

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE
CURSO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

RODOLFO GABRIEL PABST

CONTROLE DIGITAL EM CASCATA DE UMA PLANTA DIDÁTICA DE LEVITAÇÃO
MAGNÉTICA COM LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

Joinville
2018

RODOLFO GABRIEL PABST

CONTROLE DIGITAL EM CASCATA DE UMA PLANTA DIDÁTICA DE LEVITAÇÃO
MAGNÉTICA COM LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica no curso de Engenharia Mecatrônica, da Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Orientador: Prof. Dr. Alexandro Garro Brito.

Joinville
2018

RODOLFO GABRIEL PABST

CONTROLE DIGITAL EM CASCATA DE UMA PLANTA DIDÁTICA DE LEVITAÇÃO
MAGNÉTICA COM LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica no curso de Engenharia Mecatrônica, da Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville.

Orientador: Prof. Dr. Alexandro Garro Brito.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Alexandro Garro Brito
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dra. Aline Durrer Patelli Juliani
Membra
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Milton Evangelista de Oliveira Filho
Membro
Universidade Federal de Santa Catarina

Resumo

A suspensão de uma esfera de material ferromagnético em um campo magnético induzido por um eletroímã é um exemplo didático de suspensão magnética. Este sistema é instável em malha aberta e requer o controle em malha fechada para ter características aceitáveis de suspensão. Neste trabalho foi projetado um sistema de controle digital, empregando a técnica de controle em cascata para a planta descrita. Além disso, o sistema de controle incluiu um processo de linearização baseado nos valores instantâneos das variáveis de estado. O sistema de controle foi projetado com base em um modelo da planta no espaço de estados e seu desempenho foi avaliado através de simulações. A suspensão estável da esfera foi alcançada para perfis de referência com aceleração contínua. Além disso, perturbações determinísticas foram rejeitadas. Concluiu-se que a técnica de controle adotada é eficiente para estabilizar a posição da esfera e realizar o seguimento de referência para um certo tipo de perfil.

Palavras-chave: Levitação magnética. Controle digital em cascata. Linearização por realimentação.

Abstract

The suspension of a sphere of ferromagnetic material in a induced magnetic field by an electromagnet is a didactic example of magnetic suspension. This system is unstable in open loop and it requires closed loop control to have acceptable suspension characteristics. In this work, a digital control system for the described plant has been designed using the cascade control technique. In addition, the control system included a linearization process based on the instantaneous values of the state variables. The control system is based on a plant's model in state space and its performance was evaluated through simulations. The stable sphere suspension was achieved for reference profiles with continuous acceleration. Furthermore, deterministic perturbations were rejected. It was concluded that the adopted control technique is efficient to stabilize the ball position and to perform the reference tracking for a certain type of profile.

Keywords: Magnetic levitation. Digital cascade control. Feedback linearization.

Lista de Figuras

1	Suspensão eletrodinâmica (adaptado de SHARMA et al., 2014).	12
2	Propulsão eletrodinâmica (adaptado de PAUDEL; BIRD, 2013).	12
3	Suspensão eletromagnética (adaptado de SHARMA et al., 2014).	13
4	Sistema de levitação magnético (adaptado de FARES et al., 2009).	14
5	Sistema de controle digital (adaptado de ISERMANN, 1997).	16
6	Sistema de controle interconectado em cascata (adaptado de ISERMANN, 2013).	17
7	Histerese do campo magnético (ISERMANN, 2005).	23
8	Esquema de linearização por realimentação (entrada-saída) (JAROSZYŃSKI; ZIETKIEWICZ, 2016).	32
9	Sistema linearizado por realimentação do estado não-linear (Autor, 2018).	33
10	a) Ocorrência de aliasing para sinais amostrados com taxa insuficiente; b) Espectro de sinal amostrado com técnica anti-aliasing (PHARR; HUMPHREYS, 2010).	39
11	Simulação do modelo em malha aberta ($x \geq D/2$) (Autor, 2018).	43
12	Sistema de controle auxiliar (Autor, 2018).	44
13	Sistema de controle principal (Autor, 2018).	44
14	Diagrama de Bode da função de transferência $G_{vi}(s)$ (Autor, 2018).	47
15	Diagrama de Bode da função de transferência $G_{xi}(s)$ (Autor, 2018).	48
16	Simulação do subsistema elétrico em malha aberta (Autor, 2018).	48
17	Conteúdo espectral da corrente em malha aberta (Autor, 2018).	49
18	Sistema de controle auxiliar - Discretização 1 (Autor, 2018).	52
19	Sistema de controle auxiliar - Discretização 2 (Autor, 2018).	52
20	Sistema de controle auxiliar - Discretização 3 (Autor, 2018).	53
21	Conteúdo espectral da corrente em malha fechada (Autor, 2018).	55
22	Diagrama de bode do modelo linearizado (Autor, 2018).	58
23	Estudos dos efeitos da frequência de amostragem ($f_0 = 2.0$ kHz) (Autor, 2018).	60
24	Estudos dos efeitos da frequência de amostragem ($f_0 = 1.0$ kHz) (Autor, 2018).	60
25	Velocidade $c(t)$ (Autor, 2018).	61
26	Espectro do sinal $c(t)$ (Autor, 2018).	61
27	Simulação do controle PD discretizado (Autor, 2018).	62
28	Posição da esfera $x(t)$ (Autor, 2018).	64
29	Corrente elétrica $i(t)$ (Autor, 2018).	65
30	Espectros do sinal $c(t)$ (Autor, 2018).	65
31	Posição da esfera $x(t)$ (Autor, 2018).	66

32	Corrente elétrica $i(t)$ (Autor, 2018).	66
33	Faixas de operação da suspensão eletromagnética ($-50.0 < v < 50.0$ V) (Autor, 2018).	67
34	Faixas de operação da suspensão eletromagnética ($-100.0 < v < 100.0$ V) (Autor, 2018).	68
35	Resultados do sinal $x(t)$ (Autor, 2018).	68
36	Resultados do sinal $i(t)$ (Autor, 2018).	69
37	Resultados do sinal $f_d(t)$ (Autor, 2018).	70
38	Resultados do sinal $e_a(t)$ (Autor, 2018).	70
39	Simulação do controle PID discretizado com $f_0 = 1,0$ kHz (Autor, 2018). . .	71

Lista de Tabelas

1	Valores paramétricos do modelo.	42
2	Potência do sinal $e_i(t)$	54
3	Simulação do sistema	72

Lista de Siglas e Símbolos

ARX	Autorregressivo com Entrada Exógena
EDS	Electrodynamic Suspension
EMS	Electromagnetic Suspension
FEM	Força Eletromotriz
JFET	Junction Field Effect Transistor
LIT	Linear Invariante no Tempo
MIMO	Multiple-Input/Multiple-Output
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
RBF	Radial Base Function
RNA	Rede Neural Artificial
SISO	Single-Input/Single-Output
A	Área frontal da esfera ferromagnética
B	Densidade do campo magnético
c	Velocidade da esfera ferromagnética
c_e	Velocidade de equilíbrio da esfera ferromagnética
C_d	Coefficiente de arrasto
D	Diâmetro da esfera ferromagnética
e	Sinal de erro
e_a	Força eletromotriz no circuito do eletroímã
e_i	Sinal de erro do sistema de controle auxiliar
e_x	Sinal de erro do sistema de controle principal
f_0	Frequência de amostragem
f_b	Largura de banda
f_d	Força de arrasto sobre a esfera ferromagnética
f_e	Força de empuxo sobre a esfera ferromagnética
f_{mag}	Força magnética sobre a esfera ferromagnética
g	Aceleração gravitacional
H	Intensidade do campo magnético
i	Corrente no eletroímã
i_e	Corrente de equilíbrio no eletroímã
i_f	Corrente no eletroímã filtrada
i_{ref}	Sinal de referência do sistema de controle auxiliar
k	Constante de força magnética
K_p	Ganho proporcional do controlador
L	Indutância do circuito magnético

L_0	Indutância da esfera ferromagnética
L_1	Indutância da bobina do eletroímã
m	Massa da esfera ferromagnética
P_{e_a}	Potência do sinal de força eletromotriz
P_{e_i}	Potência do sinal de erro do sistema de controle auxiliar
P_{e_x}	Potência do sinal de erro do sistema de controle principal
P_{f_d}	Potência do sinal de força de arrasto
R	Resistência do circuito do eletroímã
R_e	Número de Reynolds
s	Variável de frequência complexa para sistemas contínuos
$S_{F:P}$	Sensibilidade da função F ao parâmetro P
t	Variável temporal
T_0	Período de amostragem
T_d	Tempo derivativo do controlador
T_i	Tempo integrador do controlador
u	Sinal de controle manipulado (aceleração magnética)
v	Tensão nos terminais do eletroímã
v_e	Tensão de equilíbrio nos terminais do eletroímã
v_L	Tensão nos terminais do indutor
W_{mag}	Energia armazenada no campo magnético
W'_{mag}	Co-energia armazenada no campo magnético
W_{mec}	Energia mecânica da esfera
x	Distância entre o centro de massa da esfera e a face do eletroímã
x_e	Posição de equilíbrio da esfera ferromagnética
x_{ref}	Sinal de referência do sistema de controle principal
z	Variável de frequência complexa para sistemas amostrados
ζ	Coefficiente de amortecimento de processo de segunda ordem
λ	Fluxo magnético concatenado pelo eletroímã
η	Viscosidade estática do fluido escoando sobre a esfera ferromagnética
ρ	Densidade do fluido escoando sobre a esfera ferromagnética
τ_f	Constante de tempo do filtro anti-aliasing
ω_n	Frequência natural de processo de segunda ordem

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Tipos de levitação magnética	11
1.2	Delimitação da planta e da técnica de controle	14
1.3	Revisão da literatura	18
1.4	Objetivos	22
2	Modelagem da Suspensão Eletromagnética	23
2.1	Conversão eletromecânica de energia	24
2.2	Modelo da planta	27
2.3	Linearização por realimentação	30
2.4	Controladores discretos	35
2.4.1	Amostragem e retenção	38
3	Metodologias e Resultados	41
3.1	Modelo da planta	41
3.2	Sistema de controle	43
3.2.1	Sistema de controle auxiliar	44
3.2.2	Sistema de controle principal	55
4	Considerações Finais e Conclusões	73
5	Referências	76

1 Introdução

De acordo com Fares et al. (2009), a levitação é definida como o equilíbrio estável de um objeto sem contato, e que pode ser alcançada com o uso de forças elétricas e magnéticas. Sistemas de levitação magnética são usados em muitas aplicações tecnológicas. Alguns exemplos são as suspensões veículos MagLev, rolamentos sem atrito e levitação de metal fundido em fornos de indução. De acordo com Sharma et al. (2014), a levitação magnética é atrativa no setor de transportes, sobretudo, por permitir velocidades operacionais limitadas apenas pelo consumo energético. Além disso, suspensões magnéticas requerem substancialmente menos potência e são menos suscetíveis a ruído.

Este trabalho visa projetar um sistema de controle digital para manter a suspensão estável de uma esfera ferromagnética em um campo magnético. Os motivos que justificam este trabalho subdividem-se em contribuições didáticas e teóricas.

Certos tipos de plantas de levitação magnética tem sido bastante utilizadas com finalidade didática em aulas de controle e automação (WONG, 1986; HURLEY; WÖLFLE, 1997; TRUMPER et al., 1997). Entretanto, as publicações disponíveis focam principalmente no controle SISO (single-input/single-output) analógico. Assim, o presente trabalho pode contribuir com o estado da arte relacionado a este problema didático e com a discussão das técnicas de controle em si.

Além disso, a análise das perturbações presentes no processo de levitação magnética não é amplamente discutida na literatura. Isto fornece um nicho a ser explorado, já que o conhecimento do conteúdo espectral das perturbações é essencial para o projeto de sistemas de controle digital.

Este trabalho será conduzido, inicialmente, através da delimitação de uma planta de levitação magnética e de um modelo para a mesma. Este modelo servirá de base para o estudo das perturbações e para o projeto do sistema de controle. O desempenho do sistema de controle será discutido após a simulação numérica deste.

Os objetivos do trabalho serão especificados após a apresentação do problema de controle e dos resultados obtidos em trabalhos prévios. Mas antes disso, o problema será contextualizado.

1.1 Tipos de levitação magnética

Conforme Sharma et al. (2014), existem dois tipos principais de suspensão magnética: a suspensão eletrodinâmica e a suspensão eletromagnética.

Suspensões do tipo EDS (electrodynamic suspension) são comumente aplicadas a veículos MagLev com bobinas a bordo levitando sobre uma guia. Assim, conforme o veículo se

move, o fluxo produzido pelas bobinas embarcadas induz correntes em bobinas passivas na guia. O fluxo magnético gerado pelas bobinas da guia se opõe ao fluxo gerado pelas bobinas embarcadas, fazendo com que o veículo adquira uma elevação em função de sua velocidade (SHARMA et al., 2014). O esquema de uma suspensão EDS é mostrado na Figura 1.

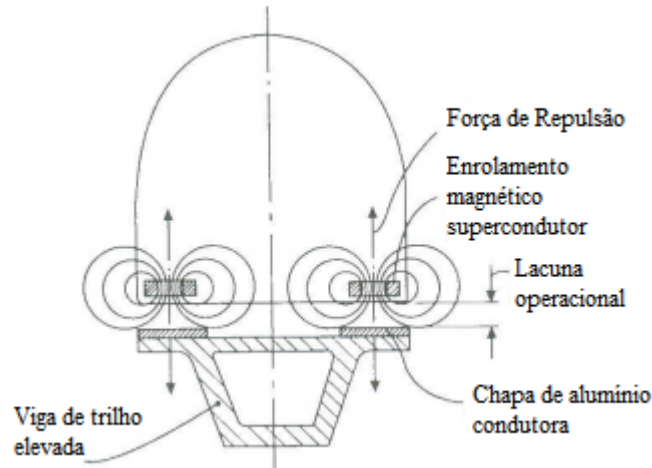


Figura 1: Suspensão eletrodinâmica (adaptado de SHARMA et al., 2014).

Em sistemas eletrodinâmicos o movimento relativo de eletroímãs produz forças de propulsão e suspensão para o veículo. Tal fenômeno é exemplificado na Figura 2. Neste, quando a velocidade relativa do rotor é superior a velocidade translacional do veículo há propulsão. Caso contrário surgem forças de frenagem (PAUDEL; BIRD, 2013).

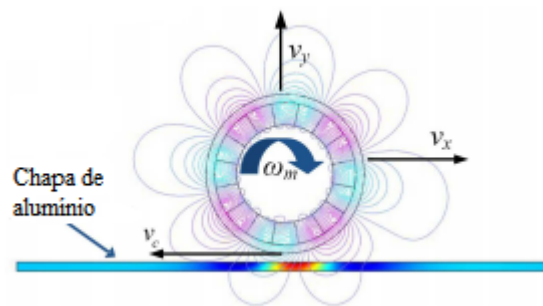


Figura 2: Propulsão eletrodinâmica (adaptado de PAUDEL; BIRD, 2013).

Com o uso de bobinas de material supercondutor a temperaturas criogênicas no veículo é possível gerar altas correntes, e conseqüentemente altos campos induzidos, com perdas resistivas mínimas (SHARMA et al, 2014). Yamamoto et al. (2013) realçam que materiais supercondutivos virtualmente não possuem resistência elétrica e suas permeabilidades magnéticas se tornam nulas quando sujeitos a temperaturas próximas a 100 K. Isso faz com

que surja uma força repulsiva quando é aplicado um campo magnético externo, de acordo com o efeito Meissner-Oschenfeld (SCHWEITZER, 2009; CALLISTER, 2002 apud YAMAMOTO et al., 2013).

O segundo tipo de suspensão magnética, a suspensão EMS (electromagnetic suspension), não depende da velocidade do veículo. De acordo com Sharma et al. (2014), o fenômeno é causado por forças atrativas em um circuito magnético composto por um núcleo de aço e uma guia ferromagnética. O circuito magnético é excitado por uma corrente elétrica circulando ao longo de uma bobina, como é mostrado na Figura 3.

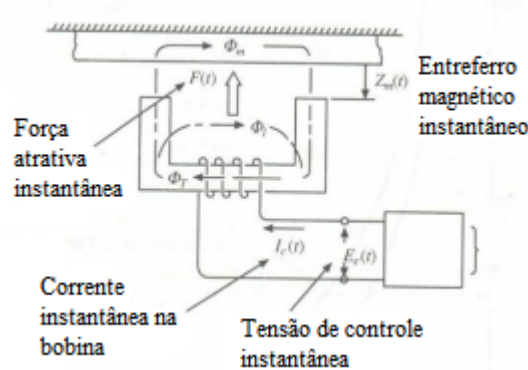


Figura 3: Suspensão eletromagnética (adaptado de SHARMA et al., 2014).

Há uma diferença qualitativa entre sistemas eletrodinâmicos e sistemas eletromagnéticos em questão de estabilidade. Os sistemas eletrodinâmicos são inerentemente estáveis, embora bastante subamortecidos (PAUDEL; BIRD, 2013; SHARMA et al, 2014), enquanto os sistemas eletromagnéticos se tornam instáveis quando excitados por uma fonte de tensão e requerem ações de controle para apresentar características dinamicamente aceitáveis de suspensão (SHARMA et al., 2014). O sentido físico dessa instabilidade pode ser entendido pelo Teorema de Earnshaw, que diz que um conjunto de cargas pontuais não pode ser mantido em equilíbrio mecânico apenas pela interação de dipolos magnéticos permanentes (GRAÇA, 2012).

Para manter o equilíbrio estável de um objeto levitando sob suspensão eletromagnética é necessário monitorar sua posição a fim de controlá-la através da realimentação de seu erro (em comparação com uma posição de referência). Dessa forma é possível contrabalancear as forças gravitacionais sobre o objeto e efetivamente fazê-lo levitar em equilíbrio estável (FARES et al., 2009). O presente trabalho irá focar em um caso específico de suspensão eletromagnética. Portanto, quando o termo levitação magnética for referido novamente, o será nesse sentido.

1.2 Delimitação da planta e da técnica de controle

Um exemplo didático de suspensão eletromagnética consiste em uma esfera ferromagnética levitando sob a ação de uma força atrativa induzida por uma bobina. A suspensão estável de uma esfera metálica em um campo magnético tem sido assunto de interesse desde a década de 1930 (HURLEY; WÖLFLE, 1997). Os componentes básicos desse sistema didático incluem um sensor, um atuador (um eletroímã) e um controlador. Fares et al. (2009) cita um sensor composto por um par emissor-detector infravermelho. O detector é um fototransistor em série com um resistor, que produz uma tensão proporcional a posição do objeto em torno de um ponto operacional. Segundo os autores a constante de proporcionalidade pode ser determinada experimentalmente. Um diagrama de corpo livre desse sistema pode ser visualizado na Figura 4.

Na Figura 4, a aceleração da esfera é causada pela diferença entre a força magnética f_{mag} e o peso mg da esfera. O circuito do eletroímã possui uma carga resistiva-indutiva, cuja indutância L é função da distância x da esfera. A corrente i no circuito do eletroímã é controlada através de uma tensão v .

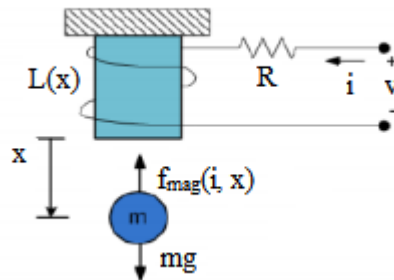


Figura 4: Sistema de levitação magnético (adaptado de FARES et al., 2009).

O problema de controle consiste no projeto de um controlador atrelado a uma planta a fim de melhorar seu desempenho. Para Ogata (2014), o controle, ou controle automático, é essencial em qualquer campo tecnológico ou científico. O autor estabelece, ainda, que um sistema de controle com realimentação é tal que a diferença entre sua entrada de referência e sua saída é utilizada como meio de controle. A denominação sistema de controle com realimentação e a denominação sistema de controle em malha fechada são usadas indistintivamente. Este tipo de controle implica na redução do sinal de erro que alimenta o controlador. Em contrapartida, há sistemas em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema. O sinal de saída não é medido e nem realimentado. Tal técnica é conhecida como controle em malha aberta. De acordo com Ogata (2014), estes só podem ser utilizados na ausência de perturbações externas ou internas.

Conforme Ogata (2014), sistemas de controle em malha fechada apresentam claras vantagens em questões de estabilidade, em relação aos sistemas de controle em malha aberta. A razão disso é que a realimentação torna a resposta do sistema relativamente insensível a distúrbios externos e variações paramétricas da planta. As mesmas garantias não são possíveis em sistemas em malha aberta.

A maioria das técnicas de projeto de controladores baseadas em modelos equacionais se aplicam somente a sistemas lineares invariantes no tempo (LIT). Um sistema linear satisfaz duas propriedades: a superposição e a homogeneidade. A primeira significa que a resposta do sistema a um somatório de entradas é igual ao respectivo somatório de respostas individuais. Já a segunda significa que a multiplicação de um sinal de entrada por um escalar leva o sistema a produzir um sinal de saída multiplicado pelo mesmo escalar (NISE, 2013).

Um sistema LIT pode ser descrito através de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes. Entretanto, muitas vezes é necessário lidar com sistemas não-lineares ou com parâmetros distribuídos. O atuador do sistema descrito na Figura 4 é não-linear, já que a indutância varia com o deslocamento da esfera. A força magnética produzida por esse atuador é uma função não-linear das variáveis de estado i e x . A aproximação deste sistema por um modelo LIT torna questionável a operação satisfatória de um controlador projetado por meio deste modelo. A incerteza existente entre o modelo LIT e o sistema real pode ser de dois tipos: estruturada e não-estruturada (OGATA, 2014). De acordo com Ogata (2014), a incerteza estruturada ocorre sempre que há variação paramétrica do modelo. Já a incerteza não-estruturada pode ocorrer devido a incertezas dependentes da frequência (como modos de oscilação não incluídos) ou quando a planta é não-linear e o modelo é linear. Geralmente, técnicas de linearização introduzem o segundo tipo de incerteza.

O sinal de saída de um controlador automático alimenta um dispositivo de potência, que produz um sinal de entrada para a planta (OGATA, 2014). O tipo do atuador depende da natureza do sistema. Para a planta de levitação magnética este é o eletroímã (ou simplesmente bobina), que realiza a conversão eletromecânica de potência. Entretanto, é comum ainda um estágio de conversão elétrica de potência, anterior a bobina. Wong (1986) apresenta um estágio amplificador, controlado pelo sinal de saída de um controlador linear. O controlador linear pode ser implementado de diversas formas. Normalmente as grandezas envolvidas no processo são transduzidas em sinais elétricos para que o controlador possa ser contruído como um circuito composto por elementos ativos ou passivos. Esta abordagem é conhecida como controle analógico.

A construção de um controlador analógico envolve vários ajustes e a calibração de vários componentes e medidores, resultando em um processo demorado e oneroso. Entretanto, com o surgimento dos microcomputadores na década de 1970, tornou-se possível controlar

processos sem a necessidade de usar computadores de grande porte. Um computador digital pode substituir os componentes analógicos de uma malha de controle, emulando o seu modelo equacional. Esta abordagem é conhecida como controle digital, e é vantajosa por ter custo reduzido, favorecer a flexibilidade de projeto e oferecer imunidade ao ruído (NISE, 2013).

No processamento de dados com computadores digitais os sinais são amostrados e digitalizados, resultando em sinais discretos. O processo de amostragem resulta em perda de parte da informação contida no sinal contínuo. O sinal discreto possui valores de amplitudes em instantes discretos de tempo. A modulação de amplitude de pulso é a técnica de amostragem mais vantajosa para o controle digital já que o sinal discreto resultante possui relação linear com as dinâmicas lineares do sistema. A amostragem é realizada periodicamente com período T_0 por um multiplexador construído em conjunto com um seletor de faixa de medição e um conversor analógico digital. Se a largura do pulso h for bem menor que o período T_s ($h \ll T_0$) e o amostrador for seguido por um elemento de transferência linear com constante de tempo $T_i \gg h$, então o trem de pulsos $x_p(t)$ pode ser representado como um sinal de tempo discreto $x(kT_0)$ (ISERMANN, 1997).

De acordo com Isermann (1997), o sinal de entrada e o sinal de saída do amostrador estão defasados por um intervalo T_R , decorrente dos atrasos causados pela conversão analógico-digital e pelo processamento de dados na unidade de processamento central do computador digital. Entretanto, se esse intervalo for pequeno, comparado com as constantes de tempo dos atuadores, processos e sensores, este pode ser desprezado. Daqui em diante será considerado que o processo de amostragem é aproximadamente síncrono e que resulta em um sinal de tempo discreto $x(kT_0)$. A Figura 5 apresenta um sistema de controle digital considerando o processo de amostragem ideal. Na figura, o sinal u é um sinal analógico. Normalmente o elemento retentor é precedido por um conversor digital analógico.

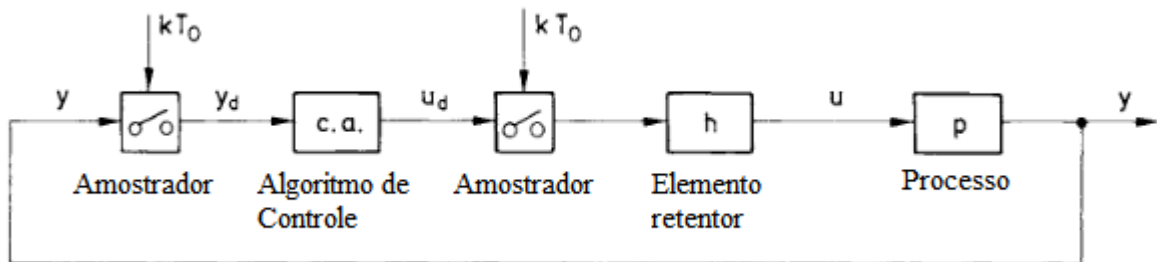


Figura 5: Sistema de controle digital (adaptado de ISERMANN, 1997).

A perda de informação durante a amostragem contribui para o erro de quantização de amplitude. Isto ocorre porque a precisão do computador digital é limitada pelo tamanho da palavra binária em que a saída do conversor analógico-digital é armazenada. Entretanto,

este erro pode ser desconsiderado se for pequeno em relação à amplitude do sinal (DORF; BISHOP, 2001). Isermann (1997) cita que computadores com palavras binárias de 16 bits operando em conjunto com conversores analógico-digitais de 10 bits são o suficiente para obter um sinal de tempo discreto com erro de quantificação de amplitude quase nulo.

Os tipos de controle também diferem em relação às suas estruturas. Isermann (1997) cita pelo menos quatro estruturas de controle distintas: sistemas de controle de entrada-simples/saída-simples (ou SISO, do inglês single-input/single-output); sistemas de controle de entrada-múltipla/saída-múltipla (ou MIMO, do inglês multiple-input/multiple-output); sistemas de controle interconectados; e sistemas de controle descentralizados. Diversas estratégias baseadas em estruturas SISO ou interconectadas tem sido apresentadas para controlar a planta de levitação magnética.

No controle SISO apenas a variável de saída da planta determina o sinal de controle. Isto conduz a uma malha de controle simples. Entretanto, é possível melhorar o desempenho do controle conectando variáveis de estado adicionais ou sinais de perturbação à malha. O controle interconectado é resultado dessas adições ao controle simples. O esquema de controle interconectado mais utilizado é o controle em cascata, que inclui laços de controle auxiliares à malha (ISERMANN, 1997). O controle da corrente no eletroímã através de uma malha de controle interna é um método de controle em cascata. Um esquema de controle em cascata é apresentado na Figura 6. Neste, o processo é dividido em duas partes: G_{Pu1} e G_{Pu2} . Cada subprocesso está sujeito a uma perturbação determinística cujos modelos são denominados G_{Pv1} e G_{Pv2} , respectivamente. O controlador mais interno a malha, G_{R2} , é auxiliar ao controlador mais externo, G_{R1} , que fornece a referência a este.

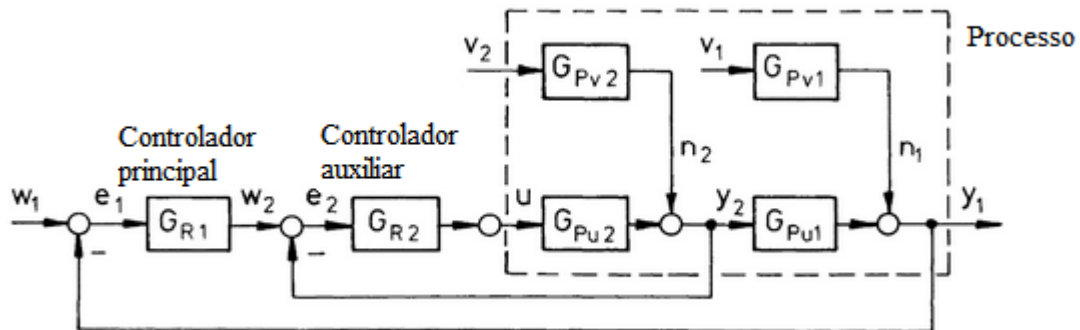


Figura 6: Sistema de controle interconectado em cascata (adaptado de ISERMANN, 2013).

De acordo com Isermann (1997), o controle interconectado em cascata apresenta desempenho melhor do que o controle SISO devido aos seguintes motivos:

- Perturbações que atuam sobre o subprocesso G_{Pu2} são controlados pelo controle auxiliar antes que afetem o sinal de saída y_1 ;
- Devido ao controle auxiliar, incertezas estruturadas no subprocesso G_{Pu2} são atenuadas. Desta forma, o projeto do controlador G_{R1} precisa considerar apenas variações paramétricas no subprocesso G_{Pu1} ;
- O sinal de saída y_1 tem o regime transiente reduzido se o laço de controle auxiliar conduz a modos de frequência mais altos do que os presentes no subprocesso G_{Pu2} .

Neste trabalho será empregada uma técnica de controle digital em cascata. O sistema de controle principal irá regular a posição da esfera e o sistema de controle auxiliar irá regular a corrente elétrica no atuador.

O sistema de controle auxiliar irá utilizar controle linear simples. Como será mostrado adiante, a relação entre a tensão nos terminais do atuador e o estado elétrico é aproximadamente linear. Já o sistema de controle principal irá empregar uma técnica de controle linear em conjunto com uma técnica de compensação não-linear.

A compensação não-linear utilizada neste trabalho estabelece uma relação entrada-saída linear entre um sinal de entrada manipulado e um sinal de saída. Isto é feito por meio de uma técnica de linearização pela realimentação do estado não-linear. Esta técnica será discutida com mais propriedade na seção de Modelagem da suspensão magnética.

1.3 Revisão da literatura

As técnicas apresentadas nesta revisão são de controle SISO ou em cascata. Elas diferem entre si quanto a técnica de linearização ou modelagem empregadas. Apesar da suspensão estável de uma esfera em um campo magnético ser assunto de interesse desde a década de 1930, a maior parte do material disponível sobre o assunto parte da década de 1980.

O controle SISO analógico da planta foi realizado por Wong (1986) e Hurley e Wölflé (1997) através da compensação por avanço de fase. Ambos projetaram os controladores com base em um modelo linearizado em torno de um estado de equilíbrio.

Wong (1986) partiu de uma relação funcional onde a força magnética f_{mag} era proporcional ao quadrado da corrente elétrica no eletroímã e inversamente proporcional ao quadrado da distância da esfera e obteve uma relação entrada-saída linear de terceira ordem entre o sinal de controle e a posição da esfera. O controlador foi implementado através de um circuito de elementos passivos anterior a um estágio amplificador.

Hurley e Wölflé (1997) partiram de uma relação funcional onde a força magnética f_{mag} era proporcional ao quadrado da corrente elétrica i no eletroímã e inversamente proporcional

a exponencial da distância x da esfera e obtiveram uma relação entrada-saída linear de segunda ordem entre o estado elétrico i e o estado mecânico x . O controlador foi construído a partir de elementos passivos. Entretanto, diferente de Wong (1986), os autores utilizaram o controle PD, que é uma forma particular da compensação por avanço de fase. O sinal de controle PD era entregue a porta de um transistor amplificador de junção de efeito de campo (JFET) com o dreno em série com o circuito do eletroímã. Desta forma, a tensão na porta do transistor JFET e o estado elétrico i possuem uma relação linear dada pela transcondutância do amplificador de potência.

Nos respectivos trabalhos, a compensação foi realizada sobre o sinal realimentado e não sobre o sinal de erro em relação à referência. De acordo com Ogata (2014), tal modificação na topologia da malha de controle é aplicada quando o incremento em degrau do sinal manipulado é indesejável.

Os dois trabalhos anteriores utilizaram modelos linearizados em pontos operacionais. Esta técnica pode resultar no desempenho não satisfatório do sistema longe do ponto operacional de projeto. Este tipo de linearização inclui incertezas não-estruturadas no sistema (OGATA, 2014). Para lidar com esse problema, alguns autores utilizaram técnicas de compensação não-linear.

Hajjaji e Ouladsine (2001) e Jaroszyński e Zietkiewicz (2016) apresentaram o controle SISO analógico da planta linearizada por realimentação através de métodos diferenciais geométricos. A linearização por realimentação é uma forma de compensação não-linear que fornece a linearização exata da planta com base nos valores instantâneos dos estados e das perturbações.

Jaroszyński e Zietkiewicz (2016) utilizaram uma relação funcional entre a força magnética e os estados elétrico e mecânico idêntica a adotada por Hurley e Wölfle (1997). Hajjaji e Ouladsine (2001) deduziram uma expressão para a força magnética através da modelagem de elementos diferenciais de comprimento (paralelo ao eixo de deslocamento da esfera) do eletroímã obtendo uma expressão onde a força magnética é proporcional ao quadrado da corrente elétrica i e inversamente proporcional a uma função polinomial da distância x da esfera, cujos coeficientes foram identificados experimentalmente.

A linearização por realimentação, em Hajjaji e Ouladsine (2001) e Jaroszyński e Zietkiewicz (2016), faz com que a relação entrada-saída entre um sinal de entrada u e o sinal de saída x seja de integração tripla. A planta linearizada foi estabilizada por controle proporcional-integral-derivativo (PID) em Hajjaji e Ouladsine (2001) e por controle linear quadrático em Jaroszyński e Zietkiewicz (2016).

Embora a aplicação de métodos diferenciais geométricos na linearização por realimentação da planta de levitação magnética tenha apresentado bons resultados nos trabalhos citados an-

teriormente, Trumper et al. (1997) afirmam que o conjunto de transformações de variáveis de estado não são únicos. Os métodos diferenciais geométricos produzem uma relação entrada-saída de terceira ordem que pode ser computada através de um conjunto infinito de transformações. Conforme Trumper et al. (1997) isto é consequência da não-linearidade do modelo.

Trumper et al. (1997) propõem um método de linearização por realimentação utilizado em conjunto com o controle linear interconectado da planta. Para tanto, deduziram um modelo de segunda ordem da planta, dependente apenas das variáveis de estado elétrico e mecânico. A variável c nas equações 1 e 2 é a velocidade da corpo sob suspensão e o termo f_d é a força de arrasto produzida pelo escoamento de um fluido sobre a superfície da esfera.

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (1)$$

$$\frac{dc}{dt} = g + \frac{1}{m} \left(f_{mag}(i, x) - f_d(c) \right) \quad (2)$$

Estas equações são capazes de modelar adequadamente a planta se a corrente no eletroímã for controlada por uma malha interna com alta banda de passagem e com alta capacidade de tensão (TRUMPER et al., 1997).

Trumper et al. (1997) também partem de que a relação funcional entre a força magnética e as variáveis de estado é tal que a força magnética é proporcional ao quadrado do estado elétrico i e inversamente proporcional ao estado mecânico x . Esta relação é adotada novamente por Morales et al. (2011), que também propõem a linearização da planta a partir de um modelo de segunda ordem. Morales et al. (2011) realizam a identificação algébrica do ganho proporcional entre a força magnética f_{mag} e o termo $z = (i/x)^2$. Assim, é incluído um estágio de identificação, anterior à compensação não-linear. A expressão algébrica para o ganho foi obtida através da análise da transformada de Laplace da Equação 2 e é função apenas das variáveis de estado do modelo.

Apesar de Trumper et al. (1997) ter obtido bons resultados experimentais no controle digital interconectado em cascata com linearização por realimentação, estes não utilizaram uma planta de levitação magnética com a mesma topologia proposta na Figura 4. Além disso, Trumper et al. (1997) utilizaram dois atuadores, de modo que era possível acelerar o corpo sob suspensão em dois sentidos. Morales et al. (2011) obtiveram resultados experimentais para uma planta de levitação magnética tal qual a proposta na Figura 4. Entretanto, os experimentos foram realizados a altas taxas de amostragem de modo que o controle linear foi ajustado assumindo que as descontinuidades dos sinais amostrados são desprezíveis.

Outros métodos tem sido empregados para melhorar o desempenho de estruturas de

controle SISO ou em cascata. Normalmente, envolvem identificação não-paramétrica da planta através de modelos baseados em redes neurais artificiais (RNAs). De acordo com Qin et al. (2014), não é uma tarefa fácil obter um modelo físico de uma suspensão magnética. Conforme é apontado por Hajjaji e Ouladsine (2001), modelos bastante recorrentes para a força magnética, como o apresentado por Wong (1986), Trumper et al. (1997), Morales et al. (2011) e outros, não a descrevem globalmente, mas apenas ao longo de alguns milímetros na vizinhança do atuador.

Qin et al. (2014) associam o controle SISO digital da planta de levitação magnética à identificação não-paramétrica de seu modelo. Para tanto, a dinâmica não-linear foi modelada como um modelo autorregressivo com entrada exógena (ARX) dependente das variáveis de estado, cujos coeficientes são dados por RNAs de função de base radial (RBF). O modelo RBF-ARX combina as vantagens dos dois modelos, sendo globalmente não-linear e localmente linear (nas proximidades de cada ponto operacional). O treinamento das redes RBF foi realizado fora de tempo de operação para evitar as falhas relacionadas ao controle em tempo real. Este modelo foi usado para ajustar, em tempo de operação, um controlador linear preditivo.

Um sistema de lógica fuzzy é utilizado em Yadav et al. (2012) para obter um modelo da planta. Baseado em resultados de simulação para um sistema SISO digital, os autores afirmam que o controle fuzzy foi mais eficiente que o controle PID. Fares et al. (2009) investigaram a eficiência do controle fuzzy ao emular o comportamento entrada-saída de um controlador PD linear. Como resultado, os autores chegaram a conclusão que um controlador fuzzy é capaz de tornar o tempo de acomodação da planta bem menor do que um controlador linear ajustado pela mesma metodologia. Phan e Gale (2007) apresentam a estabilização de uma planta de levitação magnética como exemplo de aplicação do controle fuzzy adaptativo. A robustez desse controle foi demonstrada para este e outros sistemas não-lineares.

O presente trabalho não irá abordar modelos não-paramétricos. Este irá tratar do controle digital linear da planta linearizada por realimentação. Não serão consideradas variações paramétricas do modelo. O comportamento da planta será descrito através de um conjunto de equações no espaço de estados e os efeitos de perturbações determinísticas e de descontinuidades, provientes da amostragem, serão investigados em malha fechada.

Dentre os trabalhos citados aqui, aqueles voltados para o controle em cascata empregando técnicas de linearização por realimentação terão importância principal no decorrer do projeto. Entretanto, poucos entraram no mérito do sistema de controle auxiliar. Isto constitui um problema a ser avaliado durante o projeto do controlador. Além disso, os efeitos das perturbações sobre a compensação não-linear também não foram discutidos.

1.4 Objetivos

Com base nas informações apresentadas nesta seção, este trabalho assume os seguintes objetivos gerais e específicos:

- Objetivo geral: projetar um sistema de controle digital interconectado em cascata com linearização por realimentação para a planta de levitação magnética. O projeto será baseado em um modelo matemático da suspensão magnética;
- Objetivo específico: quantificar indicadores do desempenho do sistema sob diversas taxas de amostragens e na presença de perturbações determinísticas.

2 Modelagem da Suspensão Eletromagnética

Eletroímãs são amplamente utilizados como atuadores de força e de posição para movimentos rotacionais ou pequenos movimentos translacionais. Há eletroímãs de corrente contínua, de corrente alternada e polarizados. Um circuito eletromagnético é composto por três elementos principais: um corpo magnético fixo, uma armadura móvel e um entreferro variável (ISERMANN, 2005).

Neste trabalho, o corpo magnético fixo é uma solenóide. Normalmente, solenóides com núcleo ferromagnético não podem ser magnetizadas indefinidamente. Há uma magnetização de saturação além da qual a densidade de fluxo magnético B não pode ser mais alterada pelo aumento da intensidade H do campo magnético.

A relação entre a intensidade do campo magnético e a densidade de fluxo magnético em alguns materiais ferromagnéticos (como aço, níquel e cobalto) é não-linear e depende da magnetização prévia do material. Para um corpo inicialmente desmagnetizado ($B = 0$), este é magnetizado até a saturação aumentando a intensidade H do campo magnético. Entretanto, ao inverter o sentido de H , a curva $B-H$ faz um caminho diferente até a saturação no sentido oposto. Neste caminho, a desmagnetização ocorre para um valor negativo de H . Uma nova inversão do sentido campo magnético acaba por fechar um laço na origem do plano $B-H$. Este fenômeno é exemplificado na Figura 7 e recebe o nome de histerese.

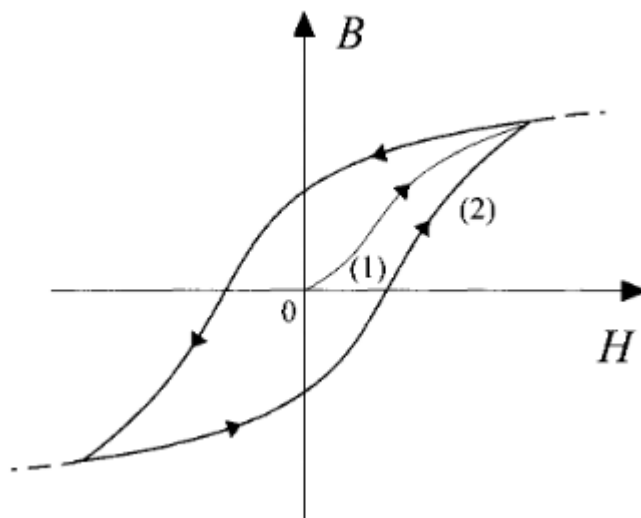


Figura 7: Histerese do campo magnético (ISERMANN, 2005).

Os fenômenos de saturação e histerese magnética não serão incluídos no modelo da planta neste trabalho. Entretanto, caso a histerese magnética seja não desprezível, ela afeta diretamente a indutância do eletroímã e suas derivadas parciais.

A esfera ferromagnética constitui a armadura da planta de levitação magnética. A relutância ao fluxo magnético é proporcional a distância axial entre a face do eletroímã e o centro de massa da esfera. O aumento desta relutância diminui a intensidade da força magnética sobre a esfera.

Nesta seção, a força induzida pelo campo magnético será explicada através da conversão eletromecânica de energia. Além disso, serão apresentados modelos para as demais forças atuando sobre a esfera e para a reação causada pelo campo magnético no circuito elétrico do atuador.

2.1 Conversão eletromecânica de energia

Conforme Callister (2002), as forças magnéticas são geradas por cargas elétricas em movimento. Elas existem em materiais magnéticos na forma de dipolos magnéticos. Estes podem ser influenciados por campos magnéticos externos, de modo que a força do campo exerce um torque para orientar os dipolos magnéticos com o campo.

De forma simplificada, cada elétron em um átomo é responsável por gerar dois momentos dipolos magnéticos. Um deles devido ao seu movimento translacional, em que se comporta como um pequeno circuito ao redor do núcleo, e o outro devido ao seu movimento rotacional. O último também é conhecido como momento magnético de spin. O momento magnético de spin admite dois estados quânticos diferentes (alinhados em direções paralelas), porém com a mesma magnitude (CALLISTER, 2002).

O momento magnético líquido de um átomo é formado pela soma dos momentos orbitais e de spin de todos os seus elétrons constituintes. Entretanto há pares de elétrons que se cancelam, tanto orbitalmente quanto em spin. Devido a isso, materiais com camadas eletrônicas totalmente preenchidas não podem ser magnetizados permanentemente. Este é o caso do diamagnetismo, que persiste apenas enquanto há um campo externo.

O paramagnetismo também persiste apenas enquanto há um campo magnético externo. Neste caso, apesar do momento líquido não nulo por átomo, há um momento global nulo devido a orientação aleatória dos átomos na extensão do sólido.

Já o ferromagnetismo é caracterizado pela existência de campo magnético permanente na ausência de campo externo. Isso ocorre devido a existência dos domínios. Um domínio é um volume cristalográfico onde os momentos de spin possuem alinhamentos mútuo. Cada grão de um material ferromagnético é formado por um conjunto de domínios.

Quando todos os dipolos magnéticos de um material ferromagnético estão alinhados com um campo externo a magnetização do sólido atinge seu valor máximo possível, que é a magnetização de saturação. Callister (2002) expressa a magnetização de saturação como o produto entre o momento magnético líquido de cada átomo pelo número de átomos existentes.

O corpo sob suspensão neste trabalho é uma esfera ferromagnética, cujo peso é equilibrado pela força magnética gerada por um eletroímã. Esta força é sempre atrativa, já que o campo magnético induzido pelo eletroímã tende a alinhar o momento dipolo da esfera com a orientação do mesmo. De forma geral, este eletroímã consiste em um circuito contendo uma bobina cilíndrica, cujo núcleo pode ser ferromagnético.

O campo de fluxo magnético induzido pela bobina armazena energia. A propriedade do circuito responsável por isso é a indutância. Ela existe devido a configuração geométrica do circuito e as propriedades magnéticas do material condutor (DEL TORO, 1999).

Um elemento indutor só é sensível ao restante do circuito quando há variação de corrente. Devido à variação da corrente elétrica surge uma diferença de potencial entre os terminais do indutor, tal que:

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

onde o parâmetro L é conhecido como indutância. Sua unidade no SI é volt-segundos por ampère (V·s/A), ou simplesmente henry (H). Del Toro (1999) explica que quando a indutância L independe da corrente i ela é dita linear.

De acordo com Fitzgerald et al. (1975), na conversão eletromecânica de energia, o campo de fluxo magnético atua como um elemento acoplador entre o subsistema mecânico e o subsistema elétrico. O campo de acoplamento age como um reservatório de energia, que fornece energia para o subsistema mecânico e se reabastece reagindo sobre o subsistema elétrico.

A reação do campo de acoplamento sobre o subsistema elétrico ocasiona o surgimento de uma força eletromotriz (FEM) e_a . A mesma pode ser quantificada em termos da tensão nos terminais do subsistema elétrico v e da queda de potencial Ri na sua resistência equivalente. A Equação 4 expressa isso.

$$e_a = v - Ri \quad (4)$$

De acordo com a lei de Faraday, a FEM e_a é dada pela derivada temporal do fluxo concatenado λ .

$$e_a = \frac{d\lambda}{dt} \quad (5)$$

Em uma bobina cilíndrica o fluxo concatenado é igual a somatória do fluxo de todas as espiras individuais. A Equação 5 permite obter uma expressão de balanço entre o diferencial de energia mecânica dW_{mec} , o diferencial de energia magnética dW_{mag} , armazenada no campo de acoplamento, e o diferencial de energia causado pela FEM no subsistema elétrico.

$$id\lambda = dW_{mec} + dW_{mag} \quad (6)$$

É possível, ainda, simplificar a Equação 6 levando em conta o caso específico deste traba-

lho. Assumindo que a esfera ferromagnética irá se mover apenas na direção axial da bobina cilíndrica, o diferencial de energia dW_{mec} pode ser reescrito como o produto entre uma força magnética f_{mag} e um diferencial de distância dx . Substituindo e rearranjando, obtemos um modelo funcional para a variação de energia no campo de acoplamento:

$$dW_{mag} = id\lambda - f_{mag}dx \quad (7)$$

Conforme Fitzgerald et al. (1975), a Equação 7 pode ser entendida como uma equação de estado, desde que a energia $W_{mag}(\lambda, x)$ possa representar uma função de estado de um sistema conservativo. O diferencial $dW_{mag}(\lambda, x)$ pode ser representado em termos das derivadas parciais de $W_{mag}(\lambda, x)$.

$$dW_{mag}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{mag}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_{mag}}{\partial x} dx \quad (8)$$

Nesta perspectiva, a corrente elétrica i e a força magnética f_{mag} são funções paramétricas com variáveis independentes λ e x .

O mesmo sistema descrito pela função de estado $W_{mag}(\lambda, x)$ poderia ser descrito por outra função de estado com variáveis independentes diferentes. Até aqui o fluxo concatenado λ cumpriu o papel de variável elétrica. Entretanto, ele não é tão conveniente assim, já que existem outras grandezas elétricas bem mais fáceis de medir. Um exemplo disso é a corrente elétrica i . É possível, de acordo com Fitzgerald et al. (1975), representar o sistema através das variáveis independentes i e x . Para tanto, se deduz uma função de estado chamada co-energia $W'_{mag}(i, x)$.

A função co-energia $W'_{mag}(i, x)$ é dada por:

$$W'_{mag}(i, x) = i\lambda - W_{mag}(\lambda, x) \quad (9)$$

Diferenciando a Equação 9 e substituindo pelo termo da Equação 7, chegamos ao diferencial de co-energia:

$$dW'_{mag}(i, x) = \lambda di + f_{mag}dx \quad (10)$$

A Equação 10 também pode ser reescrita em termos das derivadas parciais de $W'_{mag}(i, x)$:

$$dW'_{mag}(i, x) = \frac{\partial W'_{mag}}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{mag}}{\partial x} dx \quad (11)$$

Como i e x são variáveis independentes, a Equação 10 é igual a Equação 11. Portanto:

$$f_{mag} = \frac{\partial W'_{mag}}{\partial x} \quad (12)$$

Um simplificação adicional é cabível ao modelo da força magnética. Conforme Fitzgerald et al. (1975), para uma indutância linear, o fluxo concatenado λ é igual ao produto entre a indutância L e a corrente i .

$$\lambda(x, i) = L(x)i \quad (13)$$

Daqui em diante a indutância L passará a ser denotada como uma função da distância x entre o centro de massa da esfera ferromagnética e a bobina. Sabe-se também, por Del Toro (1999), que a relação entre a energia W_{mag} , a indutância $L(x)$ e a corrente i em um dado instante é dada pela equação:

$$W_{mag}(i, x) = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (14)$$

A função de co-energia $W'_{mag}(i, x)$ também pode ser escrita em termos da indutância, conforme a Equação 15:

$$W'_{mag}(i, x) = \int_0^i \lambda(x, i)di = \int_0^i L(x)idi = \frac{1}{2}L(x)i^2 \quad (15)$$

Logo, a força magnética f_{mag} , em termos das variáveis independentes i e x , é:

$$f_{mag}(i, x) = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx} \quad (16)$$

2.2 Modelo da planta

Na subseção anterior os fenômenos envolvidos com a conversão eletromecânica de energia foram completamente descritos através da função de estado co-energia $W'_{mag}(i, x)$, em termos das variáveis independentes i e x . Nesta seção serão apresentadas expressões específicas para a planta de levitação magnética através de uma abordagem Newtoniana.

O subsistema elétrico é composto por uma bobina com núcleo ferromagnético que é alimentada por uma tensão v . Entretanto, não é possível representar o mesmo como uma carga resistiva-indutiva constante, já que a posição da esfera ferromagnética altera a indutância mútua do subsistema elétrico. Partimos então da lei das malhas para analisar o mesmo. Há duas quedas de potencial: uma causada por perdas resistivas e a outra pela reação do fluxo concatenado pela solenoide. A malha é então descrita por:

$$v = Ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (17)$$

Substituindo a Equação 13 na Equação 17 e expandindo a derivada, temos:

$$v = Ri + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt} \quad (18)$$

A Equação 18 descreve o subsistema elétrico. Para descrever o subsistema mecânico aplicamos a segunda lei de Newton a esfera ferromagnética:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg + f_{mag} - f_d - f_e \quad (19)$$

A Equação 19 considera que a esfera está imersa em um fluido que não interage com a força magnética f_{mag} . As forças f_d e f_e são as forças de arrasto e empuxo sobre a esfera, respectivamente. A força de empuxo é igual ao peso da massa de fluido deslocada pela esfera, enquanto o arrasto é uma função da velocidade desta. Segundo Pritchard e Leylegian (2011) a força de arrasto age paralela a direção de movimento relativo do corpo. Para uma esfera lisa (subentende-se que a rugosidade da sua superfície é desprezível) de diâmetro D , imersa em um fluido de densidade ρ e viscosidade estática η , a força de arrasto pode ser escrita na forma funcional:

$$f_d = f_1(\rho, \eta, c, D) \quad (20)$$

onde c é a velocidade da esfera. A relação funcional pode, ainda, ser reescrita em termos de dois parâmetros adimensionais:

$$\frac{f_d}{\frac{1}{2}\rho c^2 A} = f_2\left(\frac{\rho c D}{\eta}\right) \quad (21)$$

com A igual à área da seção frontal da esfera. O termo mais à esquerda da Equação 21 é definido como coeficiente de arrasto C_d , e o argumento da função no lado direito é o número de Reynolds R_e . O número de Reynolds R_e é dado pela razão entre as forças inerciais e as forças viscosas atuando sobre o corpo. Conforme Pritchard e Leylegian (2011), para um escoamento incompressível sobre a superfície de um corpo, o coeficiente de arrasto depende apenas do número de Reynolds. Ou seja, $C_d = f_2(R_e)$.

Trumper et al. (1997) alertam que caso as forças viscosas superem as forças inerciais ($g - f_e/m < f_d/m$) o sistema se torna impossível de controlar, uma vez que a força magnética só é capaz de acelerar a esfera em direção à bobina.

As equações 18 e 19 descrevem completamente o sistema e constituem o modelo da planta. É importante ressaltar que ainda há simplificações intrínsecas ao modelo. A primeira é que os efeitos de dispersão do campo magnético não foram modelados. As linhas de fluxo magnético são consideradas coaxiais com o eixo vertical em que a esfera se desloca. A segunda é que as colisões entre a esfera e a base da bobina foram assumidas como perfeitamente inelásticas.

Portanto, uma vez que a esfera tiver atingido a base da bobina e enquanto a força magnética a impelir em direção a esta, a posição da esfera será mantida constante. Por fim, no subsistema elétrico foram desconsiderados os efeitos de irradiação, histerese e correntes de Foucault, de modo que a única forma deste dissipar energia é através de perdas resistivas.

Ainda é preciso estabelecer uma relação funcional entre L e x e entre C_d e R_e . Hurley e Wölfle (1997) partem do princípio de que quando a esfera é removida ($x \rightarrow \infty$) a indutância é L_1 , e que quando a esfera está em contato com a bobina a indutância é $L_1 + L_0$. A solução para $L(x)$ se encontra interpolada entre esses dois valores. Há dois modelos normalmente apresentados para $L(x)$ na literatura. Hurley e Wölfle (1997) utilizam um modelo menos recorrente, baseado no decaimento exponencial da indutância, como é mostrado:

$$L(x) = L_1 + L_0 e^{-x/a} \quad (22)$$

Tal modelo também é adotado por Jaroszyński e Zietkiewicz (2016). O parâmetro a tem unidades de distância e magnitude igual a um nono do diâmetro da esfera. Já a maioria dos autores, incluindo Wong (1986), Qin et al. (2014), Yadav et al. (2012), Fares et al. (2009) e Valluvan e Ranganathan (2012) utilizam um modelo onde o decaimento da indutância é inversamente proporcional à distância.

$$L(x) = L_1 + L_0 \frac{x_0}{x} \quad (23)$$

O modelo descrito pela Equação 23 será adotado para indutância $L(x)$ neste trabalho. Para este, a força magnética normalmente é descrita em função da constante de força magnética $k = L_0 x_0 / 2$:

$$f_{mag}(i, x) = -k \left(\frac{i}{x} \right)^2 \quad (24)$$

A força de arrasto f_d sobre uma esfera lisa é composta por duas componentes: uma componente causada pelo atrito com o fluido e uma componente devido a pressão causada quando o escoamento se destaca da superfície da esfera. A preponderância de cada uma delas depende do número de Reynolds do escoamento.

Para valores pequenos de R_e , $R_e \leq 1.0$ em Pritchard e Leylegian (2011) e $R_e < 2.0$ em Morrison (2013), o efeito da pressão é desprezível, já que não há separação entre o escoamento e a esfera. Neste domínio, a força de arrasto é dada pela Lei de Stokes:

$$f_d = 3\pi\eta cD \quad (25)$$

Nestas condições, o coeficiente de arrasto C_d é igual a $24/R_e$.

Conforme o número de Reynolds cresce o coeficiente de arrasto diminui, até R_e se igualar 1000, permanecendo aproximadamente constante até $R_e = 3.0 \cdot 10^{-5}$. Entre o limite estabelecido pela Lei de Stokes e $R_e = 1000$, o escoamento desenvolve um regime turbulento de baixa pressão. Em $R_e = 1000$ cerca de 95% da força de arrasto é devido à pressão (PRITCHARD; LEYLEGIAN, 2011).

Supõe-se que em regime transiente, a velocidade do escoamento sobre a esfera ferromagnética é comportada entre valores associados aos intervalos descritos anteriormente para o número de Reynolds. Portanto, é desejável uma expressão que interpole adequadamente os resultados experimentais. Morrison (2013) sugere o seguinte modelo:

$$C_d = \frac{24}{R_e} + C_{d_1} + C_{d_2} + C_{d_3} \quad (26)$$

com

$$C_{d_1} = \frac{2.6 \left(\frac{R_e}{5.0} \right)}{1 + \left(\frac{R_e}{5.0} \right)^{1.52}} \quad (27)$$

$$C_{d_2} = \frac{0.411 \left(\frac{R_e}{263000.0} \right)^{-7.94}}{1 + \left(\frac{R_e}{263000.0} \right)^{-8.00}} \quad (28)$$

$$C_{d_3} = \frac{0.25 \left(\frac{R_e}{10^6} \right)}{1 + \left(\frac{R_e}{10^6} \right)} \quad (29)$$

A planta de levitação magnética possui dinâmica não-linear instável e de resposta rápida em malha aberta. A aplicação de técnicas de controle linear requer a linearização do modelo descrito pelas equações 18 e 19.

2.3 Linearização por realimentação

Para aplicar técnicas de controle linear a um modelo não-linear é comum o uso de duas alternativas: a linearização aproximada em torno de um ponto operacional ou a linearização exata pela realimentação do estado não-linear.

Conforme Nise (2013), a linearização em torno de um ponto operacional é feita para pequenas variações do sinal de entrada em torno de um estado de equilíbrio. Em seguida, é aplicada a transformada de Laplace com condições iniciais nulas à equação diferencial linearizada. Após isso é possível separar as variáveis de entrada e saída de modo a obter a função de transferência.

Seja o seguinte sistema descrito na forma canônica de controlabilidade:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underline{f}(\vec{x}) + \underline{g}(\vec{x})u \quad (30)$$

$$y = \underline{h}(\underline{x}) \quad (31)$$

onde \underline{x} é o vetor de estado do modelo não-linear, as funções $\underline{f}(\underline{x})$, $\underline{g}(\underline{x})$ e $h(\underline{x})$ são funções suaves e y é o sinal de saída da planta. Seborg (1997) lineariza o sistema em torno do ponto \underline{x}_0 através da linearização Jacobiana. O modelo linearizado é apresentado nas equações

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \left[\frac{\partial \underline{f}(\underline{x}_0)}{\partial \underline{x}} + \frac{\partial \underline{g}(\underline{x}_0)}{\partial \underline{x}} u_0 \right] (\underline{x} - \underline{x}_0) + \underline{g}(\underline{x}_0) \quad (32)$$

$$y - y_0 = \frac{\partial h(\underline{x}_0)}{\partial \underline{x}} (\underline{x} - \underline{x}_0) \quad (33)$$

O método descrito em Nise (2013) e em Seborg (1997) permite apenas a linearização local do modelo. Assim, a estratégia de controle pode apresentar desempenho insatisfatório em outros pontos operacionais. Além disso, há processos altamente não-lineares, que requerem a linearização exata com base nos valores instantâneos dos estados e perturbações. A linearização pela realimentação do estado não-linear é um destes métodos e ele parte do pressuposto de que todos as variáveis de estado do sistema podem ser medidas ou estimadas.

Conforme Trumper et al. (1997), a linearização por realimentação consiste em aproximar algebricamente um sistema de dinâmica não-linear em um sistema de dinâmica (totalmente ou parcialmente) linear para que os métodos de controle lineares possam ser aplicados. Seborg (1997) descreve a linearização por realimentação através de duas operações genéricas:

- Mudança não-linear de coordenadas;
- Realimentação do estado não-linear.

Jaroszyński e Zietkiewicz (2016) empregaram uma técnica de linearização por realimentação baseada em métodos diferenciais geométricos a fim de causar o desacoplamento entre o sinal de entrada e o sinal de saída (acoplado a um sinal de entrada manipulado u). Esta técnica pode ser aplicada se a dinâmica do sistema puder ser escrita na forma canônica de controlabilidade.

Na Figura 8 é possível visualizar o esquema de linearização por realimentação. Neste, a função $\phi(\underline{x}, v)$ fornece a entrada manipulada u ao sistema, baseado no estado não-linear \underline{x} e na entrada v . A função $\underline{\psi}(\underline{x})$ estabelece um mapeamento entre o vetor de estado \underline{x} do modelo não-linear e o vetor de estado \underline{z} do modelo linearizado. No método diferencial geométrico, ela é deduzida através da diferenciação sucessiva da função escalar $h(\underline{x})$ até que seja obtida uma expressão que dependa explicitamente do sinal de entrada manipulado u .

Os métodos diferenciais geométricos se dividem entre métodos entrada-saída e métodos entrada-estado. Estes consistem em estabelecer uma relação linear e desacoplada entre o sinal

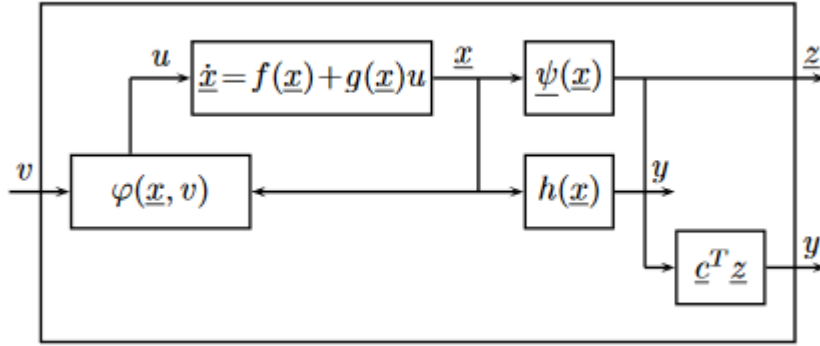


Figura 8: Esquema de linearização por realimentação (entrada-saída) (JAROSZYŃSKI; ZIETKIEWICZ, 2016).

de entrada e o sinal de saída ou uma das variáveis de estado do modelo, respectivamente. Para a planta de levitação magnética os dois métodos produzem o mesmo resultado, já que a posição da esfera x coincide com o estado mecânico normalmente adotado para os modelos não-lineares.

Uma vez que este trabalho irá tratar do controle interconectado em cascata da planta de levitação magnética, será adotado um modelo de segunda ordem para a linearização por realimentação do estado não-linear. Este é descrito como:

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (34)$$

$$\frac{dc}{dt} = g + u - \frac{f_d + f_e}{m} \quad (35)$$

onde u é a aceleração imposta à esfera pela bobina e c é a velocidade da esfera. Como a força magnética é apenas atrativa o sinal u é sempre menor ou igual a zero. O sistema é linear em relação à aceleração u , sendo a aceleração g e o termo $(f_d + f_e)/m$ apenas perturbações. Este modelo assume a corrente elétrica i como sinal de controle da planta (TRUMPER et al., 1997). O sinal de referência para a malha de controle auxiliar é dado por:

$$i_{ref} = x \sqrt{-\frac{mu}{k}} \quad (36)$$

A Figura 9 apresenta um diagrama de blocos do sistema linearizado por realimentação. Esta representação é uma adaptação do modelo proposto por Trumper et al. (1997). A relação entre as variáveis u e x é de integração dupla. Isto é mostrado na parte inferior da figura através do modelo linearizado equivalente na forma de uma função de transferência.

O desempenho de uma técnica de linearização por realimentação do tipo entrada-saída

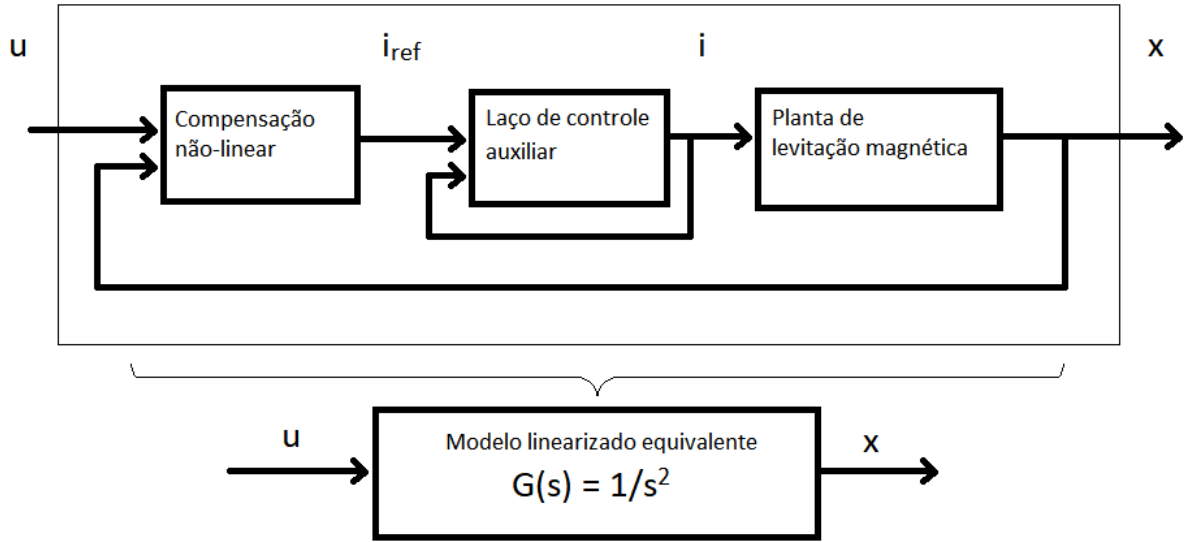


Figura 9: Sistema linearizado por realimentação do estado não-linear (Autor, 2018).

pode ser comprometido por dois fenômenos principais: o problema de desacoplamento da perturbação e a compensação não-linear imperfeita. O primeiro dos dois fenômenos pode tornar impossível a compensação não-linear através de uma expressão estática dos estados não-lineares, como a Equação 36.

A Equação 36 é uma lei de controle por realimentação de estado estático não-linear. Conforme Hanson e Seborg (1997), nem sempre é possível linearizar o sistema com uma expressão estática e um modelo dinâmico é necessário. Isto pode ocorrer quando o sistema está sujeito a perturbações. O modelo utilizado inclui a aceleração gravitacional g , a aceleração causada pela força de empuxo f_e/m e a aceleração causada pela força de arrasto f_d/m como perturbações.

Hanson e Seborg (1997) apresentam o problema de desacoplamento da perturbação para um sistema como uma única fonte de perturbação (equações 37-38).

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})u + \vec{p}(\vec{x})d \quad (37)$$

$$y = \underline{h}(\vec{x}) \quad (38)$$

Entretanto, o problema pode ser facilmente generalizado para mais de uma fonte de perturbação. De maneira formal, o problema consiste em encontrar (se possível) uma função de mapeamento e uma lei de controle por realimentação de estado estático não-linear, tal que:

- O mapeamento entre o sinal de entrada manipulado e o sinal de saída é linear;

- O sinal de saída não é afetado pela perturbação.

Para resolver o problema é útil definir graus relativos r e ρ , associados aos sinais u e d . Conforme Hanson e Seborg (1997), o grau relativo r , do sinal u , é dado pela dimensão da função vetorial $\underline{g}(\underline{x})$. Já a perturbação d possui grau relativo ρ no ponto \underline{x}_0 se:

- $L_p L_f^k h(\underline{x}) = 0$ para todo \underline{x} na vizinhança de \underline{x}_0 e para todo $k < \rho - 1$;
- $L_p L_f^{\rho-1} h(\underline{x}_0) \neq 0$.

onde os termos L_p e L_f são operadores de derivadas de Lie. A condição $\rho \geq r$ é necessária à solução do problema de desacoplamento da perturbação. Se $\rho < r$, a perturbação d tem maior peso sobre o sinal de saída do que o sinal manipulado u e o desacoplamento da perturbação não pode ser obtido com uma lei de controle por realimentação de estado estático não-linear.

Como será mostrado na seção de Metodologia e Resultados, é possível aplicar a técnica de linearização por realimentação baseada na Equação 36.

A compensação não-linear imperfeita também afeta diretamente o desempenho do sistema linearizado. Conforme Siciliano et al. (2009), a técnica é baseada no cancelamento perfeito da dinâmica não-linear. Logo, a implementação desta técnica requer o conhecimento preciso dos parâmetros do sistema e que o conjunto de equações deste seja computado em tempo real. Entretanto, as condições são difíceis de serem obtidas na prática.

Siciliano et al. (2009) lista, entre as causas da compensação não-linear imperfeita, as incertezas do modelo e a frequência de amostragem insuficiente do estado não-linear. Entre as incertezas podem existir incertezas estruturadas, como erros paramétricos, e incertezas não-estruturadas, como dinâmicas não modeladas. Ainda conforme o autor, a linearização por realimentação requer que os períodos de amostragem sejam no máximo da ordem de milissegundos para que a aproximação no domínio do tempo contínuo seja válida.

As incertezas do modelo não serão abordadas neste trabalho. Portanto, o único fator capaz de comprometer o desempenho da compensação não-linear é a frequência de amostragem. Trumper et al. (1997) também identificaram que o desempenho da compensação não-linear depende da frequência de amostragem e da posição da esfera. Para uma frequência de amostragem finita a planta é instável em malha aberta e a compensação não-linear é impossível no intervalo entre duas amostragens adjacentes. Além disso, o sistema se torna instável quando a esfera está próxima o suficiente do eletroímã. O limiar varia de acordo com o tamanho do intervalo entre as amostragens.

A necessidade por altas taxas de amostragem pode impor restrições ao hardware e ao software do sistema de controle. Segundo Siciliano et al. (2009), é comum que a linearização por realimentação seja empregada com o cálculo apenas dos termos dominantes da dinâmica

do sistema. Nestes casos, são empregadas técnicas de controle para lidar com a compensação imperfeita. As técnicas mais populares envolvem métodos de controle robusto e de controle adaptativo.

A planta de levitação magnética possui apenas um termo dominante em suas equações (associado a força magnética) e outros termos tratados como perturbações. Assim, não serão necessárias técnicas de controle adicionais para lidar com o problema da compensação imperfeita.

2.4 Controladores discretos

Os controladores, ou compensadores, são usados para alterar o comportamento de um sistema em malha fechada. Geralmente, são aplicados quando o sistema é instável ou não possui características de resposta transitória desejadas em malha aberta. Apesar do controlador PID ser o mais utilizado na indústria, ele não é a forma mais geral de um controlador de segunda ordem. O controlador PID é um caso particular do compensador por atraso-avanço de fase.

O controle PID é obtido pela somatória das ações de controle proporcional, integral e derivativa. Esta forma de controle permite o projeto do compensador de forma a satisfazer diversos requisitos (em regime transiente e em regime permanente). De acordo com Ogata (2014), isto é feito através da ação sobre o valor instantâneo do erro, sobre o erro em estado estacionário e sobre a tendência do erro. Estas ações são realizadas pelo controle proporcional, pelo controle integral e pelo controle derivativo, respectivamente. A forma equacional do controle PID, que relaciona o sinal de controle $u(t)$ com o sinal de erro $e(t)$ é a seguinte:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + T_d \frac{de}{dt} + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) = K_p e(t) + K_d \frac{de}{dt} + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (39)$$

A função de transferência respectiva à equação anterior pode ser obtida através da manipulação algébrica da transformada de Laplace desta. O resultado é exposto abaixo.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (40)$$

Devido ao bom desempenho dos controles de tipos P, PI e PID em tempo contínuo, muitos métodos foram desenvolvidos para transformar seus modelos em modelos amostrados através de discretização. Para períodos de amostragem T_0 pequenos, a Equação 39 pode ser convertida em uma equação de diferenças. Substituindo o termo derivativo por uma diferença de primeira ordem e o termo integral por uma integração retangular temos o modelo discreto da Equação 41. Este é um algoritmo de controle não-recursivo. E como o sinal de controle é

computado para o instante n , este é um algoritmo de posição (ISERMANN, 1997).

$$u[n] = K_p \left[e[n] + \frac{T_0}{T_i} \frac{e[n-1] + e[n]}{2} + \frac{T_d}{T_0} (e[n] - e[n-1]) \right] \quad (41)$$

Entretanto, de acordo com Isermann (1997), algoritmos recursivos são mais adequados para programação. Estes algoritmos calculam o termo corrente do sinal de controle $u[n]$ através de valores anteriores e termos de correção. Para obter um algoritmo recursivo, $u[n-1]$ deve ser subtraído da Equação 41. Isto resulta no seguinte algoritmo de velocidade:

$$u[n] = u[n-1] + q_0 e[n] + q_1 e[n-1] + q_2 e[n-2] \quad (42)$$

com

$$q_0 = K_p \left(1 + \frac{T_0}{2T_i} + \frac{T_d}{T_0} \right) \quad (43)$$

$$q_1 = -K_p \left(1 + 2\frac{T_d}{T_0} - \frac{T_0}{2T_i} \right) \quad (44)$$

$$q_2 = K_p \frac{T_d}{T_0} \quad (45)$$

Para valores pequenos de T_0 , os parâmetros q_0 , q_1 e q_2 podem ser calculados através dos ganhos do controle PID analógico. Entretanto, para valores grandes de T_0 essa aproximação não é mais válida, devido ao termo derivativo (ISERMANN, 1997).

Quando o modelo discretizado proposto pela Equação 42 não obtém bom desempenho é necessário utilizar outros métodos no projeto de controle digital. Normalmente são adotadas duas alternativas distintas: a otimização paramétrica e a transformada Z da função de transferência na Equação 40. A primeira alternativa pode ser executada através de métodos analíticos ou numéricos. Nise (2013), propõe o projeto de estabilidade via lugar geométrico das raízes. Para sistemas discretos, o lugar das raízes é traçado dentro do limite compreendido pelo círculo unitário da origem ao invés do semiplano esquerdo.

A otimização paramétrica também pode ser realizada através da alocação dos polos em malha fechada e através de métodos numéricos. O projeto de estabilidade pela alocação dos polos é possível, sem critérios de estabilidade adicionais, para modelos de baixa ordem. Já a otimização paramétrica numérica pode ser aplicada a qualquer modelo, independente da ordem. Ela requer apenas a minimização de um valor característico simples que quantifique o desempenho do sistema. Normalmente são aplicadas funções quadráticas (ISERMANN, 1997).

O projeto do controle digital através da transformada Z da função de transferência do controlador PID requer uma alteração na ação de controle derivativa. Isermann (1997) de-

monstra que a aproximação de Tustin para a Equação 40 resulta em um modelo amostrado de segunda ordem com um dos polos em $z = -1.0$ rad/s. Um polo alocado nesta posição no plano z faz com que a variável manipulada oscile com amplitude constante. Para evitar isso, o termo derivativo deve ser substituído pelo seguinte termo de primeira ordem:

$$\frac{sT_d}{1 + sT_1}$$

Esta modificação na ação derivativa resulta em uma ação derivativa atrasada. Ogata (2014) afirma que em um controlador PID real o termo derivativo é atrasado. Normalmente a constante de tempo da ação derivativa é da ordem de um décimo do período derivativo ($T_1 = 0.1T_d$). Assim, quando o valor de referência sofre um incremento em degrau, a variável manipulada não é uma função impulso, e sim uma função pulso estreito. Este fenômeno é conhecido como salto no valor de referência (OGATA, 2014).

A função de transferência de um controlador PID com ação derivativa atrasada é apresentada na Equação 46.

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_1} \right) \quad (46)$$

A transformada Z deste modelo com retentor de ordem zero é deduzida a seguir.

$$\begin{aligned} G_c(z) &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{G_c(s)}{s} \right\} = K_p \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 T_i} + \frac{T_d}{1 + sT_1} \right\} \\ &= K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_1} \frac{1}{z-1} + \frac{T_d}{T_1} \frac{z-1}{z-\gamma} \right) = K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_1} \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T_1} \frac{1-z^{-1}}{1-\gamma z^{-1}} \right) \\ &= \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (47)$$

com

$$q_0 = K_p \left(1 + \frac{T_d}{T_1} \right) \quad (48)$$

$$q_1 = -K_p \left(1 - \gamma + 2 \frac{T_d}{T_1} - \frac{T_0}{T_i} \right) \quad (49)$$

$$q_2 = K_p \left[\frac{T_d}{T_1} + \gamma \left(\frac{T_0}{T_i} - 1 \right) \right] \quad (50)$$

$$p_1 = \gamma - 1 \quad (51)$$

$$p_2 = -\gamma \quad (52)$$

$$\gamma = -e^{-T_0/T_i} \quad (53)$$

Neste trabalho o rótulo $G_c(z)$ sempre será usado para descrever o modelo linear $G_c(s)$ amostrado com elemento retentor. Não serão considerados retentores de ordens maiores.

2.4.1 Amostragem e retenção

Controladores digitais amostrados normalmente tem desempenho inferior aos controladores analógicos. Em parte, isto é causado pela perda de informação entre as amostragens. Assim, a frequência de amostragem f_0 é um parâmetro crítico no projeto de controladores digitais. Entre os principais fatores, listados por Isermann (1997), que influem na escolha do frequência de amostragem estão:

- O desempenho de controle desejado;
- A dinâmica do processo;
- O espectro dos sinais de perturbação;
- O custo computacional.

Para melhorar o desempenho de controle a frequência de amostragem deve ser tão alta quanto for possível. Entretanto, nem sempre é possível amostrar as variáveis de estado tão rápido quanto se deseja. O desempenho cresce na mesma proporção que o custo computacional.

A dinâmica do processo exerce um papel dominante na escolha da frequência de amostragem. De acordo com Shannon (1949), se uma função $x(t)$ não contém frequências maiores do que f_b , ela pode ser completamente determinada pela amostragem de $x(t)$ com frequência $f_0 = 2f_b$. Este é o enunciado do teorema de Shannon. A frequência $2f_b$ é conhecida como frequência de Nyquist.

Quando um sinal não contém componentes com frequência maior que f_b , é dito que ele é limitado por largura de banda. A frequência f_b de um processo passa-baixas é coincidente com a largura de banda do sinal. Entretanto, quando um sinal contém componentes cuja periodicidade pode ser acomodada entre duas amostragens consecutivas ocorre um fenômeno chamado aliasing. A sobreposição destas componentes de alta frequência prejudica as amostras.

A amostragem em processos limitados por largura de banda também pode ser prejudicada por aliasing, devido a perturbações externas. Isermann (1997) classifica o espectro das perturbações, para sistemas em malha fechada, em três bandas:

- Baixas frequências: as perturbações são atenuadas;

- Médias frequências: as perturbações são amplificadas;
- Altas frequências: as perturbações não são afetadas pela malha de controle.

Para replicar as condições do teorema de Shannon é necessário utilizar técnicas anti-aliasing. Na Figura 10 o fenômeno de aliasing é exemplificado pela taxa de amostragem insuficiente. O espectro de um sinal amostrado com técnica anti-aliasing ideal também é mostrado. Entretanto, técnicas anti-aliasing reais permitem que o fenômeno ocorra em menor grau, sujeito a atenuação.

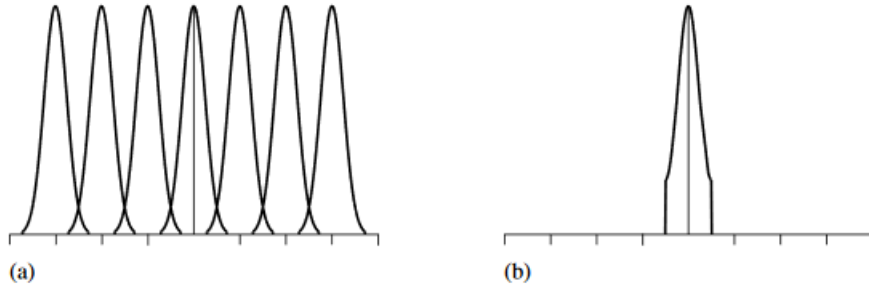


Figura 10: a) Ocorrência de aliasing para sinais amostrados com taxa insuficiente; b) Espectro de sinal amostrado com técnica anti-aliasing (PHARR; HUMPHREYS, 2010).

Conforme Pharr e Humphreys (2010), as três técnicas anti-aliasing mais comuns são a amostragem não-uniforme, a amostragem adaptativa e a pré-filtragem. A primeira técnica é bastante utilizada na amostragem de imagens. O sinal amostrado $x^*(t)$ é dado por:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t - nT - \frac{1}{2} + \xi\right) \quad (54)$$

onde ξ é um número aleatório entre 0 e 1. A amostragem não-uniforme tende a tornar os efeitos do aliasing em ruído regular. Porém, assim como a amostragem uniforme, esta não produz bons resultados quando a frequência f_0 é insuficiente.

A amostragem adaptativa, também conhecida como sobreamostragem adaptativa, lida com o aliasing através da identificação de regiões no sinal onde o conteúdo espectral extrapola o limite de Nyquist. Nesta condição, amostragens adicionais são feitas. Esta proposta incorre na inconveniência do custo computacional elevado.

Neste trabalho será utilizada a técnica de pré-filtragem. Nesta, o sinal a ser amostrado é convolucionado com a função de um filtro cuja largura de banda é selecionada a fim de remover o conteúdo espectral acima do limite de Nyquist (PHARR; HUMPHREYS, 2010).

A operação inversa da amostragem é a reconstrução do sinal $x(t)$. A reconstrução aproximada pode ser feita através de elementos retentores. Elementos retentores de ordens mais

elevadas só podem ser aplicados com altas frequências de amostragem. Isto sinaliza uma vantagem do elemento retentor de ordem zero, que será utilizado neste trabalho.

O retentor de ordem zero fornece uma aproximação em escada do sinal $x(t)$, mantendo o valor da amostra contante no intervalo $nT_0 < t < (n+1)T_0$. Em outras palavras, o elemento retentor se comporta como um circuito integrador entre duas amostragens (NISE, 2013).

A função de transferência do elemento retentor é dada a seguir:

$$H_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s} \quad (55)$$

De acordo com Isermann (1997), a resposta em frequência do modelo $H_{ZOH}(s)$ é aproximadamente a de um filtro passa-baixas com constante de tempo T_0 . No projeto do sistema de controle o efeito do elemento retentor deve ser considerado. Como será mostrado na seção de Metodologia e resultados, o controle digital será projetado através da discretização de controladores analógicos. As expressões apresentadas para o cálculo dos ganhos de controladores discretizados nas equações 43-45 e 48-53 já incluem este efeito. A primeira indiretamente, devido a sua forma recursiva, e a segunda diretamente, através da inclusão do modelo $H_{ZOH}(s)$ na transformada z da função de transferência do controlador PID com ação derivativa atrasada.

3 Metodologias e Resultados

Esta seção compreenderá o ajuste dos controladores digitais e a simulação dos sistemas para validar seu desempenho. As simulações serão realizadas nos softwares matemáticos Octave e Scilab, e as equações diferenciais que compõem o modelo serão resolvidas numericamente, através do método de Euler.

Nas simulações expostas neste trabalho, o passo iterativo utilizado foi $T = 10,0 \mu s$. Este valor é no mínimo duas ordens de magnitude menor que qualquer constante de tempo existente no sistema.

Todas as simulações serão realizadas com condições iniciais nulas, com exceção da posição da esfera. Outros métodos empregados para avaliar as variáveis de processo serão citados no decorrer da seção.

3.1 Modelo da planta

Na seção anterior foram obtidos modelos capazes de descrever as forças mecânicas e eletromagnéticas atuando sobre a planta. É conveniente reescrever a expressão para indutância em termos da constante de força magnética k . Esta se relaciona com a indutância L_0 e o deslocamento x_0 , em que a indutância $L(x)$ é igual a $L_1 + L_0$ por $k = L_0 x_0 / 2$. Assim, temos:

$$L(x) = L_1 + \frac{2k}{x} \quad (56)$$

É possível, então, descrever a planta de levitação magnética através do seguinte modelo de terceira ordem, por meio das equações 18, 19 e 24.

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (57)$$

$$\frac{dc}{dt} = g - \frac{k}{m} \left(\frac{i}{x} \right)^2 - \frac{\rho C_d A}{2m} \frac{c^3}{|c|} - \frac{\rho g \pi D^3}{6m} \quad (58)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x)} \left(v - Ri + 2k \frac{ic}{x^2} \right) \quad (59)$$

O termo da força de arrasto $f_d = \rho C_d A c^2 / 2$ foi multiplicado por $c/|c|$ na Equação 58 para corrigir o sentido da força, que é sempre oposta ao movimento da esfera.

O conjunto de valores na Tabela 1 será utilizado durante os projetos dos controladores e da simulação do modelo em malha fechada. Estes valores foram deduzidos através do cálculo da corrente no eletroímã, da energia armazenada no campo de acoplamento e da força magnética sobre a esfera em equilíbrio mecânico. Os mesmos foram julgados consistentes, considerando

a comparação de suas magnitudes com as magnitudes de grandezas análogas apresentadas na literatura (JAROSZYŃSKY; ZIETKIEWICZ, 2016).

Tabela 1: Valores paramétricos do modelo.

Parâmetro	Símbolo	Magnitude	Unidades
Resistência equivalente do eletroímã	R	$5,0 \times 10^{-1}$	Ω
Indutância equivalente do eletroímã	L_1	$6,0725 \times 10^{-2}$	H
Constante de força magnética	k	$1,5236 \times 10^{-6}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{A}^2$
Massa da esfera	m	$1,0448 \times 10^{-3}$	kg
Diâmetro da esfera	D	$6,340 \times 10^{-3}$	m
Aceleração gravitacional	g	9,810	m / s^2
Densidade do ar	ρ	1,2928	kg / m^3
Viscosidade estática do ar	η	$1,720 \times 10^{-5}$	$\text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$

Um estado de equilíbrio $[x_e \ c_e \ i_e]^t$ ocorre quando os termos diferenciais nas equações 57-59 se anulam. Desta forma, a velocidade de equilíbrio c_e é sempre nula e a corrente de equilíbrio i_e é proporcional a posição de equilíbrio x_e , conforme a Equação 60,

$$i_e = x_e \sqrt{\frac{1}{k}(mg - f_e)} \quad (60)$$

onde f_e é a força de empuxo. A solução de equilíbrio da Equação 59 permite deduzir uma expressão para a tensão de equilíbrio v_e . Esta será proporcional a corrente de equilíbrio, tal que $v_e = Ri_e$.

Como neste trabalho se pretende realizar o controle de posição da esfera, os resultados serão expostos em termos do estado elétrico i e do estado mecânico x . Nos trabalhos citados nas seções de Introdução e de Modelagem da Suspensão Eletromagnética foi constatado que o estado elétrico i possui relação aproximadamente linear com o sinal de controle v , sendo a variação de $L(x)$ pequena em todos os casos. Assim, a FEM e_a será considerada um sinal de perturbação.

A força de arrasto f_d também será considerada um sinal de perturbação. Supõe-se que sua magnitude é bastante pequena, comparada aos demais sinais de força envolvidos no processo. Na revisão da literatura foi observado que este termo sempre foi descartado durante o projeto do controlador. Entretanto, neste trabalho, será feita uma análise do mesmo para avaliar a sua influência sobre o desempenho da linearização por realimentação e do sistema de controle digital.

A solução de equilíbrio também permite identificar que as perturbações causadas pela FEM e_a e pela força de arrasto f_d só são presentes em regime transiente ou quando o sistema segue um perfil de referência com velocidade não nula.

A relação entre o estado elétrico i e o estado mecânico x é extremamente não-linear e instável. O comportamento da planta pode ser observado através da simulação do modelo não-linear em malha aberta na Figura 11. O deslocamento da esfera é limitado inferiormente por $x \geq D/2$, que é a distância mínima entre a superfície da face do eletroímã e o centro de massa da esfera.

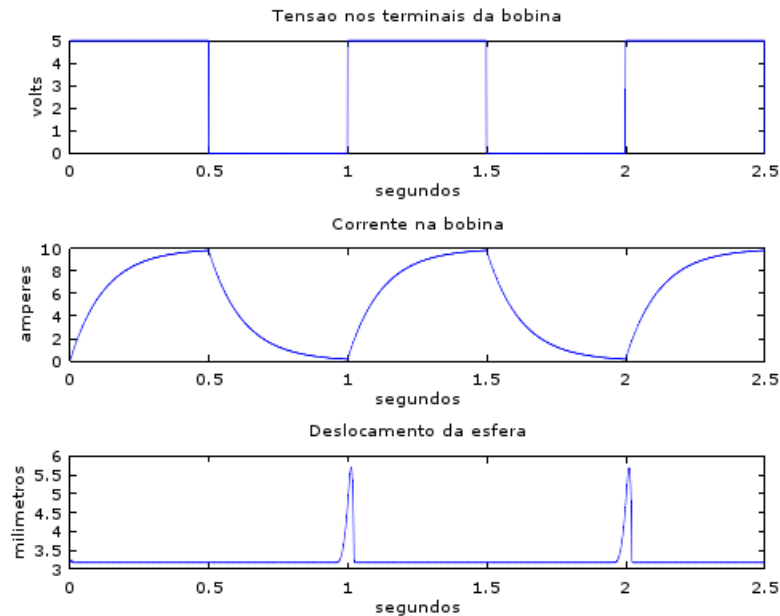


Figura 11: Simulação do modelo em malha aberta ($x \geq D/2$) (Autor, 2018).

3.2 Sistema de controle

Para projetar o sistema de controle, o processo de suspensão da esfera será dividido em dois subprocessos: um auxiliar e um principal. No subprocesso auxiliar a variável de processo é a corrente elétrica i . Já no subprocesso principal, a variável de processo é a posição da esfera x .

Na malha de controle principal, as perturbações são causadas pelo peso da esfera, pela força de empuxo e pela força de arrasto f_d causada pelo escoamento sobre a superfície da esfera. O sinal de controle, ou variável manipulada, é a aceleração u , causada pela força magnética. Entre o subprocesso principal e o subprocesso auxiliar há um estágio de linearização por realimentação do estado não-linear. Este estágio atua como um compensador não-linear, fornecendo o sinal de referência i_{ref} para o subprocesso auxiliar.

No subprocesso auxiliar, a perturbação é causada pela força eletromotriz e_a , induzida no circuito elétrico do eletroímã pelo campo magnético de acoplamento. O sinal de controle é a

tensão v . Nas simulações, esta será saturada entre -50.0 e 50.0 V, para evitar seu crescimento excessivo devido a ação de controle integral.

Entre os sinais de perturbação, o peso da esfera e a força de empuxo são constantes. Logo, não interferem no conteúdo espectral das variáveis de estado. Isto é causado apenas pela força de arrasto f_d e pela força eletromotriz e_a .

O sistema de controle interconectado em cascata é apresentado na forma de diagrama de blocos nas figuras 12 e 13.

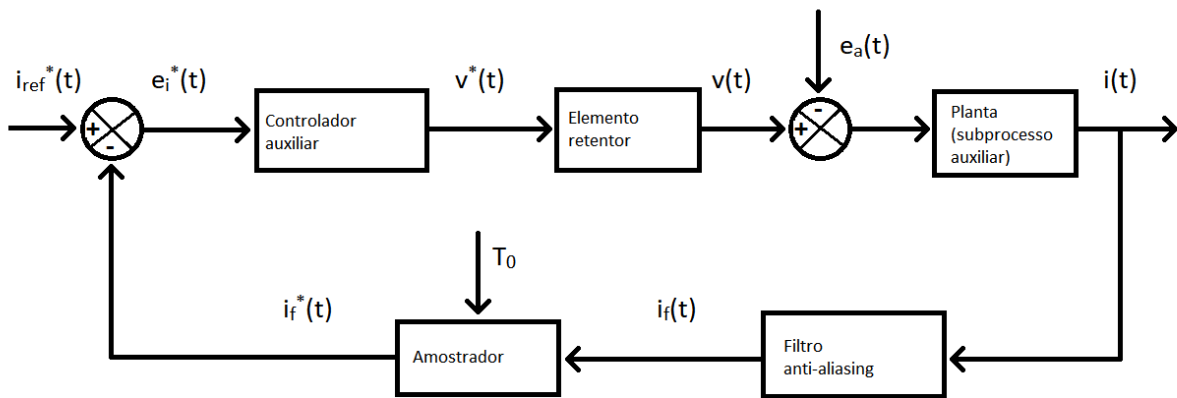


Figura 12: Sistema de controle auxiliar (Autor, 2018).

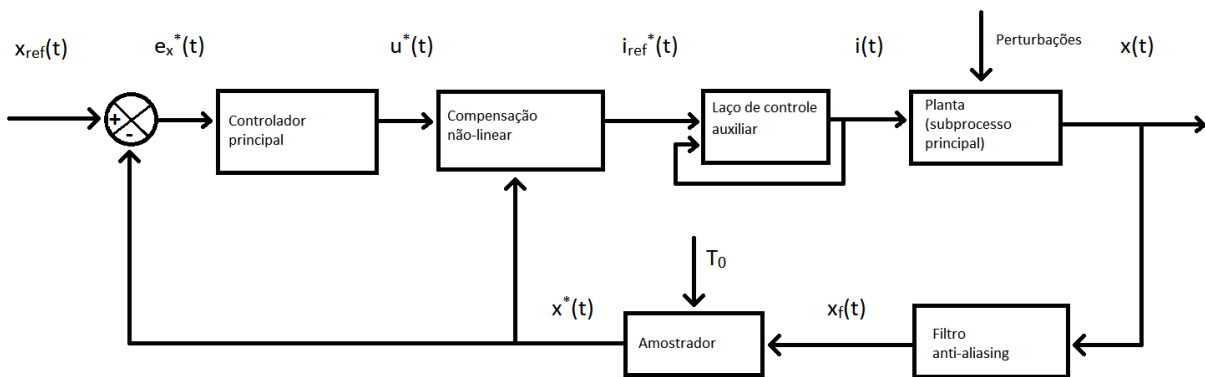


Figura 13: Sistema de controle principal (Autor, 2018).

3.2.1 Sistema de controle auxiliar

Na planta de levitação magnética o controle auxiliar tem por objetivo estabilizar rapidamente o estado elétrico i para que a suspensão se comporte como um modelo de segunda

ordem. Conforme Isermann (1997), o projeto do controle em cascata depende significativamente do ponto onde as perturbações são inseridas no processo. Logo, cada sistema de controle em cascata deve ser tratado individualmente.

Deseja-se projetar os sistemas de controle auxiliar e principal independentemente. Um modo de fazer isso é projetar o controlador auxiliar para que os polos do processo auxiliar tenham efeito desprezível no processo principal. De acordo com Nise (2013), o decaimento exponencial de um modo característico pode ser considerado desprezível após cinco constantes de tempo do sistema. Logo, os polos do processo auxiliar devem estar alocados bem mais distantes do eixo imaginário do que os polos do processo principal.

A relação entre o sinal de controle v e o estado elétrico i é descrita pela Equação 59. Para projetar um controlador linear é necessário separar algebricamente as transformadas de Laplace das variáveis de entrada e saída de modo a obter uma função de transferência. Entretanto, a Equação 59 é não-linear e variante no tempo.

Em virtude do comportamento aproximadamente linear da corrente $i(t)$ na Figura 11, o controlador linear será projetado com base na linearização do modelo em um estado de equilíbrio. Para tanto, o lado direito da Equação 59 será tratado como uma função de estado $f_i(v, i, x, c)$. Esta função pode ser aproximada pelos primeiros termos de sua expansão em série de Taylor, como é mostrado a seguir:

$$f_i(v, i, x, c) \approx f_i(v_e, i_e, x_e, c_e) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial v} \right)_{(i_e, x_e, c_e)} (v - v_e) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial i} \right)_{(i_e, x_e, c_e)} (i - i_e) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \right)_{(i_e, x_e, c_e)} (x - x_e) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial c} \right)_{(i_e, x_e, c_e)} (c - c_e) \quad (61)$$

com

$$\frac{\partial f_i}{\partial v} = \frac{1}{L(x)} \quad (62)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial i} = -\frac{R}{L(x)} \quad (63)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{2k}{x^2 L^2(x)} \left(v - Ri + 2k \frac{ic}{x^2} \right) - \frac{4k}{L(x)} \frac{ic}{x^3} \quad (64)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial c} = \frac{2k}{L(x)} \frac{i}{x^2} \quad (65)$$

É conveniente reescrever as equações como um modelo de pequenos sinais para linearizá-lo. Sejam os novos estados e sinal de controle, respectivamente:

$$\delta x = x - x_e \quad (66)$$

$$\delta c = c - c_e \quad (67)$$

$$\delta i = i - i_e \quad (68)$$

$$\delta v = v - v_e \quad (69)$$

Uma vez que a velocidade de equilíbrio é nula, os estados δc e c são idênticos. O modelo linearizado do sistema é apresentado na Equação 70. O termo proporcional a δx se anula, uma vez que $v_e = Ri_e$ e $c_e = 0$.

$$\frac{d\delta i}{dt} = \frac{1}{L(x_e)}\delta v - \frac{R}{L(x_e)}\delta i + \frac{2\sqrt{mgk}}{x_e L(x_e)}c \quad (70)$$

Aplicando a transformada de Laplace à Equação 70 e rearranjando os termos obtemos o modelo do sistema no domínio da frequência (Equação 71). A função de transferência $G_{vi}(s)$ modela o processo e a função de transferência $G_{xi}(s)$ modela a perturbação causada pela força eletromotriz e_a . Na Equação 71 a transformada de Laplace da velocidade $C(s)$ foi igualada a $sX(s)$.

$$\Delta I(s) = \frac{1}{sL(x_e) + R}\Delta V(s) + \frac{s2\sqrt{mgk}}{sx_e L(x_e) + x_e R}X(s) = G_{vi}(s)\Delta V(s) + G_{xi}(s)X(s) \quad (71)$$

Embora o modelo linearizado tenha sido obtido, ainda é necessário selecionar o estado de equilíbrio x_e que será utilizado no projeto do controlador. A Equação 71 varia parametricamente com x_e . O grau com que a variação de x_e afeta as funções de transferência do sistema é chamado de sensibilidade. O efeito da variação de um parâmetro é tão indesejável quanto a sensibilidade do sistema a estes parâmetro é maior (NISE, 2013).

Nise (2013) define formalmente a sensibilidade como a razão entre a variação relativa de uma função F e a variação relativa de um parâmetro P quando a variação relativa do parâmetro tende a zero. Ou seja:

$$S_{F:P} = \frac{P}{F} \frac{\partial F}{\partial P} \quad (72)$$

A sensibilidade da transformada de Laplace do estado elétrico $\Delta I(s)$ ao parâmetro x_e é dada a seguir:

$$S_{\Delta I:x_e} = \frac{x_e}{\Delta I} \frac{\partial \Delta I}{\partial x_e} = \frac{1}{sL(x_e) + R} \frac{2ks\Delta V(s) - 2\sqrt{mgk}s(sL_1 + R)X(s)}{x_e\Delta V(s) + 2\sqrt{mgk}sX(s)} \quad (73)$$

Na Equação 73 é possível observar que quanto maior x_e menor a sensibilidade do estado elétrico ao parâmetro. Logo, a sensibilidade é crítica para $x_e = D/2$. A linearização do

modelo neste ponto é dada a seguir.

$$\Delta I(s) = \frac{16,211}{s + 8,1055} \Delta V(s) + \frac{1,2781s}{s + 8,1055} X(s) \quad (74)$$

Nas figuras 14 e 15 são apresentados os diagramas de Bode das funções de transferência $G_{vi}(s)$ e $G_{xi}(s)$, respectivamente. Os modelos se comportam como um filtro passa-baixas com frequência de corte de 1,287 Hz e um filtro passa-altas com frequência de corte de 1,293 Hz. Os ganhos em suas bandas de passagem são, respectivamente, 6,021 dB e 2,131 dB. Neste trabalho, a frequência de corte será considerada aquela para a qual a atenuação do sinal é de 3,0 dB.

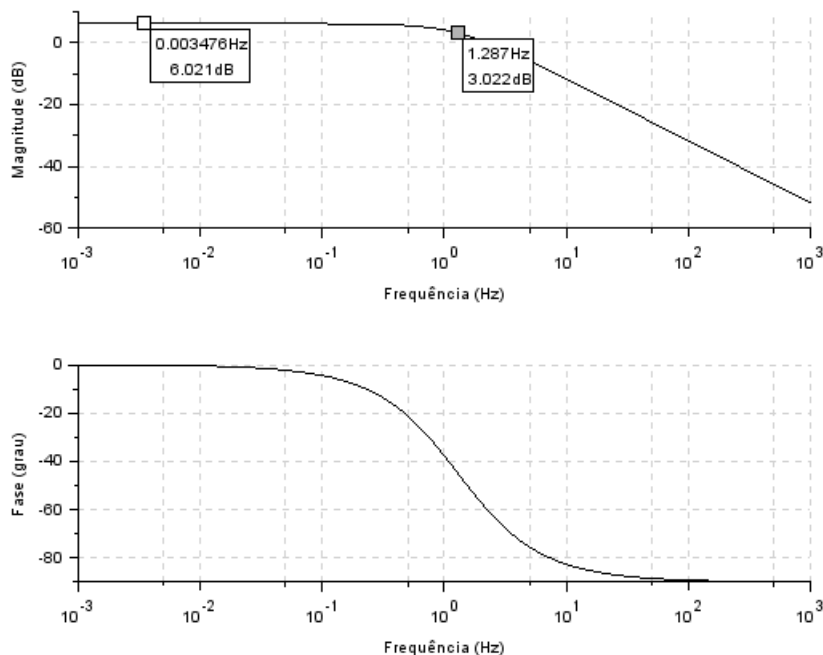


Figura 14: Diagrama de Bode da função de transferência $G_{vi}(s)$ (Autor, 2018).

Devido à perturbação, o sinal $i(t)$ não tem banda limitada. Pharr e Humphreys (2010) citam que a amostragem de sinais não limitados por banda ou com amostragem com taxa insuficiente para o conteúdo espectral do sinal, reconstróem uma função que não é igual ao sinal original. O resultado da simulação do subsistema elétrico em malha aberta é apresentada na Figura 16. O estado mecânico x foi simulado como um sinal estocástico gaussiano de média D e amplitude $D/2$ para gerar componentes distribuídas na totalidade do espectro do sinal. A tensão v foi aplicada na forma de um degrau unitário. Na parte superior da Figura 16 é apresentada a FEM e_a . E na parte inferior da figura é apresentada a corrente elétrica na

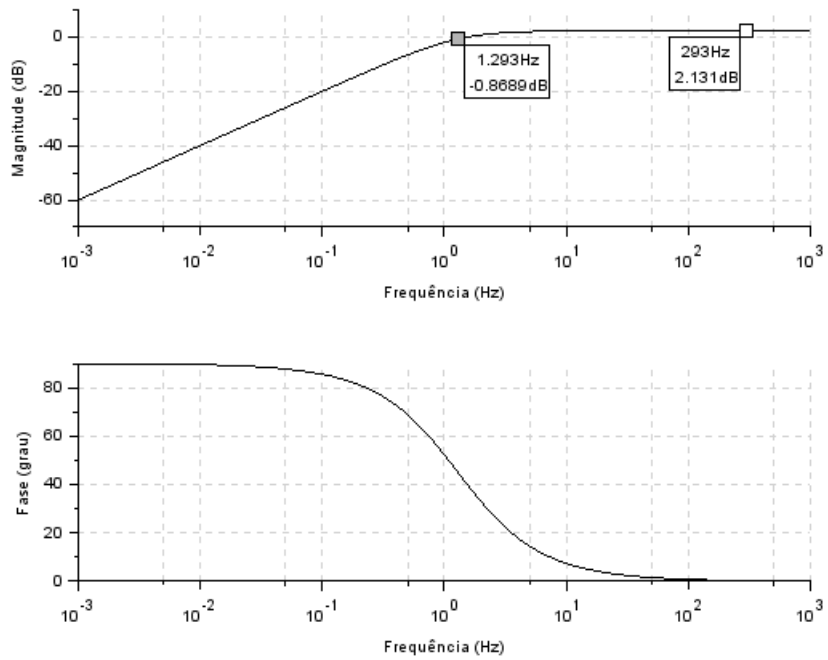


Figura 15: Diagrama de Bode da função de transferência $G_{xi}(s)$ (Autor, 2018).

bobina i .

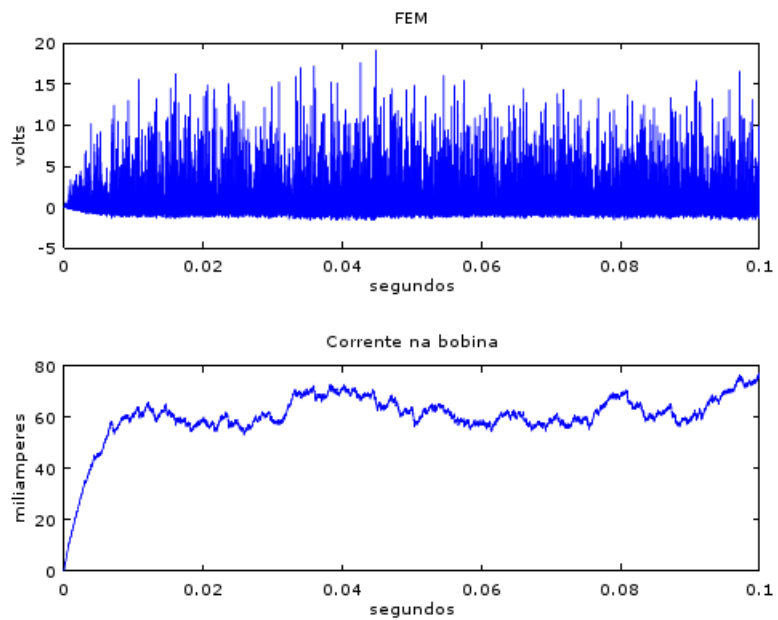


Figura 16: Simulação do subsistema elétrico em malha aberta (Autor, 2018).

A FEM e_a é uma função não homogênea das variáveis de estado. Assim, quanto maior a amplitude de i , maior será a perturbação causada pelo modo eletromecânico. O conteúdo espectral do sinal $i(t)$ menos seu valor médio foi obtido através da transformada de Fourier e é mostrado na Figura 17. A análise foi realizada em regime permanente para que apenas o conteúdo espectral referente a perturbação, e não ao regime transiente, fosse mostrado. A perturbação possui componentes em todas as faixas de frequência sendo as componentes de maior amplitude abaixo de 300 Hz.

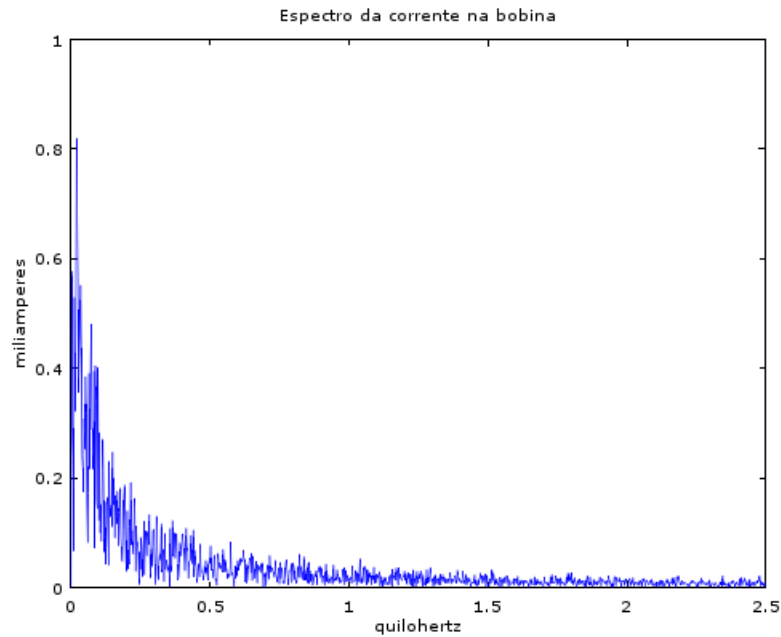


Figura 17: Conteúdo espectral da corrente em malha aberta (Autor, 2018).

Como as condições propostas pelo teorema de Shannon não se verificam, é necessário empregar uma técnica anti-aliasing. A técnica adotada será a amostragem uniforme com pré-filtragem. A função de transferência do filtro passa-baixas é:

$$H_f(s) = \frac{1}{\tau_f s + 1} \quad (75)$$

A constante de tempo τ_f do filtro deve ser igual a $1/\omega_b$, onde ω_b é a largura de banda do sistema em malha fechada.

A largura de banda está relacionada com o tempo de acomodação do sistema. Quanto maior a largura de banda ω_b menor o tempo de acomodação. Conforme Trumper et al. (1997), o sistema de controle auxiliar deve ter alta largura de banda.

Em um sistema de segunda ordem, a equação característica pode ser escrita como uma

função da frequência natural ω_n e da razão de amortecimento ζ , dada pela equação:

$$Q(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (76)$$

O parâmetro ζ é a razão entre o decaimento exponencial dos modos característicos da planta e a frequência natural desta. O produto $\zeta\omega_n$ é proporcional à magnitude da parte real do pólo. Assim, é possível estimar o tempo de acomodação de um estado através do produto $\zeta\omega$. Nise (2013) propõe que o tempo de acomodação t_a é aproximadamente igual a quatro constantes de tempo ($t_a = 4/\zeta\omega_n$).

A planta $G(s) = G_{vi}(s)H_f(s)$ é internamente estável e de segunda ordem. Controladores digitais de segunda ordem são capazes de emular o comportamento de controladores analógicos PID. Entretanto, não é possível projetar um controlador digital de segunda ordem através da alocação de polos para a transformada Z da planta $G(s)$. Se um processo possui ordem n_m e atraso de resposta da ordem de n_d períodos de amostragem, só é possível projetar um controlador digital de segunda ordem se a condição $n_m = 1 - n_d$ for satisfeita (ISERMANN, 1997). Este não é o caso do modelo $G(s)$. Portanto, o controlador digital será obtido através da discretização de um controlador PID analógico.

O controle PID insere um polo a mais no sistema, de modo que este se torna de terceira ordem. Entretanto, é possível projetar este sistema para que a componente de um dos polos no sinal de saída seja desprezível. Adotando o critério das cinco constantes de tempo (NISE, 2013), serão alocados dois polos complexos $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e um polo real $s_3 = -5\zeta\omega_n$. Isto resulta na seguinte equação característica em malha fechada:

$$\begin{aligned} Q(s) &= (s + 5\zeta\omega_n)(s + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}) \\ &= s^3 + 7\zeta\omega_n s^2 + (1 + 10\zeta^2)\omega_n^2 s + 5\zeta\omega_n^3 \end{aligned} \quad (77)$$

Como requisitos de projeto, serão utilizados o tempo de acomodação $t_a = 10,0$ ms e frequência de corte $f_b = \omega_b/2\pi$ igual a 100,0 Hz. Estes requisitos são satisfeitos por $\zeta = 0,62781$ e $\omega_n = 637,14$ rad/s para um sistema de segunda ordem com equação característica dada pela Equação 76. A largura de banda do filtro $H_f(s)$ deve ser igual a largura de banda do sistema em malha fechada. Portanto τ_f deve ser $1,5915 \times 10^{-3}$ s. A equação característica em malha fechada da planta $G(s)$ com o controlador PID proposto na Equação 39 é dada a seguir.

$$Q(s) = s^3 + \frac{L(x_e) + \tau_f R + K_p T_d}{\tau_f L(x_e)} s^2 + \frac{R + K_p}{\tau_f L(x_e)} s + \frac{K_p}{\tau_f T_i L(x_e)} \quad (78)$$

Igualando a Equação 78 à Equação 77, o projeto do controlador fornece o ganho $K_p = 196,43$, o tempo integral $T_i = 2,4644 \times 10^{-3}$ s e o tempo derivativo $T_d = 1,0813 \times 10^{-3}$ s.

O limite de Nyquist para a frequência de amostragem f_0 do sistema auxiliar é 200,0 Hz. Nas figuras 18-20 são mostrados os resultados das simulações do sistema em malha fechada com frequências de amostragem de 1,0, 2,0 e 4,0 kHz. Conforme Isermann (1997), normalmente a frequência de amostragem é utilizada como sendo uma ordem superior ao limite de Nyquist. Além disso, Siciliano et al. (2009) e Trumper et al. (1997) citam que a linearização por realimentação necessita de períodos de amostragem na ordem de milissegundos para fornecer bons resultados.

O controlador PID analógico foi discretizado de três maneiras diferentes. A Discretização 1 partiu da aproximação do controlador analógico pela Equação 41, resultando em um algoritmo de controle não-recursivo. As discretizações 2 e 3 foram realizadas através do cálculo dos ganhos do controlador digital pelas equações 43-45 e 48-53, respectivamente. Ambas fornecem algoritmos de controle recursivos.

Enquanto a Discretização 2 aproxima o termo derivativo por uma diferença de primeira ordem e o termo integral por uma integração retangular, a Discretização 3 é dada pela transformada Z do controlador analógico com termo derivativo atrasado. Quando a frequência de amostragem é baixa a discretização deve ser feita pelo segundo método. Entretanto, este não é o caso nesse trabalho. Logo, o desempenho de controle irá desempenhar um papel mais fundamental na análise dos resultados.

As figuras 18-20 apresentam a corrente na bobina i e a corrente filtrada i_f para cada uma das frequências de amostragem (especificadas nos títulos). O deslocamento x foi simulado da mesma maneira que na simulação em malha aberta e o sinal de referência i_{ref} foi um degrau unitário para todas as simulações.

É possível observar que apenas os algoritmos de controle 1 e 2 convergiram para o equilíbrio estável. Com frequência de amostragem $f_0 = 1,0$ kHz, todos os sistemas de controle apresentaram oscilação em torno do valor de referência. Entretanto, o algoritmo derivado da Discretização 3 tornou o sistema instável para $f_0 = 2,0$ e 4,0 kHz. Um motivo plausível para a instabilidade é levantado por Isermann (1997). Segundo este, sistemas de ordem elevada amostrados à altas frequências resultam em plantas de transferência discretas com zeros instáveis. Entretanto, avaliar esta hipótese é bastante trabalhoso, já que o sistema é de quarta ordem (devido ao polo do controlador e ao polo do elemento retentor).

O algoritmo de controle 1 apresentou erro em estado estacionário para $f_0 = 2,0$ e 4,0 kHz. Apenas o algoritmo de controle 2 foi capaz de realizar o seguimento de referência. Não foi possível relacionar o desempenho inferior do algoritmo 1 com algum fenômeno descrito na literatura ou com alguma hipótese adicional.

Os desempenhos das diferentes discretizações do controlador analógico podem ser comparados através de uma métrica do sinal de erro $e_i(t) = i_{ref}(t) - i(t)$. Lathi (2007) propõe

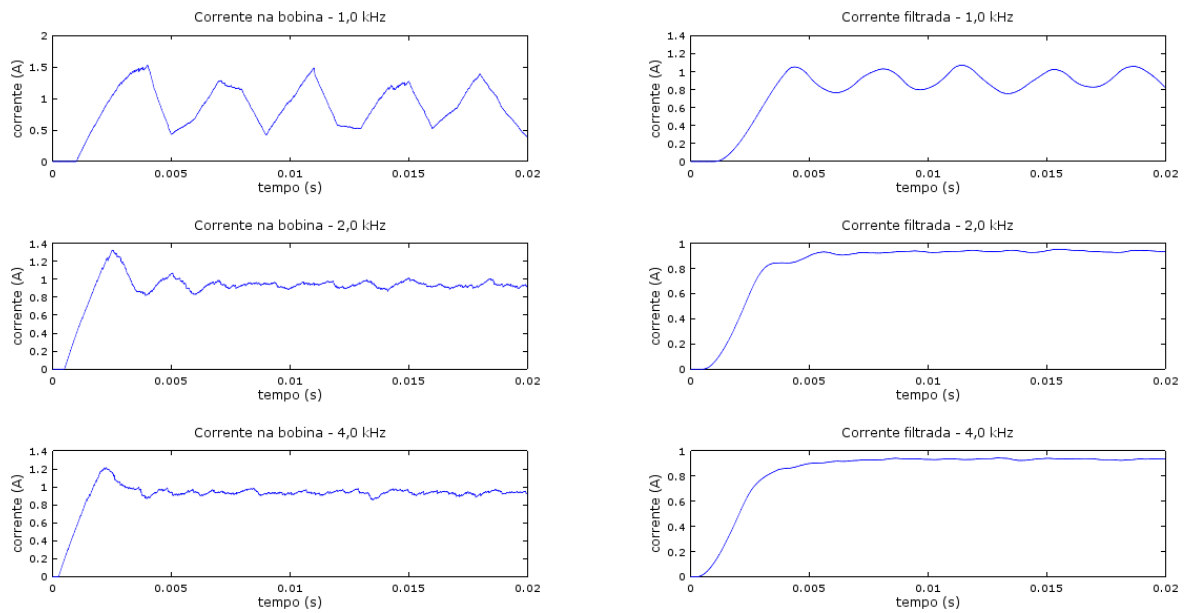


Figura 18: Sistema de controle auxiliar - Discretização 1 (Autor, 2018).

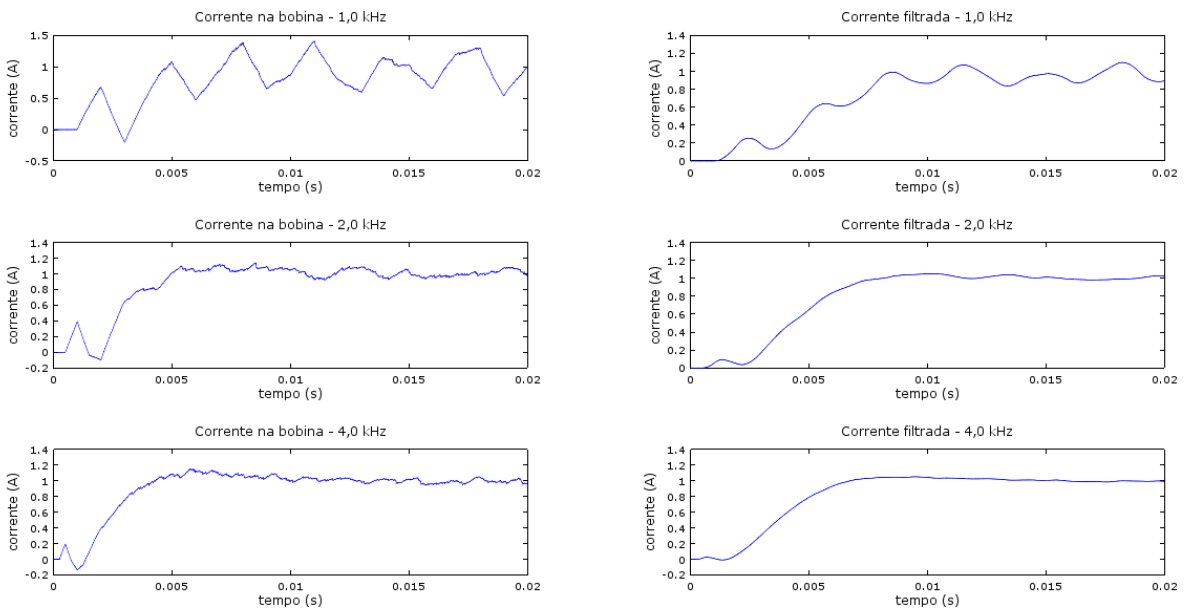


Figura 19: Sistema de controle auxiliar - Discretização 2 (Autor, 2018).

métricas denominadas energia e potência do sinal. Estas levam em conta a amplitude e a duração deste. A energia do sinal pode ser definida como a área abaixo do quadrado de seu

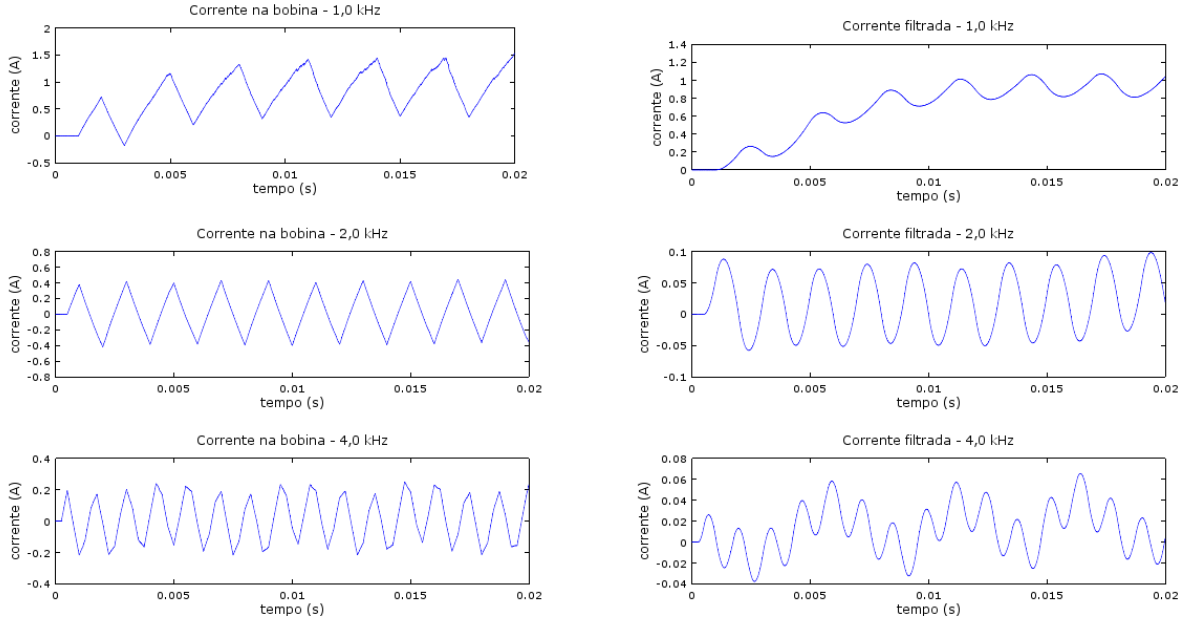


Figura 20: Sistema de controle auxiliar - Discretização 3 (Autor, 2018).

perfil. Para o sinal de erro $e_i(t)$, temos:

$$E_{e_i} = \int_{-\infty}^{+\infty} e_i^2(t) dt \quad (79)$$

A energia do sinal deve ser finita para ser uma medida significativa. É necessário que a amplitude se anule quando $t \rightarrow \infty$ para que a energia do sinal E_{e_i} seja finita. Este não é o caso do sinal $e_i(t)$, devido a perturbação causada pelo modo eletromecânico. Quando a energia do sinal é infinita a potência do sinal é uma métrica mais adequada. Uma medida da potência P_{e_i} do sinal $e_i(t)$ é proposta na equação abaixo.

$$P_{e_i} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} e_i^2(t) dt \quad (80)$$

De acordo com Lathi (2007), a potência do sinal converge para um valor final caso o sinal seja periódico ou se possuir regularidade estatística. É possível supor que o caso do sinal $e_i(t)$ é o segundo, já que a perturbação causada pelo modo eletromecânico é determinística.

A potência do sinal $e_i(t)$ (em ampères quadrados por segundo) para cada uma das discretizações e suas respectivas frequências de amostragem (em quilohertz) pode ser observada na Tabela 2. As discretizações 1 e 2 obtiveram desempenho semelhante. Embora existam pequenas divergências nas medidas de potência, estas são todas da mesma ordem. Para $f_0 =$

1,0 kHz a Discretização 3 obteve o melhor desempenho, embora este tenha sido comprometido nas duas simulações sucessivas. O desempenho não sofreu alterações para frequências de amostragem maiores do que 4,0 kHz.

Tabela 2: Potência do sinal $e_i(t)$

Discretização	Frequência de amostragem (kHz)	Potência do erro (A^2/s)
1	1,0	$1,1936 \times 10^{-1}$
	2,0	$1,4926 \times 10^{-2}$
	4,0	$1,2249 \times 10^{-2}$
2	1,0	$8,8591 \times 10^{-2}$
	2,0	$2,5237 \times 10^{-2}$
	4,0	$2,1117 \times 10^{-2}$
3	1,0	$1,2580 \times 10^{-2}$
	2,0	1,0466
	4,0	$9,8147 \times 10^{-1}$

Descartando a Discretização 3, a métrica do sinal de erro não indicou diferença entre a ação dos controladores. Logo, a escolha por um dos métodos será feita através de parâmetros qualitativos. Isermann (1997) diz que a forma recursiva é mais adequada para a implementação do algoritmo de controle através de computadores digitais. A Discretização 2 é proposta nesta forma e, além disso, foi capaz de estabelecer o seguimento de referência. É importante observar que, apesar disso, a potência do sinal de erro na Discretização 2 superou a potência do sinal de erro na Discretização 1 para $f_0 = 2,0$ e $4,0$ kHz. Entretanto, isto é devido ao transiente dos dois sinais. Para a Discretização 2 a corrente i apresenta um pico de sobressinal. Para intervalos de tempo maiores o algoritmo de controle obtido através da Discretização 2 tende a apresentar menor métrica do sinal de erro.

Para analisar os efeitos do controle digital sobre a perturbação, o conteúdo espectral desta foi levantado através da transformada de Fourier da diferença entre os valores instantâneos e médios das correntes i e i_f . A análise presente na Figura 21 condiz apenas ao regime permanente do sistema auxiliar com o algoritmo da Discretização 2 e frequência de amostragem de 2,0 kHz. Como é possível observar, em malha fechada o conteúdo da perturbação é amplificado para frequências menores do que 500,0 Hz e permanece inalterado para frequências superiores a esta. Não há uma banda em que a perturbação seja atenuada. O conteúdo espectral da corrente filtrada é atenuado em 20,0 dB/década de acordo com o projeto do filtro anti-aliasing.

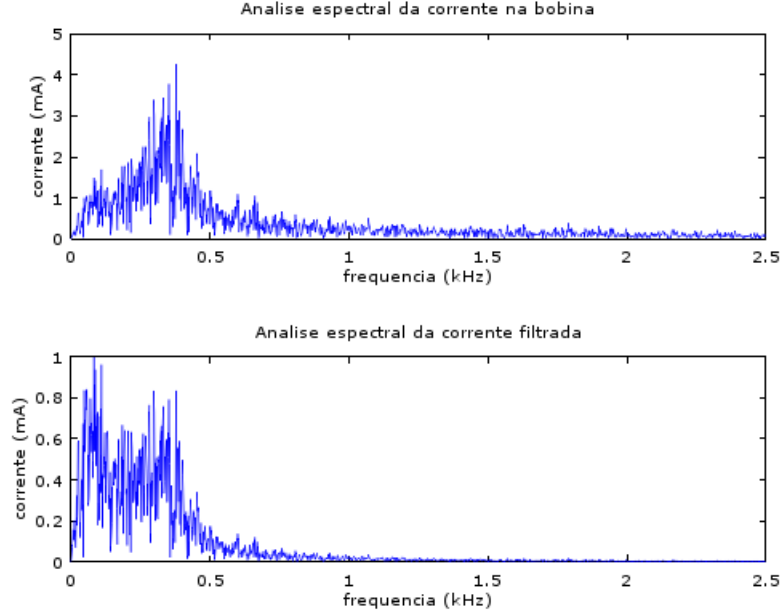


Figura 21: Conteúdo espectral da corrente em malha fechada (Autor, 2018).

3.2.2 Sistema de controle principal

O sistema de controle principal regula efetivamente a posição da esfera. Se o seguimento de referência está ocorrendo adequadamente para o estado elétrico, o processo auxiliar pode ser assumido como um ganho unitário.

A relação entre o estado elétrico i e o estado mecânico x é dada pelas equações 57 e 58. A linearização por realimentação do estado não-linear torna o sinal de saída da planta linear e desacoplado em relação a um sinal interno desta. Pelo método proposto por Trumper et al. (1997) este sinal é a aceleração u , causada pela força magnética f_{mag} . A expressão para a compensação não-linear foi apresentada na Equação 36 e o diagrama esquemático da planta linearizada foi apresentado na Figura 9.

Conforme Hanson e Seborg (1997), quando a linearização por realimentação é feita na presença de perturbações, é necessário avaliar o desacoplamento desta. As condições para que o sinal de saída x não seja afetado pelas perturbações foram levantadas na seção de Modelagem da suspensão magnética. Para prosseguir com a análise, a planta deve ser escrita na forma canônica de controlabilidade:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underline{f}(\vec{x}) + \underline{g}(\vec{x})u + \underline{p}(\vec{x})d \quad (81)$$

$$y = \underline{h}(\vec{x}) \quad (82)$$

com

$$\underline{\vec{x}} = \begin{bmatrix} x & c \end{bmatrix}^t \quad (83)$$

$$\underline{\vec{f}}(\underline{\vec{x}}) = \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix}^t \quad (84)$$

$$\underline{\vec{g}}(\underline{\vec{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t \quad (85)$$

$$\underline{\vec{p}}(\underline{\vec{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^t \quad (86)$$

$$\underline{h}(\underline{\vec{x}}) = x \quad (87)$$

$$d = g - \frac{f_d + f_e}{m} \quad (88)$$

Como a função vetorial $\underline{\vec{g}}(\underline{\vec{x}})$ possui dimensão dois é necessário que o grau relativo de d seja maior ou igual a dois. As derivadas de Lie propostas no problema de desacoplamento da perturbação foram calculadas nas equações 89 e 90 para $\underline{\vec{x}}_0$ genérico.

$$L_p L_f^0 \underline{h}(\underline{\vec{x}}) = L_p \underline{h}(\underline{\vec{x}}) = 0 \quad (89)$$

$$L_p L_f \underline{h}(\underline{\vec{x}}_0) = L_p(c)_{\underline{\vec{x}}=\underline{\vec{x}}_0} = 1 \quad (90)$$

Os resultados demonstram que o grau relativo da perturbação é maior ou igual a dois.

Como o grau relativo do sinal de perturbação d é maior ou igual ao grau relativo do sinal de entrada u , a Equação 36 pode ser utilizada para linearizar a planta por realimentação. A Equação 90 demonstra que isso é verdade para qualquer estado de equilíbrio. Embora isto prove que o sinal de saída é mais afetado pelo sinal de entrada manipulado do que pela perturbação, ainda é necessário investigar os efeitos da perturbação sobre a amostragem. Para isso, é necessário investigar o espectro da perturbação com base nos modelos apresentados na seção de Modelagem da Suspensão Eletromagnética. Como o peso da esfera e a força de empuxo são constantes, apenas a força de arrasto precisa ser investigada.

Não é tão simples obter um modelo linearizado da perturbação causada pela força de arrasto. Embora esta seja determinística, de acordo com Morrison (2013) a contribuição do atrito viscoso e da pressão do escoamento variam de acordo com o número de Reynolds R_e . Para valores pequenos de R_e a força é proporcional a velocidade, de acordo com a lei de Stokes. Entretanto, para valores mais elevados do número de Reynolds R_e o coeficiente de arrasto C_d é dado por fórmulas empíricas bastante complicadas. Estas fórmulas empíricas são funções do número de Reynolds, e por consequência da velocidade c . Assim, aplicando a linearização Jacobiana à força de arrasto, os primeiros termos da respectiva série de Taylor são proporcionais a velocidade da esfera. É possível assumir que a perturbação terá o mesmo

conteúdo espectral que o estado mecânico x .

Embora a largura de banda do estado mecânico x varie de acordo com o número de Reynolds R_e , é possível demonstrar que esta é limitada. Assumindo que o valor de R_e é suficientemente pequeno, é possível reescrever as equações 57 e 58 com a força de arrasto dada pela lei de Stokes:

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (91)$$

$$\frac{dc}{dt} = g + u - \frac{3\pi\eta D}{m}c - \frac{f_e}{m} \quad (92)$$

Substituindo a Equação 91 na Equação 92 e linearizando o modelo como um modelo de pequenos sinais, obtemos:

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} = \delta u - \frac{3\pi\eta D}{m} \frac{d\delta x}{dt} \quad (93)$$

A função de transferência do modelo linearizado é dada na Equação 94.

$$\frac{\Delta X(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1}{s(s + \frac{3\pi\eta D}{m})} = \frac{1}{s(s + 9,8368 \times 10^{-4})} \quad (94)$$

O sistema possui um polo na origem e um polo em $s = -9,8368 \times 10^{-4}$ rad/s. Cada um dos polos contribui com a atenuação do estado mecânico em 20 dB/década. Enquanto o polo na origem contribui para a atenuação em todas as faixas de frequência, o outro polo contribui com a atenuação a partir de $1,5660 \times 10^{-4}$ Hz. A partir desta frequência de corte o sinal passa a ser atenuado 40 dB/década. A Figura 22 mostra o diagrama de Bode o modelo linearizado. A linearização da planta para valores maiores de R_e tornariam o polo estável mais distante da origem. Isto deslocaria a frequência de corte para faixas mais elevadas.

O controlador principal será projetado com base no modelo $G(s) = 1/s^2$. A princípio, não serão consideradas perturbações adicionais. Assim, o sistema não incluirá um filtro anti-aliasing. Embora sinais estocásticos, como ruídos brancos, possam comprometer a amostragem, neste caso serão consideradas apenas perturbações determinísticas.

A planta possui dois polos na origem e seu modelo não inclui atrasos de tempo. Logo, não é possível projetar o controlador digital através da alocação de polos (ISERMANN, 1997). O controlador será projetado no domínio contínuo e então será discretizado. Desconsiderando as perturbações, através do controle proporcional-derivativo (PD) é possível realizar o controle de posição com erro em estado estacionário nulo.

O controlador PD introduz um zero no sistema em malha fechada, mantendo a sua ordem. Ele é descrito pela Equação 95.

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s) = K_p + K_d s \quad (95)$$

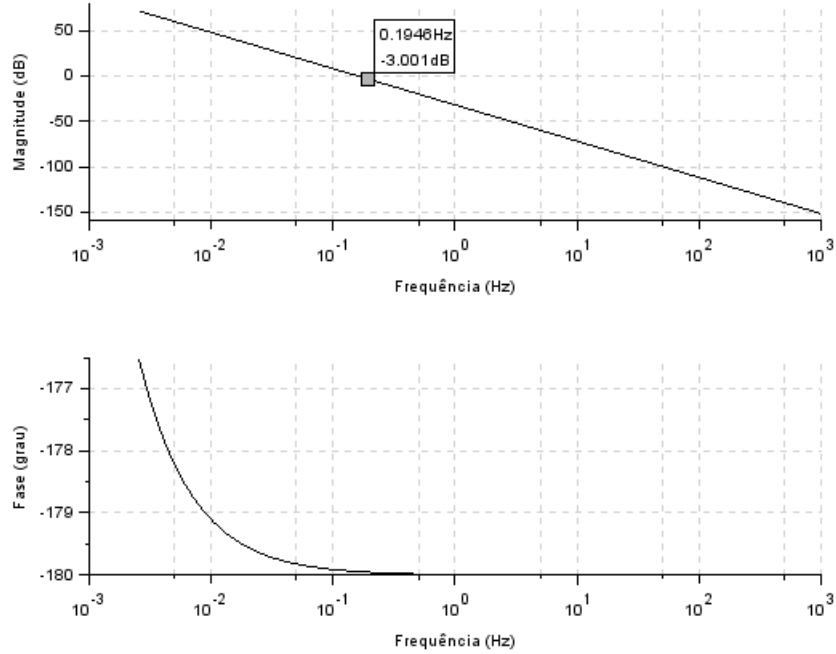


Figura 22: Diagrama de bode do modelo linearizado (Autor, 2018).

A equação característica em malha fechada é:

$$Q(s) = s^2 + K_d s + K_p \quad (96)$$

Os parâmetros da Equação 96 podem ser facilmente ajustados para que o sistema em malha fechada apresente coeficiente de amortecimento ζ e frequência natural ω_n desejados. A solução é dada pelas equações 97 e 98.

$$K_d = 2\zeta\omega \quad (97)$$

$$K_p = \omega_n^2 \quad (98)$$

Entretanto, é importante lembrar que o zero do controlador altera a amplitude do sinal de saída. Assim, o coeficiente de amortecimento calculado através da Equação 97 não pode ser usada para projetar o percentual de sobressinal na resposta ao degrau.

O tempo de acomodação do sistema de controle principal deve ser projetado para que os modos característicos do sistema de controle auxiliar tenham contribuição desprezível na amplitude do sinal de saída em regime transiente. Adotando novamente o critério das cinco constante de tempo, será definido como requisito de projeto o tempo de acomodação $t_a = 50,0$ ms. Em adição a isso, será definido o percentual de sobressinal de 3,0 %. Em termos da razão de amortecimento ζ e a frequência natural ω_n temos 0,74880 e 107,41 rad/s. O ganho

do controlador PD é $K_p = 11536,9$ e o período de derivação é $T_d = 1,3868 \times 10^{-2}$ s.

Como será mostrado adiante, o desempenho do sistema de controle principal é comprometido por perfis de referência descontínuos. Por isso, as simulações foram realizadas com perfis de referência com deslocamento, velocidade e aceleração contínuos. Estes perfis foram gerados por processos passa-baixas de primeira ordem. A constante de tempo destes processos foi escolhida convenientemente para realizar o cancelamento parcial ou total dos zeros do controlador. Assim, para o controle PD, esta foi igual a T_d .

Antes de discretizar o controlador PD, os efeitos do sistema de controle auxiliar sobre a linearização por realimentação foram investigados. A compensação não-linear imperfeita faz com que o comportamento da planta se distancie do comportamento de um integrador duplo ideal. Ela é ocasionada, no controle digital, pelos atrasos de tempo entre as amostragens. No presente trabalho a frequência de amostragem da corrente i_f é um parâmetro crítico do modelo, pois é necessário que o tempo de acomodação do estado elétrico i seja rápido o suficiente.

A resposta do sistema a um determinado perfil de referência pode ser visualizada na Figura 23. Este perfil de referência para o deslocamento foi obtido através da filtragem de um sinal do tipo degrau. Nesta simulação, a sinal de referência i_{ref} (analógico) foi amostrado. Os sinais de referência são mostrados à esquerda e as variáveis de estado à direita. A corrente filtrada i_f foi amostrada com frequência $f_0 = 2,0$ kHz. Durante os primeiros instantes de simulação o sinal de controle u é saturado, já que não é possível acelerar a esfera para longe do eletroímã. Isto faz com que o sinal de referência $i_{ref}(t)$ seja não-nulo apenas a partir do instante em que o erro $e_x(t) = x_{ref}(t) - x(t)$ é pequeno o suficiente. Este intervalo entre a aplicação de $x_{ref}(t)$ e a aplicação de $i_{ref}(t)$ ocorre sempre que o incremento de $x_{ref}(t)$ é positivo.

A Figura 24 demonstra a resposta ao mesmo perfil de referência para o deslocamento, com frequência de amostragem $f_0 = 1,0$ kHz. Para esta frequência o fenômeno da compensação não-linear imperfeita ocorre em maior grau. Ele é causado pelo baixo desempenho do sistema de controle auxiliar e gera uma componente de alta frequência e baixa amplitude no estado mecânico. Embora não seja possível observá-la no sinal $x(t)$, é possível observá-la no sinal $c(t)$.

É útil avaliar a perturbação observada na Figura 24 em função da velocidade c da esfera. Esta escolha é motivada pelo fato das perturbações modeladas nas equações 58 e 59 serem proporcionais a velocidade ou a uma função potencial desta. O perfil de velocidade referente à simulação anterior é apresentado na Figura 25.

A transformada de Fourier do sinal velocidade $c(t)$ em regime permanente, na Figura 26, revela que o conteúdo espectral desta perturbação extrapola a largura de banda do sistema de

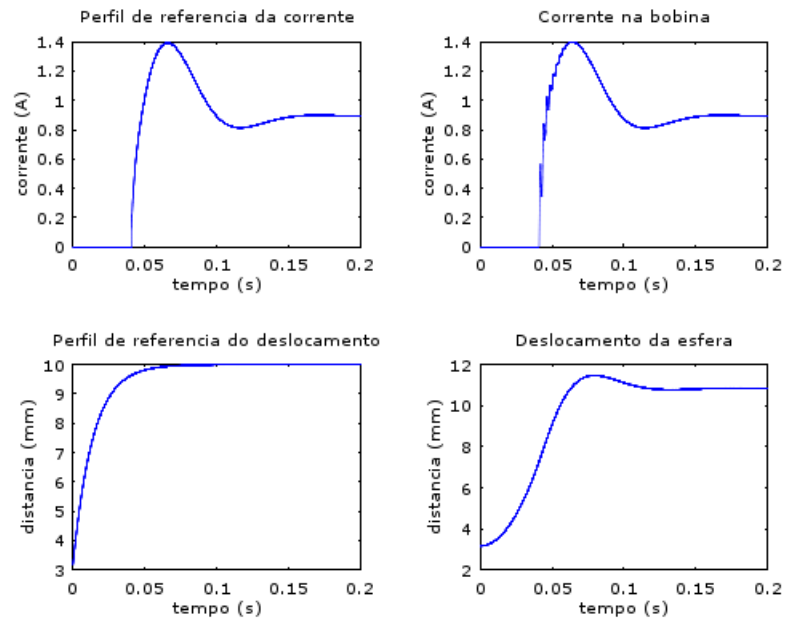


Figura 23: Estudos dos efeitos da frequência de amostragem ($f_0 = 2.0$ kHz) (Autor, 2018).

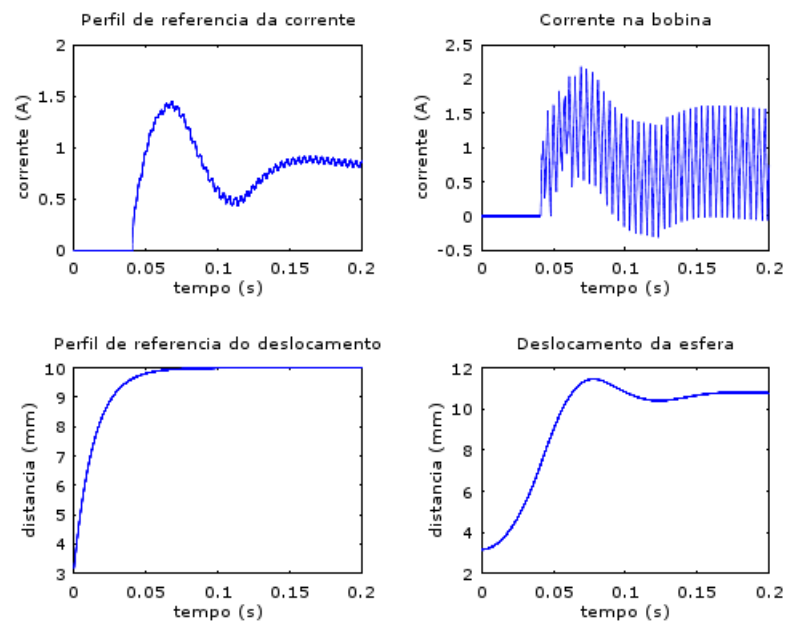


Figura 24: Estudos dos efeitos da frequência de amostragem ($f_0 = 1.0$ kHz) (Autor, 2018).

controle auxiliar. Este é composto pelo conteúdo harmônico de uma componente fundamental de 250,0 Hz.

Tanto na Figura 23 quanto na Figura 24, o sinal $x(t)$ apresentou erro em estado esta-

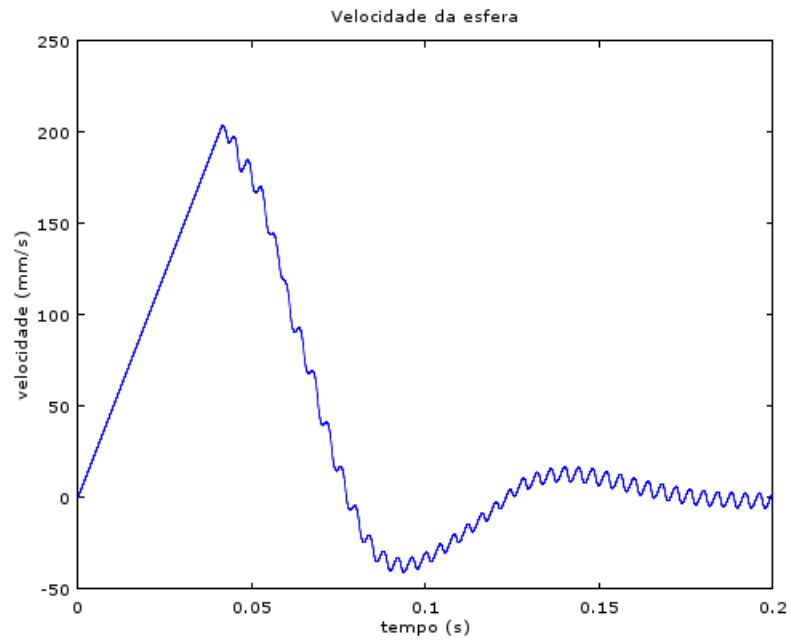


Figura 25: Velocidade $c(t)$ (Autor, 2018).

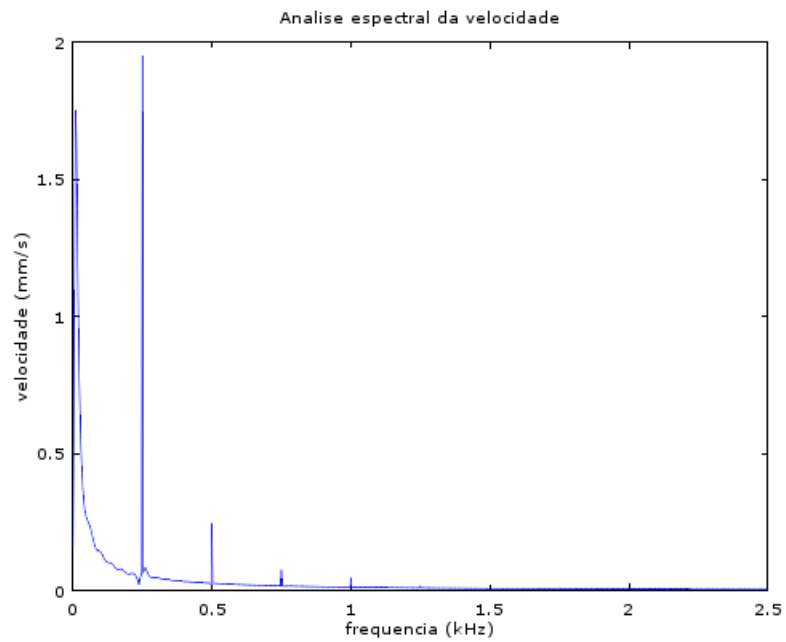


Figura 26: Espectro do sinal $c(t)$ (Autor, 2018).

cionário. Embora isto seja menos visível na Figura 24, nesta o deslocamento oscila em torno de uma posição inferior a referência. Isto ocorre porque os sinais de perturbação são sinais de aceleração. Dois polos na origem do plano s garantem erro nulo em estado estacionário

apenas para a posição e para velocidade.

A teoria de controle digital empregada neste trabalho é baseado na aproximação de sinais amostrados por sinais de tempo discreto. Isermann (1997) cita que a sincronia entre a amostragem do sinal de saída e do sinal de entrada e uma malha de controle é condição necessária para que essa aproximação seja válida. Portanto, embora a largura de banda do sistema de controle principal seja $f_b = 16,160$ Hz, é preciso amostrar o estado mecânico x com a mesma frequência que o estado elétrico i . Isto é motivado pela linearização por realimentação do estado não-linear. O sinal de referência $i_{ref}(t)$ é proporcional ao sinal $x(t)$, conforme a Equação 36.

Uma vez que a frequência de amostragem f_0 será bem maior que a largura de banda f_b do subprocesso principal, o controlador pode ser discretizado através das equações 43-45.

O controle digital foi simulado para as frequências de amostragem $f_0 = 1,0, 2,0$ e $4,0$ kHz. No primeiro caso o sistema não apresentou comportamento estável e nos dois últimos a esfera se estabilizou com erro considerável em estado estacionário. É possível visualizar o resultado da simulação (com $f_0 = 2,0$ kHz) na Figura 27. Assim, é necessário incluir uma ação de controle integral ao controlador, tornando-o PID.

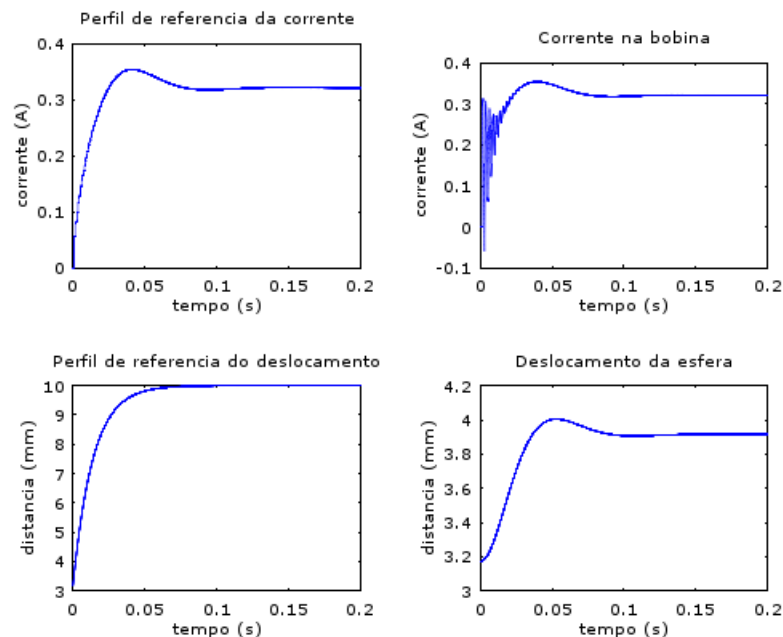


Figura 27: Simulação do controle PD discretizado (Autor, 2018).

O controle PID aumenta a ordem do sistema em malha fechada. Neste caso, não é possível projetar o controlador para que um dos modos característicos seja desprezível. Os polos do subprocesso principal devem estar pelo menos cinco vezes mais distantes do eixo

imaginário que os pólos do subprocesso auxiliar. Isto tornaria a largura de banda do sistema extremamente reduzida, resultando em um tempo de acomodação longo. Neste trabalho, o controlador será ajustado para que todos os modos característicos em malha fechada sejam igualmente dominantes.

Serão alocados dois polos complexos $s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$ e um polo real $s_3 = -\sigma$. A equação característica $Q(s)$ corresponde a esta alocação.

$$Q(s) = (s + \sigma)(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d) = s^3 + 3\sigma s^2 + (3\sigma^2 + \omega_d^2)s + \sigma^3 + \sigma\omega_d^2 \quad (99)$$

O controlador PID a ser ajustado é proposto na Equação 100. Esta forma foi escolhida para que o parâmetro ω_d possa ser ajustado pela variação posição dos zeros.

$$G_c(s) = K \frac{(s + a)^2}{s} \quad (100)$$

A equação característica $Q(s)$ é reescrita a seguir em função dos parâmetros da planta e do controlador.

$$Q(s) = s^3 + Ks^2 + 2aKs + a^2K \quad (101)$$

Os parâmetros $K = 120$ e $a = 63.095$ rad/s tornam o tempo de acomodação do sistema principal dez vezes mais lento que o tempo de acomodação do sistema auxiliar. Optou-se por tornar a diferença entre os dois sistemas maior do que cinco constantes de tempo para mitigar problemas causados pela compensação não-linear imperfeita. Nos parâmetros da Equação 39, o controlador analógico é caracterizado por $K_p = 4,77772 \times 10^8$, $T_i = 3,1698 \times 10^{-2}$ s e $T_d = 7,9246 \times 10^{-3}$ s.

Para o controle PID também foram utilizados perfis de referência com deslocamento, velocidade e aceleração contínuos. Para tanto, foi introduzida, na Equação 102, a função de transferência recíproca aos zeros do controlador analógico.

$$H_z(s) = \frac{1}{T_i T_d s^2 + T_i s + 1} \quad (102)$$

O modelo $H_z(s)$ possui largura de banda de 6,4520 Hz. Assim, o sinal de referência foi obtido através da aplicação de degraus a um processo passa-baixas de primeira ordem com constante de tempo de $2,4668 \times 10^{-2}$ s.

As figuras 28 e 29 mostram os resultados do controlador digital (discretizado através das equações 43-45) para as frequências de amostragem $f_0 = 1,0, 2,0$ e $4,0$ kHz. Na parte superior da Figura 28 é mostrado que $f_0 = 1,0$ kHz não é suficiente para garantir o seguimento da referência em $x(t)$. Isto é causado pela compensação não-linear imperfeita. Como é

possível observar, o sistema de controle principal só é prejudicado quando a a frequência de amostragem é insuficiente. Os resultados das simulações mostram que com $f_0 \geq 2,0$ kHz a compensação não-linear não é prejudicada.

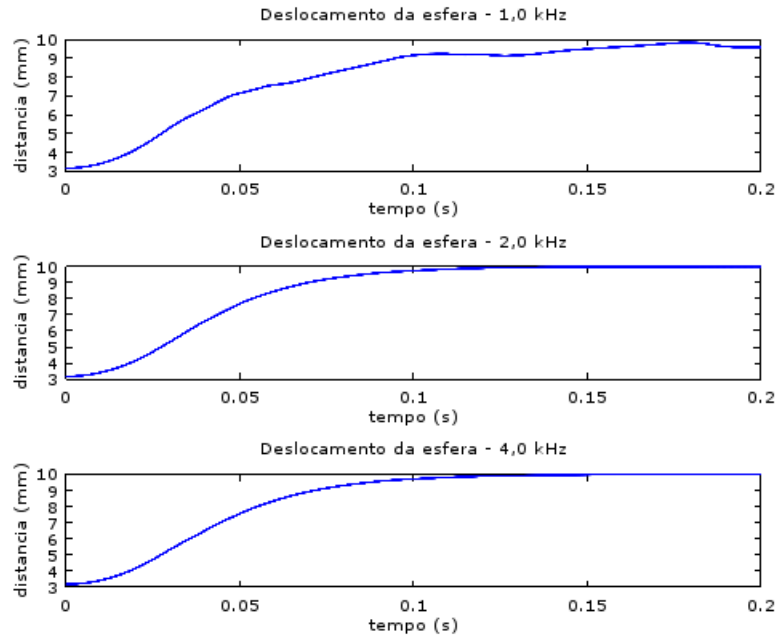


Figura 28: Posição da esfera $x(t)$ (Autor, 2018).

A inclusão da ação de controle integral eliminou o erro em estado estacionário e amplificou a perturbação causada pela compensação não-linear imperfeita no sistema de controle auxiliar. Na Figura 29 é possível observar que quanto menor a frequência de amostragem mais prejudicado é o seguimento de referência do estado elétrico. O conteúdo espectral do sinal velocidade $c(t)$ está traçado na Figura 30 para as frequências de amostragem $f_0 = 2,0$ e $4,0$ kHz. Em ambos os casos este extrapola a largura de banda do sistema de controle auxiliar. Na Análise espectral 1, correspondente à frequência de amostragem $f_0 = 2,0$ kHz o espectro é composto por uma componente fundamental em 500 Hz e componentes harmônicas desta. Na Análise espectral 2 o conteúdo possui mais componentes, sendo a maioria abaixo de 200 Hz. A amplitude máxima na Análise espectral 2 é duas vezes menor que a amplitude máxima na primeira análise.

Para resolver este problema, foi projetado um filtro passa-baixas para o sinal $x(t)$. A constante de tempo $\tau = 4,6052 \times 10^{-3}$ s do filtro corresponde a largura de banda do sistema de controle principal. As figuras 31 e 32 mostram os novos resultados após a repetição dos sinais de referência e das frequências de amostragem utilizados nas simulações anteriores.

Nas figuras 31 e 32 a perturbação causada pelas atrasos de amostragem não se sustenta,

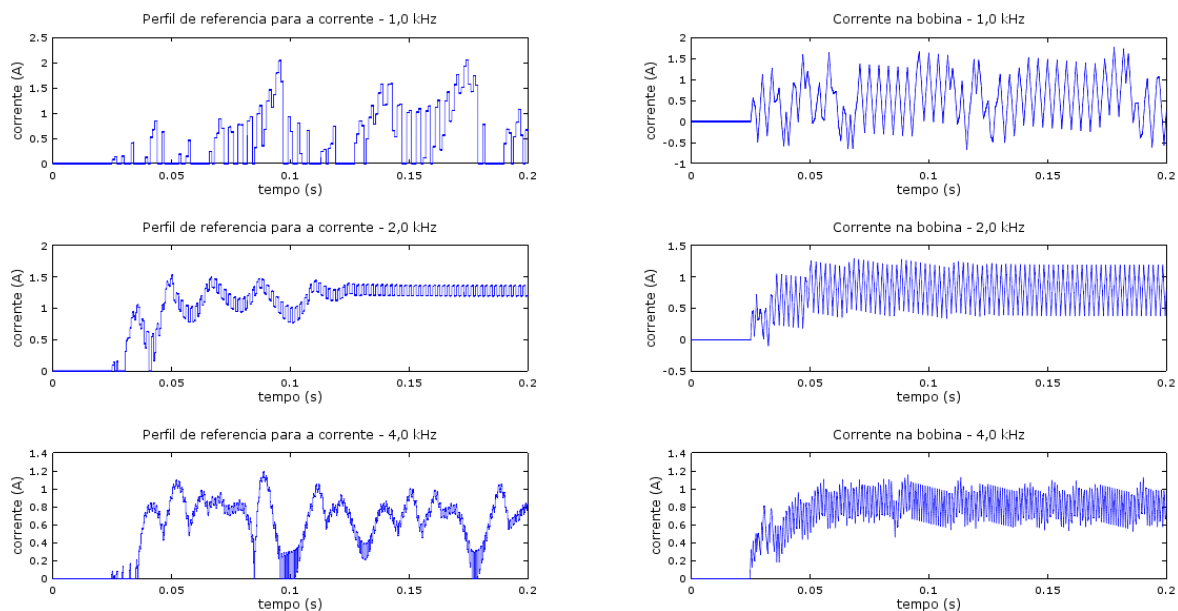


Figura 29: Corrente elétrica $i(t)$ (Autor, 2018).

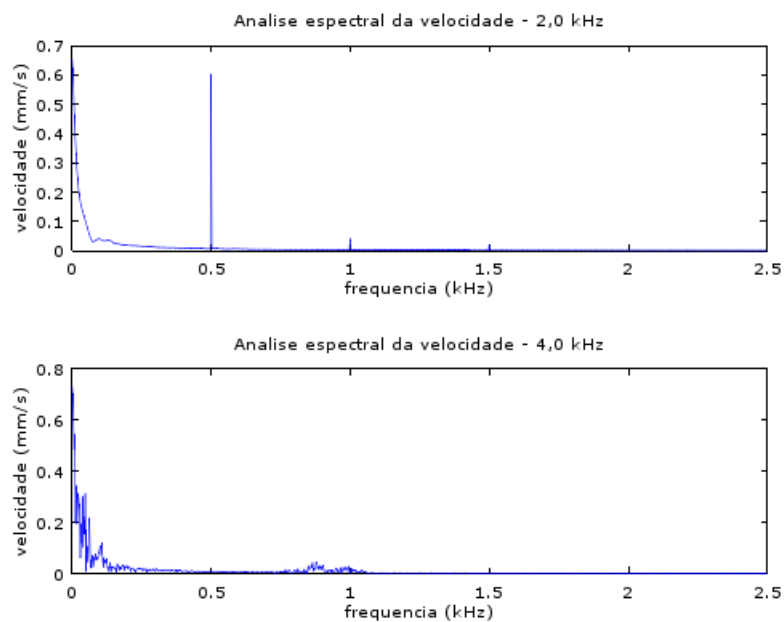


Figura 30: Espectros do sinal $c(t)$ (Autor, 2018).

já que a oscilação produzida pela compensação não-linear imperfeita não é realimentada. Desta forma, a velocidade c possui conteúdo espectral nulo em regime permanente.

Os efeitos da posição da esfera sobre a compensação não-linear amostrada foram investi-

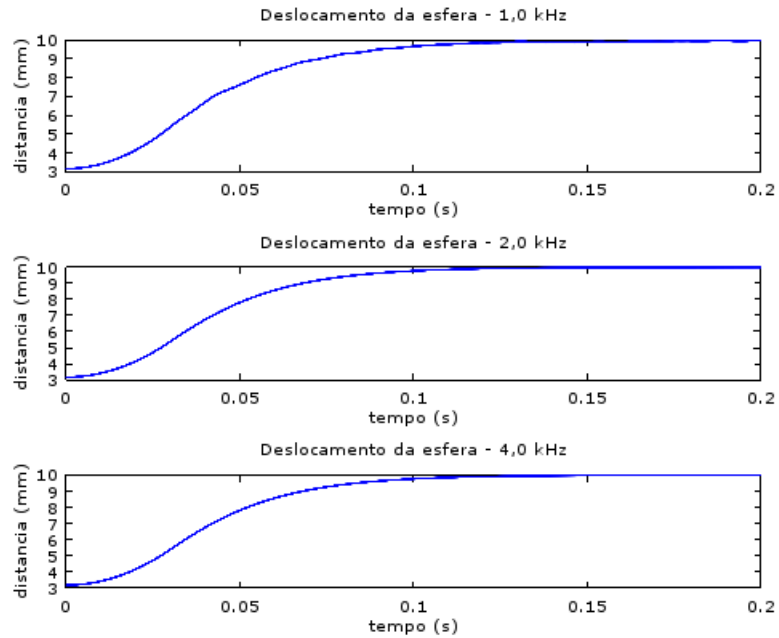


Figura 31: Posição da esfera $x(t)$ (Autor, 2018).

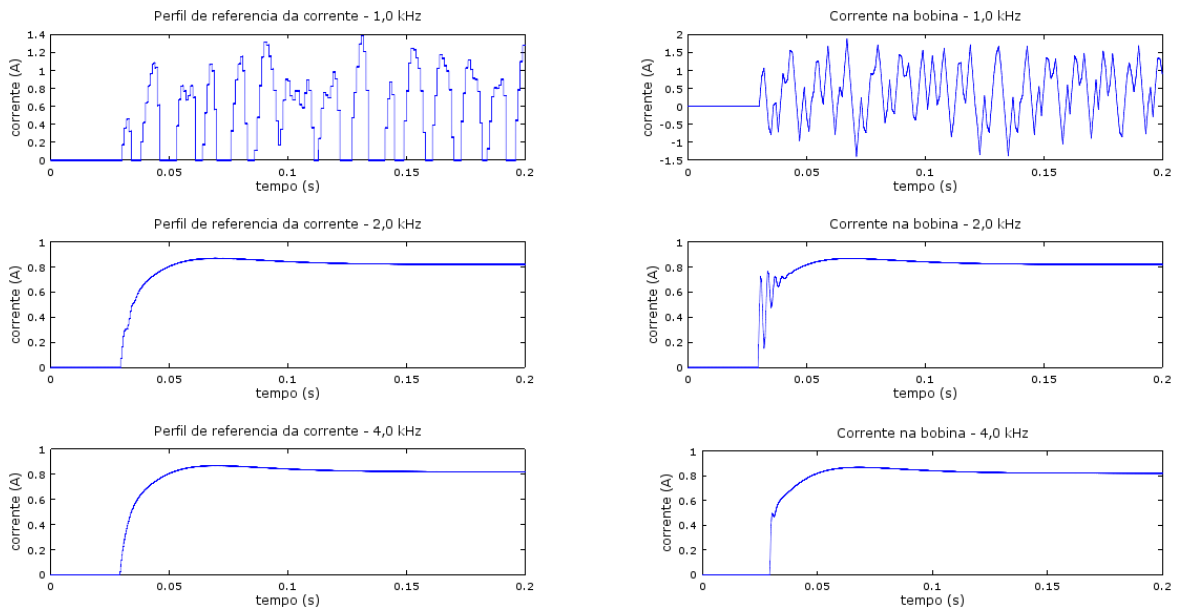


Figura 32: Corrente elétrica $i(t)$ (Autor, 2018).

gados. Novamente, isto foi feito para as frequências de amostragem $f_0 = 1,0, 2,0$ e $4,0$ kHz. Para as duas frequências mais altas o sistema apresentou características de suspensão estável em todas as faixas de operação. Já para $f_0 = 1,0$ kHz, o sistema é instável. Para valores mai-

ores do que $6,0 \times 10^{-3}$ m a esfera oscila em torno de uma posição menor do que a referência. A amplitude desta oscilação é maior conforme a esfera se afasta do eletroímã. Quando a referência é menor que $6,0 \times 10^{-3}$ m, a esfera se mantém adjacente a face do eletroímã.

O sistema foi simulado sob amostragem de $f_0 = 1.0$ kHz para referências de 6,0, 20,0, 30,0, 40,0, 50,0 e 60,0 mm. A oscilação do sinal $x(t)$ cresce de acordo com a posição da esfera até que esta é novamente desestabilizada. Os resultados estão disponíveis na Figura 33.

O limite superior para a faixa de operação é causado pela saturação da tensão v nos terminais da bobina. Aumentar a faixa de tensão aumenta a faixa de deslocamento estável. Entretanto, a equação de equilíbrio (Equação 60) não pode ser usada para estimar o limite necessário da faixa de tensão. As simulações do sistema mostraram que o limite superior de x é bem inferior ao que é dado pela solução de equilíbrio para um dado limite de tensão.

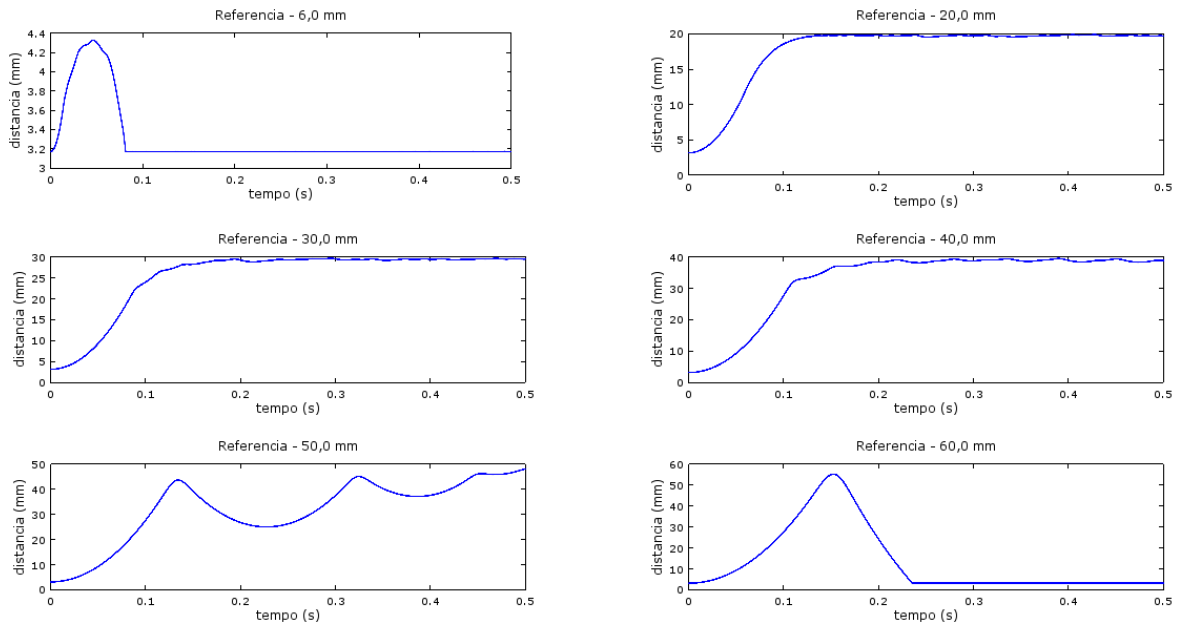


Figura 33: Faixas de operação da suspensão eletromagnética ($-50.0 < v < 50.0$ V) (Autor, 2018).

A Figura 34 apresenta os resultados da simulação com o dobro da capacidade de tensão. Em todos os casos o sinal $x(t)$ se tornou menos oscilatório e o erro $e_x(t)$ foi diminuído. As simulações foram realizadas para as mesmas posições de referência do conjunto de simulações anterior.

Por fim, o sistema foi simulado para um conjunto de três perfis de referência: uma onda quadrada, uma onda triangular e uma onda senoidal. Ambos os perfis possuem frequência de 2,0 Hz, amplitude de 5,0 mm e valor médio de 2,0 cm. Na Figura 35 são apresentados os

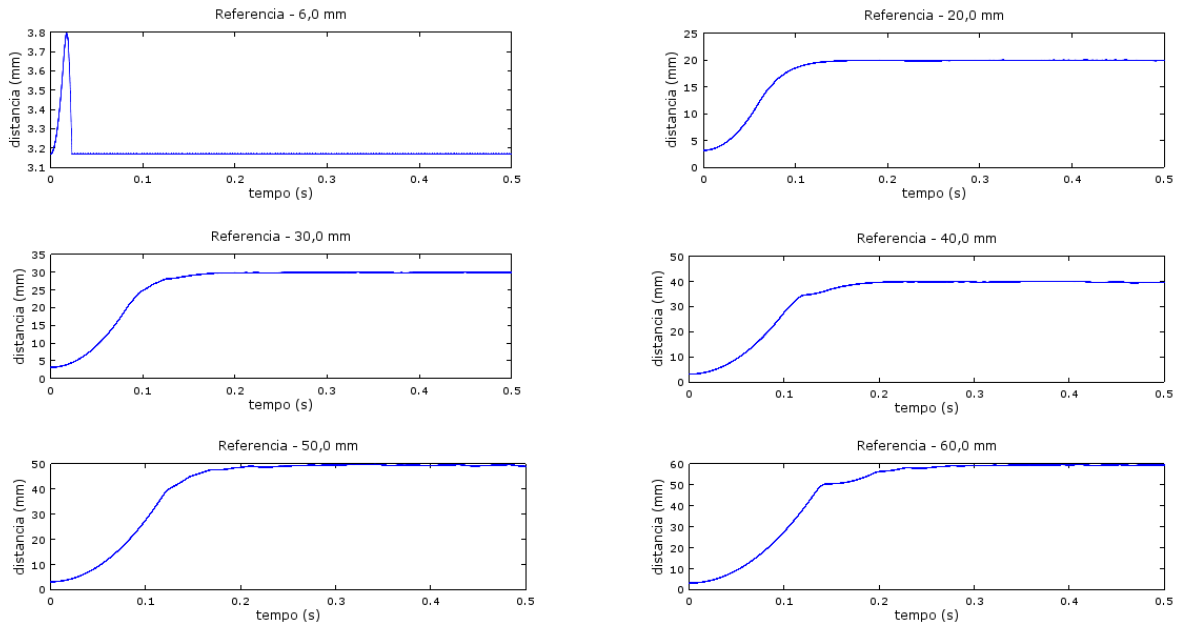


Figura 34: Faixas de operação da suspensão eletromagnética ($-100.0 < v < 100.0$ V) (Autor, 2018).

resultados para frequência de amostragem de 2,0 kHz.

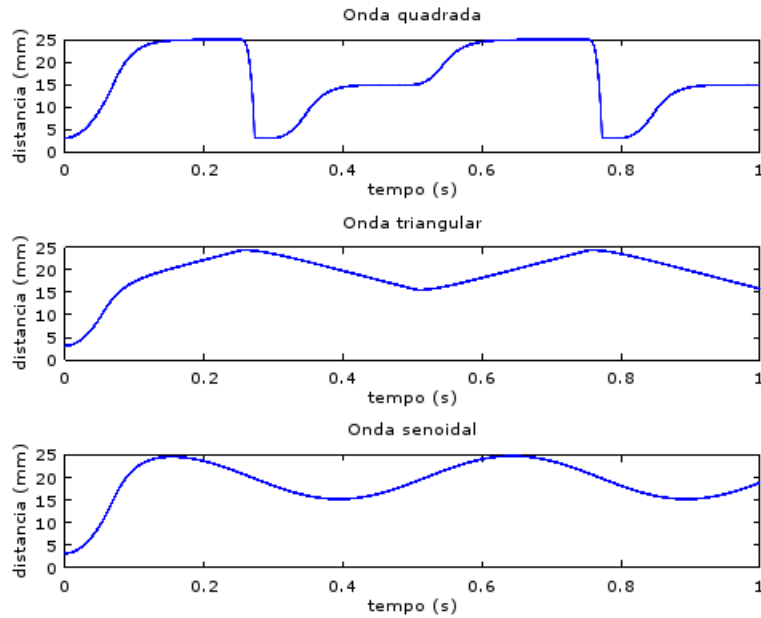


Figura 35: Resultados do sinal $x(t)$ (Autor, 2018).

Os três sinais de referência na Figura 35 foram escolhidos para avaliar o erro em regime

permanente para referências com velocidade e aceleração nulas, apenas aceleração nula e e velocidade e aceleração não-nulas. Nas figuras 36-38 são apresentados os resultados para os sinais $i(t)$, $f_d(t)$ e $e_a(t)$, respectivamente.

Os perfis dos sinais $f_d(t)$ e $e_a(t)$ revelam que estes sinais de perturbação são desprezíveis em malha fechada. O sinal $e_a(t)$, entretanto, pode apresentar valores instantâneos comparáveis a tensão de controle v . Isto é condicionado por descontinuidades dos sinais de referência para os estados mecânico e elétrico.

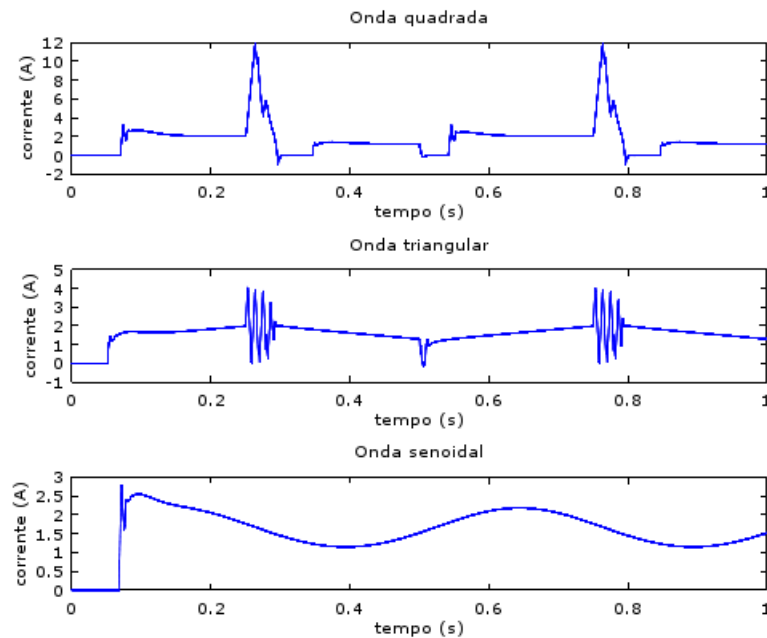


Figura 36: Resultados do sinal $i(t)$ (Autor, 2018).

O sistema de controle apresentou bom desempenho para o perfil de referência senoidal. Para os perfis de referência de onda quadrada e triangular a planta perdeu o equilíbrio em alguns instantes. Segundo a Equação 60, em equilíbrio o deslocamento da esfera e a corrente na bobina são proporcionais. Portanto, o seguimento de referência no sistema de controle principal faz com que o perfil da corrente na bobina seja igual ao perfil do deslocamento da esfera multiplicado por uma constante.

O equilíbrio proposto na Equação 60 é instável em malha aberta. Isto ocorre porque a alteração positiva da corrente i aumenta a força magnética f_{mag} , acelerando, em consequência, a esfera em direção ao eletroímã. O sistema de controle principal, em conjunto com a compensação não-linear, manipula a aceleração magnética u a fim de anular o erro em relação ao sinal de referência. Entretanto, a aceleração magnética u só pode assumir valores positivos. Devido a isso, perfis de referência descontínuos podem tornar a planta impossível de ser

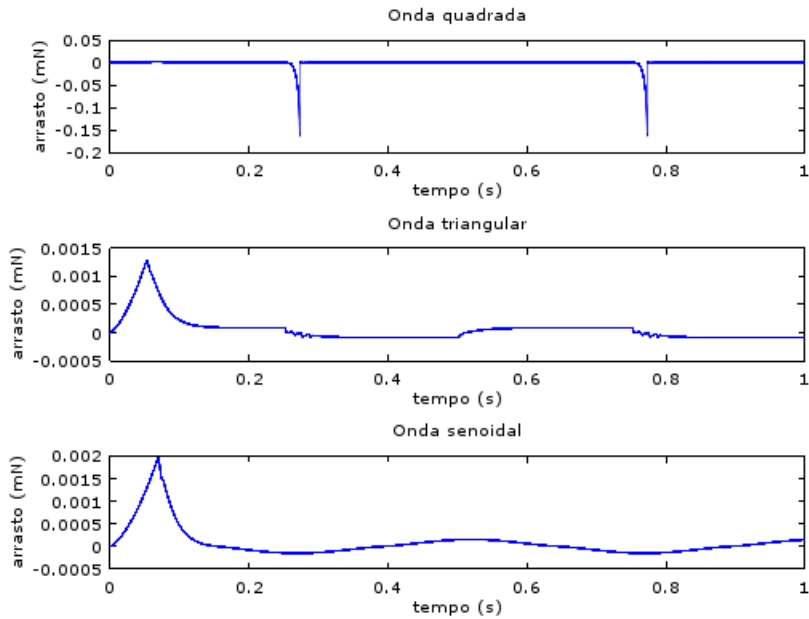


Figura 37: Resultados do sinal $f_d(t)$ (Autor, 2018).

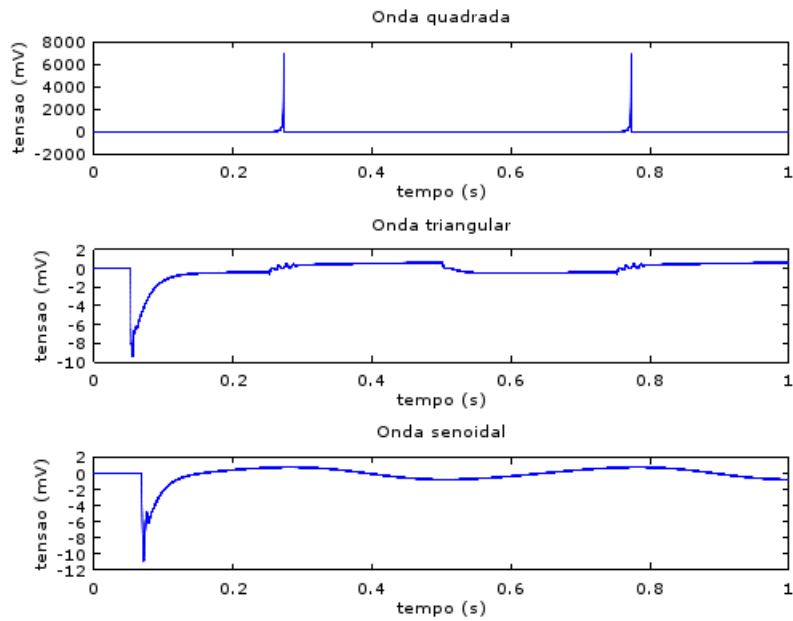


Figura 38: Resultados do sinal $e_a(t)$ (Autor, 2018).

controlada por alguns instantes ou indefinidamente.

Das três frequências de amostragem simuladas, só uma tornou a planta impossível de controlar por um período de tempo indefinido. A frequência de amostragem $f_0 = 1,0$ kHz

não foi suficiente para o seguimento de referência de onda quadrada. O decremento em degrau do sinal de referência também desestabilizou a posição da esfera para frequências de amostragem mais altas. Porém, a discretização do controlador auxiliar para $f_0 = 1,0$ kHz faz com que a variável manipulada v se torne bastante oscilatória. Devido a isso, a corrente elétrica i mantém uma oscilação em torno de zero, tornando o sistema impossível de ser controlado. Este comportamento pode ser observado na Figura 39.

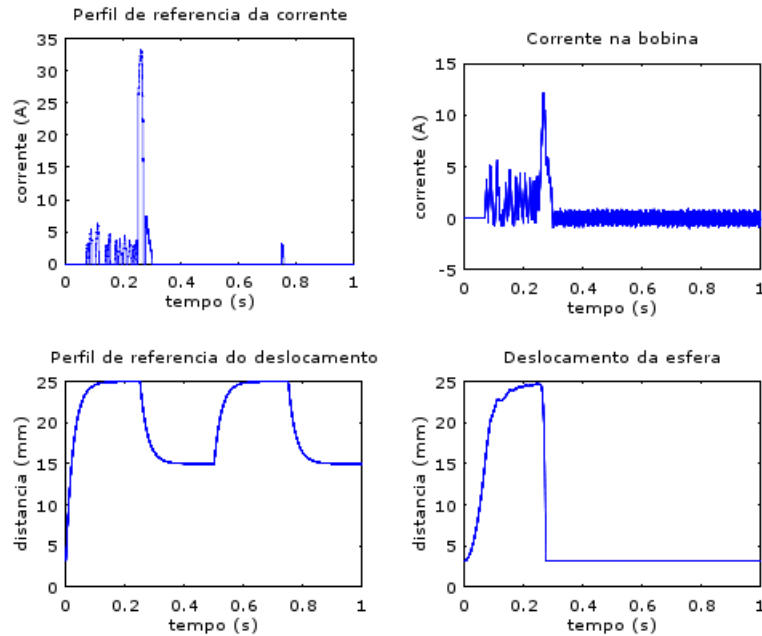


Figura 39: Simulação do controle PID discretizado com $f_0 = 1,0$ kHz (Autor, 2018).

As comutações no perfil de referência de onda quadrada desestabilizaram tanto o estado mecânico x quanto o estado elétrico i . Nestes pontos a velocidade do perfil de referência tende ao infinito, fazendo com que a variável manipulada u assumia valores elevados. Devido a isso, o sinal de referência i_{ref} aumenta excessivamente, acelerando a esfera em direção ao eletroímã. Já as mudanças de inclinação no perfil de referência de onda triangular apenas causam um breve regime transiente no subprocesso auxiliar. Nestes pontos, somente a aceleração do perfil diverge. A velocidade do perfil apenas muda de polaridade. Estes regimes transientes podem ser identificados na figura 36, entre 0,2 e 0,4 segundos e entre 0,6 e 0,8 segundos.

As medidas das potências dos sinais de erro e de perturbação foram calculadas para cada uma das simulações na Figura 35. Os resultados estão dispostos na Tabela 3. Os termos P_{e_x} e P_{e_i} representam as potências dos sinais $e_x(t)$ e $e_i(t)$, e os termos P_{f_d} e P_{e_a} representam as potências dos sinais $f_d(t)$ e $e_a(t)$.

Excluindo a medida P_{e_x} para $f_0 = 1,0$ kHz, é perceptível que a variação de f_0 entre os

três valores simulados para a frequência de amostragem não causam alterações significativas no desempenho do sistema de controle principal. Estas frequências superam em muito a largura de banda do sistema. Logo, as variações da medida P_{e_x} podem ser desprezadas. As medidas P_{f_d} e P_{e_a} também se mostraram insensíveis a frequência de amostragem. A potência P_{e_i} é a única medida que varia significativamente com a frequência de amostragem. Para a referência senoidal a medida P_{e_i} chegou a apresentar três magnitudes de diferença entre duas simulações sucessivas.

Tabela 3: Simulação do sistema

Referência	f_0 (kHz)	P_{e_x} (m ² /s)	P_{e_i} (A ² /s)	P_{f_d} (N ² /s)	P_{e_a} (V ² /s)
Onda quadrada	1,0	$1,9618 \times 10^{-4}$	7,3323	$3,8731 \times 10^{-11}$	$2,0900 \times 10^{-2}$
	2,0	$3,4438 \times 10^{-5}$	$1,5332 \times 10^1$	$6,1581 \times 10^{-11}$	$2,4702 \times 10^{-2}$
	4,0	$3,3308 \times 10^{-5}$	$1,4174 \times 10^1$	$3,6308 \times 10^{-11}$	$2,4702 \times 10^{-2}$
Onda triangular	1,0	$1,9605 \times 10^{-6}$	$3,7717 \times 10^{-1}$	$5,1825 \times 10^{-14}$	$1,1954 \times 10^{-6}$
	2,0	$1,8605 \times 10^{-6}$	$1,8750 \times 10^{-2}$	$5,1332 \times 10^{-14}$	$1,1890 \times 10^{-6}$
	4,0	$1,8593 \times 10^{-6}$	$7,1387 \times 10^{-3}$	$5,1411 \times 10^{-14}$	$1,1873 \times 10^{-6}$
Onda senoidal	1,0	$6,2353 \times 10^{-6}$	$3,7083 \times 10^{-1}$	$1,1416 \times 10^{-13}$	$1,1337 \times 10^{-6}$
	2,0	$5,9110 \times 10^{-6}$	$9,3722 \times 10^{-4}$	$1,1751 \times 10^{-13}$	$1,1497 \times 10^{-6}$
	4,0	$5,0905 \times 10^{-6}$	$5,6125 \times 10^{-4}$	$1,1769 \times 10^{-13}$	$1,1493 \times 10^{-6}$

4 Considerações Finais e Conclusões

O trabalho desenvolveu o projeto de um sistema de controle digital em cascata, a fim de manter o equilíbrio estável de uma esfera ferromagnética em um campo magnético. A técnica de controle em cascata utilizou um laço de controle adicional para a corrente elétrica no eletroímã. Desta forma a suspensão da esfera pode ser tratada como um processo de segunda ordem, que foi linearizado por realimentação do estado não-linear através de uma lei de compensação estática. As justificativas para esta abordagem são didáticas, visando expandir a discussão sobre a aplicação da técnica de controle em cascata para este tipo de planta. Adicionalmente, foram discutidos os efeitos de perturbações determinísticas sobre o sistema de controle e sobre a técnica de linearização.

O objetivo geral do trabalho foi cumprido e pode ser sintetizado nos resultados expostos nas figuras 35 e 36. Tanto o subprocesso do sistema auxiliar quanto o subprocesso do sistema principal se mostraram não-lineares, de acordo com as equações 57-59. Como já foi citado, o sistema principal utilizou uma técnica de linearização por realimentação. Esta tornou o subprocesso principal marginalmente estável e linear em relação a um sinal de entrada manipulado. Já o sistema de controle auxiliar foi projetado através da linearização do subprocesso auxiliar em um ponto operacional. Entretanto, isto não resultou em desempenho insatisfatório do controlador auxiliar, já que a relação entre a tensão nos terminais do eletroímã e a corrente no eletroímã é aproximadamente linear, e a perturbação causada pela FEM e_a foi rejeitada devido à ação do controle em malha fechada.

Devido às características do projeto, o desempenho do sistema foi avaliado através de dois tipos de indicadores. O primeiro destes utilizou a amplitude das perturbações e dos sinais de erro associados as variáveis de estado e aos respectivos perfis de referência. Ao investigar a literatura foi observada a existência de duas técnicas recorrentes na aplicação de métricas a sinais: a energia e a potência do sinal. A segunda foi adotada, já que os sinais citados não são sinais de energia finita. Os resultados levantados por este indicador estão presentes na tabelas 2 e 3. As potências dos sinais se mostraram bastante úteis na seleção da frequência de amostragem. Também revelaram que as perturbações determinísticas possuem magnitude bastante inferior aos sinais de erro no controle em cascata.

O segundo tipo de indicador levantou informações sobre o conteúdo espectral das variáveis de estado. As técnicas resultaram em distribuições em função da frequência. Foram utilizados diagramas de Bode dos modelos e as transformadas de Fourier dos sinais. Os diagramas de Bode demonstraram que a perturbação causada pela FEM é um processo passa-altas, enquanto a perturbação causada pela força de arrasto possui o mesmo conteúdo espectral da variável de estado mecânica. Assim, a amostragem uniforme foi aplicada em ambos os

subprocessos, mas com a utilização de filtragem anti-aliasing apenas no subprocesso auxiliar.

A transformada de Fourier da corrente elétrica demonstrou que o sistema de controle auxiliar é capaz de apresentar bom desempenho, através da amostragem com frequência suficiente, e reproduzir as condições do teorema de Shannon, através da filtragem anti-aliasing. Apesar da análise do modelo descartar a necessidade de técnicas anti-aliasing no sistema de controle principal, foi identificada uma incerteza não-estruturada. Esta perturbação foi causada pela compensação não-linear imperfeita no processo de linearização. Embora a amplitude da perturbação seja desprezível na variável de estado mecânica, esta se mostrou significativa na velocidade da esfera e no sinal de entrada manipulado u . A realimentação da mesma levou o sistema de controle auxiliar a ter baixo desempenho. O problema foi corrigido através da filtragem do sinal x anterior à amostragem.

Uma vez que os objetivos foram atingidos, algumas conclusões podem ser feitas a respeito do desempenho do controle em cascata com linearização por realimentação e da relevância das perturbações modeladas. As figuras 35 e 36 mostram que a estabilização da esfera é possível com esta técnica. Entretanto, o seguimento de trajetória pode ser comprometido pela natureza do perfil de referência.

A equação 60 indica que, em equilíbrio, a distância entre a esfera e o eletroímã e a corrente elétrica na bobina são proporcionais. Porém, o equilíbrio é instável em malha aberta, uma vez que a elevação na corrente elétrica aumenta a força magnética, acelerando a esfera na direção do eletroímã. O sistema de controle principal utiliza a aceleração magnética como variável de controle manipulada. Isto conduziu a bons resultados para perfis com aceleração contínua (i.e. onda senoidal). Entretanto, descontinuidades no perfil de referência levaram a desestabilização da planta.

A referência de onda quadrada não é diferenciável nos pontos em que sofre comutações. A velocidade do perfil tende ao infinito, fazendo com que a variável de estado mecânica e a variável de estado elétrica se desestabilizem. Já a referência em onda triangular não possui nenhum ponto em que a velocidade tende ao infinito, apesar de ser descontínua nos instantes em que a inclinação da curva muda. Nestes pontos apenas a aceleração do perfil diverge. Apesar do sistema de controle ser capaz de seguir o perfil de referência triangular, é visível na Figura 36 que a variável de estado elétrica oscila durante alguns instantes quando a declividade da curva muda. Isto faz com que o sistema saia de equilíbrio (nos termos da Equação 60).

As figuras 37 e 38 mostram os sinais de perturbação para os perfis de referência testados. As referências triangular e senoidal revelaram que em malha fechada as perturbações são rejeitadas. A força de arrasto é sempre desprezível. Desta forma, é possível concluir que a mesma não é relevante para o projeto do sistema de controle principal. A FEM e_a , entretanto,

é significativa, em regime transiente, até mesmo para perfis de aceleração contínua. Além disso, seu conteúdo espectral viola as condições do teorema de Shannon.

A validação do sistema de controle foi feita através da simulação do modelo descrito nas equações 57-59. A observação gráfica do comportamento da planta mostra que os requisitos de projeto (definidos na seção anterior) foram alcançados. Entretanto, não é possível garantir que o mesmo desempenho ao aplicar estas técnicas de controle a um protótipo. Um protótipo possui um conjunto de incertezas não-estruturadas, que poderiam tornar o desempenho do sistema de controle insatisfatório.

Em vista dos resultados obtidos, há duas recomendações pertinentes para trabalhos futuros. A primeira é referente a utilização de controladores PID modificados, afim de lidar com o problema dos perfis de referência descontínuos. A segunda é referente ao estudo do desempenho do sistema de controle na presença de incertezas não-estruturadas ou, então, a eventual construção de um protótipo para testes. Ao identificar os resultados das dinâmicas não modeladas sobre o processo, as técnicas de controle empregadas podem ser alteradas ou então laços de controle adicionais podem ser incluídos.

Além disso, é possível indicar o projeto de um controlador através de modelos não-paramétricos. Exemplos bem sucedidos da aplicação de redes neurais artificiais e de sistemas de lógica fuzzy (YADAV et al., 2012; QIN et al., 2014) poderiam guiar este estudo. Esta recomendação de trabalho futuro é pertinente tendo em vista a comparação entre o desempenho do controle em cascata com linearização por realimentação e o desempenho do controle inteligente.

5 Referências

CALLISTER JR, W. D. *Ciência e Engenharia dos Materiais: Uma Introdução*. Tradução de Sérgio Murilo Stamilo Soares. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 2000.

DEL TORO, V. *Fundamentos de Máquinas Elétricas*. Tradução de Onofre de Andrade Martins. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994.

DORF, R. C; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos*. Tradução de Bernardo Severo da Silva Filho. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

FARES, A. H; ABDELFAH, A; SHARKAWY, A. B; ABO-ISMAIL, A. A. *Intelligent control of magnetic levitation system*. Journal of Engineering Sciences, Assuit (EGY), v. 37, n. 4, p. 909-924, 2009.

FITZGERALD, A. E; KINGSLEY JR, C; KUSKO, A. *Máquinas Elétricas*. Tradução de Josafá Neves. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

GRAÇA, C. *Eletromagnetismo*. 1. ed. Santa Maria: UFSM, 2012.

HAJJAJI, A. E; OULADSINE, M. *Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation Systems*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, [S. l.], v. 48, n. 4, p. 831-838, 2001.

HANSON, M. A; SEBORG, D. E. *Nonlinear Process Control*. 1. ed. Englewood Cliffs (USA): Prentice Hall, 1997.

HURLEY, W. G; WÖLFLE, W. H. *Eletromagnetic Design of a Magnetic Suspension System*. IEEE Transactions on Education, [S. l.], v. 40, n. 2, p. 124-130, 1997.

ISERMANN, R. *Digital control systems*. 2. ed. Berlin (DE): Springer, 1997.

ISERMANN, R. *Mechatronic systems*. 2. ed. Londres (UK): Springer, 2005.

- LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. Tradução de Gustavo Guimarães Parma. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- JAROSZYŃSKI, J; ZIETKIEWICZ, J. *Feedback Linearization Based Nonlinear Control of Magnetic Levitation System*. Studia Z Automatykii Informatyki, Poznan (POL), v. 41, [S. n.], p. 35-46, 2016.
- MORALES, R; FELIU, V; SIRA-RAMÍREZ, H. *Nonlinear Control for Magnetic Levitation Systems Based on Fast Online Algebraic Identification of the Input Gain*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, [S. l.], v. 19, n. 4, p. 757-771, 2011.
- MORRISON, F. A. *An Introduction to Fluid Mechanics*. 1. ed. New York (USA): Cambridge, 2013.
- NISE, N. S. *Engenharia de sistemas de controle*. Tradução de Jackson Paul Matsuura. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Tradução de Heloísa Coimbra de Sousa. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PAUDEL, N; BIRD, J. Z. *Modeling the dynamic electromechanical suspension behaviour of an electrodynamic eddy current MagLev device*. Progress In Electromagnetics Research B, [S. l.], v. 49, n. 1, p. 1-30, 2013.
- PHAN, P. A; GALE, T. J. *Direct adaptive fuzzy control with a self-structuring algorithm*. Fuzzy Sets and Systems, [S. l.], v. 159, [S. n.], p. 871-899, 2008.
- PHARR, M; HUMPHREYS, G. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. 2. ed. Burlington (USA): Elsevier, 2010.
- PRITCHARD, P. J; LEYLEGIAN, J, C. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8. ed. [S. l.]: John Wiley & Sons, 2011.
- QIN, Y; PENG, H; RUAN, W; WU, J; GAO, J. *A modeling and control approach to magnetic levitation system based on state-dependent ARX model*. Journal of Process Control, [S. l.], v. 24, [S. n.], p. 93-112, 2014.

SHANNON, C. E. *Communication in the presence of noise*. Proc. Institute of Radio Engineers, [S. l.], v. 37, n. 1, p. 10–21, 1949.

SHARMA, R. C; DHINGRA, M; PATHAK, R. K; KUMAR, M. *Magnetically Levitated Vehicles: Suspension, Propulsion and Guidance*. International Journal of Engineering Research & Technology, [S. l.], v. 3, n. 11, p. 5-8, 2014.

TRUMPER, D. L; OLSON, S. M; PRADEEP, K. S. *Linearizing Control of Magnetic Suspension Systems*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, [S. l.], v. 5, n. 4, p. 427-438, 1997.

VALLUVAN, M; RANGANATHAN, S. *Modeling and Control of Magnetic Levitation System*. In: international Conference on Emerging Trends in Science, Engineering and Technology, 2012, Tiruchirappali (IND). *Anais...* [S. l.]: INCOSSET, 2012. p. 545-548.

WONG, T. H. *Design of a Magnetic Levitation Control System: An Undergraduate Project*. IEEE Transactions on Education, [S. l.], v. 29. n. 4, p. 196-200, 1986.

YADAV, S; TIWARI, J. P; NAGAR, S. K. *Digital Control of Magnetic Levitation System using Fuzzy Logic Controller*. International Journal of Computer Applications, [S. l.], v. 41, n. 21, p. 22-26, 2012.

YAMAMOTO, R. I; SILVA, I. *Magnetic bearing with uniaxial control using magnetic, electrodynamic and electromagnetic levitation*. In: International Congress of Mechanical Engineering, 22., 2013, Ribeirão Preto, *Anais...* Ribeirão Preto: ABCM, 2013. p. 521-531.