QUADRO 1

Quadro demonstrativo das cidades de origem dos candidatos às Escolas Preparatórias no ano de 1957 e de seus respectivos índices de aprovação em MATEMÁTICA.

CIDADES	Candidatos examinados	Candidatos aprovados
Manaus	13	1
Belém	7	—
S. Luís	40	17
Terezina	21	6
Fortaleza	281	134
Natal	17	2
João Pessoa	27	7
Recife	58	10
Maceió	22	11
Aracaju	28	12
S. Salvador	21	5
Vitória	18	—
Rezende	17	7
D. Federal	486	131
S. Paulo	355	69
Curitiba	46	5
Florianópolis	24	5
P. Alegre	488	116
Juiz de Fora	44	7
Belo Horizonte	36	9
Ipameri	10	2
Cuiabá	10	—
Campo Grande	24	3
Soma	2.098	559

QUADRO 2

Quadro de distribuição dos candidatos inscritos aos exames de admissão às Escolas Preparatórias no ano de 1952 segundo os estabelecimentos de ensino secundário de origem.

ESTADOS	N.º de candidatos	N.º de candidatos
Amazonas	3	9
Pará	5	22
Maranhão	5	15
Piauí	7	16
Ceará	16	80
R. G. Norte	4	10
Paraíba	4	22
Pernambuco	17	24
Alagoas	7	22
Sergipe	3	25
Bahia	11	20
E. Santo	6	10
Rio de Janeiro	35	35
D. Federal	62	256
S. Paulo	66	133
Paraná	15	32
Sta. Catarina	10	24
R. G. Sul	51	225
M. Gerais	32	62
Goiás	4	9
M. Grosso	5	22
T. Acre	1	1
Ginásios não especificados		25
Soma	369	1.099

O Quadro 2 evidencia perfeitamente a escratificação, no campo do ensino secundário, da amostra representativa constituída pelos candidatos às Escolas Preparatórias.

Apresentamos o quadro referente ao ano de 1952 em
virtude de falta de dados mais recentes a respeito. Podemos,
entretanto, observando o quadro 1, concluir que a mesma
dispersão deve-se verificar atualmente não só quanto a dis-
tribuição regional semelhante dos candidatos como ainda pe-
lo número quase dobrado dos mesmos.

Devemos ressaltar ainda o lado sócio-econômico da es-
tratificação da amostra considerada, analisando as profissões
paternas dos candidatos. Baseados ainda em dados de 1952,
obtidos através de pesquisas realizadas, nêsse ano, pela Se-
ção de Estatística da então Diretoria de Ensino do Exército,
verificamos que as profissões paternas dos candidatos se a-
presentam em número de 115 que deixamos de enumerar a
fim de não alongarmos demasiado o presente trabalho. Con-
tudo, a título de exemplo citaremos dentre elas as de enge-
nheiro, advogado, médico, militar, jornalista, comerciante,
industrial, comerciário, industriário, ferreiro, pedreiro, pesca-
dor, estivador, etc.

2.0 — Análise de resultados

20.1 — Resultados dos exames de admissão às Escolas Preparatórias realizados no período 1953-1957.

ANOS	CANDIDATOS					
	Inscritos	Examinados	Aprovados	%	Aprovados em matemática	%
1953	1454	1109	263	23,7	265	23,9
1954	1907	1403	284	20,2	337	24,2
1955	—	—	—	—	—	—
1956	1938	1543	207	13,4	251	16,3
1957	2681	2113	453	21,4	559	26,5
Total	7980	6168	1207	19,6	1412	22,9

§ — Dados não obtidos.

20.2 — Análise sumária

A simples observação dos resultados constantes do Quadro 20.1 nos revela o baixo índice de aprovação em Matemática. Em 6168 candidatos submetidos à prova daquela disciplina, apenas 1412 lograram aprovação, cifra esta correspondente a apenas 22.9%.

Devemos salientar que nos grandes centros, justamente onde se acumula a maior parte dos candidatos, existem cursos especializados de preparação para o exame em foco que complementam apreciàvelmente o curso ginasial. Outro aspecto que não deve ser omitido é o de parte apreciável dos candidatos aprovados o serem sòmente em segunda tentativa.

O grau mínimo de aprovação por matéria é 3 o que importa em dizer que para sua aprovação basta ao candidato conhecer pouco mais de 30% do programa de cada ramo da matemática relativo ao 1.º ciclo secundário.

E' possível que as variáveis apontadas venham contribuindo, de maneira sensível para a elevação da porcentagem de aprovação que de outra forma teria seu nível mais reduzido.

No item "a" das Conclusões iniciais (pg. 7), afirmamos que os candidatos às Escolas Preparatórias constituem amostra representativa da população ginasial brasileira (1.º ciclo). Em consequência, podemos admitir, que os candidatos aprovados nos 4 anos considerados (1953-1954-1956-1957) ou seja 22,9% do total examinado, representam a parcela mais capacitada dessa amostra, quanto aos conhecimentos de matemática, quando não por maior dotação intelectual pelo menos por uma aprendizagem mais eficiente.

3.0 — Deficiências observadas

Aceitas as premissas supra, seria justa a expectativa de que os candidatos aprovados, apresentassem no início do curso das Escolas Preparatórias condições satisfatórias para a aquisição dos conhecimentos básicos da matemática, relativos ao 2.º Ciclo Secundário.

Entretanto, pela observação sistemática de inúmeros professôres de Matemática das Escolas Preparatórias, no contato diário com numerosas turmas de alunos que se sucedem cada ano e cuja origem já estudamos detidamente acima, chegou-se, de forma unânime, à conclusão que os mencionados alunos, além do desconhecimento de partes essenciais do programa de Matemática do 1.º Ciclo Secundário, têm revelado ainda:

a — falta de precisão nos enunciados e na interpretação das proposições em geral;
b — incapacidade para estabelecer generalizações e tirar conclusões;
c — aquisição insuficiente de uma linguagem simbólica;
d — tendência acentuada a realizar a aprendizagem através de memorização.

4.0 — Causas possíveis

Não temos intenção de discutir as possíveis causas das deficiências apontadas. Assunto vasto, complexo, onde múltiplas variáveis interferem, tem sido abordado por mestres eminentes, matemáticos invulgares que, com o brilho das grandes culturas associado à longa experiência, têm apontado pontos verdadeiros críticos.

Entretanto, na procura da causa essencial, faremos algumas interrogações. Poderíamos nós atribuir aos alunos as causas procuradas? Não nos parece viável que assim seja, tão evidente é a sua impossibilidade. Quanto aos mestres, aí estão as provas do contrário, desde que o fenômeno abrange todo o país, conforme bem demonstra a constância do mesmo no espaço, verificada através do comportamento da ampla amostra utilizada.

Seriam os programas os responsáveis pelas deficiências que nos preocupam? Não poderíamos afirmá-lo quando encontramos na Circular do Diretor do Ensino Secundário do Ministério da Educação, Prof. Paulo Acioli de Sá estas afirmações: — "Fica assim bem explícito: 1.º — que os programas não devem ser considerados como regras rígidas e que, pelo contrário, lhes deve ser dada uma interpretação "flexível" de modo que seja respeitada a autonomia que faz a dignidade do professor; 2.º — que tais programas pretendem fixar apenas as "diretrizes" essenciais e não devem, por conseguinte, ser entendidos, como descendo a detalhes e minudências que se deixam ao critério dos que ensinam". E adiante, na mesma Portaria: "Só compreendendo desse modo o ensino (e, por conseguinte, os programas) é que se poderá fazer com que os alunos, em lugar de estudarem mal muitas coisas, estudem bem o que é necessário e que hoje êles tantas vêzes não aprendem, como revela o desastroso resultado dos exames de admissão às Escolas de Engenharia e Arquitetura". A respeito ainda dos programas ressalta aquela autoridade a sua plena concordância com a "pri-

meira conclusão a que chegaram em abril de 1951 os professôres de Matemática do ensino superior e do ensino secundário que, reunidos em S. José dos Campos e com a participação do grande matemático F. Murnagham acharam que conviria reduzir o que atualmente se pretende ensinar, uma vez que não lhes parece possível que os professôres possam desenvolver com eficiência, todo o atual programa. De modo que o espírito com que, a nosso ver, deve ser feito o curso de Matemática está em ensinar menos para ensinar melhor".

Convém lembrar ainda que o Congresso de S. José dos Campos (1951) estudou largamente o assunto e teve suas decisões referendadas pelo Congresso dos Reitores, realizado em 1952.

Apesar da ampla liberdade expressa na Portaria acima para flexibilidade dos programas, as deficiências observadas, constantes do n.º 3.0, permaneceram, comprovando que os programas, por si, não constituem a causa fundamental.

Outras possíveis causas já suficientemente debatidas, poderiam ainda ser apontadas, porém nenhuma delas, por si só, suficiente para produzir as deficiências observadas.

5.0 — Conclusões finais

Como é de se notar, nenhum problema novo trazemos a debate no atual Congresso. Contudo é, a nosso ver, de tôda a conveniência o reestudo das "causas possíveis" das deficiências dos conhecimentos básicos de matemática dos alunos egressos do 1.º Ciclo Secundário, tendo em vista a importância das mesmas deficiências, pelos seus reflexos prejudiciais através do 2.º Ciclo Secundário e mesmo no Ensino Superior, no que se refere àquela disciplina.

Se almejamos o reestudo do assunto, apesar dos congressos anteriores, é porque julgamos não terem as medidas preconizadas, anulado as causas que, conforme evidenciamos, persistem lamentàvelmente.

Propomos o reestudo do assunto em foco, objetivando os aspectos constantes das letras a, b, c e d do n.º 3.0, quais sejam: as deficiências observadas que consideramos críticas na formação matemática do estudante.

Em conseqüência submetemos à apreciação do Congresso que ora se realiza, a discussão do presente problema a fim de que, analisadas as falhas apontadas e determinada a **causa essencial**, sejam apontados instrumentos hábeis para modificar o desenvolvimento do fenômeno em apreço.

6.0 — **Sugestões**

Imbuídos do mais alto espírito de cooperação, lembramos a necessidade de que, no ensino de Matemática no 1.º Ciclo Secundário, seja considerada, de maneira especial, a fase crítica da transição do ensino memorizado, predominante na Escola Primária, para o Ensino Racional, indispensável no decorrer daquele ciclo, cuja dificuldade principal parece residir em métodos que envolvam traços psicológicos correlatos.

Encarecemos finalmente, sejam as presentes sugestões analisadas e, se aprovadas, concretizadas sob a forma de recomendações aos órgãos competentes da República.

Conclusões aprovadas em plenário

1) — Que tôdas as deliberações finais do Congresso, relativas às diversas teses, proposições ou comunicações apresentadas, que mais estritamente se relacionam com o ensino do primeiro ciclo, sejam reunidas e levadas aos órgãos superiores do país. A essas recomendações seriam anexadas as sugestões específicas, referentes ao trabalho ora relatado, acaso formuladas pelos membros dêste seminário e aprovadas pela maioria.

2) — Que seja solicitada ao Govêrno — visto a autoridade dêste Congresso, ante o documento estatístico da Escola Preparatória, e outras razões se necessário — a nomeação de uma Comissão, condignamente remunerada, para, exclusivamente, poder dedicar-se ao problema focalizado. Essas pessoas trabalhariam na questão do melhor aproveitamento do ensino no 1.º ciclo e nas de admissão ao segundo ciclo dos estabelecimentos civis, colégios militares e escolas preparatórias das fôrças armadas, que fazem exigência de concurso prévio para admissão de alunos no último ciclo.

3) — Seja criado um Conselho Nacional de Professôres de Matemática — com êste ou aquêle nome — que chamaria a si, dentre outras obrigações, a de promover Congressos Nacionais de Ensino da Matemática, periòdicamente. Em cada conclave, as comissões porventura nomeadas, que recebessem remuneração oficial para realizar pesquisas educacionais pedidas pela Assembléia, seriam obrigadas a apresentar os relatórios atinentes às questões que provocaram sua criação no Congresso anterior.

Tese: — **Sôbre o conceito de ângulo cêntrico nos polígnos regulares**

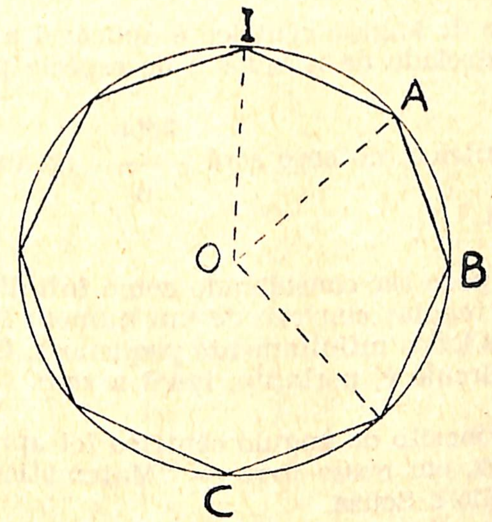
Autor — **Julio Cezar de Mello e Souza**

Relator — **Irmão Paulo Maria**

Considerando um polígono regular convexo (P) de **n** lados.

Se unirmos dois vértices quaisquer dêsse polígono ao centro vamos obter um ângulo central do polígno P.

Assim será um ânguo central do polígono regular (no caso um **octógno**). Veja a figura.



E' claro que um polígono regular P de **n** lados pode admitir vários ângulos centrais.

Há, porém, um ângulo central que, muitas vêzes, se apresenta nas construções gráficas e nos problemas de aplicação. É o ângulo central que se obtém unindo, ao centro, dois vértices consecutivas do polígono. A êsse ângulo central (caso particular) daremos a denominação de **ângulo cêntrico.**

Assim o ângulo central IOA (na figura) será um **ângulo cêntrico** do octógono.

Em relação ao ângulo cêntrico podemos observar:

1) O arco compreendido pelo ângulo cêntrico (no polígono regular inscrito de **n** lados) tem por corda o lado dêsse polígono.
2) No polígono regular convexo **P** de **n** lados, o ângulo cêntrico tem por medida $\frac{360^o}{n}$ ou $\frac{2\pi}{n}$
3) O ângulo cêntrico de um polígono convexo de **n** lados é igual ao ângulo externo dêsse polígono.
4) O ângulo cêntrico é sempre menor do que 180°.
5) O conceito de ângulo cêntrico é aplicável a um polígono regular estrelado de n lados e de espécie p. O valor do ângulo cêntrico, no caso será $\frac{360p}{n}$ (graus) ou $\frac{2\pi p}{n}$ (radianos).
5) O círculo pode ser considerado como **infinilátero regular** (polígono regular convexo de um número infinito de lados e êsses lados infinitamente pequenos). O ângulo cêntrico no círculo é, portanto, igual a zero.

Nota: O conceito de ângulo cêntrico foi apresentado, pela primeira vez, em nosso livro — "Matemática — 4.° ano, de Thiré e Mello e Souza.

Mais tarde o nosso conceito foi endossado por vários autores.

Propomos, agora, ao II Congresso Nacional de Ensino da Matemática que seja aprovada a seguinte **definição nominativa:**

Chama-se ângulo cêntrico um **polígono regular de n** lados ao menor ângulo que tem o vértice no centro dêsse polígono e é formado por dois raios consecutivos.

Justificativa: A designação de **cêntrico** dada a certo ângulo central (de acôrdo com a definição) tem por fim:

1) abreviar a linguagem;
2) simplificar a determinação de certas figuras;
3) dar maior precisão à linguagem matemática;
4) facilitar o **enunciado** de certos problemas;
5) permitir maior segurança na indicação dos dados para os problemas técnicos.

Conclusão aprovada em plenário

Chama-se ângulo cêntrico de um polígono regular ao menor ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

Tese: — **Sôbre as divergências verificadas na nomenclatura e no ensino, nas cadeiras de matemática e desenho**

Apresentada por: **Julio Cezar de Mello e Souza** e **Antonio Ribeiro Junior**

Relator: — **Prof. Ary Quintella**

Mais de uma vez, em livros, em artigos e em conferências, assinalamos as graves e sérias divergências que ocorrem, a cada momento, em relação à nomenclatura e ao ensino nas cadeiras de Desenho e Matemática.

Não raramente, no mesmo Colégio, e na mesma turma, são os alunos surpreendidos com chocantes contradições entre seus mestres.

Citemos, para servir de exemplo, um caso bastante corriqueiro:

Na aula de Matemática, o Professor explica a seus alunos que a **reta** não tem definição; chega mesmo a analisar e criticar as várias e famosas definições tentadas para a reta (de Arquimedes, de Platão, etc.) e mostra, finalmente, que a reta é caracterizada por meio de certos postulados, chamados "**postulados da reta**".

Alguns momentos depois, na aula de Desenho, o Professor, deslibado de tôda e qualquer preocupação de rigor, ensina, com a maior simplicidade, a seus alunos:

Reta é o caminho mais curto entre dois pontos.

Um aluno bastante evoluído percebe às vêzes, a contradição gritante entre as duas maneiras de apreciar o mesmo conceito.

Que faz êsse aluno?

Recorre ao Professor de Matemática. Pede esclarecimentos.

Põe em equação a sua dúvida:

— Como resolver o caso? A reta, afinal, tem ou não definição?

O Professor de Matemática, por uma questão comezinha de ética profissional, sente-se obrigado a justificar o

equívoco ou distração didática do colega e recorre a certos argumentos que são claudicantes e falsos.

As divergências mais graves, no binômio Desenho — Matemática, são assinaladas:

a) em relação a certas definições;

b) em relação ao ensino de certos conceitos;

c) em relação aos fundamentos lógicos de certas teorias.

Não entramos aqui no delicado problema relacionado com a **extensão matemática** de certos conceitos.

Assim, por exemplo, o matemático fala na curva definida pela equação do 2.º grau

$$y^2 + xy - 2x^2 = 0$$

e, no entanto, a pintura geométrica dessa equação cônica é constituída por **duas retas** que passam pela origem.

Como admitir que essas duas retas formem uma curva?

E' por uma questão muito simples: **extensão matemática** do conceito. Trata-se, realmente, do ponto de vista matemático, de uma **curva**, isto é, de uma **hipérbole degenerada.**

Do mesmo modo, a **curva** definida pela equação modulante

$$\Big|\, |x| - y + 1 \,\Big| = 5 \qquad \text{(m)}$$

está muito longe de ser uma curva para desenhista.

A pintura geométrica cartesiana da equação modulante (m) é constituída por dois ângulos iguais, de lados paralelos, com os vértices sôbre o eixo dos **y**.

Essas divergências que decorrem, como já dissemos, da **extensão de certos conceitos**, são aparentes, não interferem no ensino e só se apresentam nos Cursos Superiores.

Já a mesma coisa não acontece no Curso Médio.

As divergências entre o Desenho e a Matemática (especialmente nas quatro séries do 1.º ciclo) são prejudiciais ao ensino:

1.º) quando, das contradições mais graves, resultam confusões no espírito do aluno;

2.º) quando prejudicam a ação formativa da Matemática;

3.º) quando a ação metodológica de um Professor é prejudicada pela interferência do colega da cadeira correlata.

Citemos, em paralelo, algumas dessas divergências, sublinhando, especialmente, as mais freqüentes:

Em Matemática:

I
O Professor de Matem. apresenta o héptagono regular como um polígono regular não-euclidiano.

Em Desenho:

I
O Prof. de Desenho ensina, sem a menor restrição, a construção gráfica do heptágono regular.

II
Para o Prof. de Matem. não existe o hexágono regular estrelado.

II
Para o Prof. de Desenho o hexagrama é um hexágono regular estrelado.

III
O Prof. de Matem. define a semi-reta.

III
Para o Prof. de Desenho em geral, a semi-reta não existe.

IV
O Prof. de Matem. estuda e classifica os erros nas construções gráficas.

IV
O Prof. de Desenho, em geral, não faz a menor observação sôbre os erros nas construções gráficas.

V
O Prof. de Matem. admite a divisão de um segmento por um ponto situado no prolongamento dêsse segmento.

V
O Prof. de Desenho só admite que um ponto divida um segmento quando êsse ponto pertence ao segmento.

VI
O Prof. de Matem. divide as curvas em planas e reversas.

VI
O Prof. de Desenho não classifica as curvas.

VII
O Prof. de Matem. estuda o problema da divisão da circunferência em partes iguais e aprecia os casos da impossibilidade teórica.

VII
Para o Prof. de Desenho a divisão da circunferência em **n** partes iguais é sempre possível euclidianamente

VIII
O Prof. de Matem. assegura que a reta é indefinida.

VIII
O Prof. de Desenho, na cadeira de Geometria Descritiva, ensina a achar a verdadeira **grandeza** de uma reta.

IX
O Prof. de Matem. inclui os conceitos de reta, ponto e plano entre os conceitos sem definição.

IX
O Prof. de Desenho, em geral, define a reta, o ponto e o plano.

X
Para o Prof. de Matem. a espiral de Arquimedes tem dois ramos.

X
Para o Prof. de Desenho a espiral de Arquimedes só tem um ramo.

Convém observar, ainda, que certas definições apresentadas na Cadeira de Desenho são inaceitáveis em Matemática. Recìprocamente, muitas definições formuladas pelo Professor de Matemática não são endossadas pelo Professor de Desenho.

Citemos as seguintes:

definição de ângulo;
" " plano horizontal;
" " lugar geométrico;
" " curva;
" " superfície retilínea;
" " eixo de uma curva;
" " centro de uma curva;
" " tangente;
" " oval;
" " ciclóide;
" " ângulo sólido, etc.

Há certos pontos de grande interêsse que deviam ser incluídos no Programa de Desenho:

Simetria (estudo completo)
Homotetia (no plano — noções)
Cálculo gráfico (noções)
Álgebra Ornamental (noções)

Como não existe correspondência (no decorrer do ano letivo) entre os Programas de Desenho e Programa de Matemática, a aprendizagem nessas duas cadeiras é, em certos pontos, muito prejudicada.

O Professor de Desenho ensina **divisão em média e extrema razão** a uma turma que ainda não estudou êsse mesmo problema, do ponto de vista algébrico; o Professor de Desenho fala em **escala** a meninos que ainda não estudaram (em Matemática) grandezas proporcionais e assim por diante.

O Dr. Gildásio Amado, Diretor do Ensino Secundário, acredita que, para o progresso do ensino e maior eficiência da aprendizagem, nas cadeiras de Matemática e Desenho, torna-se indispensável:

1.º) que sejam abolidas as divergências em relação à nomenclatura;

2.º) que sejam suprimidas (ou reduzidas a um mínimo aceitável) as diferenças metodológicas;

3.º) que se estabeleça perfeita harmonia didática nos desenvolvimentos das diferentes partes dos programas (de Matemática e Desenho) que envolvem matéria comum.

Falou-nos o Dr. Gildásio Amado da possibilidade de ser nomeada uma comissão que ficaria encarregada de estudar êsse problema e elaborar uma solução, à semelhança do que já foi feito para a cadeira de Português.

Deseja, entretanto, prevalecer-se da magnífica oportunidade que é oferecida pela reunião (em Pôrto Alegre) dêste II Congresso Nacional de Ensino de Matemática — Congresso que reúne as figuras mais brilhantes do magistério e de maior cultura Matemática do Brasil.

E, assim, o Sr. Diretor do Ensino Secundário, por nosso intermédio, vem propor que o II Congresso Nacional do Ensino da Matemática estude o aludido problema e apresente planos de sugestões que possam conduzir os dirigentes do Ensino a uma solução rápida e definitiva.

Em relação ao problema Matemática — Desenho (assegurou-nos o Dr. Gildásio Amado) as judiciosas indicações dos Srs. Congressistas serão apreciadas e tomadas na devida consideração pelo Sr. Ministro da Educação e Cultura.

Pôrto Alegre, 1 de julho de 1957.

Malba Tahan
Antônio P. Ribeiro Jr.

Conclusões aprovadas em plenário

I) — Recomendar o 2.º Congresso Nacional de Ensino da Matemática ao Sr. Prof. Gildásio Amado, Diretor do Ensino Secundário, que aceite a nomeação de uma Comissão para promover a eliminação das divergências nas aulas de matemática e desenho, assim discriminadas: a) em relação à nomenclatura; b) em relação às diferenças metodológicas; c) em relação às diferentes partes do programa que envolvem matéria comum.

II) — Recomendar ao Sr. Diretor do Ensino Secundário que inclua nesta Comissão o número de professôres de desenho que julgue conveniente.

III) — Propor ao Diretor do Ensino Secundário que seja Presidente da Comissão Mista a ser organizada o Prof. Catedrático da Universidade do Brasil e do Instituto de Educação, Julio Cezar de Mello e Souza.

Dia 3/7/57

Tese: — **Por que os alunos não gostam de Matemática?**

Autor: — **Maria Frásca Leal**

Relator: — **Professôra Irma Peroni**

1 — O raciocínio matemático.
2 — A intuição aparente.
3 — A mecanização.
4 — O método.
5 — Que método adotar?
6 — A seleção dos problemas.
7 — A transferência da teoria para a prática.
8 — As duas noções de divisão.
9 — Os exemplos numéricos e a interferência.
10 — Problemas diretos e inversos.
11 — O professor e o aluno.
12 — O tempo e o programa.
13 — As simplificações.
14 — As dificuldades do sistema métrico.
15 — O livro adotado.
16 — Os tipos psicológicos.

POR QUE OS ALUNOS NÃO GOSTAM DA MATEMÁTICA?

(Baseado em experiências pessoais)

"O raciocínio matemático"

A Matemática, de tôdas as matérias do curso secundário, é aquela em que os alunos encontram maiores dificuldades, constituindo para alguns obstáculo intransponível. As causas desta aversão são múltiplas e bastante complexas, podendo ser feitas várias perguntas: Haverá alunos que dão e alunos que não dão para a Matemática? As exigências dos professôres ultrapassarão as possibilidades de compreensão dos alunos? A dificuldade estará na própria natureza da matéria, em sua exatidão e em seu caráter abstrato? A metodologia empregada será psicològicamente errada?

E' sòmente através da observação e da interpretação das dificuldades dos alunos que poderemos responder a estas perguntas, pois como "a criança não raciocina do mesmo modo que o adulto" só a análise de seu raciocínio permitirá verificar as causas de suas dificuldades quanto à Matemática.

Em primeiro lugar, verificamos que há realmente alunos que possuem menor capacidade de raciocínio matemático. Entretanto, não admitimos a existência de tipos psicológicos normais totalmente refratários ao rigor do cálculo e às dificuldades da abstração, pois se êste raciocínio matemático não pode ser adquirido integralmente, pode ser desenvolvido por um bom método. Há também aquêles que não gostam da Matemática, detestam-na, embora sejam, muitas vêzes, ótimos estudantes em outras matérias. São alunos que possuem as aptidões necessárias, talvez não em grau elevado, mas que não sabem como usá-las: não sabem estudar Matemática.

Quais são estas aptidões necessárias?

E' inegável que algumas matérias apresentam um mínimo de exigências quanto ao raciocínio. E' suficiente que o aluno se mantenha atento durante as aulas e constate fatos, realidades: são matérias que apelam mais para a intuição. Outras matérias exigem especialmente a memória, fixação de conceitos. Entretanto, a Matemática exige, como condição fundamental, o raciocínio: não só um raciocínio intuitivo, mas principalmente um raciocínio dedutivo.

Raciocínio matemático é aquêle que é exigido para a resolução de problemas matemáticos, sejam êles revestidos ou não de simbolismo matemático. Conseqüentemente, êste raciocínio exige um grande poder de abstração e de generalização. O caráter abstrato da Matemática exige dos alunos uma compreensão não do real, mas, do possível. Apresentando-se sob uma forma simbólica, ela trata dos números, que são abstrações, das suas relações e propriedades, que são abstratas, e do cálculo, que é um conjunto de regras também abstratas.

Para alguns alunos, parece contraditório o fato de ser a Matemática, simultâneamente, a mais exata e a menos concreta das ciências. Entretanto, exatidão e abstração são características que não se excluem: a Matemática é exata por admitir sòmente soluções rigorosas e é abstrata porque opera sôbre símbolos.

E são justamente estas duas características que constituem os maiores obstáculos para os adolescentes. Êles se sentem desconcertados pelo fato de a Matemática não admitir, como as outras matérias geralmente admitem, aspectos intermediários, pois de sua condição de ciência exata decorre que as definições têm ou não sentido, as soluções são certas ou erradas. Quanto à abstração, embora êles compreendam uma operação concreta, encontram dificuldades em expressá-la em linguagem abstrata e, mais ainda, em operar sôbre o simbolismo desta linguagem abstrata. Como exemplo do que afirmamos temos os alunos que não sabem "ler problemas" e, muito menos, "armar uma equação".

"A intuição aparente"

A oposição entre o raciocínio e intuição também influi sôbre a capacidade de aprender. Na Matemática, muitas vêzes o que a intuição sugere não é o que a dedução demonstra, e isto assusta os alunos. E' preciso que êles distingam a intuição matemática da intuição aparente, e é o professor que deve levá-los a estabelecer esta distinção. Êle deve adaptar seus métodos ao grau de desenvolvimento intelectual dos alunos.

Para as crianças e adolescentes, a principal dificuldade no estudo está, não na matéria em si, mas, na maneira como é apresentada. Êste aspecto psicológico deve ser considerado pelo professor ao adotar um método de ensino: não é suficiente que o professor seja um bom matemático, é necessário que êle seja um bom pedagogo, que saiba adaptar seus métodos e também a matéria às leis de desenvolvimento mental dos adolescentes.

A experiência demonstra que, muitas vêzes, aquilo que o professor, com um raciocínio lógico perfeito, procura ensinar a um aluno, êste não compreende, ao passo que fàcilmente compreende a explicação imprecisa e rápida que um colega lhe dá. Atribuímos esta aparente incoerência ao fato de os alunos se acharem psicològicamente mais próximos entre si que do professor.

Isto vem comprovar o quanto o raciocínio do adolescente difere do raciocínio do adulto: enquanto o professor tenta, inùtilmente, descobrir a causa da incompreensão do aluno e resolver suas dificuldades, qualquer colega, com uma lógica

imperfeita, consegue esclarecê-lo. A causa mais provável é o o professor seguir um raciocínio dedutivo e o aluno geralmente guiar-se pela própria intuição.

"A mecanização"

As experiências que decorrem da observação dos adolescentes e de suas dificuldades são múltiplas. Para a maioria dos alunos, é a Matemática um labirinto misterioso onde se perdem e no qual temem penetrar. Assim, desistem de prestar atenção às aulas, interiormente julgando-se incapazes de decifrar o grande enigma que a Matemática é para êles. Alguns, nem ao menos tentam resolver os problemas que lhes são propostos. Outros, procuram decorar fórmulas sem compreender como foram deduzidas; mecanizam o que não conseguem entender. Muitos alunos preferem guardar de memória uma fórmula bastante complicada a aprender uma regra mais simples, fácil de substituí-la.

O aspecto mais sério desta memorização é que o aluno, quando consegue decorar uma fórmula, não tem mais interêsse em compreendê-la. Ao aplicá-lo, sabe que **é assim**, mas não, **por que é assim.**

Há sempre perigo de o aluno que tem boa memória deixar de raciocinar e limitar-se a mecanizar, surgindo como conseqüência a formação de muitas idéias falsas sôbre a Matemática. Esta terrível falta de lógica não é, em realidade, senão uma lógica aparente que os alunos formam para si.

As idéias falsas, depois de formadas, são difíceis de destruir. Há alunos que não têm nenhuma base matemática porque princípios errados que êles mesmos criaram impedem a sua compreensão. Não entendem nada porque tudo lhes parece contraditório com a falsa lógica que adquiriram baseados em sua intuição aparente. A razão é simples: o aluno que decora uma fórmula ou uma regra sem compreendê-la pode aplicá-la, mas, considera a Matemática uma ciência completamente arbitrária, baseada em convenções inúteis e sem nenhuma correspondência com a realidade.

Não convém, pois, fazer com que os alunos apliquem fórmulas que só mais tarde serão deduzidas, porque então já não haverá mais interêsse em verificar se aquelas fórmulas são ou não verdadeiras. Descobrir que aquilo que durante algum tempo êles foram obrigados a aceitar como verdadeiro — uma espécie de postulado do professor — é realmente verdadeiro, geralmente não os convence. E' preciso que tôda fórmula adotada seja precedida de uma demonstração compreensível aos alunos, e seguida de aplicações numéricas, a fim de que êles percebam que a fórmula é verdadeira não só teòricamente, mas também pràticamente.

"O método"

Muito influi na aprendizagem dos alunos o método do professor. Após cada dedução devem ser dados vários exemplos, pois só assim os alunos fazem uma abstração e generalizam. A grande dificuldade que os alunos encontram em generalizar o que aprenderam pode ser constatada através da resolução de problemas: para êles, cada problema é um problema novo; não conseguem fàcilmente abstrair o que há de comum em problemas do mesmo tipo.

Fica assim justificada a necessidade de numerosos exemplos, de preferência após cada dedução, e não só no fim da aula ou na aula seguinte. Na Matemática, é facil o aluno julgar-se perdido entre símbolos misteriosos e sem significado. Por isto é preciso que êle resolva cada dificuldade no momento em que é apresentada, em vez de passar de uma para outra sem nada entender, dêste modo multiplicando as dúvidas e obstáculos.

Alguns professôres julgam que é mais facil o aluno primeiro mecanizar e depois raciocinar. Assim sendo, fazem uma inversão nos métodos de ensino da Matemática, dificultando ainda mais a compreensão dos alunos. Ao ensinarem uma regra, não se preocupam em que o aluno a entenda, e sim em que saiba aplicá-la mecânicamente. Depois, paseados nesta regra deduzem outras, julgando que os conhecimentos que o aluno tiver mecanizado facilitarão uns a compreensão dos outros, compensando-se as dificuldades. Pensam que o essencial é o aluno adquirir uma técnica, o que terá como conseqüência a compreensão de tudo aquilo que êle mecanizou sem compreender.

Êste é o método mais simples de fazer com que os alunos ignorem as mais básicas leis da Matemática, e adquiram uma irresistível aversão até pelos números. Mesmo supondo que adquiram esta técnica, êles formarão uma infinidade de idéias erradas, e é mais difícil destruir uma idéia errada do que formar uma idéia nova. Sendo a Matemática essencialmente dedutiva, não é possível adotar êste método, pois só o aluno que tiver compreendido bem o que é básico poderá compreender o que se segue. Êle só poderá deduzir se adquiriu uma base verdadeira: não é possível deduzir conseqüências verdadeiras de princípios falsos.

"Que método adotar?"

Um mesmo problema, conforme fôr apresentado, poderá fazer com que o aluno raciocine ou simplesmente mecanize. Uma diferença sutil na apresentação fará com que o problema interesse ou não ao aluno. Por exemplo, o professor poderá seguir um ou outro dêstes caminhos:

a) Enunciar uma regra ou teorema e depois demonstrar.
b) Primeiramente demonstrar e só depois enunciar.

Geralmente o primeiro caminho é o mais usado, entretanto, o segundo é psicològicamente mais simples para o aluno, pois se o professor apresentar a matéria como no segundo caminho, sob forma de problema, os alunos terão interêsse e curiosidade em descobrir um processo de demonstração que os leve à solução que ignoram. Exemplo:

Adotando o primeiro caminho, o professor afirmará aos alunos: — Qualquer que seja X diferente de zero, temos $X^0 = 1$. E a seguir fará a demonstração do que afirma. Os alunos sempre consideram êste enunciado absurdo, pois a intuição lhes diz que $X^0 = X$ ou que $X^0 = 0$. Assim sendo, êles geralmente não se interessam pela demonstração do professor, e procuram simplesmente decorar que $X^0 = 1$, o que não conseguem, pois isto não tem significado para êles.

Entretanto, se o professor perguntar
— Vamos demonstrar qual é o valor de X^0?
os alunos terão curiosidade em saber qual será êste valor, pois a intuição tanto lhes dirá $X^0 = X$ como $X^0 = 0$. Terão interêsse em verificar se a demonstração confirma ou não sua intuição. Verão na demonstração uma **resposta** e não uma **imposição.**

Principalmente no ginásio, êste seria o caminho mais eficiente no estudo da Geometria. Os teoremas de Geometria são sempre demonstrados de modo inverso a êste, isto é, primeiro o teorema é enunciado e depois demonstrado. E talvez seja por isto que são tão detestados pelos alunos.

Sempre que possível, a tese deveria ser dada sob forma de pergunta, como um problema do qual se pedisse a solução, e não como se faz sempre: como algo que embora já se saiba que é certo, vai-se provar que assim é. Os alunos não entendem a necessidade de provar que é verdadeiro o que afirmamos que é verdadeiro. E é isto que faz com que, muitas vêzes, procurem demonstrar um teorema utilizando a própria tese na demonstração.

Dar a tese sob forma de pergunta, apresentando o teorema como um problema, seria um modo pedagógico de adaptar a Geometria à lógica dos alunos ginasianos. O motivo pelo qual os alunos sempre confundem hipótese e tese está em que ambas são apresentadas sob forma de afirmação.

Quando o professor do curso primário propõe aos alunos o problema "Uma maçã custa Cr$ 1,00; quanto custarão 5 maçãs?" os alunos sentem-se orientados, sabem o que procuram. Suponhamos agora que o professor dissesse:

— Provar que se uma maçã custa Cr$ 1,00, 5 maçãs custarão Cr$ 5,00.

Os alunos se sentiriam desorientados, não saberiam como demonstrar uma cousa evidente.

Psicològicamente, é isto que acontece aos alunos do ginásio diante de um teorema de Geometria. Quando o professor propõe — "Demonstrar que dois triângulos que têm os três lados respectivamente iguais são iguais" — o aluno confunde hipótese com tese, acha inútil a demonstração. Entretanto, se o professor perguntasse — "Dois triângulos que têm os três lados respectivamente iguais são iguais ou diferentes?" — o aluno estaria diante de um problema do qual se pede a solução, e quanto mais evidente fôsse a tese mais facilidade êle teria na demonstração, o que em geral não acontece. Ao contrário, quanto mais evidentes são os teoremas mais dificuldade os alunos encontram, pois não julgem necessário demonstrar aquilo que, como êles dizem, "salta aos olhos". Exemplo:

Um dos primeiros teoremas de Geometria é "Todos os ângulos retos são iguais". Nem é preciso insistir no absurdo da demonstração de um teorema tão evidente. A demonstração de um teorema imediatamente evidente é, por vêzes, tão intuitiva que escapa à percepção dos alunos. Por isto, o professor não deve demonstrá-lo, mas, sòmente, enunciá-lo.

Também é preciso evitar a atitude oposta: dar uma aparente demonstração de teoremas cuja demonstração rigorosa não pode ser dada aos alunos. A atitude do professor deve ser esta: se o teorema tem uma demonstração que não está **ao alcance da capacidade** dos adolescentes, é preciso esperar que êles adquiram esta capacidade, e não, transformar a demonstração com prejuízo da lógica.

"A seleção dos problemas"

Antes de aprenderem álgebra, os problemas aritméticos são a grande tortura dos alunos. Esta aversão é em parte justificável, cabendo a culpa aos professôres. Há problemas que, resolvidos algèbricamente são muito simples, mas, por aritmética, exigem um raciocínio que os adolescentes não podem ter e, algumas vêzes, complicados artifícios. A álgebra não teria utilidade prática se pudéssemos resolver todos os problemas aritmèticamente. A vantagem de os alunos aprenderem álgebra é que poderão resolver com facilidade os problemas que tiverem dificuldade em resolver por aritmética.

Mais tarde, será bastante útil resolverem também aritmèticamente os problemas anteriormente resolvidos por álgebra: será uma forma de desenvolverem o raciocínio.

Há problemas que, resolvidos algèbricamente, admitem duas equações a duas incógnitas. Para os alunos que ignoram álgebra, êles apresentam uma dificuldade ao serem resolvidos por aritmética: êstes alunos não têm presente a noção de que, por exemplo, "$\frac{2}{3}$ do que eu tenho mais $\frac{1}{2}$ do que tu tens" não podem ser somados como $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ porque um representa a fração de uma quantidade X e o outro a fração de uma quantidade Y. Depois que os alunos souberem álgebra será um ótimo exercício de raciocínio resolverem êstes problemas aritmèticamente; será um raciocínio orientado porque êles saberão que a solução envolve duas incógnitas.

O que geralmente notamos na 1.ª série de nossos ginásios é o seguinte: o professor apresenta o problema e os alunos não conseguem resolvê-lo; é, pois, o professor quem o resolve, utilizando artifícios de lógica. Os alunos, depois de muito tempo, aprendem o **modo de chegar à solução,** mas em geral não entendem o **problema pròpriamente dito,** isto é, decoram: aprendem sòmente **aquêle** problema. Talvez a esta falta de compreensão se deva o fato de que, para os alunos, cada problema é um problema novo, embora sejam problemas do mesmo tipo, apresentando as mesmas dificuldades.

Além disto, um dos grandes recursos pedagógicos no ensino da álgebra, que é despertar o interêsse dos alunos possibilitando-lhes a resolução de problemas que nunca conseguiriam resolver aritmèticamente, não estará sendo utilizado. Principalmente os alunos mais capazes, protestam contra a inutilidade de resolverem algèbricamente problemas que já resolveram aritmèticamente. A álgebra só será devidamente compreendida em sua finalidade, pelos alunos, se ela vier resolver dificuldades não transpostas pela aritmética. E mais, há problemas que para serem resolvidos aritmèticamente exigem que o raciocínio siga o inverso do caminho lógico, o que não é pedagógico.

Na seleção dos problemas, os professôres devem escolher os que são aplicações de conhecimentos e não os que são enigmas para decifrar. A aritmética é ensinada no ginásio principalmente porque é necessária na vida. Assim sendo, sempre que possível, os problemas devem ser práticos, úteis, possíveis, principalmente na 1.ª série, quando as crianças ainda não sentem a necessidade de conhecimentos puramente teóricos, quando procuram sempre a correspondência entre os conhecimentos que adquirem e as suas experiências reais.

Deve-se levar em consideração que os alunos não têm, em geral, o mesmo interêsse matemático do professor em resolver complicados problemas teóricos. O que para o professor constitui uma agradável pesquisa não é senão uma tortura para os alunos inexperientes. Não há utilidade didática em o aluno decifrar uma charada particular, e sim em que êle aprenda a resolver problemas gerais e práticos: possíveis na realidade, e não, só matemàticamente possíveis. Se assim não fôr, surgem os alunos que decoram problemas porque não os podem entender.

Para o aluno que tem pouca aptidão para o raciocínio abstrato, a Matemática pode tornar-se um verdadeiro jôgo de quebra-cabeça. Em parte a culpa é dos professôres: sendo a Matemática a ciência do possível, êles esquecem que, evidentemente, podemos inventar uma infinidade de problemas e teoremas os mais complexos, mas que, muitas vêzes, não têm utilidade alguma. De preferência, os professôres devem apresentar os problemas que o aluno sente serem possíveis e não os que êle julga impossíveis.

Os problemas complicados, não imediatamente compreensíveis, exigem, às vêzes, mais habilidade do que profundidade e extensão de raciocínio. São charadas que exigem um raciocínio sutil, hábil, imaginoso, mas não prático e útil. Quem resolve uma charada adquire um conhecimento, com-

preende e sabe resolver um tipo particular de problema, entretanto, não desenvolve o raciocínio em profundidade, não adquire um poder, uma capacidade de resolver problemas: São problemas particulares que seria útil o aluno resolver quando tivesse capacidade para isso, no colégio, e não no ginásio.

Há ainda outro tipo de problema: os problemas que se tornaram famosos entre os professôres de Matemática, que aparecem em todos os livros adotados. Muitas vêzes até têm títulos. Por exemplo: o problema "das torneiras", o problema "da vendedora de ovos", etc... São problemas fáceis, entretanto, os professôres insistem tanto em que os alunos devem saber resolvê-los, que êstes esquecem que devem também compreendê-los. Os professôres querem que seus alunos **saibam** resolver **êstes** problemas, e não, que **aprendam** a resolver problemas em geral. Valorizam os problemas famosos, exigem que todos os alunos saibam resolvê-los, mas, explicam mais os cálculos necessários para chegar à solução do que o problema pròpriamente dito.

Geralmente, os alunos mecanizam êstes problemas, pois sabem que êles serão pedidos em tôdas as sabatinas e exames. Mas, para êles, resolver êstes problemas é como tocar uma música apenas "de ouvido", sem saber que notas tocou. Isto é o que chamamos mecanizar. Os alunos poderão até sair muito bem nas sabatinas, pois êles sabem que tal dado deve ser somado com aquêle, dividido pelo outro, etc..., mas, por quê?

O pior é que muitas vêzes os próprios alunos pensam que entenderam os problemas, quando sòmente os decoraram: é aquela impressão do "já visto" perante problemas tantas vêzes repetidos pelo professor. Mais tarde sobrevêm as consequências desta mecanização, que geralmente começa no curso primário.

A solução mais pedagógica é o professor dar o maior número possível de problemas, mas, que sejam compreendidos pelos alunos; e que sejam dos mais diversos tipos, e não todos padronizados.

"A transferência da teoria para a prática"

E' curioso notar que geralmente são os próprios professôres que, desde o curso primário, induzem o aluno a decorar: alguns professôres querem que os alunos decorem a tabuada e saibam repeti-la ràpidamente. Evidentemente, o cálculo mental é necessário; a memória é a grande auxiliar da inteligência. Mas, memorizar cálculos simples, decorar fórmulas, vendo sòmente o lado prático e útil, é tirar do ensino da Matemática todo o seu significado. E' sugerir ao aluno que não raciocine e sòmente memorize.

Além disto, há um paradoxo neste critério utilitarista: o professor exige que o aluno decore para que possa resolver ràpidamente os problemas, usando a memória, mas, subordinando o raciocínio à memória, o aluno só poderá resolver êstes problemas quando apresentados de modo teórico. Não saberá reconhecê-los na prática, não havendo, portanto, nenhuma utilidade nesta memorização. E chegamos, por vêzes, a constatar resultados surpreendentes e dolorosos: o aluno responde ràpidamente que $2 \times 12 = 24$, mas, hesita ao perguntarmos:

— Qual o preço de uma dúzia de maçãs, se uma maçã custa Cr$ 2,00?

E' a impossibilidade de o aluno realizar a transferência do que aprendeu em teoria para a prática. Na Matemática, esta falta de transferência revela-se principalmente pela absoluta incompreensão que os alunos revelam do significado das operações que constantemente estão realizando. Parece-nos que a causa desta incompreensão reside no fato de os alunos preferirem a memória ao raciocínio.

Para a criança do curso primário pode ser muito útil saber responder ràpidamente que $8 \times 3 = 24$, mas, se ela não compreender o significado da multiplicação, que $8 \times 3 = 8 + 8 + 8$, que também $8 \times 3 = 3 \times 8$, que ..... $8 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, sempre terá dificuldade na resolução de problemas. Saberá multiplicar, mas não compreenderá o significado da multiplicação: será um calculista e não um matemático. E' preferível o aluno raciocinar lentamente que $8 \times 3 = 8 + 8 + 8 = 24$, a responder automática e ràpidamente que $8 \times 3 = 24$. E' preciso que a memória fixe e conserve os conhecimentos, mas, sòmente depois de o aluno adquiri-los por repetidos processos de raciocínio.

Parece impossível, mas há casos de alunos que, ao fazerem o exame de admissão, esquecendo-se, por exemplo, de que $8 \times 3 = 24$, não encontram nenhum meio de obter o resultado desta multiplicação pelo raciocínio. Para êles, falhando a memória não há raciocínio possível. O único recurso é decorar novamente a tabuada.

Estas deficiências do ensino da Matemática no curso primário são importantes porque, em grande parte, a elas se deve o fracasso dos alunos já na 1.ª série ginasial. Nestas

noções elementares está o significado básico das operações matemáticas, e êste significado deve ser assimilado para que se possa projetar sôbre tôda a Matemática do curso secundário.

Por exemplo, a divisão é, psicològicamente, a mais difícil das operações fundamentais. Se o aluno sabe automàticamente que $24 \div 3 = 8$, e não sabe o verdadeiro significado da divisão, êle saberá calcular, mas não resolverá problemas. Em consequência, nunca entenderá as frações ordinárias. Novas consequências advirão e, dêste modo, uma deficiência elementar se projetará sôbre todo o curso secundário.

Por que $24 \div 3 = 8$? porque o 3 está contido 8 vêzes em 24. Isto é o que interessa os alunos saberem. Portanto, só devem memorizar a tabuada depois de compreenderem que ela não é uma poesia que se recita, não é uma convenção arbitrária, é um resultado de regras lógicas.

Os professôres sabem que qualquer aluno do primário responde logo que $24 \div 3 = 8$, mas, o mesmo aluno revela mais dificuldade ao responder que "Se distribuirmos 24 laranjas entre 3 meninos, cada um receberá 8". Por quê? Porque o aluno não faz a necessária abstração. Não fêz porque não tem capacidade de abstração? Não, simplesmente porque não entende o sentido da divisão. Assim sendo, não reconhece neste problema uma operação de divisão, ou, se reconhece, não sabe qual o dividendo e qual o divisor. Para êle, aquela operação $24 \div 3 = 8$ é algo convencional, sem nenhuma correspondência com os problemas reais da vida.

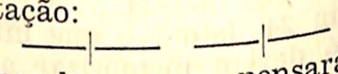
Mais tarde, no estudo das frações ordinárias, esta deficiência se acentua, assumindo proporções realmente inacreditáveis, mas que a experiência demonstra que permanecem até os últimos anos de ginásio, e às vêzes nunca desaparecem.

Nota-se que, muitas vêzes, uma pergunta simples que qualquer aluno do primário responderia, não é respondida por um aluno do ginásio. Os professôres geralmente interpretam esta realidade como sendo uma comprovação de que o aluno esqueceu tudo o que aprendeu, de que não dá para a Matemática, etc...

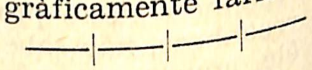
Parece-nos que êste fato, ao contrário, é sòmente uma consequência do desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno: aquilo que a criança do primário responderia mecânicamente, o aluno do ginásio, raciocinando, muitas vêzes não responde tão ràpidamente, pois encontra um obstáculo em sua própria falta de compreensão do significado das operações; é quando êle começa a sentir que as operações têm um significado.

Por exemplo, se perguntarmos a um aluno do curso primário "— Quanto é $\frac{1}{4}$ de 2?" êle responderá certo: $\frac{1}{2}$. Mas, se fizermos a mesma pergunta a um aluno de ginásio, pedindo-lhe que faça uma representação gráfica, geralmente êle responderá errado: $\frac{1}{4}$.

Por quê? Fazendo esta representação:

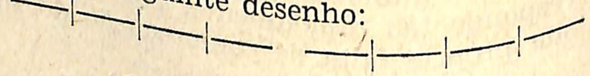


o aluno intuitivamente, como o desenho sugere, pensará: $\frac{1}{4}$ de $2 = \frac{1}{4}$. Cairá numa espécie de círculo vicioso. Qual a causa desta dificuldade? O aluno tem a noção intuitiva de $\frac{1}{4}$ da unidade: dividir o inteiro em 4 partes e tomar uma destas partes. Representando gràficamente faria:



Mas, quando falamos em $\frac{1}{4}$ de 2 é muito menos intuitivo, porque estamos nos referindo à quarta parte do número abstrato 2. A diferença é muito sutil para o aluno, e êle se sente perplexo ante algo que não entende bem. O desenho, neste caso, em vez de facilitar a sua compreensão, torna-a mais difícil, pois o aluno geralmente não percebe que: $\frac{1}{4}$ do número abstrato 2 é igual a $\frac{1}{2}$ da unidade, Isto é, $\frac{1}{4}$ de $2 = \frac{1}{2}$ de 1.

Há alunos que fazem o seguinte desenho:



Dividem cada inteiro em 4 partes e, caindo no mesmo êrro, afirmam: $\frac{1}{4}$ de $2 = \frac{1}{8}$.

O raciocínio dêstes alunos é errado, entretanto, êles já notam uma correspondência entre as operações abstratas e as representações concretas. Podemos dizer que é um progresso dos alunos, embora êste progresso os conduza a caminhos errados. Cumpre ao professor usar êste fato como um recurso didático, esclarecendo os alunos quanto ao seu significado, e não, dizendo-lhes simplesmente que recordem o que aprenderam no primário, que "para calcular $\frac{1}{4}$ de 2 a regra é multiplicar $\frac{1}{4}$ por 2".

"As duas noções de divisão"

Outro fato pode comprovar o que afirmamos quanto à falta de transferência:

Os alunos conservam até o fim do ginásio uma noção um pouco deficiente de divisão. Para êles, a divisão é sempre concreta: consiste em dividir algo (o dividendo) em um certo número de partes (o divisor). Para o aluno do primário, esta noção é ainda mais simplificada, êle raciocina assim: $10 \div 2 = 5$ porque se dividirmos 10 **cousas** entre 2 **pessoas** cada uma recebe 5 cousas. Êle não encontra nenhuma dificuldade nesta divisão, porque a experiência diária comprova que assim é. Mas, quando o professor ensina a divisão de um número inteiro por uma fração, esta definição de divisão já não resolve o problema. Como enquadrar nesta definição o caso seguinte, $1 \div \frac{1}{2} = 2$?

Geralmente o professor explica simplesmente a regra:

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 2.$$

Os alunos não sabem por que invertem a fração, e aprendem a regra mecânicamente, julgando que esta divisão não tem nenhuma relação com a divisão $10 \div 2 = 5$. Pensam que a primeira, $1 \div \frac{1}{2} = 2$ é uma simples convenção, enquanto $10 \div 2 = 5$ é uma divisão que se verifica **também** na prática.

Quando chegam ao ginásio, querem uma explicação lógica, e os professôres geralmente explicam definindo a divisão como sendo a operação inversa da multiplicação:

$2 \times 5 = 10$ logo:

$$10 \div 2 = 5 \quad \text{e} \quad 10 \div 5 = 2$$

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

logo:

$$1 \div 2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 1 \div \frac{1}{2} = 2$$

Os alunos procuram uma correspondência lógica com a realidade. Para o primeiro caso êles encontram: "dividindo 10 cousas entre 2 pessoas, cada uma recebe 5; dividindo 10 cousas entre 5 pessoas cada uma recebe 2". Mas, para o segundo caso, esta noção intuitiva apelando para o concreto falha: "dividindo 1 cousa entre duas pessoas, cada uma recebe $\frac{1}{2}$, mas, como dividir 1 cousa entre $\frac{1}{2}$ pessoa?

Os alunos pensam que o primeiro caso corresponde à prática, enquanto que o segundo é um caso fictício, isto é, **matemàticamente possível mas pràticamente impossível.**

Embora pareça incrível, encontramos alunos com esta incompreensão do significado da divisão até entre os que cursam Faculdades. A falha está em que o professor deveria dar, desde o início, as 2 noções de divisão:

concreta — dividir 10 por 2 é achar a quantidade obtida ao dividir a quantidade 10 em 2 partes.

abstrata — dividir 10 por 2 é achar quantas vêzes a quantidade 2 está contida na quantidade 10.

Com a noção abstrata, o aluno entenderá que ......

$1 \div \frac{1}{2} = 2$ porque $\frac{1}{2}$ está contido 2 vêzes em 1. Se êle não tiver esta noção não poderá nunca compreender como é que, dividindo um número por uma fração podemos encontrar um número maior, por exemplo, $1 \div \frac{1}{2} = 2$.

Quando se trata de frações decimais, o aluno não nota que $1 \div 0{,}5 = 2$ porque faz a transformação .... $1 \div 0{,}5 = 10 \div 5 = 2$. Como 2 é menor que 10 não há dificuldade. Mas, a dificuldade está em isto provar que o aluno não entendeu que $1 \div 0{,}5$ e $10 \div 5$ são a **mesma** divisão, e que, conseqüentemente, êste quociente 2 é o quociente de $1 \div 0{,}5$.

Todos êstes obstáculos induzem o aluno a pensar que as regras matemáticas não se verificam na prática. Há alunos do ginásio que pensam assim:

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1} = 2 \quad \text{(matemàticamente)}$$

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{(pràticamente)}$$

Para êles, dividir por $\frac{1}{2}$ quer dizer **dividir ao meio.**

"Os exemplos numéricos e a interferência"

Há também alunos que entendem a aritmética, mas, não entendem a álgebra. Não consideram a aritmética e a álgebra como sendo subordinadas às mesmas leis, e sim como cousas à parte. Para êles, a aritmética é real, a álgebra é uma convenção arbitrária. Não entendem o significado das letras, dos números negativos (pensam que sòmente os números positivos admitem uma interpretação real). Chegam até a pensar que um problema não tem o mesmo resultado quando resolvido por aritmética e por álgebra.

A causa mais provável é que, na álgebra, muitas vêzes a intuição do aluno falha. A intuição sugere que:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2$$

enquanto o professor afirma que:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

O que faz com que os alunos detestem a Matemática é geralmente êste fato: aquilo que a intuição lhes sugere não é o certo, e a solução certa nada tem de intuitiva para êles. O professor deve aproveitar esta ocasião em que os alunos ficam perplexos para lhes explicar onde a sua intuição falhou.

Se a intuição falha é porque os alunos não compreendem o significado da potência. Logo, não basta o professor repetir a regra: "O quadrado do 1.º têrmo, mais o duplo produto do 1.º pelo 2.º têrmo, mais o quadrado do 2.º têrmo". E' preciso insistir em que:

$$(x + y)^2 = (x + y)\ (x + y)$$

Se os alunos não entenderem que é a sua própria intuição que falhou, e não a Matemática que é lógica, sempre considerarão a Matemática, e principalmente a álgebra, como um enigma. Quando os alunos não sabem por que seu raciocínio está errado, pensam que a Matemática é apenas um conjunto de convenções arbitrárias, um quebra-cabeça que só diverte ao professor. E' preciso, pois, explicar-lhes a utilidade, a necessidade prática, da álgebra e da geometria. Convencê-los de que a Matemática estuda o **possível**, mas que o **real** está compreendido no possível. Se a Matemática não tiver significado real para os alunos, êles nunca a compreenderão.

Grande parte desta responsabilidade cabe ao professor que ensina fórmulas declarando: — Êste ano, sòmente aplicaremos esta fórmula, mais tarde daremos a sua demonstração!

A Matemática não deve ser ensinada como um dogma,

aceito sem demonstração, e sim como verdades **demonstráveis** e, o que é mais importante para os alunos, verdades **verificáveis numèricamente** (dar exemplos numéricos). Para os alunos, demonstração matemática é aquela que é verdadeira matemàticamente (que segue as leis matemáticas aprendidas por êles), entretanto, julgam que uma demonstração matemática não tem significado prático, e nem mesmo numérico, se na demonstração o professor utiliza sòmente letras.

Psicològicamente, é o mesmo que acontece ao aluno do primário ao qual perguntamos:

— 1525 é múltiplo de 5?

— Sim!

— 1525 dividido por 5, qual o resto?

O aluno hesita antes de responder. Por isto, é preciso que tôda regra seja seguida imediatamente de exemplos numéricos. Se o aluno dividir 1525 por 5 e encontrar resto zero, fixará melhor a noção de múltiplos.

E' justamente quando o aluno não encontra correspondência entre as operações numéricas e a realidade prática, que começa a memorizar o que não entende. E esta mecanização leva à confusão: o aluno não raciocina mais sòmente recorda o que memorizou. Cremos que é esta a causa das **interferências** na aprendizagem da Matemática. O aluno começa por trocar os sinais — e $\times$, pois para êle — e $\times$ não representam símbolos de operações distintas, são sòmente sinais. Começam as **analogias**, que são a forma de manifestação da interferência na Matemática:

Como êle sabe que $\dfrac{x + y}{2} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$

por analogia, escreve errado $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{y}{2}$

Ou então $\dfrac{a + x}{b + x} = \dfrac{a}{b}$

por analogia com $\dfrac{ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

Como evitar que o aluno faça estas analogias?

Parece-nos que a única solução é o professor apelar para exemplos numéricos. A experiência demonstra que, por mais que o professor insista em explicar lògicamente que as regras de multiplicação não podem ser aplicadas à soma, os alunos ao fim de pouco tempo tornam a incorrer no mesmo êrro. Êles sòmente deixarão de errar quando constatarem, por experiências próprias, que realmente as regras de adição são diferentes das regras de multiplicação. E esta constatação só pode ser feita por meio de exemplos numéricos. Por exemplo, na expressão

$$\frac{a + x}{b + x}$$

o professor poderá substituir as letras por números e demonstrar que

$$\frac{1 + 5}{2 + 5} = \frac{6}{7}$$

enquanto com a simplificação do 5 o aluno obteria o resultado errado

$$\frac{1 + 5}{2 + 5} = \frac{1}{2}$$

Sempre que os alunos fizerem analogias semelhantes a estas, se o professor demonstrar, numèricamente, que são erradas, os alunos fàcilmente compreenderão as causas de seus erros, podendo assim evitá-los.

"Problemas diretos e inversos"

Outra grande dificuldade que o professor de Matemática encontra é a quase geral impossibilidade dos alunos em resolverem o problema inverso daquele que aprenderam. Por exemplo, os alunos primeiramente aprendem a potenciação, e revelam grande compreensão de seu significado. Entretanto, encontram muita dificuldade na radiciação, que é a operação inversa da potenciação. Para os alunos, é muito mais fácil responder que $4^2 = 16$ do que responder que $\sqrt{16} = 4$.

E, o que é mais interessante, sua dificuldade chega ao máximo (e geralmente se conserva até no curso colegial) justamente quando o problema é apresentado na forma mais simples, pois são raros os alunos que sabem responder que $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$.

Se o aluno não sabe responder que $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$ isto revela sua completa incompreensão do significado da radiciação.

Em Matemática, é comum verificar-se esta aparente contradição de existirem alunos que sabem extrair a raiz de um número, mas não compreendem o que é radiciação; sabem fatorar, mas não compreendem o que é fatoração; sabem resolver uma equação, mas não sabem interpretar a solução que encontram, etc...

Dizemos que é uma contradição aparente porque, em realidade, o que há por parte dêstes alunos é uma simples mecanização: o problema direto o aluno fàcilmente pode mecanizar, basta que memorize a regra ensinada pelo professor, que fixe o processo em si, mesmo sem a compreensão de seu significado. Entretanto, o problema inverso requer que o aluno tenha entendido e assimilado o significado do processo que usa mecânicamente no problema direto. E' onde êle vai revelar se raciocinou ou não.

Há uma experiência muito interessante que vem comprovar o que afirmamos. Existem em Matemática dois problemas inversos um do outro, os "produtos notáveis" e a "fatoração". Um dos mais importantes dêstes produtos notáveis é:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

O problema direto seria:

$$(a + b)\ (a - b) = ?$$

O inverso, a fatoração seria:

$$a^2 - b^2 = ?$$

A experiência é a seguinte: há professôres que valorizam mais o problema direto e outros valorizam mais o inverso. Assim sendo, conforme o professor tenha insistido mais em um ou outro dos problemas, encontraremos um dêstes 2 tipos de alunos:

1.º) O aluno que escreve ràpidamente $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ entretanto, no **mesmo momento**, é absolutamente incapaz de efetuar a fatoração de $a^2 - b^2$.

2.º) O aluno que domina inteiramente a fatoração de $a^2 - b^2$ mas, no **mesmo momento**, só consegue achar o resultado do produto $(a + b)(a - b)$ se efetuar a multiplicação.

Esta experiência é importante porque a dificuldade é encontrada até em alunos que concluíram o curso ginasial. Esta dificuldade revela uma falta de generalização por parte dos alunos e, principalmente, o desconhecimento do sentido do sinal de igualdade. Parece que, para êles, o sinal = representa uma indicação de cálculos a efetuar, e não um **equilíbrio** entre duas quantidades.

A solução seria o professor insistir simultâneamente no problema direto e no inverso, sem dar preferência a nenhum deles.

"O professor e o aluno"

Não devemos esquecer que o aluno, geralmente, constitui um problema para o professor de Matemática. Muitos são os que não realizam o menor esfôrço no sentido de aprender a Matemática: não raciocinam porque não querem, limitam-se a assistir às aulas como simples e apáticos espectadores. Alguns prestam atenção apenas às conclusões finais do professor, limitando-se a decorar regras e os teoremas.

São inúmeros os alunos que conhecem os teoremas de geometria apenas pelas figuras. Basta que o professor faça no quadro, usando as mesmas letras do livro, e êles repetirão, palavra por palavra, tudo o que está escrito no livro.

Na álgebra, êles sabem as regras, as definições: "Isto é assim". Por quê? Não sabem: "E' porque é". E o professor ainda se julga muito feliz quando os alunos sabem, mecânicamente, aplicar a regra adequada na solução de um problema, pois há também os alunos que não sabem "ler os problemas", nem quais as regras que devem aplicar na resolução de uma equação.

O motivo por que êstes alunos não querem, nem ao menos, prestar atenção às aulas é o horror à Matemática, tão generalizado em nossas escolas: a Matemática é considerada difícil, monótona, sem utilidade. No colégio, é o tormento dos alunos que dela não farão exame vestibular.

Os professôres podem concorrer, de vários modos, para acentuar êste horror à Matemática entre seus alunos. Por exemplo, o professor que ao apresentar um problema exige: — Resolvam por meio de frações ordinárias, de outro modo não! Ou então: — Resolvam só por aritmética, por álgebra não!

Estas limitações ao raciocínio do aluno só servem para impedi-lo de raciocinar. E' preciso deixar o aluno resolver os problemas como quiser, só assim êle poderá desenvolver seu raciocínio e sentir-se confiante em sua capacidade.

Outro exemplo, é o professor que incute nos alunos a idéia **exagerada** de que a Matemática só tem valor quando se obtém um resultado exato: dado um problema ou aplicação, considera imprescindível o aluno encontrar o resultado **mais exato possível**. Se o aluno erra nos cálculos, o professor anula a questão, sem se interessar em saber se o raciocínio está ou não certo. O aluno se sente desconcertado, perde a confiança em seu raciocínio. Pouco a pouco, desinteressa-se de entender o problema, pois só se preocupa com os números. E' o caso de alunos que temem os números "grandes".

Não devemos esquecer a psicologia dos adolescentes: suas distrações involuntárias, sua precipitação ao efetuar os cálculos, etc...

Se o professor apresenta dados que conduzem a resultados não exatos, cálculos extensos, o aluno perde tempo, sente-se desorientado, geralmente julga que errou (às vêzes desiste de continuar a resolver). O aluno adquire mais confiança quando as soluções dos problemas são números inteiros, isto é, quando encontra resultados possíveis, de acôrdo com a realidade. Logo, é preciso o professor **planejar** anteriormente os problemas que vai apresentar, a fim de que os alunos não encontrem **soluções absurdas**, o que poderá levá-los a julgar a Matemática sem utilidade prática.

Entretanto, o professor não deve cair no exagêro oposto, isto é, não deve permitir que os alunos descuidem dos cálculos, valorizando apenas o raciocínio do problema. Uma das finalidade do ensino da Matemática no curso ginasial, é possibilitar aos alunos a resolução de problemas práticos que a vida diàriamente apresenta. E êstes problemas exigem soluções exatas.

Não devemos desvalorizar nem o aspecto teórico nem o prático da Matemática: é tão importante a compreensão exata do problema e do modo de resolvê-lo quanto a sua solução também exata.

E' preciso conciliar o problema, não permitindo que os alunos descuidem nem o raciocínio nem o cálculo. O professor deve apresentar exercícios que desenvolvam o cálculo e problemas que envolvam cálculos simples mas exijam muito raciocínio, pois sòmente o professor que exige raciocínio de seus alunos consegue que êles aprendam a raciocinar.

Quanto mais simples forem os dados numéricos do problema, melhor o aluno compreenderá que o difícil do problema não são os números, e sim a interpretação: saber "ler o problema". Compreenderá que resolver um problema é relacionar dados, é raciocinar, e não, sòmente efetuar cálculos complicados, como se operasse com números sem significado.

O professor que, ao marcar um problema aos alunos, juntamente lhes dá o resultado numérico, vai induzi-los a não raciocinarem sôbre os dados e a sòmente procurarem combinar números até obterem o resultado indicado pelo professor. E' melhor os alunos, raciocinando, encontrarem um resultado aproximado do que, adivinhando, chegarem ao resultado exato.

O professor deve sempre considerar que é diferente errar os cálculos e errar o raciocínio do problema. O aluno que erra o raciocínio **não sabe resolver problemas**; o aluno que acerta o raciocínio e erra os cálculos **não sabe calcular**. São dificuldades diferentes e que exigem soluções também diferentes. E' preciso não esquecer que, ensinar Matemática não é sòmente exercitar calculistas: a Matemática utiliza o cálculo mas baseia-se no raciocínio.

E' natural, e até necessário, que o professor não considere como inteiramente certo o problema em que o aluno não encontrou o resultado exato, mas, a questão só deve ser considerada completamente errada quando o êrro revelar ignorância de regras ou operações matemáticas. Se os erros por distração podem ser, em parte, relevados, os erros por ignorância merecem que se anule a questão. Por exemplo:

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{2} = \frac{3}{7} \; ; \; 4^2 = 8 \; ; \; \text{etc...}$$

Notemos um paradoxo: os alunos detestam a Matemática porque exige soluções exatas, uma única resposta — não

há outra alternativa: certo ou errado — entretanto, também detestam os problemas abstratos, os problemas sem números (se não há números, não sabem que operações efetuar).

"O tempo e o programa"

O tempo é também um fator muito importante no ensino da Matemática. Geralmente os professôres consideram o programa de Matemática do ginásio muito extenso. Assim sendo, dão a matéria ràpidamente, ou excluem partes essenciais do programa.

Parece-nos quo o programa do ginásio não é tão extenso quanto afirmam; o que acontece é que os alunos não têm base. Já na 1.ª série sentem-se perdidos e tornam-se incapazes do menor esfôrço de raciocínio, ou mesmo de prestar atenção às aulas. Como conseqüência, não encontram uma concanetação lógica entre as várias partes da matéria: cada novo conhecimento que adquirem fica completamente isolado dos demais anteriormente adquiridos. Nota-se, muitas vêzes, absoluta incapacidade de efetuarem generalizações ou transferências.

Esta base indispensável só poderá ser obtida se a matéria fôr dada mais lentamente, possibilitando maior participação dos alunos durante as aulas, isto é, se o aspecto teórico fôr mais valorizado.

Geralmente, espera-se que o aluno que não entendeu a teoria possa entendê-la por meio de múltiplas aplicações práticas. Seria preferível que as aplicações fôssem dadas como exercitação da teoria, e não como meio de possibilitar a sua compreensão.

Se a matéria fôr dada mais lentamente, haverá maior oportunidade de "ensinar os alunos a pensar".

Embora "perdendo tempo", o professor não deve dizer aquilo que os alunos podem descobrir por si: os alunos fixam melhor aquilo que êles mesmos descobrem. Quanto mais participarem das aulas de Matemática, mais fàcilmente os alunos encontrarão a sua concanetação lógica. Assim sendo, embora com uma perda de tempo inicial, em breve o programa poderá ser dado muito mais ràpidamente do que em geral é dado, pois muita cousa os alunos descobrirão antes mesmo que o professor demonstre.

"As simplificações"

Ainda em relação ao tempo, é conveniente que o professor evite, o mais possível, as simplificações desnecessárias.

Só quando os alunos estiverem perfeitamente identificados com as operações e as demonstrações é que o professor deve chamar sua atenção para simplificações e regras mais simples. E, se possível, deve esperar que os próprios alunos descubram estas regras de simplificação. Se o professor assim não proceder, os alunos procurarão decorar as regras, esquecendo-se do **porque** de seu uso.

Por exemplo, ao ensinar a resolução da equação

$$x - 2 = 5$$

o professor explica que "para determinar o valor de x é preciso somar $+ 2$ a ambos os membros, o que não altera a igualdade". Os alunos entendem perfeitamente, pois é um processo lógico:

$$x - 2 + 2 = 5 + 2$$

O método mais pedagógico seria o professor deter-se nesta explicação e não ensinar logo a regra de simplificação, deixando que os próprios alunos notassem que, ao passar de $x - 2 = 5$ para $x = 5 + 2$, em vez de somar $+ 2$ a ambos os membros, bastaria passar $- 2$ para o segundo membro com o sinal trocado.

Se o professor der vários exemplos, fatalmente os alunos terminarão por descobrir a regra. A vantagem desta descoberta está em que êles sempre saberão por que passaram para o outro membro trocando o sinal. Se, ao contrário, na primeira aula o professor já der a regra de simplificação, os alunos só guardarão a regra e em breve terão esquecido qual o seu significado.

Por exemplo, se perguntarmos a alunos do ginásio, "— Somando ou subtraindo a mesma quantidade aos dois membros de uma equação permanece a igualdade?", há alunos que respondem: — Não, a igualdade desaparece! E as mesmas respostas teremos, em se tratando de outras regras de simplificação que tenham sido impostas aos alunos pelo professor. Devemos notar que, muitas vêzes, os alunos não descobrem as regras. Neste caso, o professor deve chamar atenção sôbre as simplificações, mas, só depois de os alunos terem perfeitamente assimilado o processo não simplificado.

Esta resposta dada por muitos alunos: — Não, a igualdade desaparece! revela ainda a incompreensão da maioria dos alunos quanto ao sentido do sinal de igualdade. Tem-se impressão de que, para os alunos, o sinal de igualdade não

indica pròpriamente um equilíbrio entre os 2 membros da equação, e sim cálculos a efetuar. Isto é, quando o aluno escreve $\sqrt{9} = 3$ parece que não tem a noção perfeita de que o símbolo $\sqrt{9}$ tem um valor idêntico ao número 3. As provas do que afirmamos são várias:

Os alunos secrevem $10 \div 0{,}2 = 100 \div 2 = 50$ entretanto, afirmam que $100 \div 2 = 50$ e que $10 \div 0{,}2$ é muito **menor que 50.**

E ainda, embora escrevam $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ se perguntarmos qual é maior, $\frac{5}{10}$ ou $\frac{1}{2}$, passarão ambas as frações ao mesmo denominador para depois compará-las.

Êstes dois exemplos geralmente encontramos na 1.ª e na 2.ª série ginasial, mas, há um outro exemplo que permanece até no 1.º ano do colégio (para quase todos os alunos) e, muitas vêzes, conserva-se até o fim do curso secundário:

Na aritmética, ao efetuarem a divisão de 14 por 3 os alunos escrevem $14 \div 3 = 4 + 2$ em vez de $14 = 3 \times 4 + 2$. Ou também: $3 + 5 = 8 - 2 = 6$ em vez de $3 + 5 = 8$ $8 - 2 = 6$.

Na álgebra, ao resolverem a equação $x + 2 = 6$ escrevem $x + 2 = 6 - 2 = 4 \therefore x = 4$ em vez de $x = 6 - 2 \therefore x = 4$.

Êste é um dos casos difíceis para o professor: os alunos, embora escrevendo errado, mentalmente efetuam os cálculos de modo correto, logo, encontram o valor exato de x. Isto faz com que o professor tenha dificuldade em explicar-lhes o seu êrro, pois para os alunos o principal é que o resultado esteja certo. E assim sendo, não notam que escreveram uma desigualdade, e não uma igualdade.

"As dificuldades do sistema métrico"

Muitas vêzes, também o modo de expressar-se do professor, impreciso ou complicado, conduz os alunos à mecanização. Sempre que possível, o professor deveria apresentar a mesma questão de várias maneiras, dêste modo impossibilitando a simples mecanização dos alunos.

Podemos notar estas falhas quando os alunos estudam o sistema métrico: sendo matéria que aprenderam no curso primário, ao chegarem ao ginásio deveriam ter muita base, mas, não é isto o que acontece. Em realidade, notamos que, ao chegarem ao fim da 1.ª série ginasial, os alunos entendem tanto do sistema métrico quanto entendiam no curso primário. Quais as razões.

O professor explica aos alunos que o sistema métrico é um sistema decimal e, assim sendo, "ao **passar** de uma unidade superior para uma unidade inferior deve-se passar a vírgula uma casa para a direita, e ao **passar** de uma unidade inferior para uma unidade superior deve-se passar a vírgula uma casa para a esquerda". A seguir, o professor diz: — **Passar** 3,5dam para metros! E o aluno escreve corretamente 3,5dam = 35m. Entretanto, o mesmo aluno não sabe responder à pergunta: — **Quantos** metros **têm** 3,5dam?

O aluno não tem a mínima noção de que, quando o professor diz "passar de uma unidade para outra", êle quer dizer "quantas vêzes uma unidade contém a outra". Pode-se notar bem esta falta de compreensão perguntando a um aluno: — Quantos metros há em 500cm? Êle geralmente responderá: — Nenhum, o centímetro é menor que o metro!

A causa está em que os professôres só falam em **passar a vírgula** e em **passar de uma unidade para outra.** Seria mais didático que, durante algumas aulas, o professor empregasse o caminho mais trabalhoso, explicasse aos alunos que "como 1dam tem 10m, para saber quantos metros há em 3,5dam é preciso multiplicar 3,5 por 10". Neste caso, os alunos entenderiam por que 3,5dam têm 35m.

Se, ao passar de uma unidade superior para uma unidade inferior os alunos sempre **multiplicassem** por um múltiplo de 10, e ao passar de uma unidade inferior para uma superior **dividissem** por um múltiplo de 10, compreenderiam que é a **mesma grandeza** que é medida em **unidades diferentes.**

Após algumas aulas, quando os alunos já tivessem adquirido a necessária base, o professor poderia fazê-los notar que, assim como nas frações decimais, "para multiplicar ou

dividir uma unidade do sistema métrico por um múltiplo de 10 basta **passar a vírgula** tantas casas quantos forem os zeros que acompanham a unidade".

Aos que afirmam que é mais simples ensinar sòmente a passar a vírgula, é preciso lembrar que a maioria dos alunos do ginásio continuam na completa ignorância de **como passar a vírgula.**

Outro fator que concorre para que os alunos não tenham a compreensão de que, por exemplo, 500cm = 5m é que alguns professôres têm por hábito representar esta igualdade do seguinte modo: 500cm————5m. Isto faz com que os alunos não pensem na igualdade entre 500cm e 5m. Para êles, há apenas uma **correspondência** e não uma **igualdade.**

Seria mais conveniente escrever sempre 500cm = 5m, pois assim os alunos aprenderiam melhor que 500cm medem 5m. Há alunos que pensam que 500cm é menor que 5m porque o centímetro é menor que o metro; outros, pensam que 500cm é mais que 5m porque 500 é maior que 5.

Ainda em relação ao sistema métrico, geralmente os alunos apresentam outras dificuldades. Por exemplo, quando escrevem o número inteiro 35m êles não sabem se o metro se refere ao 3 ou ao 5, pois **não há vírgula.**

Há ainda outra dificuldade que nos parece ser a causa da maioria do seus erros: quando os alunos escrevem 2,35 m êste exemplo lhes parece lógico, pois o 2 representa metros, o 3 representa decímetro e o 5 representa centímetros. Mas, quando escrevem 2,35dm isto lhes parece um absurdo, pois acham que o certo seria escrever 2,35m (o metro se referindo ao 2) ou 2,35cm (o centímetro se referindo ao 5). O ponto de referência para êles é o metro, assim sendo, muitos exemplos dados pelo professor êles julgam absurdos, e sentem-se completamente desorientados.

Tôdas estas dificuldades são ocasionadas pela falta da base que deveria ter sido adquirida no curso primário.

"O livro adotado"

Também podemos fazer observações quanto aos livros didáticos.

Em primeiro lugar, os alunos, geralmente, nunca lêem seus livros de Matemática, e se lêem não entendem. Parte da culpa cabe aos alunos e parte aos próprios livros.

Os alunos são mal orientados, não sabem utilizar os livros. Não sabem procurar no livro a matéria dada pelo professor (a não ser que tenha o mesmo título e que esteja apresentada exatamente sob a mesma forma que o professor usou em aula).

Nota-se ainda que, se o aluno não consegue resolver a questão proposta pelo professor, não utiliza o livro na procura de uma orientação, e sim na procura de uma resposta. Como, evidentemente, não poderá encontrá-la, em breve deixa o livro de lado.

Entretanto, também os livros, às vêzes, apresentam falhas. Embora existam livros ótimos, há outros que não são adaptados aos alunos, sòmente aos professôres. Muitas vêzes, encontramos nos livros cousas muito simples explicadas de modo complicadíssimo, ou então, definições imperfeitas, expressões obscuras ou de duplo sentido, círculos viciosos, etc.

Quanto aos exercícios apresentados nos livros, principalmente entre os problemas, encontram-se alguns exemplos verdadeiramente surpreendentes:

"Quando eu tinha a idade que tu tens, tu tinhas a metade da idade que eu tenho; quando tu tiveres a idade que eu tenho, a soma de nossas idades será 63. Qual a minha idade, qual a tua?"

Êste problema é relativamente fácil ao ser resolvido algèbricamente, entretanto, é apresentado em livros de 1.ª série ginasial para ser resolvido aritmèticamente. Cremos que até o professor terá dificuldade em resolvê-lo aritmèticamente, tendo de usar artifícios que nunca ocorreriam a um aluno de ginásio. Além disso, o próprio enunciado complicado dêste problema já assusta os alunos, que nem mesmo tentam raciocinar.

"Os tipos psicológicos"

Finalmente, devemos considerar um fator importantíssimo, que é o desenvolvimento do raciocínio do adolescente. Os adolescentes são, geralmente, incapazes de um raciocínio puramente abstrato. É, pois, conveniente os professôres, ao proporem problemas abstratos, apelarem para recursos intuitivos antes de transportarem o problema para o plano algébrico, a fim de que os alunos percebam a significação concreta das operações abstratas que devem efetuar.

É preciso, também, os professôres não esquecerem que, entre seus alunos encontrarão diversos tipos psicológicos em relação à Matemática. O ensino não poderá ser um ensino padrão, pois deverá ser adaptado tanto aos tipos teóricos como aos práticos ou aos mecanizadores; e ainda, se possível, deve visar a "recuperação" dos alunos menos capazes de raciocínio matemático.

Já que a experiência demonstra existirem êstes 4 tipos, o professor de Matemática deve considerar seus alunos não como uma equação impossível, mas, como 4 equações que a êle compete resolver.

Descobrir e interpretar as dificuldades de seus alunos, eis o grande problema didático do professor. Assim sendo, o ensino da Matemática não deve desvalorizar nem o raciocínio, nem a intuição, nem a memória e nem o aspecto prático. Deve antes, por meio de um bom método, propiciar o desenvolvimento integral de todos êstes aspectos da personalidade dos adolescentes.

BIBLIOGRAFIA:

"A Matemática na Educação Secundária" — Euclydes Rocho.
"Como se ensina Aritmética" — Everardo Backeuser.
"Le raisonnement mathématique de l'adolescent" — Louis Johannot.
"Fines, valores y métodos de la enseñanza matematica" — J. W. S. Young.

Conclusões aprovadas em plenário

O trabalho é mais de pesquisa que de conclusão. O plenário resolveu aprovar com louvores o trabalho apresentado sugerindo a sua transcrição nos Anais do Congresso.