Teses: — 1. — I) O Ensino da Geometria Dedutiva, do Prof. Antonio Rodrigues

II) O Ensino da Geometria Dedutiva na Escola Secundária, da Profa. Martha Blauth Menezes

2. — Sôbre o Ensino da Geometria no Ensino Secundário, do Prof. Benedito Castrucci

Relator: — Prof. Ary Quintella

Tese 1) — **O ENSINO DA GEOMETRIA DEDUTIVA NA ESCOLA SECUNDÁRIA**

Capítulo I

Sugestões para o Ensino da Geometria Dedutiva

Prof. Antônio Rodrigues
Catedrático de Geometria da Faculdade de Filosofia da URGS

Capítulo II

O Ensino da Geometria Dedutiva na Escola Secundária

1 — Introdução
2 — Resumo do plano de curso relativo ao ensino da Geometria Dedutiva no Colégio de Aplicação da Fac. de Filosofia da URGS.
3 — Fundamentação psico-pedagógica do plano de curso.
4 — Estudo dos resultados obtidos e conseqüentes conclusões.

Profa. Martha Blauth Menezes
Instrutora de Ensino da Cadeira de Geometria e professôra de Didática Especial da Matemática da Faculdade de Filosofia da URGS.

SUGESTÕES PARA O ENSINO DA GEOMETRIA DEDUTIVA

Prof. Antônio Rodrigues

E' nosso propósito, neste artigo, fazer algumas observações sôbre a execução dos programas de Geometria Dedutiva (3.ª e 4.ª série ginasial) apresentando ao mesmo tempo sugestões que, embora não constituam novidade alguma, podem ter passado despercebidas a muitos professôres.

O planejamento de qualquer curso de Geometria Dedutiva tem, em quase todos os casos, obedecido a um critério tradicional e universal, que remonta aos velhos tempos de Euclides.

Partindo de figuras simples — pontos, retas, ângulos — procura-se desenvolver o programa através de outras figuras — triângulos, quadriláteros — até chegar às mais complexas — polígonos, círculos, etc. — com o fim de estabelecer uma teoria dedutiva impecável.

Êste critério, a nosso ver, apresenta não só riscos de origem lógica como também inconvenientes de ordem didática.

No primeiro caso, é freqüente o perigo de serem cometidas falsas ou pseudo-demonstrações denominadas círculos viciosos. Consistem em provar certo teorema X por meio de teoremas A, B, C, que se apoiam noutros teoremas A″, B″, C″, um dos quais Y, pelo menos, ainda não foi demonstrado. Posteriormente, fecha-se o ciclo demonstrando Y por intermédio de X.

Onde reside a causa de chegar-se a esta falsa demonstração? Justamente na preocupação que se tem de seguir o estudo pela ordem de complexidade das figuras, admitindo implìcitamente como demonstradas tôdas as propriedades das figuras anteriormente estudadas, o que nem sempre é verdadeiro.

Apesar disto, a geometria tem sido freqüentemente apontada aos alunos como o mais belo exemplo de um edifício lògicamente construído pelo espírito humano, por processos elementares.

De outro lado, poucas vêzes, têm os alunos sentido essa tão decantada beleza da geometria. Tanto isto é verdadeiro, que é comum encontrar-se anualmente, nas aulas, os alunos das célebres perguntas referentes aos fins do estudo da Geometria e das suas aplicações na vida prática.

E' fato sabido que a beleza de uma ciência não se restringe tão sòmente a aquisição de conhecimentos, ela reside no prazer que sente o investigador ao descobrir e concatenar êsses conhecimentos.

Entretanto, no caminho seguido até agora, tem sido dada a primazia ao professor em detrimento da iniciativa do aluno, salvo na execução dos exercícios padronizados.

Vamos ver que, o critério tradicional adotado para a execução dos programas, não se presta bem a um planejamento no qual a participação do aluno seja relevante.

De fato, no estudo das figuras mais simples, pontos, retas, ângulos e triângulos, os teoremas iniciais se apoiam quase que diretamente na noção de movimento e estão pouco relacionados entre si, o que não permite ao aluno compreender o encadeamento lógico dos referidos teoremas.

Como o aluno ainda não viu uma demonstração, como ainda não é capaz de fazer demonstrações cabe ao professor realizar as provas dêsses teoremas, com oportunidades mínimas, para qualquer iniciativa por parte do aluno.

A falta de concatenação lógica inicial dos teoremas e o caráter intuitivo de boa parte dêles, produz a nociva impressão, na mente do aluno, de que as demonstrações constituem malabarismos do professor. Tiradas do nada são deixadas sôltas no ar, sem um fim determinado.

Além disso, ao passar de umas a outras figuras, são abertas lacunas na marcha dedutiva para dar ocasião ao exame de elevado número de definições e denominações conhecidas do aluno desde o curso primário e já estudadas na 1.ª e 2.ª série ginasial. E como o tempo gasto nessas interrupções é, às vêzes, longo, a retomada da marcha dedutiva encontra as demonstrações anteriores jogadas no esquecimento, fato que aparentemente não prejudica o curso pelo hábito que se tem de fazer referências aos teoremas anteriores pelos seus enunciados, ou por uma denominação tradicionalmente adotada (é o caso freqüente de demonstrar certo teorema dizendo ao aluno: como vimos, pelo teorema de Pitágoras... ou pelo 1.º caso de igualdade...).

Com o acúmulo do material de estudo, perde o aluno a visão de conjunto. Neste momento êle não percebe as relações mútuas que existem entre os vários teoremas; quando muito sabe que esta demonstração está apoiada no teorema precedente examinado pelo professor. Não forma, também, uma idéia clara do que é uma teoria ou não possui idéia alguma. Só lhe resta, agora, servir-se da memorização, para guardar os teoremas e suas provas, durante o curto prazo de duração dos exames... E' interessante, tem sido os malfadados teoremas a tábua de salvação dos alunos medíocres

que, nos exames, conseguem a nota mínima graças a uma demonstração decorada, usualmente pedida como questão. Domina, também, na realização dos trabalhos escolares a preocupação de provar todos os teoremas que aparecem nos livros, sem contudo atender a idade 12 a 15 anos e a capacidade de raciocínio dos alunos.

Pode parecer, à primeira vista, um contra-senso propor a aceitação de um teorema sem demonstração. Entretanto, a Geometria está cheia de teoremas, quase sempre de caráter intuitivo, não usualmente demonstrados ou cujas demonstrações são tão precárias que melhor seria suprimi-las.

Por exemplo: A demonstração da existência da perpendicular a uma reta, por um ponto desta, baseada no movimento contínuo de uma oblíqua que, em dado instante, deve ser necessàriamente perpendicular a ela. Na verdade, esta pseudo-demonstração nada prova, uma vez que se estabelece intuitivamente a existência de uma posição particular da oblíqua que a torna perpendicular. Para ser bem levada a têrmo, esta demonstração deve fazer uso do axioma da continuidade de Dedeking que, num curso ginasial substituiria uma dificuldade simples por outra mais delicada fora do alcance da mentalidade do aluno. Neste caso é aconselhável aceitar como intuitiva a existência dessa perpendicular ou então, partindo do axioma de que todo ângulo admite sempre, uma reta bissetriz, concluir que no caso dêsse ângulo ser plano a bissetriz se torna perpendicular à reta que contem os seus lados.

Consegue-se, dessa maneira, um aproveitamento de tempo, que é aumentado com a supressão das aulas dedicadas ao estabelecimento de definição e denominações já conhecidas do aluno. E aqui é bom lembrar uma queixa freqüente dos professôres, de que o tempo não lhes permite a execução completa do programa.

Diante dessas considerações podemos propor as seguintes sugestões:

1.º — Atendendo a que a Geometria Intuitiva da 1.ª e 2.ª série ginasial fornece todo o material necessário ao estudo da Geometria Dedutiva, não se justifica mais um estudo pormenorizado das definições, denominações e propriedades intuitivas das figuras, como tem sido feito até agora.

E' aconselhável, apenas, que nas primeiras aulas se faça, mediante testes de conhecimento, uma revisão dessa matéria para sanar dificuldades futuras.

Naturalmente, pode ser levantada a objeção de que as noções de Geometria Intuitiva foram apresentadas sem o devido rigor e precisão, e que na 3.ª e 4.ª série torna-se necessário corrigir êsses defeitos. Em parte, é aceitável esta objeção se o tempo dedicado ao estudo crítico fôsse longo e se os professôres tivessem muito cuidado com o uso dos textos. Na verdade, a maneira de conduzir êste assunto tem sido bem superficial, haja visto as definições apresentadas, em certos livros e aceitas sem o devido exame, por alunos e alguns professôres.

2.º — Como preparação ao curso, devem ser examinadas proposições que conduzem a contradições, decorrentes das falhas das demonstrações experimentais, das falhas de intuição e indução, etc. Com isto se estabelece a necessidade de levar a têrmo as provas de qualquer afirmação.

3.º — Na impossibilidade de provar-se tôdas as afirmações é feita uma lista de enunciados, cuja veracidade é indiscutível e imediata. Essa lista pode ser a indicada pelo National Committee americano (veja-se Hassler and Smith. The Teaching of Secundary Mathematics).

4.º — Deixando de lado o espírito tradicional de apresentar a Geometria como ciência dedutiva por excelência, procura-se selecionar um conjunto de teoremas fundamentais e suas conseqüências principais, que constituam um ótimo material para o treinamento do aluno nas demonstrações. Neste sentido a Geometria dedutiva é encarada mais como iniciação nos métodos demonstrativos do que pròpriamente o desenvolvimento integral de uma teoria. Isto não implica, porém, no abandono do caráter lógico dos processos adotados; pelo contrário, como é fácil de ver, predomina a concatenação lógica dos teoremas.

5.º — O papel do professor consiste, pelos vários métodos de ensino que se dispõe, em realizar a demonstração de um teorema X (digamos o caso de igualdade de triângulos de lados e ângulos compreendido respectivamente iguais.) Afim de que o aluno venha a entrar em contato com uma demonstração e fazer com que êle sòzinho ou em equipe, consiga, sob sua orientação, provar as conseqüências dêsse teorema (teorema sôbre o triângulo isósceles, oblíquas, que se afastam da perpendicular, igualdade de triângulos retângulos, algumas propriedades dos paralelogramas, das cordas num círculo, etc.)

Agora podemos dizer que o critério adotado, na execução do programa, substitui a ordem da complexidade das figuras, pela ordem decorrente da escolha de um teorema, até as suas conseqüências necessárias ao estudo.

Para a aplicação dêsse critério deve o professor organizar um esquema no qual se torna visivel a relação mútua dos teoremas.

Para facilidade de trabalho e também correspondendo à divisão da matéria como realmente foi realizada no programa oficial, êsse esquema comporta dusa partes. Uma delas (correspondendo ao programa da 3.ª série, diz respeito às propriedades gráficas; a outra (corresponde a 4.ª série) se refere às propriedades métricas. Ao terminar o ano escolar, ou em outra ocasião se fôr oportuno, o esquema pode ser apresentado à classe a fim de ser examinado para ter-se uma visão de conjunto dos teoremas e percepção da posição de cada um dêles no quadro geral. Deve ser ressaltado, nessa ocasião, que as propriedades das várias figuras são invariantes para os movimentos (3.ª série) e semelhança (4.ª série) chegando-se assim aos propósitos da Geometria dedutiva.

Agora, e só agora, é possível presumir que o aluno venha a ter uma idéia clara do que é uma teoria dedutiva e possa sentir a tão decantada beleza da Geometria Elementar.

Finalizando êste artigo, apresentamos um esquema dos teoremas para a 3.ª série ginasial, que a nosso ver se presta para um trabalho de iniciação nos métodos demonstrativos. Chamamos também a atenção, dos senhores professôres, para o fato de que o esquema foge, em alguns pontos, a seriação clássica dos teoremas (veja-se no esquema, o teorema no ângulo inscrito na dependência do teorema referente ao ângulo capaz). Fizemos isto para mostrar uma vantagem da organização de um esquema: A quebra da rotina em virtude da alteração das relações mútuas que o professor pode dar no quadro geral.

Nota: Êste artigo foi escrito em 1947, antes da portaria ministerial que estabeleceu o atual programa de matemática do ginásio.

ESQUEMA

1) Recordação de denominações e conceitos necessários ao estudo. Questões que mostram a necessidade das demonstrações dedutivas e preparem o espírito do aluno para o trabalho a seguir.

2) Lista de axiomas. Nesta lista, além dos axiomas usualmente aceitos nos livros, podem ser incluídos os seguintes: o segmento de reta é o menor caminho entre 2 pontos, cada

ângulo admite uma única bissetriz; os ângulos planos são
iguais; os ângulos retos são iguais; se a soma de 2 ângulos
vale 180º é possível com êles formar um ângulo plano; uma
reta encontra um círculo em 2 pontos no máximo; por um
ponto fora de uma reta pode-se baixar uma única perpen-
dicular a essa reta. E' importante ressaltar, também, o se-
guinte postulado: um movimento não altera a forma e as di-
mensões de uma figura.

3) Teoremas que se apoiam nos axiomas: ângulos suple-
mentares ou complementares de ângulos iguais, são iguais;
ângulos opostos pelo vértice são iguais. Duas perpendiculares
a mesma reta são paralelas (demonstração por absurdo).

A demonstração dêstes teoremas é simples e pode ser
feita algèbricamente; ela permite, ao mesmo tempo, intro-
duzir de modo compreensível as noções de hipótese e tese.
Se fôr inoportuna a introdução das demonstrações por ab-
surdo, o teorema acima das perpendiculares pode ser deixado
para depois, ou mesmo ser aceito como axioma.

Pode ser dado, ainda, aqui o teorema referente a ângu-
los de lados mùtuamente perpendiculares, que possuem o
mesmo vértice, a fim de verificar a capacidade do aluno rea-
lizar a demonstração, embora, seja êste teorema dado num
caso particular.

O professor procurará fazer figuras, as mais variadas,
que permitem chegar a conclusões sôbre igualdade de ângu-
los, mediante o uso de axioma e teoremas desta parte.

4) Teoremas demonstráveis pela noção de movimento.

Eqüidistância das paralelas; igualdade de arcos ou cor-
das determinadas por ângulos centrais iguais, desigualdade
de arcos (de círculos iguais), arcos iguais têm cordas iguais,
os ângulos estão entre si como os arcos (caso comensurável),
casos de igualdade de triângulos.

O trabalho, nesta parte, é todo êle dirigido no sentido
de mostrar que, mediante o deslocamento de uma figura e
superposição noutra, pode-se constatar a igualdade das mes-
mas.

A eqüidistância das paralelas pode ser mostrada pela ro-
tação da figura em volta de uma perpendicular às mesmas;
o teorema pode ser também, se desejável, dado como axioma.
Podem ser feitas aplicações dêsses teoremas em exercícios.
Por exemplo, para mostrar (ainda que não rigorosamente) a
inscrição num círculo de um polígono regular mediante divi-
são da circunferência em arcos iguais. Introduz-se, também,
a noção de teoremas inversos.

5) Teoremas que se demonstram a partir do 1.º caso de igualdade de triângulos (lados e ângulo compreendido, respectivamente iguais). A bissetriz divide o triângulo isósceles em 2 triângulos iguais; a bissetriz é altura, é mediana dêsse triângulo; os ângulos da base dêsse triângulo são iguais; os ângulos dos triângulos eqüiláteros são iguais; oblíquas iguais afastam-se igualmente do pé da perpendicular e recìprocamente; cada ponto da perpendicular ao ponto médio de um segmento é eqüidistante dos extremos — mediatriz de um segmento; as mediatrizes de um triângulo se encontram; igualdade de triângulos retângulos de hipotenusa e cateto respectivamente iguais; de catetos respectivamente iguais. O diâmetro que é perpendicular a uma corda, divide a corda e o arco ao meio. Cordas iguais se afastam igualmente do centro. O ângulo capaz é metade do arco; o ângulo inscrito é metade do arco; ângulo interior é a semi-soma dos arcos, o ângulo exterior é a semi-diferença dos arcos, paralelas interceptam arcos e cordas iguais.

Nesta parte procura-se mostrar que os teoremas decorrem da aceitação dêsse caso de igualdade, de teoremas demonstrados anteriormente ao mesmo tempo que se ressalta a seqüência lógica com que um teorema se associa a outro. Nas demonstrações e exercícios deve-se variar não só a posição da figura como o uso das letras. E' possível que outros teoremas possam ser incluídos na lista acima, mas já dá um número suficiente para um bom treinamento por parte dos alunos. Notemos também, que o teorema do ângulo inscrito é precedido do teorema do ângulo capaz o que permite um tratamento mais simples a sua demonstração.

6) Teoremas que se apoiam no 3.º caso de igualdade de triângulo (triângulos de lados respectivamente iguais).

Igualdade dos ângulos alternos internos (que utiliza também a propriedade da eqüidistância das paralelas), igualdade dos ângulos correspondentes, dos ângulos colaterais internos e externos; os ângulos de lados paralelos são iguais ou suplementares, os ângulos de lados mùtuamente perpendiculares são iguais ou suplementares. Medida do ângulo externo de um triângulo; soma dos ângulos de um triângulo, de um polígono quadrilátero de lados opostos iguais e um paralelograma. As diagonais de um losango são perpendiculares. Inscrição de polígonos regulares no círculo. Como se vê, os teoremas desta parte foram ligados ao 3.º caso de igualdade de triângulos. Isto não quer dizer que sejamos obrigados a proceder dêste modo. Boa parte dêstes teoremas pode ser ligada ao 2.º caso (triângulos de ângulos iguais e lado adjacente respectivamente iguais). Com isto alteraríamos o esquema. Em todo o caso, isto serve para mostrar as possibilidades que se tem em variar o tratamento destas questões.

Ainda aqui vale a observação anteriormente feita, de que a lista pode não estar completa. Também deve-se verificar se os teoremas apontados dependem ou não das listas 3, 4 e 5.

7) Teoremas que se apoiam no 2.º caso de igualdade de triângulos (ângulos respectivamente iguais adjacentes a lados iguais). Um ponto qualquer da bissetriz é eqüidistante dos lados do ângulo. As bissetrizes do triângulo se encontram num ponto; a diagonal divide o paralelogramo em 2 triângulos iguais. Os lados e ângulos opostos do paralelogramo são iguais. Os ângulos da base do trapézio isósceles são iguais; as diagonais do paralelogramo cortam-se ao meio. Aplicações ao retângulo e ao quadrado.

Igualdade de triângulos retângulos de hipotenusa e um ângulo agudo respectivamente iguais; idem substituindo a hipotenusa por um cateto. Feixe de paralelas cortadas por uma transversal; paralela ao lado de um triângulo, pelo ponto médio de um dos outros lados.

E' preciso notar que esta série de teoremas, além de apoiar-se no 2.º caso de igualdade de triângulos, também está diretamente ligada ao 3.º caso de igualdade, em vista das aplicações que se faz do teorema dos ângulos alternos-internos. Valem observações feitas anteriormente.

8) Teoremas sôbre a desigualdade dos elementos de um ou dois triângulos e que se apoiam em alguns teoremas de 5 e 6 principalmente. Aplicações.

Num triângulo ao maior lado opõe-se o maior ângulo; aplicações aos triângulos retângulos; num triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença dêles; extensão a uma poligonal; aplicação às oblíquas que se afastam na perpendicular; em triângulo de lados respectivamente iguais, ao ângulo maior compreendido por êsses lados corresponde o lado maior, etc.

Ao finalizar êste artigo desejamos fazer uma observação final: êsse esquema deve, necessàriamente, possuir suas falhas, no que diz respeito a posição mútua dos teoremas, pois sendo êle organizado recentemente não foi pôsto em prática durante o trabalho escolar, o que significa que não recebeu um tratamento minucioso com relação a detalhes.

Sendo assim, êle deve ser encarado mais a título de

exemplo para que os interessados possam organizar outros esquemas, mais complementos, com outra distribuição.

Gostaríamos também de receber a opinião dos nossos colaboradores e impressões causadas pelo presente artigo.

O ENSINO DA GEOMETRIA DEDUTIVA NA ESCOLA SECUNDÁRIA

I PARTE — INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria Dedutiva em nossos cursos ginasiais constitui sempre um problema complexo e difícil ao professor secundário. Complexo, pois muitos são os fatôres a considerar: aluno, matéria, programa, condições da vida escolar, objetivos a alcançar. Difícil, porque êsses fatôres não se harmonizam no conjunto, tal como aparecem normalmente em nossas escolas. E' necessário, pois, um estudo cuidadoso e profundo de cada um dêles, a fim de que um consciente e claro conhecimento de seus diversos aspetos, permita relacioná-los convenientemente de modo a proporcionar uma situação didática favorável a consecução dos objetivos, propósitos e padrões a alcançar.

A proposição do Prof. Antônio Rodrigues, catedrático de Geometria da Faculdade de Filosofia da U.R.G.S., estuda o problema e para sua solução apresenta sugestões de grande valor pedagógico. Seu trabalho, inteligente e honesto é, também engenhoso e fàcilmente aplicável. Logo após uma primeira leitura tem-se a impressão de que é um verdadeiro "ôvo de Colombo", capaz de solucionar de vez a desanimadora realidade de nossas escolas secundárias: o fato do professor procurar ensinar geometria dedutiva e conseguir dos alunos teoremas decorados.

Sua teoria é desde logo apoiada em firmes princípios pedagógicos e, para comprová-la apliquei-a durante dois semestres letivos em duas turmas diferentes. O trabalho que segue é o resumo do plano de curso seguido, a sua fundamentação psico-pedagógica, o estudo dos resultados obtidos e suas conclusões.

II PARTE — RESUMO DO PLANO DE CURSO RELATIVO AO ENSINO DA GEOMETRIA DEDUTIVA — COLÉGIO DE APLICAÇÃO — FAC. DE FIL. DA U.R.G.S. — 3.ª SÉRIE GINASIAL — 1956

1 — Objetivos

Os objetivos do ensino da Geometria decorrem diretamente de seus valores:

a) — **Valor prático** — Conhecimento das formas e fórmulas geométricas mais comuns que permitam a compreensão e solução de inúmeras situações problemáticas da vida diária.

b) — **Valor prático circunstancial** — O conhecimento da Geometria é básico para outros estudos: Física, Astronomia, Arquitetura, etc. e para artes plásticas: Desenho (perspectiva, projeções, simetria, proporções), Pintura e Escultura.

c) — **A Geometria e a natureza** — O estudo da natureza leva a pesar, medir, comparar. A Geometria nasceu da necessidade de medir a terra — como seu nome mesmo indica. Desenvolveu-se juntamente com a geometria outros ramos da matemática no estudo das formas e na formação matemática das relações quantitativas da natureza. A natureza é tão quantitativa que a Física e a Astronomia têm, em sua fase teórica, caráter essencialmente matemático o que também acontece em certos capítulos da Química e da Biologia.

d) — **A Geometria como modo de pensamento** — Todos os fatos anteriores, porém, não justificam cabalmente o ensino da Geometria. O seu maior valor consiste em levar a empregar de modo mais típico, claro e simples, algumas formas de pensamento que são da maior importância para todos.

Como por exemplo: 1) o conhecimento completo de uma situação em uma vista de conjunto; discernir dos fatos e circunstâncias. — 2) Partir de premissas (que se admitem verdadeiras) e chegar a uma conclusão. Êsse é o pensamento dedutivo, ou lógico; é o pensamento matemático por excelência. Pode-se afirmar que tôda a conclusão é obtida por um pensamento matemático, e tal que, se parte de premissas certas, leva a conclusões certas, sem contestações.

e) — **Certeza** — Na matemática, e portanto na Geometria, não há pontos de vistas diferentes, nem possibilidades de discussão em tôrno de uma verdade (sempre verdadeira no tempo e no espaço). As diferentes escolas de pensamento se harmonizam e completam. Não são antagônicas. Suas conclusões ou são verdadeiras ou não são.

O ensino da Geometria deve levar o aluno a alcançar o sentido da certeza independente — não aceitando afirmações dogmáticas sòmente sob a autoridade do mestre e do livro.

f) — **Simplicidade** — A Geometria como ciência começa por um reduzido número de definições e postulados simples e passo a passo atinge as questões mais complicadas. A Matemática permite uma gradação quase perfeita de dificuldades e estas só devem aparecer diante dos alunos quando êstes puderem enfrentá-las.

g) — **Aplicabilidade** — A possibilidade de aplicar a habilidade já adquirida.

Peirce — A Matemática é a ciência das conclusões necessárias. A atividade mental é do mesmo tipo no pensamento de um médico ou de um comerciante em que, em face de certas premissas, chegam a uma conclusão. Difere em grau mas não no caráter essencial.

h) — **Outros valores** — Utiliza e permite desenvolver a capacidade de:

1 — generalizar seus conceitos, resultados e combinar os mesmos;
2 — formar e usar uma linguagem simbólica;
3 — desenvolver um trabalho científico até chegar a uma forma acabada;
4 — autocrítica;
5 — descobertas próprias;
6 — aquisição de senso estético.

2 — Seleção e ordenação da matéria segundo a orientação sugerida pelo Prof. Antônio Rodrigues

A — Geometria Intuitiva

Realmente à altura do desenvolvimento psicológico de adolescente. Seu conhecimento pode, deve ser amplo e firme. E' o suporte para a aprendizagem da Geometria Dedutiva.

Matéria a desenvolver:

Noção de ponto, reta, plano, espaço.
Retas, semi-retas, segmento. Medidas.
Ângulos. Medidas.
Triângulos — perímetro e área.
Quadriláteros — perímetro e área.
Polígonos em geral — perímetros.
Círculo — seus elementos e suas relações.

B — **Introdução à Geometria Dedutiva**

Postulados, axiomas e teoremas de demonstração intuitiva — todos estudados como axiomas. Esta parte apoia-se diretamente nos conhecimentos intuitivos ao mesmo tempo que concede ao adolescente a oportunidade para seus primeiros pensamentos dedutivos (em relação à Geometria).

Matéria a desenvolver:

a) Postulados (os necessários:

1) Duas retas não paralelas de um plano têm sòmente um ponto comum.
2) Por dois pontos de um plano só pode passar uma reta.
3) Por um ponto fora de uma reta só se pode traçar uma paralela a esta reta.
4) Três pontos não colineares determinam um plano.
5) Três planos 2 a 2 não paralelos e não pertencentes ao mesmo feixe só têm um ponto em comum.

b) Axiomas (os necessários) :

1) Todos os ângulos retos são iguais.
2) Todos os ângulos rasos são iguais.
3) Todos os ângulos de um giro são iguais.

c) Teoremas de demonstração intuitiva (seu conhecimento como axioma,

1) Por um ponto, fora de uma reta, só se pode baixar uma perpendicular a esta reta.
2) Ângulos consecutivos construídos de um lado de uma reta medem um total de 2 retos.
3) Ângulos consecutivos construídos em tôrno de um ponto medem um total de quatro retos.
4) Ângulos opostos pelo vértice são iguais. (A demonstração feita em aula a título de exercício não foi mais tarde solicitada ao aluno — o reconhecimento imediato desta verdade matemática faz com que êle a aceite perfeitamente como axioma).
5) Duas paralelas cortadas por uma transversal determinam oito ângulos, dos quais quatro são obtusos e iguais e quatro agudos e iguais. (A demonstração intuitiva dêsse teorema, feita em aula como exercício também não foi solicitada ao aluno).

C — **Geometria Dedutiva**

São selecionados os teoremas fundamentais. Depois do conhecimento de um dêles segue imediatamente o estudo de todos os teoremas que nêle se apoiam. Há, então, unidade de pensamento.

Nesta parte do plano a matéria fica então dividida em bem definidas unidades didáticas:

Unidade I

Teorema fundamental: "Duas paralelas cortadas por uma transversal..." (Já do conhecimento do aluno).

Teoremas que são suas conseqüências diretas:

a) Dois ângulos de lados respetivamente paralelos ou são iguais ou são suplementares...
b) Dois ângulos de lados respetivamente perpendiculares ou são iguais ou são suplementares...

Unidade II

Teorema fundamental: "Em um triângulo qualquer, a soma de seus ângulos internos mede sempre 2 retos.

Teoremas que são suas conseqüências:

a) Em um polígono qualquer, a soma dos seus ângulos internos vale 180° (n—2).
b) A soma dos ângulos externos de um polígono qualquer mede sempre 360° ou quatro retos.
c) Em um triângulo qualquer, um ângulo externo mede tanto quanto a soma dos dois internos não adjacentes.
d) Em todo o triângulo, um ângulo externo é maior que cada um dos ângulos não adjacentes.

Unidade III

Teorema fundamental: "Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a ângulos respetivamente iguais".

Teoremas que são suas conseqüências:

a) Dois triângulos retângulos são iguais quando têm um cateto igual e o ângulo agudo adjacente igual.
b) Os lados opostos de um paralelogramo são iguais e os ângulos opostos também.
c) As diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.
d) Se, pelo meio de um dos lados não paralelos de um trapézio, traçarmos uma paralela a uma das bases, esta reta divide o lado oposto em segmentos iguais.

Unidade IV

Teorema fundamental: "Dois triângulos são iguais quando têm um ângulo igual compreendido entre lados respetivamente iguais".

Teoremas que são suas conseqüências:

a) Os triângulos retângulos que têm os dois catetos iguais são iguais.
b) Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que se opõem aos lados iguais são iguais.
c) A bissetriz do ângulo do vértice do triângulo isósceles é também, mediana e altura.
d) O triângulo equilátero é também eqüiângulo.
e) O diâmetro que é perpendicular a uma corda, divide-a ao meio.
f) O ângulo inscrito (em um círculo) tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados.
g) Todo o quadrilátero que tem dois lados opostos iguais e paralelos é um paralelogramo.
h) Dois segmentos paralelos compreendidos entre retas paralelas são iguais.

Unidade V

Teorema fundamental: "Dois triângulos que têm os três lados respetivamente iguais, são iguais".

Sua conseqüência:

Um paralelogramo qualquer tem ângulos opostos iguais.

— .... —

4.ª SÉRIE — 1957

(O desenvolvimento do plano de curso continuou com a mesma turma).

Unidade Introdutória

1) **Conceitos fundamentais:**

a) Proporção, proporcionalidade entre grandezas.
b) Noção de figuras semelhantes. Razão de semelhança.
c) Propriedades das figuras semelhantes.
d) Igualdade, semelhança e eqüivalência de figuras.
e) Critérios de proporcionalidades.

2) **Axiomas:**

a) Duas figuras semelhantes a uma terceira são semelhantes entre si.
b) Todos os polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes.
c) Todos os círculos são semelhantes.

Unidade I

Teorema fundamental: "Um feixe paralelo que corta uma transversal em segmentos iguais, corta qualquer outra transversal em segmentos também iguais".

Teoremas que são suas conseqüências:

a) Um feixe de paralelas que corta uma transversal em segmentos desiguais...,
b) Teorema de Tales.
c) A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide internamente o lado oposto...
d) A bissetriz externa de um ângulo externo de um triângulo...

Unidade II

Teorema fundamental: "Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos respetivamente iguais".

Teoremas que são suas conseqüências:

a) Relações métricas nos triângulos retângulos e aplicações do teorema de Pitágoras (cálculo da altura dos triângulos eqüiláteros, da diagonal do quadrado, etc.)
b) Linhas proporcionais no círculo: cordas, secantes e tangentes; perpendicular baixada de um ponto da circunferência ao diâmetro...

Unidade III

Teorema fundamental: "Dois triângulos são semelhantes quando têm um ângulo igual compreendido entre lados respetivamente proporcionais".

Conseqüências:

a) Dois polígonos que se compõem de triângulos semelhantes e semelhantemente dispostos são semelhantes (e recíproca).
b) Os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre si como os lados e as áreas...

Unidade IV

Teorema fundamental: "Dois triângulos são semelhantes quando têm os lados respetivamente proporcionais".

Em seguida ao estudo de cada teorema, e sobretudo logo após se completar uma unidade didática, o plano de curso prevê várias e adequadas aplicações práticas, problemas gráficos e exercícios, relativos à parte teórica desenvolvida em aula.

III PARTE — FUNDAMENTAÇÃO PSICO-PEDAGÓGICA DO PLANO DE CURSO APRESENTADO.

1 — Geometria Intuitiva

Em criança o pensamento de aluno é intuitivo: reconhece de maneira imediata a verdade sem que a ação do raciocínio, de tão leve e rápida se faça notar. Nesta mesma fase — relativa ao ensino primário — deve ser iniciado o ensino da geometria.

Valiosos conhecimentos intuitivos e informais podem então ser adquiridos; um estudo bem orientado e auxiliado pelo desenho, modelagem, recortes, leva o aluno naturalmente a reconhecer de maneira clara e direta muitas verdades geométricas. Nossas escolas primárias, porém, em muitos pontos de vista esclarecidas, sobretudo quanto ao ensino da aritmética, não tem proporcionado ainda aos seus alunos um conveniente e graduado programa de geometria intuitiva, que deveria continuar, principalmente pelas duas primeiras séries ginasiais.

E' ao trabalho nessas séries que desejo agora me referir: Se é conhecido o fato de que o adolescente até por volta dos 13 anos possui sobretudo o pensamento intuitivo não podemos exigir que êle salte por esta fase natural de seu desenvolvimento psíquico, passando a se utilizar de um raciocínio lógico que não possui. Consideremos que **o crescimento intelectual, completo e harmônico, da pessoa humana exige que ela se realize integralmente em cada fase do seu desenvolvimento.**

Por esta razão o conhecimento da Geometria intuitiva pode e deve ser amplo e firme. E' o suporte necessário a aprendizagem da Geometria dedutiva.

Por outro lado, é fato conhecido que, embora a função desta disciplina seja repleta de valores práticos, científicos, artísticos e filosóficos, em absoluto não se notam efeitos como tal nos alunos de curso secundário, em sua grande maioria.

Talvez seja o seu valor prático o que mais se efetive — a causa é psicológica: a geometria intuitiva é mais fàcilmente assimilada pois corresponde ao raciocínio matemático de que mais dispõe o adolescente. O aluno adquire realmente a capacidade de calcular àreas e perímetros, reconhece as principais formas geométricas e domina os princípios informais de igualdade, simetria, congruência, eqüivalência, semelhança, proporção, etc.

O professor de matemática, com o seu espírito de adulto formado, procura naturalmente impor aos seus educandos a sua forma de pensamento reflexivo perfeito e acabado: significa isto que exige que o aluno comece por onde êle terminou.

No início da adolescência o aluno possui também sua lógica peculiar em que desempenham papel importante a curiosidade, a experiência e o raciocínio. E' esta lógica que deve ser utilizada e portanto desenvolvida: ela é o caminho seguro que o levará, mais tarde ou mais cedo e se bem encaminhado ao pensamento lógico por excelência em seu mais elevado grau, tal como exige a Geometria Dedutiva.

No desenvolvimento dos trabalhos em aula relativos à Geometria Intuitiva é fundamental a escolha e apresentação dos exercícios e aplicações que devem ser:

a) Adequados aos objetivos de cada aula.

b) Adequados aos alunos, suas idades e diferenças individuais, tanto quanto aos seus conhecimentos e capacidades como seus interêsses. Para isso as aplicações devem ser:

I — Convenientemente graduadas
II — Muito variadas
III — Tão numerosas quanto necessário fôr.

E' também nessa primeira parte, a do conhecimento intuitivo, que se faz mister, o uso adequado e completo de material didático. Êste, resumidamente constará de livros didáticos, de material comum de desenho, cartazes, fichários, caderno de trabalho, anotações e recortes.

As práticas, realizadas com os instrumentos de medidas de comprimento e ângulos, familiarizam os alunos com os entes geométricos correspondentes, dá-lhes oportunidade de os calcularem a olhômetro, i.é., o aluno adquire idéia de tamanho, proporção, simetria, como também permitem maior adestramento e conhecimento do material que utilizam. Cartazes de figuras geométricas e suas aplicações favorecem em grande parte a aquisição do vocabulário geométrico.

E' necessário, para os trabalhos posteriores que essa parte de geometria intuitiva seja amplamente conhecida dos alunos, pois um manejo consciente e natural dêsses conhecimentos, aplaina e firma o caminho que em breve seguirão.

2 — Introdução à Geometria Dedutiva

Aqui aparece a primeira grande dificuldade para o aluno: a dificuldade em diferençiar axiomas e postulados. Na realidade, sob o ponto de vista matemático, não há diferença: ambos são conhecimentos imediatos, não passíveis de demonstração. Do ponto de vista filosófico, porém, os sentidos das palavras diferem fundamentalmente: axioma é um conhecimento imediato, perceptível por qualquer pessoa normal; postulado é uma verdade admitida por um, enquanto que outro pode verdadeiramente postular em sentido contrário. Essas nuances, mesmo fortes e dissemelhantes, não podem estar ao alcance da compreensão do adolescente: — êste não dispõe do pensamento lógico-interpretativo necessário.

Por outro lado, a apresentação de teoremas de demonstração intuitiva que inicialmente se desenvolve em aula por serem, aparentemente, os mais fáceis, desorientam e confundem de todo o aluno. O seu estudo a nada leva já que não exige raciocínio lógico, enquanto que procura encobrir ou disfarçar o conhecimento intuitivo.

A solução para essa dificuldade, apresentada pelo Prof. Rodrigues em sua proposição é interessante e correta, tanto sob o ponto de vista psicológico como do pedagógico: Postulados, axiomas e teoremas de demonstração intuitiva são todos estudados como axiomas.

A prática mostrou que êsse esquema não só traz economia de tempo e esfôrço ao professor e aos alunos, como também sua singeleza e unidade permitem um primeiro passo bem acertado e seguro na aprendizagem reflexiva: a necessidade de enunciar com clareza e precisão os axiomas exige perfeita idéia dos entes geométricos, dos conceitos fundamentais, abstração e visão de conjunto.

Essa parte se apoia diretamente sôbre os conhecimentos intuitivos já adquiridos enquanto concede ao aluno oportunidade aos seus primeiros pensamentos dedutivos (em geometria).

3 — Geometria Dedutiva

Entre os valôres da Geometria apontados no início do plano de curso em questão, ressalta como o mais importante a forma de pensamento que é exigida, — forma essa de claro discernimento das cousas e suas relações, de conhecimentos prévios que levam a conclusões — e que é transferível às outras matérias e também às situações normais de vida. Certeza e simplicidade são outros valores que admitem objetivos altamente educativos.

Mas êsses resultados positivos não se verificam. A causa é psico-pedagógica: o adolescente não possui o raciocínio lógico necessário e nem a matéria, em sua ordenação apresenta unidade de pensamento. Ao sentir que cada conclusão que obtém é realizada por um caminho diferente, o aluno se desorienta e não percebe, muitas vêzes, a razão pela qual uma demonstração foi encaminhada de uma maneira, enquanto que outra seguinte desenvolveu-se de um modo completamente estranho às demonstrações anteriores. Os resultados são dois principais: 1) o adolescente não vê, nem encontra, nenhuma lógica na geometria, pois, além da barreira psicológica, existe a falta de unidade na matéria — e o mestre lhe parece um malabarista. Qual o professor de matemática que já não ouviu esta exclamação: — Mas professor, como é que eu iria saber que nesse teorema se traçaria uma paralela e um prolongamento e então isso recairia num teorema estudado há duas semanas? — 2) O aluno decora os teoremas, como recurso único para passar de ano.

Urge então uma nova orientação ao ensino da Geometria, que atenda a essas duas falhas existentes:

a) **A adequação da matéria ao desenvolvimento do raciocínio matemático do adolescente.**

b) **Ordenação da matéria de modo a permitir unidade de pensamento e conseqüente compreensão do processo demonstrativo.**

O plano de curso em questão procura atender aos itens acima enunciados. Embora a ordenação da matéria seja diversa da proposta pelo Prof. Rodrigues, segue exatamente sua orientação: Foram selecionados os teoremas fundamentais; depois do conhecimento de cada um dêles segue imediatamente o estudo de todos os teoremas que nêle se apoiam. Há então unidade de pensamento.

Na realidade a aprendizagem da Geometria Dedutiva se processa, então, por meio de bem definidas unidades didáticas.

A ordem destas unidades visa, dentro do possível atender à logicidade que as relaciona, como também às necessidades didáticas de seu ensino e sua aprendizagem.

Um geômetra puro notará imediatamente alguma quebra da seqüência lógica (da lógica do adulto, não da lógica

experimental e viva do adolescente), como, por exemplo o fato de apresentar o teorema das duas paralelas cortadas por uma secante como axioma (sua demonstração intuitiva foi feita em aula como exercício, mas não solicitada depois ao aluno), já que sua demonstração rigorosa só pode ser dada a partir dos casos de igualdade dos triângulos. A vantagem é pedagógica: a primeira unidade apresentada é a mais fácil, na segunda, a demonstração de seu teorema fundamental se apoia de maneira simples e direta nos axiomas estudados e **os teoremas conseqüências** dêste têm demonstrações curtas e incisivas enquanto que os casos de igualdade de triângulos requerem pensamentos mais sutis e um encadeamento mais longo de raciocínio.

No entanto, esta primeira experiência com a proposição do Prof. Rodrigues não pretende que se tenha conseguido a ordenação mais perfeita das unidades didáticas. A experiência futura bem como sugestões de outros ilustres professôres talvez possam modificá-la para muito melhor. E' também imediato que cada unidade pode ser acrescida ou diminuída de teoremas que se apoiam no fundamental.

IV PARTE — ESTUDO DOS RESULTADOS OBTIDOS COM O DESENVOLVIMENTO DO PLANO DE CURSO EM QUESTÃO

São apresentados a seguir os estudos relativos a atuação e ao aproveitamento de cada aluno. Êsses estudos e anotações que seguem compreendem as observações realizadas em aula bem como todos os trabalhos escritos pelos alunos durante o desenvolvimento do plano. Os resultados antes de serem apresentados nesta tese foram estudados e comprovados pelo Gabinete de Psicologia do Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia da U.R.G.S. Êste mesmo gabinete, em teste feito recentemente na 4.ª série, constituída pelos alunos aqui considerados, **constatou uma preferência de 60% pela Matemática.**

Êste fato é bastante expressivo se levarmos em consideração que os alunos tiveram durante os dois últimos semestres de sua vida escolar quase que exclusivamente aulas de Geometria Demonstrativa, o ponto nevrálgico do ensino da matemática no ginásio.

1 — RESULTADOS INDIVIDUAIS

As fichas seguintes, numeradas, são, por motivos óbvios, não identificadas. Nelas constam: 1) a idade cronológica do aluno; 2) seu grau na 1.ª prova parcial dêste ano, exclusivamente sôbre Geometria Dedutiva; 3) percentil relativo ao teste de Raven e 4) conseqüente diagnóstico.

Ficha n.º 1 — Treze anos e oito meses; grau 6,9; percentil 50 inteligência média (+).

Apresenta sempre certa descontinuidade de pensamento. Em repentes ocasionais demonstra certa logicidade, enquanto que em outros casos mostra dificuldade de compreensão. Não tem segurança e não é muito esforçada. Seus trabalhos escritos apresentam sempre alguma falta de raciocínio. **No último mês mostrou sensível melhora no aproveitamento.**

Ficha n.º 2 — Quatorze anos e 10 meses; grau 3,4; percentil 25 inteligência inferior (discrepância).

Aluna de excelente atitude, não tem porém aproveitamento nas aulas de Matemática. No ano passado, nas aulas de geometria, encontrou grande dificuldade inclusive na parte intuitiva. Reprovada fêz exame escrito não satisfatório em que se notava um pensamento pouco ordenado e sem direção. Mas na prova oral respondeu com bastante correção e firmeza as questões propostas, explicando de maneira surpreendente também os seus "porquês". Não estando firme, porém voltou a encontrar dificuldades êste ano. Requer e merece atenção.

Ficha n.º 3 — Quatorze anos e 10 meses; grau 7,4; percentil 50 — inteligência inferior à média.

Boa aluna. Muito aplicada. Mostrou ótimo aproveitamento na 1.ª série ginasial, caindo um pouco sua produção a medida que se lhe exigia raciocínio lógico. Seus primeiros passos na Geometria Dedutiva foram difíceis e inseguros. **Superou essa fase em sua aprendizagem. Seus trabalhos desde o fim do ano passado revelam conhecimento bem claro e firme das questões propostas.** Possui bom vocabulário, mas é tímida e quieta, pouco se manifestando em aula. **Está bem.**

Fincha n.º 4 — Quatorze anos e 3 meses; grau 8,1; percentil 50 — inteligência média (+).

Hesitante no início do curso de geometria foi vencendo gradualmente suas dificuldades. **Hoje está bem na matéria.** Sua forma de pensamento não é rápida nem brilhante, mas efetiva, embora sua aprendizagem exija tempo e esfôrço próprio. Seus trabalhos escritos são bons, com linguagem mate-

mática correta e adequada. Em aula se manifesta pouco mas em geral com acêrto.

Ficha n.º 5 — Quatorze anos e 10 meses; grau 3,3; percentil 50 inteligência média (—).

Desde a 1.ª série os trabalhos de matemática da aluna são medíocres revelando aprendizagem falha e insegura. Agora que lhe é exigido uma forma de pensamento que não dispõe, devido em parte a alguma limitação intelectual e por outro lado a um trabalho pouco consciente, quer em classe, quer em casa. Não raro conversa em aula e se distrai e essa atitude prejudica imensamente seu progresso que atualmente nem se faz notar. Sua última prova parcial revela aproveitamento deficiente.

Ficha n.º 6 — Quinze anos e 3 meses; grau 6; percentil 75 — inteligência superior à média.

Aluna cuja aprendizagem é insegura, apresentando altos e baixos que correspondem não só ao raciocínio matemático ainda pouco firme e desencadeado como também a sua atitude irregular como aluno: ora descuidada, ora interessada, não se firma por falta de continuidade de trabalho escolar efetivo que lhe proporcione oportunidade de elevar seu nível de aprendizagem como também de seu pensamento dedutivo nascente. Êste se manifesta em alguns de seus trabalhos escritos mas não é firme embora ocasionalmente bastante claro.

Ficha n.º 7 — Treze anos; grau 7,8; percentil 95 — inteligência superior.

Aplicada e cuidadosa, a aluna inicialmente com uma forma de pensamentos intuitivos, sem nenhum traço de logicidade que os ligasse, transpôs essa fase, **para o que a orientação do plano muito contribuiu.** Atualmente dispões de esclarecido raciocínio, possui boa linguagem matemática — suas demonstrações são muito completas e corretas. Está muito bem na matéria.

Ficha n.º 8 — Treze anos e 8 meses; grau 4,1; percentil 75 — inteligência superior à média.

Suas dificuldades em Matemática foram assinaladas desde a 1.ª série ginasial. Seu pensamento ainda é inseguro e descontinuado: em geral não resolve problemas e nas demonstrações muitas vêzes se perde e não chega, em geral a conclusão nenhuma. Em aula é desatenta, senta muito atrás, mas sua atitude não é má. Nas verificações fica nervosa e em geral estuda para fazê-las, mas não para aprender. Seu pensamento lógico é ocasional — não é de maneira alguma efetivo de modo que a aluna não pode ainda acompanhar satisfatòriamente os trabalhos desenvolvidos em aula.

Ficha n.º 9 — Quatorze anos e 6 meses; grau 7,8; percentil 25 — inteligência inferior à média (discrepância).

Esforçada, procura superar sua dificuldade na aprendizagem em geral com estudo abundante e consciente. **A orientação do plano lhe oferece uma continuidade de pensamento que vem grandemente em seu auxílio.** Consegue assim efetiva apreensão da matéria de geometria desenvolvida em aula. Inicialmente insegura, está agora, (embora isto requeira esfôrço bastante grande) com bons conhecimentos de geometria dedutiva. Não muito espontânea durante as aulas, apresenta bons trabalhos escritos.

Ficha n.º 10 — Treze anos e 11 meses; grau 8,8; percentil 90 — inteligência superior à média.

Inteligente e estudiosa, passou sem dificuldade pelas diferentes etapas do curso. Sua forma de pensamento é clara e bem encadeada — tem visão de conjunto e boa linguagem matemática. Em aula dá apartes inteligentes e faz perguntas oportunas. Fàcilmente percebe algum êrro ou expressão de pensamento defeituosa ou incompleta. Por exemplo: Ao ser escrito no quadro negro pela 1.ª vez o axioma: 2 retas em um plano só tem um ponto em comum, logo notou a necessidade de completar: **2 retas "não paralelas"**. Demonstrando visão de conjunto e clara compreensão do axioma e dos entes geométricos em questão. Enuncia muito bem os teoremas e suas demonstrações são claras e precisas. **Está muito bem na matéria.**

Ficha n.º 11 — Quatorze anos e 5 meses; grau 7,1; percentil 50 — inteligência média (—).

Muito boa aluna em atitude e aplicação, sempre procurou sanar suas dificuldades escolares com o estudo continuado e consciente. Durante todo o desenvolvimento da geometria, estêve atenta e ativa. Estudiosa, está sempre em dia com a matéria, mas nota-se que sua aprendizagem é imposta de fora para dentro. Em aula não se manifesta, nem dá mostra de uma compreensão mais ou menos rápida e clara, contudo se sai bem nas verificações. Seus últimos trabalhos são bons, suas demonstrações claras e corretas, embora não pessoais. **De modo lento e trabalhoso aprende e tudo indica que vencerá essa etapa de trabalho escolar.**

Ficha n.º 12 — Quatorze anos e 9 meses; grau 4,9; percentil 50 — inteligência média inferior.

Seu passado escolar sempre mostrou uma menina muito aplicada e responsável — no entanto suas limitações intelectuais sempre se fizeram sentir, quer em seus trabalhos escritos, quer em classe. Seu pensamento é lento e pesado — pouco claro, não se encadeia senão à fôrça. E' uma imposição de aprendizagem de fora para dentro. Seu esfôrço lhe compensa momentâneamente e mesmo a ilude quanto ao seu estado de raciocínio. Progride, mas de maneira **insuficiente** e quase penosa. Chorou silenciosamente durante uma aula cujos trabalhos não pôde acompanhar. Estudou muito depois e na verificação mensal alcançou grau 9,5, enquanto que na prova parcial, mais ampla e exigente caiu para 4,9. **Nota-se aqui que a orientação do plano de curso muito lhe tem auxiliado.**

Ficha n.º 13 — Quatorze anos e 5 meses; grau 7,2; percentil 95 — inteligência superior.

Começando com visível falha de raciocínio e compreensão, gradativamente foi se firmando. Com más notas até o ano passado nunca havia sido boa aluna de matemática. Teve que fazer o exame de 2.ª época quando então demonstrou um pensamento lógico, claro e firme. No exame oral, detidamente argüída respondeu com calma e segurança a tôdas as questões propostas. Êste ano continua muito bem, **está vencida a barreira de seu raciocínio anterior deficiente. Sempre inteligente possui agora também satisfatório pensamento lógico.**

Ficha n.º 14 — Quatorze anos e 5 meses; grau 9; percentil 50 — inteligência média (—).

Muito boa aluna — tem excelente atitude em classe. **O desenvolvimento de seu pensamento matemático foi seguro,** embora um pouco difícil. Possui atualmente preciso discernimento dos elementos em questão, tendo boa visão de conjunto. Dispõe ainda de uma forma de expressão sempre correta e adequada, sendo-lhe acessível, sobretudo, a faculdade de definir exata e precisamente, entes geométricos, enunciar axiomas, teoremas, elaborar anotações, etc., o que evidencia um bom grau de maturidade.

Ficha n.º 15 — Quatorze anos e 3 meses; grau 9,8; percentil 95 — inteligência superior à média.

Aluna inteligente e viva, desde o início do ensino da geometria mostrou acompanhar muito bem os trabalhos em aula. Com bom raciocínio **aprendeu perfeitamente a forma de pensamento exigida nas demonstrações**; seus conhecimentos são claros e seguros. Está muito bem na matéria.

Ficha n.º 16 — Quatorze anos; grau 7,7; percentil 75 — inteligência superior à média.

Com alguma dificuldade no comêço do estudo da geometria, foi gradativamente se firmando na matéria. Seu pensamento claro e rápido era sobretudo intuitivo, daí suas falhas iniciais. **Êste ano seu raciocínio lógico, que não é brilhante, é um instrumento de que dispõe efetivamente**, como pode ser observado nas demonstrações próprias e corretas que apresenta nos seus trabalhos escritos. Em aula é em geral ativa e mostra quase sempre clara compreensão do que está sendo desenvolvido. Resolve bem problemas.

Ficha n.º 17 — Quatorze anos e 2 meses; grau 8; percentil 7 — inteligência superior à média.

Aluna inteligente — capaz. Infelizmente no ano passado, devido à doença faltou ao início do desenvolvimento do plano. Isso lhe acarretou dificuldade inicial em seus primeiros pensamentos. Depois, durante as aulas, notou-se que sua compreensão ia se tornando cada vez mais clara e segura. **Terminou o ano bem.** Êste ano seu trabalho mostra **bom grau de aprendizagem** e sua forma de pensamento dedutivo só não é ainda suficientemente continuado.

Ficha n.º 18 — Quatorze anos e 11 meses; grau 5, percentil 75 — inteligência superior à média.

Em agôsto do ano passado iniciou seu estudo de geometria. Muito fraca em matemática (foi assim desde a 1.ª série ginasial). Seus primeiros trabalhos, mesmo relativos à geometria intuitiva são deficientes. No fim do ano, porém já acompanhava os trabalhos da classe bem, de modo mais seguro, embora não de todo satisfatório. Êste ano realizou trabalhos escritos onde mostrou grande progresso — seu estado de pensamento dedutivo agora é relativamente **claro e bem encadeado.** Durante as aulas manifesta-se pouco e não resolve bem problemas.

Ficha n.º 19 — Quatorze anos; grau 8,2; percentil 75 — inteligência superior à média.

Aluno descuidado e mesmo negligente. Seus graus variam muito, devido sobretudo à falta de um estudo bem orientado. E' inteligente, e após ter passado por um período

inseguro, apresenta agora um raciocínio claro e bem encadeado. Não é, porém, estudioso. **E' um exemplo de progresso gradual e firme em que se manifesta a boa orientação do plano.**

Ficha n.º 20 — Quatorze anos e 6 meses; grau 4,7, percentil 25 — inteligência inferior à média.

Muito **imaturo**, turbulento e irrequieto em aula; perturbado e nervoso durante as verificações. Embora perspicaz (pensamento intuitivo) não leva mais longe nenhum pensamento encadeado: não chega a conclusão nenhuma. Em problemas que resolve quase sempre aritméticamente, age bem e de maneira correta. Em aula, em repentes que logo desaparecem sugere corretamente uma solução de problema ou mais um passo em uma demonstração de teorema. Mas fica aí. Sua imaturidade psíquica e turbulência interior não lhe permitem ir mais longe.

Ficha n.º 21 — Quatorze anos e 10 meses; grau 5,4; percentil 75 — inteligência superior à média.

E' inteligente e, neste ano, bastante interessado na matéria. Mas não dispõe de raciocínio lógico necessário; **tôda a preparação anterior tem, porém, se revelado positiva.** Se seus trabalhos escritos são irregulares ainda, em aula se manifesta corretamente, inclusive ao apontar o encaminhamento de uma demonstração. E' o pensamento dedutivo nascente e nota-se que a **unidade de pensamento proporcionada pelo plano lhe é de muito valor.** Na resolução de problemas claudica seguidamente na aplicação do que estuda teòricamente de modo a revelar pouco estudo e trabalho em casa.

Ficha n.º 22 — Quatorze anos e 3 meses; grau 7,9; percentil 50 — inteligência média (+).

Iniciou o trabalho de geometria com pouca firmeza e entusiasmo. Em pouco, porém, revelou-se pensando mais clara e seguramente. Foi relativamente lento ao elaborar seus primeiros pensamentos geométricos dedutivos. Vencendo esta fase, já no fim do ano passado apresentou bons trabalhos escritos nas últimas verificações. Durante a aula, nota logo a hipótese e a tese e muitas vêzes o encaminhamento da demonstração. **Êste ano elabora pensamentos dedutivos com clareza.**

Ficha n.º 23 — Quatorze anos e 6 meses; grau 8; percentil 75 — inteligência superior à média.

Sempre bom aluno de matemática. Apresentou no início dos trabalhos de geometria (mesmo intuitiva) alguma hesitação na apreensão das idéias fundamentais. Superou, porém, esta falha; terminou o ano revelando em seus trabalhos um pensamento lógico nascente (e por isso ocasionalmente inseguro. **Êste ano firmou-se muito bem**, inclusive apresentou duas demonstrações próprias de teoremas não feitos em aula, muito bem coordenadas. Com alguma dificuldade em falar com clareza, não expressa o que sabe ou suas dúvidas durante as aulas. As observações de seus trabalhos, se referem as verificações escritas.

Ficha n.º 24 — Quinze anos e 2 meses; grau 6,6; percentil 90 — inteligência superior à média.

Aluno inteligente, de raciocínio claro e vivo. Nem sempre, porém, atento e estudioso — seus trabalhos em classe e nas verificações sempre bons, embora um tanto desordenados. Sua atitude nos últimos meses de aula, passou a ser ainda mais entremeada de inquietude ou distração (é de notar que seu desenvolvimento físico foi enorme no último ano). Apresentou dois trabalhos escritos muito bons, onde se nota claramente a ação de seu pensamento lógico já bem delineado. Na prova, a distração fêz errar dois problemas. Como nota destoante errou a hipótese e a tese de dois teoremas. Apesar de sua inteligência estuda insuficiente, em parte devido a despreocupação que lhe traz sua inteligência.

2 — RESULTADOS GERAIS

Cabe aqui, em primeiro lugar, uma rápida apreciação da turma: é bastante heterogênea, segundo revela o teste de Raven.

A causa principal dêste fato foi o Ginásio de Aplicação em seu primeiro ano de existência não ter levado a efeito exame de admissão próprio: admitiu alunos excedentes do Instituto de Educação e do Colégio Estadual Júlio de Castilhos, que são os alunos em questão.

Apesar disso **a turma realizou em geral uma muito boa aprendizagem de Geometria Dedutiva.** Nesta última prova parcial há sòmente dois graus menores que 4 (3,3 e 3,4) e cinco entre 4 e 6.

Mais importante de tudo porém, o que revelam as observações completas feitas durante os dois últimos semestres: **a aquisição do pensamento lógico efetivo ou nascente, pela maior parte dos alunos e acentuado gôsto pela Geometria Dedutiva que revelaram.**

3 — CONCLUSÕES:

Para o ensino e a aprendizagem da Geometria Dedutiva no ginásio **foi de grande valor:**

a) o conhecimento amplo e firme da Geometria Intuitiva.
b) O conhecimento dos axiomas, postulados e teoremas de demonstração intuitiva, todos êles, como axiomas.
c) A ordenação da matéria segundo unidades didáticas constituídas cada uma de um teorema fundamental, de todos os teoremas que nêle se apoiam e das aplicações práticas correspondentes.
d) A utilização efetiva e bem orientada do material didático adequado.

BIBLIOGRAFIA

1) Le raisonnement mathematique de l'adolescent
Louis Johannot

2) Le jugement et le raisonnement chez l'enfant
Jean Piaget

3) A Matemática na escola secundária
Euclides Roxo

4) Teaching of secondary mathematics
Butler and Wren

——x——

Tese 2) — **Sôbre o ensino da Geometria no curso secundário**

Prof. **Benedito Castrucci** — Fac. de Filosofia da Universidade de S. Paulo

1. As considerações que faremos aqui partem do pressuposto de que o ensino secundário é eminentemente **formativo.**

Seria fastidioso citarmos as diversas opiniões dos que aceitam tal asserção. Entretanto, a tal respeito, vamos mencionar alguns resultados da Comissão Americana sôbre Reorganização da Educação Secundária, que entre outros indica os seguintes objetivos que se nos afiguram formativos:

a) guia vocacional;
b) uso útil das horas de lazer;
c) educação moral;
d) membro útil do lar.

Ainda achamos oportuno lembrar as palavras de J. Desforge, no prefácio da obra Les Sciences Physico-Mathématiques dans l'Enseignement — 1954: "O ensino secundário não tem por missão prover o aluno de uma bagagem de conhecimentos úteis e sim deve desenvolver livre e completamente as suas faculdades, cultivando nêle tudo o que faz a excelência do homem: inteligência, coração, caráter, senso moral e gôsto pelo belo."

Dêste modo, a finalidade do ensino da matemática está incluída no ideal formativo.

Dentro dessa norma, devemos reduzir e, quando possível, eliminar, no ensino da matemática, certos assuntos que não têm valor formativo. Contudo, devido ao entrosamento das cadeiras do "curriculum" secundário, não podemos suprimir certos temas que são necessários sob êsse aspecto. Mas, não

se deve dar a êsses capítulos, tais como limites, derivadas e outros, um relêvo que desvirtue o objetivo do ensino da matemática.

Especificamente Davis R. Davis em seu livro The Teaching of Mathematics coloca entre outras finalidades do ensino da matemática:

a) exprimir pensamento com clareza e cuidado;
b) organizar e interpretar dados;
c) atingir conclusões corretas pelo raciocínio lógico e acurado;
d) analisar problemas, descobrindo relações fundamentais;
e) aperfeiçoar pensamento original;
f) exercitar o poder intuitivo.

2. No estudo da matemática, apresenta-se ao aluno, como seu ramo mais nobre, e que pode ser o mais empolgante e belo, o estudo da geometria.

Lembremos, por isso, que a finalidade do ensino da geometria é tornar claro ao aluno o **sentido da demonstração**, o **sentido da precisão matemática** e o **prazer da descoberta da verdade.**

Segundo W. D. Reeve em seu artigo The Teaching of Geometry (Fifth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics — 1930) se a geometria não é ensinada para dar ao aluno a satisfação de provar algo, de exercitá-lo no pensamento dedutivo, então, não vale a pena ser ensinada.

Ainda Reeve acrescenta: "Matemática em geral e geometria dedutiva em particular não são ensinadas para fazer engenheiros dos meninos e sim para que exercitem o pensamento dedutivo, onde a demonstração é independente da aparência exterior."

Não vamos discutir aqui um programa pormenorizado do que se deva ensinar em geometria dentro dêsse esquema, pois não há necessidade, desde que as nossas considerações são relativas a qualquer elenco de assuntos que permita manter o caráter formativo do ensino.

Como a geometria objetiva o ensino do pensamento dedutivo, então, deve ela ser desenvolvida numa **seqüência lógica**, mas isto não significa que se devam demonstrar rigorosamente tôdas as proposições, pois não podemos olvidar o aspecto psicológico e conseqüentemente pedagógico do aprendizado.

Devemos, preliminarmente, considerar a existência de dois tipos de demonstração: a **experimental**, com apêlo ao mundo exterior e com uso de nossos sentidos; a **lógica**, que independe do universo exterior, apoiada exclusivamente nas definições, postulados e teoremas anteriores.

Com o uso do primeiro processo para verificação da verdade, na realidade, estamos, dentro do esquema lógico, justificando a colocação de um postulado no sistema dedutivo. Por outro lado, pela segunda via, demonstramos um teorema.

A beleza de geometria está em admitir um mínimo de proposições intuitivas (postulados). Assim é que D. Hilbert, num dos mais belos livros dos que fazem a riqueza do patrimônio cultural da humanidade, estabeleceu apenas cinco grupos de postulados para a edificação de tôda a geometria euclidiana.

Todavia, esta idéia de mínimo não tem razão de ser, sob o aspecto didático e, por conseguinte, não necessitamos provar o máximo de propriedades e sim demonstrar o que fôr compatível com a idade dos alunos e sua possibilidade de compreensão.

Mesmo, sem usar a denominação de postulado, pois que o nome não importa, é necessário que, na exposição da seqüência lógica da geometria, o professor use a **experiência** ou o **raciocínio dedutivo**, conforme a oportunidade. Importantíssimo a nosso ver é que o professor **não confunda os tipos de demonstração**, como fazem muitos livros didáticos usuais entre nós.

Outro fato que se nos apresenta relevante é não dar demonstrações rigorosas de certas proposições que são do domínio do aluno pela sua experiência, como por exemplo, a prova de que **os ângulos retos são iguais**. Efetivamente, é curioso provar dedutivamente que todos os ângulos retos são iguais e depois verificar **experimentalmente** os casos de igualdade de triângulos.

Merece ainda observação o fato de que muitos teoremas só podem ser provados com uso dos dois metódos, isto é, didàticamente é feita uma demonstração intuitiva-dedutiva.

Assim seja o teorema: As medianas de um triângulo se cortam num mesmo ponto que divide cada uma na razão 2 para 1, a partir do lado.

Temos que considerar três partes na prova desta proposição:

a) duas medianas se cortam;
b) num ponto que as divide na razão 2 para 1;
c) a terceira mediana passa pelo mesmo ponto.

A primeira parte exige considerações de ordem e, portanto, a sua demonstração dedutiva é **inoportuna** e não pode se expô-la aos alunos.

Então, mostra-se aos alunos intuitivamente que êste fato pode ser aceito, o que é uma verificação experimental da primeira parte.

As partes b) e c) podem ser provadas dedutivamente.

Para a boa formação da mente do aluno é útil que êle acabe por perceber os dois tipos de verificação que surgem na exposição da geometria.

Da mesma forma, na impossibilidade didática de dar um sistema de proposições postulacionais que permitam provar os dois primeiros casos de congruência de triângulos, não deve o professor fazer o aluno crer que, pelo transporte de figura está sendo dada uma prova rigorosa do teorema e sim falar claramente que vai mostrar experimentalmente a veracidade das proposições, o que pode ser feito pelo corte de cartolina e superposição, com o mesmo grau de rigor.

Devido ao espírito de síntese que é natural nestas considerações, deixamos de enumerar outras interessantes proposições que devem ser examinadas sob o aspecto mencionado.

O professor habilidoso poderá trabalhar bem o espírito dos alunos, utilizando a intuição sem receio e sem sacrificar o desenvolvimento lógico do curso de geometria. Por outro lado, os jovens bem iniciados, não encontrarão dificuldades intransponíveis, compreenderão a geometria, aprenderão a amá-la e não a vê-la como uma mera logomaquia.

Notemos ainda que é preciso convencer os alunos de que na geometria se encontra a solução porque se procura e que o êxito depende de paciência e de esfôrço, pois como diz Claude Chevalley, no prefácio de seu livro Fundamental Concepts of Algebra (1956): "Um dos importantes problemas pedagógicos que um professor de iniciação matemática tem que resolver é levar seus estudantes à técnica do raciocínio rigoroso matemático, isto é, ao exercício da retidão de pensamento, cuja austeridade é fútil desprezar."

3. Resumindo o nosso pensamento, dizemos então:

a) Na seqüência dedutiva da geometria, no curso secundário, o uso da demonstração experimental deve ser feito com oportunidade, para atenuar as dificuldades inerentes à idade dos alunos;

b) Não deve haver confusão nos tipos de demonstração a fim de que o aluno pouco a pouco perceba claramente a diferença;

c) Não devem ser provadas dedutivamente proposições iniciais que se apresentam espontâneamente aos alunos.

Concluindo, queremos dizer que tudo isto são considerações que podem ser discutidas nesta útil reunião que ora se faz, mas lembremos de que a eficiência muito depende do professor, pois como algures já alguém disse: ensinar é uma arte e não existe o melhor caminho para se ensinar alguma coisa.

S. Paulo, Junho de 1957.

Benedito Castrucci

Conclusões aprovadas em plenário

1. — Ao ser iniciado o estudo da Geometria Dedutiva consideram-se conhecidos os conceitos e as definições já de posse dos alunos no estudo dessa Geometria no Curso Primário e nos cursos de desenho das duas primeiras séries.

2. — Divulgar em todo o Brasil o trabalho dos três professôres e recomendar que o esquema da Professôra Martha Blauth Menezes seja, efetivamente, usado pelos professôres de matemática e os resultados comunicados ao III Congresso de Matemática.

Tese: **Considerações sôbre o ensino atual da Matemática**

Autor: — **Prof. Ubiratan D'Ambrosio**
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Univ. de Campinas, S.P.

Relator: **Prof. Benedito Castrucci**

A inadequação dos atuais programas de Matemática aos verdadeiros objetivos da escola secundária é conseqüência não só da má distribuição da matéria, mas principalmente do espírito anacrônico que os rege. Uma redistribuição da matéria atualmente ensinada, poderia melhorar, mas estaria bastante afastada da situação que julgaríamos boa.

Talvez a causa primeira dêste estado de coisas esteja no fato de serem os programas ditados exclusivamente pela experiência. Uma estruturação do ensino da Matemática deve ser precedida de estudos cuidadosos, tendo presente o estado atual da ciência, no tocante ao seu desenvolvimento e às aplicações. E o elemento a quem se dirige o ensino deve ser levado em muita consideração. Investigações nesse sentido devem ter em vista: o que ensinar, quando ensinar, a quem ensinar, como ensinar e porque ensinar.

Naturalmente, um esquema razoável só poderia ser atingido com a cooperação de matemáticos, professôres, técnicos e psicológos, e uma reunião assim talvez nunca se tenha realizado.

Numa primeira tentativa, poderíamos agrupar os estudos em tôrno dos itens seguintes:

1. Os valores formativo e informativo da matemática estão relegados a plano inferior, principalmente o primeiro. A repetição de fórmulas e de processos mecânicos de cálculo tem efeito entorpecente no raciocínio do aluno. Levam-no à condição de máquina, sendo então deturpado o caráter formativo da Matemática, tão exaltado nas instruções minis-

teriais. Além do mais, grande parte da Matemática ensinada no curso secundário é absolutamente inútil, quer pela sua pouca aplicação, quer pelo efeito negativo que produz no aluno, criando verdadeira aversão à matéria. No entanto, aspectos realmente importantes da Matemática, como caráter estrutural que a domina, sua relação com a cultura de um povo, suas origens, nem são referidos. Em suma, o aluno deixa a escola secundária sem ter idéia do que é, para que serve, qual a fôrça da Matemática. Ao contrário, vê a Matemática como uma ciência estéril, maçante e, principalmente, inútil. Vem corroborar esta afirmativa o número reduzido de alunos que, terminando a escola secundária, abraçam o estudo da Matemática, que sabemos ser, em realidade, fascinante.

2. A aquisição gradativa do poder de abstração é inexistente, como também o estímulo à capacidade criadora. Nem sequer idéia do que seja abstração tem o aluno, falta-lhe coragem para criar e conseqüentemente haverá o ressentimento em qualquer ramo que concentre sua atividade futura. Dificilmente a confiança em suas capacidades será restaurada, enquanto normalmente a criança tem imaginação bem desenvolvida.

3. Pràticamente, não há relação entre o ensino médio e o superior. O aluno ingressa numa Faculdade com espírito completamente inadequado, e com a matéria que lhe serviria de instrumento mal fundamentada, e conseqüentemente inútil.

Talvez o maior dos entraves a uma elaboração mais racional e atual do ensino da matemática seja o de nos apegarmos em demasia aos esquemas tradicionais. Aliás, parece-nos não haver outra justificativa, além da tradição, para a estrutura atual do ensino. As aquisições mais recentes da Matemática moderna e da psicologia não são consideradas no panorama geral do ensino. Entre a Matemática como ela é estruturada atualmente e como é ensinada nas escolas médias há diferença de séculos, quando não de milênios. Conseqüência direta disto é a falta de unidade que o aluno nota na matéria. A falta do estudo das transformações de figuras evidencia a falta de preocupação nesse sentido.

A posição da Matemática entre as demais matérias, e conseqüentemente sua situação no desenvolvimento geral da humanidade é também desprezada. O exemplo mais marcan-

te disto é a elaboração do programa do curso clássico, obtido dos correspondentes do curso científico pela supressão de alguns itens em negrito. A inclusão de um resumo histórico-crítico do desenvolvimento da Matemática é indispensável, tanto no curso clássico como no científico, mas no primeiro deveria dominar grande parte do programa. Aliás, êste só atingiria seus reais objetivos se fôsse estruturado segundo o desenvolvimento cronológico-cultural da Matemática.

Uma reestruturação do atual ensino, em suas bases gerais, é tarefa para muito tempo, após minuciosos estudos. Uma mudança de títulos de uma para outra série, como têm sido feitas nossas reformas, é pràticamente inútil.

No entanto, poderíamos tentar um melhor aproveitamento dos atuais programas. Nesse sentido, apresentaremos algumas diretrizes que talvez pudessem fazer com que se atingissem resultados mais positivos, levando em consideração o exposto acima.

Na primeira série ginasial, poderia ser introduzida a álgebra pelas equações, espontâneamente. Uma das finalidades da resolução de problemas por aritmética é impedir a mecanização e forçar o raciocínio. Ora, a resolução de problemas com métodos algébricos é muito simples, mais intuitiva mais natural e até certo ponto mais concreta, e pode ser perfeitamente realizada de modo a não impedir a mecanização. Bastaria, para isto, forçar a inversão das operações. Teríamos ao mesmo tempo alcançado o espírito da álgebra moderna. Problemas que despertem a atenção e interêsse do aluno são convenientes neste início do ginásio. Poderiam ser aproveitados os jogos, passatempos e curiosidades matemáticas. Dêstes, se enquadra perfeitamente no esquema o seguinte: **A** pensa um número inferior a 10, **B** diz um número inferior a 10, **C** ordena uma ou várias operações a serem feitas por **A** com o número pensado e o número dito por **B**. **A** apresenta o resultado e **D** deve achar o número pensado por **A**. Daí, são os alunos conduzidos naturalmente à inversão de operações, e posteriormente a equações simples.

Ainda nesta série pode-se evidenciar o verdadeiro sentido de nosso sistema de numeração, posicional. A decomposição de um número, em unidades, dezenas etc., e a introdução de potências de 10 conduz fàcilmente à noção de polinômio de uma variável, além de abrir possibilidades de outros sistemas de numeração. Ao mesmo tempo, os algoritmos das quatro operações seriam justificados e poderiam ser fàcilmente estendidos a polinômios, aqui ou mesmo na série seguinte. Com isto seria realçada a unidade da Matemática, também.

Na decomposição de um número em fatôres primos, seria preparado o caminho para a fatoração algébrica, de tão difícil assimilação, e na maioria das vêzes mecanizada sem que o aluno perceba a razão de sua importância. Aqui, deve ser dada especial atenção ao cancelamento de fatôres. A tendência do aluno é cancelar parcelas no numerador e denominador. Talvez o caráter dinâmico das operações pudesse evitar êste mal. Do mesmo modo, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, feitos mediante a decomposição em fatôres, poderiam ser aproveitados para os correspondentes algébricos. O estudo das áreas e volumes pode se resumir a um mínimo de fórmulas, fazendo com que o aluno se reporte sempre àquelas. Por exemplo, calcular a área do triângulo como metade da de um paralelogramo, volume da pirâmide e do cone como um têrço do volume do prisma e do cilindro. Neste ponto, no plano poderíamos, principalmente na área do trapézio, forçar um esbôço da igualdade de triângulos, naturalmente intuitiva e experimental. No espaço, os volumes do cone, da pirâmide e da esfera poderiam ser relacionados, com vasilhas cheias de água, com os do cilindro e do prisma. A relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, estabelecida experimentalmente, por um pedaço de barbante, embora com bastante êrro tem certamente maior valor formativo que o 3,1416 impôsto pelo professor.

Na segunda série, forçar o aluno a avaliar o resultado de uma raiz quadrada ou cúbica e mesmo de índices superiores tem muita importância, talvez tanto ou mais que o cálculo com a aproximação requerida (geralmente um êrro na colocação da vírgula é despercebido). Estaria se desenvolvendo, principalmente, o espírito crítico do aluno. Na álgebra, a resolução de equações poderia ser feita passo a passo, e não mecânicamente, "passando tudo que é **x** para cá, o que não é **x** para lá." A transposição de têrmos só seria usada quando descoberta pelos alunos. Os exercícios mais complicados seriam evitados. A resolução de sistemas simples de 2 equações com 2 incógnitas pode ser estendida a 3 ou mais equações com igual número de incógnitas. A distinção entre uma equação e uma identidade é essencial nesse estágio. O uso de coeficientes literais poderia ser evitado.

Na terceira série, uma revisão da álgebra da série anterior, com casos pouco mais complicados, introduzindo possìvelmente discussões nas equações. Na geometria talvez fôs-

se possível, abrandando o pretenso rigor, dar maior incentivo à imaginação do aluno, procurando aproveitar suas aptidões e experiências.

Na quarta série seria feita nova revisão da álgebra, intensificando as discussões. A equação do 2.º grau, resolvida sem o uso de fórmulas é conveniente, e esta seria deduzida como exercício, pelo próprio aluno. Notemos que é a primeira fórmula essencialmente algébrica (na sua finalidade, ao menos) com que se defronta o aluno. Aliás, o quarto ano atualmente tem como preocupação essencial, parece-nos, envolver o aluno em uma enormidade de fórmulas. Da equação do 2.º grau pode-se passar, proveitosamente, às equações de grau superior (3.º, 4.º, 5.º, etc.) que se reduzem ao 2.º. Seria evidenciado o teorema fundamental da álgebra, sendo o aluno ensinado a incluir as raízes imaginárias e múltiplas (mencionando o grau de multiplicidade). a introdução de desigualdades poderia ser feita, e o estudo do trinômio do 2.º grau serviria apenas para ilustrar o conceito de função. Seriam apresentadas outras funções, possìvelmente as que encontram aplicações imediatas (juros, velocidade) e seria feito uso de gráficos em larga escala. O estudo do trinômio seria essencialmente gráfico. Aqui, uma noção dos métodos estatísticos seria muito conveniente.

O estudo da geometria métrica giraria em tôrno do teorema de Pitágoras, sempre que possível. A decoração da profusão de fórmulas que aparecem no quarto ano é absolutamente desprovida de sentido. O estudo das cevianas seria feito quase que exclusivamente com a relação de Stewart, evitando a decoração inútil das fórmulas das medianas e das bissetrizes.

As relações métricas no círculo seriam aplicação da semelhança de triângulos, e posteriormente, as demonstrações surgiriam como simples exercícios literais.

Precedendo o estudo de áreas e de equivalência (e aqui seria muito útil introduzir o conceito de relações de equivalência e classes de equivalências, principalmente aplicado aos números racionais), seria feita uma revisão rápida do sistema métrico decimal, evidenciando a arbitrariedade na escolha das unidades, e procurando introduzir o conceito de dimensão e possìvelmente de análise dimensional, que teria tanta aplicação em física.

O comprimento da circunferência e a área do círculo serviriam de motivação à introdução dos números irracionais, e então um apanhado dos diversos campos de números, evidenciando seu desenvolvimento histórico, bem como uma síntese da história da Matemática, mostrando que suas ampliações geralmente atenderam a necessidades, seriam bem convenientes, e de grande alcance do ponto de vista cultural. As propriedades dos números, realçando suas diversas estruturas (grupos, corpos, anéis, naturalmente sem mencioná-las), e mostrando que as diversas ampliações trazem novas propriedades poderiam ser dadas, e mesmo poderiam ser apresentados outros sistemas, além dos números, que gozam destas propriedades, (principalmente, as transformações no plano).

O esquema apresentado tem sido pôsto em prática pelo autor, embora fragmentàriamente e sem a continuidade necessária. Sua elaboração obedeceu às modernas correntes da pedagogia da Matemática, ligadas à psicologia e o desenvolvimento atual da Matemática, principalmente nos seus fundamentos. Embora falho e incompleto em muitos pontos, o presente trabalho representa uma tentativa que somada a tantas outras já efetivadas e que por ventura venham a ser concretizadas, talvez produza resultados satisfatórios.

Conclusões aprovadas em plenário

— Recomendam-se a êste Congresso os seguintes princípios:

a) — Que os programas levem em conta os valores formativo e informativo de cada assunto, com predominância do primeiro;

b) — Que os programas permitam a aquisição gradual da abstração;

c) — Que no estudo das propriedades dos números e dos polinomios sejam evidenciadas as propriedades que mais tarde facilitarão a compreensão das estruturas gerais da álgebra, como sejam as de grupo, anel e corpo.

TESES SÔBRE PROGRAMAS

Teses: — 1. — Programa de Matemática aprovado pela Conferência Nacional de Articulação do Ensino Médio e Superior, realizado em 1951 em São José dos Campos.

Apresentada pelos profs. Ary Quintella, João Breves Filho e Roberto Peixoto.

2. — Programas de Matemática constantes dos Anais do I Congresso de Ensino da Matemática realizado em 1955 em Salvador (Bahia).

3. — Matemática Clássica ou Matemática Moderna na elaboração dos programas de Ensino Secundário.

Autor: — Prof. Oswaldo Sangiorgi

4. — Sugestões para a compilação de programas.

Autora: — Professôra Elvira R. Ricci.

5. — Projeto de alteração dos programass de Matemática.

Autor: Chafi Haddad e Amaury P. Munis

6. — Proposições relativas a determinados pontos dos programas oficiais.

Autor: Julio Cezar de Mello e Souza

Relatora: Professôra Martha de Souza Dantas

1. —

ENSINO DA MATEMÁTICA

Os professôres signatários submetem à apreciação da subcomissão de Ensino Secundário as conclusões sôbre o "Ensino da Matemática" aprovadas no Congresso de São José dos Campos realizado em 1951.

RESOLUÇÕES PRELIMINARES

1.º) Apenas delimitar o conceito dos diferentes ramos das disciplinas de Matemática no curso secundário;
2.º) Distribuí-los pelas várias séries daquele curso;
3.º) Apresentar as indicações metodológicas gerais relativas a seu ensino.

RESOLUÇÕES GERAIS

1.º) Aprovar a redução e a simplificação dos programas atuais;
2.º) O ensino da Matemática no Curso Ginasial deve atender à sua precípua finalidade formativa;
3.º) Essas disciplinas devem ser estudadas nas quatro séries do curso ginasial.

A. RESOLUÇÕES RELATIVAS AO ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO GINASIAL

I. Distribuição das disciplinas

1.º) Como princípio geral deve haver, tanto quanto possível, continuidade no estudo dessas disciplinas.
2.º) Em conseqüência dêsse princípio, propõe a seguinte distribuição de disciplinas nas séries do curso ginasial:
1.ª série — Aritmética Elementar.
2.ª série — Aritmética Elementar e Princípios de Álgebra Elementar com inclusão de noções intuitivas de Geometria necessárias ao estudo do sistema métrico.
3.ª série — Álgebra Elementar.
4.ª série — Geometria dedutiva plana.
3.º) Como aplicação do estudo da semelhança na Geometria dedutiva, devem ser ministradas as noções sôbre as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo num triângulo retângulo e suas aplicações à medida indireta das distâncias.

II. Métodos de ensino

Reconhecendo a impossibilidade de adotar-se, atualmente, na escola secundária, um plano didático geral, recomenda que o ensino da Matemática não seja feito sòmente em aulas expositivas, mas, também com a averiguação metódica da aprendizagem através da apresentação de tarefas que devem ser executadas pelo aluno em aula, sob a orientação do professor (estudo dirigido) e em casa, para seu domínio das unidades da disciplina. A sugestão geral recomenda não excluir a possibilidade do emprêgo eventual de outras técnicas de ensino, a critério do professor.

III. Metodologia das disciplinas

1.º) ARITMÉTICA ELEMENTAR. O estudo de suas principais propriedades deve ser feito por processos intuitivos, visando ao adestramento do educando no mecanismo operatório e à aquisição de hábito de raciocínio, e procurando despertar em seu espírito a curiosidade da justificação lógica dos princípios apresentados.

2.º) ÁLGEBRA ELEMENTAR. Deve-se dar um caráter prático ao ensino dessa disciplina com o objetivo de integrar o aluno no mecanismo do cálculo algébrico, até a resolução das equações e dos sistemas do primeiro e do segundo graus e sua aplicação a problemas simples.

3.º) GEOMETRIA DEDUTIVA PLANA. A finalidade do estudo dessa disciplina é dar ao educando formação cultural e desenvolver seu rigor lógico pelo raciocínio dedutivo. Sua inclusão na última série, onde é ministrada — sem solução de continuidade a alunos de maior maturidade, parece melhor atender àquele objetivo.

B. RESOLUÇÕES RELATIVAS AO ENSINO DA MATEMÁTICA NO CURSO COLEGIAL

I. Resoluções preliminares

1.º) Ser comum o programa de Matemática para as duas primeiras séries do ciclo colegial e haver um programa especializado, de finalidade propedêutica, para a terceira série do curso científico.

2.º) A terceira série do Curso Colegial poderá funcionar na Faculdade para qual se destina sua preparação especializada.

3.º) Manter, tanto quanto possível, o princípio geral de continuidade, já adotado para o primeiro ciclo.

4.º) Excluir, em face da metodologia adotada, o estudo da aritmética teórica.

II. Distribuição das disciplinas

1.ª Série — Álgebra (Determinantes, Sistemas de equações lineares, Progressões e Logaritmos). Noções sôbre vetores. Trigonometria Retilínea.

2.ª Série — Geometria no espaço.

3.ª Série — Geometria Analítica Plana. Álgebra (Cálculo Combinatório, Binômio de Newton, Equações algébricas). Noções de Análise.

III. Métodos de ensino

Considera-se igualmente aplicável ao segundo ciclo secundário a recomendação geral feita para o primeiro ciclo.

IV. Metodologia das disciplinas

1.ª Série

1.º) ÁLGEBRA. Da teoria dos determinantes serão dados apenas rudimentos para sua aplicação à resolução e à discussão dos sistemas de equações lineares de, no máximo, 3 equações com 3 incógnitas. O estudo dos logaritmos e suas propriedades deverá ser feito em plano elementar (sem que se demonstre teorema de unicidade e de existência) com objetivo precípuo de sua aplicação ao cálculo numérico.

2.º) NOÇÕES DE VETORES. As noções sôbre vetores, estendidas até o conceito de produto vetorial, teriam por objetivo suas aplicações imediatas à Física e sua possível utilização à trigonometria e à geometria analítica.

3.º) TRIGONOMETRIA. O Estudo dessa disciplina deve ser suficientemente restrito de modo a atender especialmente a seu objetivo principal: a resolução dos triângulos retângulos e obliquângulos.

2.ª Série

GEOMETRIA NO ESPAÇO. Seu ensino deve obedecer às mesmas características metodológicas preconizadas para o estudo da geometria plana e não deve perder de vista sua articulação com a cadeira de Desenho. O estudo de áreas e volumes deverá servir de motivação para precisar o conceito de número real, apresentado de modo intuitivo na Geometria Plana.

3.ª Série

1.º) GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA. O ensino dessa disciplina não deverá ultrapassar o estudo das equações reduzidas das cônicas.

2.º) ÁLGEBRA. O cálculo combinatório deve ser limitado ao estudo dos agrupamentos simples, a potência do binômio deve ser restringida ao caso do expoente inteiro e positivo. O estudo das equações algébricas deve ser simplificado de modo a atender suficientemente seu objetivo principal: o cálculo das raizes reais.

3.º) NOÇÕES DE ANÁLISE. Os conceitos de limite, continuidade e derivada devem ser dados para funções reais de uma variável real, definidas em intervalos. O estudo das derivadas reduzir-se-á a seu conceito e suas interpretações geométricas e cinemática. Só serão tratadas as séries de têrmos positivos. Em caráter complementar serão dadas noções fundamentais sôbre números complexos.

Ary Quintella
Roberto Peixoto
João A. Breves Filho