André Borges Carlos

Teoria dos Jogos Evolucionários

Florianópolis

2018

André Borges Carlos

Teoria dos Jogos Evolucionários

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemática

Departamento de Matemática

Licenciatura em Matemática

Orientador: Dr. Leandro Batista Morgado

Florianópolis

2018

André Borges Carlos

Teoria dos Jogos Evolucionários

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, do Departamento de Matemática - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho aprovado. Florianópolis, 2018

Profa Dra. Sonia Palomino Castro
Coordenadora do Curso

Banca Examinadora:

Dr. Leandro Batista Morgado(Orientador)
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis
2018

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha primeira professora e grande inspiração, minha mãe. Agradeço ao meu pai pelo seu apoio e ser sempre meu porto seguro. Agradeço a minha irmã por sempre estar do meu lado e me compreender. Agradeço a todos os meus demais familiares, que sempre estiveram presente me apoiando.

Agradeço muito a meu orientador, Leandro Batista Morgado, por me acompanhar durante estes anos de graduação sempre dando apoio, tendo paciência e sendo muito prestativo, principalmente no processo de elaboração do TCC.

Agradeço ao professor José Luiz Rosas Pinho, por ter me aceitado como bolsista do PET e ter sido essa pessoa maravilhosa. Agradeço a professora Rosilene Beatriz Machado por ter sido aquela pessoa que auxiliou a abrir minha mente a um novo mundo. Agradeço as professoras Alda Dayana Mattos Mortari e Carmem Suzane Comitre Gimenez por terem me aceitado como bolsista da ORMM, me proporcionando um grande aprendizado.

Agradeço a meu amigo Uriel Bergamo Rover, por ter me acompanhado durante todos estes anos, não me deixando sozinho e sendo sempre compreensível com meus defeitos. Agradeço a Sabrina Vigano por sempre me compreender e por me dar ótimos conselhos e a Isabele Sartor por estar perto e ser pessoa do qual sempre pude confiar.

Agradeço a Bruna da Silva Donadel por ter sido minha primeira amiga em Florianópolis e por não deixar me sentir sozinho, a Victória Foyes Gittens por ter sido a pessoa fantástica que sempre estava do meu lado me mostrando que nunca vale a pena desistir e a Ana Carolina Altomani pela companhia durantes estes anos e por sempre estar do meu lado. Agradeço a Letícia Figueiredo de Carvalho por me mostrar a sempre ter persistência e dedicação em meus objetivos e a Lara Lopes Miranda por ter auxiliado a abrir minha mente, deixando de lado preceitos conservadores.

Agradeço a Jean Carlo Gengnagel pela parceria durante estes anos, a Gabriel Schafaschek, Carlos Eduardo Castro e Ben-Hur Eidt por toda a ajuda e por servirem de inspiração. Agradeço a Mateus Oliveira e Eduardo Pandini por todas as festas e momentos de diversão. Agradeço a Helena Carolina Koch e Carlos Eduardo Caldeira por me acompanharem durante meu período no PET.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma noção geral sobre a Teoria dos Jogos, aplicando os conceitos da área na Biologia através de argumentos matemáticos. Inicialmente, serão discutidos os principais conceitos e ideias de Teoria dos Jogos, mostrando aspectos como estrutura, formas e meios de resolver um jogo. A seguir, apresentam-se estes conceitos sob a perspectiva da Teoria dos Jogos Evolucionários, com enfoque em situações de cooperação e conflito entre seres vivos. Por fim, serão apresentadas duas situações concretas de jogos evolucionários: Hawk-Dove e Jogo da Caça.

Palavras-chave: Teoria de Jogos, equilíbrio de Nash, estratégia, *payoff*, jogos evolucionários.

Abstract

The goal of this paper is to present a general notion about Game Theory, applying the concepts of this area in Biology. Initially, we discuss the main concepts and ideas of Game Theory, showing aspects such as structure, ways and solutions of a game. After, we deal with this concepts from the perspective of Evolutionary Game Theory, with focus in situations of cooperation and conflict among individuals. Finally, two concrete situations of biological problems will be presented: Hawk-Dove and hunt game.

Keywords: Game theory, Nash equilibrium, strategy, *payoff*, evolutionary games.

Sumário

Introdução

No trabalho, em casa ou em qualquer lugar, estamos fadados a algumas escolhas que nos afetam em grandes ou pequenas proporções. Seja em situações simples como o tipo de açúcar a por no café, a cor da gravata; ou mesmo em situações mais complexas como o melhor investimento para nosso capital, se vale a pena para uma empresa contratar novos funcionários, ou mesmo se um país resolve ou não entrar em guerra.

Há uma área de estudos que busca a melhor solução para todos estes tipos de problemas, que é a Teoria do Jogos. Obviamente, o objetivo de criar uma área de estudos não é encontrar a melhor roupa para ir em uma festa ou a melhor marca de vinho para comprar no mercado. Não que ela não ajude nestas circunstâncias, mas o ponto é que a Teoria dos Jogos visa resolver situações muito mais complexas e delicadas que envolvem muito mais do que uma simples escolha.

De acordo com K. Dutta (2001), a Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais agentes de decisão interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo.

No primeiro capítulo deste trabalho, veremos alguns conceitos básicos da área e como esses conceitos aplicam-se a diversas situações. Alguns elementos são essenciais para a estruturação do modelo matemático de um jogo. Entre eles, vamos destacar jogadores, estratégia e recompensa.

Neste mesmo capítulo, serão apresentadas também noções importantes para a resolução de um jogo. Primeiro, mostraremos as formas de um jogo, ou seja, maneiras pelas quais podemos representá-lo. Em seguida, abordaremos os dois principais métodos de resolução de um jogo, que são a noção de Estratégia Dominante e Equilíbrio de Nash. Por fim, também será discutido sobre Estratégia Mista, e como esse tipo de estratégia pode ser adotada em um jogo.

No segundo capítulo, discutiremos a Teoria dos Jogos Evolucionários, que é uma aplicação da Teoria dos Jogos na Biologia. De acordo com Hammerstein e Selten(1994), o intuito do estudo da Teoria do Jogos na Teoria da Seleção Natural é a análise do conflito e cooperação em animais e plantas. A estrutura destes tipos de jogos apresenta-se de uma forma diferente. Nesta aplicação, a Teoria dos Jogos não assume que os jogadores comportam-se de maneira racional, mas sim na ideia de que o processo de seleção natural Darwiniano conduz organismos na direção da otimização de sucessos reprodutivos.

Neste capítulo, também serão retomados alguns conceitos do Capítulo 1 sob uma perspectiva mais aplicada à Biologia. Outros conceitos serão introduzidos, como o de Estabilidade Evolucionária e Pontos de Equilíbrio, que servirão de base para equacionar e avaliar um Jogo Evolucionário.

Já no Capítulo 3, serão apresentadas duas situações de Jogos Evolucionários, aplicando os conceitos vistos nos capítulos anteriores. Primeiro, veremos o jogo Hawk-Dove, que é um jogo no qual indivíduos de uma espécie entram em conflito. Segundo, o Jogo da Caça, que é uma situação de cooperação entre indivíduos de uma mesma população.

Desta forma, pode-se desenvolver uma análise sobre a Teoria de Seleção Natural utilizando toda a bagagem sobre a Teoria dos Jogos de uma forma matemática, utilizando de conceitos já desenvolvidos e alterando outros. Fazer essa contextualização entre essas áreas é uma forma de interrelacionar o conhecimento e buscar novas perspectivas para problemas existentes e assim, otimizar as soluções.

1 Aspectos Gerais

A Teoria dos Jogos possui aplicações em diversas áreas do conhecimento, entre as quais Economia, Política, Estatística, Esportes, e também Biologia. Neste capítulo, vamos apresentar aspectos históricos sobre a área, bem como definição de um jogo, jogadores, estratégias, recompensas, ou seja, os elementos necessários para uma discussão posterior.

1.1 Aspectos Históricos

As primeiras pesquisas sobre a Teoria dos Jogos surgiram na década de 1830, sendo o francês Augustin Cournot e o inglês Francis Edgeworth os grandes pioneiros do estudo da área. De acordo com K. Dutta (2001), ambos economistas buscavam uma análise de competições imperfeitas de mercado, Cournot analisou um problema de oligopólio e empregou um método de análise que hoje é um caso especial de um conceito muito usado da Teoria dos Jogos Moderna.

Um grande avanço foi o estudo do jogo de xadrez por E. Zermelo em 1913. De acordo com K. Dutta (2001), Zermelo também foi pioneiro de uma técnica de resolução de certos jogos que hoje é conhecida como Jogos Reversos.

Um trabalho importante em tempos mais modernos foi o artigo de John von Neumann, publicado em 1928. Como grande consequência desse artigo, John von Neumann juntamente com Oskar Morgenstern escreveram um importante livro da área, cujo título é "Theory Games and Economic Behavior"(1944).

De acordo com K. Dutta (2001), neste livro os dois fizeram uma grande contribuição para a formalização do conceito de jogo. Primeiro, eles deram uma base axiomática à teoria da utilidade, uma teoria que explica o que os jogadores obtêm ao jogar um jogo. Ademais, eles caracterizaram o que se chama de jogos de soma zero, ou seja, um jogo de dois jogadores no qual um ganha se e somente se o outro perde. Terceiro, eles introduziram uma versão de jogos chamada jogos cooperativos.

O próximo grande avanço foi devido ao matemático John Nash, em 1950, introduzindo um conceito de solução muito usado na Teoria dos Jogos Moderna. Esse conceito, chamado de Equilíbrio de Nash, é um dos mais importantes da teoria e foi muito influente para construção da teoria atual.

Em 1994, John Forbes Nash Jr, John Har-sanyi e Reinhard Selten receberam o prêmio Nobel por suas contribuicôes para a Teoria dos Jogos. De acordo com K. Dutta (2001) eles generalizaram a ideia de Equilíbrio de Nash para jogos dinâmicos, definindo como o jogo desdobra-se sequencialmente ao longo do tempo.

Atualmente, diversas áreas de estudo utilizam da Teoria dos Jogos para resolver seus problemas, tal qual a Biologia, Política, Economia e Estatística. Cada vez mais a Teoria dos Jogos vem contribuindo com novos conceitos e formas de solucionar problemas.

1.2 Constituição de um Jogo

O objetivo de realizar um estudo na Teoria dos Jogos é desenvolver uma análise de situações de conflito e cooperação numa situação qualquer. Nesse sentido, a Teoria dos Jogos busca modelar alguns fenômenos observados sob uma forma que possibilite um melhor aproveitamento, pelo menos, por uma das partes participantes do evento.

Inicialmente, vamos caracterizar o que é um jogo sob o ponto de vista desta teoria. Este conceito pode, por vezes, sofrer várias modificações e variações dependendo de suas aplicações, no entanto sua essência nunca se altera. Em seguida, apresentamos os princípios de um jogo e suas estruturas mais atômicas.

Num jogo deve haver algo ou alguém que desenrole o andamento, que construa as relações. Desta forma, cada participante de um jogo é denominado como jogador e o conjunto de jogadores é o que se chama de grupo de jogadores. Ele que é o responsável pela escolha das estratégias e formação dos raciocínios. É o jogador também quem vai ser o beneficiado ou prejudicado com o resultado do jogo.

Há um objetivo em entrar num jogo dentro da Teoria dos Jogos, há algo que se almeja. Ninguém, nem algo, simplesmente joga um jogo sem um objetivo, sem algo a se obter. De acordo com K. Dutta (2001), denomina-se como recompensa(*payoff*) como objeto de desejo do jogo, ou como significa a própria palavra: a recompensa.

Os jogadores vivem em umu meio ou uma situação, e de alguma forma eles possuem relações que os fazem participar do jogo. Essas relações se dão de diferentes formas, a primeira seria a interação. Para estar no jogo eles têm que realizar ações, e estas ações vão ter consequências diretas sobre os outros jogadores. Desta forma, de acordo com K. Dutta (2001), uma interação é toda ação que um determindado jogador faz que de alguma forma vá afetar os demais jogadores.

Cada jogador deve desenvolver sua jogada da melhor forma, de modo que consiga as melhores recompensas. Para isso ele deve desenvolver uma série de raciocínios e considerações que darão suporte à sua decisão, e isso é o que se chama de estratatégia do jogo.

Dentro do jogo há várias ações a serem tomadas. Através da estratégia pode-se direcionar as ações para se obter as recompensas. Partindo do princípio que se deseja obter as melhores recompensas possíveis, deve-se utilizar a melhor estratégia possível e denomina-se como raciocínio a melhor ação a ser tomada no jogo.

Claro que um jogo pode variar muito de situação para situação, no entanto esses aspectos comentados até agora são os alicerces que possibilitam que haja todo um desenvolvimento da Teoria dos Jogos.

Exemplo 1.2.1. *Duas empresas no mercado que vendem sabonetes. A Empresa A vendia sabonetes com cheiro de eucalipto e ocupava 40% do mercado de vendas da área enquanto a Empresa B vendia sabonetes com cheiro de lavanda e ocupava 60% do mercado do produto.*

A Empresa A resolveu parar de produzir sabonetes com cheiro de eucalipto e passou a vender sabonetes com cheiro de lavanda enquanto a Empresa B continuou na produção de sabonetes de lavanda.

Como consequência da ação das duas empresas, o domínio de mercado da área passou a ser de 50% para cada uma das empresas.

Neste exemplo temos uma situação de competição entre duas empresas pelo mercado de venda de sabonetes. Note que temos como jogadores a Empresa A e a Empresa B e cada uma delas podia desenvolver duas estratégias: investir num novo produto ou permanecer com o produto inicial. Cada estratégia é uma interação e o raciocínio para a Empresa A foi o de investir num novo tipo do produto, pois acabou acarretando a maior recompensa, que foi o aumento do domínio de mercado.

Uma consideração muito importante que estamos assumindo nesses exemplos iniciais é o **comum conhecimento**, ou seja, assume-se que todos os participantes tenham o conhecimento sobre as regras do jogo, e que nenhum jogador possua vantagem de saber de regras que demais jogadores não saibam. Claro que podem ocorrer situações nas quais algum jogador possa ter mais estratégias ou recompensas maiores, no entanto o comum conhecimento se refere ao fato de todos os jogadores estarem cientes do que podem ou não fazer, bem como de que todas as informações necessárias para a realização do jogo estejam expostas. Outro exemplo, que é bem conhecido, é o *Dilema do Prisioneiro* que expomos a seguir:

Exemplo 1.2.2. ***Dilema do prisioneiro*** *Imagine dois prisioneiros, Arnaldo e Bernaldo, que são acusados de um crime. A polícia não possui provas suficientes para afirmar que um deles é o culpado, porém tem certeza que um dos dois é o criminoso. Desta forma, terá que solucionar o caso apenas com o testemunho dos dois acusados. Cada um será interrogado separadamente sem saber o que o outro irá falar e possuem duas opções: confessar o crime ou se manter em silêncio.*

Para encontrar uma solução para este caso, a polícia fez a seguinte proposta: se os dois confessarem o crime, ambos irão pegar 5 anos de prisão cada; se um confessar e o outro permanecer em silêncio, o que confessou sairá livre e sua confissão será usada para *sentencionar o outro prisioneiro que pegará 15 anos de prisão; se os dois permanecerem em silêncio, cada um pega 1 ano de prisão;*

Observe a tabela abaixo:

Arnaldo / Bernaldo	*SILÊNCIO*	*CONFESSAR*
SILÊNCIO	*(-1, -1)*	*(-15, 0)*
CONFESSAR	*(0, -15)*	*(-5, -5)*

Assumindo que Bernaldo confessou, verifica-se que Arnaldo terá a maior recompensa se confessar(pois 5 anos de prisão é melhor do que 15). Por outro lado, se Bernaldo permanecer em silêncio, a melhor estratégia para Arnaldo é também confessar (pois nenhum ano de prisão é melhor do que 1). Desta forma, independente da estratégia adotada por Bernaldo, a melhor estratégia para Arnaldo é confessar, pois dessa forma ele obterá uma melhor recompensa.

De forma análoga, para Bernaldo, a melhor solução também seria confessar. Neste jogo a estratégia *confessar* caracteriza uma estratégia dominante. Veremos esse conceito mais a frente com mais detalhes.

1.3 Jogadores

Em todo jogo dentro da Teoria dos Jogos é necessário ter alguém ou algo que desenvolva o jogo, que faça o jogo acontecer, que vá desenvolver as ações, que vá receber as recompensas, enfim, que vá jogar o jogo. Como já discutido anteriormente, denomina-se como jogador quem for realizar as ações e fazer o jogo acontecer.

Ao se analisar a própria palavra "jogador"a primeira ideia que se vem em mente é de alguém que vá realizar uma disputa com algum outro jogador com o objetivo de ganhar algo. Dentro da Teoria dos Jogos não se pensa desta forma, a ideia do ser que é o jogador é muito mais ampla e pode ser reconfigurada conforme a necessidade.

É comum pensarmos nos jogadores como duas ou mais pessoas que estão em uma competição qualquer. No entanto, a definição de jogador para a Teoria do Jogos é mais ampla, e pode ser considerada em muitos outros aspectos. Por exemplo, dentro da Economia, os jogadores podem ser empresas, firmas ou instituições que de alguma forma enquadram-se dentro dos conceitos de um jogo. Na Política, normalmente os jogadores concretizam-se como países, estados ou cidades. Na Biologia, ainda, pode-se pensar no jogador como sendo um ser vivo ou uma população de determinada espécie, que possui uma certa característica herdada de seus descendentes.

De acordo com K. Dutta (2001), pode-se ainda pensar em um único jogador como sendo uma coletividade, como por exemplo, três países que entram em guerra contra outros dois; neste caso, cada grupo de países representa um jogador. Em outros casos, pode-se ainda ter vários jogadores que disputam entre si de forma competitiva, como por exemplo cinco empresas que querem ganhar mercado para o seu produto.

Assim, desde que não se perca a sua essência, o conceito de jogador pode ser ampliado conforme a necessidade, de forma a se adequar às situações. É o jogador quem vai determinar o destino do jogo, desta forma, definir o que vai ser o jogador dentro do contexto é essencial para o desenvolvimento do jogo.

1.4 Estratégias

Dentro de um jogo, cada jogador tem ações a serem realizadas que podem levar a diferentes resultados, cada uma destas ações denomina-se como uma estratégia. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo, em termos matemáticos, cada jogador tem uma função utilidade que atribui um número real a cada situação do jogo.

Dificilmente um jogador terá apenas uma única estratégia, geralmente ele possui um conjunto de estratégias. O objetivo de um jogo é o de encontrar a estratégia que vá trazer as melhores recompensas ou, no mínimo, reduzir as perdas.

Uma estratégia pode ser dominada ou dominante. Uma estratégia dominante seria aquela que sempre vai ser a melhor resposta contra qualquer estratégia do jogador oponente. Em contrapartida, uma estratégia dominada sempre vai ser a pior resposta contra qualquer estratégia do oponete. Estes dois conceitos serão vistos com mais clareza a frente.

1.5 Recompensa

Falar de um jogo dentro da Teoria dos Jogos é falar de uma situação de competição ou cooperação com um objetivo específico. Um jogo não ocorre apenas por acontecer, ele precisa de algo que dê fundamentação, um objetivo para os jogadores. De acordo com K. Dutta (2001), denomina-se recompensa (*payoff*) ao benefício obtido por cada jogador como resultado das estratégias escolhidas pelos jogadores. Veremos posteriormente que a recompensa é representada por meio de uma função, denominada utilidade.

Em Teoria de Jogos, podemos pensar na recompensa de formas diversas. Numa situação entre duas empresas competindo pelo mercado de determinado produto, o *payoff* pode ser estabelecido como proporção de domínio do produto no mercado. Em uma guerra, podemos pensar na recompensa como a vitória sobre os inimigos ou até mesmo o menor custo necessário para vencer. Na Biologia, em uma competição por alimento entre determinados indivíduos de uma mesma espécie, os *payoffs* podem ser vistos como a fração de alimento obtida.

Não há uma regra para determinar as recompensas de um jogo, elas são estabelecidas de acordo com a situação. No Exemplo 1.2.1, a recompensa era o domínio do mercado enquanto que no Exemplo 1.2.2 era o tempo de prisão de cada acusado. Este conceito pode ser modificado de acordo com o campo de estudo no qual se está aplicando a Teoria dos Jogos, se adequando de uma forma mais específica, conforme as necessidades.

1.6 Notações

Até o momento foram apresentados diversos conceitos e ideias fundamentais para a compreensão da Teoria dos Jogos. Pra uma melhor formalização, serão apresentadas algumas notações que utilizaremos daqui para frente.

Jogador: Quando não especificado de forma diferente, o conjunto dos n jogadores de um jogo será dado por $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, para $n \geq 2$.

Estratégias: Dado $i \in J$, denotamos por s_i uma estratégia genérica jogada pelo jogador i.

Conjunto de possíveis estratégias: Dado $i \in J$, S_i representa o conjunto de todas as estratégias do jogador i.

Perfil de estratégia pura: Em um jogo com n jogadores, um perfil de estratégias puras será um vetor $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ que representa uma configuração de possíveis estratégias escolhidas pelos jogadores.

Conjunto de todas as estratégias de um jogo: Em um jogo com n jogadores, $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ representa o produto cartesiano de todos os conjuntos de estratégias, e assim, S contém todos os perfis de estratégias puras.

Payoff do Jogador i: Também conhecida como função utilidade, a função $U_i : S \to \mathbb{R}$ com $s \mapsto U_i(s)$ associa a cada perfil de estratégias puras um número real, que representa o *payoff* do jogador i quando é escolhido o perfil de estratégias s.

Perfil de estratégia pura sem do jogador i: Quando falamos de um perfil de estratégias que não inclua o jogador i, utilizamos a notação s_{-i}.

Exemplo 1.6.1. *Considere dois jogadores: Maria(Jogador 1) e João(Jogador 2). Suponha que Maria possui duas estratégias possíveis: Alto(A) e Baixo(B) e o João possua duas estratégias: Direita(D) e Esquerda(E). Observe a tabela do jogo com os seguinte payoffs:*

Maria / João B	*D*	*E*
A	*(1,3)*	*(4,2)*
B	*(1,0)*	*(3,2)*

As estratégias de Maria são s_1 = A e s_2 = B e as estratégias do João são r_1 = D e r_2 = E, e assim S_1 = {A, B} e S_2 = {D, E}. Por fim, temos os seguintes payoffs: U(A,D) = (1,3), U(A,E) = (4,2), U(B,D) = (1,0) e U(B,E) = (3,2).

Agora, observe também o exemplo 1.2.2. Note que temos dois jogadores, Arnaldo (representaremos por A) e Bernaldo (representaremos por B). Cada um deles possui duas estratégias, portanto, S_A = {confessar, silêncio} e S_B = {confessar, silêncio}. Logo, temos o conjunto de todas as estratégias de um jogo S = {(confessar, confessar), (confessar, silêncio), (silêncio, confessar), (silêncio, não confessar)}.

Perceba também que para Arnaldo temos os seguintes *payoffs*: U_A(confessar, confessar) = -5; U_A(silêncio, confessar) = -15; U_A(confessar, silêncio) = 0; U_A(silêncio, silêncio) = -1. De forma semelhante, temos os *payoffs* de Bernaldo: U_A(confessar, confessar) = -5; U_A(silêncio, confessar) = 0; U_A(confessar, silêncio) = -15; U_A(silêncio, silêncio) = -1.

1.7 Formas de um Jogo

Até então foi visto uma noção geral do que é um jogo dentro da Teoria dos Jogos. A partir daqui será visto alguns conceitos e noções de suma importância para o desenvolvimento do jogo.

Tratando o jogo como o objeto de estudo, há a necessidade de se buscar visualizá-lo de modo que maximize a análise, facilitando o entendimento da situação. Logo, existem basicamente duas formas de se representar um jogo, são elas: Forma Normal e Forma Extensiva.

1.7.1 Forma Normal

A Forma Normal, ou Forma Estratégica, se caracteriza por uma representação simples de um jogo através de uma tabela de informações. Este é um meio comumente utilizado, uma vez que é simples, direto e consegue armazenar muita informação.

A grande vantagem da Forma Normal é sua facilidade de analisar a situação. Ao momento que os dados ficam organizados na forma de tabelas, se torna fácil identificá-los. A disposição em colunas e linhas consegue ainda organizar as ideias associadas a cada jogador.

Sendo uma forma simples e prática de representar um jogo, na Forma Normal um jogador irá representar as linhas e o outro as colunas. Deste modo, cada estratégia de cada jogador será representada por uma linha/coluna da tabela.

Por exemplo, considere um jogo com dois jogadores: Jogador A e Jogador B. Cada jogador possui duas estratégias: X e Y. Observe a tabela abaixo:

Jogador A / Jogador B	X	Y
X	(0,3)	(4,2)
Y	(5,1)	(1,1)

Deste modo, representamos os *payoffs* como sendo as intersecções das linhas com as colunas, neste caso se o Jogador A utilizar da estratégia X e o Jogador B utilizar da estratrégia Y, temos o *payoff* de (4,2), que significa que o Jogador A terá recompensa de 4 e o Jogador B de 2.

Ainda, se o Jogador A utilizar a estratégia X e o Jogador B utilizar a estratégia X, temos a recompensa de (0,3). De forma análoga, consegue-se visualizar facilmente os *payoffs* de todas as estratégias dos jogadores.

Exemplo 1.7.1. *João e Maria estão em um jogo no qual cada um escreve um número em um papel e depois fazem a soma dos dois valores. Na hora de escolher seus números, eles não sabem o número que o outro jogador está escrevendo. João pode escolher apenas dois números: 1 e 2, e Maria pode escolher três números: 1, 2 e 3. Ao final, se a soma der par, João ganha o jogo e se a soma der ímpar, Maria ganha o jogo. Considere como 10 o payoff de ganhar o jogo e 0 o payoff de perder o jogo.*

Maria / João	*1*	*2*
1	*(0,10)*	*(10,0)*
2	*(10,0)*	*(0,10)*
3	*(0,10)*	*(10,0)*

Perceba que para Maria, não faz diferença o número que ela escolher, porque independente do valor que escrever no papel, ela sempre vai ter 50% de chance de ganhar o jogo. Agora, para João, vale a pena optar pelo número 2, no qual possui maiores chances de vencer.

A partir deste exemplo, note o quanto facilita a organização de um jogo na forma de tabela. Pode-se organizar os dados e retirar as informações de forma muito mais fácil e prática.

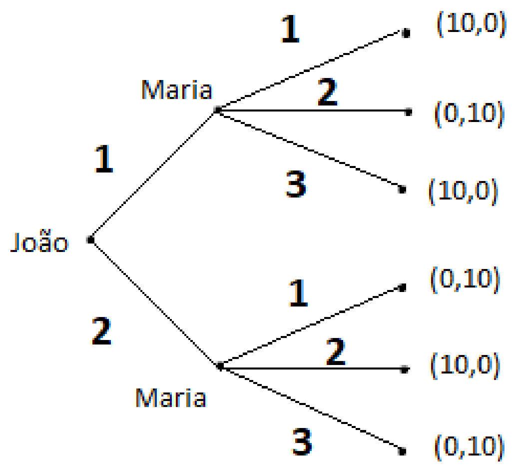
1.7.2 Forma Extensiva

Enquanto a Forma Normal é mais objetiva e de fácil interpretação, a Forma Extensiva é mais visual e dinâmica.

Basicamente, a Forma Extensiva seria um modo de avaliar o problema através de "árvores". O jogo começa com uma **raiz** e cada estratégia que surge a partir desta raiz é representada por um **ramo** que sai da raiz. Para cada ramo da árvore, pode haver um **nó de decisão**, onde pode ter mais ramos. As recompensas se encontram no último nó de cada ramo.

Pode-se ter a Forma Extensiva para dois ou mais jogadores. Basicamente, ela é usada em duas situações, primeiro nos casos em que os dois jogadores escolhem ao mesmo tempo, e segundo quando ocorre de um jogador realizar sua jogada e depois o jogador seguinte realiza a jogada seguinte.

Tome o exemplo 1.7.1 na forma extensiva e perceba a diferença.



1.8 Estratégias Dominantes

O conceito de estratégias dominantes é muito importante na área de Teoria dos Jogos. Ele possibilita uma melhor análise da situação de forma a maximizar o *payoff*.

Definição 1.8.1. *Uma estratégia s_i' é fortemente dominante (ou estritamente dominante) sobre todas as demais estratégias de um jogador i se o payoff de jogar s_i' for estritamente maior que o payoff de qualquer outra estratégia s_i do jogador i. Em outras palavras, para todo s_i e todo s_{-i}*

$$U_i(s_i', s_{-i}) > U_i(s_i, s_{-i}).$$

Desta forma, pode-se perceber que a estratégia estritamente dominante sempre vai levar a um *payoff* máximo possível, ou seja, ela sempre vai ser a melhor resposta de um jogo. De uma forma semelhante, definimos também o que é uma estratégia dominante.

Definição 1.8.2. *Uma estratégia s'_i é dominante sobre todas as demais estratégias de um jogador i se o payoff de jogar s'_i for estritamente maior que o payoff de qualquer outra estratégia s_i do jogador i. Em outras palavras, para todo s_i e todo s_{-i}*

$$U_i(s'_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}).$$

Basicamente o objetivo de definir uma estratégia estritamente dominante é o de encontrar uma estratégia que vá obter as melhores recompensas. Também é preciso frisar que nem sempre ocorre de haver uma estratégia estritamente dominante, na verdade, em grande parte dos casos isso não ocorre e se deve buscar meios diferentes de tentar resolver o jogo.

Outro conceito que está bem atrelado a noção de estratégia dominante é o de melhor resposta.

Definição 1.8.3. *Uma estratégia s'_i é a melhor resposta dentro de um vetor de estratégias s'_{-i} dos demais jogadores se para todo s_i*

$$U_i(s'_i, s'_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}).$$

De forma semelhante, define-se as estratégia dominadas, das quais são as estratégias que levam aos menores *payoffs*.

Definição 1.8.4. *Uma estratégia s'_i é dominada sobre todas as demais estratégias de um jogador i se o payoff de jogar s'_i for menor ou igual que o payoff de qualquer outra estratégia s_i do jogador i. Em outras palavras,*

$$U(s'_i,\ s_{-i}) < U(s_i,\ s_{-i}).$$

Definição 1.8.5. *Uma estratégia s'_i é fracamente dominada sobre todas as demais estratégias de um jogador i se o payoff de jogar s'_i for menor ou igual que o payoff de qualquer outra estratégia s_i do jogador i. Em outras palavras,*

$$U(s'_i,\ s_{-i}) \leq U(s_i,\ s_{-i}).$$

De mesma forma que se deve sempre jogar uma estratégia estritamente dominante, nunca se deve jogar uma estratégia dominada. As estratégias dominadas sempre levam aos piores *payoffs* ou no máximo a algum *payoff* igual ao de outra estratégia. Sempre que ocorrer o reconhecimento de uma estratégia dominada, deve-se eliminá-la do jogo.

Por mais simples que sejam estas duas definições, elas são de extrema importância dentro de um jogo. Elas levam ao principal método de buscar a melhor resposta, que é uma técnica de exclusão. Essa técnica é muito simples e é um meio fácil e rápido de avaliar um jogo. É importante frisar que o jogo deve estar na Forma Normal para que se consiga fazer esse método de eliminação.

Basicamente a técnica da exclusão consiste em analisar o jogo e identificar(se houver) as estratégias estritamente dominantes e as estratégias dominadas. Para jogos com estratégias estritamente dominantes a melhor resposta já está definida e não há muito que fazer. Em jogos com estratégias dominadas, o método consiste em eliminar as estratégias dominadas e reavaliar o jogo a partir de uma nova tabela sem a estratégia dominada.

Exemplo 1.8.1. *Observe a seguinte tabela de recompensas de um jogo qualquer com dois jogadores: Jogador A e Jogador B:*

Jogador A / Jogador B	*R*	*S*	*T*
X	*(0,3)*	*(3,2)*	*(2,7)*
Y	*(0,4)*	*(2,2)*	*(1,4)*
Z	*(1,3)*	*(3,3)*	*(4,5)*

Para melhor facilitar a análise da tabela, comumente se destaca a melhor estratégia de um jogador i perante determinada estratégia de um jogador i_{-1}. Por exemplo, se o Jogador B fosse jogar R, a melhor estratégia para o Jogador A seria Z e assim se destaca na tabela a recompensa (**1**,3). Isso auxilia na hora de fazer a análise para encontrar as estratégias estritamente dominantes e as estratégias dominadas.

Fazendo isto com todas as demais estratégias dos dois jogadores, obtemos a seguinte tabela:

Jogador A / Jogador B	R	S	T
X	(0,3)	(**3**,2)	(2,**7**)
Y	(0,**4**)	(2,2)	(1,**4**)
Z	(**1**,3)	(**3**,3)	(**4**,**5**)

Observe que em alguns casos pode-se destacar mais de um elemento, e isso ocorre em casos de igualdade de payoff. Pode-se perceber no caso do Jogador A jogar Y, no qual para o Jogador B há dois valores iguais que não vão determinar uma estratégia estritamente dominante, porém auxiliam para encontrar um estratégia dominada.

Note que não há estratégias estritamente dominantes para nenhum dos dois jogadores, portanto, deve-se analisar as estratégias dominadas e eliminá-las. Basicamente isso se faz eliminando as estratégias que não receberam marcação. Para o Jogador A se elimina a estratégia Y e para o Jogador B elimina-se a estratégia S. Logo, segue a nova tabela de recompensas:

Jogador A / Jogador B	R	T
X	(0,3)	(2,**7**)
Z	(**1**,3)	(**4**,**5**)

Agora com a nova tabela de recompensas, pode-se fazer uma nova análise. Perceba que nesta nova tabela consegue-se encontrar estratégias dominantes. Para o Jogador A a estratégia dominante seria Z e para o Jogador B a estratégia seria T.

Através deste exemplo pode-se perceber a importância de saber analisar a tabela de recompensas e em como reduzi-la pode facilitar para o encontro de uma melhor estratégia. Porém, nem sempre é possível encontrar uma melhor estratégia dentro de um jogo. Há casos no qual não há uma melhor resposta. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 1.8.2. ***Guerra dos Sexos***: *Um casal resolve sair de casa no sábado a noite, o homem quer ir ao futebol e a mulher quer ir ao ballet, de forma que se tenha a seguinte matriz de recompensas:*

Homem / Mulher	*Futebol*	*Ballet*
Futebol	*(2,1)*	*(0,0)*
Ballet	*(0,0)*	*(1,2)*

Destacando as estratégias na tabela obtem-se:

Homem / Mulher	Futebol	Ballet
Futebol	(**2**,1)	(**0**,**0**)
Ballet	(**0**,**0**)	(1,**2**)

Observe que não há nenhuma estratégia estritamente dominante e não há nenhuma estratégia estritamente dominada. Apenas com estas informações não há muito o que se fazer nesse caso. São jogos sem solução.

Algumas situações dentro da Teoria dos Jogos ocorrem com uma frequência maior e até recebem identificações. Esse exemplo é bem conhecido como **Guerra dos Sexos** e é relacionado a algum jogo que não possui solução e se enquadra com uma estrutura semelhante a do exemplo acima.

1.9 Equilíbrio de Nash

Como visto, as estratégias dominantes e dominadas servem para maximizar o *payoff* e encontrar a melhor resposta dentro de um jogo. Estes conceitos também servem para encontrar o Equilíbrio de Nash, que seria como se fosse um ponto de equilíbrio, uma solução no qual se busca uma resposta que satisfaça a todos os jogadores.

Imagine que você esteja jogando um jogo com uma estratégia B que é dominada por outra estratégia A. É fácil perceber que a melhor resposta neste jogo seria a estratégia A. Agora, utilizando o Equilíbrio de Nash não se precisa necessariamente saber que jogar A é melhor do que B contra todas as estratégias de seus oponentes, apenas precisa saber que esta performance é melhor que algumas estratégias específicas dos adversários.

Em suma, para encontrar o Equilíbrio de Nash, precisa-se analisar as estratégias do adversário em conjunto com as próprias estratégias.

Definição 1.9.1. *Considere um jogo com m jogadores. Seja $s' = (s'_i, s'_j, s'_k, ..., s'_m)$ um perfil de estratégias puras. Diz-se que s' é um Equilíbrio de Nash quando, para todo s_i e para todo i,*

$$U_i(s'_i, s'_{-i}) \geq U_i(s_i, s'_{-i}).$$

Em termos simples, uma combinação de estratégias constitui um Equilíbrio de Nash quando cada resposta possível das estratégias dos demais jogadores é a sua melhor resposta, e isso é verdade para todos os jogadores envolvidos.

Há uma estreita relação entre entre estratégias dominantes e Equilíbrio de Nash. Perceba que toda solução de um jogo que é uma estratégia dominante sempre vai ser um Equilíbrio de Nash, agora nem todo Equilíbrio de Nash vai ser necessariamente uma estratégia dominante.

Observe que uma estratégia dominante é uma característica muito forte enquanto que o Equilíbrio de Nash é algo mais usual uma vez que é muito comum um jogo não possuir estratégia dominante. Nem sempre vai haver um Equilíbrio de Nash com estratégias puras. Nesses jogos deve-se buscar outras formas ainda de se encontrar uma solução com estratégias mistas, o que veremos na seção seguinte.

Encontrar o Equilíbrio de Nash num jogo não é difícil, a estratégia é muito semelhante a usada para encontrar uma estratégia dominante. Diferente da técnica da exclusão para achar uma estratégia dominante, nesta tem que analisar as estratégias dos dois jogadores.

Exemplo 1.9.1. *Observe a seguinte tabela de recompensas de um jogo qualquer com dois jogadores: Jogador A e Jogador B:*

Jogador A / Jogador B	*P*	*Q*
M	*(4,5)*	*(5,3)*
N	*(5,6)*	*(2,4)*
O	*(1,3)*	*(2,4)*

Primeiramente deve-se analisar as estratégias de cada jogador. Não importando a ordem, será analisado as estratégias do Jogador A. Observa-se sempre a melhor estratégia do jogador i perante uma estratégia fixa do jogador j. Se faz isso para todas as estratégias de todos os jogadores. É sempre importante destacar na tabela essas melhores estratégias.

Neste exemplo, observe que se o Jogador B joga P, então para o Jogador A vale a pena jogar N, porque seria a estratégia que daria a melhor recompensa. Se o Jogador B jogar Q, para o Jogador A vale a pena jogar M.

De forma análoga, se o Jogador A jogar M, para o Jogador B vale a pena jogar P. Se A jogar N, B joga P. Se A jogar O, B joga Q.

Observe como fica a tabela destacando essas estratégias:

Jogador A / Jogador B	P	Q
M	(4,**5**)	(**5**,3)
N	(**5**,**6**)	(2,4)
O	(1,3)	(2,**4**)

Note que os valores em negrito são as melhores recompensas para cada estratégia do oponente e que existe um par de estratégias que maximiza o payoff dos dois jogadores, esse par de estratégias seria o Equilíbrio de Nash do jogo.

Desta forma a resposta para o jogo é o Equilíbrio de Nash que seria o conjunto solução {N, P} com *payoffs* de {5, 6}.

Perceba que neste exemplo não há nenhuma estratégia estritamente dominante ou dominada. Esta é a ideia do Equilíbrio de Nash, a de buscar uma solução de uma melhor forma e que ainda possibilite uma máxima recompensa para ambos jogadores.

Pode ocorrer também de haver mais de um Equilíbrio de Nash num jogo. Nesses casos deve se analisar o **ponto focal**, que é quando um dos Equilíbrios de Nash se destaca perante os demais. Mesmo com ponto focal, nem sempre em um jogo com mais de um Equilíbrio de Nash há uma solução, tal qual o exemplo 1.8.2 (Guerra dos Sexos).

Exemplo 1.9.2. *Observe a seguinte tabela de recompensas de um jogo qualquer com dois jogadores: Jogador A e Jogador B, já com as marcações das melhores estratégias.*

Jogador A / Jogador B	*R*	*S*	*T*
X	***(1,1)***	*(0,**1**)*	***(3,1)***
Y	*(**1**,0)*	*(2,2)*	*(1,**3**)*
Z	***(1,3)***	*(**3**,1)*	*(2,2)*

Note que neste exemplo há três equilíbrios de Nash: {X, R}, {X, T}, {Z, R}. Olhando inicialmente, há de se imaginar que o melhor Equilíbrio de Nash seria o {Z, R} ou o {X, T} com *payoffs* de {1, 3} e {3, 1} respectivamente.

Observando a tabela, note que há duas estratégias dominadas: a estratégia R do Jogador B e a estratégia Y do Jogador A. Eliminando estas estratégias, obtém-se a nova tabela:

Jogador A / Jogador B	S	T
X	(**1**,**1**)	(**3**,**1**)
Z	(**1**,**3**)	(2,2)

Numa situação como essa não há estratégias dominantes ou dominadas e há ainda três Equilíbrio de Nash. Desta forma retira-se as estratégias fracamente dominadas, que são as estratégias T do Jogador B e Z do Jogador A.

Portanto resta o par de estratégias {A, E} com payoff de {1, 1} que é o Equilíbrio de Nash com ponto focal.

1.10 Estratégias Mistas

Considere um jogo com dois jogadores A e B no qual cada um joga um dado uma única vez. Cada número do dado representa uma estratégia e quem tirar o maior número vence o jogo. Caso ocorre um empate, o jogo é reiniciado. Note que ao jogar o dado, a chance de aparecer cada número é de $\frac{1}{6}$ para cada estratégia.

Quando, em um jogo, cada estratégia possuir uma mesma probabilidade de acontecer, diz-se que é um jogo com estratégias puras. Até o momento todos os exemplos anteriores são jogos puros, cada estratégia possuía recompensas diferentes, porém todas tinham a mesma probabilidade de acontecer.

Agora imagine que o dado desse mesmo jogo esteja viciado e os números 3, 4, 5 e 6 têm o dobro de chance de ocorrer que os números 1 e 2. Desta forma teríamos probabilidades diferentes para as estratégias do jogo. Este tipo de jogo é o que se chama de um jogo com estratégias mistas.

Definição 1.10.1. *Considere um jogador que jogue n estratégias puras,* $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$. *Uma estratégia mista para este jogador é a distribuição de probabilidades sobre suas* *estratégias puras, ou seja, é o vetor de probabilidades* $(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$*, com* $p \geq 0$*,* $k = 1, 2, ..., n$ *e* $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Observe que um estratégia pura não passa de uma estratégia mista no qual $p^k = \frac{1}{n}$, ou seja, a probabilidade de todas as estratégias é a mesma, uma estratégia pura seria um caso específico de uma mista.

Quando se fala em recompensa num jogo de estratégias mistas se fala no *payoff* esperado, que seria uma proporção geral do jogo que estabelece uma relação sobre as chances de se obter uma maior recompensa.

Exemplo 1.10.1. *Considere o exemplo do* ***Guerra dos Sexos*** *e suponha que a probabilidade do marido ir ao ballet seja de* $\frac{1}{3}$ *e a de ir ao futebol seja de* $\frac{2}{3}$*. Suponha também que a esposa jogue uma estratégia pura.*

Homem / Mulher	*Futebol*	*Ballet*
Futebol	*(2,1)*	*(0,0)*
Ballet	*(0,0)*	*(1,2)*

Se a mulher resolve ir ao futebol então calcula-se o *payoff* esperado do marido multiplicando-se a probabilidade pela recompensa dele ir ao futebol mais a probabilidade vezes a recompensa dele ir ao ballet:

$$\left[\frac{2}{3} \times 2\right] + \left[\frac{1}{3} \times 0\right] = 2.$$

Se a mulher resolve ir ao ballet então calcula-se o *payoff* esperado do marido multiplicando-se a probabilidade pela recompensa dele ir ao futebol mais a probabilidade vezes a recompensa dele ir ballet:

$$\left[\frac{2}{3} \times 0\right] + \left[\frac{1}{3} \times 1\right] = \frac{1}{3}.$$

Perceba que o *payoff* esperado é diferente para o marido no segundo caso. Isso mostra que *payoff* em uma estratégia mista depende das estratégias escolhidas dos oponentes.

Agora, suponha que a esposa também jogue uma estratégia mista, com probabilidades iguais de ir ao futebol e ao ballet, ou seja, com probabilidades de $\frac{1}{2}$. Nessa situação, calcula-se a probabilidade de cada situação do casal, e assim tem-se a seguinte tabela de probabilidades:

Homem / Mulher	Futebol	Ballet
Futebol	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
Ballet	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Assim, o *payoff* esperado do marido é de:

$$\left[\frac{1}{3}\times 2\right]+\left[\frac{1}{3}\times 0\right]+\left[\frac{1}{6}\times 0\right]+\left[\frac{1}{6}\times 1\right]=\frac{2}{3}+0+0+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Agora o *payoff* esperado da esposa:

$$\left[\frac{1}{3}\times 1\right]+\left[\frac{1}{3}\times 0\right]+\left[\frac{1}{6}\times 0\right]+\left[\frac{1}{6}\times 2\right]=\frac{1}{3}+0+0+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

Partindo desta ideia, podemos formalizar o conceito de estratégia mista da seguinte forma:

Definição 1.10.2. *Considere um jogador i que jogue a estratégia mista* $(p_1, p_2, p_3, ..., p_n)$. *Suponha que outro jogador jogue a estratégia pura* s'_{-i}. *Então o payoff esperado para o jogador i é igual a*

$$p_1 \times U_i(s_1, s'_{-i}) + p_2 \times U_i(s_2, s'_{-i}) + ... + p_n \times U_i(s_n, s'_{-i}).$$

Pode-se ainda generalizar essa definição para mais jogadores que joguem estratégias mistas.

Definição 1.10.3. *Considere dois jogadores com estratégias mistas tal qual a estratégia* s'_{-i} *é jogada com probabilidade de q enquanto a estratégia* $s_{-i}*$ *é jogada com probabilidade 1-q. Então o payoff esperado para o jogador i é de*

$$q[p_1 \times U_i(s_1, s'_{-i}) + ... + p_n \times U_i(s_n, s'_{-i})] + (1-q)[p_1 \times U_i(s_1, s_{-i}*) + ... + p_n \times U_i(s_n, s_{-i}*)].$$

Com estas duas definições, finalizamos as principais características de um jogo. No capítulo seguinte, veremos como que isso se aplica numa situação dentro da Biologia. Muitos conceitos precisam ganhar uma ideia mais específica, em suma, usaremos a Teoria dos Jogos como uma ferramenta para analisar situações de conflito e cooperação entre indivíduos de uma população.

2 Jogos Evolucionários

2.1 Aspectos gerais dos Jogos Evolucionários

As relações de interação entre seres vivos é um dos principais temas de pesquisa da Biologia. A Teoria dos Jogos Evolucionários serve como mais uma ferramenta para o estudo destas relações, utilizando conceitos da Teoria dos Jogos com uma visão mais matemática. Desta forma, podemos dizer que o objetivo do estudo da Teoria dos Jogos Evolucionários é analisar situações de conflito e cooperação de diversas espécies de seres vivos.

Sendo uma área com uma grande gama de aplicações e muitas subáreas, os conceitos da Teoria dos Jogos são, por vez, muito genéricos e não conseguem abranger a todas as situações. Dentro da Biologia necessita-se realizar um afunilamento de algumas definições, não no sentido de perderem seus significados, mas sim para se ter um conceito mais específico dentro desse contexto.

Neste tipo de jogo considera-se uma população de jogadores interagindo aleatoriamente entre si. Uma estratégia seria alguma característica daquela população, e eventualmente podem surgir indivíduos que usam estratégias diferentes. Neste âmbito, o objetivo é o de avaliar como que essa nova característica vai se relacionar naquela população. Em geral, isso é medido através do *fitness*, que consiste nas taxas de sucesso na hora da reprodução. Desta forma, quanto maior for o *fitness*, maior vai ser o crescimento da população com determinada característica.

Também pensa-se sempre num Jogo Evolucionário como algo contínuo, no qual as populações interagem entre si sem considerar as gerações. Ou seja, não há de se pensar que a interação ocorrerá apenas entre indivíduos de mesma geração, uma vez que o objetivo é o de analisar o desenvolvimento da população como um todo.

2.2 Evolução

Na Biologia, evolução é a mudança das características hereditárias de uma população de seres vivos de uma geração para outra. Este processo faz com que as populações de organismos mudem e se diversifiquem ao longo do tempo. A atual variedade de seres vivos é resultado de processos de transformação e adaptação das espécies aos variados ambientes.

Neste capítulo serão introduzido três conceitos básicos da dinâmica de evolução: replicação, seleção e mutação. De acordo com A. Nowak (2006), eles são definidos como princípios fundamentais de sistemas biológicos, estes conceitos se aplicam a qualquer organização biológica e não dependem dos detalhes específicos que caracterizam algumas espécies.

Replicação na Biologia refere-se a reprodução, que é o modo do qual os seres vivos produzem descendentes, dando continuidade à sua espécie. Todos os organismos vivos resultam da reprodução a partir de organismos vivos pré-existentes.

A reprodução pode ocorrer de duas formas diferentes. Primeiro de forma sexuada, que é quando ocorre a combinação de material genético de dois seres distintos. Segundo, de modo assexuado que é quando um único indivíduo gera um novo ser vivo a partir apenas de seu material genético, produzindo uma "cópia" de si mesmo. O ponto é que em ambos os casos, os descendentes vão herdar características de seu(s) progenitor(es).

A reprodução não é perfeita, pois às vezes ocorrem certas "erros"no qual algum descendente pode ter alguma característica nova. Isso é o que se chama de mutação. Em síntese, a mutação corresponde a qualquer alteração no material genético de um organismo que pode originar uma nova característica. Muitas vezes, esse novo aspecto pode oferecer algum benefício ao indivíduo, o que pode levá-lo a ter vantagens sobre demais membros da população.

Já a seleção natural é um processo pelo qual características hereditárias que contribuem para a sobrevivência tornam-se mais comuns numa população, enquanto que características prejudiciais tornam-se mais raras. Isto ocorre porque indivíduos com características vantajosas têm mais sucesso na reprodução, de modo que mais indivíduos na próxima geração herdem tais características. Ao longo de muitas gerações, adaptações ocorrem através de uma combinação de mudanças sucessivas, fazendo com que os indivíduos vão se adaptando aos variantes de seu ambiente.

2.3 Aspectos Históricos

O objetivo da Teoria dos Jogos Evolucionários é a análise de situações de conflito e cooperação entre espécies. De acordo com Hammerstein e Selten(1994), a Teoria dos Jogos Evolucionários não considera que os jogadores são capazes de escolherem estratégias racionais, mas sim que o processo de seleção natural direciona organismos a otimização das taxas de reprodução.

Estas ideias tiveram como precursor o artigo "The logic of animal conflict"escrito por Maynard Smith e Price em 1973, mas antes disso, diversos autores já utilizavam de conceitos da área para desenvolver seus trabalhos. De acordo com Hammerstein e Selten(1994), em 1958, Fisher já havia utilizado argumentos da Teoria dos Jogos Evolucionários ao desenvolver seu estudo sobre proporções sexuais. Em 1967, Hamilton já utilizava a noção de estratégia imbatível, que seria um equilíbrio simétrico em um jogo simétrico. Trivers, em 1971, também se referiu a esta teoria ao introduzir o conceito de altruísmo recíproco.

De acordo com Hammerstein e Selten(1994), os esforços dos precursores permaneceram isolados, enquanto a inovação conceitual de Maynard gerou imediatamente um fluxo de elaborações e aplicações bem-sucedidas. Em 1982, ele lança o livro "Evolution and the Theory of Games", que sintetiza os resultados iniciais obtidos no campo. Alguns anos depois, outros autores continuaram a desenvolver suas pesquisas na área, como é o caso de Bomze(1986) e van Damme(1987).

2.4 Jogadores e Estratégia

De um modo geral, até então foi visto a estratégia como um raciocínio a ser tomado num jogo, no qual o objetivo era formar o melhor raciocínio de modo que se maximize os *payoffs*. Quanto ao jogador, era visto como uma pessoa, uma empresa, um país ou algo que fosse capaz de tomar uma decisão, de escolher a jogada e desenvolver a melhor estratégia de jogo.

Dentro da Teoria dos Jogos Evolucionária esses dois conceitos não são perdidos, porém ganham um significado mais específico para o contexto estudado. Os jogadores são espécies ou indivíduos dentro de uma mesma população, que poderão interagir entre si de forma competitiva ou cooperativa.

Neste âmbito, a noção de estratégia também é redefinida. Com exceção da espécie humana, nenhuma outra é capaz de tomar decisões racionais, e como o foco é estudar o comportamento das espécies dentro da Teoria da Seleção Natural, pensa-se na estratégia como sendo uma nova característica que surge em uma determinada fração da população. Também não é assumido que membros das populações se comportem racionalmente. Ao invés disto, presume-se que qualquer membro é pré-programado com uma estratégia herdada, pura ou mista, e que essa estratégia é fixa para a vida toda.

Esta nova característica pode ser oriunda de um meio externo ou de um meio interno. Dizemos que ela vem de um meio externo quando algum indivíduo migra de um grupo para outro levando o novo atributo. Dizemos que ela vem de um meio interno quando surge alguma determinada mutação na população, e a partir daquele momento todos os descendentes desse indivíduo carregarão consigo esse novo aspecto.

De acordo com Hammerstein e Selten(1994), na Teoria dos Jogos Evolucionários, estratégias são consideradas como características herdadas que controlam o comportamento individual. O objetivo da Teoria do Jogos na Seleção Natural é avaliar como que essa nova estratégia vai afetar a população.

2.5 Recompensa

Sendo estratégia e recompensa dois conceitos muito próximos na Teoria dos Jogos, ao momento que se reconstrói a definição do primeiro, precisa-se buscar uma nova percepção do segundo. Desta forma, o *payoff* não mais é visto apenas como um valor de remuneração referente a estratégia jogada, mas sim um valor que indica o sucesso reprodutivo de um determinado indivíduo, ligado a sua quantidade potencial de descendentes.

Quanto mais bem sucedido for o indivíduo, melhor será seu sucesso de reprodução. Então, na próxima geração a fração de membros mais bem sucedidos na população será maior e a fração de membros menos prósperos será menor. Normalmente se utiliza o termo *fitness* para representar o *payoff* dentro da Teoria dos Jogos Evolucionária.

Assumimos também que o *fitness* de um jogador também não é constante, mas sim depende das frequências relativas do indivíduos das espécies no jogo. Desta forma, podemos pensar no *fitness* como um valor que representa a taxa de sucesso na reprodução. Ou seja, quanto maior o *fitness*, maior será o número de descendentes deste indivíduo que herdam a característica estudada.

Podemos pensar numa

2.6 Estabilidade Evolucionária

Considere uma população no qual todos os membros jogam uma mesma estratégia. Assuma que nesta população surja uma mutação que funcione como uma nova estratégia jogada apenas numa pequena parte da população. Diz-se que a estratégia jogada pela maioria da população é estável contra a estratégia mutante se nesta situação a estratégia mutante possui a menor taxa de sucesso de reprodução.

O critério da estabilidade evolutiva é uma generalização que translada a noção de sobrevivência da aptidão num ambiente exógeno para um ambiente estratégico onde a aptidão do comportamento depende das estratégias dos outros. Isso quer dizer que a estratégia estável é predominante contra a nova estratégia, ou seja, sempre vai haver maiores taxas de reprodução e consequentemente, maiores quantias de indivíduos que utilizem da estratégia estável.

Dentro de um jogo evolucionário existem certos momentos no qual as populações de indivíduos com fenótipos diferentes entram em uma condição onde as frequências populacionais não se alteram, são os chamados pontos de equilíbrio. Estes momentos se caracterizam pelo fato do *fitness* de ambas estratégias serem iguais.

Dizemos que um ponto de equilíbrio é estável quando, independente de pequenas perturbações na proporção das frequências, o jogo sempre volta ao ponto de equilíbrio.

De forma análoga, dizemos que um ponto de equilíbrio é instável quando pequenas perturbações acarretam um desequilíbrio na proporção das frequências, afastando-se do ponto de equilíbrio correspondente.

2.7 Jogo Evolucionário

Considere uma espécie com dois fenótipos diferentes. Indivíduos com o fenótipo A possuem a capacidade de se mover, enquanto indivíduos com o fenótipo B não a possuem. Percebemos inicialmente que a capacidade de se mover torna-se uma grande vantagem para A, uma vez que permite com que obtenham recursos com mais eficiência que B.

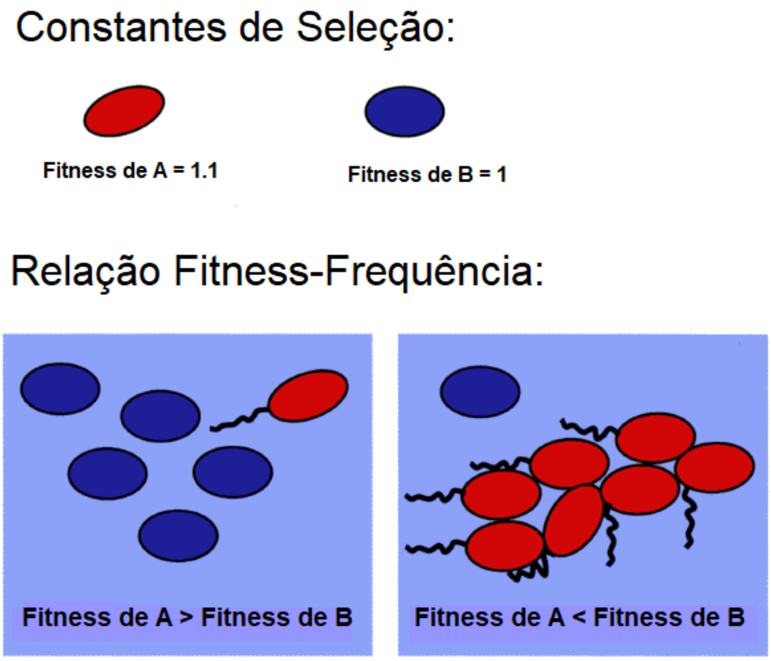
Esta característica faz com que A predomine sobre B, ou seja, indivíduos da população A reproduzem-se com muito maior eficácia. Suponha que o custo-benefício deixa um *fitness* inicial de 1.1 para A e de 1 para B.

No entanto, ao possuir a capacidade de se deslocar, os indivíduos com fenótipo A começam a precisar de mais espaço para sobreviverem. No momento que a população começa a ficar grande demais, o espaço torna-se pequeno para aqueles indivíduos, até chegar um ponto no qual uma população com essa característica não possua vantagem sobre os demais (observe a figura abaixo).

Neste momento a capacidade de não se locomover se torna uma vantagem, desta forma, temos que o *payoff* de B agora se torna maior que o *payoff* de A, ou seja, a taxa de reprodução dos indivíduos de B começa a aumentar enquanto a da espécie A começa a diminuir.

A espécie A possui maior *payoff* que B quando A está em maioria e suas taxas de reprodução são maiores. Quando o contrário ocorre, A fica com desvantagens em relação a B, logo possui menor *payoff*.

Desta forma, em Jogos Evolucionários, percebemos uma relação entre a frequência de indivíduos com certa estratégia e o *fitness* (sucesso reprodutivo) correspondente.



Inicialmente, indivíduos com fenótipo A possuíam *fitness* 1.1 enquanto indivíduos com fenótipo B possuíam *fitness* 1. A Relação Fitness-Frequência significa que o *fitness* depende das frequências relativas dos indivíduos dos dois fenótipos. Nesse caso, A possuía maior *fitness* enquanto era a minoria na população, mas a partir do momento que B passa a ser minoria, a situação inverte-se.

Em suma, esta é a ideia do estudo dos Jogos Evolucionários, a de avaliar a relação de cooperação e competição entre dois grupos de indivíduos que possuem algum fenótipo diferente. Para isto, busca-se analisar as relações entre a frequência de indivíduos que possuem diferentes estratégias e avaliar seu comportamento.

Para fins de melhor formalização entre as estratégias das espécies A e B, detonota-se por x_A a frequência de A e x_B a frequência de B. O vetor $\vec{x} = (x_A, x_B)$ define a composição de uma população. Denota-se ainda por $f_A(\vec{x})$ o *fitness* de A e por $f_B(\vec{x})$ o *fitness* de B. Para avaliar essas relações, considere o seguinte modelo de equações:

$$\begin{cases} x'_A = x_A[f_A(\vec{x}) - \phi] \\ x'_B = x_B[f_B(\vec{x}) - \phi] \end{cases} \qquad (2.1)$$

Aqui, temos $\phi = x_A f_A(\vec{x}) + x_B f_B(\vec{x})$(*fitness* médio da população). Perceba também que $x_A + x_B = 1$. Assim denotamos $x_A = x$ e $x_B = 1 - x$. Logo, podemos reescrever o sistema (2.1) da seguinte forma:

$$x[f_A(\vec{x}) - (x f_A(\vec{x}) + (1-x) f_B(\vec{x}))]$$

$$x[f_A(\vec{x}) - x f_A(\vec{x}) - f_B(\vec{x}) + x f_B(\vec{x})]$$

$$x(1-x)(f_A(\vec{x}) - f_B(\vec{x})).$$

Portanto,

$x' = x(1-x)(f_A(\vec{x}) - f_B(\vec{x}))$. (2.2)

A estabilidade de um ponto de equilíbrio está relacionada ao que acontece com as frequências de x_A e x_B quando submetidas a pequenas perturbações. Do ponto de vista da Biologia, podemos associar essas perturbações a migrações de outros indivíduos para a população em estudo.

Dizemos que a estratégia A vai ser uma Estratégia Evolutivamente Estável se $x = 1$ for um ponto de equilíbrio estável. A estratégia B vai ser uma Estratégia Evolutivamente Estável se $x = 0$ for um ponto de equilíbrio estável.

Através da equação (2.2) podemos obter vários resultados sobre as relações de competição e cooperação dentro de uma população, como por exemplo os pontos de instabilidade e estabilidade, as alterações das frequências e o sentido de convergência.

Note que sempre que tivermos $x = 0$, $x = 1$ ou $f_A(x) = f_B(x)$ para $x \in (1, 0)$ teremos um ponto de equilíbrio porque temos que em todos os casos $x' = 0$. A questão é avaliar quando que esse ponto de equilíbrio é instável e quando que é estável. Na equação (2.2) temos sempre que $x(1-x) \geq 0$ porque temos duas frequências que são valores não negativos. Agora considere $f_A(x) - f_B(x)$ como uma função para indicar a relação da frequência entre estas duas populações.

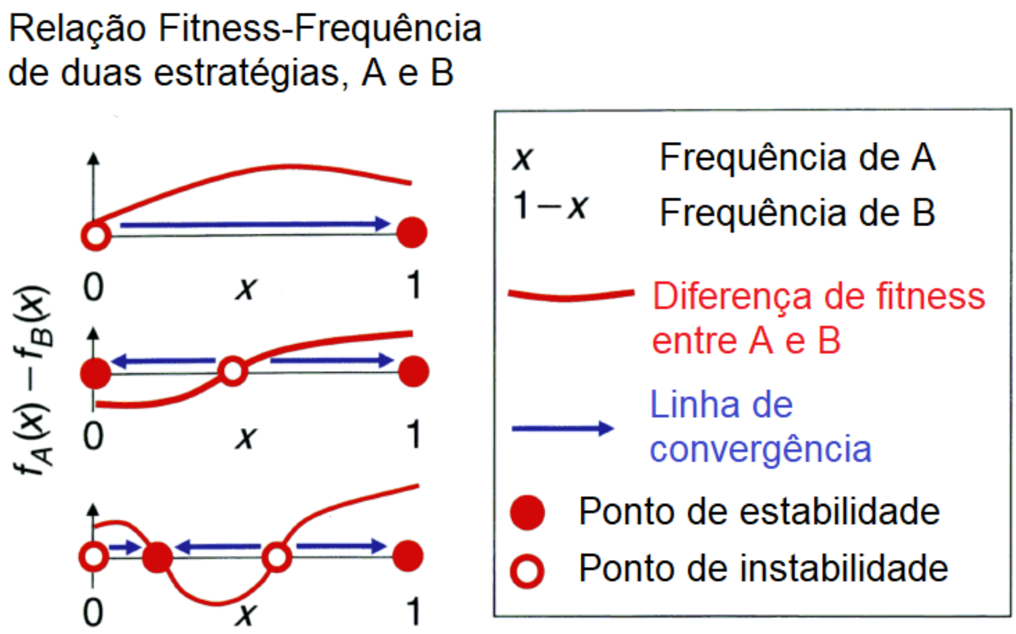
Seja $\varepsilon > 0$. O ponto $x = 0$ será um ponto de equilíbrio estável se, em $(0, \epsilon)$ tivermos $f_A(x) - f_B(x) < 0$. Isso significa que nesse intervalo a derivada na equação (2.2) será negativa, ou seja, a função x que representa a frequência de A vai ser decrescente tendendo a voltar ao ponto de equilíbrio correspondente. De forma análoga, $x = 0$ será um ponto de equilíbrio instável se, em $(0, \varepsilon)$ tivermos $f_A(x) - f_B(x) > 0$. Isso significa que nesse intervalo a derivada na equação (2.2) será positiva, ou seja, a função vai ser crescente e vai tender a se afastar deste ponto de equilíbrio.

No ponto $x = 1$ temos uma situação semelhante. O ponto será um ponto de equilíbrio instável se, em $(0, \epsilon)$ tivermos $f_A(x) - f_B(x) < 0$. Nesse intervalo a derivada na equação (2.2) será negativa, a função que representa a frequência de A vai ser decrescente e vai tender a se afastar de 1. O ponto $x = 1$ será um ponto de equilíbrio estável se, em $(0, \epsilon)$ tivermos $f_A(0) - f_B(0) > 0$. Em outras palavras, nesse intervalo a derivada da equação (2.2) será positiva, a função vai ser crescente e vai tender a voltar ao ponto de equilíbrio correspondente.

Se $f_A(x) = f_B(x)$, para $x \in (1, 0)$, temos que fazer uma análise em $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. x vai ser um ponto de equilíbrio estável se no intervalo $(x - \epsilon, x)$ a derivada for negativa e no intervalo $(x, x + \epsilon)$ a derivada for positiva. Isso significa que para qualquer perturbação ε a função vai tender a voltar ao ponto de equilíbrio equivalente. x vai ser um ponto de equilíbrio instável se no intervalo $(x - \epsilon, x)$ a derivada for positiva e no intervalo $(x, x + \epsilon)$

a derivada for negativa. Para qualquer perturbação ε a função vai tender a se afastar do ponto x.

Observe as três situações diferentes na figura abaixo.



2.8 Matriz de Payoff

Em um jogo com dois jogadores representados em sua Forma Normal, o *payoff* de duas estratégias pode ser descrito pela seguinte matriz:

	A	B
A	a	b
B	c	d

A matriz *payoff* representa as recompensas de cada jogador: se ambos jogadores escolhem a estratégia A, os dois recebem *payoff* a; se ambos jogadores escolhem a estratégia B, os dois recebem *payoff* d; se os dois jogadores escolherem estratégias diferentes, quem escolher A fica com *payoff* b e quem escolher B fica com *payoff* c;

Podemos ainda escrever a matriz *payoff* da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Agora, a ideia é considerar a matriz *payoff* com *fitness* para duas populações, A e B. Desta forma, temos que o *payoff* esperado para A e B é:

$$\begin{cases} f_A(x) = ax_A + bx_B \\ f_B(x) = cx_A + dx_B \end{cases} \quad (2.4)$$

Considerando $x_A = x$ e substituindo as equações (2.4) em (2.2), obtemos:

$$x' = x(1-x)((f_A(x) - f_B(x))$$

$$x' = x(1-x)((ax + b(1-x) - cx - d(1-x))$$

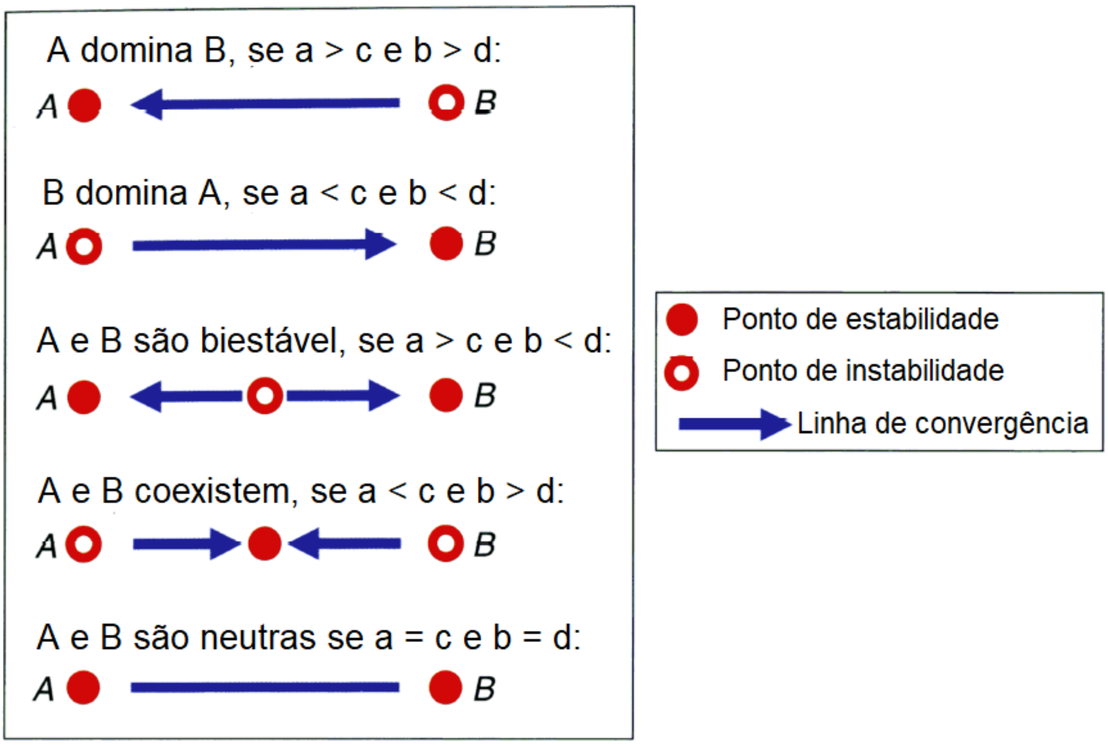
$$x' = x(1-x)((ax + b - bx) - cx - d + dx))$$

$$x' = x(1-x)((a+b-c-d)x + b - d))$$

Portanto,

$$x' = x(1-x)((a+b-c-d)x + (b-d)) \quad (2.5)$$

Agora, a partir desta equação, podemos estudar o comportamento da função de acordo com os valores da matriz *payoff*. Pode haver cinco diferentes situações descritas na figura a seguir:



Se $a > c$ e $b > d$ então independente do que o oponente escolher, sempre vale a pena jogar A, em outros termos, A é uma estratégia dominante sobre B. Em um jogo com indivíduos que usam as estratégias A e B, estes valores de *payoff* representam que o *fitness* de A sempre será maior do que o *fitness* de B e, desta forma, na função (2.5) no ponto $x = 1$ teremos um ponto de equilíbrio estável, porque independente da perturbação que ocorrer, os indivíduos que usam a estratégia A vão sempre predominar sobre B.

Agora se $a < c$ e $b < d$, então temos a situação contrária. Neste caso, B será uma estratégia dominante e não importa qualquer perturbação que ocorrer, B sempre vai predominar sobre A.

Quanto $a > c$ e $b < d$ diz-se que A e B são biestáveis. Nesta situação, tanto $x = 1$ quanto $x = 0$ são pontos de equilíbrio estáveis e existe um ponto no intervalo (0,1) que é um ponto instável. Este ponto é determinado como o momento em que $((a + b - c - d)x + (b - d)) = 0$, em outras palavras, é o ponto $x^* = \dfrac{d-b}{a-b-c+d}$. Neste caso, a recompensa depende das condições iniciais de jogo, ou seja, se a condição inicial do jogo $x_0 < x^*$ o sistema converge para B, mas se $x_0 > x^*$ então o sistema converge para A.

Agora, quando $a < c$ e $b > d$ diz-se que A e B coexistem. Nesta situação, tanto $x = 1$ quanto $x = 0$ são pontos de equilíbrio instáveis e no ponto $x^* = \dfrac{d-b}{a-b-c+d}$ temos uma estabilidade. Esta é a situação que sempre vai convergir para um equilíbrio entre as duas populações, ou seja, para qualquer $x \in (0, 1)$, a convergência para o ponto x^* sempre vai acontecer.

Há ainda a situação no qual A e B são neutros, ou seja, $a = c$ e $b = d$. Esta é situação no qual não há alterações nas frequências das populações e todos os pontos são pontos de equilíbrio. Aqui as frequências de indivíduos não dependem das estratégias escolhidas.

2.9 Equilíbrio de Nash

Como visto no capítulo anterior, o Equilíbrio de Nash é fundamental para encontrar uma melhor resposta para ambos os jogadores. O conceito de Equilíbrio de Nash está intimamente ligado a uma análise sobre a matriz *payoff*. Ao momento que o conceito desta matriz sofre alterações, temos a necessidade de adequar esta definição também.

Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2.9.1. *Considere um jogo com dois jogadores. Cada um possui duas estratégias: A e B tal qual a seguinte matriz payoff:*

	A	*B*
A	*5*	*1*
B	*6*	*3*

Suponha que um dos jogadores escolheu a estratégia A. Então seu *payoff* dependerá de qual estratégia seu oponente irá escolher: se ele optar por A, a recompensa será de 5; se ele optar por B, a recompensa será de 1, a pior do jogo. Podemos perceber que esta não é uma situação favorável para este jogador.

Agora, se ao invés de escolher a estratégia A, ele escolhesse a estratégia B. Esta estratégia garante que ele não vai obter o pior *payoff* do jogo, porque se o oponente escolher B, os dois receberão a mesma recompensa, que seria 3, e se seu o oponente optar por A, sua recompensa será de 6.

Este raciocínio é análogo para ambos os jogadores e a estratégia B é a melhor resposta para os dois jogadores, ou seja, podemos dizer que a estratégia B é um Equilíbrio de Nash.

Definição 2.9.1. *Sejam dois jogadores em um jogo evolucionário no qual cada um possui duas estratégias: A e B. Considere a matriz da payoff conforme abaixo:*

	A	*B*
A	a	b
B	c	d

Desta forma, dizemos que:

1. *A estratégia A é estritamente um equilíbrio de Nash se* $a > c$;
2. *A estratégia A é um equilíbrio de Nash se* $a \geq c$;
3. *A estratégia B é estritamente um equilíbrio de Nash se* $d > b$;
4. *A estratégia B é um equilíbrio de Nash se* $a \geq c$;

Exemplo 2.9.2. *Tome um jogo com dois jogadores. Cada um possui duas estratégias: P e Q tal qual a seguinte matriz payoff:*

	P	*Q*
P	*5*	*3*
Q	*6*	*1*

Observando a tabela acima, podemos perceber que $5 < 6$ e que $1 < 3$, ou seja, por definição, temos que não existe um Equilíbrio de Nash com estratégias puras neste jogo.

O jogo Hawk-Dove, que veremos no capítulo seguinte, é um grande exemplo desta situação. Veremos ele com mais detalhes no capítulo seguinte.

Exemplo 2.9.3. *Considere um jogo com dois jogadores. Cada um possui duas estratégias: M e N tal qual a seguinte matriz payoff:*

	M	N
M	6	1
N	5	3

Nesta situação temos que $6 > 5$ e que $3 > 1$, ou seja, temos dois Equilíbrios de Nash. Neste caso temos que observar o ponto focal, que é o Equilíbrio de Nash de um jogo que possui a maior recompensa. Para maximizar o *payoff*, basta eliminar a estratégia que pode levar a menor recompensa, neste caso seria a estratégia M, que leva a recompensa 1.

Portanto, o Equilíbrio de Nash com ponto focal é a estratégia B.

3 Exemplos na Biologia: Hawk-Dove e jogo da caça

Até o momento vimos diversos conceitos e definições dentro da Teoria dos Jogos Evolucionários. Neste capítulo veremos de uma forma contextual como que estes conceitos se aplicam a certos problemas.

3.1 Hawk-Dove

A luta é algo natural dentre várias espécies de animais, principalmente quando algum recurso se torna raro, tal como comida, território e domínio sobre demais membros de um grupo. Faz parte do instinto dos animais a disputa, tanto em seres vivos de mesma espécie como de espécies diferentes. É difícil mensurar uma competição entre dois indivíduos, mas a Teoria dos Jogos Evolucionários confecciona um modelo que busca uma avaliação destas disputas.

Um dos exemplos mais clássicos destes jogos de competição entre animais é o Hawk-Dove(em português, Jogo do Falcão-Pombo). Esse jogo representa uma situação no qual, dentro de uma população de indivíduos de mesma espécie, dois animais podem entrar em confronto ou não e cada atitude leva a um *payoff* diferente. Os pombos representam os animais mais pacíficos, quando se veem em uma situação de conflito, eles resolvem não revidarem. Já os falcões representam os mais agressivos, que buscam o confronto sempre que podem.

Neste jogo, existem duas estratégias, falcão(F) ou pombo(P). Chamaremos de b (com $b > 0$) o benefício de obter o produto disputado em um confronto e de c (com $c > 0$) o custo deste confronto. Vamos analisar o que acontece em cada situação de encontro destes animais.

Se dois animais agressivos encontram-se, eles entram em conflito. Suponha que esta disputa se repita sequencialmente várias vazes, e como ambos são igualmente fortes, a probabilidade de cada um vencer a luta é de $\frac{1}{2}$. Assim, o *payoff* para cada um deles é de $\frac{b-c}{2}$, que seria o benefício menos o custo vezes a probabilidade de vencer.

Se um falcão encontra-se com um pombo, o falcão procura a luta. Como o pombo não revida em uma situação de conflito, o falcão ganha o *payoff* de b e o pombo perde, levando o *payoff* 0.

Se dois animais passivos se encontram, não há custo, pois nenhum procura a luta. Suponha que essa situação se repita sequencialmente várias vezes, e como nenhum entra em conflito, a probabilidade de cada um obter o benefício é de $\frac{1}{2}$. Assim, o *payoff* esperado de cada um dos dois é de $\frac{b}{2}$ que é o benefício vezes $\frac{1}{2}$.

Segue abaixo a matriz *payoff* deste jogo:

$$\begin{array}{c|cc} & F & P \\ \hline F & \frac{b-c}{2} & b \\ P & 0 & \frac{b}{2} \end{array} \quad (3.1)$$

Analisando esta situação, temos dois casos. O primeiro ocorre quando $b < c$ e nenhuma estratégia pura é um Equilíbrio de Nash. O segundo ocorre quando $b \geq c$ e temos uma jogada que é Equilíbrio de Nash. Veremos cada um dos casos a seguir.

3.1.1 Benefício menor que o custo

Note que $c > b$ implica que o custo sempre vai ser melhor que o benefício, ou seja, jogar a estratégia F pode levar ao menor *payoff* do jogo, logo não é um Equilíbrio de Nash. Já a estratégia P, também não é o Equilíbrio de Nash porque ao jogar P se corre o risco de ficar com o segundo menor *payoff* do jogo, que seria 0. Desta forma, não há Equilíbrio de Nash no caso de $b < c$.

De uma forma mais matemática, perceba necessariamente que o *payoff* $\frac{b-c}{2}$ será um valor negativo, ou seja, $\frac{b-c}{2} < 0$. Também temos que $\frac{b}{2} < b$. Portanto, pela definição 2.9.1 não temos um Equilíbrio de Nash.

Agora, considerando como x a frequência de animais agressivo e de $1-x$ a frequência de animais passivos, ao substituirmos os valores desta matriz *payoff* (3.1) na função (2.5) obtemos:

$$x' = x(1-x)\left(\left(\frac{b-c}{2} - b - 0 + \frac{b}{2}\right)x + \left(b - \frac{b}{2}\right)\right)$$

$$x' = x(1-x)\left(\left(\frac{b-c}{2} - \frac{b}{2}\right)x + \frac{b}{2}\right)$$

$$x' = x(1-x)\left(\left(\frac{b-c-b}{2}\right)x + \frac{b}{2}\right)$$

$$x' = x(1-x)\left(\frac{-c}{2}x + \frac{b}{2}\right) \quad (3.2)$$

Como temos que $\frac{b-c}{2} < 0$ e $\frac{b}{2} < b$, então há uma situação de coexistência nesse jogo. Neste caso, os pontos $x = 1$ e $x = 0$ são pontos de equilíbrio instáveis e existe um ponto no intervalo (0,1) é um ponto estável. Este ponto é determinado como o momento no qual $x(1-x)\left(\frac{-c}{2}x+\frac{b}{2}\right)=0$, ou seja, em $x^*=\frac{b}{c}$.

O ponto x^* significa que há um momento no qual indivíduos passivos e agressivos conseguem coexistir em harmonia. Não importa o valor inicial de $x \in (0,1)$, a função sempre vai convergir para este ponto.

No ponto $x = 1$ a população é estritamente de animais agressivos, mas qualquer novo indivíduo passivo que surgir vai fazer com que as frequências se alterem e tenda a convergir para o ponto x^*.

De forma análoga, no ponto $x = 0$ a população é estritamente de animais passivos, mas qualquer novo indivíduo agressivo que surgir na população vai fazer com as frequências se alterem e tenda a convergir para o ponto x^*.

Proposição 3.1.1. *No jogo evolucionário Hawk-Dove, se $b < c$, então:*

(i) Os pontos $x = 0$ e $x = 1$ são pontos de equilíbrio instáveis;

(ii) O ponto $x = \frac{b}{c}$ é de equilíbrio estável;

Demonstração. (i) Primeiro, perceba que em $x = 0$ temos um ponto de equilíbrio porque $x' = 0$. Agora vamos mostrar que este ponto é um ponto de instabilidade. Considere $x = \varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x+\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{-c}{2}\varepsilon+\frac{b}{2}\right)\to\frac{b}{2}$$

Quando a função se aproxima de 0, a derivada é positiva, ou seja, ela é uma função crescente. Assim, qualquer pequena perturbação acarretará num desequilíbrio de frequência das população. Portanto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

Em $x = 1$ também temos um equilíbrio, pois $x' = 0$. Agora vamos mostrar que este ponto é um ponto de instabilidade. Considere $x = 1-\varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x+\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{-c}{2}(1-\varepsilon)+\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{-c}{2}+\frac{c}{2}\varepsilon+\frac{b}{2}\right)\to\frac{b-c}{2}.$$

Como $c > b$, quando a função se aproxima de 1, a derivada é negativa e a função é decrescente em $1-\varepsilon$. Assim, qualquer pequena perturbação acarretará num desequilíbrio de frequência das população. Portanto $x = 1$ é um ponto de equilíbrio instável.

(ii) Vamos mostrar que $x = \frac{b}{c}$ é um ponto de equilíbrio estável. Primeiro, é um ponto de equilíbrio porque $x' = 0$, agora vamos mostrar que é um ponto estável. Considere $x = \frac{b}{c}+\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x+\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{-c}{2}\left(\frac{b}{c}+\varepsilon\right)+\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}\varepsilon+\frac{b}{2}\right)=-\frac{c}{2}\varepsilon$$

Desta forma, podemos concluir que no intervalo $\left(\frac{b}{c},\frac{b}{c}+\varepsilon\right)$ a derivada vai ser negativa, ou seja, a função vai ser decrescente e vai tender ao ponto $\frac{b}{c}$.

Agora considere $x=\frac{b}{c}-\varepsilon$ para $\varepsilon>0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x+\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{-c}{2}\left(\frac{b}{c}-\varepsilon\right)+\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\varepsilon+\frac{b}{2}\right)=\frac{c}{2}\varepsilon$$

Desta forma, podemos concluir que no intervalo $\left(\frac{b}{c}-\varepsilon,\frac{b}{c}\right)$ a derivada vai ser positiva, ou seja, a função vai ser crescente e vai tender ao ponto $\frac{b}{c}$.

Portanto, para qualquer ponto no intervalo $\left(\frac{b}{c}-\varepsilon,\frac{b}{c}+\varepsilon\right)$ temos que a equação (3.2) vai tender ao ponto $x=\frac{b}{c}$. Desta forma, para qualquer pequena perturbação, $x=\frac{b}{c}$ é um ponto de equilíbrio estável.

■

Assim, no caso em que $b<c$ não vamos ter um Equilíbrio de Nash para o jogo Hawk-Dove, ou seja, não há uma melhor estratégia para ambos os jogadores. Este caso representa uma situação em que, exceto nos pontos $x=1$ e $x=0$, sempre vai tender a um equilíbrio entre as frequências das espécies.

3.1.2 Benefício maior que o custo

Esta é a situação no qual o benefício é maior que o custo, ou seja, vale a pena lutar pela recompensa. Note que nesse caso a estratégia P não é uma boa opção, pois corre o risco do oponente jogar a estratégia F e acabar com o *payoff* 0. Agora, jogar a estratégia F, independente da jogada do oponente, sempre vai levar à melhor recompensa, ou seja, a estratégia F é um Equilíbrio de Nash.

Sob uma perspectiva mais matemática, perceba que necessariamente $\frac{b-c}{2}>0$ e $b>\frac{b}{2}$, ou seja, pela definição 2.9.1, temos que a estratégia F é um Equilíbrio de Nash.

De uma forma análoga, vamos fazer uma análise da equação (3.2), também considerando como x a frequência de animais agressivos e de $1-x$ a frequência de animais passivos.

Como temos que $\dfrac{b-c}{2} > 0$ e $\dfrac{b}{2} < b$, então há uma situação no qual F domina P. Neste caso o ponto $x = 1$ é um ponto de equilíbrio estável e o ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. Para qualquer $x \in (0, 1]$ o jogo vai tender para o ponto de equilíbrio estável em $x = 1$, ou seja, os animais agressivos sempre vão predominar sobre os animais passivos.

Proposição 3.1.2. *No jogo evolucionário Hawk-Dove, se $b > c$, então:*

(i) O ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável;

(ii) O ponto $x = 1$ é um ponto de equilíbrio estável;

Demonstração. (i) Perceba que em $x = 0$ temos um ponto de equilíbrio porque $x' = 0$. Agora vamos mostrar que este ponto é um ponto de instabilidade. Tome $x = \varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x + \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{-c}{2}\varepsilon + \frac{b}{2}\right) \to \frac{b}{2}$$

Quando a função se aproxima de 0, a derivada é positiva, ou seja, ela é uma função crescente. Assim, qualquer pequena perturbação acarretará num desequilíbrio de frequência das população. Portanto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

(ii) Perceba que em $x = 1$ temos um ponto de equilíbrio porque $x' = 0$. Agora vamos mostrar que este é um ponto de estabilidade. Considere $x = 1 - \varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$\left(\frac{-c}{2}x + \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{-c}{2}(1-\varepsilon) + \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{-c}{2} + \frac{c}{2}\varepsilon + \frac{b}{2}\right) \to \frac{b-c}{2}.$$

Como $b > c$, quando a função se aproxima de 1, a derivada é positiva e a função é crescente em $1 - \varepsilon$. Assim, independente de qualquer perturbação que ocorrer, a função sempre vai tender ao ponto $x = 1$. Portanto $x = 1$ é um ponto de equilíbrio estável.

■

Desta forma, quando $b > c$ sempre vamos ter um Equilíbrio de Nash, que neste caso também é uma estratégia dominante. Sempre vai ser melhor jogar a estratégia Falcão, qualquer perturbação que ocorrer na variação das frequências das populações vai acarretar no predomínio de indivíduos agressivos.

3.2 Jogo da Caça

Cada espécie desenvolveu seu mecanismo para sobreviver na natureza. A procura por recursos é algo que está presente no instinto de todos os seres vivos. Nem sempre a disputa é a melhor solução para a sobrevivência, em muitos casos se torna mais prático e eficiente a cooperação entre os indivíduos de uma população.

Leões vivem na natureza e precisam caçar alimentos para sua sobrevivência. Gazelas e búfalos são presas naturais dos leões. Os búfalos são animais grandes, robustos e possuem uma quantia muito farta de carne. Já as gazelas, se caracterizam por serem animais rápidos e ágeis, mas que não possuem tanta carne quanto os búfalos.

Ao sair para caçar, leões possuem duas estratégias, a primeira seria caçar gazelas(chamaremos de estratégia G) e a segunda caçar búfalos(chamaremos de estratégia B). Caçar um búfalo implica em mais carne, ou seja, maior *payoff*. Chamaremos de a como a recompensa de caçar um búfalo. Caçar uma gazela implica em menos carne, chamaremos de d a recompensa dessa estratégia, onde $0 < d < a$.

Sozinho, um leão não consegue caçar um búfalo porque é um animal muito robusto e forte. Sozinho, também não conseguem caçar uma gazela, porque ela é muito rápida e ágil. Desta forma, quando caçam sozinhos não conseguem obter alimento, em outras palavras, quando dois leões jogam estratégias diferentes, recebem recompensa igual a 0.

Este jogo representa uma situação no qual vale mais a pena dois indivíduos dentro de uma população entrarem em uma situação de cooperação. Quando eles se unem, conseguem maiores recompensas.

Segue abaixo a matriz de recompensas deste jogo:

$$\begin{array}{c|cc} & \text{B} & \text{G} \\ \hline \text{B} & a & 0 \\ \text{G} & 0 & b \end{array} \quad (3.3)$$

Observe que neste jogo temos dois Equilíbrios de Nash, que seria as duas situações no qual ambos os predadores escolhem caçar a mesma presa. Quando os dois jogam a estratégia B temos um Equilíbrio de Nash com ponto focal, ou seja, seria o conjunto de estratégias que leva ao Equilíbrio de Nash com melhores recompensas.

Sob uma perspectiva mais matemática, temos que $a > 0$, ou seja, pela definição 2.9.1 quando ambos jogam G, este conjunto de estratégias se configura como um Equilíbrio de Nash. Ainda, como $d > 0$, pela definição 2.9.1 temos que se ambos jogarem a estratégia B, teremos outro Equilíbrio de Nash.

Agora, ao substituirmos os valores da matriz *payoff* (3.3) na função (2.5) obtemos:

$$x' = x(1-x)((a-d)x - d) \quad (3.4)$$

Como temos que $a > 0$ e $d > 0$, então há uma situação de biestabilidade nesse jogo. Neste caso, os pontos $x = 1$ e $x = 0$ são pontos de equilíbrio estáveis e existe um ponto no intervalo (0,1) que é um ponto instável. Este ponto é determinado como o momento no qual $x(1-x)((a-d)x-d)=0$, ou seja, em $x^* = \dfrac{d}{a-d}$

Perceba ainda que o ponto $x^* \in (0,1)$, ou seja, $\dfrac{d}{a-d}$ tem que ser um valor entre 0 e 1,

$$\frac{d}{a-d} < 1 \Rightarrow d < a-d \Rightarrow a > 2d \ (3.5)$$

Desta forma, uma condição para o funcionamento do jogo é que $a > 2d$.

Proposição 3.2.1. *No Jogo da Caça temos que:*

(i) Os pontos $x=1$ e $x=0$ são ponto de equilíbrio estáveis;

(ii) O ponto $x = \dfrac{d}{a-d}$ é de equilíbrio instável;

Demonstração. (i) Primeiro, perceba que em $x=0$ temos um ponto de equilíbrio porque $x'=0$. Agora vamos mostrar que este ponto é um ponto de estabilidade. Considere $x=\varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$((a-d)x-d) = ((a-d)\varepsilon - d) \to -d$$

Quando a função se aproxima de 0, a derivada é negativa, ou seja, ela é uma função decrescente. Assim, independente de qualquer pequena perturbação que ocorrer, a função sempre vai convergir para o ponto $x=0$.

Em $x=1$ também temos um equilíbrio, pois $x'=0$. Agora vamos mostrar que este ponto é um ponto de estabilidade. Considere $x = 1-\varepsilon$ tal que $\varepsilon \to 0$. Assim,

$$((a-d)(1-\varepsilon)-d) \to a-d-d = a-2d$$

Como $a > 2d$, quando a função se aproxima de 1, a derivada é positiva e a função é crescente em $1-\varepsilon$. Assim, independente de qualquer pequena perturbação que ocorrer, a função sempre vai convergir para o ponto $x=1$.

(ii) Vamos mostrar que $x = \dfrac{d}{a-d}$ é um ponto de equilíbrio instável. Primeiro, é um ponto de equilíbrio porque $x'=0$, agora vamos mostrar que é um ponto instável. Considere $x = \dfrac{d}{a-d} + \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} (a-d)\left(\frac{d}{a-d}+\varepsilon\right) - d &= (a-d)\left(\frac{d}{a-d}\right) + (a-d)\varepsilon - d \\ &= d + (a-d)\varepsilon - d \\ &= (a-d)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Agora considere $x = \dfrac{d}{a-d} - \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(a-d)\left(\frac{d}{a-d} - \varepsilon\right) - d &= (a-d)\left(\frac{d}{a-d}\right) - (a-d)\varepsilon - d \\ &= d - (a-d)\varepsilon - d \\ &= (d-a)\varepsilon\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Desta forma, podemos concluir que no intervalo $\left(\dfrac{d}{a-d} - \varepsilon, \dfrac{d}{a-d}\right)$ a derivada vai ser negativa, ou seja, qualquer pequena perturbação acarretará num desequilíbrio de frequência das população.

Portanto, para qualquer ponto do intervalo $\left(\dfrac{d}{a-d} - \varepsilon, \dfrac{d}{a-d} + \varepsilon\right)$ qualquer pequena perturbação acarretará num desequilíbrio de frequência das população. Desta forma, para qualquer pequena perturbação, $x = \dfrac{d}{a-d}$ é um ponto de equilíbrio instável.

$\blacksquare$

4 Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos algumas noções básicas de Teoria dos Jogos, desenvolvendo uma introdução geral do tema. Adentramos também em uma aplicação da área na Biologia, explorando os principais aspectos e em como que a Teoria dos Jogos busca a solução de diversos problemas biológicos. Não menos importante, também foi discutido dois problemas: Hawk-Dove e Jogo da Caça, aplicando os conhecimentos discutidos anteriormente.

No primeiro capítulo, abordamos aspectos introdutórios da Teoria dos Jogos, proporcionando ao leitor um contato inicial a diversos conceitos e relações da área e dando base para a fundamentação dos capítulos seguintes. Uma das principais discussões foi a estruturação de um jogo, que se constitui basicamente de jogadores, estratégia e recompensa. Também foi comentado sobre as formas de representação, que seria a Forma Normal e a Forma Extensiva. Um ponto muito importante desta seção foi a introdução aos dois principais meios de resolução de um jogo, que é a estratégia dominante e Equilíbrio de Nash. Por fim, também foi apresentado o conceito de estratégia mista.

No segundo capítulo, iniciamos introduzindo a ideia de um jogo evolucionário, sua estruturação e suas principais distinções de um jogo no seu sentido mais amplo. Um dos principais pontos da seção foi a noção de Ponto de Equilíbrio e Estabilidade Evolucionária, conceitos estes que estão fortemente ligados e que são essenciais para a análise de um jogo evolucionário. Equacionar os dados de um jogo através do modelo estabelecido serviu como uma grande ponte entre a fundamentação teórica e a argumentação matemática, promovendo uma análise mais substancial de problemas da área. Ao final do capítulo, também foi estabelecida a relação entre Equilíbrio de Nash dentro de um jogo evolucionário.

No Capítulo 3, foi desenvolvido uma análise sobre dois problemas da Teoria dos Jogos Evolucionários: Hawk-Dove e Jogo da Caça. O primeiro representa uma situação de conflito entre animais de uma população, no qual indivíduos podem ser agressivos ou passivos. O segundo mostra um caso no qual animais podem ou não desenvolver uma relação de cooperação para obterem comida. Em ambos os problemas, foi desenvolvido uma análise mostrando os pontos de equilíbrio e como que a função das frequências populacionais se comportou em cada situação.

Por fim, este trabalho buscou desenvolver uma aplicação da Teoria dos Jogos na Biologia sob uma perspectiva matemática, criando uma ponte entre estas três áreas de estudo. Para isso foi necessário estabelecer relações entre os diversos conceitos estudados, fazendo adequações quando necessário. Esta contextualização foi uma forma de interrelacionar conhecimento e avaliar situações sob novas perspectivas, maximizando assim, a solução de problemas.

Referências

[1] K. DUTTA, Prajit. Strategies and Games: Theory and Practice. 3ª. ed. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 2001. 476 p. v. 1.

[2] A. NOWAK, Martin. Evolutionary Dynamics: Exploring Equations of Life. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 2006. 363 p. v. 1.

[3] POLAK, Ben. Game Theory. Disponível em: <https://oyc.yale.edu/economics/econ-159>. Acesso em: 11 jun. 2018.

[4] HAMMERSTEIN, Peter; SELTEN, Reinhard. Game Theory and Evolutionary Biology. In: HAMMERSTEIN, Peter; SELTEN, Reinhard. Handbook of Game Theory. [S.l.]: Elsevier Science B. V., 1994. cap. 28, p. 931-984. v. 2.

[5] R. KARLIN, Anna; PERES, Yuval. Game Theory, Alive. University Of Washington, Seattle: AMS, 2016. 393 p.

[6] ALEXANDRE SARTINI, Brígida et al. Uma Introdução a Teoria dos Jogos. Bahia: [s.n.], 2004. 64 p.