UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GABRIEL DA SILVA WAGNER

MÉTODO DA MUDANÇA DE VARIÁVEL APLICADO A PROBLEMAS DE DIFERENTES ÁREAS DA MATEMÁTICA

FLORIANÓPOLIS - SC
2018

GABRIEL DA SILVA WAGNER

MÉTODO DA MUDANÇA DE VARIÁVEL APLICADO A PROBLEMAS DE DIFERENTES ÁREAS DA MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à banca examinadora da Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Habilitação Licenciatura em Matemática.

Orientador: Professor Antônio Vladimir Martins.

FLORIANÓPOLIS – SC
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

GABRIEL DA SILVA WAGNER

Esta Monografia foi julgada adequada para obtenção do Título de Licenciatura em Matemática, sendo aprovada em sua forma final pela banca examinadora:

Antonio Vladimir Martins

Orientador: Prof.Antônio Vladimir Martins
Universidade Federal de Santa Catarina

Leandro B. Morgado

Prof. Leandro Batista Morgado
Universidade Federal de Santa Catarina

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 13 de novembro de 2018.

Dedico este trabalho à minha família, namorada e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Anilson e Eliane, meu irmão Matheus e minha namorada Maria Luiza, pelo apoio durante este tempo de graduação. Sempre me deram um ambiente tranquilo para que eu pudesse me manter focado, mesmo nos momentos em que eu silenciosamente me sentia cansado e desmotivado.

Agradeço também ao meu orientador, professor Antônio Vladimir Martins, que não só me propôs o tema pelo qual eu desenvolvi um grande interesse mas também por estar sempre disponível a me ajudar nos momentos em que tive dificuldades para desenvolver os problemas estudados.

Agradeço também ao apoio dos programas de iniciação a docência (PIBID) e de iniciação científica (PIC), e aos meus respectivos supervisores nestes programas, professor Nereu Estanislau Burin e professora Alda Dayana Mattos Mortari, fontes de inspiração.

Agradeço por fim aos meus amigos de fora da universidade que, apesar disso, me motivaram a completar este trabalho e o curso.

RESUMO

A mudança de variável é uma técnica básica da matemática, utilizada em suas mais diversas áreas, com um objetivo simples: simplificar um problema substituindo sua variável inicial por uma outra em função dela. Com esta ferramenta podemos transformar um problema desconhecido num conhecido, ou um problema complexo num simples. Neste trabalho, estudaremos diversos problemas, alguns históricos e alguns recreativos, em que esta técnica se mostra uma ferramenta valiosa para solucioná-los.

Palavras-Chave: mudança de variável, resolução de problemas.

ABSTRACT

The change of variables is a basic technique of mathematics, used in many different areas, with a simple objective: to simplify a problem by substituting its initial variable by another one, which is a function of the original variable. With this tool, we can transform an unknown problem into a known one, or transform a complex problem into a simpler one. In this paper, we'll study several problems, some historic and some recreational, where this technique is shown to be a valuable tool to achieving the solutions of these problems.

Keywords: change of variables, problem solving.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da graduação, ao estudar diferentes áreas da matemática, hora ou outra o método da mudança de variável aparecia de forma discreta para auxiliar na resolução de problemas.

Surge daí a motivação para este trabalho. Reunimos aqui uma coleção de dez problemas, entre clássicos e recreativos, de diferentes áreas da matemática, em que o método da mudança de variável se mostra como um caminho sublime no desenvolvimento destes problemas.

Este trabalho traz problemas de cálculo, de álgebra, de análise combinatória, de trigonometria e de geometria analítica, mas vale notar que poderíamos ter trazido problemas de ainda mais áreas, e os que aqui estão apresentados são apenas o resultado da caprichosa seleção feita.

Como serão apresentados neste trabalho problemas de diversas áreas, foi decidido que ao invés de ter várias seções trazendo definições e teoremas de cada área que serão usados ao longo do desenvolvimento dos problemas, teremos em cada problema, logo no início, uma "caixa de ferramentas" que trará os teoremas, resultados e definições relevantes ao desenvolvimento daquele problema.

Não serão demonstrados estes teoremas e resultados trazidos nas caixas de ferramentas, uma vez que o propósito deste trabalho não é entrar a fundo nestes conceitos das diferentes áreas da matemática, e sim desenvolver os problemas e destacar o método da mudança de variável.

Por fim, com este trabalho espera-se que o leitor seja capaz de perceber o poder do método da mudança de variável, na medida que além de simplificar problemas, esta técnica também é capaz de transformar problemas que a primeira vista parecem impossíveis em problemas possíveis, e também é capaz de generalizar a solução de um problema para uma infinidade de outros problemas, além de ser um caminho estável para se procurar soluções e provar resultados.

Para uma motivação inicial, trago nesta introdução um exemplo de problema não-matemático que ilustre o método da mudança de variável na solução de um problema:

Problema não-matemático.

Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso a travessia tornou-se o objeto de um problema. “A travessia do riacho” é o x deste problema.

Assim como no problema anterior, neste é entendido que não há maneira trivial de resolver este problema. O homem precisa então usar de seus conhecimentos e ter uma ideia de reduzir o problema a um mais simples.

Ele pode por exemplo pensar em atravessar o riacho por cima de uma árvore caída que ligue as margens, e deve então buscar uma árvore caída que lhe sirva, e esta é sua nova variável y.

No entanto, às vezes isto não basta e o homem pode não encontrar nenhuma árvore caída nas margens do riacho, apenas árvores de pé. O homem precisa então de mais uma ideia, a de derrubar uma árvore, e como fazer isto é sua nova variável z.

Supondo agora que o homem tenha conhecimento suficiente para derrubar a árvore, solucionando o problema em z, assim como no problema algébrico, ele precisa agora apenas solucionar o problema nas demais variáveis na ordem inversa de suas invenções.

O ato final da solução será o homem por cima da árvore caída atravessar o riacho. Vale ressaltar que quando mudamos a variável do problema, precisamos fazer uma análise das soluções encontradas na nova variável para garantir que estas servem também para o problema original.

Por exemplo, neste problema não matemático, qualquer árvore que possa ser derrubada é uma solução para o problema na variável z. No entanto, se a árvore for muito pequena, esta solução pode não servir para o nosso problema na variável anterior, onde se deseja ligar as duas margens do rio com uma árvore caída.

Esta análise se mostrará necessária também em alguns dos problemas matemáticos que trabalharemos ao longo deste trabalho.

2 A ARTE DE RESOLVER PROBLEMAS COM MUDANÇAS DE VARIÁVEL

Os problemas trabalhados nesta seção e suas deduções foram encontradas no livro A Arte de Resolver Problemas, 2ª impressão, por George Polya. O autor traz neste livro uma conversa muito interessante acerca de como resolver problemas matemáticos, inspirado pelo matemático Pappus da Grécia antiga.

Estas discussões feitas pelo autor são belas ilustrações do valor que o método da mudança de variável tem na matemática, e serão parafraseadas ao longo desta seção.

Quadro 1 – Caixa de ferramentas 1.

Potência de potência: dados $a > 0$ e x um número real qualquer, segue que $$(a^2)^x = (a^x)^2 = a^{2x}$$

O primeiro problema que vamos analisar é um problema algébrico, onde devemos determinar o valor de x que satisfaz a equação

$$8\left(4^x + \frac{1}{4^x}\right) - 54\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 101 = 0$$

Este problema a primeira vista não tem nada de trivial. No entanto, podemos tentar chegar em uma expressão mais simples realizando reduções sucessivas através de mudanças de variáveis. Segundo o autor, "mesmo com alguns conhecimentos, é preciso surgir uma boa ideia, um pouco de sorte, um pouco de invenção" para conseguirmos pensar em uma mudança de variável que nos ajude com o problema. O que precisamos perceber aqui é que $4^x = (2^x)^2$, $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, e portanto pode haver vantagens em utilizarmos a mudança

$$y = 2^x$$

Com esta escolha ficamos com a equação:

$$8\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-54\left(y+\frac{1}{y}\right)+101=0$$

De fato esta equação parece mais simples que a anterior, já que agora nossa incógnita não está mais no expoente de algum número. No entanto, ainda não terminou nossa tarefa. Esta equação ainda não tem solução simples, então precisamos de mais uma mudança perspicaz.

$$z=y+\frac{1}{y}$$

$$z^2=y^2+\frac{2y}{y}+\frac{1}{y^2}\qquad\rightarrow\qquad z^2-2=y^2+\frac{1}{y^2}$$

Esta escolha transforma a equação em

$$8(z^2-2)-54z+101=0$$

$$8z^2-54z+85=0.$$

Agora sim temos um problema simples de se resolver, já que tudo que precisamos saber é como resolver uma equação de segundo grau. Sem delongas, a solução deste problema em z será:

$$z_1=\frac{5}{2},\qquad z_2=\frac{17}{4}$$

Voltando agora para a variável y, temos 4 soluções

$$\frac{5}{2}=y+\frac{1}{y},\qquad \frac{17}{4}=y+\frac{1}{y}$$

$$y^2-\frac{5}{2}y+1=0,\qquad y^2-\frac{17}{4}y+1=0$$

$$y_1 = 2, \qquad y_2 = \frac{1}{2}, \qquad y_3 = 4, \qquad y_4 = \frac{1}{4}.$$

E finalmente em x temos as equações

$$2 = 2^x, \qquad \frac{1}{2} = 2^x, \qquad 4 = 2^x, \qquad \frac{1}{4} = 2^x$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = -2.$$

Perceba que a ordem dos cálculos é inversa à ordem de invenção das incógnitas, já que primeiro calculamos z, para depois y e então x, que era a incógnita originalmente procurada. Olhando para o desenvolvimento deste problema é fácil de ver porque é assim.

O interessante é que segundo o autor este método não está limitado a problemas matemáticos, mas também a qualquer tipo de problema. De fato, o problema não-matemático exposto na introdução deste trabalho é deste mesmo autor, e ilustra o mesmo método que usamos tanto nesta seção quanto usaremos nos desenvolvimentos dos demais problemas.

3 PROBLEMAS DE ÁLGEBRA

3.1 Como Euler resolveu a equação de segundo grau

Esta dedução foi encontrada na Revista do Professor de Matemática número 64, mas vem originalmente do livro *History of Mathematics* de Davis E. Smith, volume II. O método é devido a Euler e Bézout e foi aperfeiçoado por Sylvester (1840) e Hesse (1844).

Quadro 2 – Caixa de ferramentas 2

Teorema 1: Um sistema linear homogêneo possui soluções além da trivial se, e somente se, o determinante da matriz de seus coeficientes é igual a 0.

(POOLE, 2004)

Considere a equação quadrática na sua forma tradicional (com $a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

A mudança de variável utilizada por Euler foi a seguinte

$$x = u + z$$

Onde $u, z \in \mathbb{R}$, e segue também que

$$x^2 = (u + z)x$$

Esta mudança é pouco intuitiva, pois parece não haver vantagens em trocar uma variável pela soma de duas outras, mas no decorrer da dedução esta mudança se mostrará solene.

Montamos então o sistema de equações da esquerda, que aplicando a mudança de variável fica como na direita

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x - x = 0 \\ x^2 - x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x - (u + z) = 0 \\ x^2 - (u + z)x = 0 \end{cases}$$

Note que outra parte pouco intuitiva da dedução é que não se mudam todos os x. Isto porque o objetivo de Euler aqui era o de montar um sistema homogêneo nas incógnitas x, x^2 e x^3. Para tal, multiplicamos todas as equações por x e obtemos

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ x^2 - (u + z)x = 0 \\ x^3 - (u + z)x^2 = 0 \end{cases}$$

Decorre do Teorema 1 exposto na caixa de ferramentas desta seção que para que este sistema tenha solução diferente da trivial, o determinante da matriz de seus coeficientes deve ser igual a 0. Deste modo, estabelecemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u + z) \\ 1 & -(u + z) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante, obtemos

$$-a(u + z)^2 - b(u + z) - c = 0$$

$$-au^2 - 2auz - az^2 - bu - bz - c = 0$$

$$au^2 + 2auz + az^2 + bu + bz + c = 0$$

$$au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$$

Ou seja, uma equação do segundo grau na variável u. Agora, arbitramos o seguinte valor para z

$$z = -\frac{b}{2a}$$

Isto é pertinente, pois somos livres para escolher qualquer valor real para z desde que a variável u se adapte de forma a manter verdadeira a primeira mudança de variável que foi feita no começo do problema. Note agora como é oportuna esta escolha, pois decorre da equação anterior que

$$2az + b = 0$$

E assim ficamos apenas com

$$au^2 + az^2 + bz + c = 0$$

$$au^2 = -az^2 - bz - c$$

Substituindo z chegamos em

$$au^2 = -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - b\left(-\frac{b}{2a}\right) - c$$

$$au^2 = -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} - c$$

$$u^2 = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}$$

$$u^2 = \frac{-b^2 + 2b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, substituindo os valores de u e z na equação $x = u + z$, temos

$$x = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

Ou seja

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que é a popular fórmula de Bhaskara para equações quadráticas ensinada nas diversas escolas brasileiras.

3.2 A irredutibilidade do polinômio ciclotômico $u(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ sobre $\mathbb{Q}$, sendo p um número primo positivo

Este problema está proposto no livro Álgebra Moderna, 4ª edição, de Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi. Um polinômio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se é impossível fatorá-lo como o produto de polinômios não constantes com coeficientes racionais.

Quando se trata de irredutibilidade sobre os complexos ou reais, existem restrições bem claras. Não há polinômios complexos irredutíveis de grau maior que 1, e não há polinômios reais irredutíveis de grau maior que 2.

No entanto, nos racionais a situação é diferente, existem polinômios arbitrariamente grandes e irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$. Apesar disso, existe um critério bastante simples que nos permite verificar se um polinômio racional é ou não irredutível: o critério de Eisenstein.

Quadro 3 – Caixa de ferramentas 3.

Critério de Eisenstein: Seja $q(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio de coeficientes inteiros. Se existe um número primo p que seja divisor de $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ mas não de a_n e se p^2 não divide a_0, então $q(x)$ é irredutível sobre o conjunto dos racionais. (DOMINGUES, 2003)
Translação de Polinômio: Seja $q(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio. O polinômio obtido após aplicar a mudança da variável x por $x + a$, para algum a inteiro, é chamada de uma translação do polinômio. Se o polinômio transladado for irredutível, então o polinômio original também é irredutível. (DOMINGUES, 2003)
Soma de Progressão Geométrica: Seja $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ uma progressão geométrica de razão q. A soma dos n primeiros termos desta P.G. é dada por $S_n = \frac{a_0(q^n-1)}{q-1}$. (STEWART, 2007)

O polinômio em questão $u(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ não pode ter o critério de Eisenstein aplicado imediatamente. Para podermos induzir a irredutibilidade dos polinômios desta forma, iremos primeiramente particularizar o problema. Escolhendo $p = 5$, ficamos com a equação $u(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

Da mesma forma que na equação geral, não temos como aplicar o critério de Eisenstein ainda. No entanto, através de uma mudança de variável, podemos transladar o polinômio de forma que o novo polinômio seja avaliável pelo critério. A mudança usada será

$$x = y + 1$$

Que transforma o polinômio em

$$u(y+1) = v(y) = 1 + (y+1) + (y+1)^2 + (y+1)^3 + (y+1)^4$$

$$\begin{cases} (y+1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 \\ (y+1)^3 = \qquad y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ (y+1)^2 = \qquad\qquad y^2 + 2y + 1 \\ \quad y + 1 = \qquad\qquad\qquad y + 1 \\ \qquad 1 = \qquad\qquad\qquad\quad 1 \end{cases}$$

$$v(y) = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$$

Perceba que o número $p = 5$ divide os coeficientes $5, 10, 10$ e 5, mas não divide o coeficiente 1, e além disso $p^2 = 25$ não divide o coeficiente 5. Logo, pelo critério de Eisenstein, $v(y)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e portanto $u(x)$ também o é.

Não é coincidência que quando particularizamos o polinômio $u(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ com $p = 5$ o número primo usado no critério de Eisenstein foi também $p = 5$. Na verdade, para qualquer número p primo que escolhermos para particularizar o polinômio $u(x)$, será este mesmo p o primo usado para satisfazer o critério.

Isto porque no desenvolvimento da soma após a mudança de variável, sempre teremos:

1. $a_0 = p$, pois a soma será de p termos da forma $(y+1)^i$, $0 \le i \le p-2$;
2. $a_n = 1$, pois somente haverá um termo da forma $(y+1)^{p-1}$;
3. a_j múltiplos de p, para $1 \le j \le p-2$, pois

$$u(y+1) = 1 + (y+1) + (y+1)^2 + \cdots + (y+1)^{p-1}$$

Note que isto é uma soma de P.G. de termo inicial 1 e razão $(y+1)$. Segue que

$$u(y+1) = \frac{(y+1)^p - 1}{(y+1) - 1}$$

$$u(y+1) = \frac{y^p + C_{1,p}y^{p-1} + \cdots + C_{p-1,p}y + 1 - 1}{y}$$

$$u(y+1) = p + C_{p-2,p}y + \cdots + C_{1,p}y^{p-2} + y^{p-1}$$

Ou seja, os a_j são da forma $C_{j,p}$, onde $C_{j,p}$ é o coeficiente binomial. Agora basta mostrar que os $C_{j,p}$ são múltiplos de p, para $1 \leq j \leq p-2$. Temos

$$C_{j,p} = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!}$$

Como $j < p$, todos os fatores irredutíveis de $j!$ são menores que p. Como p é primo e como $j!$ divide $p(p-1)\ldots(p-j+1)$, segue que $j!$ divide o produto $(p-1)\ldots(p-j+1)$ e então o coeficiente binomial $C_{j,p}$ é múltiplo de p.

Concluindo, sempre que tivermos um polinômio $u(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ para algum número p primo, podemos mostrar que este polinômio é irredutível utilizando o critério de Eisenstein na sua versão transladada com a mudança de variável $x = y + 1$.

Além disso, já até sabemos qual o número que será usado no critério de Eisenstein. Este número é exatamente o p primo que define o polinômio $u(x)$.

4 PROBLEMAS DE TRIGONOMETRIA

4.1 Uso da equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ para determinar o seno e o cosseno de 18º

Este problema e sua dedução foram encontrados no livro Manual de Trigonometria de Luís Lopes.

Quadro 4 - Caixa de ferramentas 4.

Seno e cosseno da soma: $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ $\cos(a+b) = cos(a)cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ (LOPES, 1992)
Identidade fundamental trigonométrica: $\sin^2(a) + cos^2(a) = 1$ (LOPES, 1992)
Seno e cosseno de arco duplo: $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ $\cos(2a) = cos^2(a) - \sin^2(a)$ $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ (LOPES, 1992)

Um caminho para encontrar o valor do cosseno de 18º é a partir de outro ângulo que tem valor de seno e cosseno bem conhecidos, o 90º. Note que

$$\cos(90°) = 0 = \cos(5\,.\,18°)$$

Assim, para obter o valor de $\cos(5\,.\,18°)$, deduziremos a fórmula para $\cos 5\alpha$ utilizando as relações expostas na caixa de ferramentas deste problema.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 2(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\cos^2\alpha - 1)$$

$$\sin 4\alpha = 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 4\alpha = -8\sin^3\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha$$

Finalmente, temos

$$\cos 5\alpha = \cos(4\alpha + \alpha) = \cos 4\alpha\cos\alpha - \sin 4\alpha\sin\alpha$$

$$\cos 5\alpha = \cos\alpha\,(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) - \sin\alpha(-8\sin^3\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$\cos 5\alpha = 8\cos^5\alpha - 8\cos^3\alpha + \cos\alpha + 8\sin^4\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 5\alpha = 8\cos^5\alpha - 8\cos^3\alpha + \cos\alpha + 8(1-\cos^2\alpha)^2\cos\alpha - 4(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$$\cos 5\alpha = (8+8)\cos^5\alpha + (-8-16+4)\cos^3\alpha + (1+8-4)\cos\alpha$$

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

Para $\alpha = 18°$, segue que

$$16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha = \cos(5\,.\,18°) = 0$$

Agora, utilizaremos a mudança de variável $x = \cos\alpha$, e então dividindo toda a equação por x, chegamos na equação biquadrada em x, que tem como uma de suas raízes o valor de $\cos(18°) > 0$

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$$

Para solucionar esta equação, utilizamos uma segunda mudança de variável $y = x^2$, transformando a equação em uma quadrática, mais simples de se resolver

$$16y^2 - 20y + 5 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtemos os seguintes resultados

$$\begin{cases} y_1 = \pm\dfrac{5+\sqrt{5}}{8} \\ y_2 = \pm\dfrac{5-\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

As raízes de valor negativo são descartadas pois como comentado anteriormente, $\cos(18°) > 0$. Voltando a variável original x, as soluções ficam

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}} \\ x_2 = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} \end{cases}$$

Aproximando estes números e voltando para o $\cos\alpha$, temos as opções

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 \cong 0{,}951 \\ \cos\alpha_2 \cong 0{,}588 \end{cases}$$

Como $\alpha = 18°$, não faz sentido a segunda solução, já que

$$\cos 18° > \cos 30° \cong 0{,}866$$

Assim, segue a conclusão

$$\cos 18° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Agora, para calcularmos o seno, basta utilizarmos a identidade fundamental trigonométrica

$$\cos^2 18° + \sin^2 18 = 1$$

$$\sin 18° = \sqrt{1 - \frac{(5+\sqrt{5})}{8}} = \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

$$\sin 18° = \sqrt{\frac{6}{16} - \frac{2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}}$$

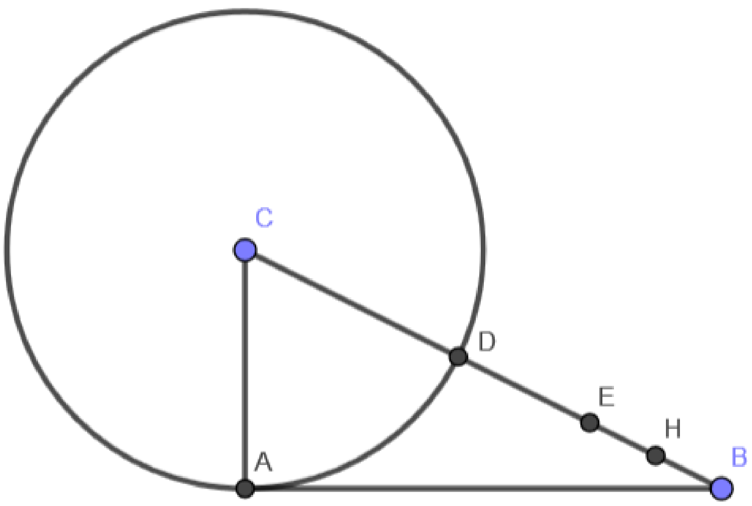
$$\sin 18° = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Ainda sobre o seno de 18°, perceba que com esta medida que calculamos, é possível construir um pentágono regular apenas com régua e compasso, já que o seno de 18° é igual ao cosseno de 72°, que é o ângulo central do pentágono quando traçamos os raios da circunferência circunscrita ligados aos vértices do pentágono. Para fazer esta construção, basta seguir as instruções:

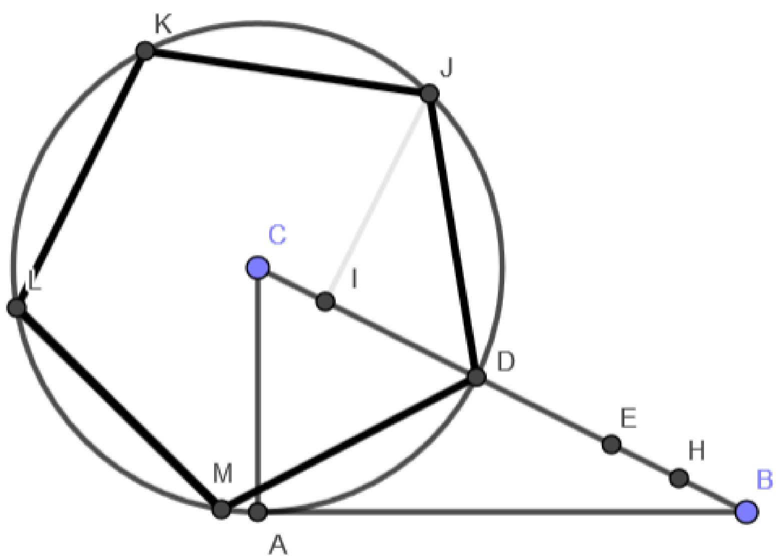
1. Construa o triângulo ABC retângulo em A, com $AB = 2AC$. AC será nossa medida unitária para o resto da construção, assim faz sentido dizer que AB mede 2 e AC mede 1.
2. Note que a hipotenusa BC do triângulo tem medida $\sqrt{5}$. Agora, trace a circunferência (C, AC) e marque o ponto D no encontro desta circunferência com o segmento BC.

3. Note que BD mede $\sqrt{5}-1$ Divida BD em 4 partes iguais marcando o ponto médio E de BD e então o ponto médio H de BE. Note que BH mede

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18° = \cos 72°$$



4. Marque o ponto I na reta CD, tal que CI tenha medida igual a de BH.
5. Trace o segmento IJ, tal que J seja um ponto na circunferência (C, AC) e IJ seja perpendicular à reta CD.
6. Note que com estes passos, criamos o ângulo de medida 72°, $D\hat{C}J$. Marque os pontos K, L e M na circunferência tal que $DJ = JK = KL = LM = DM$.
7. Trace os segmentos $DJ, JK, KL, LM. DM$.
8. Temos finalmente o pentágono regular $DKJLMN$.



4.2 Análise diofantina: pontos racionais sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$

Alguns pontos racionais imediatos desta circunferência são $(1,0), (-1,0), (0,1)$, $(0,-1)$. Mas é pertinente questionar como obter de forma metódica outros infinitos pontos racionais desta circunferência, já que o método intuitivo de isolar um das incógnitas nos apontaria para soluções em geral irracionais, já que trabalharíamos com uma raiz quadrada:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \qquad x = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

Quadro 5 - Caixa de ferramentas 5.

Teorema do ângulo inscrito: Numa circunferência, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito que subtende o mesmo arco. (LOPES, 1992)
Identidade fundamental trigonométrica: $\sin^2(a) + cos^2(a) = 1$ (LOPES, 1992)

A seguinte mudança de variável nos fornece pontos que atendem as demandas do problema. Primeiro vamos analisar porque esta mudança funciona, e então averiguar de onde ela surgiu. Para t racional, note que x e y também serão racionais na mudança, pois produto, soma, subtração e divisão de números racionais resulta em um número racional.

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Para verificarmos que esta mudança de fato atende ao problema, basta substituirmos na equação da circunferência

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1$$

$$\frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2}=1$$

$$\frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}=1$$

Logo, de fato a mudança de variável soluciona o problema, e ainda mais, ela simplifica o problema na medida em que agora temos apenas uma variável para definir afim de obter pontos da circunferência.

Por exemplo, escolhendo $t=\frac{1}{3}$, obtemos o ponto $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

$$x=\frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{4}{5}, \qquad y=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{5}$$

Se utilizarmos agora $t=\frac{2}{3}$, obtemos o ponto $\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$

$$x=\frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{5}{13}, \qquad y=\frac{\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{12}{13}$$

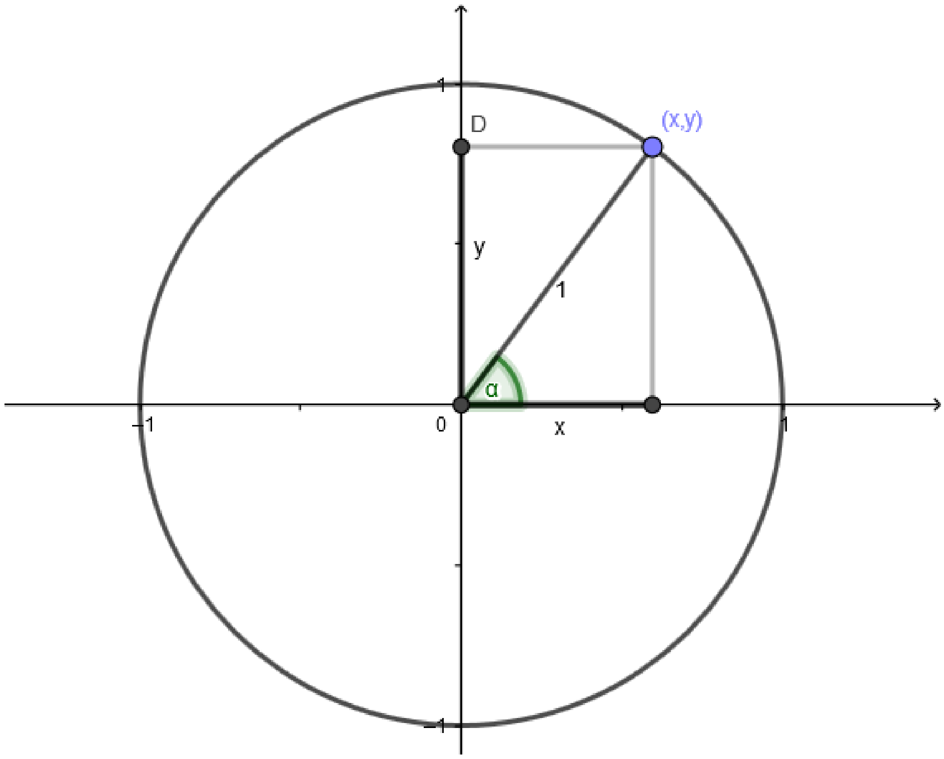
Perceba que os números $(3,4,5)$ e $(5,12,13)$ que encontramos não são números desinteressantes quaisquer, são ternos pitagóricos!

Se representarmos as soluções de $x=\frac{m}{z}$ e $y=\frac{n}{z}$ com $m,n,z\in\mathbb{Z}$, os ternos (m,n,z) que encontramos a partir da escolha de valores racionais para t serão sempre ternos pitagóricos.

Isto decorre do fato da equação $x^2+y^2=1$ do círculo ser um teorema de Pitágoras manipulado algebricamente

$$m^2+n^2=z^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{m^2}{z^2}+\frac{n^2}{z^2}=1 \quad \leftrightarrow \quad x^2+y^2=1$$

Agora, vale a pena explorarmos de onde veio esta mudança. Primeiro, vamos analisar no círculo a relação de x e y com as razões trigonométricas.



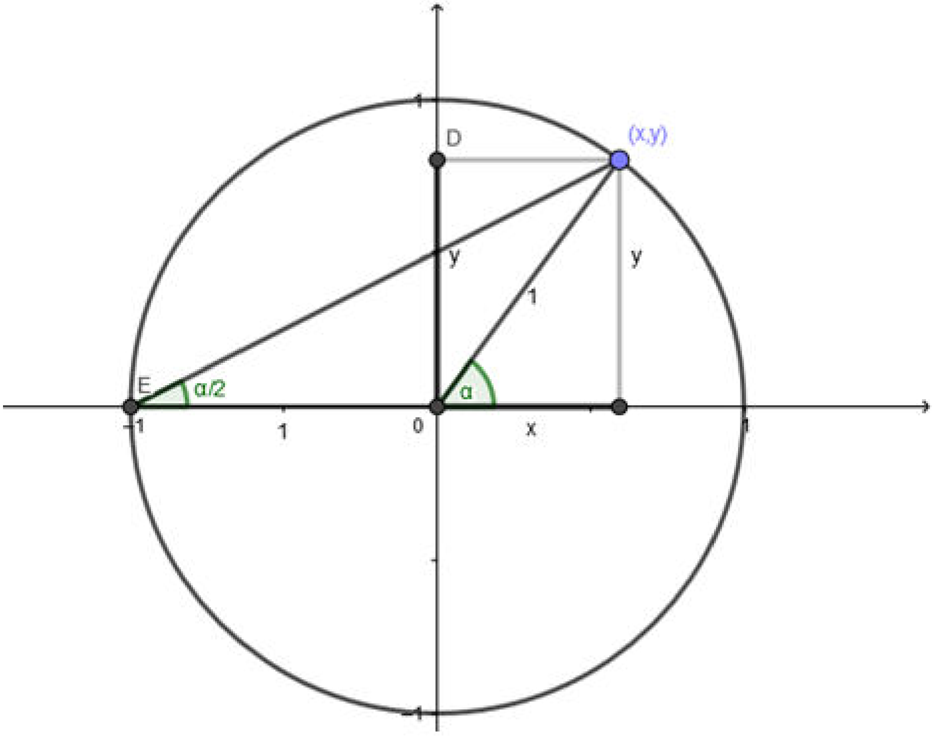
Note que as medidas x e y coincidem respectivamente com $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$, já que o raio da circunferência mede 1, e analisando o triângulo retângulo formado, estas razões trigonométricas são dadas por

$$\cos\alpha = \frac{x}{1}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{1}$$

Substituindo na equação da circunferência, temos a identidade fundamental trigonométrica

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

A estratégia agora será tentar escrever tanto $\cos\alpha$ quanto $\sin\alpha$ em função de uma única variável. Esta variável será $\tan\frac{\alpha}{2}$. Como α é um ângulo central da circunferência, para obtermos o ângulo $\frac{\alpha}{2}$ na circunferência basta tomarmos um ângulo inscrito no círculo referente ao mesmo arco que α. Observe:



O novo triângulo retângulo formado marcando o ponto E onde temos o ângulo $\frac{\alpha}{2}$ tem catetos $1+x$ e y. Logo, podemos escrever a tangente de $\frac{\alpha}{2}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{1+x}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Fazendo agora a mudança de variável $t = \tan\frac{\alpha}{2}$, e então isolando o seno temos

$$\sin\alpha = (1+\cos\alpha)\,t$$

Substituindo na identidade fundamental trigonométrica, e isolando $\cos\alpha$, chegamos em uma equação de segundo grau

$$\cos^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2 t^2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha + t^2 + 2t^2 \cos \alpha + t^2 \cos^2 \alpha = 1$$

$$(t^2 + 1) \cos^2 \alpha + (2t^2) \cos \alpha + (t^2 - 1) = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4(t^2 + 1)(t^2 - 1)}}{2(t^2 + 1)}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4t^4 + 4}}{2(t^2 + 1)}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2t^2 \pm 2}{2(t^2 + 1)} = \frac{-t^2 \pm 1}{t^2 + 1}$$

As duas soluções são

$$\begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{-(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = -1 \\ \cos \alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

Como não queremos um valor fixo para $x = \cos \alpha$, utilizaremos a segunda solução, e voltando a equação $\sin \alpha = (1 + \cos \alpha)\, t$ obtemos também o valor do seno

$$\sin \alpha = \left(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) t = \left(\frac{2}{1 + t^2}\right) t$$

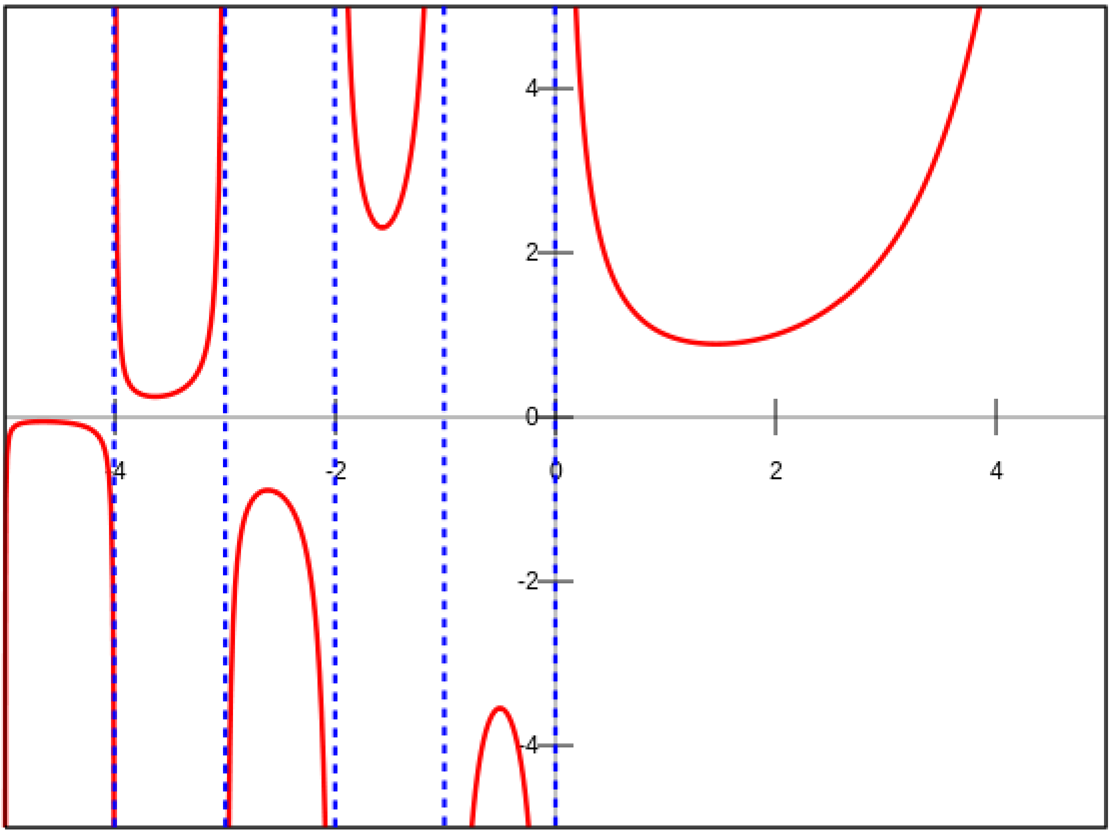
Logo, temos os valores de $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, que são os valores que é exatamente a mudança que usamos para x e y no começo do problema

$$\cos \alpha = x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin \alpha = y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

5 PROBLEMAS DE CÁLCULO

5.1 Função gama $\boldsymbol{\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt}$ aplicada a $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$

Esta dedução foi encontrada no livro Análise de Fourier, por M. R. Spiegel. Trata-se da demonstração de um famoso resultado de uma das funções especiais da Matemática, a função gama, que generaliza o fatorial de um número natural para o conjunto dos reais diferentes de inteiros negativos. O gráfico a seguir ilustra a função gama:



Esta função foi criada por Euler, de forma que mantivesse a relação de recorrência do fatorial de um número natural para um conjunto maior. Neste caso, este conjunto é $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_{-}$, ou seja, reais diferentes de inteiros negativos. Assim, vale

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

E, portanto, vale também, para todo inteiro positivo n:

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x\Gamma(x)$$

Assim, conhecer o valor de $\Gamma(x)$ em um ponto nos permite também conhecer o valor de $\Gamma(x)$ em todos os pontos da forma $x+n$ com n inteiro não negativo. Como $\Gamma(1) = 1$, conhecemos o valor de gama em todos os pontos n inteiros positivos, que são exatamente os valores da função fatorial, de forma que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Por conseguinte, se obtivermos o valor da função gama em um ponto x não inteiro positivo estaremos obtendo o valor de gama não somente neste ponto, mas também em uma infinidade de outros pontos da forma $x+n$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Isto mostra a importância do famoso resultado mostrado a seguir, que vamos provar.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Quadro 6 – Caixa de ferramentas 6.

Coordenadas Polares: É um sistema de coordenadas bidimensional em que cada ponto no plano é determinado por uma distância(r) e um ângulo (θ), em relação a origem do sistema. Assim, uma curva representada no sistema de coordenadas cartesiano pode ser convertida para o sistema de coordenadas polar, fazendo uma mudança de variáveis:

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

Decorre desta mudança também a seguinte relação:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

(STEWART, 2007)

Comecemos o desenvolvimento do problema aplicando a função no ponto em que queremos fazer o cálculo

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}-1} dt$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}} dt$$

Neste ponto, fazemos a primeira mudança de variável desta solução

$$t = u^2, \qquad dt = 2u\, du$$

Voltando na integral, ficamos com

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{-1} 2u\, du$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\; du$$

Agora, com um truque algébrico, forçaremos o aparecimento de uma soma de variáveis ao quadrado, para que possamos utilizar a mudança de sistemas de coordenadas para o sistema polar. Elevando a equação ao quadrado, é razoável escrevermos da forma

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\int_0^\infty e^{-u^2}\, du\right)\left(\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv\right)$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\, du\, dv$$

Fazendo a mudança para o sistema de coordenadas polares, temos o seguinte

$$u = r\cos\theta\,, \qquad v = r\sin\theta\,, \qquad u^2 + v^2 = r^2, \qquad du\, dv = r\, dr\, d\theta$$

Substituindo na integral, ficamos com

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta$$

Perceba que os limites de integração devem ser estes pois quando u e v variam do 0 ao infinito, também r varia do 0 ao infinito. Agora, como a função $e^{-(u^2+v^2)}$ está sendo integrada no primeiro quadrante, já que u e v ambos variam de 0 ao infinito, faz sentido θ varrer todo este quadrante, ou seja, variar de 0 até $\frac{\pi}{2}$.

Esta função tem primitiva não muito difícil de se identificar. Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\right) = \left(\frac{-e^{-r^2}}{2}\right)\frac{d}{dr}\,(-r^2) = e^{-r^2} r$$

Logo, a integral fica:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Big|_0^{\infty} d\theta$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) d\theta$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)\theta\,\Big|_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Com este resultado, devido as características da função gama, é possível calcular a função em qualquer ponto da forma $x = \frac{1}{2} + z$, onde $z \in \mathbb{Z}$.

Segue deste resultado também, se voltarmos um pouco na dedução, que

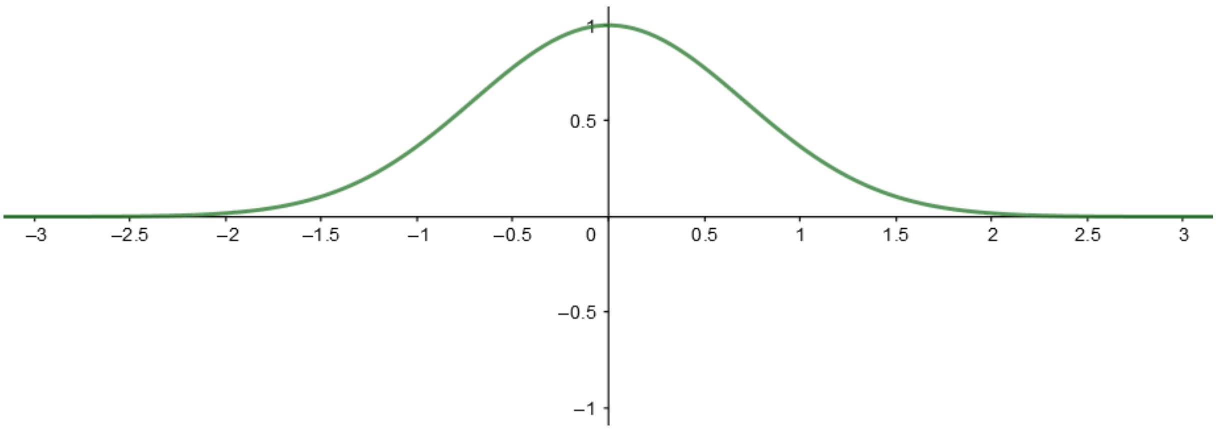
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad ou \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$$

A segunda equivalência segue do fato de a função e^{-u^2} ser par, e portanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

Isto significa que a área abaixo do gráfico de e^{-u^2} para todo $u \in \mathbb{R}$ é exatamente $\sqrt{\pi}$.



Como uma observação final, vale comentar que esta última integral e a função gama aparecem também no ramo da probabilidade. Por exemplo, esta última integral aparece no desenvolvimento da integral da função de densidade da distribuição normal, uma das mais utilizadas para modelar fenômenos naturais.

Já a função gama tem sua própria distribuição de probabilidade, chamada de distribuição gama, que é utilizada por exemplo para modelar quantidade de chuva em uma determinada região num determinado período de tempo.

5.2 Velocidade de escape da Lua

Este problema está proposto no livro Cálculo volume 1, 12ª edição, por George B. Thomas, e fala sobre a velocidade que um corpo precisa atingir para libertar-se do campo gravitacional da lua.

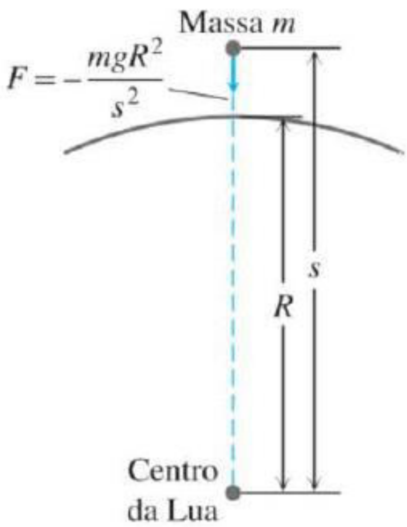
Quadro 7 – Caixa de ferramentas 7.

Segunda lei de Newton: A força resultante (F) que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa (m) do corpo pela aceleração (a) por ele adquirida: $$F = ma$$ (THOMAS, 2013)
Equações diferenciais separáveis: São equações que podem ser escritas na forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, ou seja, como o produto de funções em x e y. Neste caso, a solução $y(x)$ da equação diferencial sairá implicitamente no desenvolvimento de: $$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)\, dx$$ (THOMAS, 2013)

A força de atração gravitacional exercida pela Lua no corpo é dada por

$$F = -\frac{mgR^2}{s^2}$$

onde m é a massa do corpo, g é a aceleração da gravidade na lua, R é o raio da Lua e s é a distância do corpo até o centro da Lua, como na ilustração retirada do livro:



Supondo que o corpo seja lançado verticalmente para cima a partir da superfície da Lua com velocidade inicial v_0 no tempo $t = 0$, o problema pede que se prove, usando a segunda lei de Newton, que a velocidade do corpo na posição s é dada por

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + {v_0}^2 - 2gR$$

Como sugerido na descrição do problema, vamos utilizar a segunda lei de Newton. Como F é a única força atuando sobre o corpo, segue que

$$F = -\frac{mgR^2}{s^2} = ma$$

Dividindo os dois lados da equação por m, resta

$$-\frac{gR^2}{s^2} = a$$

Agora, da Física temos que por definição a aceleração de um corpo é igual a derivada temporal de sua velocidade, que por sua vez é a derivada temporal da posição do corpo. Aplicando a regra da cadeia segue então que

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

Assim, faremos a mudança de variável $a = v\frac{dv}{ds}$ na equação da segunda lei de Newton. Note que chegamos então numa equação diferencial separável

$$-\frac{gR^2}{s^2} = v\frac{dv}{ds}$$

Logo, separando a equação colocando os termos s com ds e os termos em v com dv, e integrando dos dois lados, temos (sendo termos na forma C_i constantes vindas da integração)

$$-gR^2 \int \frac{1}{s^2} ds = \int v\, dv$$

$$-gR^2 \left(-\frac{1}{s}\right) + C_1 = \frac{v^2}{2} + C_2$$

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + C_3$$

Nossas condições iniciais falam de $v = v_0$ no tempo $t = 0$, ou seja, no momento do lançamento. É correto afirmarmos então que neste momento, $s = R$, já que é o exato momento em que o corpo vai ser lançado. Segue então

$$v_0{}^2 = \frac{2gR^2}{R} + C_3 \quad \rightarrow \quad C_3 = v_0{}^2 - 2gR$$

Substituindo então esta expressão no lugar de C_3 na equação de v, temos finalmente o que queríamos provar:

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0{}^2 - 2gR$$

Podemos concluir que a velocidade se mantém positiva desde que $v_0{}^2 - 2gR \geq 0$, ou seja, desde que $v_0 \geq \sqrt{2gR}$. Dizemos portanto que $v_0 = \sqrt{2gR}$ é a velocidade de escape da Lua.

Na verdade, esta forma geral representa a velocidade de escape de um corpo celeste qualquer, utilizando os valores apropriados de gravidade e raio.

A título de curiosidade, podemos trazer dados para o problema, e então calcular esta velocidade para a Lua. Como a gravidade na Lua é de aproximadamente $1{,}62\ m/s^2$ e o raio da Lua é de aproximadamente $1738\ km = 1738000\ m$, temos que

$$v_0 = \sqrt{2\,.\,1{,}62\,.\,1738000}\ m/s$$

$$v_0 \cong 2{,}38\ km/s$$

5.3 Modelando uma população de ursos com uma equação logística diferencial

Este problema está resolvido no livro Cálculo, volume 1, 10ª edição, por George B. Thomas, e fala sobre uma população de ursos vivendo num parque nacional, sendo que o crescimento da população segue uma equação logística diferencial.

Esta é uma equação própria para descrever crescimentos populacionais, utilizando um crescimento quase exponencial num estágio inicial até chegar num estágio de saturação onde o crescimento diminui gradativamente, em respeito a um limite estabelecido.

O autor resolve a equação diferencial como uma equação separável. No entanto, nesta seção veremos um jeito diferente, utilizando uma mudança de variável para transformar a equação diferencial numa mais simples.

Quadro 8 - Caixa de ferramentas 8.

Derivada do produto: Se u e v são funções deriváveis em x, então o produto uv também é, e

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(THOMAS, 2013)

Equações diferenciais lineares de primeira ordem: Para resolver a equação linear $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, basta multiplicar os dois lados pelo fator integrante $I(x)$ e integrá-los.

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

(THOMAS, 2013)

O problema descreve um parque que tem capacidade para abrigar no máximo 100 ursos, e diz que no momento há 10 ursos no parque. Assim, a equação logística diferencial indicada pelo autor para o problema tem uma solução que converge para um limite de 100 ursos, apresentada a seguir.

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}001(100 - P)P$$

Nesta equação, P é a função de t que representa a população de ursos, sendo t o tempo representado em anos passados desde o momento inicial quando haviam 10 ursos no parque. Com estes dados, é pedido que determinemos uma solução $P(t)$ para o problema, e que calculemos quanto tempo deve levar para que haja 50 ursos no parque.

Fazendo a distributiva de $(100 - P)P$, ficaremos com uma equação onde aparecem uma função, o quadrado desta função e a derivada desta função. Porém, utilizando uma bela mudança de variável, podemos reduzir este problema a um onde só aparece uma função e sua derivada, sem o quadrado da função. A mudança é

$$zP = 1$$

Derivando os dois lados desta equação em relação a t, temos que

$$z\frac{dP}{dt} + P\frac{dz}{dt} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{dz}{dt}.\frac{P}{z}$$

Veja que voltando à equação diferencial e fazendo as contas, atingimos o objetivo de eliminar o elemento de quadrado da função.

$$-\frac{dz}{dt}.\frac{P}{z} = 0{,}001\left(100 - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z}$$

$$-\frac{dz}{dt}.\frac{1}{z^2} = \frac{0{,}001(100z - 1)}{z^2}$$

$$-\frac{dz}{dt} = \frac{z}{10} - \frac{1}{1000}$$

$$\frac{dz}{dt} + \frac{z}{10} = \frac{1}{1000}$$

Ora, esta é uma equação diferencial linear de primeira ordem que é simples de se resolver usando o fator integrante, que neste caso será

$$v(t) = e^{\int \frac{1}{10} dt} = e^{\frac{t}{10}}$$

Multiplicando os dois lados da equação diferencial por $v(t)$ e integrando-os, obtemos a solução geral da equação em z.

$$\int \left(e^{\frac{t}{10}} \frac{dz}{dt} + \frac{z}{10} e^{\frac{t}{10}} \right) dt = \int \frac{e^{\frac{t}{10}}}{1000} dt$$

$$\int \frac{d}{dt} (ze^{\frac{t}{10}})\, dt = \frac{10e^{\frac{t}{10}}}{1000} + C_1$$

$$ze^{\frac{t}{10}} = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100} + C_1$$

$$z = \frac{e^{\frac{t}{10}}}{100e^{\frac{t}{10}}} + \frac{C_1}{e^{\frac{t}{10}}} = 0{,}01 + C_1 e^{-\frac{t}{10}}$$

Voltando à variável $P = \frac{1}{z}$, temos a solução geral do problema dos ursos.

$$P = \frac{1}{0{,}01 + C_1 e^{-\frac{t}{10}}}$$

Utilizando o valor inicial fornecido pelo problema de que haviam 10 ursos no parque em $t = 0$, podemos calcular o valor da constante para a solução particular do problema.

$$P(0) = 10 = \frac{1}{0{,}01 + C_1 e^0}$$

$$10(0{,}01 + C_1) = 1$$

$$10C_1 = 1 - 0{,}1$$

$$C_1 = \frac{9}{100}$$

Substituindo o valor de C_1 na solução e fazendo pequenos ajustes chegamos em

$$P = \frac{100}{1 + 9e^{-t/10}}$$

Agora podemos calcular quanto tempo levaria segundo este modelo para que o parque contenha 50 ursos.

$$50 = \frac{100}{1 + 9e^{-t/10}}$$

$$1 = \frac{2}{1 + 9e^{-t/10}}$$

$$9e^{-t/10} = 1$$

$$e^{-t/10} = \frac{1}{9}$$

$$-\frac{t}{10} = \ln\frac{1}{9} = -\ln 9$$

$$t = 10 \ln 9 \cong 22$$

Portanto demorariam aproximadamente 22 anos para que hajam 50 ursos no parque.

6 PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA

6.1 Número de soluções inteiras de uma equação com n variáveis maiores ou iguais a z

Este problema está desenvolvido na Revista do Professor de Matemática Nº 73, no artigo “Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação”, por Mauro Munsignatti Jr.

O intuito do autor é inicialmente mostrar um método de se responder o questionamento sobre o número de soluções inteiras não negativas de uma equação com várias variáveis. Porém, a parte mais interessante e que o autor faz sem dar muita importância é o fato de que podemos generalizar a solução para uma quantidade de problemas muito maior, de equações onde as variáveis são maiores ou iguais a um número z inteiro qualquer ao invés de apenas não negativas, utilizando mudanças de variáveis! É isso que iremos explorar nesta seção.

Quadro 9 - Caixa de ferramentas 9.

Combinações completas: O número de modos de selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos é dado por

$$CR_{p,n} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

(CARVALHO, 2004)

Faz sentido começarmos mostrando a solução do problema para o caso em que as variáveis devem ser não negativas. Tomemos uma equação simples como exemplo para compreendermos a ideia por trás da solução geral.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Quantas soluções inteiras não negativas existem para esta equação? Bom, como o problema é bem simples, podemos simplesmente listar as soluções neste primeiro momento: $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, $(2,1,0)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$ $(0,1,2)$ $(1,1,1)$. 10 soluções.

Se tomarmos uma equação diferente, no entanto, com mais variáveis e igualadas a um valor maior, como

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

Seria bastante cansativo tentar listar todas as soluções. Porém, segundo o autor, existe um jeito simples de se resolver este problema, utilizando combinações completas. De forma geral, dado uma equação da forma $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = p$ onde as variáveis são todas não negativas, o número de soluções inteiras não negativas deste problema é dado por

$$CR_{p,n} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Vejamos que de fato se aplicarmos isto ao nosso primeiro exemplo $x_1 + x_2 + x_3 = 3$, acharemos a mesma quantidade de soluções que encontramos através da listagem.

$$CR_{3,3} = \frac{(3+3-1)!}{3!\,(3-1)!}$$

$$CR_{3,3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Podemos então usar este método para calcular também o número de soluções inteiras não negativas do nosso segundo exemplo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$

$$CR_{8,4} = \frac{(4+8-1)!}{8!\,(4-1)!}$$

$$C_{8,4} = \frac{11!}{8!\,3!} = 165$$

Agora, o interessante é notar que podemos transpor problemas diferentes para esta mesma situação usando a mudança de variáveis. Consideremos a questão de vestibular (UEL-2004) apresentada no artigo:

Numa competição internacional, um país obteve, no total, 10 medalhas dentre as de ouro, prata e bronze. Sabendo-se que esse país recebeu pelo menos uma medalha de ouro, uma de prata e uma de bronze, quantas são as possibilidades de composição do quadro de medalhas do país?

Note que agora procuramos não mais soluções inteiras não negativas, mas sim soluções inteiras estritamente positivas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, ou seja, devemos ter $x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 1$.

Podemos resolver este problema a partir da solução deduzida anteriormente utilizando uma mudança de variáveis em que nossas novas variáveis sejam não negativas ao invés de inteiras positivas. Neste caso, usaremos

$$x_1 = y_1 + 1, \qquad x_2 = y_2 + 1, \qquad x_3 = y_3 + 1$$

Com esta escolha temos que $y_1 = x_1 - 1 \geq 0,\ y_2 = x_2 - 1 \geq 0,\ y_3 = x_3 - 1 \geq 0$. O problema fica reduzido então ao caso que já conhecemos. A equação do problema fica

$$y_1 + y_2 + y_3 + 1 + 1 + 1 = 10$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7$$

E o número de soluções inteiras não negativas desta equação é

$$CR_{7,3} = \frac{(3 + 7 - 1)!}{7!\,(3 - 1)!}$$

$$C_{7,3} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$$

Assim, há 36 possibilidades de compor o quadro de medalhas deste país.

O que podemos abstrair deste desenvolvimento é que com o uso de mudança de variáveis podemos então resolver uma infinidade de equações da forma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = p$$

Onde os x_i podem ser limitados inferiormente por diferentes números z inteiros, inclusive números z negativos!

Por exemplo, considere a seguinte equação com $x_1 \geq 3,\ x_2 \geq -5,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq -10,$ $x_5 \geq 2$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$$

Mudando as variáveis para que tenhamos $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0,$ as mudanças serão

$$x_1 = y_1 + 3, \qquad x_2 = y_2 - 5, \qquad x_3 = y_3, \qquad x_4 = y_4 - 10, \qquad x_5 = y_3 + 2$$

Ficamos com

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 3 - 5 - 10 + 2 = 25$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 35$$

E, portanto, a equação original tem o seguinte número de soluções inteiras:

$$CR_{35,5} = \frac{(5 + 35 - 1)!}{35!\,(5 - 1)!}$$

$$CR_{35,5} = \frac{39!}{35!\,4!} = 82251$$

7 PROBLEMAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

7.1 A hipérbole $xy = 1$

Desde de os tempos de escola, aprendemos que o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ representa uma hipérbole. No entanto, quando estudamos geometria analítica a nível superior, vemos que uma hipérbole tem uma série de equações que podem representá-la, como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad ou \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Estas equações retratam os casos mais clássicos, quando os focos estão sobre os eixos e o centro da hipérbole é a origem. Num caso mais geral, temos algo da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação descreve uma série de cônicas, mas dependendo dos valores destas constantes pode descrever inclusive uma hipérbole. Visto que nenhuma destas formas parece tão simples quanto a equação $xy = 1$, um aluno que esteja iniciando nestes estudos pode se questionar: "será mesmo que a equação $xy = 1$ descreve uma hipérbole"?

Quadro 10 - Caixa de ferramentas 10.

Rotação de eixos em torno da origem: A rotação dos eixos x e y no sentido anti-horário de um ângulo θ dá origem a novos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$, em relação aos quais um ponto P de coordenadas originais (x, y) terá agora coordenadas $(\hat{x}, \hat{y})$. Essas novas coordenadas estão relacionadas às antigas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(BEZERRA, 2010)

A verificação de que $xy = 1$ realmente descreve uma hipérbole vem da mudança de variáveis caracterizada pela rotação de eixos. Mais especificamente, realizaremos uma rotação de $45°$, que dará para nossas novas variáveis as relações

$$x = \hat{x}\cos\frac{\pi}{4} - \hat{y}\sin\frac{\pi}{4}, \qquad y = \hat{x}\sin\frac{\pi}{4} + \hat{y}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y}), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y})$$

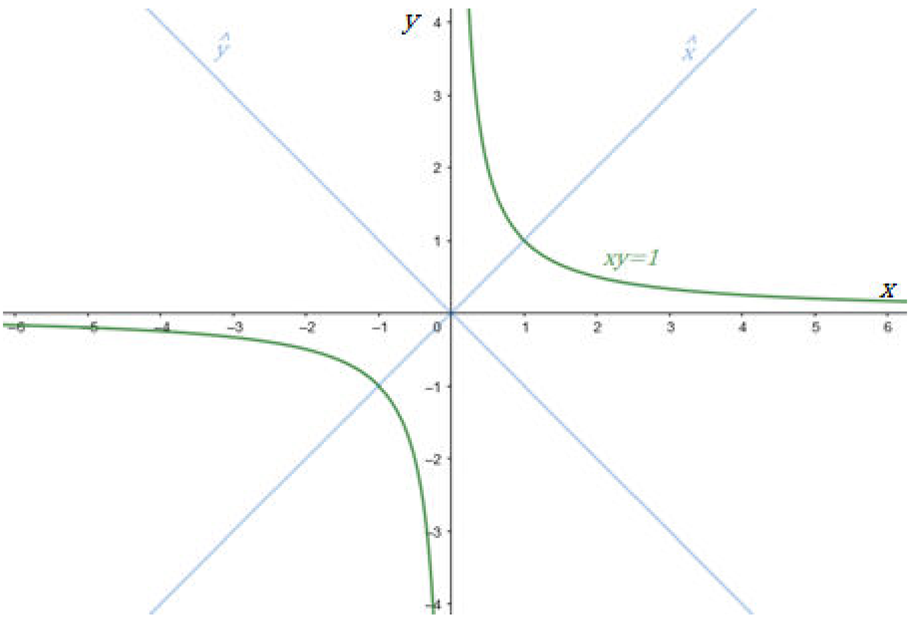
Substituindo na equação $xy = 1$, ficamos com

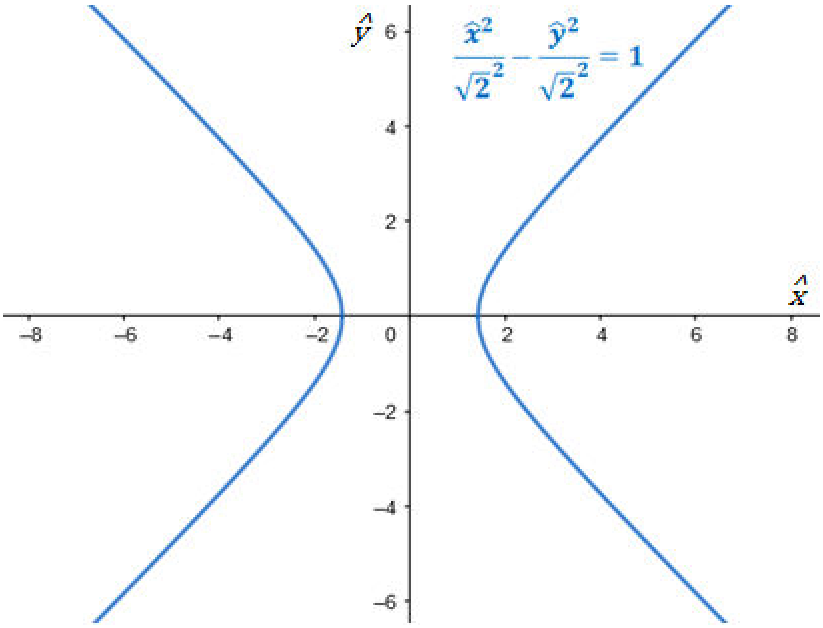
$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} - \hat{y})\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{x} + \hat{y}) = 1$$

$$\frac{1}{2}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) = 1$$

$$\frac{\hat{x}^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{\hat{y}^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

Esta sim, claramente uma hipérbole, se encaixando na primeira definição de hipérbole apresentada no começo deste problema. É interessante analisarmos graficamente o que esta rotação representa.





Veja que após a rotação de $45°$ temos uma hipérbole das mais clássicas, centrada na origem do plano de coordenadas e com seus focos sobre os eixos. Assim, é claro que a expressão $xy = 1$ representa uma hipérbole.

Para finalizar, vale destacar que na expressão geral das cônicas, citada no começo do problema e expressada a seguir, existe um critério para saber se a equação representa uma hipérbole.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dada uma cônica c com uma expressão desta forma, c será uma hipérbole ou um par de retas se $B^2 - 4AC > 0$.

Assim como no caso desenvolvido, podemos eliminar o termo xy da equação através de uma rotação. Também elimina-se os termos x e y através de uma outra mudança, a translação dos eixos x e y. Disto, concluímos que existem uma infinidade de hipérboles que com a rotação e a translação certa podem ser escritas ela da forma simples $xy = K$, para algum $K \in \mathbb{R}$.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os estudos realizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho, ficou claro o poder e a versatilidade do método da mudança de variável.

Em alguns problemas, pudemos provar resultados de forma categórica, enquanto em outros chegamos em generalizações nascidas de um problema que abarcavam uma quantidade infinitamente maior de outros problemas.

Houve também problemas em que o método nos deu rotas alternativas de desenvolvimento da solução, e problemas em que o método proporcionou uma rota quando parecia em um primeiro momento não haver rotas possíveis.

É interessante perceber também que o método não somente nos ajuda na resolução de problemas práticos, numéricos, mas também na demonstração de resultados puramente algébricos.

Interessante também é reiterar o quanto o método é utilizado nas mais diferentes áreas da Matemática, visto que trouxemos aqui diversas áreas, mas ainda ficaram de fora mais de problemas que tem solução através das mudanças de variáveis.

No início dos meus estudos neste tema, eu tinha apenas uma leve curiosidade com o mesmo. No entanto, após ver alguns destes problemas serem resolvidos de forma tão elegante, passei a me interessar muito pelo assunto, procurando tanto nas minhas aulas quanto no dia a dia encontrar novos problemas que eu pudesse utilizar o método para expor aqui neste trabalho.

Também foi valioso este estudo na medida que me fez pesquisar muitos livros de diversas áreas da Matemática, me dando um pouco mais de bagagem numa visão geral das diversas áreas estudadas na graduação, e até em alguns assuntos além dos estudados na graduação.

9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIN, Emil. **The Gamma Function**. Courier Dover Publications, 2015.

ASSIS, Carlos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 64, p. 43 e 44, 2007.

BEZERRA, Lício H,; SILVA, Ivan P. C. **Geometria Analítica:** 2ª edição. UFSC, 2010.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno:** 9ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BUTUZOV, Valentin. **Mathematical Analysis in Questions and Problems**. Moscow: Mir, 1988.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna:** 4ª edição. Atual, 2003.

CARVALHO, Paulo C. P. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. SBM, 2004.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de álgebra**. IMPA, 2002.

LOPES, Luís. **Manual de Trigonometria**. Rio de Janeiro: EDC, 1992.

MUNSIGNATTI JR., Mauro. **Revista do Professor de Matemática**, v. 73, p. 43, 2010.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: interciência, 1995.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson Learning, 2004.

SEELEY, Robert T. **Cálculo de uma Variável**. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

SPIEGEL, Murray R. **Análise de Fourier**. Sao Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.

STEWART, James. **Cálculo Volume 1:** 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, James. **Cálculo Volume 2:** 5ª edição. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo, vol. 1:** 12º edição. São Paulo: Pearson, 2013.

THOMAS, George B. et al. **Cálculo, vol. 1. 10º edição.** Prentice-Hall, 2002.