que $\mathbb{A}p = \mathbf{r}p$. Para o caso geral, escreva $[\alpha] = \bigcup_{j=1}^{N}[\beta^j]$. Por questões de simplicidade, sempre escreveremos o mesmo N, pois esta será a representação genérica que adotaremos do cilindro $[\alpha]$ escrito como união disjunta de outros cilindros, mas sempre tendo em mente que este N não é fixo. Dado $j \in \{1, \ldots, N\}$, temos que $[\beta^j] \subseteq [\alpha]$ e portanto $|\beta^j| \geq |\alpha|$. Assim, nossa prova se dará pelo segundo princípio de indução em

$$L := \max_{1\leq j\leq N}\{|\beta^j| - |\alpha|\}.$$

Se $L = 0$, então $N = 1$, $\beta^1 = \alpha$ e o resultado segue trivialmente. Agora, suponha que valha a afirmação:

$$\text{se } [\alpha] = \bigcup_{j=1}^{N}[\beta^j] \text{ é tal que } 0 \leq L \leq n \text{ então } \eta([\alpha]) = \sum_{j=1}^{N}\eta([\beta^j]).$$

Vejamos que se $[\alpha] = \bigcup_{j=1}^{N}[\beta^j]$ é tal que $L = n+1$ então η mantém a propriedade aditiva. Escreva

$$[\alpha] = \bigcup_{i=1}^{n+1}\left(\bigcup_{\substack{1\leq j\leq N \\ |\beta^j|-|\alpha|=i}}[\beta^j]\right).$$

Tome $l \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $|\beta^l| - |\alpha| = n+1$ e defina o conjunto $B = \{\beta^j \mid 1 \leq j \leq N,\ |\beta^j| - |\alpha| = n+1 \text{ e } \beta^j_i = \beta^l_i, \forall\, i \in \{1, \ldots, |\alpha|+n\}\}$.

Afirmação.

$$\bigcup_{\beta^j \in B} [\beta^j] = [\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}].$$

Demonstração. $\subseteq$: Trivial!
$\supseteq$: Como $[\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}] \subseteq [\alpha]$ existe único $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que

$$[\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}] \bigcap \left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq N \\ |\beta^j| - |\alpha| = i}} [\beta^j] \right) \neq \emptyset$$

e $i \geq n$ pois a equação 2.1 na página 49 garante como se dá a interseção de cilindros. Se $i = n$, $[\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}]$ é um dos cilindros que compõem a união $\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq N \\ |\beta^j| - |\alpha| = n}} [\beta^j]$ e neste caso teríamos que $[\alpha]$ não é união disjunta dos cilindros $[\beta^j]$ pois $[\beta^l] \cap [\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}] \neq \emptyset$. Logo, $[\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}] \subseteq \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq N \\ |\beta^j| - |\alpha| = n+1}} [\beta^j]$ e isto conclui a afirmação. $\square$

Segue que é possível rearranjar $\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq N \\ |\beta^j| - |\alpha| = n+1}} [\beta^j]$ de forma que se torne uma união disjunta de cilindros $[\beta^{l_s}_1 \ldots \beta^{l_s}_{|\alpha|+n}]$, em que $s \in \mathbb{N}^*$ e $l_1 = l$, tornando possível a aplicação da hipótese de indução.

Suponha sem perda de generalidade e para fins de esclarecimento que $s = 1$ (o caso $s > 1$ é análogo). Neste caso,

$$\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq N \\ |\beta^j| - |\alpha| = n+1}} [\beta^j] = [\beta^l_1 \ldots \beta^l_{|\alpha|+n}],$$

ou seja, $\bigcup_{\substack{1\leq j\leq N\\ |\beta^j|-|\alpha|=n+1}}[\beta^j] = \bigcup_{\beta^j\in B}[\beta^j]$. Neste caso

$$\begin{aligned}
\eta([\alpha]) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|\beta^j|-|\alpha|=i}\eta([\beta^j])\right) + \eta([\beta_1^l\dots\beta_{|\alpha|+n}^l])\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|\beta^j|-|\alpha|=i}\eta([\beta^j])\right) + \sum_{\beta^j\in B}\eta([\beta^j])\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|\beta^j|-|\alpha|=i}\eta([\beta^j])\right) + \sum_{|\beta^j|-|\alpha|=n+1}\eta([\beta^j])\\
&= \sum_{j=1}^{N}\eta([\beta^j]).
\end{aligned}$$

Com a mesma demonstração observa-se que η satisfaz a propriedade aditiva para $\alpha = \Lambda$. $\square$

Assim, pelo Teorema de Carathéodory, η se estende a uma medida em $\mathcal{B}$, que por abuso de linguagem denotaremos por η também. Vimos no Exemplo 2.24 que

$$\mathcal{H}(R_i) = 2^{-\delta}\mathcal{H}(D_i) = 2^{-\delta}\sum_{a_{ij}=1}\mathcal{H}(R_j) = 2^{-\delta}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mathcal{H}(R_j).$$

Assim, definindo $h = (\mathcal{H}(R_1),\dots,\mathcal{H}(R_m))$ temos que $2^\delta h = \mathbb{A}h$ e pelo Corolário do Teorema de Perron–Frobenius, obtemos que $\mathbf{r} = 2^\delta$ e $h = \kappa p$, para algum $\kappa > 0$. Portanto,

$$\delta = \frac{\ln(\mathbf{r})}{\ln(2)} \text{ e } \mathcal{H}(E_{\mathbb{A}}) = \sum_{i=1}^{m}\mathcal{H}(R_i) = \sum_{i=1}^{m}\kappa p_i = \kappa\sum_{i=1}^{m}p_i = \kappa.$$

Poderíamos considerar $\mathcal{H}$ como normalizada e obter $\kappa = 1$. Independente disso, é um tanto quanto surpreendente o fato de que $\mathcal{H}$ está intimamente ligada com o vetor de Perron de $\mathbb{A}$. (resultado obtido em [17, p.57])

2.2.1 Operador de Perron–Frobenius

Queremos associar a σ um operador de translação T_σ, que toma uma função $\psi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ e retorna $\psi \circ \sigma$. T_σ pode não estar definido, como mencionamos na Introdução, mas supondo que as derivadas Φ_i sejam todas limitadas, temos que $\psi \circ \sigma \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. De fato,

$$\begin{aligned}\int |\psi \circ \sigma|^2 \,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{i \in I} \int_{R_i} |\psi \circ \sigma|^2 \,\mathrm{d}\,\mu &\overset{2.20}{=} \sum_{i \in I} \int |\psi|^2 \,\Phi_i \,\mathrm{d}\,\mu \\ &\leq \Big(\sum_{i \in I} \|\Phi_i\|_\infty \Big) \int |\psi|^2 \,\mathrm{d}\,\mu.\end{aligned}$$

Portanto, $T_\sigma \in B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$ e $\|T_\sigma\| \leq \sqrt{\sum_{i \in I} \|\Phi_i\|_\infty}$.

O operador de Perron–Frobenius associado a $\mathcal{S}$ é por definição o operador adjunto de T_σ. Vejamos quem é T_σ^*.

$$\begin{aligned}\langle T_\sigma(\psi), \xi \rangle = \int \overline{\psi \circ \sigma} \xi \,\mathrm{d}\,\mu &= \sum_{i \in I} \int_{R_i} \overline{\psi \circ \sigma} \xi \,\mathrm{d}\,\mu \\ &= \sum_{i \in I} \int_{R_i} (\overline{\psi \circ \sigma})(\xi \circ \sigma_i \circ \sigma) \,\mathrm{d}\,\mu \\ &\overset{2.20}{=} \sum_{i \in I} \int \overline{\psi}\ \Phi_i(\xi \circ \sigma_i) \,\mathrm{d}\,\mu \\ &= \int \overline{\psi} \Big(\sum_{i \in I} \Phi_i(\xi \circ \sigma_i) \Big) \,\mathrm{d}\,\mu.\end{aligned}$$

Segue que

$$T_\sigma^*(\xi) = \sum_{i \in I} \Phi_i \xi \circ \sigma_i.$$

Observe ainda que T_σ^* tem uma relação estreita com a nossa representação de $\mathcal{O}_\mathbb{A}$, de fato,

$$T_\sigma^* = \sum_{i \in I} \Phi_i^{\frac{1}{2}} T_i^*.$$

Denotando o operador de Perron–Frobenius do Exemplo 2.24 por P_σ, obtemos que $P_\sigma = 2^{\frac{-\delta}{2}} \sum_{i \in I} T_i^*$. Vamos verificar que o vetor de Perron à esquerda de $\mathbb{A}$ define um ponto fixo para P_σ e isto é interessante pois existe uma relação entre pontos fixos do operador de Perron–Frobenius e estados KMS associados a evoluções temporais (ver [15]).

Proposição 2.28. *Seja $w = (w_1, \ldots, w_m)$ o vetor de Perron à esquerda de $\mathbb{A}$ e $\xi = \sum_{j=1}^m w_j \chi_{R_j} \in L^2(E_{\mathbb{A}}, B, \mathcal{H})$. Então $P_\sigma(\xi) = \xi$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que se $i,\ j \in I$, então $\chi_{R_j} \circ \sigma_i = \chi_{\sigma_i^{-1}(R_j)} = \delta_{ij} \chi_{D_i}$, pois $\mu(R_i \cap R_j) = 0$ (em que δ_{ij} é o delta de Kronecker). Assim, temos que

$$\begin{aligned}
P_\sigma(\xi) &= 2^{\frac{-\delta}{2}} \sum_{i=1}^m T_i^*(\xi) = 2^{\frac{-\delta}{2}} \sum_{i=1}^m 2^{\frac{-\delta}{2}} \chi_{D_i} \xi \circ \sigma_i \\
&= 2^{-\delta} \sum_{i=1}^m \chi_{D_i} \left(\sum_{j=1}^m w_j \chi_{R_j} \circ \sigma_i \right) \\
&= 2^{-\delta} \sum_{i=1}^m \chi_{D_i} w_i \chi_{R_i} \circ \sigma_i = 2^{-\delta} \sum_{i=1}^m \chi_{D_i} w_i \\
&= 2^{-\delta} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \chi_{R_j} w_i = 2^{-\delta} \sum_{j=1}^m \chi_{R_j} \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\
&= 2^{-\delta} \sum_{j=1}^m \chi_{R_j} \mathbf{r} w_j = 2^{-\delta} \mathbf{r} \sum_{j=1}^m \chi_{R_j} w_j \\
&= 2^{-\delta} 2^{\delta} \xi = \xi.
\end{aligned}$$

□

Voltando ao caso geral, se tivermos que as derivadas Φ_i são constantes em D_i automaticamente o operador de Perron–

Frobenius pertencerá à C^*-álgebra gerada por $\{T_i\}_{i\in I}$ (este é o caso do Exemplo 2.24). No entanto, é possível representar $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ sem que imponhamos uma hipótese tão restritiva, e é aqui que entra em cena o espaço de Hilbert das semi-densidades $\mathbb{W}$ que apresentamos no primeiro Capítulo e que a partir de agora consideramos construído sobre o espaço mensurável $(X, \mathcal{F})$. Todas as notações serão mantidas, porém, antes de partirmos para a nova representação temos que falar sobre algumas tecnicalidades.

Fixemos duas medidas ω e ν finitas em $(X, \mathcal{F})$ e também $i \in I$. A partir de ω surgem naturalmente algumas outras medidas e estas serão importantes para a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ que apresentaremos posteriormente. A primeira delas é a medida $\omega \circ \sigma_i$, dada por $\omega \circ \sigma_i(A) = \omega(\sigma_i(A \cap D_i)),\ A \in \mathcal{F}$. Outra medida que aparece nas contas é a medida $\omega \circ \sigma_i^{-1}$, dada por $\omega \circ \sigma_i^{-1}(A) = \omega(\sigma_i^{-1}(A)),\ A \in \mathcal{F}$, sendo $\sigma_i^{-1}(A)$ a imagem inversa de A por σ_i. Esta medida é conhecida como medida *pushforward* induzida por σ_i. Note que $\omega \circ \sigma_i^{-1}(A) = \omega \circ \sigma_i^{-1}(A \cap R_i) = \omega(\sigma(A \cap R_i))$. Temos também as medidas $\omega \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i$ e $\omega \circ \sigma_i \circ \sigma_i^{-1}$, que com um conta simples verificamos que são dadas por $\left(\omega \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i\right)(A) = \omega(A \cap D_i)$ e $\left(\omega \circ \sigma_i \circ \sigma_i^{-1}\right)(A) = \omega(A \cap R_i)$. Surge então o que chamamos de medida *concentrada* num conjunto E que denotaremos ω_E, dada por $\omega_E(A) = \omega(A \cap E)$. Note que $\omega_E = \int \chi_E \, \mathrm{d}\,\omega$, logo $\mathrm{d}_\omega\, \omega_E = \chi_E$. Além disso, as medidas $\omega \circ \sigma_i^{-1}$ e $\omega \circ \sigma_i$ já são concentradas em D_i e R_i, respectivamente. Vamos agora mostrar alguns lemas que relacionam estas medidas que acabamos de definir e que serão importantes na construção de uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ em $\mathbb{W}$ e também para o cálculo do operador de Perron-Frobenius associada a tal representação. Antes, observamos que a Proposição 2.20 não exige nenhuma particularidade da medida μ e assim vale igualmente para qualquer outra medida.

Lema 2.29. *Se $\omega \ll \nu$, então $\omega \circ \sigma_i \ll \nu \circ \sigma_i$ e $\omega \circ \sigma_i^{-1} \ll \nu \circ \sigma_i^{-1}$. Além disso, $\mathrm{d}_{\nu \circ \sigma_i}(\omega \circ \sigma_i) = \chi_{D_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma_i$ $\mathrm{d}_{\nu \circ \sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1}) = \chi_{R_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{F}$. Observe que

$$\begin{aligned}
\omega \circ \sigma_i(A) &= \omega(\sigma_i(A \cap D_i)) \\
&= \int_{\sigma_i(A \cap D_i)} \mathrm{d}_\nu \, \omega \, \mathrm{d}\, \nu \\
&\overset{2.20}{=} \int_{A \cap D_i} \mathrm{d}_\nu \, \omega \circ \sigma_i \, \mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i) \\
&= \int_A \chi_{D_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma_i \, \mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i).
\end{aligned}$$

Logo, $\omega \circ \sigma_i \ll \nu \circ \sigma_i$ e $\mathrm{d}_{\nu \circ \sigma_i}(\omega \circ \sigma_i) = \chi_{D_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma_i$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_A \chi_{R_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma \, \mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1}) &= \int_{A \cap R_i} (\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma \, \mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1}) \\
&\overset{2.20}{=} \int_{\sigma_i^{-1}(A \cap R_i)} \mathrm{d}_\nu \, \omega \, \mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i) \\
&= \int_{\sigma_i^{-1}(A \cap R_i)} \mathrm{d}_\nu \, \omega \, \mathrm{d}\, \nu_{D_i} \\
&= \int_{\sigma_i^{-1}(A \cap R_i)} \chi_{D_i} \, \mathrm{d}_\nu \, \omega \, \mathrm{d}\, \nu \\
&= \int_{\sigma_i^{-1}(A \cap R_i) \cap D_i} \mathrm{d}\, \omega \\
&= \int_{\sigma_i^{-1}(A \cap R_i)} \mathrm{d}\, \omega \\
&= \omega \circ \sigma_i^{-1}(A \cap R_i).
\end{aligned}$$

Logo, $\omega \circ \sigma_i^{-1} \ll \nu \circ \sigma_i^{-1}$ e $\mathrm{d}_{\nu \circ \sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1}) = \chi_{R_i}(\mathrm{d}_\nu \, \omega) \circ \sigma$. $\square$

Lema 2.30. $\sqrt{\nu\omega} \circ \sigma_i = \sqrt{(\nu \circ \sigma_i)(\omega \circ \sigma_i)}$.

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{F}$. Escolha θ tal que $\nu \ll \theta$, $\omega \ll \theta$ e observe que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\nu\omega} \circ \sigma_i(A) = \sqrt{\nu\omega}(\sigma_i(A \cap D_i)) &= \int_{\sigma_i(A\cap D_i)} \sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu\, \mathrm{d}_\theta\, \omega}\, \mathrm{d}\,\theta \\
&\overset{2.20}{=} \int_{A\cap D_i} \sqrt{(\mathrm{d}_\theta\, \nu) \circ \sigma_i\ (\mathrm{d}_\theta\, \omega) \circ \sigma_i}\, \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i) \\
&= \int_A \sqrt{\chi_{D_i}(\mathrm{d}_\theta\, \nu) \circ \sigma_i\ \chi_{D_i}(\mathrm{d}_\theta\, \omega) \circ \sigma_i}\, \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i) \\
&\overset{2.29}{=} \int_A \sqrt{\mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i}(\nu \circ \sigma_i)\, \mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i}(\omega \circ \sigma_i)}\, \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i) \\
&= \sqrt{(\nu \circ \sigma_i)(\omega \circ \sigma_i)}(A).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.31. *Sejam $A \in \mathcal{F}$ e $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \nu)$. Então, temos que $(f, \nu_A)\Re(\chi_A f, \nu)$, sendo ν_A a medida concentrada em A.*

Demonstração. Devemos achar θ tal que $\nu \ll \theta$, $\nu_A \ll \theta$ e $f\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu_A} = \chi_A f \sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu}$, $\theta-$qtp. Tome $\theta = \nu$. $\square$

Lema 2.32. *Se $(\xi, \nu)\Re(\psi, \omega)$, então $(\xi \circ \sigma, \nu \circ \sigma_i^{-1})\Re(\psi \circ \sigma, \omega \circ \sigma_i^{-1})$ e também $\left(\xi \circ \sigma, \sum_{i\in I} \nu \circ \sigma_i^{-1}\right) \Re \left(\psi \circ \sigma, \sum_{i\in I} \omega \circ \sigma_i^{-1}\right)$.*

Demonstração. Escolha θ que satisfaz $\nu \ll \theta$, $\omega \ll \theta$ e lembre de que $\xi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu} = \psi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \omega}$, $\theta-$qtp. Assim,

$$\begin{aligned}
&\int \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i^{-1}}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} - \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}\right|^2 \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1}) \\
&\overset{2.29}{=} \int \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_i}(\mathrm{d}_\theta\, \nu) \circ \sigma} - \psi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_i}(\mathrm{d}_\theta\, \omega) \circ \sigma}\right|^2 \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1}) \\
&= \int_{R_i} \left|\xi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu} - \psi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \omega}\right|^2 \circ \sigma\, \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1}) \\
&\overset{2.20}{=} \int_{D_i} \left|\xi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \nu} - \psi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\, \omega}\right|^2 \mathrm{d}\,\theta = 0.
\end{aligned}$$

Segue que $\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i^{-1}}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} = \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta\circ\sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}$, $\theta \circ \sigma_i^{-1}$−qtp.

Para a segunda parte defina $\eta = \sum_{i\in I} \theta \circ \sigma_i^{-1}$ e note que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_\eta(\nu \circ \sigma_i^{-1}) &= \mathrm{d}_{(\theta\circ\sigma_i^{-1})}(\nu \circ \sigma_i^{-1})\,\mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_i^{-1})\\ &= \chi_{R_i}(\mathrm{d}_\theta\,\nu) \circ \sigma\,\mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_i^{-1}).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\mathrm{d}_\eta(\omega \circ \sigma_i^{-1}) = \chi_{R_i}(\mathrm{d}_\theta\,\omega) \circ \sigma\,\mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_i^{-1}).$$

Desta forma, $\mathrm{d}_\eta(\nu \circ \sigma_i^{-1})$ e $\mathrm{d}_\eta(\omega \circ \sigma_i^{-1})$ são suportadas em R_i e

$$\begin{aligned}&\int \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_\eta\left(\sum_{i\in I} \nu \circ \sigma_i^{-1}\right)} - \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_\eta\left(\sum_{i\in I} \omega \circ \sigma_i^{-1}\right)}\right|^2 \mathrm{d}\,\eta\\
&= \sum_{j\in I} \int_{R_j} \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\sum_{i\in I} \mathrm{d}_\eta\,\nu \circ \sigma_i^{-1}} - \psi \circ \sigma \sqrt{\sum_{i\in I} \mathrm{d}_\eta\,\omega \circ \sigma_i^{-1}}\right|^2 \mathrm{d}\,\eta\\
&= \sum_{j\in I} \int \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_\eta\,\nu \circ \sigma_j^{-1}} - \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_\eta\,\omega \circ \sigma_j^{-1}}\right|^2 \mathrm{d}\,\eta\\
&= \sum_{j\in I} \int \Bigg|\xi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\nu) \circ \sigma\,\mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_j^{-1})}\\
&\qquad -\psi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\omega) \circ \sigma\,\mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_j^{-1})}\Bigg|^2 \mathrm{d}\,\eta\\
&= \sum_{j\in I} \int \Bigg|\xi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\nu) \circ \sigma}\\
&\qquad -\psi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\omega) \circ \sigma}\Bigg|^2 \mathrm{d}_\eta(\theta \circ \sigma_j^{-1})\,\mathrm{d}\,\eta\\
&= \sum_{j\in I} \int \left|\xi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\nu) \circ \sigma} - \psi \circ \sigma \sqrt{\chi_{R_j}(\mathrm{d}_\theta\,\omega) \circ \sigma}\right|^2 \mathrm{d}(\theta \circ \sigma_j^{-1})\\
&= 0.\end{aligned}$$

Para concluir que a conta é igual a 0, observe que já calculamos cada um dos termos da soma na primeira parte da demonstração e estes são iguais a 0. □

Para cada $i \in I$, defina o operador $W_i : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ dado por

$$W_i(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) = \psi \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})}.$$

Lembre de que $\nu \circ \sigma_i^{-1}$ é concentrada em R_i e assim, pelo Lema 2.31, temos que

$$\begin{aligned} W_i(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= \psi \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} \\ &= \psi \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})_{R_i}} \\ &= \chi_{R_i}\psi \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.32, temos que W_i independe da escolha do representante e, além disso, por meio da Proposição 2.20, temos que

$$\begin{aligned} \int |\psi \circ \sigma|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1}) &= \int_{R_i} |\psi \circ \sigma|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1}) \\ &= \int_{D_i} |\psi|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma) \\ &= \int_{D_i} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\,\nu \end{aligned} \tag{2.3}$$

e assim $\psi \circ \sigma \in L^2(X, \mathcal{F}, \nu \circ \sigma_i^{-1})$ e W_i é um operador contínuo. Tome $\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$, $\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}$ em $\mathbb{W}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e note que se $\nu \ll \theta$ e $\omega \ll \theta$, então

$$\begin{aligned} &W_i\left(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} + \alpha \odot \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\right) = W_i\left(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} + (\alpha\psi)\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}\right) \\ &= W_i\left(\left(\xi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu} + (\alpha\psi)\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\omega}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\theta}\right) \\ &= \left(\xi\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\nu} + (\alpha\psi)\sqrt{\mathrm{d}_\theta\,\omega}\right) \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1})} \end{aligned}$$

$$= \left(\xi \circ \sigma \sqrt{(\mathrm{d}_\theta \nu) \circ \sigma} + (\alpha\psi) \circ \sigma \sqrt{(\mathrm{d}_\theta \omega) \circ \sigma}\right) \sqrt{\mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$\overset{2.29,2.31}{=} \left(\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta \circ \sigma_i^{-1}}(\nu \circ \sigma_i^{-1})}\right.$$

$$\left.+(\alpha\psi) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta \circ \sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}\right) \sqrt{\mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$= \left(\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta \circ \sigma_i^{-1}}(\nu \circ \sigma_i^{-1})}\right) \sqrt{\mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$+ \left((\alpha\psi) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}_{\theta \circ \sigma_i^{-1}}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}\right) \sqrt{\mathrm{d}(\theta \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$\overset{1.19}{=} \xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} + (\alpha\psi) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$= \xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} + \alpha(\psi \circ \sigma) \sqrt{\mathrm{d}(\omega \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$= W_i(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) + \alpha \odot W_i(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}).$$

Queremos verificar que a família $\{W_i\}_{i\in I}$ forneça uma representação da álgebra de Cuntz–Krieger e para isso precisamos calcular o adjunto dos operadores W_i. Sejam $\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$, $\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega} \in \mathbb{W}$ e θ tal que $\nu \circ \sigma_i \ll \theta$ e $\omega \ll \theta$. Note que

$$\left\langle W_i(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}), \xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right\rangle = \int_{R_i} \overline{\psi \circ \sigma}\, \xi \,\mathrm{d}\sqrt{\nu\ (\omega \circ \sigma_i^{-1})}$$

$$\overset{2.20}{=} \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \,\mathrm{d}\left(\sqrt{\nu(\omega \circ \sigma_i^{-1})} \circ \sigma_i\right)$$

$$= \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \,\mathrm{d}\sqrt{(\nu \circ \sigma_i)\omega_{D_i}}$$

$$= \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \left(\sqrt{\mathrm{d}_\theta(\nu \circ \sigma_i)\,\mathrm{d}_\theta\, \omega_{D_i}}\right) \mathrm{d}\,\theta$$

$$= \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \left(\sqrt{\mathrm{d}_\theta(\nu \circ \sigma_i)(\mathrm{d}_\omega\, \omega_{D_i}\, \mathrm{d}_\theta\, \omega)}\right) \mathrm{d}\,\theta$$

$$= \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \left(\sqrt{\mathrm{d}_\theta(\nu \circ \sigma_i)\,\mathrm{d}_\theta\, \omega}\right) \mathrm{d}\,\theta$$

$$= \int_{D_i} \overline{\psi}\ \xi \circ \sigma_i \,\mathrm{d}\sqrt{\omega(\nu \circ \sigma_i)}$$

$$= \left\langle \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}, \chi_{D_i}\xi \circ \sigma_i\sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i)}\right\rangle.$$

Assim, obtemos que os adjuntos W_i^* são da forma

$$W_i^*(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) = \xi \circ \sigma_i \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i)}.$$

Fixando $i \in I$ e $\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \in \mathbb{W}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
W_i W_i^*(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= W_i\left(\xi \circ \sigma_i \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i)}\right) \\
&= (\xi \circ \sigma_i) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i \circ \sigma_i^{-1})} \\
&= (\xi \circ \sigma_i) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_{R_i}} \\
&= \chi_{R_i}(\xi \circ \sigma_i) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \\
&= \chi_{R_i}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}
\end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned}
W_i^* W_i(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= W_i^*\left(\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})}\right) \\
&= (\xi \circ \sigma) \circ \sigma_i \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i)} \\
&= (\xi \circ \sigma) \circ \sigma_i \sqrt{\mathrm{d}\,\nu_{D_i}} \\
&= \chi_{D_i}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}
W_i W_i^* W_i(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= W_i\left(\chi_{D_i}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right) \\
&= \left(\chi_{D_i}\xi\right) \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} \\
&= \left(\chi_{D_i} \circ \sigma\ \xi \circ \sigma\right) \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} \\
&= \chi_{R_i}\xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} \\
&= \xi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\nu \circ \sigma_i^{-1})} \\
&= W_i(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}).
\end{aligned}$$

Por fim, falta verificar as relações $\sum_{j=1}^{m} W_j W_j^* = \mathbb{I}_{\mathbb{W}}$ e $W_i^* W_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} W_j W_j^*$. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} W_j W_j^*(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= \sum_{j=1}^{m} \chi_{R_j}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^{m} \chi_{R_j}\xi \Big)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \\
&= \Big(\xi \sum_{j=1}^{m} \chi_{R_j} \Big)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} a_{ij} W_j W_j^*(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) &= \sum_{a_{ij}=1} \chi_{R_j}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \\
&= \Big(\sum_{a_{ij}=1} \chi_{R_j}\xi \Big)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \\
&= \Big(\xi \sum_{a_{ij}=1} \chi_{R_j} \Big)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}.
\end{aligned}$$

A priori, não podemos escrever $\left(\xi \sum_{j=1}^{m} \chi_{R_j}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} = \xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$ e tampouco $\left(\xi \sum_{a_{ij}=1} \chi_{R_j}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} = \chi_{D_i}\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}$, pois as igualdades que pressupõem esta conclusão são $\mu-$qtp, ou seja, nada garante que seja uma igualdade $\nu-$qtp, para ν qualquer. Assim, temos duas alternativas, uma delas é supor que as igualdades do item 2 da Definição 2.16 e da condição *C-K* (equação (2.2)) sejam de conjuntos e não a menos de medida nula. É sob esta ótica que o autor de [13] trabalha.

A alternativa que nós propomos é representar $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ ainda através dos operadores W_i, só que agora restritos a um subespaço de $\mathbb{W}$, no qual temos controle sobre as medidas. De fato, observe que para qualquer medida ν que é absolutamente contínua com relação a μ valem as igualdades $\sum_{j=1}^{m} \chi_{R_j} = \mathbb{1}_X$ e $\sum_{a_{ij}=1} \chi_{R_j} = \chi_{D_i}$, $\nu-$qtp. Assim, nossa estratégia é definir uma classe de medidas que satisfaça as propriedades necessárias à boa definição dos operadores W_i quando considerados sobre $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, que é um subespaço fechado de $\mathbb{W}$ (Teorema 1.23). Defina $\mathcal{C} = \{\nu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}) \mid \nu \ll \mu\}$ e note que $\mathcal{C}$ é uma classe de medidas, além disso, vejamos que a classe $\mathcal{C}$ é fechada por composições com σ_i, σ_i^{-1} e também por média geométrica.

Lema 2.33. *Para todo $i \in I$, temos que $\mu \circ \sigma_i^{-1} \ll \mu$ e, além disso,* $\mathrm{d}_\mu(\mu \circ \sigma_i^{-1}) = \chi_{R_i} \Phi_i^{-1} \circ \sigma$.

Demonstração. Como $\Phi_i > 0$, $\mu-$qtp, em D_i, temos que $\chi_{R_i} \Phi_i^{-1} \circ \sigma > 0$, $\mu-$qtp, em R_i. Além disso, dado $A \in \mathcal{F}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_A \chi_{R_i} \Phi_i^{-1} \circ \sigma \,\mathrm{d}\,\mu &= \int_{A \cap R_i} \Phi_i^{-1} \circ \sigma \,\mathrm{d}\,\mu \\
&= \int_{\sigma_i(\sigma(A \cap R_i))} \Phi_i^{-1} \circ \sigma \,\mathrm{d}\,\mu \\
&\overset{2.20}{=} \int_{\sigma(A \cap R_i)} \Phi_i^{-1} \,\mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i) \\
&= \int_{\sigma(A \cap R_i)} \Phi_i^{-1} \Phi_i \,\mathrm{d}\,\mu \\
&= \mu(\sigma(A \cap R_i)) = \mu \circ \sigma_i^{-1}(A).
\end{aligned}$$

□

Observação 2.34. No Capítulo 3, vamos usar o Lema 2.33 para garantir que um sistema semirramificado de funções sempre admite um sistema mônico não negativo.

Teorema 2.35. *Sejam ν e ω pertencentes a $\mathcal{C}$. Então, para todo $i \in I$, $\nu \circ \sigma_i$, $\nu \circ \sigma_i^{-1}$ e $\sqrt{\nu\omega}$ pertencem a $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Fixe $i \in I$ e considere $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$. Então, pelo Lema 2.33, $0 = \mu \circ \sigma_i^{-1}(A) = \mu(\sigma_i^{-1}(A))$ e portanto $\nu \circ \sigma_i^{-1}(A) = \nu(\sigma_i^{-1}(A)) = 0$. Logo, $\nu \circ \sigma_i^{-1} \in \mathcal{C}$ e analogamente $\nu \circ \sigma_i \in \mathcal{C}$. Por fim, observe que, como ν e ω são absolutamente contínuas com relação a μ, $\sqrt{\nu\omega}(A) = \int_A \sqrt{\mathrm{d}_\mu \nu \ \mathrm{d}_\mu \omega} \ \mathrm{d}\,\mu = 0$. $\square$

Assim, temos que os operadores W_i e W_i^* restritos a $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ estão bem definidos e portanto dão origem a uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$.

Observação 2.36. Defina $\mathcal{D} = \{f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} \mid f \in L^2(X, \mathcal{F}, \nu),\ \nu \in \mathcal{C}\}$. Será que $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ é isomorfo a $\mathcal{D}$?

Primeiro, note que se $\nu \in \mathcal{C}$ e $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \nu)$, então $f\sqrt{\mathrm{d}\,\nu} = f\sqrt{\mathrm{d}_\mu \nu}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$ e assim $\mathcal{D} \subseteq \{\ g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \mid g \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)\}$. Além disso, como $\mu \in \mathcal{C}$, $\mathcal{D} \supseteq \{\ g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \mid g \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)\}$. Portanto, $\mathcal{D} = \{\ g\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \mid g \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)\}$, ou seja, $\mathcal{D}$ é um subespaço fechado de $\mathbb{W}$ que é isometricamente isomorfo a $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Agora, pela demonstração do Teorema 1.23, temos que $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ é isomorfo ao conjunto

$$\overline{\{\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\nu_i} \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{C},\ f_i \in B_\infty(X),\ \nu_i \in \mathcal{C}\}},$$

que, por um abuso de notação, chamaremos de $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ também. Assim, note que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \odot f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\nu_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}\,\nu_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i f_i\sqrt{\mathrm{d}_\mu \nu_i})\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \in \mathcal{D},$$

logo, $L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{D}$. Reciprocamente, tome $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \in \mathcal{D}$ e note que existe uma sequência de funções simples (e portanto limitadas) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo a f em $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$. Assim, note que $\{\varphi_n\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$ que converge a $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$. Portanto, $f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \in L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$ e consequentemente $\mathcal{D} \subseteq L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$. Segue que $\mathcal{D} = L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$ e, portanto, $L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$ é isomorfo a $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$.

Então, no caso em que os operadores W_i atuam em $L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$, podemos vê-los como operadores $\widetilde{W_i}$ em $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$. Além disso, como $W_i(f\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) = f \circ \sigma\sqrt{\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i^{-1})} = f\circ\sigma\sqrt{\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i^{-1})}\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$, em $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ teríamos que $\widetilde{W_i}(f) = f\circ\sigma\sqrt{\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i^{-1})}$. No Capítulo 3, vamos ver que a representação gerada pelos operadores $\widetilde{W_i}$ será chamada de representação associada a um sistema mônico.

A meta agora é associar o operador de Perron–Frobenius à representação obtida através da família $\{W_i\}_{i\in I}$. As contas que faremos valem para as duas representações que apresentamos acima, tanto a representação em $\mathbb{W}$, que pressupõe as igualdades de conjuntos, como a em $L^2(X,\mathcal{F},\mathcal{C})$. Lembre de que o operador de Perron–Frobenius foi tomado como o adjunto de um operador de translação por σ. Porém, como os elementos de $\mathbb{W}$ são compostos de uma função e uma medida, o que deve ser transladado por σ deve ser o par $\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}$ e não apenas a função ψ. Assim, gostaríamos de definir a translação por σ de uma classe $\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}$ por $\psi\circ\sigma\sqrt{\mathrm{d}(\omega\circ\sigma)}$ mas σ não é necessariamente injetora e portanto não garantimos que compor ω com σ seja uma medida. Para corrigir isso, note que em cada R_i a medida $\omega\circ\sigma_i^{-1}$ comporta-se como a medida $\omega\circ\sigma$. Assim, definimos a translação por σ, $W_\sigma : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ (ou $W_\sigma : L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C}) \to L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$), por

$$W_\sigma(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}) = \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}\left(\sum_{i\in I} \omega \circ \sigma_i^{-1}\right)}.$$

Segue do Corolário A.35 e da equação (2.3) que se $\psi \in L^2(X, \mathcal{F}, \omega)$, então $\psi \circ \sigma \in L^2\left(X, \mathcal{F}, \sum_{i\in I} \omega \circ \sigma_i^{-1}\right)$ e também que W_σ é contínuo. Além disso, segue da segunda parte do Lema 2.32 que W_σ independe da escolha do representante das classes. Concluindo, note que

$$\begin{aligned}
&\left\langle W_\sigma(\psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}), \xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}\right\rangle = \int \overline{\psi \circ \sigma}\,\xi\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\left(\sum_{i\in I}\omega\circ\sigma_i^{-1}\right)} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{j\in I}\int_{R_j} \overline{\psi \circ \sigma}\,\xi\,\mathrm{d}\sqrt{\nu\left(\sum_{i\in I}\omega\circ\sigma_i^{-1}\right)} \\
&\overset{2.20}{=} \sum_{j\in I}\int_{D_j} \overline{\psi}\,\xi\circ\sigma_j\,\mathrm{d}\sqrt{(\nu\circ\sigma_j)\left(\sum_{i\in I}\omega\circ\sigma_i^{-1}\circ\sigma_j\right)} \\
&= \sum_{j\in I}\int_{D_j} \overline{\psi}\,\xi\circ\sigma_j\,\mathrm{d}\sqrt{(\nu\circ\sigma_j)\ (\omega\circ\sigma_j^{-1}\circ\sigma_j)} \\
&= \sum_{j\in I}\int_{D_j} \overline{\psi}\,\xi\circ\sigma_j\,\mathrm{d}\sqrt{(\nu\circ\sigma_j)\omega_{D_j}} \\
&= \sum_{j\in I}\int_{D_j} \overline{\psi}\,\xi\circ\sigma_j\,\mathrm{d}\sqrt{(\nu\circ\sigma_j)\ \omega} \\
&= \sum_{j\in I}\left\langle \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}, \xi\circ\sigma_j\sqrt{\mathrm{d}(\nu\circ\sigma_j)}\right\rangle \\
&= \left\langle \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\omega}, \sum_{j\in I}\xi\circ\sigma_j\sqrt{\nu\circ\sigma_j}\right\rangle.
\end{aligned}$$

No caso em que X não é necessariamente igual a $\bigcup_{i\in I} R_i$, ou seja, no caso em que estamos considerando $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ representada em $L^2(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, a igualdade $(*)$, apresentada na conta anterior, decorre do fato que $\mathcal{C}$ é fechada por média geométrica.

Portanto, o operador de Perron–Frobenius W_σ^* é dado por

$$W_\sigma^*(\xi\sqrt{\mathrm{d}\,\nu}) = \sum_{i\in I} \xi \circ \sigma_i \sqrt{\nu \circ \sigma_i}$$

e assim $W_\sigma^* = \sum_{i\in I} W_i^*$ e consequentemente pertence à imagem da representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ gerada pelos operadores $\{W_i\}_{i\in I}$.

3 REPRESENTAÇÕES MÔNICAS

Neste Capítulo continuamos a trabalhar com os sistemas semirramificados de funções e representações de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. Nosso objetivo principal é classificar representações oriundas de sistemas mônicos. Vamos supor daqui por diante que $\mathbb{A}$ é primitiva.[1]

Definição 3.1. Sejam H um espaço de Hilbert e π uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ em $B(H)$. Denotando $Z_i = \pi(S_i)$, dizemos que π é uma representação ***mônica*** se existe $\xi \in H$ tal que

$$\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{(Z_\alpha Z_\alpha^*)\xi \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} = H.$$

Um tal ξ será chamado de ***vetor cíclico*** da representação π.

Observação 3.2. Na Definição acima, as composições Z_α e Z_α^* são tomadas como na Definição 2.9. Em outras palavras, uma representação é mônica se existe um vetor cíclico para a cópia da C^*-subálgebra comutativa $\mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ em $B(H)$.

Já nos deparamos ao longo do texto com uma representação mônica.

Teorema 3.3. *A representação do Exemplo 2.24 é mônica.*

Demonstração. Lembre de que a família $\{T_i\}_{i\in I}$ de operadores em $B(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{H}))$ era explicitamente dada por

$$T_i(\psi) = \chi_{R_i}\left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}}\psi\right) \circ \mathbf{s} = \chi_{[i]}\left(2^{\frac{\delta}{2}}\chi_{D_i}\ \psi\right) \circ \mathbf{s}.$$

[1] Veja a seção de matrizes no apêndice A

Além disso,

$$T_i^*(\psi) = \Phi_i^{\frac{1}{2}}\ (\psi \circ \mathbf{s}_i) = 2^{\frac{-\delta}{2}} \chi_{D_i}\ \psi \circ \mathbf{s}_i.$$

Afirmação. *Para toda palavra finita e admissível α vale que $T_\alpha T_\alpha^*(\psi) = \chi_{[\alpha]}\psi$, $\psi \in L^2(E_\mathbb{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$.*

Demonstração. Mostraremos este fato por indução em $|\alpha|$. Os casos $|\alpha| = 0$ e $|\alpha| = 1$ são triviais pois $T_\Lambda T_\Lambda^* = \mathbb{I}_{L^2(E_\mathbb{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})}$ e $T_i T_i^* = P_{R_i} = P_{[i]}$, $\forall i \in I$. Seja $k \geq 1$ e suponha que para qualquer palavra finita admissível α tal que $|\alpha| = k$ valha que $T_\alpha T_\alpha^*(\psi) = \chi_{[\alpha]}\psi,\ \psi \in L^2(E_\mathbb{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$. Vejamos que se $\beta = \beta_1 \ldots \beta_{k+1}$ tal fato vale para β. Fixe $\psi \in L^2(E_\mathbb{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ e denote por γ a palavra $\beta_2 \ldots \beta_{k+1}$. Note que

$$\begin{aligned}
T_\beta T_\beta^*(\psi) &= T_{\beta_1} T_\gamma T_\gamma^* T_{\beta_1}^*(\psi) = T_{\beta_1} T_\gamma T_\gamma^* (2^{\frac{-\delta}{2}} \chi_{D_{\beta_1}} \psi \circ \mathbf{s}_{\beta_1}) \\
&= T_{\beta_1}(\chi_{[\gamma]}\ 2^{\frac{-\delta}{2}} \chi_{D_{\beta_1}} \psi \circ \mathbf{s}_{\beta_1}) \\
&= \chi_{[\beta_1]}\ 2^{\frac{\delta}{2}} \left(\chi_{D_{\beta_1}} \circ \mathbf{s}\right) \left(\chi_{[\gamma]}\ 2^{\frac{-\delta}{2}} \chi_{D_{\beta_1}} \psi \circ \mathbf{s}_{\beta_1}\right) \circ \mathbf{s} \\
&= \chi_{[\beta_1]}\ \chi_{[\gamma]} \circ \mathbf{s}\ \chi_{D_{\beta_1}} \circ \mathbf{s}\ \psi \circ \mathbf{s}_{\beta_1} \circ \mathbf{s} = \chi_{[\beta_1]} \chi_{[\gamma]} \circ \mathbf{s}\ \psi \\
&= \chi_{[\beta_1]}\ \chi_{\bigcup_{\substack{i \in I \\ a_{i\beta_2}=1}} [i\gamma]}\ \psi = \chi_{[\beta_1] \cap \bigcup_{\substack{i \in I \\ a_{i\beta_2}=1}} [i\gamma]}\ \psi = \chi_{[\beta]}\psi.
\end{aligned}$$

$\square$

Defina $\xi = \mathbb{1}_{E_\mathbb{A}}$ e note que

$$\overline{\operatorname{span}_\mathbb{C}}\{(T_\alpha T_\alpha^*)\xi \mid \alpha \in E_F^\mathbb{A}\} = \overline{\operatorname{span}_\mathbb{C}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^\mathbb{A}\}.$$

Agora, mostremos que $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B} \mid \chi_B \in \overline{\operatorname{span}_\mathbb{C}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^\mathbb{A}\}\}$ coincide com a $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Para concluir isto, basta mostrar que $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra, neste caso $\mathcal{A}$ é uma

$\sigma-$álgebra que contém os cilindros e portanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, além disso, como, por definição, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, segue a igualdade.

Afirmação. *$\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra.*

Demonstração. $\mathcal{A}$ contém $\emptyset$ e $E_{\mathbb{A}}$ pois a função nula e $\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}$ pertencem a $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}$. Agora, se $A \in \mathcal{A}$, então $\chi_{E \setminus A} = \mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}} - \chi_A$ e como $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}$ é um subespaço temos que $\chi_{E \setminus A}$ também pertence ao conjunto. Por fim, tome $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$ e observe que vale o seguinte limite pontual

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_{k \to \infty} \chi_{\bigcup_{n=1}^{k} A_n} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n}.$$

Vejamos que este limite se dá na norma de $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$. Para tanto, note que a sequência de funções $\{\sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n}\}_{k \in \mathbb{N}}$ é crescente e está contida em $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}$. Além disso, como $\mathcal{H}$ é finita, temos que $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ e $\sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n}$ são quadrado integráveis. Por fim, observe que

$$\begin{aligned}
\left| \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} - \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} \right|^2 = \left| \chi_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n} \right|^2 &= \chi_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n} \\
&= \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} - \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n}.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da convergência monótona, temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \left\| \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} - \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} \right\|^2 \\
&= \lim_{k \to \infty} \int \left| \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} - \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} \right|^2 \mathrm{d}\, \mathcal{H}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} \int \left(\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} - \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} \right) \mathrm{d}\,\mathcal{H} \\
&= \lim_{k\to\infty} \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \,\mathrm{d}\,\mathcal{H} - \lim_{k\to\infty} \int \sum_{n=1}^{k} \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\,\mathcal{H} \\
&= \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \,\mathrm{d}\,\mathcal{H} - \int \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \,\mathrm{d}\,\mathcal{H} = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, $\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ é um limite (em norma) de elementos de $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}$, que é fechado. Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. □

Por fim, como $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}$ é um fechado que contém todas as funções simples que são mensuráveis. Logo, pelo Teorema A.37, $\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} = L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \mathcal{H})$. □

Voltaremos agora ao contexto dos sistemas semirramificados de funções. Lembrando de que temos fixado um sistema semirramificado de funções $\mathcal{S} = \{\sigma_i\}_{i\in I}$ que satisfaz a condição *C-K* e que tem σ como a função de codificação do sistema (ver página 55).

Definição 3.4. Dizemos que uma família de funções $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ é um ***sistema mônico*** de $\mathcal{S}$ se vale que

$$|f_i|^2 = \mathrm{d}_\mu(\mu \circ \sigma_i^{-1}), \ \forall i \in I \text{ e } f_i \neq 0.\ \mu - \text{qtp, em } R_i.$$

Além disso, se as funções f_i são não negativas dizemos que $\{f_i\}_{i\in I}$ é um sistema mônico não negativo de $\mathcal{S}$.

Observação 3.5. Claramente as funções f_i são suportadas em R_i, pois as medidas $\mu \circ \sigma_i^{-1}$ o são. Além disso, se $z \in \mathbb{C}$ e $|z| = 1$, então $\mathcal{S}_z = \left\{ z\sqrt{\mathrm{d}_\mu(\mu \circ \sigma_i^{-1})} \right\}_{i\in I}$ define um sistema mônico de $\mathcal{S}$.

Nas condições do Exemplo 2.24, note que $d(\mathbf{s}(\rho), \mathbf{s}(\tau)) = 2\ d(\rho,\tau)$ e portanto $\mathbf{s}$ é uma similaridade de razão 2. Assim, pelo Teorema A.19 temos que se $B \subseteq R_i$, então

$$\mathcal{H} \circ \mathbf{s}_i^{-1}(B) = \mathcal{H}\left(\mathbf{s}(B)\right) = 2^{\delta}\mathcal{H}(B).$$

Logo,

$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H} \circ \mathbf{s}_i^{-1}) = 2^{\delta}\chi_{R_i},\ \forall i \in I.$$

Segue que $\{2^{\frac{\delta}{2}}\chi_{R_i}\}_{i\in I}$ é um sistema mônico não negativo para o sistema semirramificado de funções associado ao Shift. Chamaremos sistemas mônicos associados ao Shift de ***inerentes***.

Usando o Lema 2.33, podemos mostrar que todo sistema semirramificado de funções admite um sistema mônico não negativo (basta definir $f_i = \sqrt{\chi_{R_i}\Phi_i^{-1} \circ \sigma}$). Em seguida, mostraremos uma recíproca do Lema, isto é, veremos que na presença de um sistema mônico o item 3 da Definição de sistema semirramificado de funções é automaticamente verificado.

Proposição 3.6. *Seja $\{f_i\}_{i\in I}$ um sistema mônico de $\mathcal{S}$ e defina $g_i = |f_i|^2$, $\forall\ i \in I$. Então $\mathrm{d}_{\mu}(\mu \circ \sigma_i) = \chi_{D_i}\frac{1}{g_i\circ\sigma_i}$ e, além disso, $\mathrm{d}_{\mu}(\mu \circ \sigma_i) > 0$, $\mu-$qtp, em D_i.*

Demonstração. Note que $g_i \circ \sigma_i > 0$, $\mu-$qtp, em D_i, pois $g_i > 0$, $\mu-$qtp, em R_i. Assim, se $A \in \mathcal{F}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_A \chi_{D_i}\frac{1}{g_i \circ \sigma_i}\,\mathrm{d}\,\mu &= \int_{A\cap D_i} \frac{1}{g_i \circ \sigma_i}\,\mathrm{d}\,\mu \\
&= \int_{A\cap D_i} \frac{1}{g_i \circ \sigma_i}\,\mathrm{d}\,\mu_{D_i} \\
&= \int_{A\cap D_i} \frac{1}{g_i \circ \sigma_i}\,\mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{2.20}{=} \int_{\sigma_i(A\cap D_i)} \frac{1}{g_i\circ\sigma_i\circ\sigma}\, \mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i^{-1}) \\
&= \int_{\sigma_i(A\cap D_i)} \frac{1}{g_i}\, \mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i^{-1}) \\
&= \int_{\sigma_i(A\cap D_i)} \frac{g_i}{g_i}\, \mathrm{d}\,\mu \\
&= \mu(\sigma_i(A\cap D_i)).
\end{aligned}
$$

Segue que

$$\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i) = \chi_{D_i}\frac{1}{g_i\circ\sigma_i}.$$

□

Observação 3.7. O Lema 2.33 e a Proposição 3.6 nos dizem que o item 3 da Definição de sistema semirramificado de funções é equivalente a existência de um sistema mônico para $\mathcal{S}$. Além disso, estes resultados nos garantem que $\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i^{-1})$ existe e é maior que zero, $\mu-$qtp, em R_i se, e só se, $\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i)$ existe e é maior que zero, $\mu-$qtp, em D_i. Como consequência, temos que em um sistema semirramificado de funções as medidas $\mu\circ\sigma_i$ e μ_{D_i}, bem como as medidas $\mu\circ\sigma_i^{-1}$ e μ_{R_i}, são equivalentes. De fato, como $\mu\circ\sigma_i \ll \mu_{D_i}$ e $\mu\circ\sigma_i^{-1} \ll \mu_{R_i}$, segue do Lema 2.29 que $\mu_{R_i} \ll \mu\circ\sigma_i^{-1}$ e $\mu_{D_i} \ll \mu\circ\sigma_i$. Portanto, temos que

$$\mu_{D_i} \ll \mu\circ\sigma_i \ll \mu_{D_i} \text{ e } \mu_{R_i} \ll \mu\circ\sigma_i^{-1} \ll \mu_{R_i}.$$

Isto nos diz que as funções σ_i são *automorfismos borelianos* sobre a sua imagem.

Seja $\{f_i\}_{i\in I}$ um sistema mônico de $\mathcal{S}$. Podemos construir uma representação de $\mathcal{O}_\mathbb{A}$ a partir das funções f_i que generaliza a representação que construímos anteriormente. Defina novos operadores T_i em $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$, dados por

$$T_i(\psi) = f_i\ \psi\circ\sigma.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\int |f_i\ \psi\circ\sigma|^2 \,\mathrm{d}\,\mu &= \int_{R_i} |f_i|^2\,|\psi\circ\sigma|^2 \,\mathrm{d}\,\mu \\
&= \int_{R_i} |\psi\circ\sigma|^2 \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i^{-1}) \\
&= \int_{D_i} |\psi|^2 \,\mathrm{d}\,\mu_{D_i} \le \int |\psi|^2 \,\mathrm{d}\,\mu.
\end{aligned}$$

Isto mostra que T_i está bem definido e que $\|T_i\| \le 1$.

O próximo passo é calcular o adjunto dos operadores T_i. Para isso, tome funções ψ e ξ em $L^2(X,\mathcal{F},\mu)$ e note que

$$\begin{aligned}
\langle T_i(\psi),\xi\rangle &= \int \overline{f_i\ \psi\circ\sigma}\ \xi \,\mathrm{d}\,\mu = \int_{R_i} \overline{f_i}\ \overline{\psi\circ\sigma}\ \xi \,\mathrm{d}\,\mu \\
&= \int\limits_{R_i} \frac{f_i}{f_i}\ \overline{f_i}\ \overline{\psi\circ\sigma}\ \xi \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_{R_i} \frac{\overline{\psi\circ\sigma}}{f_i}\ \xi \,\mathrm{d}(\mu\circ\sigma_i^{-1}) \\
&= \int\limits_{D_i} \frac{\overline{\psi}}{f_i\circ\sigma_i}\xi\circ\sigma_i \,\mathrm{d}\,\mu = \left\langle \psi, \chi_{D_i}\frac{\xi\circ\sigma_i}{f_i\circ\sigma_i}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$T_i^*(\xi) = \chi_{D_i}\frac{\xi\circ\sigma_i}{f_i\circ\sigma_i}.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
T_iT_i^*(\xi) &= f_i\left(\chi_{D_i}\frac{\xi\circ\sigma_i}{f_i\circ\sigma_i}\right)\circ\sigma \\
&= \chi_{R_i} f_i\ \chi_{D_i}\circ\sigma\frac{\xi\circ\sigma_i\circ\sigma}{f_i\circ\sigma_i\circ\sigma} \\
&= \chi_{R_i} f_i\ \frac{\xi\circ\sigma_i\circ\sigma}{f_i\circ\sigma_i\circ\sigma} \\
&= \chi_{R_i} f_i\ \frac{\xi}{f_i} = \chi_{R_i}\xi.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
T_i^* T_i(\xi) &= \chi_{D_i} \frac{T_i(\xi) \circ \sigma_i}{f_i \circ \sigma_i} = \chi_{D_i} \frac{(f_i\ \xi \circ \sigma) \circ \sigma_i}{f_i \circ \sigma_i} \\
&= \chi_{D_i} \left(\frac{f_i\ \xi \circ \sigma}{f_i} \right) \circ \sigma_i \\
&= \chi_{D_i} \chi_{R_i} \circ \sigma_i \xi \circ \sigma \circ \sigma_i = \chi_{D_i} \xi.
\end{aligned}
$$

Com contas análogas ao que fizemos na Proposição 2.22 mostra-se que os operadores T_i satisfazem as relações de Cuntz–Krieger. Representações como esta são chamadas de ***representações associadas a sistemas mônicos***.

Observação 3.8. Escolhendo o sistema mônico do Lema 2.33, em que $f_i = \sqrt{\chi_{R_i} \Phi_i^{-1} \circ \sigma}$, temos que

$$
T_i(\psi) = \chi_{R_i} \sqrt{\Phi_i^{-1} \circ \sigma}\ \psi \circ \sigma = \chi_{R_i} \left(\Phi_i^{-\frac{1}{2}}\ \psi \right) \circ \sigma.
$$

Desta maneira, recuperamos a representação que construímos no Capítulo 2.

Denotando $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$ a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada ao sistema mônico $\{f_i\}_{i \in I}$ que faz $\pi(S_i) = T_i$, surge uma pergunta natural: será que $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu))$ é uma representação mônica? Antes de responder a esta questão, relembremos o que significa equivalência unitária entre representações de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$.

Definição 3.9. Sejam $H_1,\ H_2$ espaços de Hilbert e $(\pi_1, B(H_1))$, $(\pi_2, B(H_2))$ representações de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$. Diremos que $(\pi_1, B(H_1))$ é ***unitariamente equivalente*** a $(\pi_2, B(H_2))$ se existir um operador unitário $U : H_2 \to H_1$ tal que

$$
\pi_2(a) = U^* \pi_1(a) U,\ \forall\ a \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}}.
$$

Definição 3.10. Sejam H_1, H_2 espaços de Hilbert e $\pi_1 : \mathcal{A}_1 \to B(H_1)$, $\pi_2 : \mathcal{A}_2 \to B(H_2)$ $*-$homomorfismos, em que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são C^*-álgebras. Suponha que exista um $*-$homomorfismo $\phi : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$. Diremos que π_1 é $\phi-$***unitariamente equivalente*** a π_2 se existir um operador unitário $U : H_2 \to H_1$ tal que

$$\pi_2(a) = U^*\pi_1(\phi(a))U, \ \forall\ a \in \mathcal{A}_2.$$

Teorema 3.11. *A representação $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu)))$, dada através dos operadores T_i, é mônica se, e somente se, é unitariamente equivalente a uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ que é associada a um sistema mônico inerente.*

Demonstração. Sejam $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$ um sistema mônico inerente e $(\pi_1, B(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)))$ a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada. Denotando $\pi_1(S_i)$ por V_i, temos que $V_i(\psi) = g_i\psi \circ \mathbf{s}$ e também $V_i^*(\psi) = \chi_{D_i}\dfrac{\psi \circ \mathbf{s}_i}{g_i \circ \mathbf{s}_i}$.

Suponha que exista um operador unitário $U : L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu) \to L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que $\pi_1(a) = U^*\pi(a)U$, para todo$a \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}}$, ou seja, suponha que $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu)))$ e $(\pi_1, B(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)))$ sejam unitariamente equivalentes. Neste caso, vale que $V_i = U^*T_iU$, $\forall i \in I$ e equivalentemente $UV_i = T_iU$, $\forall i \in I$. Verifica-se facilmente por indução que

$$UV_\alpha V_\alpha^* = T_\alpha T_\alpha^* U, \ \forall\ \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}$$

e também que (análogo ao que fizemos no Teorema 3.3)

$$V_\alpha V_\alpha^*(\psi) = \chi_{[\alpha]}\psi.$$

Por fim, defina $\xi = U(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}})$ e observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{T_\alpha T_\alpha^* \xi \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{T_\alpha T_\alpha^* U(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}) \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{U V_\alpha V_\alpha^* \mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{U \chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} \\ &= U\left(\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}\right).\end{aligned}$$

Assim, como U é uma isometria sobrejetora temos que

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{T_\alpha T_\alpha^* \xi \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\} &= U\left(\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}}\{\chi_{[\alpha]} \mid \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}\}\right) \\ &= U\left(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)\right) \\ &= L^2(X, \mathcal{F}, \mu).\end{aligned}$$

Mostremos agora a recíproca deste resultado, ou seja, se a representação $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu)))$ é mônica, existe um sistema mônico inerente de forma que a sua representação associada seja unitariamente equivalente a $(\pi, B(L^2(X, \mathcal{F}, \mu)))$.

Seja ξ um vetor cíclico para a representação π. Lembre do Teorema 2.11 que estabelece a existência de um $*-$isomorfismo $\Gamma : \mathcal{D}_{\mathbb{A}} \to (C(E_{\mathbb{A}}), \|\cdot\|_\infty)$ que satisfaz $\Gamma(S_\alpha S_\alpha^*) = \chi_{[\alpha]}, \ \forall \alpha \in E_F^{\mathbb{A}}$. Defina a função $h : (C(E_{\mathbb{A}}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ dada por $h(f) = \left\langle \xi, \pi(\Gamma^{-1}(f))\xi \right\rangle$ e note que h é um funcional linear positivo. De fato, se $f \in C(E_{\mathbb{A}})$ é tal que sua imagem está contida em $\mathbb{R}^+$, temos que $h(f) = \left\langle \pi(\Gamma^{-1}(\sqrt{f}))\xi, \pi(\Gamma^{-1}(\sqrt{f}))\xi \right\rangle \geq 0$. Assim, segue do Teorema de Representação de Riesz A.45 que existe uma medida de Radon ν (em particular, finita) em $(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B})$ tal que

$$h(f) = \int f \, \mathrm{d}\, \nu, \ \forall\ f \in C(E_{\mathbb{A}}).$$

Defina $\pi_1 : (C(E_{\mathbb{A}}), \|\cdot\|_\infty) \to B(L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu))$ por $\pi_1(f)(\psi) = f\psi$. Como funções contínuas em compactos são limitadas, é fácil ver que π_1 está bem definida e que é um $*-$homomorfismo. Vamos mostrar que π_1 é $\Gamma-$unitariamente equivalente a $\pi_{|\mathcal{D}_{\mathbb{A}}}$, ou seja, existe um operador unitário $U : L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu) \to L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que para todo $a \in \mathcal{D}_{\mathbb{A}}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
L^2(X,\mathcal{F},\mu) \arrow[r, "\pi_{|\mathcal{D}_{\mathbb{A}}}(a)"] \arrow[d, "U^*"'] & L^2(X,\mathcal{F},\mu) \\
L^2(E_{\mathbb{A}},\mathcal{B},\nu) \arrow[r, "\pi_1(\Gamma(a))"'] & L^2(E_{\mathbb{A}},\mathcal{B},\nu). \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

Defina $\widetilde{U} : (C(E_{\mathbb{A}}), \|\cdot\|_{L^2(\nu)}) \to L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ dada por $\widetilde{U}(f) = \pi(\Gamma^{-1}(f))\xi$. Claramente $\widetilde{U}$ é linear, vejamos ainda que $\widetilde{U}$ é uma isometria. Tome $f \in C(E_{\mathbb{A}})$ e note que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{U}(f)\|^2_{L^2(\mu)} = \left\langle \widetilde{U}(f), \widetilde{U}(f) \right\rangle &= \left\langle \xi, \pi(\Gamma^{-1}(f))^*\pi(\Gamma^{-1}(f))\xi \right\rangle \\
&= \left\langle \xi, \pi(\Gamma^{-1}(|f|^2)\xi) \right\rangle = h(|f|^2) \\
&= \int |f|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = \|f\|^2_{L^2(\nu)}.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema A.47, $C(E_{\mathbb{A}})$ é denso em $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$. Logo, pelo Teorema A.7, $\widetilde{U}$ se estende a uma isometria U de $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$ a $\overline{\pi(\Gamma^{-1}(C(E_{\mathbb{A}})))\xi} = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, pois π é mônica.

Verifiquemos que U faz comutar o diagrama anterior, isto é, $\pi(\Gamma^{-1}(f)) = U\pi_1(f)U^*$, $\forall f \in C(E_{\mathbb{A}})$. Tome $f \in C(E_{\mathbb{A}})$ e $w \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ e note que

$$w = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{j,k} T_{\alpha_{j,k}} T^*_{\alpha_{j,k}} \xi.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$, o operador $\sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{j,k} T_{\alpha_{j,k}} T^*_{\alpha_{j,k}}$ pertence a $\pi(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$, então existe $h_k \in C(E_{\mathbb{A}})$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{j,k} T_{\alpha_{j,k}} T^*_{\alpha_{j,k}} = \pi(\Gamma^{-1}(h_k)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\pi(\Gamma^{-1}(f))w &= \pi(\Gamma^{-1}(f)) \left(\lim_{k\to\infty} \pi(\Gamma^{-1}(h_k))\xi \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \pi(\Gamma^{-1}(f))\pi(\Gamma^{-1}(h_k))\xi \\
&= \lim_{k\to\infty} \pi(\Gamma^{-1}(fh_k))\xi = \lim_{k\to\infty} U(fh_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} U\pi_1(f)h_k \\
&= \lim_{k\to\infty} U\pi_1(f)U^*\pi(\Gamma^{-1}(h_k))\xi \\
&= U\pi_1(f)U^*(\lim_{k\to\infty} \pi(\Gamma^{-1}(h_k))\xi) \\
&= U\pi_1(f)U^* w.
\end{aligned}$$

Para cada $i \in I$, defina $V_i = U^* T_i U$ e $g_i = V_i(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}})$. O próximo passo é verificar $\{g_i\}_{i\in I}$ é um sistema mônico inerente e que $V_i(\psi) = g_i \psi \circ \mathbf{s}$, ou seja, os operadores V_i são exatamente os geradores da representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada ao sistema mônico $\{g_i\}_{i\in I}$. Para isso, vamos mostrar alguns resultados auxiliares.

Afirmação. $T_i^* \pi(\Gamma^{-1}(f)) T_i = \pi(\Gamma^{-1}(f \circ \boldsymbol{s}_i)),\ \forall f \in C(E_{\mathbb{A}})$.

Demonstração. Primeiramente vamos verificar este resultado nas funções características de cilindros. Seja $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_l$ uma palavra admissível e $\beta = \alpha_2 \ldots \alpha_l$. Note que

$$\chi_{[\alpha]} \circ \mathbf{s}_i = \chi_{\mathbf{s}_i^{-1}([\alpha])} = \begin{cases} \chi_{[\beta]}, & \text{se } \alpha_1 = i \\ 0, & \text{se } \alpha_1 \neq i. \end{cases}$$

Segue que

$$\pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]} \circ \mathbf{s}_i)) = \begin{cases} T_\beta T_\beta^*, & \text{se } \alpha_1 = i \\ 0, & \text{se } \alpha_1 \neq i. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$T_i^* \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]}))T_i = T_i^* T_\alpha T_\alpha^* T_i = T_i^* T_{\alpha_1} T_\beta T_\beta^* T_{\alpha_1}^* T_i.$$

Assim, se $\alpha_1 \neq i$ temos que $T_{\alpha_1}^* T_i = 0$ e, portanto, $T_i^* \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]}))T_i = 0$. Agora, se $\alpha_1 = i$ temos que

$$\begin{aligned} T_i^* T_{\alpha_1} T_\beta T_\beta^* T_{\alpha_1}^* T_i &= T_i^* T_i T_\beta T_\beta^* T_i^* T_i = T_\beta T_\beta^* T_i^* T_i T_i^* T_i \\ &= T_\beta T_\beta^* T_i^* T_i = T_\beta T_\beta^* \left(\sum_{a_{ij}=1} T_j T_j^* \right) \\ &= \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\beta]})) \sum_{a_{ij}=1} \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[j]})) \\ &= \sum_{a_{ij}=1} \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[j]\cap[\beta]})) \\ &= \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\beta]})) = T_\beta T_\beta^*. \end{aligned}$$

Usamos na conta acima que T_i^* é uma isometria parcial, ou seja, $T_i^* T_i T_i^* = T_i^*$ e também que $T_i^* T_i \in \pi(\mathcal{D}_{\mathbb{A}})$ e portanto comuta com $T_\beta T_\beta^*$. Assim,

$$T_i^* \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]}))T_i = \begin{cases} T_\beta T_\beta^*, & \text{se } \alpha_1 = i \\ 0, & \text{se } \alpha_1 \neq i. \end{cases}$$

Segue que o resultado vale para funções características de cilindros e portanto se estende por linearidade à subálgebra $\text{span}_{\mathbb{C}}\{\chi_{[\beta]} \mid \beta \in E_F^{\mathbb{A}}\}$. Esta, por sua vez, satisfaz as hipóteses do Teorema de Stone–Weierstrass A.36, logo, é uma subálgebra densa em $C(E_{\mathbb{A}})$. Assim, o resultado se estende a $C(E_{\mathbb{A}})$ por continuidade. $\square$

Prosseguindo, tome $f \in C(E_{\mathbb{A}})$ e note que

$$\begin{aligned}\int f|g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu &= \langle g_i, fg_i\rangle = \langle V_i(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}), fV_i(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}})\rangle \\ &= \langle U^*T_iU(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}), fU^*T_iU(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}})\rangle \\ &= \left\langle T_i\pi(\Gamma^{-1}(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}))\xi, U\pi_1(f)U^*T_i\pi(\Gamma^{-1}(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}))\xi\right\rangle \\ &= \left\langle T_i(\xi), \pi(\Gamma^{-1}(f))T_i(\xi)\right\rangle = \left\langle \xi, T_i^*\pi(\Gamma^{-1}(f))T_i(\xi)\right\rangle \\ &= \left\langle \xi, \pi(\Gamma^{-1}(f\circ \mathbf{s}_i))\xi\right\rangle = h(f\circ\mathbf{s}_i) = \int f\circ\mathbf{s}_i \,\mathrm{d}\,\nu.\end{aligned}$$

Em particular, para todo cilindro $[\alpha]$ temos que

$$\int_{[\alpha]} |g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu = \int \chi_{[\alpha]}\circ\mathbf{s}_i \,\mathrm{d}\,\nu = \int \chi_{\mathbf{s}_i^{-1}([\alpha])} \,\mathrm{d}\,\nu = \nu\circ\mathbf{s}_i^{-1}([\alpha]).$$

Definindo $\eta'([\gamma]) = \int_{[\gamma]} |g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu$, temos que η' é uma função na semiálgebra dos cilindros que satisfaz o Teorema de Carathéodory A.10 e que portanto admite uma única extensão a $\mathcal{B}$. Assim, como $\nu\circ\mathbf{s}_i^{-1}$ e η, dada por $\eta(B) = \int_B |g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu$, são medidas que estendem η', temos que

$$\nu\circ\mathbf{s}_i^{-1}(B) = \eta(B) = \int_B |g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu,\ \forall B\in\mathcal{B}.$$

Logo,

$$\mathrm{d}_\nu(\nu\circ\mathbf{s}_i^{-1}) = |g_i|^2.$$

Afirmação. $\pi(\Gamma^{-1}(f\circ \boldsymbol{s}))T_i = T_i\pi(\Gamma^{-1}(f)),\ \forall f\in C(E_{\mathbb{A}})$.

Demonstração. Seja $\alpha = \alpha_1\ldots\alpha_l$ uma palavra admissível. Denote por β a palavra $\alpha_2\ldots\alpha_l$ e note que

$$\chi_{[\alpha]}\circ\mathbf{s} = \chi_{\mathbf{s}^{-1}([\alpha])} = \chi_{\bigcup_{\substack{j\in I\\ a_{j\alpha_1}=1}}[j\alpha]}.$$

Assim,

$$\pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]} \circ \mathbf{s}))T_i = \sum_{a_{j\alpha_1}=1} T_{j\alpha}T_{j\alpha}^* T_i = \begin{cases} T_{i\alpha}T_{i\alpha}^* T_i, & \text{se } a_{i\alpha_1} = 1 \\ 0, & \text{se } a_{i\alpha_1} = 0. \end{cases}$$

Se $a_{i\alpha_1} = 0$, pelo item 1 da Proposição 2.10, temos que

$$T_i\pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]})) = T_iT_\alpha T_\alpha^* = 0.$$

Por outro lado, se $a_{i\alpha_1} = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]} \circ \mathbf{s}))T_i &= T_{i\alpha}T_{i\alpha}^* T_i = T_iT_\alpha T_\alpha^* T_i^* T_i \\ &= T_iT_i^*T_iT_\alpha T_\alpha^* = T_iT_\alpha T_\alpha^* \\ &= T_i\pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[\alpha]})). \end{aligned}$$

Concluindo, pelo Teorema de Stone–Weierstrass, o resultado se estende a $C(E_{\mathbb{A}})$. □

Agora, note que se $f \in C(E_{\mathbb{A}})$, temos que

$$\begin{aligned} V_i(f) &= U^*T_iU(f) = U^*T_i\pi(\Gamma^{-1}(f))(\xi) \\ &= U^*\pi(\Gamma^{-1}(f \circ \mathbf{s}))T_i(\xi) \\ &= (U^*\pi(\Gamma^{-1}(f \circ \mathbf{s}))U)(U^*T_iU(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}})) \\ &= \pi_1(f \circ \mathbf{s})V_i(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}) = (f \circ \mathbf{s})g_i. \end{aligned}$$

Assim, como $C(E_{\mathbb{A}})$ é denso em $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$, dada uma função $\psi \in L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$, existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C(E_{\mathbb{A}})$ tal que $\psi = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (limite na norma de $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$). Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\int |\psi \circ \mathbf{s} - f_n \circ \mathbf{s}|^2 |g_i|^2 \,\mathrm{d}\,\nu &= \int |\psi \circ \mathbf{s} - f_n \circ \mathbf{s}|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \mathbf{s}_i^{-1}) \\
&= \int_{R_i} |\psi \circ \mathbf{s} - f_n \circ \mathbf{s}|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \mathbf{s}_i^{-1}) \\
&= \int_{D_i} |\psi - f_n|^2 \,\mathrm{d}(\nu \circ \mathbf{s}_i^{-1} \circ \mathbf{s}_i) \\
&\leq \int |\psi - f_n|^2 \,\mathrm{d}\,\nu.
\end{aligned}$$

Ou seja, $g_i(f_n \circ \mathbf{s})$ converge em $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$ para $g_i(\psi \circ \mathbf{s})$ e portanto

$$V_i(\psi) = \lim_{n\to\infty} V_i(f_n) = \lim_{n\to\infty} g_i(f_n \circ \mathbf{s}) = g_i(\psi \circ \mathbf{s}).$$

Para que os operadores V_i sejam de fato uma representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada a um sistema mônico, é preciso garantir que $g_i \neq 0$, $\nu-$qtp, em $[i]$. Para isso, defina $N_i = \operatorname{supp}(g_i) = \{x \in E_{\mathbb{A}} \mid g_i(x) \neq 0\}$ e observe que $\nu(N_i \setminus [i]) = 0$, pois $|g_i|^2$ é suportada (a menos de medida nula) em $[i]$. Assim, sem perda de generalidade, considere que $N_i \subseteq [i]$. Vamos mostrar que $\chi_{[i]} = \chi_{N_i}$ para então concluir que $\nu([i] \setminus N_i) = 0$, como desejado.

Note que se $\psi \in L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$, então

$$\begin{aligned}
\chi_{[i]}\psi = \pi_1(\chi_{[i]})\psi &= U^*\pi(\Gamma^{-1}(\chi_{[i]}))U\psi \\
&= U^* T_i T_i^* U\psi = V_i V_i^*(\psi).
\end{aligned}$$

Assim,

$$V_i V_i^*(\psi) = \chi_{[i]}\psi. \tag{3.1}$$

Agora, vamos calcular explicitamente quem é V_i^*. Não podemos inferir ainda que, como na página 92, $V_i^*(\psi) = \chi_{D_i}\frac{\psi \circ \mathbf{s}_i}{g_i \circ \mathbf{s}_i}$, pois para chegar a este resultado usa-se o fato de que as funções que compõem um sistema mônico são diferentes de zero (a menos de medida nula) em R_i. Assim, tome ψ e φ em $L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu)$ e note que

$$
\begin{aligned}
\langle V_i(\psi), \varphi \rangle &= \int \overline{g_i \ \psi \circ \mathbf{s}} \ \varphi \, \mathrm{d}\,\nu = \int_{N_i} \overline{g_i} \ \overline{\psi \circ \mathbf{s}} \ \varphi \, \mathrm{d}\,\nu \\
&= \int\limits_{N_i} \frac{g_i}{g_i} \ \overline{g_i} \ \overline{\psi \circ \mathbf{s}} \ \varphi \, \mathrm{d}\,\nu = \int\limits_{N_i} \frac{\overline{\psi \circ \mathbf{s}}}{g_i} \ \varphi \, \mathrm{d}(\nu \circ \mathbf{s}_i^{-1}) \\
&\overset{2.20}{=} \int\limits_{\mathbf{s}(N_i)} \frac{\overline{\psi}}{g_i \circ \mathbf{s}_i} \varphi \circ \mathbf{s}_i \, \mathrm{d}\,\nu_{D_i} \\
&= \int\limits_{\mathbf{s}(N_i)} \frac{\overline{\psi}}{g_i \circ \mathbf{s}_i} \varphi \circ \mathbf{s}_i \, \mathrm{d}\,\nu \\
&= \left\langle \psi, \chi_{\mathbf{s}(N_i)} \frac{\varphi \circ \mathbf{s}_i}{g_i \circ \mathbf{s}_i} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
V_i^*(\varphi) = \chi_{\mathbf{s}(N_i)} \frac{\varphi \circ \mathbf{s}_i}{g_i \circ \mathbf{s}_i}.
$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
V_i V_i^*(\psi) &= g_i \left(\chi_{\mathbf{s}(N_i)} \frac{\psi \circ \mathbf{s}_i}{g_i \circ \mathbf{s}_i} \right) \circ \mathbf{s} \\
&= \chi_{N_i} g_i \ \chi_{\mathbf{s}(N_i)} \circ \mathbf{s} \frac{\psi \circ \mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}}{g_i \circ \mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}} \\
&= \chi_{N_i} \chi_{\mathbf{s}^{-1}(\mathbf{s}(N_i))} g_i \ \frac{\psi \circ \mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}}{g_i \circ \mathbf{s}_i \circ \mathbf{s}} \\
&= \chi_{N_i} \chi_{N_i} g_i \ \frac{\psi}{g_i} = \chi_{N_i} \psi.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Logo,

$$
\chi_{[i]} \overset{(3.1)}{=} V_i V_i^*(\mathbb{1}_{E_{\mathbb{A}}}) \overset{(3.2)}{=} \chi_{N_i}.
$$

Finalmente, denote por $(\pi_2, L^2(E_{\mathbb{A}}, \mathcal{B}, \nu))$ a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada ao sistema mônico $\{g_i\}_{i\in I}$, que leva S_i em V_i. Para observar a equivalência unitária entre as representações π e π_2, basta verificar que $U^*\pi(S_\alpha S_\beta^*)U = \pi_2(S_\alpha S_\beta^*)$, ou equivalentemente, $U^*T_\alpha T_\beta^* U = V_\alpha V_\beta^*$ e depois estender tal fato para $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ (ver página 52). $\square$

Por fim, mostraremos que a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ no espaço de Hilbert das semi-densidades $\mathbb{W}$, gerada pelos operadores W_i (ver página 76), é universal. Universal no sentido que toda representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ associada a um sistema mônico não negativo é englobada pela representação que é dada pelos operadores W_i. Este resultado foi mostrado no contexto das álgebras de Cuntz em [1, p.18].

Teorema 3.12. *Seja $\mathcal{L}$ a isometria canônica de $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ em $\mathbb{W}$, dada por $\mathcal{L}(\psi) = \psi\sqrt{\mathrm{d}\,\mu}$. Suponha que o sistema mônico $\{f_i\}_{i\in I}$ seja não negativo. Então para todo $i \in I$ o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} L^2(X,\mathcal{F},\mu) \arrow[r, "T_i"] \arrow[d, "\mathcal{L}"'] & L^2(X,\mathcal{F},\mu) \arrow[d, "\mathcal{L}"'] \\ \mathbb{W} \arrow[r, "W_i"'] & \mathbb{W}. \end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $\psi \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$. Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}T_i(\psi) &= \mathcal{L}(f_i\psi\circ\sigma) = (f_i\psi\circ\sigma)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \\ &= \left(\psi\circ\sigma\sqrt{\mathrm{d}_\mu(\mu\circ\sigma_i^{-1})}\right)\sqrt{\mathrm{d}\,\mu} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi \circ \sigma \sqrt{\mathrm{d}(\mu \circ \sigma_i^{-1})} = W_i(\psi \sqrt{\mathrm{d}\,\mu}) \\
&= W_i \mathcal{L}(\psi).
\end{aligned}
$$

$\square$

O operador $\mathcal{L}$ é chamado de ***entrelaçador*** das representações.

CONCLUSÃO

O objetivo inicial deste trabalho era estudar como construir famílias ortonormais de wavelets em fractais tendo como plano de fundo os sistemas semirramificados de funções ([17]). Devido à dificuldade de encontrar referências sólidas e claras para a construção do espaço de Hilbert das semi-densidades $\mathbb{W}$ e ao fato de que as representações associadas a sistemas mônicos surgiram como um exemplo natural de aplicação deste espaço, decidimos limitar o escopo do trabalho.

No Capítulo 2, vimos como associar representações de álgebras de Cuntz–Krieger $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ a um sistema semirramificado de funções e também o conceito de operador de Perron–Frobenius de um tal sistema. Neste contexto, surgiu naturalmente a representação da álgebra de Cuntz–Krieger no espaço das semi-densidades $\mathbb{W}$, esta assegurava que o operador de Perron–Frobenius pertencia à imagem da representação. No entanto, para construí-la foi preciso impor algumas hipóteses extras ao sistema semirramificado ou, como propusemos, restringir a representação a um subespaço de $\mathbb{W}$.

Desta nova proposta, surgiram as representações associadas a sistemas mônicos (Observação 2.36) e com elas as representações mônicas. O objetivo principal do terceiro Capítulo foi provar o Teorema 3.11 que estabelece uma relação entre representações mônicas e representações associadas a sistemas mônicos. Ao fim do Capítulo, generalizamos um resultado que foi mostrado para álgebras de Cuntz, e que dá um tom de universalidade a representação de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}}$ no espaço das semi-densidades.

Há generalizações do que aqui estudamos, tanto no sentido de sistemas semirramificados de funções quanto no sentido da álgebra a ser representada. Sistemas ramificados (*Branching systems*) tem sido usados para construir representações de álgebras de grafos e ultragrafos. Para mais informações ver [7], [8], [9], [10] e [11].

Apêndices

APÊNDICE A – PRÉ-REQUISITOS

Neste apêndice vamos relembrar algumas definições e teoremas que foram mencionados no texto. Nosso objetivo não é demonstrar resultados já consagrados nas literaturas clássicas, queremos apenas que o leitor tenha acesso rápido aos teoremas e definições para que possa avaliar com mais clareza os tópicos que foram desenvolvidos ao longo do trabalho. Revisaremos alguns tópicos de teoria de matrizes, análise funcional e teoria da medida.

A.1 Matrizes

Nesta seção definiremos matrizes redutíveis, irredutíveis e primitivas e em seguida forneceremos algumas caracterizações.

Definição A.1. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. O raio espectral de A é definido como

$$\mathbf{r}(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ autovalor de } A\}.$$

Definição A.2. Seja $P \in M_n(\mathbb{R})$. P será dita uma matriz de ***permutação*** se exatamente uma entrada em cada linha e em cada coluna tiver valor 1 e o restante das entradas for 0.

Definição A.3. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. A será dita ***redutível*** se existir uma matriz de permutação P tal que

$$P^T A P = \begin{bmatrix} B & C \\ 0_{n-r,r} & D \end{bmatrix},\ 1 \leq r \leq n-1.$$

Definição A.4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. A será dita ***irredutível*** se A não for redutível.

Definição A.5. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. A será dita ***primitiva*** se:

1. A é irredutível;
2. $\mathbf{r}(A) \neq 0$;
3. se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A, então $|\lambda_i| = \mathbf{r}(A)$ para um único i.

A seguir, fornecemos caracterizações para matrizes irredutíveis e primitivas cuja demonstração pode ser encontrada em [12, p.403, p.540].

Proposição A.6. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Então, A é irredutível se, e somente se, $(\mathbb{I}_n + A)^{n-1}$ tem todas as entradas maiores que zero, em que $\mathbb{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Além disso, A é primitiva se, e somente se, existe $k \geq 1$ tal que A^k tem todas as entradas maiores que zero.*

A.2 Teorema de extensão de operadores limitados

O Teorema a seguir possui versões ligeiramente diferentes, algumas no contexto de espaços métricos e outras restritas ao caso de espaços normados. Alguns livros de Análise funcional demonstram uma versão mais básica do que a utilizaremos neste trabalho. Por este motivo, apresentaremos aqui a versão que nos é mais útil junto de sua demonstração.

Teorema A.7. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados, X' e Y' espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear e limitado. Considere ainda $I_X : X \to X'$ e $I_Y : Y \to Y'$ isometrias lineares cujas imagens são densas em X' e Y' respectivamente. Sob tais hipóteses, existe um único operador linear e limitado $T' : X' \to Y'$ que faz comutar o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "I_X"'] & Y \arrow[d, "I_Y"] \\ X' \arrow[r, "T'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

Além disso, $||T'|| = ||T||$.

Demonstração. Vamos construir o operador T' e mostrar que satisfaz as propriedades desejadas. Fixe $w \in X'$ e escolha em X uma sequência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{I_X(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para w. Como I_X é isometria, temos que $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Além disso, como T é limitado, temos que $\{T(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo, $\{I_Y(T(w_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ é também de Cauchy em Y' e, portanto, convergente para um elemento que denotaremos por y_w.

Afirmação. *O elemento y_w independe da escolha da sequência $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Seja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma outra sequência tal que $\{I_X(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para w. Observe que $\{I_X(w_n - z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 e, portanto, $\{w_n - z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0. Concluímos então que $\{I_Y(T(w_n - z_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 e, consequentemente, que as sequências $\{I_Y(T(w_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I_Y(T(z_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para o mesmo limite. $\square$

Defina o seguinte operador:

$$\begin{aligned} T' : X' &\longrightarrow Y' \\ x &\longmapsto y_x. \end{aligned}$$

Pela Afirmação anterior, temos que T' está bem definido. Agora, fixe $v \in X$ e tome a sequência constante $\{v\}_{n\in\mathbb{N}}$ para calcular $T'(I_x(v))$. Desta forma, obtemos que

$$T'(I_X(v)) = I_Y(T(v)),$$

e portanto, T' faz comutar o diagrama do enunciado.

Afirmação. *T' é um operador linear e limitado, com $||T'|| = ||T||$.*

Demonstração. Sejam x e z pertencentes a X' e α um escalar. Escolha sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X tais que $\{I_X(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I_X(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para x e z, respectivamente. Assim, temos que

$$\begin{aligned} T'(x+\alpha z) &= \lim_{n\to\infty} I_Y(T(x_n+\alpha z_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} I_Y(T(x_n)) + \alpha \lim_{n\to\infty} I_Y(T(z_n)) \\ &= T'(x) + \alpha T'(z). \end{aligned}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \left|\left|T'(x)\right|\right| = \left|\left|\lim_{n\to\infty} I_Y(T(x_n))\right|\right| &= \lim_{n\to\infty} ||I_Y(T(x_n))|| \\ &= \lim_{n\to\infty} ||T(x_n)|| \leq \lim_{n\to\infty} ||T||\,||(x_n)|| \\ &= \lim_{n\to\infty} ||T||\,||I_X(x_n)|| = ||T||\,||x||\,. \end{aligned}$$

Como x foi tomado arbitrário, temos que T' é limitado e também $||T'|| \leq ||T||$. Por fim, escolha $u \in X$ tal que $\|u\| = 1$ e note que

$$\begin{aligned} ||T(u)|| = ||I_Y(T(u))|| &= \left|\left|T'(I_X(u))\right|\right| \\ &\leq \left|\left|T'\right|\right| \|I_X(u)\| = \left|\left|T'\right|\right| \|u\| \\ &= \left|\left|T'\right|\right|. \end{aligned}$$

Portanto, $||T|| \leq ||T'||$ e, por conseguinte, $||T|| = ||T'||$. □

Para a unicidade, suponha que exista um operador $T'' : X' \to Y'$ linear e limitado que faz comutar o diagrama do enunciado. Dado $x \in X'$, temos que existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $\{I_X(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Portanto,

$$\begin{aligned} T''(x) = T''(\lim_{n\to\infty} I_X(x_n)) &= \lim_{n\to\infty} T''(I_X(x_n)) \\ = \lim_{n\to\infty} I_Y(T(x_n)) &= T'(x). \end{aligned}$$

Segue que $T'' = T'$. □

Observação A.8. É fácil ver que se T é uma isometria, então T' é uma isometria.

A.3 Tópicos de medida e integração

Iniciamos apresentando o bem conhecido Teorema de extensão de Caratheodóry.

Definição A.9. Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma ***semiálgebra*** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.

2. Se $A, B \in \mathcal{C}$, então $A \cap B \in \mathcal{C}$.

3. Se $A \in \mathcal{C}$, então $X \setminus A$ pode ser expresso como uma união finita de elementos de $\mathcal{C}$, disjuntos dois a dois.

Teorema A.10 (EXTENSÃO DE CARATHÉODORY)**.** *Sejam $\mathcal{C}$ uma semiálgebra e $\eta : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma função satisfazendo:*

1. $\eta(\emptyset) = 0$.

2. $\eta\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n)$ *para toda sequência* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{C}$ *de conjuntos disjuntos dois a dois.($\sigma-$aditividade)*

3. *A função η satisfaz a propriedade de $\sigma-$ finitude, ou seja, existe uma sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $\eta(A_n) < +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Então, existe uma única medida $\eta*$ definida na $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{C}$ tal que $\eta*_{|\mathcal{C}} = \eta$.

Demonstração. [24, cap. 21, sç 2]. □

A.3.1 Medida de Hausdorff

Começaremos com uma condição necessária para que a imagem de um conjunto boreliano, via uma função contínua, seja também um conjunto boreliano.

Definição A.11. Um espaço métrico X é chamado de espaço métrico ***Polonês*** se X é separável e completo.

Teorema A.12. *Sejam X e Y espaços métricos Poloneses e $F : X \to Y$ uma função contínua. Se $A \subseteq X$ é boreliano e $F_{|A}$ é injetiva, então $F(A)$ é boreliano.*

Demonstração. [14, p.89]. □

Vamos agora tratar de uma classe muito especial de medidas, as *medidas de Hausdorff*. Podemos entender a medida de Hausdorff como uma generalização da medida de Lebesgue para o contexto de espaços métricos. Enquanto na medida de Lebesgue a função *volume* (comprimento, área, ...) desempenha papel fundamental, na medida de Haussdorff a função importante é o *diâmetro*, que está definido para todos os subconjuntos de um espaço métrico.

Fixe (M, d) um espaço métrico.

Definição A.13. Seja N um subconjunto de M e $s \geq 0$. Para cada $\varepsilon > 0$, defina $\mathcal{D}^\varepsilon$ o conjunto de todas as coberturas enumeráveis de N por subconjuntos de M com diâmetro menor ou igual a ε. Definimos a ***medida exterior de Hausdorff de dimensão s*** do conjunto N por:

$$\overline{\mathcal{H}}^s(N) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{\mathcal{G} \in \mathcal{D}^\varepsilon} \sum_{C \in \mathcal{G}} \operatorname{diam}(C)^s.$$

Observação A.14. Podemos restringir as coberturas apenas a conjuntos abertos ou apenas a conjuntos fechados.

Definição A.15. Seja $s \geq 0$. Dizemos que um subconjunto N de M é $\overline{\mathcal{H}}^s$***−mensurável*** no sentido de Carathéodory se para todo subconjunto A de M vale que

$$\overline{\mathcal{H}}^s(A) = \overline{\mathcal{H}}^s(A \cap N) + \overline{\mathcal{H}}^s(A \setminus N).$$

Em [16, p.71], mostra-se que para cada $s \geq 0$ o conjunto de todos os $\overline{\mathcal{H}}^s$−mensuráveis formam uma σ−álgebra que contém a σ−álgebra de Borel. Além disso, a medida exterior $\overline{\mathcal{H}}^s$ restrita aos seus mensuráveis torna-se de fato uma medida, sendo esta denotada por $\mathcal{H}^s$.

Teorema A.16. *Seja A um subconjunto boreliano de M. Então, é válida uma das três asserções:*

1. $\mathcal{H}^s(A) = 0, \ \forall s \geq 0,$
2. $\mathcal{H}^s(A) = \infty, \ \forall s \geq 0,$
3. *Existe único $s_0 > 0$ tal que $\mathcal{H}^s(A) = \infty, \ \forall s < s_0$ e $\mathcal{H}^s(A) = 0, \ \forall s > s_0$.*

Demonstração. [16, p.76]. □

Definição A.17. Nas condições do Teorema A.16, definimos a ***dimensão de Hausdorff*** de A por:

$$\mathrm{Dim}(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{H}^s(A) = 0, \ \forall s \geq 0 \\ \infty, & \text{se } \mathcal{H}^s(A) = \infty, \ \forall s \geq 0 \\ s_0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição A.18. Seja (N, d') um espaço métrico. Uma função $f : M \to N$ será chamada uma ***similaridade*** se existir $r > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) = r \cdot d(x, y), \ \forall x, y \in M.$$

Neste caso, o número r será chamado ***razão de similaridade*** de f.

Note que similaridades são funções contínuas e injetoras. Portanto, adicionando a hipótese que M e N são Poloneses, temos pelo Teorema A.12 que a imagem de um conjunto boreliano, via similaridades, é um conjunto boreliano.

Teorema A.19. *Suponha que M e N sejam Poloneses. Seja $f : M \to N$ uma similaridade de razão $r > 0$, $s \geq 0$ e B um boreliano de M. Então,*

$$\mathcal{H}^s(f(B)) = r^s \mathcal{H}^s(B).$$

Demonstração. [16, p.78]. □

Corolário A.20. *Sob as hipóteses do Teorema A.19,* $\mathrm{Dim}(f(B)) = \mathrm{Dim}(B)$.

Observação A.21. Todos os resultados e definições sobre a medida de Hausdorff mencionados aqui, são válidos para um conjunto qualquer, em vez de um boreliano, inclusive a definição de dimensão. Apenas deve-se tomar o cuidado com o fato de que alguns conjuntos não são mensuráveis e, portanto, a medida em questão é a medida exterior.

A.3.2 Integração e densidade

A seguir, apresentaremos importantes teoremas da teoria de medida e integração. Para enunciá-los de maneira mais simples, vamos fixar $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável e três medidas μ, ν e ω em $(X, \mathcal{F})$. Denotaremos por $\mathcal{N}(X, \mathcal{F})$ o conjunto de todas as ***funções mensuráveis*** de X para $\mathbb{C}$, já o conjunto de todas as funções mensuráveis de X para $[0, +\infty]$ será denotado por $\mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$. Além disso, sempre que mencionarmos o termo *convergência*, estaremos nos referindo à convergência pontual.

Proposição A.22. *Seja $f \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$. Então $f = 0$, $\mu-$qtp, se, e só se, $\int f \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.*

Demonstração. [3, p.34]. □

Proposição A.23. *Se $F \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$, então existe uma sequência crescente $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ de funções simples que converge para F.*

Demonstração. [3, p.13]. □

Teorema A.24 (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA MONÓTONA)**.** *Se uma sequência crescente $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ converge para uma função F, então $F \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ e*

$$\int F \ \mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \ \mathrm{d}\,\mu.$$

Demonstração. [3, p.31]. □

Teorema A.25 (TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DOMINADA DE LEBESGUE)**.** *Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mu-$integráveis em $\mathcal{N}(X, \mathcal{F})$. Se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\mu-$qtp, para uma função F e além disso, existe uma função $\mu-$integrável ϕ tal que $|\varphi_n| \leq \phi$ para qualquer n natural, então F é mensurável, $\mu-$integrável e*

$$\int F \ \mathrm{d}\,\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \ \mathrm{d}\,\mu.$$

Demonstração. Escreva $F = Re(F) + iIm(F)$, em que $Re(F)$ e $Im(F)$ são as partes real e imaginária de F, respectivamente. Em [3, p.44] temos a demonstração do Teorema da Convergência Dominada para o caso de funções a valores reais. Para estender ao caso complexo, basta observar que $\{Re(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Re(F)$ e $\{Im(\varphi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $Im(F)$ e então aplicar o caso real do Teorema. □

De posse do Teorema da convergência monótona, mostra-se que a função

$$\mathcal{F} \ni A \longmapsto \int_A F \ \mathrm{d}\,\mu$$

é uma medida, sendo $F \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ qualquer.Por outro lado, será que toda a medida em $(X, \mathcal{F})$ pode ser expressa por uma integral na medida μ? O que faremos a seguir é responder a esta pergunta.

Definição A.26. Diremos que ν é ***absolutamente contínua*** em relação a μ se dado $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(A) = 0$, então $\nu(A) = 0$. Neste caso, escreveremos $\nu \ll \mu$. No caso em que $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$, diremos que μ e ν são ***equivalentes*** e denotaremos $\mu \sim \nu$.

Sempre que quisermos obter uma medida que é absolutamente contínua em relação a outras duas, basta tomarmos a medida dada pela soma. De fato, se $(\mu + \nu)(A) = 0$, então $\mu(A) = \nu(A) = 0$. É fácil ver também que a relação $\sim$ é, de fato, uma relação de equivalência.

Definição A.27. Diremos que a medida μ é $\sigma-$***finita*** se existir uma sequência de conjuntos mensuráveis de medida finita $A_0, A_1, A_2 \ldots$ tais que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Teorema A.28 (TEOREMA DE RADON-NIKODÝM)**.** *Suponha que μ e ν sejam $\sigma-$finitas e que $\nu \ll \mu$. Então, existe uma função $f \in \mathcal{N}^+(X, \mathcal{F})$ tal que*

$$\nu(A) = \int_A f \ \mathrm{d}\,\mu, \ \forall \ A \in \mathcal{F}.$$

Além disso, f é única, $\mu-$qtp.

Demonstração. [3, p.85]. $\square$

Definição A.29. A função f do Teorema A.28 é chamada de ***derivada de Radon–Nikodým*** de ν em relação a μ e é classicamente denotada por $\frac{d\nu}{d\mu}$, no entanto, neste trabalho denotaremos por $d_\mu \nu$.

Há versões mais gerais do Teorema de Radon–Nikodým que tratam de medidas com sinal e também medidas complexas. Além disso, a função f pode ser construída de forma que retorne apenas valores reais. Para mais explicações, o leitor pode consultar [24, p.235] e [20, p.121].

Observação A.30. A função $\mathrm{d}_\mu \nu$ é $\mu-$integrável se, e só se, ν é finita. Outro fato fácil de se notar é que $d_\mu \mu = 1,\ \mu - \text{qtp}$.

Elencamos a seguir algumas propriedades a respeito das derivadas de Radon–Nikodým que explicam o porquê de nomearmos a função f de *derivada*. Vamos supor que estejamos nas condições do Teorema A.28. A demonstração destes fatos pode ser encontrada em [24, p.250].

Proposição A.31 (LINEARIDADE)**.** *Seja $c \geq 0$. Além disso, suponha que $\omega \ll \mu$. Então, temos que $\omega + c\nu \ll \mu$ e*

$$\mathrm{d}_\mu(\omega + c\nu) = \mathrm{d}_\mu \omega + c\ \mathrm{d}_\mu \nu.$$

Teorema A.32. *Para toda função $F \in \mathcal{N}(X, \mathcal{F})$ vale que*

$$\int F\ \mathrm{d}\nu = \int F\ \mathrm{d}_\mu \nu\ \mathrm{d}\mu,$$

no sentido que F é $\nu-$integrável se, e só se, $F\,\mathrm{d}_\mu \nu$ é $\mu-$integrável e existindo as integrais, vale a igualdade.

Corolário A.33 (REGRA DA CADEIA)**.** *Se ω é $\sigma-$finita e $\omega \ll \nu$, então temos que $\omega \ll \mu$ e*

$$\mathrm{d}_\mu \omega = \mathrm{d}_\nu \omega\ \mathrm{d}_\mu \nu.$$

Corolário A.34. *Suponha que $\mu \sim \nu$. Então, vale que*

$$\mathrm{d}_\nu \mu \;\; \mathrm{d}_\mu \nu = 1, \;\; \mu - qtp.$$

Corolário A.35. *Para toda função $F \in \mathcal{N}(X, \mathcal{F})$ tal que $\int F \;\, \mathrm{d}(\mu+\nu)$ existe, vale que*

$$\int F \;\; \mathrm{d}(\mu+\nu) = \int F \,\mathrm{d}\,\mu + \int F \,\mathrm{d}\,\nu.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&\int F \,\mathrm{d}\,\mu + \int F \;\; \mathrm{d}\,\nu \\
&= \int F \,\mathrm{d}_{(\mu+\nu)}\,\mu \;\; \mathrm{d}(\mu+\nu) + \int F \,\mathrm{d}_{(\mu+\nu)}\,\nu \;\; \mathrm{d}(\mu+\nu) \\
&= \int F \left(\mathrm{d}_{(\mu+\nu)}\,\mu + \mathrm{d}_{(\mu+\nu)}\,\nu\right) \;\; \mathrm{d}(\mu+\nu) \\
&= \int F \,\mathrm{d}_{(\mu+\nu)}(\mu+\nu) \;\; \mathrm{d}(\mu+\nu) = \int F \,\mathrm{d}(\mu+\nu).
\end{aligned}$$

□

Terminamos enunciando alguns teoremas sobre densidade e também o Teorema de representação de Riesz.

Teorema A.36 (STONE–WEIERSTRASS)**.** *Seja X um espaço topológico compacto e Hausdorff. Seja A uma subálgebra de $C(X)$ que detém as seguintes propriedades:*

1. *Auto-adjunção: Se $f \in A$, então $\bar{f} \in A$.*
2. *A é unital: $\mathbb{1}_X \in A$.*
3. *A separa pontos: Para quaisquer $x, y \in X$, existe uma função $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Então, A é densa em $C(X)$.

Demonstração. O resultado é mostrado em [21, p234] apenas para o caso de funções a valores reais e o caso geral é deixado como exercício. A extensão do resultado pode ser vista em [22, p.54]. □

Teorema A.37. *Seja $\mathcal{S}_0(X, \mathcal{F}, \mu)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de funções simples $\mu-$ integráveis. Então, para todo $p \in [1, +\infty)$ temos que $\mathcal{S}_0(X, \mathcal{F}, \mu)$ é denso em $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$.*

Demonstração. [24, p.452]. □

Fixe daqui por diante X um espaço topológico Hausdorff e $\mathcal{B}$ a $\sigma-$álgebra de Borel de X.

Definição A.38. Seja μ uma medida em $(X, \mathcal{B})$ e $E \in \mathcal{B}$. Diremos que μ é *regular externa* em E se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subseteq U,\ U \text{ aberto}\}.$$

Diremos que μ é *regular interna* em E se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E,\ K \text{ compacto}\}.$$

Diremos que μ é *regular* em E se μ é regular interna e externa em E. Além disso, diremos que μ é ***regular*** se é regular em todos os elementos de $\mathcal{B}$.

Definição A.39. Seja μ uma medida em $(X, \mathcal{B})$. Dizemos que μ é uma medida de ***Radon*** se:

1. μ é regular externa em todos os elementos de $\mathcal{B}$,

2. μ é regular interna em todos os abertos de X,

3. μ é finita em todos os compactos de X.

Uma ***medida complexa*** em $(X, \mathcal{B})$ é uma função $\eta : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ tal que $\eta(\emptyset) = 0$ e $\eta\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n)$ para toda sequência $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ de conjuntos em disjuntos dois a dois. De posse de uma medida complexa η em $(X, \mathcal{B})$, podemos definir $|\eta|$ que é a medida de ***variação total*** de η, dada por

$$|\eta|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\eta(B_i)|, \quad \forall E \in \mathcal{B},$$

sendo o supremo tomado sobre todas as partições enumeráveis $\{B_i\} \subseteq \mathcal{B}$ do conjunto E.

Observação A.40. Em [20, p.117,118] mostra-se que $|\eta|$ é uma medida finita em $\mathcal{B}$.

Definição A.41. Diremos que η é ***regular*** se $|\eta|$ for regular.

Observação A.42. Uma versão do Teorema de Radon–Nikodým (ver [20, p.121-125]) garante que existe um função mensurável $\theta : X \to \mathbb{C}$ tal que $|\theta(x)| = 1$, $\forall\, x \in X$ e

$$\int f \,\mathrm{d}\,\eta = \int f\theta \,\mathrm{d}\,|\eta|.$$

Assim, observe que

$$\left| \int |f|^p \,\mathrm{d}\,\eta \right| = \left| \int |f|^p \theta \,\mathrm{d}\,|\eta| \right| \leq \int |f|^p \,\mathrm{d}\,|\eta|$$

e também

$$\begin{aligned} \left| \int |f|^p \,\mathrm{d}\,|\eta| \right| &= \left| \int |f|^p \frac{\theta}{\theta} \,\mathrm{d}\,|\eta| \right| = \left| \int |f|^p \frac{1}{\theta} \,\mathrm{d}\,\eta \right| \\ &\leq \int |f|^p \left| \frac{1}{\theta} \right| \mathrm{d}\,\eta = \int |f|^p \,\mathrm{d}\,\eta. \end{aligned}$$

Segue das desigualdades acima que

$$L^p(X, \mathcal{B}, \eta) = L^p(X, \mathcal{B}, |\eta|).$$

Adicionando a hipótese de que X é localmente compacto, temos que o conjunto

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}) = \{\mu \mid \mu \text{ medida complexa regular em } (X, \mathcal{B})\}$$

é um espaço de Banach, sendo $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Teorema A.43 (TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ)**.** *Suponha que X seja localmente compacto. Então a função*

$$\Phi : \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{B}) \to C_0'(X), \text{ dada por } \Phi(\mu)(f) = \int f \, \mathrm{d}\, \mu$$

é um isomorfismo isométrico, em que $C_0'(X)$ é o dual topológico de $C_0(X)$.

Demonstração. [20, p.130] □

Ainda sob a hipótese de que X é localmente compacto, há uma segunda versão para o Teorema de Riesz no caso de funcionais lineares positivos em $C_c(X)$, que é o conjunto de todas as funções contínuas de suporte compacto em X.

Definição A.44. Seja $\tau : C_c(X) \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Diremos que τ é um funcional linear ***positivo*** se $\tau(f) \geq 0$ para toda função $f \geq 0$.

Teorema A.45. *Seja $\tau : C_c(X) \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo em $C_c(X)$. Então, existe uma única medida μ em $(X, \mathcal{B})$ tal que*

$$\tau(f) = \int f \, \mathrm{d}\, \mu, \ \forall f \in C_c(X).$$

Além disso, μ é uma medida de Radon.

Demonstração. [20, p.41] □

Observação A.46. Se X é compacto, então $C_c(X) = C_0(X) = C(X)$.

Teorema A.47. *Suponha que X seja localmente compacto e considere μ uma medida de Radon em $(X, \mathcal{B})$. Se $p \in [1, +\infty]$, então $C_c(X)$ é denso em $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.*

Demonstração. [24, p.486] $\square$

REFERÊNCIAS

1 Monic representations of the Cuntz algebra and Markov measures. *Journal of Functional Analysis*, 267. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 102.

2 W. Arveson. *Noncommutative Dynamics and E-Semigroups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 27.

3 Robert G Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 117, 118 e 119.

4 Sergey Bezuglyi and Palle Jorgensen. Representations of Cuntz-Krieger relations, dynamics on Bratteli diagrams, and path-space measures. 10 2014. Citado na página 15.

5 J. Cuntz and W. Krieger. A Class of C*-Algebras and Topological Markov Chains. *Inventiones Mathematicae*, 56:251, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 13, 53 e 54.

6 Maria Catarina L. Dias. From Cuntz-Krieger algebras to C*-algebras associated with shift spaces, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 51, 52 e 53.

7 Daniel Gonçalves, Hui Li, and Danilo Royer. Faithful representations of graph algebras via branching systems. 59, 12 2014. Citado na página 106.

8 Daniel Gonçalves, Hui Li, and Danilo Royer. Branching systems and general Cuntz–krieger uniqueness theorem for ultragraph C*-algebras. *International Journal of Mathematics*, 27(10):1650083, 2016. Citado na página 106.

9 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. Unitary equivalence of representations of graph algebras and branching systems. 2011. Citado na página 106.

10 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. Graph C*-algebras, branching systems and the Perron–Frobenius operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 391(2):457 – 465, 2012. Citado na página 106.

11 Daniel Gonçalves and Danilo Royer. Branching systems and representations of Cohn–Leavitt path algebras of separated graphs. *Journal of Algebra*, 422:413 – 426, 2015. Citado na página 106.

12 Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 110.

13 PALLE E. T. JORGENSEN. Iterated function systems, representations, and Hilbert spaces. *International Journal of Mathematics*, 15(08):813–832, 2004. Citado na página 79.

14 Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer Science & Business Media, 1995. Citado na página 115.

15 Marc Kesseböhmer, Manuel Stadlbauer, and Bernd Stratmann. Lyapunov spectra for KMS states on Cuntz-Krieger algebras. 256, 01 2006. Citado na página 71.

16 Natã Machado. Dimensão topológica e dimensão de Hausdorff, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 49, 115, 116 e 117.

17 Matilde Marcolli and Anna Maria Paolucci. Cuntz–Krieger algebras and wavelets on fractals. *Complex Analysis and Operator Theory*, 5(1):41–81, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 15, 69 e 105.

18 G.J. Murphy. *C*-algebras and Operator Theory*. Academic Press, 1990. Citado na página 53.

19 E. Nelson. *Topics in Dynamics: I Flows*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press, 1970. Citado na página 14.

20 Walter Rudin. *Real and Complex Analysis, 3rd Ed.* McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 120, 123 e 124.

21 V.S. Sunder. *Functional Analysis: Spectral Theory*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Springer, 1997. Citado na página 122.

22 Felipe A. Tasca. Teorema de Stone-Weierstrass para espaços localmente compactos, 2013. Citado na página 122.

23 Felipe A. Tasca. C*-álgebra de Cuntz–Krieger e produto cruzado parcial, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

24 J. Yeh. *Real Analysis: Theory of Measure and Integration,3rd Edition*. World Scientific, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 114, 120, 122 e 125.