UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ANDREI MORIGGI

O CÓDIGO VAI À ESCOLA

Florianópolis
2018

ANDREI MORIGGI

O CÓDIGO VAI À ESCOLA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Professor Orientador: Dr. Everaldo Silveira.

Florianópolis
2018

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela banca Examinadora designada.

Banca Examinadora:

Professor(a) Everaldo Silveira
Orientador

Professor(a) Nereu Estanislau Burin
Membro

Professor(a) Maria Carolina Magnus
Membro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, Pai de amor e criador de todas as coisas. Deus que entregou seu Filho Jesus Cristo, para que todo aquele que Nele crer não pereça, mas tenha vida eterna. A beleza de ter encontrado Jesus é algo indescritível, mudou minha vida para sempre.

À minha esposa Giovana, melhor amiga e companheira, conselheira e motivadora. Obrigado por tanto carinho e por ser canal do amor de Deus em minha vida. Sem você eu não teria conseguido. Te amo muito.

Ao meu filho Samuel, tão esperado, tão amado. Enquanto escrevo estas palavras, está no ventre da mamãe.

Aos meus pais Ademir e Marcia. Que se despediram de mim chorando a saudade de um filho que saiu para o mundo. Minha eterna gratidão. Obrigado pela criação exemplar, pelo exemplo de trabalho e honestidade que me impulsiona sempre.

Ao meu irmão Marcelo, que amo muito. Conte comigo sempre.

À família linda dos queridos: Márcio, Nelsi e Luiza. Família que me acolheu como filho e irmão. Tios que também foram pais. Obrigado por tudo.

Aos tios e padrinhos Célio e Marilza. Que sempre estiveram presentes. Em especial, meu padrinho, pelo cuidado, exemplo e motivação. Você sempre me fez sonhar além do que eu mesmo era capaz.

Ao amigo Rafael Visolli, um irmão que ganhei neste tempo.

Ao meu orientador Everaldo Silveira, que tanto me apoiou e incentivou neste trabalho, meu muito obrigado.

A tantos outros amigos e amigas que fizeram parte desta caminhada. Meu muito obrigado.

“O temor do Senhor é o princípio do conhecimento.”

Provérbios 1:7

RESUMO

O presente trabalho relata uma pesquisa que teve por objetivo apresentar o método empírico de metragem cúbica de madeira, contrastando com os métodos escolares ensinados atualmente. No desenvolvimento do trabalho fazemos algumas considerações sobre a Etnomatemática, por entendermos que essa pesquisa se aproxima, de alguma forma sobre o viés dessa teoria. O estudo gira em torno da apresentação e discussão de um método empírico utilizado para cubagem de madeira em uma cidade do interior do estado de Santa Catarina. Constatamos que o método empírico estudado oferece resultados muito próximos àqueles alcançados quando utilizada a matemática escolar. Inferimos que poderia ser profícuo para a aprendizagem e interesse dos alunos que essas discussões fossem levadas às aulas de Geometria Espacial em salas de aula do Ensino Médio.

Palavras-chave: Volume. Geometria. Cubagem de Madeira. Método empírico. Etnomatemática.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FÓRMULAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nunca imaginei que a cultura e o contexto social em que fui inserido ao nascer, pudessem proporcionar tamanho desenvolvimento lógico/matemático como posso, hoje, olhar para trás e constatar. Situações do dia a dia aos poucos confrontavam o método matemático aprendido nas primeiras fases do curso de Matemática, fonte de dúvida e desconfiança permeava o intelecto em formação daquele que aprendera com seus pais e avós que maneiras nada convencionais e usuais de definir estruturas métricas, aritméticas, estruturas algébricas e análises atingiam o mesmo (quando não preciso, perfeitamente aceitável) resultado que aqueles alcançados pelo ferramental arduamente apreendidos nos anos do colegial. Tudo o que outrora frustrou-me torna-se agora objeto de estudo e compreensão. Gratificante cada experiência se tornou, pois cada uma é rica em uma matemática simples de se traduzir e reproduzir.

O objeto de estudo apresentado neste trabalho revela um pouco do grande tesouro escondido em experiências nada acadêmicas, mas que culminam em uma estrutura fundamental de análise de dados e resultados, que permite a engrenagem comercial de determinadas atividades mover a economia e meios de comércio de uma região ou comunidade. Neste caso veremos a beleza de uma matemática escondida na simplicidade de calcular volume de grandes sólidos: a mensuração cúbica de madeira.

A experiência objeto do estudo se passa na cidade de Videira, localizada na região meio oeste do Estado de Santa Catarina. Crescer e presenciar cálculos de cubagem de madeira efetuados de forma simples e precisa, foi determinante para, hoje, pesquisar sobre isso. Cálculos que, muitas vezes, eram registrados nas tábuas de madeira escritos com o auxílio de um pequeno pedaço de carvão.

Muitas leis e regimentos ambientais balizam há alguns anos a extração de madeira para beneficiamento. Toda a legislação obrigou a indústria, com uma necessidade crescente desta matéria prima, investir no reflorestamento comercial de espécies como pinus e eucalipto para suprir a demanda pujante.

Passados alguns anos após o endurecimento das leis ambientais cresceu em severa quantidade o plantio de reflorestamentos comercias, formando um mercado aquecido, mas com uma base no fornecimento da matéria prima cujo cultivo ainda é pouco tecnológico, dependendo exclusivamente de mão de obra humana. Mais que natural é pensar em leis comerciais de oferta e procura que exigem movimento em um dos lados da balança se o outro está descontrolado. Neste caso, a intensa busca impõe aos extratores maximizar a produção. Motosserras configuravam o principal mecanismo, manejadas por um operador, rapidamente punham abaixo uma a uma das imensas árvores enfileiradas quase que cartesianamente. É importante destacar que tais espécies, desenvolvidas em laboratório, foram criadas para a finalidade do beneficiamento e comercialização, produzindo uma árvore onde a geometria do tronco e quantidade galhos visa aproveitar ao máximo cada milímetro cúbico de madeira. Dito isso, fica fácil imaginar um corte rápido e geometricamente atraente.

Pouco a pouco, diante um curto período de corte, acumulam-se o que chamamos de "toras", os troncos devidamente limpos e prontos para medição. Enfileirados uma a uma, no que chamamos de estaleiro de carregamento, as toras são muito semelhantes a figuras cilíndricas e cônicas, variando em espessura, seguindo um padrão no comprimento, com margem de erro ligeiramente considerável, sem prejudicar a utilização da madeira em sua próxima etapa na cadeia produtiva da indústria.

O rico processo, muitas vezes demorado (algumas espécies demoram até 15 anos do plantio ao corte), permite perceber o fluir da matemática, seja na profundidade da cavidade feita para o plantio, na distância de plantio de cada muda, nas etapas de crescimento e cultivo em que a mensuração constante é ferramenta de acompanhamento e manejo. Dentre as etapas pude presenciar as integrantes aplicações matemáticas, mesmo sem entender o conceito humilde e desprovido de didática por parte do agente aplicador, pude de certa forma aceitá-lo, permitindo, aos poucos e progressivamente, dentro da vida acadêmica, elaborar paralelos e compreender porque eram aplicados com um grau considerável de confiabilidade e permitiam toda uma estrutura econômica se sustentar de forma a crescer grandiosamente movimentando a renda de muitos municípios e famílias dependentes de tal atividade.

Mesmo o processo como um todo sendo cheio de tesouros matemáticos, uso para destacar e ilustrar o que tem sido dito, a etapa pré-carregamento, onde o operador desenvolve cálculos com caneta e papel que determinarão o tamanho comercial e posteriormente a transação monetária. A fita métrica obtém a medida de uma extremidade a outra da tora. Esse número (módulo de medida) será multiplicado pela média aritmética simples dos diâmetros de ambas as bases, (lembro que a palavra diâmetro não fazia parte do vocabulário. Cito-a para fins de visualização), por fim, de forma surpreendente multiplica-se pelo comercialmente aceito "0,7854", curiosamente chamado “o código”, obtendo a metragem aceita por vendedor e comprador, metragem comprovada e aprovada.

Aceitar a utilização de um código, sem qualquer explicação ou base sempre me pareceu um tanto metafísico. À medida que fui crescendo na vida acadêmica, porém, fui descobrindo mais sobre o vasto universo da matemática comecei perceber a existência de constantes e padrões numéricos que regiam muitos conceitos profundos envolvendo a matemática, o que me deixou mais tranquilo quanto ao impacto da aceitação. Mesmo assim algo sempre me intrigou neste episódio da utilização do “código”, ao pensar que tais pessoas detentoras destes conceitos, que diferente de mim não tiveram acesso a escola, estão utilizando de algo consideravelmente poderoso e fascinante. Realmente algo a se considerar.

Tal demanda pode ser considerada o carro chefe desse trabalho que tem por objetivo apresentar o método empírico de metragem cúbica de madeira, contrastando com os métodos escolares ensinados atualmente. Esta apresentação propõe analisar o ensino matemático sobre a perspectiva Etnomatemática.

Para auxiliar na compreensão da explanação, esse texto está organizado da seguinte forma. No primeiro capítulo abordamos brevemente o processo de colonização e exploração da mata feito pelos imigrantes, principalmente na região sul, apresentando o método empírico que surgiu no processo de colonização da região, no segundo vemos o mesmo cálculo de medição de toras de madeira com o conteúdo matemático das salas de aula, no terceiro apresentamos alguns elementos sobre a Etnomatemática e falamos de algumas implicações desses elementos no ensino e aprendizado do aluno e, por fim, no quarto capítulo propomos levar o método empírico à escola unindo as ferramentas já conhecidas dos alunos e explorando com método empírico.

.

CAPÍTULO I - ORIGEM DO MÉTODO EMPÍRICO

Para abordar a parte prática deste trabalho vamos descrever como a construção empírica de uma fórmula para calcular volume de toras[1] de madeira surgiu. Para tal descrição vamos analisar um breve relato da imigração italiana e alemã no Brasil.

1.1. Imigração italiana e alemã no Brasil – séculos XIX e XX

Em um contexto regional e até mesmo nacional a imigração de povos europeus no final do século XIX e início do século XX colocam mais tempero na pluralidade cultural que define o Brasil, criando traços na vasta definição de um país com limites continentais de território e também de povo.

Após a proclamação de independência no Brasil em 1822, marcando fim do Brasil Colônia, muito esforço se apresentou por parte do Governo Imperial em estabelecer grandes polos nas regiões ainda não exploradas do país, caso da região sul, isso para ocupar a região e proteger as fronteiras além de mão de obra para a exploração econômica (SANTOS, 2017).

Os primeiros imigrantes alemães chegaram no ano de 1824, se instalando quase que totalmente na região sul do Brasil. Iniciaram-se então algumas colônias alemãs no Rio Grande do Sul e em Santa Catarina, muitas cidades e comércios foram formadas a partir do povo que chegava e começava trabalhar. (SANTOS, 2017).

Em 1850, anos antes da imigração italiana, foram estabelecidas novas diretrizes do Governo Imperial para a ocupação das terras, a chamada Lei das Terras. Toda terra só poderia ser adquirida pelo imigrante por compra, além disso, era necessário um aproveitamento destas terras por um período de cinco anos para então efetivar a transferência. (FREITAS JÚNIOR, 1882, apud TROMBINI, LAROQUE, CASTOLDI, 2017).

[1] Tora: grande tronco de madeira.

Alguns anos após o início da imigração dos alemães, foi a vez dos italianos, que a partir de 1875 chegaram em grande número para a colonização da região(SANTOS, 2017).

Segundo Giron, o conhecimento trazido pelos imigrantes era restrito, a maioria deles tinham apenas conhecimentos básicos relacionados a leitura e a escrita. Nesta época o Brasil não tinha um sistema de educação que atendesse a demanda dos imigrantes e o número de professores imigrantes, ou seja, professores que vieram como imigrantes e poderiam ajudar no processo de instrução e ensino do povo era muito baixo (GIRON, 1977).

Esta etapa da imigração surge de forma mais agressiva no âmbito do progresso e desenvolvimento. A base para o crescimento, era a derrubada de árvores nativas como as araucárias, cabriúvas, louro pardo, cedros, dentre outras espécies nobres, árvores de grande porte e que proporcionavam tábuas de extrema qualidade. O corte da madeira não só servia para a construção das casas, galpões para animais, celeiros, mas também dava lugar para tais construções e para grandes áreas que passavam a ser cultivadas com cereais e pastagem para os animais (FILHO, 2005).

O contexto sócio cultural que é fruto da imigração e a ocupação na região Sul do Brasil, foi sendo construído etapa por etapa após as primeiras ocupações. Diante das necessidades técnicas de contagem e medições que de maneira geral foram sendo transmitida geração pós geração, construindo-se assim um grande legado de conhecimento empírico, altamente preciso e usual.

1.2. O surgimento do "código"

Durante a primeira metade do século XX, "a necessidade de construir igrejas, escolas, vendas, moinhos, atafonas[2] e outros elementos infraestruturas para atender a uma população crescente criou um novo ramo de negócios: as serrarias" (CABRAL; SESCO, 2008, p.42).

[2]Atafona: engenho de moer grãos, manual ou movido por animais;

Muito dos conhecimentos para se lidar com este novo negócio foi se desenvolvendo na prática, pois as escolas eram poucas e localizadas apenas em cidades referencias, fazendo com que o acesso fosse restrito àqueles com maiores condições de enviar seus filhos para tais lugares (GIRON, 1998).

Os imigrantes, também chamados colonos[3], principalmente os italianos, não relacionavam a ideia do estudo com o desenvolvimento, “para eles o estudo não tem outra valia a não ser a de conseguir emprego e de propiciar melhores salários. Não se vislumbra na colônia italiana qualquer tipo de projeto educacional” (GIRON, 1998, p.94). Vemos, neste caso, que este contexto valoriza a mão de obra e torna a prática a fonte do saber. A questão principal posta em análise neste trabalho resgata um conhecimento empírico fruto do trabalho de extração de madeira durante a ocupação dos colonos italianos, sendo este conhecimento preservado mesmo com o avanço moderno das madeireiras.

1.3. O processo de extração de madeira no final do século XIX e primeira metade do século XX

No final do século XIX muitas eram as dificuldades para se ter um aproveitamento madeireiro. As serrarias ainda careciam de equipamentos para aprimorar seu processo de beneficiamento da madeira, saindo da esfera de utilização doméstica da extração. O transporte das grandes toras era uma dificuldade tanto pelas estradas que praticamente não existiam quanto por caminhões, ainda raros nesta época. Tudo passa a ser aprimorado e as serrarias ganham força em meados de 1920 com avanço de grandes centros urbanos, que abrem espaço para esse mercado (CABRAL; SESCO, 2008).

O crescimento da indústria madeireira segue um caminho de duas frentes: as serrarias pesadas e serrarias leves (MONBEIG, 1984; apud, CABRAL; SESCO, 2008). As serrarias pesadas, localizadas em lugares estratégicos para o escoamento e rotas de acesso para outros grandes centros, com máquinas pesadas e caminhões

[3] Membro de uma colônia, pequeno proprietário, trabalhador agrícola, principalmente imigrante ou descendente deste. É um camponês típico, caracterizado pela pequena propriedade rural e que se dedica à produção familiar de subsistência e de mercado, normalmente sem utilização de mão-de-obra externa ao grupo familiar (GREGORY, 2005, p. 102).

para o transporte, avanços que trazem solidez e ajudam manter o negócio por muitos anos. As serrarias leves seguiam o fluxo de povoamento e lidavam com madeira de menor proporção, seguindo a demanda do povoamento, fornecendo madeira para a construção das estradas de ferro e construções em geral. Ambas surgem por necessidades da época ligadas ao desenvolvimento das colônias e das famílias, ou seja, passam a fomentar a economia da região a partir do momento que ajudam firmar as grandes colônias e expandir a exploração.

Passeando pelo período desde o início da colonização, onde citamos a extração de madeira de fins ocupacionais, vamos chegar a uma época, que a madeira é comercializada para os mais diversos fins, segundo Souza e Pires (2009, p.106). “A cadeia produtiva do setor florestal é composta por três segmentos básicos: (1) madeira para energia (lenha e carvão); (2) madeira industrial (celulose e papel; painéis de madeira reconstituída); (3) processamento mecânico (serrados e laminados)” demandas diferentes da mesma matéria prima, o que mostra a importância da extração de madeira quando pensamos em atividade econômica.

O processo de extração da madeira evoluiu com o passar dos anos, saindo de um patamar manual onde figurava serras e machados (figura 1 e 2) para um novo nível com as motosserras (figura 3), chegando na década de 90 em uma moderna mecanização do processo, fruto da abertura das importações no mercado brasileiro. (ALTOÉ, 2008).

Figura 1: Serra Manual
Fonte: Vazlon Brasil (2018).

Figura 2: Machado
Fonte: Pixabay (2016).

Figura 3: Motosserra
Fonte: Beltrão Epis (2018)

1.4. O processo vivido na infância.

Dadas as diferentes maneiras de corte das árvores por métodos manuais ou utilizando motosserras, o que passa nos interessar para efeito de análise do cálculo são os resultados da derrubada da árvore, que deve ser limpa dos galhos em excesso e gravetos, restando apenas o tronco livre de qualquer embaraço, uma figura irregular muito semelhante a um cilindro ou tronco de cone, a chamada tora (figuras 4 e 5).

Figura 4: Pilha de toras
Fonte: Tecnologia e Treinamento (2010).

Figura 5: Toras de Pinus
Fonte: Agro Florestal Aliança (2018).

O cálculo operacional para fins de metragens de comprimento, todo feito em caráter aproximado, mas com nível de aproximação satisfatório para a finalidade, afinal de contas, o processo onde o rigor absoluto é exigido ocorre no momento do beneficiamento.

Árvores com troncos completamente irregulares acabam sofrendo medições de arredondamento e ficam suscetíveis a perdas consideráveis no momento da serragem. Nem sempre a base da torra tem o formato ideal cilíndrico/circular, por isso é necessário fazer a cubagem (medição) e efetuar os devidos arredondamentos comuns no processo. Vejamos alguns exemplos de irregularidades de troncos (figuras 6 e 7).

Figura 6: Irregularidade de troncos
Fonte: Commodity Brasil (2018).

Figura 7: Diferentes bases de Toras
Fonte: Nativa News (2017).

Apresentado o objeto de medição, descrito suas características e particularidades, passaremos a ver como proceder com a medição desta tora segundo o método que presenciei na infância e está sendo apresentado aqui.

Para efeito de exemplificação consideramos uma tora (figura 8) onde a imagem retrata suas duas extremidades. Primeiramente observam-se as extremidades da tora e busca-se uma média do que é chamada “grossura” da torra, que, para finalidade de cálculo denotaremos com a letra ***m****.* Vejamos como calcular:

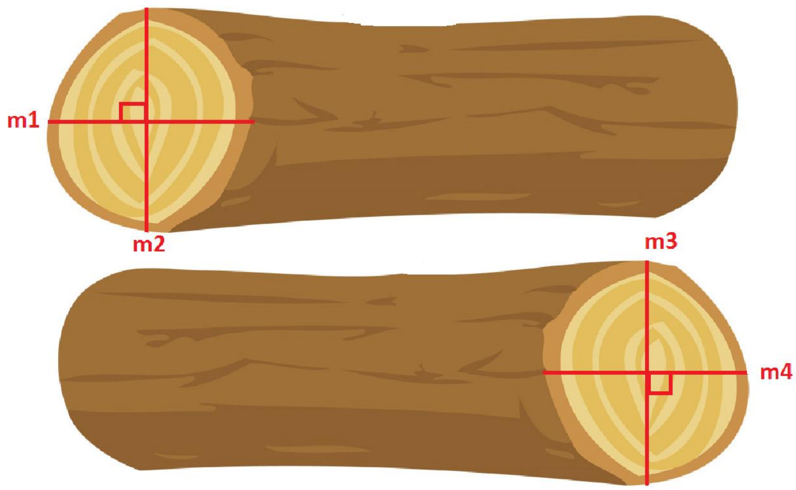

Figura 8: Medição de Raio das Bases da Tora
Fonte: Public Domain Q (2018).

O cálculo de *m* é feito da seguinte maneira:

$$m = \frac{m1 \ + \ m2 \ + \ m3 \ + \ m4}{4}$$

Equação 1: Medição de Raio das Bases da Tora

Tendo o valor de ***m*** agora é necessário medir o comprimento da tora, valor que denotaremos por ***c****.* Vejamos:

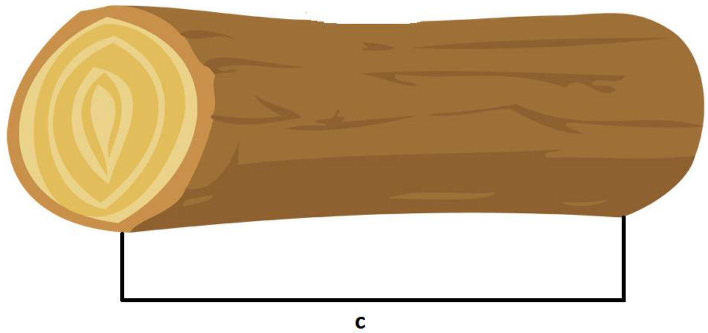

Figura 9: Tora
Fonte: Public Domain Q (2018).

Agora podemos apresentar o cálculo efetuado para se chegar ao valor do volume desta torra segundo o modelo empírico que estamos apresentando aqui. A equação que obtemos é a seguinte:

$$Volume = m \times m \times c \times 0{,}7854$$

Equação 2: Volume da Tora

Notamos que a equação acima utilizou as medidas *m* e *c* que são obtidas de forma manual durante a mediação, e também o número 0,7854, que aparece de forma misteriosa, e que nos faz chegar a um ponto importante de nosso trabalho. Este fator multiplicativo faz parte da fórmula que surgiu com todo o processo que descrevemos até aqui. Ele é chamado de “código” e se comporta como uma constante em todos os cálculos de volumes de toras.

Dentro do contexto de aprendizado cultural sobre esta fórmula, sua origem e utilização nunca foram explicadas. Também não há costume de questionar tal origem ou utilização. O código é apenas aceito e utilizado. Por toda a minha infância e adolescência, nos momentos em que os mecanismos matemáticos foram se desenvolvendo no ambiente escolar, não fui capaz de correlacionar tal com as coisas que ali eram ensinadas. Evidentemente a escola não abriu espaço para uma apresentação e discussão daquela "forma popular" para calcular volumes de algum tipo de sólido geométrico.

Presenciar algo que por muito tempo foi praticado e aceito sem questionamentos, utilizado como ferramenta primordial para as relações comerciais que envolvem a madeira, desperta, sem dúvidas, uma motivação em explicar e desvendar todas as curiosidades por de trás da fórmula.

CAPÍTULO II [4] - SABER ESCOLAR E SABER EMPÍRICO

O estudo da Geometria ocorre progressivamente ao longo dos anos do Ensino Fundamental. Em geral a geometria plana lança conceitos básicos como: ponto, reta, plano e então possibilita compreender questões cotidianas envolvendo medidas e noções métricas. Um exemplo disso é o cálculo de volume[5] e áreas de sólidos, por exemplo.

Esse conceito pode facilmente ser aplicado à prática cotidiana do aluno, quando, por exemplo, observa-se o abastecimento de um carro em posto de combustíveis ou, quem sabe, em uma receita de bolo onde um determinado número de xícaras de farinha é necessário para fazer a massa, ou também na piscina enchendo de água. Enfim, são muitas as exemplificações e diferentes formas de se mensurar o “espaço” ou a “quantidade de espaço”.

Nos exemplos aqui apresentados, podemos pensar em litros e xícaras, mas sabemos que há inúmeros outros instrumentos e unidades de medida com essa finalidade. Por outro lado, é necessário generalizar esse conceito, atribuindo a ele padronização. No caso das medidas, as unidades, seus múltiplos e submúltiplos, serão essenciais para significar os módulos da medição de quaisquer sólidos. Essa unidade padrão é o cubo de aresta[6] 1.

---

[4] Para aprofundamento sobre diferentes métodos de cubagem de madeira e leitura complementar deste trabalho: RPM – Revista do Professor de Matemática Nº 83 – Sobre Métodos de Obtenção de Volume de Toras – Renata Zotin Gomes de Oliveira e Calixto Garcia. RPM – Revista do Professor de Matemática Nº 09 – Como cortar o pano para revestir o cesto? – Luiz Márcio Imenes.

[5]Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa ‘quantidade de espaço’ através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado desta comparação será chamado de volume.(LIMA, 1999)

[6]Na geometria, chama-se **aresta** o segmento de linha que representa a intersecção de dois vértices em um polígono, poliedro

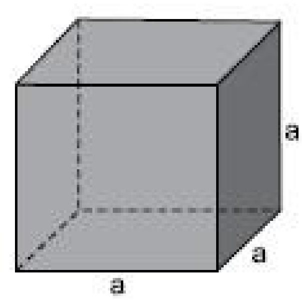

Figura 10: Cubo
Fonte: Tec Concursos (2018).

Para calcular o volume de um cubo (figura 10), utilizamos as dimensões de suas arestas, que mesmo sendo todas da mesma medida, por tratar-se de um cubo, podemos chamar de largura, comprimento e altura. A equação pode ser representada da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{VOLUME\ DO\ CUBO = largura\ \times comprimento\ \times altura}$$

$$\boldsymbol{VOLUME\ DO\ CUBO = a\ \times a\ \times a}$$

Equação 3: Volume do Cubo

Desta forma entendemos a importância do trabalho em sala de aula com o chamado material Base 10, popularmente conhecido como material dourado, pois os conceitos de volume e área podem ser ali exemplificados, oferecendo ganhos significativos na introdução das bases da geometria métrica. Nos dias de hoje, em que o acesso a computadores e à internet está significativamente presente, o trabalho com a Geometria pode ficar mais dinâmico e interativo. Nesse caso a utilização de ferramentas virtuais, como o *software* livre Geogebra, poderão facilitar a visualização e assimilação de conceitos básicos desse campo do saber.

O cálculo de volume de um paralelepípedo retângulo é determinado pelas medidas de suas três dimensões: o comprimento (***a***), a sua largura (***b***) e a sua altura (***c***), elementos apresentados na Figura 11.

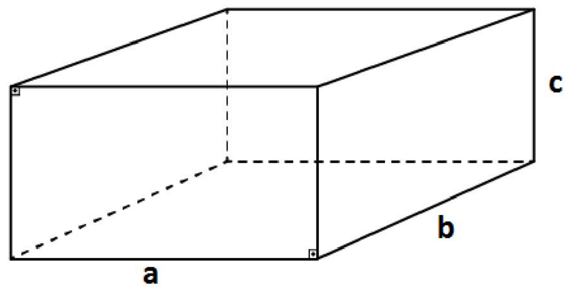

Figura 11: Paralelepípedo Retângulo
Fonte: Saber Matemática (2018).

Para calcular o volume de um paralelepípedo retângulo (figura 11) efetuamos a seguinte conta:

$$\boldsymbol{VOLUME\ DO\ PARALELEPÍPEDO} = \boldsymbol{largura} \times \boldsymbol{comprimento} \times \boldsymbol{altura}$$

$$\boldsymbol{VOLUME\ DO\ PARALELEPÍPEDO} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

Equação 4: Volume do Paralelepípedo

O volume será representado pela letra ***V*** e, como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões comprimento, largura e altura medem 1 U. M., então ***V(1,1,1) = 1***. Vale observar que a proporcionalidade das dimensões se aplica no *paralelepípedo retângulo*, ou seja, se mantiver duas medidas constantes e multiplicar a terceira por um número natural *k*, o volume também multiplicará por *k*, desta forma:

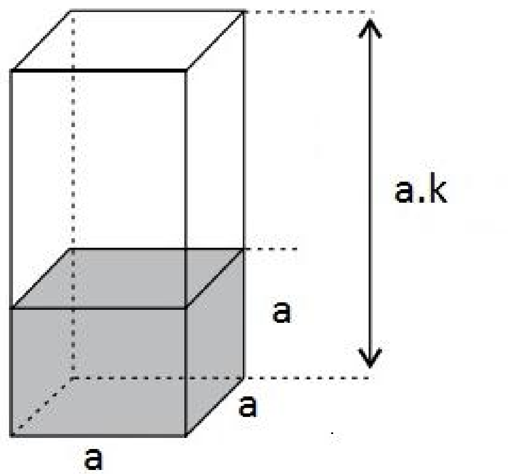

Figura 12: Paralelepípedo Retângulo

$$V_{figura\,12} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k})$$

$$V_{figura\,12} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) \times k$$

$$V_{figura\,12} = \boldsymbol{V_a} \times k$$

Equação 5: Volume da Figura 12

Note, na figura 12, temos uma das faces da figura representando um quadrado de lado *a.* Vale lembrar que para calcular a área de um quadrado, basta multiplicar *lado por lado* e então obter o valor da área. Assim:

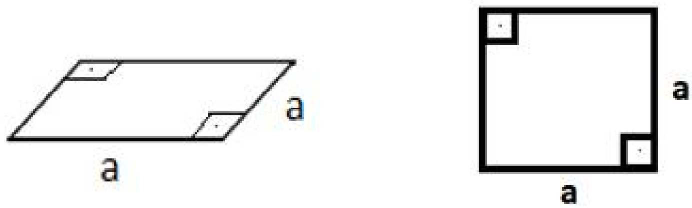

Figura 13: Quadrados

$$\acute{A}\boldsymbol{REA\ DO\ QUADRADO} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$$

Equação 6: Área do Quadrado

Note que, ao efetuarmos o cálculo do volume desta figura, estamos calculando a área do quadrado que representa uma das faces e multiplicando pela outra coordenada que chamamos de altura. Reescrevendo a equação acima, temos:

$$\boldsymbol{V_{figura\ 12}} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{V_{figura\ 12}} = \acute{A}\boldsymbol{REA\ DO\ QUADRADO} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{k})$$

Equação 7: Área do Quadrado no Volume da Figura 12

Considerando na figura 12 os lados de valor *a* como largura e comprimento, temos que a coordenada de medida *a.k* é chamada altura. Reescrevendo a fórmula, temos:

$$\boldsymbol{V_{figura\ 12}} = \acute{A}\boldsymbol{REA\ DO\ QUADRADO} \times \boldsymbol{ALTURA}$$

Equação 8: Área do Quadrado e Altura no Volume da Figura 12

Por fim, chamamos a face quadrática do paralelepípedo de base. Logo a fórmula do volume é atualizada:

$$V_{figura\ 12} = \text{Á}\boldsymbol{REA\ DA\ BASE} \times \boldsymbol{ALTURA}$$

Equação 9: Área da Base e Altura no Volume da Figura 12

Vamos demonstrar que para se calcular o volume de um paralelepípedo pode se considerar a fórmula:

$$V_{paralelepípedo} = \text{Á}\boldsymbol{REA\ DA\ BASE} \times \boldsymbol{ALTURA}$$

Equação 10: Área da Base e Altura no Volume do Paralelepípedo

Em linhas gerais demonstraremos que o volume de um prisma[7]é calculado desta forma, por definição vale para paralelepípedo.

Para evoluir no estudo do cálculo de volume de sólidos, vamos analisar o Princípio de Cavalieri. Este princípio foi apresentado por Bonnaventura Cavalieri, discípulo de Galileu Galilei e utiliza-se de matemática avançada para chegar a sua demonstração. Embora sua aplicação e compreensão sejam de fácil acesso, não é o objetivo deste trabalho se valer de sua demonstração, mas sim expor sua ideia no centro do estudo de volume de sólidos. Vejamos de forma sintetizada :

Princípio de Cavalieri:

1) Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas duas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entra as áreas dessas porções é a mesma constante

[7] Prisma: Um prisma é todo poliedro formado por uma face superior e uma face inferior, paralelas e congruentes (também chamadas de bases) ligadas por arestas paralelas entre si.

2) Se dois sólidos tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Segundo este princípio, tomando dois sólidos quaisquer, de mesma altura e seccionando-os a uma mesma altura, se as áreas das secções forem iguais, os sólidos terão o mesmo volume. Vejamos a figura:

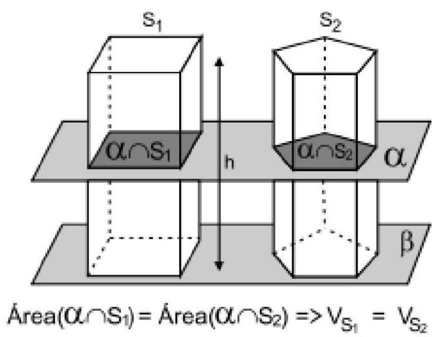

Figura 14: Ilustração do Princípio de Cavalieri
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 23).

Vejamos agora, que o volume de um prisma, é dado pelo produto da área da base pela sua altura. Assim:

Seja um prisma qualquer, de altura h e Área da base A e um paralelepípedo retângulo com altura h e também Área da base A. Considere ambos colocados sobre um plano β, e também um plano α, paralelo a β seccionando os sólidos h' de distância de β. Veja essa descrição na figura:

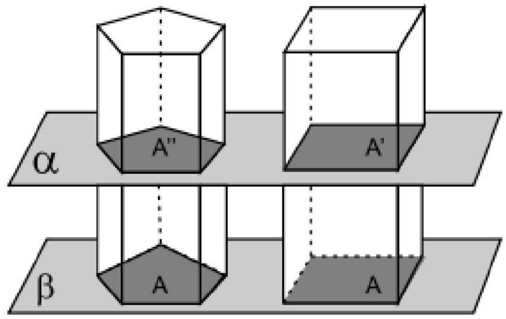

Figura 15: Aplicação do Princípio de Cavalieri

Fonte: Pereira Lula (2013, p. 25).

Na figura, temos A’ e A’’ como resultados da secção de α com os sólidos. Por definição de prismas temos que toda secção feita por um plano paralelo a base produz uma figura congruente com a base. Concluímos, portanto, que A = A ‘ = A ‘’. Assim, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que os volumes destes sólidos são iguais, pois as condições atendem aos itens 1 e 2 mencionados acima, ou seja, os dois prismas têm a mesma altura e as secções paralelas a base são equivalentes.

Concluímos assim que o volume do paralelepípedo retângulo, que é o produto das suas três dimensões pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{V_{paralelepípedo}} = \text{Á}\boldsymbol{REA\ DA\ BASE} \times \boldsymbol{ALTURA}$$

Que por sua vez também representa a fórmula do cálculo de volume de um prisma, como vimos assim. Desta forma:

$$\boldsymbol{V_{prisma}} = \text{Á}\boldsymbol{REA\ DA\ BASE} \times \boldsymbol{ALTURA}$$

Equação 11: Volume do Prisma

A aplicação do Princípio de Cavalieri, que vimos na demonstração acima, pode se aplicar na prática ao analisar uma resma[8] de folhas e as diferentes formas assumidas. Vejamos um exemplo nas figuras abaixo:

[8] Resma: conjunto formado por 500 folhas de papel.

Figura 16: Resma de folhas tamanho A4
Fonte: Mercado Livre (2018).

Na figura 15 temos uma resma de folhas A4, sobrepostas, de forma que uma cobre totalmente a superfície da outra, formando um paralelepípedo retângulo. Já vimos que para calcular o volume de um paralelepípedo retângulo, efetuamos o produto da Área da Base pela sua altura.

Vejamos a mesma resma com a sobreposição deformada, ou seja, as folhas estão sobrepostas, mas não cobrem de forma total a superfície da anterior.

Figura 17: Resma de folhas tamanho A4 com sobreposição irregular
Fonte: Palimontes (2018).

Neste caso, fica fácil visualizar que perdemos a forma de paralelepípedo retângulo, pois a sobreposição de folhas não cobre totalmente a superfície da folha de baixo, formando uma configuração aleatória.

Aplicando o mesmo conceito da demonstração que vimos anteriormente, utilizando o princípio de Cavalieri, temos:

1. São dois prismas. Ambas as figuras atendem a definição de prisma, vista anteriormente.

2. Ambos os prismas têm a mesma altura. As duas pilhas de folhas são compostas pelo mesmo número de folhas, com área e gramatura.

3. A Área da Base de cada uma delas é 1 folha A4, ou seja, têm a mesma área.

Assim, aplicando o princípio de Cavalieri, concluímos que os dois prismas têm o mesmo volume.

Vejamos agora, para compor a exposição sobre volume de sólidos, como calcular volume de cilindros e cones.

Para definir um Cilindro, considere uma figura plana fechada, situada em um plano α, e um segmento de reta PQ, secante a α. Chama-se de cilindro à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos da figura plana. O segmento PQ é denominado a geratriz do cilindro e será indicada por g.

Um cilindro cuja base é um círculo será denominado cilindro circular.

Um cilindro em que a geratriz forma um ângulo reto com o plano que contém a base é chamado de cilindro reto, caso contrário o cilindro é dito cilindro oblíquo.

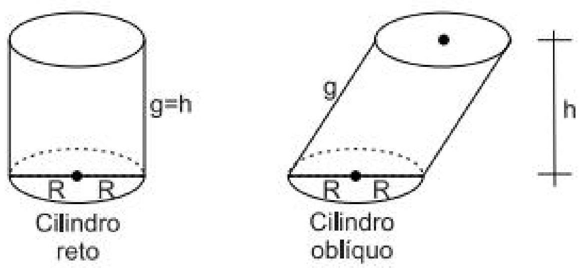

Figura 18: Cilindros
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 26).

Utilizando o Princípio de Cavalieri, de forma análoga às aplicações anteriores, podemos concluir que o volume de um cilindro circular é o produto da área da base pela sua altura.

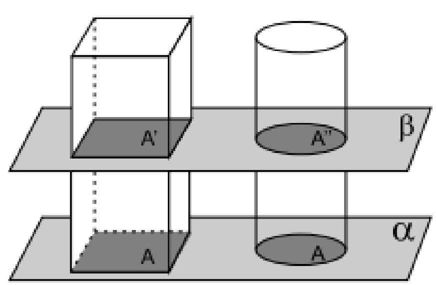

Figura 19: Princípio de Cavalieri aplicado ao Cilindro
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 26).

Vejamos a análise da figura 18 para tal conclusão. Dado um cilindro circular cuja base possui área A e altura h, construiremos um paralelepípedo de base A e altura h. Como A' = A = A'' , pelo Princípio de Cavalieri os dois sólidos possuem o mesmo volume, assim:

$$\boldsymbol{Volume}_{\boldsymbol{Cilindro}} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{h}$$

Equação 12: Volume do Cilindro

Vejamos agora, como calcular o volume de um Cone.

Considerando uma figura plana fechada dentro de um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se cone a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V, denominado vértice do cone, e a outra na figura plana denominada como a base o cone.

Um cone cuja base um círculo será definido como cone circular, Vejamos:

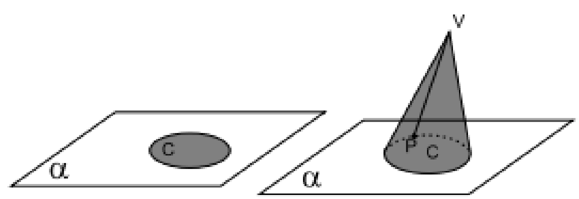

Figura 20: Cone Circular
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 33).

Na figura abaixo, FIGURA 21, podemos observar os principais elementos de um cone: geratriz (g), altura (h), e raio da base (r).

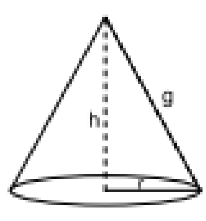

Figura 21: Elementos Principais do Cone
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 34).

Para demonstrar a fórmula que permite calcular o volume de um cone, utilizaremos o resultado que permite calcular o volume de uma pirâmide. Este resultado, do cálculo do volume de pirâmide[9], pode ser demonstrado utilizando o princípio de Cavalieri. Sua demonstração envolve conceitos de semelhança de triângulos e pode ser verificada em consulta das referências bibliográficas. O resultado é apresentado da seguinte maneira:

$$Volume_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times Ah$$

Equação 13: Volume da Pirâmide

Sendo A= área da base e h= altura.

Agora considere um cone com altura H e área da base A. Também uma pirâmide qualquer com a mesma altura e área da base. Desta forma:

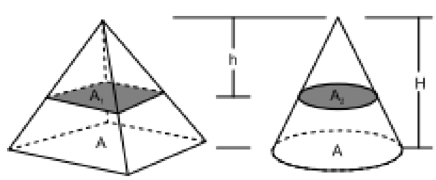

Figura 22: Pirâmide e Cone
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 34).

Devemos considerar a base da pirâmide e do cone sob um mesmo plano; as figuras A1 e A2 são fruto de um plano paralelo que secciona as figuras a uma altura h dos vértices.

As figuras A1 e A são circunferências de raio R e r respectivamente. Assim:

[9] Consideremos um polígono convexo A1A2A3...An ,situado em um plano α e um ponto V fora de α. Chama-se de pirâmide a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e as outras nos pontos do polígono.

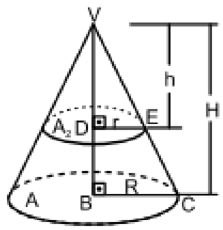

Figura 23: Raios das Secções do Cone
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 34).

Na figura 23, temos a perpendicular VB, a partir dela, obtemos os triângulos VBC e VDE, semelhantes, logo: R/r = H/h.

O quociente entre as áreas fica da seguinte forma:

$$\frac{A}{A_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \left(\frac{H}{h}\right)^2$$

Equação 14: Quociente das Áreas A e A2

Portanto:

$$\frac{A}{A_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{A}{A_2} \rightarrow A_1 = A_2$$

Equação 15: Quociente das Áreas A e A1

Pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos sólidos são iguais. Assim:

$$Volume_{\ pirâmide} = Volume_{cone} = \frac{Ah}{3}$$

Equação 16: Volume da Pirâmide e Volume do Cone

É importante destacar que nesta altura das demonstrações e apresentações do cálculo de volume das diferentes figuras, surge uma constante muito utilizada que é agente fundamental nestes cálculos, o π[10]. Fruto do cálculo da área circular da base do cone.

Por fim, veremos como calcular o volume de um tronco de cone.

O tronco de cone é um sólido resultante da secção de um cone reto. Consideramos um cone reto de altura H e raio R e consideramos um plano que secciona o cone a uma altura h da base do cone. Dois sólidos serão determinados após esta secção, um deles é um cone menor e o outro é chamado de tronco de cone. Vejamos a figura:

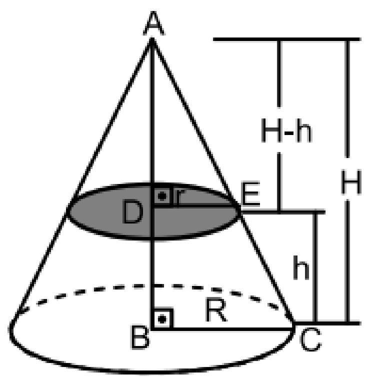

Figura 24: Tronco do Cone
Fonte: Pereira Lula (2013, p. 35).

Omitiremos a construção algébrica deste caso, por tratar-se de elementos análogo aos utilizados na demonstração anterior. Temos que o volume do tronco se define calculando o volume do cone maior e subtraindo o volume do cone menor, formando a partir da secção estabelecida pelo plano distante h da base. Desta forma, podemos escrever:

[10] O número π (PI) representa o valor da razão entre o comprimento da circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. A letra grega π (lê-se: pi), foi adotada para o número a partir da palavra grega para perímetro, "περιμετρος", provavelmente por William Jones em 1706, e popularizada por Leonhard Euler alguns anos mais tarde. Ele é um número irracional, com infinitas casas decimais e não periódico. Além disso, é a mais antiga constante matemática que se conhece.

Fonte: https://www.em.com.br/app/noticia/especiais/educacao/enem/2015/04/04/noticia-especial-enem,634355/o-numero-pi-e-a-area-do-cicrculo.shtml

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Equação 17: Volume do Tronco do Cone

Toda esta estrutura está à disposição de alunos de Ensino Médio de escolas por todo o Brasil, sendo uma construção relevante para compreendermos o "caso" que estamos analisando neste trabalho, com as ferramentas disponíveis aos alunos.

CAPÍTULO III - ETNOMATEMÁTICA

Vimos no capítulo anterior dois métodos de calcular volume de sólidos que pode aplicar-se ao cálculo do volume de uma tora, ponto de largada deste trabalho. Esta apresentação nos possibilita correlacionar os métodos escolares com o método empírico, sem descartar um ou outro na construção do saber. Vejamos que a proposta de se considerar diferentes formas de cálculo de volume, acadêmicas e empíricas está estreitamente ligada a Etnomatemática.

Este campo de estudo chamado Etnomatemática, “busca explicar os processos de geração, organização e transmissão de conhecimento em diversos sistemas culturais e as forças interativas que agem nos e entre os três processos” (D’AMBROSIO, 1998, p.7,). Apresenta-se no estudo da Etnomatemática, uma matemática que considera o conhecimento existente nas salas de aula e junta isso ao conhecimento popular presente em uma comunidade, região ou microrregião, envolvendo contexto das pessoas com o ensino de determinado tópico (D’AMBROSIO, 1998). No caso deste trabalho a Geometria.

A sala de aula é o ambiente adequado para gerar uma busca por aplicabilidade e significado, por parte dos alunos, sobre o conteúdo apresentado. Fazer com que a matemática tenha significado para o aluno abre um novo meio de evolução do ensino, pois conseguimos despertar questões cognitivas quando envolvemos a realidade do aluno com o conhecimento que está sendo apresentado (FERREIRA, 1997). Esta visão impulsiona o Ensino de Matemática a um novo nível na esfera social. Dissociar ou não atribuir aplicabilidade àquilo que está sendo ensinado aos alunos dos ensinos fundamental e médio (e que tem alguma aplicabilidade) gera um saber inútil, que facilmente é apagado pela desmotivação da inutilidade. (MEDEIROS; SILVA, 2016).

Quando avaliamos a questão do código presente na fórmula empírica, percebemos traços claros da maneira que a matemática foi ensinada no Brasil, principalmente no início do século XX. Os poucos que frequentaram as escolas, eram instruídos com noções extremamente básicas de contas, quase que restrito a tabuada do 1 ao 10. Mesmo com tais noções básicas, os colonos, diante das situações práticas do seu dia a dia, desenvolviam habilidades de cálculos mentais que passam a ser fundamento e base para comércio e relações de mercado

(WANDERER; KNIJNIK, 2008). Diante das necessidades, mesmo sem todas as ferramentas em mãos, o indivíduo desenvolve-se com técnicas particulares de reflexão, análise e práticas sobre problemas. D'Ambrosio (2005) afirma que:

> Indivíduos e povos têm, ao longo de suas existências e ao longo da história, criado e desenvolvido instrumentos de reflexão, de observação, instrumentos teóricos e, associados a esses, técnicas, habilidades (artes, técnicas, techné, ticas) para explicar, entender, conhecer, aprender, para saber e fazer como resposta a necessidades de sobrevivência e de transcendência (matema), em ambientes naturais, sociais e culturais (etno) os mais diversos. Daí chamarmos o exposto acima de Programa Etnomatemática. O nome sugere o corpus de conhecimento reconhecido academicamente como Matemática. (D' AMBROSIO, 2005, p. 14).

A teoria matemática distante da realidade de muitos, como é o caso dos imigrantes que cresceram sem uma escola com base forte no ensino matemático, não impediu o desenvolvimento de técnicas e fórmulas em suas comunidades que são bases para seus negócios e vida social. As verdades matemáticas construídas através do saber empírico, por muitas vezes, emanam de uma causa social ou individual específica, ou seja, necessidades vitais para determinada comunidade em determinada época, foi assim ao longo de toda a história (BANDEIRA; 2012).

Considerando as ideias de D'ambrosio (1988) quando afirma que a Etnomatemática é um processo pedagógico de aprendizado, não um método, podemos traçar meios para desenvolver esse processo. Cabe ao professor, mergulhar-se com os alunos no campo sociocultural que eles estão inseridos, construindo cada etapa programática de conteúdo, sempre que possível, em consonância com a realidade dos alunos, tal qual a proposta de estudar a fórmula empírica de calcular o volume das toras.

No estudo da fórmula empírica de cálculo de volume das toras torna-se fundamental analisar, para efeito de compreensão da própria fórmula: o contexto social da aplicação, o grau de instrução escolar dos operadores das contas, a necessidade econômica que trouxe peso de consideração à fórmula, entre tantos fatores que são reais, sociais e vivos. Vemos que um assunto pode ser construído e estudado matematicamente considerando seu contexto social e possibilitando uma compreensão de como a matemática age diretamente na vida das pessoas.

Com os tamanhos avanços tecnológicos presentes no mundo atual, não temos mais como fugir de correlacionar contextos sociais ao estudo da matemática em si. O ensino não pode ser considerado estático, mas deve acompanhar esse constante avanço, norteando os alunos para um aproveitamento da tecnologia no sentido do aprendizado. Neste ponto podemos aplicar a matemática dentro da tecnologia, mostrando aos alunos, de fato, como ambas interagem entre si. Medeiros (2016) afirma que:

> Na perspectiva etnomatemática, o professor tecnológico torna-se aquele em que busca uma aproximação do saber cultural com o saber escolar. Aquele em que elabora estratégias para desenvolver o estudo da disciplina da melhor forma possível, como campo de pesquisa em constante construção, haja vista que esta possibilita um aprendizado efetivo, na medida em que as técnicas utilizadas possivelmente trarão maior envolvimento e interesse. Isso decorrente de tratarem-se os quais sujeitos já estejam familiarizados para aprender. E as tecnologias são um desses meios. Sendo assim, por que não utilizá-la como “meio” de adquirir conhecimento? Por que não elaborarmos estratégias para utilizá-las em salas de aula? (SILVA; MEDEIROS, 2016, p. 5)

As perguntas propostas por Silva e Medeiros (2016) podem ser consideradas e até mesmo reformuladas para uma reflexão: por que não, embora exija esforço do professor que é o principal agente do processo, utilizarmos a visão proposta pela Etnomatemática no ensino da matemática? Conforme facilmente constata-se nos escritos de D’Ambrosio (1988) precisamos, como professores de matemática, saber de onde estamos saindo e onde chegaremos com o ensino da matemática atual, avaliando se o conteúdo absorvido tem, de fato, sido agente de melhoria na vida das pessoas.

CAPÍTULO IV - O CÓDIGO VAI À ESCOLA

Cada vez mais é perceptível que o universo escolar, aqui destacando a figura do ensino da matemática, carece de elementos que vão aproximar os alunos da matemática, dissociando os pré-conceitos da inaplicabilidade de alguns conteúdos. Trazer aplicabilidade ao conteúdo é como juntar sabores que se somam e produzem plena satisfação aos que apreciam.

Rosa e Orey (2003) destacam a importância dos elementos que *aproximam*os alunos do conhecimento matemático, *aproximando* a matemática da realidade deles.

> A educação matemática tradicional visa a transmissão de uma determinada quantidade de técnicas que são utilizadas em situações artificiais e que são apresentadas como problemas. Os problemas são formulados artificialmente e somente auxiliam na memorização de certas habilidades pelos alunos. Estes tipos de problemas e técnicas utilizadas na resolução dos mesmos são geralmente tediosos, desinteressantes, obsoletos, e não possuem relação com o mundo externo e contemporâneo. Estas características da Educação Matemática tradicional são responsáveis pela diminuição do interesse, do rendimento e pelo baio grau de satisfação escolar que os alunos possuem. (ROSA, 2010, p.2)

Os dados apresentados no ano de 2015 pelo PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) em parceria com o INEPE (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais) mostram que 70% dos estudantes até 15 anos de idade no Brasil não alcançam o nível básico de conhecimento matemático.

Podemos questionar como tais números são obtidos, como são levantados e de que forma balizamos o grau de instrução dos alunos sobre a matemática observando, por exemplo, os parâmetros de avaliação atuais. Embora exista margem para questionamento, esses dados apontam para um objetivo: nos movermos como educadores matemáticos para a mudança desta realidade, aprimorando as técnicas de ensino, abordagem didática e lapidando o potencial de uma geração de jovens educandos imersos em um mundo moderno e tecnológico.

Tais desafios precisam se alinhar a uma pauta relacionada à vida das pessoas, ao desenvolvimento social onde o que ensinamos se torna base de construções que vão transformar a sociedade e tornar melhor a vida das pessoas.

D’Ambrosio (1986), levanta questionamentos acerca da eficiência no ensino de um conhecimento tão poderoso como a matemática.

> Muito mais relevante do que estudar detalhes de currículo ou de metodologia dentro de uma filosofia de ensino da matemática, abstrata e ditada por tradições culturais distantes, parece-me o problema de se examinar a fundo questões tão elementares como: porque estudar matemática, porque ensinar matemática e como fazer com que essa matemática que ensinamos às crianças de 6 ou 7 anos de idade, às poucas crianças dessa idade que têm a felicidade, na América Latina, de encontrar uma escola, tenha uma influência mais direta na melhoria da qualidade de vida dos seus irmãos. (D’AMBROSIO, 1986, p.14)

A ideia continua sendo construída por D’Ambrosio (1986), visando a objetivos reais dentro do ensino da matemática, mas com consciência a respeito da realidade social do país. No caso do Brasil e da realidade latino-americana, até mesmo uma região pode apresentar diferentes traços sociais que necessitam de uma abordagem diferente. Estamos, portanto, não refletindo sobre algo novo, nem aplicando algo que funciona em determina país ou região dita desenvolvida, mas construindo uma solução com base em um uma situação específica. No caso aqui apresentado, o conhecimento acerca de volume de corpos cilíndricos aparece relacionado ao cálculo de volume de uma tora.

Partimos da reflexão apresentada no capítulo2, onde apresentamos os métodos de cálculo de volume de uma tora, aproveitando as contribuições de um, no caso, um método empírico, para a construção do conhecimento mais geral, relacionado ao outro, ou seja, o conhecimento relacionado ao cálculo de volumes.

Vejamos um exemplo de como calcular o volume de uma tora de madeira utilizando o método que os alunos aprendem em sala de aula e comparando com o método empírico. Este exemplo é acessível a alunos de Ensino Médio e pode facilmente ser explanado como segue a demonstração:

Consideramos a figura abaixo, com as respectivas medidas, vejamos como calcular o volume:

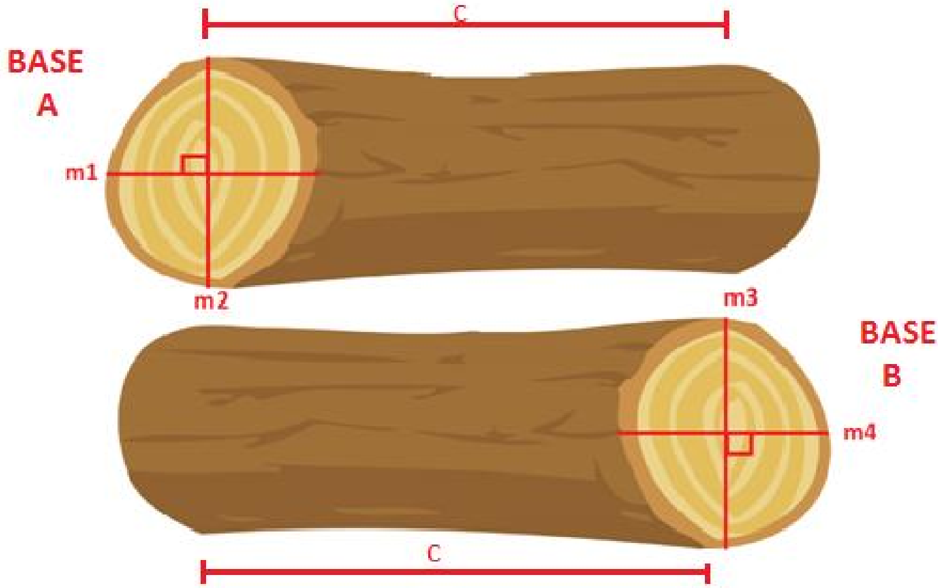

Figura 25: Exemplo de Cálculo de Volume
Fonte: Public Domain Q (2018).

Com os seguintes dados:

m1 = 61,26cm

m2 = 62,13cm

m3 = 64,22cm

m4 = 65,01cm

c = 312 cm

De início é importante destacar que a tora em questão não se trata de um cilindro, muito menos de um tronco de cone. Basta verificarmos as definições de cilindro e tronco de cone já visto anteriormente.

Logo, precisamos mostrar aos alunos que para se calcular uma situação real como esta que vamos propor requer aproximações e arredondamentos. Ou seja, necessariamente teremos que adaptar a teoria vista na escola, buscando calcular o volume desta tora com os elementos que temos até aqui.

4.1. Caso 1 – Volume do Cilindro

Sabemos como calcular o volume de um cilindro, vejamos como podemos calcular o volume desta tora utilizando esta base.

Como apresentado no capítulo 3, temos que o volume de um cilindro é calculado pelo produto da área da base pela sua altura.

$$Volume_{Cilindro} = A \times h$$

Equação 18: Volume do Cilindro

Neste exemplo, h assume o valor de c = 312cm. No caso de A (área da base), será calculada da seguinte maneira:

$$A = \pi r^2$$

Equação 19: Área da Base

Calculando desta maneira, teremos um valor aproximado que corresponde ao volume. Pois dados os valores de m, todos diferentes, imediatamente conclui-se que não se trata de uma base circular, mesmo assim efetuaremos o cálculo considerando r a metade da média aritmética entre os valores de m.

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4}$$

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{61,26 + 62,13 + 64,22 + 65,01}{4}$$

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{252,62}{4}$$

$$r = 31,57$$

Equação 20: Cálculo do Valor de r no Caso 1

Descoberto o valor de r, fruto da média aritmética dos “diâmetros” de ambas as bases, podemos prosseguir.

Assim, temos:

$$Volume_{Cilindro} = \pi(31{,}57)^2 \times 312$$

$$Volume_{Cilindro} = 976.907{,}91\ cm^3$$

Equação 21: Cálculo do Volume do Cilindro

4.2. Caso 2 – Volume tronco de Cone

O tronco de cone é uma figura semelhante a tora apresentada, pois analisando as medidas temos uma base “maior” e outra base “menor”, surge então uma característica do tronco de cone. Muito embora necessite de um cálculo sobre média aritmética para se chegar aos valores necessários para utilizar o cálculo escolar. Vejamos:

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

Equação 22: Volume do Tronco do Cone

Para efeito deste cálculo, considerando a fórmula do volume do tronco de cone, precisamos decidir sobre r e R. Consideramos a Base A, com m1 e m2 a base menor, chamaremos a metade média de m1 e m2 de r. Da mesma maneira consideramos a Base B, com m3 e m4 a base maior, chamaremos portanto a metade da média de m3 e m4 de R. Desta forma:

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{m1 + m2}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{61{,}26 + 62{,}13}{2}$$

$$r = 30{,}84\ cm$$

Equação 23: Cálculo do Valor de r no Caso 2

Também:

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{m3 + m4}{2}$$

$$R = \frac{1}{2} \times \frac{64{,}22 + 65{,}01}{2}$$

$$R = 32{,}30\ cm$$

Equação 24: Cálculo do Valor de R no Caso 2

Da mesma forma que o caso 1, obtemos valores de r e R que são frutos de arredondamentos.

Temos então:

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = \frac{\pi \times 312}{3}(32{,}30^2 + (32{,}30 \times 30{,}84) + 30{,}84^2)$$

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = 326{,}72 \times 2990{,}52$$

$$Volume_{tronco\ de\ cone} = 977.065{,}17\ cm^3$$

Equação 25: Cálculo do Volume do Tronco do Cone

Concluído o resultado do caso 1 e caso 2, podemos perceber a proximidade de resultados. Vejamos como o cálculo é feito utilizando o método empírico:

4.3. Caso 3 – Método Empírico

Considerando o método enunciado no capítulo 2, ou seja, o método empírico. Temos:

$$Volume = m \times m \times c \times 0{,}7854$$

$$Volume = \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4} \times \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4} \times c \times 0{,}7854$$

$$Volume = 63{,}15 \times 63{,}15 \times 312 \times 0{,}7854$$

$$Volume = 977.374{,}42\ cm^3$$

Equação 26: Cálculo do Volume pelo Método Empírico

Vejamos o resultado para compararmos a resolução pelos 3 diferentes métodos:

$$Caso\ 1 = 976.907{,}91\ cm^3$$

$$Caso\ 2 = 977.065{,}17\ cm^3$$

$$Caso\ 3 = 977.374{,}42\ cm^3$$

Podemos perceber que o método empírico, caso 3, chega a um número realmente muito próximo do cálculo escolar, casos 1 e 2. Se compararmos a diferença entre eles, para efeito de comércio de madeira, ou até mesmo para efeitos reais de utilização, o valor pode ser considerado desprezível.

Vale destacar, já no capítulo 3, quando apresentamos a construção dos diferentes cálculos de volume, que a base para se calcular os casos 1 e 2 é o produto da Área da Base pela altura do sólido. Logo, podemos analisar o caso 3 sob a mesma ótica para compreender melhor sua exposição.

Notemos que ao utilizar uma fórmula empírica para o cálculo de volume da tora, é necessário se fazer arredondamentos de suas bases, considerando uma única medida que chamamos de m, como já visto no capítulo 2.

$$m = \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4}$$

Equação 27: Média da Medida das Bases

O arredondamento presente no método empírico está transformando cada tora irregular em grandes cilindros. Ambas as fórmulas podem ser comparadas para que possamos analisar. Desta forma:

$$Volume_{método\ empírico} = m \times m \times c \times 0{,}7854$$

$$Volume_{Cilindro} = A \times h$$

Onde A é a Área da Base do cilindro, escrito da seguinte forma:

$$A = \pi \times r \times r$$

Note que h e c referem-se à mesma coordenada em ambos os cálculos. Restando analisar:

$$m \times m \times 0{,}7854$$

$$\pi \times r \times r$$

Neste comparativo temos, nas duas fórmulas, a presença de constantes para se analisar. É o caso de 0,7854 e π. Quanto ao m e r, vejamos suas construções:

$$r = \frac{1}{2} \times \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4}$$

$$m = \frac{m1 + m2 + m3 + m4}{4}$$

Estas duas coordenadas, m e r, estão presentes nas duas fórmulas de cálculo. Ambas são construídas a partir dos mesmos dados de medição apresentados no exemplo Figura 25. Vejamos como é possível relacioná-las:

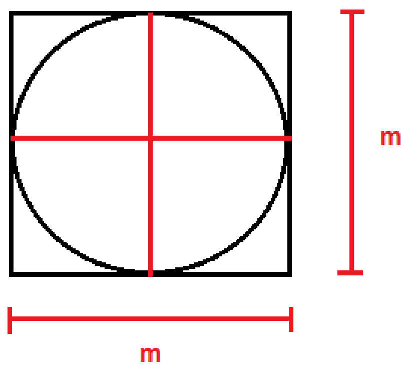

Figura 26: Circunferência Inscrita no Quadrado

Partindo da figura 26, pois r indica o raio da base circular do cilindro, temos:

$$r = \frac{m}{2}$$

Equação 28: Raio da Base Circular Inscrita no Quadrado

A área limitada por uma circunferência qualquer é calculada da seguinte forma:

$$\pi \times r^2$$

$$Substituindo\ r, temos\ \rightarrow\ \pi \times \left(\frac{m}{2}\right)^2 \rightarrow\ \pi \times \frac{m^2}{4}\ \rightarrow \frac{\pi}{4} \times m^2$$

$$Efetuando\ a\ divisão\ obtemos\ \rightarrow 0{,}7853981 \ldots \times\ \ m^2$$

Equação 29: Cálculo da Área da Base Circular

Vejamos agora, após esta construção como fica a comparação de ambas as fórmulas:

$$Volume_{método\ empírico} = m \times m \times c \times 0{,}7854$$

$$Volume_{Cilindro} = \frac{m}{2} \times \frac{m}{2} \times \pi \times h$$

Reorganizando os termos, temos:

$$Volume_{método\ empírico} = m \times m \times c \times 0{,}7854$$

$$Volume_{Cilindro} = m \times m \times c \times \frac{\pi}{4}$$

Neste ponto descobrimos matematicamente que a constante 0,7854, o chamado código, deriva de arredondamentos que transformam as toras em cilindros. Esta constante utilizada de forma natural, trata-se de uma adaptação da fórmula que calcula o volume do cilindro, que vimos no capítulo 3.

Quando paramos para refletir sobre a situação real em questão estamos apresentando aos nossos alunos o que D'Ambrosio(1986) chama de *aspecto holístico que se contrapõe ao aspecto reducionista,* ou seja, elementos são acrescentados na situação traduzida em linguagem convencionada que passam quase que aparentemente despercebidos em uma situação real. Em uma tentativa de traduzir isso eu escreveria: "mostrar para nossos alunos que o dia-a-dia não é tão idealizado, e não é recortado para caber na matemática como os problemas de livros didáticos em geral o são". Seria esse contraponto abordado pelo autor que queremos destacar aqui.

A partir da análise de ambos os cálculos, utilizamos a figura 25 para tratar o conceito de inscrição e circunscrição de circunferências em quadrados, chegamos a padrões que podem ser provados sem grandes dificuldades e observados na prática.

Descobrimos com a análise, que dada a área de um quadrado qualquer, temos uma circunferência inscrita nele e a área desta circunferência corresponderá, sempre, a 78,54% da área do quadrado, ou seja, 0,7854, exatamente o código. Esta construção não apenas motiva meu desejo pelo ensino da matemática, mas enaltece o brilho nos olhos. Comprovar matematicamente aquilo que permeou o desconhecido, mas que continua escrito na história da vida de quem presenciou, de forma simples e didática e propor esta temática às salas de aula é a melhor conquista que um estudante pode atingir. Esta conclusão e o que apresentamos até aqui mostra como um fato intrigante, rico em conceitos matemáticos, pode ser "desvendado" ao universo do saber e pode simplificar o caminho do ensino de determinados conceitos dentro da Matemática.

Vimos, portanto, que tal investigação pode desencadear uma construção inimaginável de saberes, aproximar o aluno de uma realidade viva e tornar as aulas interessantes e, quem sabe, para alguns, até divertidas; tudo isso sem desconsiderar os conhecimentos que necessitamos ensinar dado o currículo escolar mas juntando-os com as realidades e situações diversas que encontramos no mundo em que vivemos.

Se isso é possível com um conteúdo de uma disciplina específica, o que podemos fazer com várias disciplinas que hoje são propostas em nossos currículos escolares, com horas e horas que passamos enchendo nossos alunos de situações que nunca vivenciarão ou jamais terão uma finalidade prática.

CONCLUSÃO

Buscamos neste trabalho mostrar a importância do saber matemático empírico na aprendizagem do saber matemático escolar. Como base que originou o exemplo aqui estudado, apresentamos um breve estudo da colonização na região sul, dada principalmente por imigrantes italianos e alemães.

Em particular, o resgate da utilização de um método empírico de cubagem de madeira, utilizado por imigrantes na região de Videira-SC, foi o objeto principal de estudo para junção dos saberes no ambiente escolar. Após a apresentação do método e análise do mesmo, partimos de um paralelo para resolver o problema com ferramentas utilizadas no ensino de matemática na escola.

Dentro da abordagem proposta, de se apresentar em sala de aula e se trabalhar com métodos empíricos na validação do conteúdo apresentado, percebemos que a matemática passa a ter mais significado, trazendo aos alunos uma prática de utilização, seja no contexto onde vivem ou analisando contextos muito próximos. No caso deste trabalho, observamos uma ferramenta de metragem cúbica utilizada na comercialização de madeira e validamos sua estrutura matemática utilizando geometria espacial.

Feita as análises foi possível validar os estudos de etnomatemática, que na figura de seu principal estudioso, Ubiratan D'Ambrósio, propõe uma matemática mais próxima e aplicável a realidade social. D'Ambrósio(2005)destaca um processo de ensino e aprendizado, não um modelo pronto, mas uma construção onde o principal agente, que rege essa caminhada é o professor.

Dentro desta visão sobre o ensino matemático entendemos que estruturas do saber empírico, como a utilização do *código* aqui mencionado na fórmula de cálculo do volume de toras, devem ser aproveitadas e estudadas juntamente com o conhecimento científico, trazendo real significado aos alunos no estudo da matemática. Sendo esta constatação uma sugestão para trabalhos futuros que possam contribuir no processo de ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

AGRO FLORESTAL ALIANÇA. *Toras de Pinus*. Disponível em <http://www.florestalalianca.com.br/tora-de-pinus/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

ALTOE, F. E. *História e evolução da colheita florestal no Brasil.* Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

BANDEIRA, F. A.*Pedagogia etnomatemática: uma proposta para o ensino de matemática na educação básica.* Revista Latino-americana de Etnomatemática, vol.5, n. 2, p. 21-46, ago. 2012.

BELTRÃO EPIS. *Catálogo de cursos – operador de motosserra*. Disponível em <http://www.beltraoepis.com.br/cursos.php>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

CABRAL, D. C.; CESCO, S. *Notas para uma história da exploração madeireira na Mata Atlântica do Sul – Sudeste. Ambiente e Sociedades.* Campinas, v. XI, n. 1, p. 33-48, jan/jun 2008.

COMMODITY BRASIL. *produtos*. Disponível em <http://commoditybrazil.com.br/produtos/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexão sobre educação e matemática.* São Paulo: Summus, Campinas: Ed. UNICAMP, 1986.

______. *Etnomatemática se ensina?* Rio Claro: Bolema, a.3, n. 4, UNESP, 1988.

______. *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer.* São Paulo: Editora Ática, 1998.

______. *Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.* São Paulo: Educação e Pesquisa, vol. 31, n.1, 2005.

FERREIRA, E. S. *Etnomatemática: uma proposta metodológica*. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1997.

FRANCK FILHO, F. H. *Seleção de espécies arbóreas naturais da região sul do Brasil para reflorestamento e emprego na arquitetura e no design.* Porto Alegre: URGS, 2005.

GIRON, L. S. *Colônia Italiana e Educação. História da Educação*. Pelotas: ASPHE/FaE/UFPeL, p. 87-106, set 1998.

MERCADO LIVRE. *Papel sulfite A4 40 Kilos 120 Gramas V.m.p. Pct/500*. Disponível em <https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-821276940-papel-sulfite-a4-40-kilos-120-gramas-vmp-pct500-_JM>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

NATIVA NEWS. *Sindicato de indústrias madeireiras critica exigência de novo certificado*. 24 de julho de 2017. Disponível em <http://www.nativanews.com.br/cidade/id-619236/sindicato_de_industrias_madeireiras_critica_exigencia_de_novo_certificado/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

OREY, D. C.; ROSA, M. *Vinho e Queijo: Etnomatemática e Modelagem.* Rio Claro: Bolema, v. 16, n. 20, set 2003.

PALIMONTES. *Papel Off-SetChambril Alcalino 66 X 96 120g Inter. PaperFlsUnd*. Disponível em < https://www.palimontes.com.br/papel-off-set-chambril-alcalino-66-x-96-120g-inter-paper-fls-und.html>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

PEREIRA LULA, Kariton. *Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas*. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática). Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Disponível em <https://sabermatematica.com.br/paralelepipedo.html>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

PIXABAY. *Cortar A Árvore, Machado, Madeira*. 02 de outubro de 2016. Disponível em <https://pixabay.com/pt/cortar-a-%C3%A1rvore-machado-madeira-1716671/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

PUBLIC DOMAIN Q. *[Ilustração livre] Madeira*. Disponível em <https://publicdomainq.net/wood-0014877/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

SABER MATEMÁTICA. *Paralelepípedo*. Disponível em <https://sabermatematica.com.br/paralelepipedo.html>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

SANTOS, Miriam de Oliveira. *Reescrevendo a História: imigrantes italianos, colonos alemães, portugueses e a população brasileira no sul do Brasil.* Florianópolis: Revista Tempo e Argumento, v.9, n. 20, p. 230-246, jan/abr 2017.

SILVA, C. C. R.; MEDEIROS, W. A.*Ensino de Matemática na Perspectiva Etnomatemática: tecnologias como meio de aprendizado*, Goiânia, 2016.

TEC CONCURSOS. *Enunciados de questões e informações de concursos*. Disponível em <https://www.tecconcursos.com.br/conteudo/questoes/400263>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

TECNOLOGIA E TREINAMENTO. *Como usar a madeira de eucalipto na fazenda*. 06 de abril de 2010. Disponível em <http://www.tecnologiaetreinamento.com.br/agricultura/produtos-florestais-agricultura/usar-madeira-de-eucalipto-fazenda/>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

TROMBINI, J.; LAROQUE, L.F.S.; CASTOLDI, A. P. *As Companhias Colonizadoras no Processo da Imigração Italiana em Territorialidades do Vale do Taquari/Rio Grande do sul.*Recife: CLIO: Revista de Pesquisa Histórica, n. 35, p. 178-200, jul/dez 2017.

VAZLON BRASIL. *Anúncio "Serra Antiga Modelo Traçador Tam. Peq"*. Disponível em <https://br.vazlon.com/tracador-serra-antiga-peq-usada-p-serrar-tabuas#>. Acesso em: 24 de outubro de 2018.

WANDERER, F.; KNIJNIK, G. *Discursos produzidos por colonos do sul do país sobre a matemática e a escola de seu tempo.* Revista Brasileira de Educação, v.13, n. 39, set/dez 2008.