Gabriel Simon Schafaschek

Elementos de Topologia Algébrica

Orientador:
Sérgio Tadao Martins

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis
2018

Sumário

Agradecimentos

Existem algumas pessoas sem as quais este trabalho provavelmente não teria sido concluído. Embora não possa citar todas elas, fiz um esforço para que, nas linhas que se seguem, consiga agradecer e demonstrar minha admiração para com as que considero mais importantes.

Pois bem, agradeço primeiramente a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória escolar. Em particular:

À Professora Carla Elice, que estimulou meu gosto pelos estudos (de matemática principalmente) já no início da minha vida de estudante;

Ao professor José Carlos Bus, responsável por todo o meu conhecimento de matemática do ensino médio e que provavelmente tenha sido a influência definitiva para a minha escolha do curso de matemática, não só pela capacidade magnífica com que conduz suas aulas, mas também por sempre ter acreditado no meu potencial;

Ao professor José Luiz Rosas Pinho, o qual além de ter sido o professor com quem mais tive aulas em minha graduação, também me concedeu a oportunidade de trabalhar no PET - Matemática sob sua tutoria, fato esse que foi decisivo em minha carreira acadêmica. Como se não bastasse, também é uma pessoa incrível: generoso, piadista, sábio, ótimo professor e uma excelente companhia para um café;

Ao professor Eliezer Batista, que certamente fez-me amadurecer muito no curso, responsável pelo meu gosto inebriante pela Álgebra, além de ser um ser humano incrível e um matemático admirável;

Ao Danilo Royer, a quem devo todos os meus conhecimentos de Cálculo. É o único professor que conseguia prender minha atenção do início ao fim e me fazer aprender quase toda a matéria durante a aula, sem precisar de muito esforço individual. O tempo para exercícios durante as aulas é uma prática que deveria ser adotada pelos outros professores também, pois se revelou muito importante ao meu aprendizado. Não conheço alguém que explique algo tão bem. Também é um exímio cervejeiro assador de churrasco. Seu único defeito é ser gremista, mas ninguém é perfeito;

Ao Elon Lages Lima, que embora não tenha me dado aulas presenciais, é responsável por quase metade do meu conhecimento da graduação em matemática (afinal, quase todos os assuntos da graduação são cobertos em seus livros, os quais li com muita dedicação e entusiasmo), cuja maneira matemática de ser e cujos livros me influenciaram e me ajudaram muito;

Estendo minha homenagem à Carmem, Matheus Bortolan, Leonardo Koller, Gilles Gonçalvez Castro, Gilson Braviano, Luciano Bedin, Rômulo e Lício Hernandes Bezerra, de cujas aulas sempre gostei bastante.

Ao meu orientador, Sérgio Tadao Martins, pela paciência e cordialidade com que me recebeu e orientou nesses 3 anos, por sempre conseguir sanar minhas dúvidas com de forma paciente, com muita competência e pelos encontros semanais de seminários. Trata-se de um matemático brilhante e de um professor admirável;

Aos colegas do PET Matemática e de todo o curso com os quais tive o prazer

de trabalhar, estudar e conviver nesses anos. Não conseguirei listar todos eles em virtude de não possuir espaço infinito, mas tentarei lembrar dos mais importantes, a saber: Ana Carolina Altomani, André Borges, Beatriz, Bruna Donadel, Carlos Caldeira, Douglas Guimarães, Daniella Losso, Eduardo Pandini, Felipe Tiska, Gabriela Rodrigues, Isabele Sartor, João Ruiz, Leandro, Letícia Carvalho, Leonardo Biz, Luiz Suzana, Luis Fritch (famoso Lulu), Miguel, Natã Machado (que descobri ser meu primo), Mateus Pimenta, Sidiney Junior, Taís Batista, Vini da Ana e Paulo Ferrato.

A lista acima na verdade não estaria completa se não deixasse de mencionar particularmente os meus amigos:

Ben Hur Eidt, a quem admiro muito pelo esforço e seriedade com que se porta, pela simplicidade, por ser da roça assim como eu e, sobretudo, pela honestidade. Um bom parceiro para conversar sobre qualquer assunto e tomar cerveja;

Carlos Leal de Castro, com quem posso passar o dia todo conversando sem me enjoar, por ser extremamente divertido, simples, pelas suas histórias de vida sensacionais, pela maneira incrível com que se dedica a seus compromissos e pela sinceridade;

Jean Gengnagel, pelas conversas matemáticas (em particular, meu colega da Álgebra), pelos cafés no EFI, pela parceria em qualquer situação, pelas risadas, pelos chopps no CSC e por sempre ser uma companhia agradável;

Mateus Oliveira, pelas piadas (muitas vezes sem graça, mas que tornaram-se sua marca registrada), por ter sido aquele com quem mais fiz disciplinas, por "morrer" junto comigo nas matérias com professores sem noção (gd, por exemplo), pelas conversas sempre divertidas e por ser um amigo fiel com quem sinto que posso contar sempre (e vale a recíproca!);

Sabrina Vigano, pelos trucos no PET, por entender meus ataques de raiva/depressão com o semestre (principalmente nas aulas de didática), pela parceria nas aulas de psicologia e pelos abraços, que sempre melhoram meus dias;

Também devo lembrar de meus amigos de Mafra com quem ainda tenho contato, os quais sempre lembram de mim com carinho e de quem tenho muitas saudades, a saber: Flávio Chupel (este é de longa data), Gustavo Bauer, Bruno Hopers, Davi Capeletti, Gustavo Martins, Ketlin Bauer, Jacqueline, Marcela Calado (a Lela), Lívia Maria e Nicole Leite;

Ao Romaldo, Mariangélica, Gabriela e Manu, pelo apoio e às sempre agradáveis visitas;

À Fernanda Gerlach, pelas sempre bem-humoradas visitas, pelas comidas e pelos rolês em Floripa;

Ao Gustavo Kundlash, meu inquilino de apto de última hora, com quem certamente conversei e dei muitas risadas madrugada afora;

Ao Paulo Bannach, pelos cinemas, pelos passeios (praias, restaurantes,...), pelas trilhas, pelas rodas de chimarrão, pelas visitas de última hora, pela longa amizade, pela confiança e por nunca negar-me sua companhia;

A todos os meus familiares. Em particular:

Meus avós, Alberto e Frida, por quem tenho muita admiração e respeito;

À Renilda, pelas fitas de vídeo que gravava para eu assistir, pelos pães maravilhosos que alimentaram minha infância, por sempre me levar no "Belenzinho" e por fazer parte de muitas das minhas memórias de criança;

À Gilmara, por cuidar de mim, pelas cócegas, pela companhia no futebol, pelos banhos de mangueira, pelas massinhas e por assistir comigo "O Beijo do Vampiro".

Ao Ari, pelas pescarias, pelos trabalhos, pelas risadas, e por sempre me receber bem em todas as situações;

À Matilde, por me contar histórias quando criança, pelas brincadeiras (lojinha, pedrinha do céu, etc), por ser uma pessoa sempre alegre e pelas conversas;

Ao Alexandre, por sempre conversar comigo, pelas nossas brincadeiras de criança, pelas parcerias de vídeo game/filmes/animes, pelas conversas, pela sua sinceridade e companheirismo;

À Aline, de quem cuidei quando criança e que agora, já no ensino médio, faz-me sentir velho, mas que sempre me passa muita alegria;

À Valéria, a quem tenho como uma irmã (embora não de sangue), pela companhia de todos esses anos, pelos rolês, pelas festas, pelos bares, pelas praias, pelas "gordices"dentro e fora do apto, pelas conversas de madrugada, por ser minha parceira de chimarrão, pelas maratonas de filmes, por me fazer amadurecer e amadurecer junto comigo, por cuidar de mim quando precisei (minha enfermeira/psicóloga) e por deixar-se ser cuidada por mim também quando precisou, pelas bolhas de sabão, pelas fotos, por morrer comigo no fim do semestre, por ser a pessoa que me conhece talvez melhor do que eu próprio, e sobretudo, pela sua amizade, da qual sinto muito orgulho e carinho e sem a qual minha vida em Florianópolis provavelmente teria sido muito mais tediosa;

Ao Marcos, que além de irmão é um grande amigo, parceiro para conversas, vídeo-game, futebol, animes/filmes, brincadeiras diversas, enfim, parceiro de vida. Além de tudo é ainda meu segurança particular, um pescador e um cozinheiro de brigadeiros de mão cheia. Foram muitas brigas desde criança, mas acho que isso faz parte do show e sempre fortificou nossa amizade. Embora não demonstre, é extremamente generoso e preocupado com o bem de todos;

À minha mãe, por me ensinar várias receitas gostosas, por ter me educado sempre com muito zelo e compreensão, por dedicar boa parte de sua existência para a minha, por se preocupar em tantos momentos, pelo carinho para comigo e por sempre ter me incentivado em todas a minhas decisões;

Finalmente, agradeço meu pai, a quem tenho como ídolo maior, e por isso o respeito e admiro tanto. Agradeço por sempre me incentivar aos estudos, por ser sempre uma referência em minha vida, por toda a ajuda financeira e psicológica que me forneceu, por toda dedicação como pai e amigo, pelas conversas que sempre me fazem crescer social e intelectualmente, por ter me ensinado a tomar chimarrão, picar lenha, plantar, roçar, trabalhar no campo, jogar bola, pescar, correr, nadar, enfim, por todo esse tempo vida ao qual me dedicou sem nunca pestanejar.

Introdução

A Topologia Algébrica consiste no estudo de funtores definidos em categorias de naturezas topológicas e que tomam valores em objetos de categorias de natureza algébrica. Mais precisamente, associamos, a cada espaço topológico, uma estrutura algébrica, e a partir das propriedades algébricas dessa extraímos propriedades topológicas daquele. Essa associação deve ser feita de modo que espaços topológicos homeomorfos correspondam a objetos algébricos isomorfos. Os exemplos mais importantes de tais funtores são os grupos de homotopia e os grupos de homologia.

Na verdade, o que diferencia a Topologia Algébrica dos outros ramos da Topologia (Topologia Geral, Topologia Combinatória e Topologia Diferencial) é o método de trabalho, conforme já dito em [17]. Num certo sentido, a Topologia Algébrica não é um ramo da Topologia, mas sim uma transição dela para a Álgebra. Curiosamente, ela pode ser mais geral do que a própria Topologia Geral, no sentido de que permite demonstrar teoremas não triviais que se apliquem a todo espaço topológico.

Ora, o problema central da topologia é, dados dois espaços topológicos, decidir se eles são homeomorfos ou não. Esse trabalho pode ser muito mais difícil do que, por exemplo, verificar se dois grupos abelianos são isomorfos ou não (principalmente quando são finitamente gerados). Isso acontece, na verdade, porque as estruturas algébricas são, em geral, mais simples do que as estruturas topológicas. Admitindo-se esse fato, torna-se de extrema conveniência qualquer processo que permita substituir, sistematicamente, todo espaço topológico por um grupo, toda função contínua por um homomorfismo, e todo homeomorfismo por um isomorfismo.

Evidentemente, não espera-se que o processo inverso ocorra, isto é, que se dois grupos são isomorfos então objetos topológicos que são associados funtorialmente a tais grupos sejam homeomorfos. Se fosse assim, os objetos algébricos seriam tão complicados quanto os topológicos.

Também, o estudo do qual se ocupa a topologia algébrica torna possível demonstrar teoremas não triviais da própria Álgebra. Entre os mais importantes, destacam-se o Teorema Fundamental da Álgebra e o fato de que todo subgrupo de um grupo livre é livre. Como já era de se esperar, são muitas as aplicações das teorias aqui apresentadas a disciplinas como Análise, Variável Complexa, Geometria Diferencial, Álgebras de Lie, etc, embora o enfoque desse texto não nos permitirá trazê-las todas. O livro de [2] é uma boa leitura para compreender melhor tais aplicações.

O trabalho divide-se em quatro capítulos e dois Apêndices. Pressupõe-se que o leitor possua conhecimentos razoáveis de Análise, Topologia Geral e Álgebra Básica, de modo que os Apêndices cobrem apenas uma pequena parcela de cada uma dessas áreas, e não dispensa uma boa leitura das obras de referência.

Na seção 1, definimos e exemplificamos, sob o ponto de vista mais geral possível, a noção de homotopia. Aliás, tudo em topologia algébrica gira em torno desse conceito. O Grupo Fundamental, que é provavelmente o exemplo mais básico de invariante algébrico associado a ideia de homotopia, é apresentado na seção seguinte.

O Capítulo 3 destina-se aos Teoremas de Van-Kampen e suas inúmeras aplicações ao cálculo de grupos fundamentais.

Por fim, reservamos o estudo dos espaços de recobrimento ao capítulo 4. Embora essa noção seja bem geral e não dependa dos conhecimentos de homotopia, focamos nossa atenção aos resultados que exprimem como se compreender melhor o grupo fundamental de um espaço por meio dos seus recobrimentos.

Quanto ao texto, procuramos impor-lhe um caráter introdutório, porém sem intenção de fugir de temas mais delicados, quando necessário. As demonstrações foram escritas com bastante detalhes, embora tentamos não torná-las muito longas, pois já dizia o brilhante matemático alemão Johannes Kepler que existem dois motivos pelos quais nossa visão pode não funcionar: a escuridão ou o excesso de luz.

Matematicamente, isso se traduz no fato de que, numa boa demonstração, não se deve escrever muito pouco, porque nesse caso pode-se não entendê-la pela falta de informações. Mas, também não se deve escrever demais, porque isso pode fazer com que não se entendam as ideias centrais da prova, pois ficaram embaralhadas a outras informações menos importantes. Além disso, foram evitadas as famosas e espertas frases do tipo "é fácil ver", e fizemos o possível para que, quando aparecerem, sejam sinceras.

Notação

Estabeleceremos, nessas curtas e sucintas linhas abaixo, algumas notações e observações importantes que serão utilizadas sem maiores comentários no decorrer do texto.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ será denotado pela letra $\mathbb{N}$. Além disso, os conjuntos dos números inteiros, racionais, reais e complexos serão indicados por $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, respectivamente.

A diferença entre dois conjuntos A e B será indicada por $A \setminus B$. O símbolo $|A|$ representa a cardinalidade do conjunto A.

A letra I denota o intervalo compacto $[0, 1]$. Letras maiúsculas $X, Y, Z, \ldots$ representam sempre espaços topológicos, a menos que se diga o contrário. Também ficará implícito que, ao escrevermos $f : X \to Y$, estamos dizendo que f é uma função entre X e Y (o caso em que f é um morfismo numa categoria em que X e Y são objetos será entendido pelo contexto).

A imagem inversa de um ponto $y \in Y$ por uma função $f : X \to Y$ é, as vezes, representada por $f^{-1}(y)$ em vez de $f^{-1}(\{y\})$. Não se deve confundir isso com a imagem de y pela função inversa de f. Na realidade, serão raros os casos em que trabalharemos com a inversa de uma função.

Nas definições, a palavra "quando"deverá ser entendida como um "se e somente se"ou como "é necessário e suficiente". Por exemplo, ao escrever que uma função $f : X \to Y$ diz-se sobrejetiva quando $f(X) = Y$, estamos dizendo que f é sobrejetiva se, e somente se, $f(X) = Y$.

Se E é um espaço (vetorial) normado, a norma de $v \in E$ será denotada por $|v|$ em vez de $||v||$, por simplicidade. No caso em que $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$, $|v|$ coincide exatamente com o módulo de v. Por um espaço convexo, entendemos um espaço vetorial E tal que o segmento $[u, v] = \{(1-t)u + tv;\ \ t \in [0, 1]\}$ está contido em E, para quaisquer $u, v \in E$.

Uma família de objetos de um conjunto X, indexada por um conjunto de índices L, será denotada por $C = (a_\lambda)_{\lambda \in L}$. Segundo essa notação, para cada $\lambda \in L$, $a_\lambda \in X$ é um objeto de C. Noutras palavras, a família C consiste em uma função que associa, a cada $\lambda \in L$, um objeto $a_\lambda \in X$. No caso em que a_λ for um conjunto, para todo $\lambda \in L$, C chamar-se-á uma família de conjuntos. Quando isso ocorre, podemos falar dos conjuntos

$$\bigcup_{\lambda \in L} a_\lambda \quad \text{e} \quad \bigcap_{\lambda \in L} a_\lambda,$$

chamados a reunião dos a_λ e a interseção dos a_λ, respectivamente. O primeiro consiste no conjunto dos x tais que existe $\lambda \in L$ para o qual $x \in a_\lambda$. O segundo tem como objetos os elementos y que pertencem a todos os a_λ, isto é, $y \in a_\lambda$, para todo $\lambda \in L$.

Capítulo 1

Homotopia

A teoria homotópica vem ganhando cada vez mais espaço no mundo matemático. Essa condição se deve, principalmente, às inúmeras aplicações imediatas que decorrem dessa ideia em diversas outras áreas da matemática, tais como Análise, Variável Complexa e Geometria Diferencial. Aliás, uma das grandes motivações que levaram Poincaré, Gauss, Riemann e outros a estudarem métodos não-triviais de Topologia, entre os quais o método homotópico se faz presente, era a de resolver problemas de Análise. Muitas destas técnicas vieram a originar, mais tarde, a Topologia Diferencial.

Na realidade, homotopia é o conceito mais importante de Topologia Algébrica. Também, o Grupo Fundamental, que será visto posteriormente, é o exemplo mais básico de invariante algébrico associado a essa noção. Neste capítulo, objetivamos definir essa ideia sobre o ponto de vista mais geral possível, procurando ilustrá-lo com muitos exemplos e aplicações. Pretendemos, além disso, explicitar a relação entre homotopia e a questão de estender ao espaço todo, de modo contínuo, uma função contínua definida num subconjunto fechado de tal espaço. Mais tarde, esses conceitos se farão de grande importância para a definição de Espaços de Recobrimento e dos Grupos de Homotopia de ordens superiores. O leitor encontrará uma boa leitura complementar dessas ideias em [1], [2], [4] e [12].

1.1 Aplicações Homotópicas

Definição 1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são* homotópicas *se, e somente se, existir uma função $H : X \times I \to Y$ contínua, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Nesse caso, a aplicação H chama-se uma* homotopia entre f e g, *e escreve-se $H : f \simeq g$ ou, simplesmente, $f \simeq g$.*

Intuitivamente, podemos enxergar uma homotopia entre duas funções contínuas f e g, de um espaço topológico X num espaço topológico Y, como um processo de deformação contínua da aplicação f de forma a se obter g. Explico: dada uma homotopia $H : f \simeq g$, definimos, para cada $t \in I$, a aplicação contínua $H_t : X \to Y$, pondo $H_t(x) = H(x, t)$. Dessa forma, obtemos uma família $(H_t)_{t \in I}$ de aplicações contínuas de X em Y indexada por I. Como $H_0 = f$ e $H_1 = g$, percebemos que a família $(H_t)_{t \in I}$ começa em f e termina em g. Se imaginarmos o parâmetro t como sendo o tempo, então podemos nos referir a H como sendo uma deformação contínua de f. O cilindro $X \times I$ chama-se a *base da homotopia.*

Exemplo 1.2. [Homotopia Linear] Seja E um espaço vetorial normado e $Y \subseteq E$. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Suponha que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)] = \{(1-t)f(x) + tg(x) : t \in I\}$ esteja contido em Y. Nessas condições, temos $f \simeq g$.
De fato, defina a aplicação $H : X \times I \to Y$, $H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, a qual é, claramente, contínua, pois é a soma das funções contínuas $(1-t)f$ e tg. Também, $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$, donde tiramos que H é uma homotopia entre f e g. Tal homotopia leva o nome de *Homotopia Linear.*

O exemplo acima pode ser resumido, de uma maneira mais simplificada, no seguinte:

Lema 1.3. *Sejam X um espaço topológico e E um espaço vetorial normado. Se $f, g : X \to E$ são funções contínuas, então $f \simeq g$. Em particular, ambas são homotópicas à aplicação constante identicamente nula.*

Se X e Y são espaços topológicos, lembramos que $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(X, Y)$ é o conjunto de todas as funções contínuas de X em Y. Tal conjunto também pode ser representado por $C(X, Y)$.

Proposição 1.4. *Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia é uma relação de equivalência sobre o conjunto $C(X, Y)$.*

Demonstração: Sejam $f, g, h : X \to Y$ aplicações contínuas. Primeiramente, a aplicação $H : X \times I \to Y$, dada por $H(x, y) = f(x)$, é uma homotopia entre f e f. Com efeito, se $A \subseteq Y$ é aberto em Y, então $f^{-1}(A) \subseteq X$ é aberto em X, pois f é contínua. Logo, $H^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times I$ é aberto em $X \times I$, donde segue que H é contínua e $H : f \simeq f$. Portanto, a relação $\simeq$ é reflexiva.

Agora, suponha que $F : f \simeq g$. Defina a aplicação $G : X \times I \to Y$ pondo $G(x,t) = F(x, 1-t)$. Temos $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ e $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$. Além disso, sendo contínua a função $R : I^2 \to I^2$, $R(x,t) = (x, 1-t)$, obtemos a continuidade de $G = F \circ R$. Isso significa que G é uma homotopia entre g e f, e assim, a relação $\simeq$ é simétrica.

Finalmente, suponha $F : f \simeq g$ e $K : g \simeq h$. Vamos mostrar que a aplicação $L : X \times I \to Y$, dada por $L(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in [1/2] \\ K(x, 2t-1), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$ é uma homotopia entre f e h, obtendo, assim, a transitividade de $\simeq$. De fato, para qualquer $x \in X$ que tomemos, vale que $L(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ e $L(x, 1) = K(x, 1) = h(x)$. As restrições de L aos compactos $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$ são claramente contínuas: basta ver que $L|[0, 1/2]$ é a composição de F com a aplicação contínua $(x,t) \mapsto (x, 2t)$ e que $L|[1/2, 1]$ é a composição de K com a aplicação contínua $(x,t) \mapsto (x, 2t-1)$. Invocando o Lema da Colagem (Teorema 13 na página 86 do Apêndice), obtemos que L é contínua, e portanto $L : f \simeq h$. **(c.q.d)**

Em qualquer homotopia entre $f, g : X \to Y$, o papel do contradomínio Y é muito importante, uma vez que é nele onde a deformação de f ocorre. Mais precisamente, se aumentarmos Y para um conjunto $Y' \supseteq Y$, temos a oportunidade de obter novas homotopias. Além disso, é possível que f e g não sejam homotópicas, mas quando consideradas como funções de X em Y', o sejam, conforme nos diz o:

Exemplo 1.5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dadas por $f(x) = 1$, $g(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como 1 e -1 pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, segue que f e

g não são homotópicas. Com efeito, se $H : f \simeq g$, então $a : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dado por $a(t) = H(0,t)$, é um caminho ligando -1 e 1. Entretanto, se considerarmos f e g como sendo aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, então vale que $f \simeq g$.

Definição 1.6. *As classes de equivalência de* $\simeq$ *chamam-se* classes de homotopia.

A classe de uma função contínua $f : X \to Y$ será indicada por $[f]$. Além disso, o quociente de $C(X,Y)$ pela relação de homotopia será indicado por $[X,Y]$. Em outras palavras, o conjunto $[X,Y]$ tem, como elementos, as classes de homotopia no conjunto $C(X,Y)$.

Nosso próximo passo consiste em tornar mais algébrico o conjunto das classes de homotopia, definido-se uma operação de composição entre classes. Primeiro, considere a:

Proposição 1.7. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Se $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ são funções contínuas tais que $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*

Demonstração: Sejam $F : f \simeq f'$ e $G : g \simeq g'$ homotopias. Defina $H : X \times I \to Z$, pondo $H(x,t) = G(F(x,t),t)$. Afirmo que H é contínua. De fato, a função $R : X \times I \to Y \times I$, $R(x,t) = (F(x,t),t)$ é contínua, tendo em vista a continuidade de suas funções coordenadas. Segue que $H = G \circ R$ é a composição de duas funções contínuas, e portanto, contínua. Agora, note que $H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f(x),0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ e $H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f'(x),1) = g'(f'(x)) = (g' \circ f')(x)$. Portanto $H : g \circ f \simeq g' \circ f'$. **(c.q.d)**

Definição 1.8. *Sejam X, Y e Z espaços topológicos. Sejam $[f] \in [X,Y]$ e $[g] \in [Y,Z]$ classes de homotopia. Definimos a composição de $[f]$ e $[g]$ pondo $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.*

Como consequência da Proposição 1.7, vemos que a operação de composição entre classes de homotopia de $[X,Y]$ e $[Y,Z]$ está, de fato, bem definida. Isto é: não depende dos representantes tomados em $[f]$ e $[g]$.

Esse fato também nos permite definir uma nova categoria $\underline{\text{HTop}}$, cujos objetos são espaços topológicos e os morfismos são classes de homotopia de funções contínuas, isto é: $\text{Hom}_{\underline{\text{Htop}}}(X,Y) = \{[f] : f \in \text{Hom}_{\underline{\text{Top}}}(X,Y)\}$. Também, se associarmos cada função contínua $f : X \to Y$ à sua respectiva classe de homotopia $[f]$, obtemos um funtor covariante $\Pi : \underline{\text{Top}} \to \underline{\text{HTop}}$ definindo-se $\Pi(X) = X$ e $\Pi(f) = [f]$.

1.2 Homotopia Relativa e de Pares

A relação de homotopia de funções é, na verdade, uma noção particular do conceito de Homopia Relativa. A seguir, estabelecemos alguns resultados e exemplos mais importantes dessa teoria, buscando dar atenção priviligiada às ideias Categóricas e funtoriais associadas a esse aspecto.

Definição 1.9. *Um* par topológico (X,A) *consiste de um espaço topológico X e um subespaço topológico $A \subseteq X$.*

Ressaltamos que se $A = \varnothing$, então não há distinção entre o par (X,A) e o espaço X.

Definição 1.10. *Seja (X,A) par topológico. Um* subpar topológico *de (X,A) é um par topológico (X',A') tal que $X' \subseteq X$ e $A' \subseteq A$. Nesse caso, escrevemos $(X',A') \subseteq (X,A)$.*

Definição 1.11. *Uma* função contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ entre os pares topológicos (X, A) e (Y, B) *é uma função* $f : X \to Y$ *contínua e tal que* $f(A) \subseteq B$.

Exemplo 1.12. A coleção dos pares de espaços Topológicos, juntamente da coleção das funções contínuas entre eles, conforme definições acima, constitui-se em uma Categoria, a qual vamos denotar por $\underline{\text{Top}}^{(2)}$. Com efeito, se $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (Z, C)$ são funções contínuas, então definimos a composição $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ de forma natural: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Notemos que $g(f(A)) \subseteq g(B) \subseteq C$, o que mostra que $g \circ f$ é, de fato, um morfismo em $\underline{\text{Top}}^{(2)}$.
Ao enxergar um espaço topológico X como sendo o par $(X, \varnothing)$, obtemos que $\underline{\text{Top}}$ é uma subcategoria (plena) de $\underline{\text{Top}}^{(2)}$.

Definição 1.13. *Dadas* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *funções contínuas entre os pares topológicos* (X, A) *e* (Y, B)*, definimos uma homotopia entre* f *e* g *como sendo uma função contínua* $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ *tal que* $H(x, 0) = f(x)$ *e* $H(x, 1) = g(x)$.

Pela definição de função contínua entre pares topológicos, observamos que se H é uma homotopia entre $f, g : (X, A) \to (Y, B)$, então $H(x, t) \in B$, para todo $x \in A$ e para todo $t \in I$, ou seja, $H_t(A) \subseteq B$, $\forall t \in I$.

Definição 1.14. *Sejam* $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ *funções contínuas entre os pares topológicos* (X, A) *e* (Y, B) *e seja* $X' \subseteq X$*. Dizemos que* f *e* g *são* homotópicas relativamente a X'*, e escrevemos* $f \simeq g$ (rel. X')*, se existir uma homotopia* H*, entre* f *e* g*, tal que* $H(x, t) = f(x) = g(x)$*, sempre que* $x \in X'$ *e* $t \in I$.

A homotopia H, da definição anterior, é geralmente denominada homotopia relativa. Quando conveniente, também escreveremos $H : f \simeq g$ (rel. X') para indicar que H é uma homotopia relativa entre f e g. No caso em que $A = B = \varnothing$, a homotopia H é simplesmente uma homotopia entre as funções f e g, com a propriedade de que $f|X' = H|(\{t\} \times X') = g|X'$, para todo $t \in I$.

Exemplo 1.15. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. A função $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x, t) = (1 - t)x$ é tal que $H : f \simeq g(\text{rel } 0)$, onde 0 denota a origem de $\mathbb{R}^n$.

Com demonstrações completamente análogas às proposições 1.4 na página 10 e 1.7 na página 11, respectivamente, obtemos os dois teoremas que se seguem.

Teorema 1.16. *A relação* $\simeq$ (rel. X')*, com* $X' \subseteq X$*, é uma relação de equivalência no conjunto* $\text{Hom}_{\underline{Top}^{(2)}}((X, A), (Y, B))$ *das funções contínuas entre os pares* (X, A) *e* (Y, B).

Teorema 1.17. *Se* $f, f' : (X, A) \to (Y, B)$ *e* $g, g' : (Y, B) \to (Z, C)$ *são funções contínuas entre pares topológicos tais que* $f \simeq f'$ (rel. X')*, com* $X' \subseteq X$*, e* $g \simeq g'$ (rel. Y')*, com* $Y' \subseteq Y$ *e* $f(X') \subseteq Y'$*, então* $g \circ f \simeq g' \circ f'$ (rel. X').

Exemplo 1.18. Seja X espaço topológico. O conjunto das classes de equivalência de $\simeq$(rel. X') chama-se o conjunto das classes de homotopia relativa a $X' \subseteq X$. A classe de homotopia relativa a X' de uma função contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ será denotada por $[f]_{X'}$, e o conjunto quociente de $\text{Hom}_{\underline{\text{Top}}^{(2)}}((X, A), (Y, B))$ por $\simeq$(rel. X') será denotado por $[(X, A), (Y, B)]$.
O teorema anterior nos dá uma nova categoria topológica, que vamos indicar por $\underline{\text{HTop}}^{(2)}$, cujos objetos são pares topológicos (X, A) e cujos morfismos são classes de homotopia, relativas ao conjunto vazio, de funções contínuas entre pares. Note que $\underline{\text{HTop}}^{(2)}$ é uma subcategoria de $\underline{\text{Top}}^{(2)}$.

1.3 Equivalência Homotópica

Entre os funtores dos quais a Topologia Algébrica se ocupa, nos são bastante interessantes aqueles que atuam como invariantes homotópicos, isto é: duas funções homotópicas na Categoria dos Espaços Topológicos são levadas no mesmo morfismo pertencente à Categoria Algébrica (anéis, grupos, módulos,...) na qual tal funtor atua. A seguir, apresentamos um conceito de invariância homotópica de Espaços Topológicos, no sentido de que dois espaços topológicos equivalentes homotopicamente serão levados em objetos isomorfos por meio de funtores específicos, tais como, o funtor π_1, o qual será devidamente definido e estudado futuramente. Primeiro, definamos a importante ideia de tipo de homotopia.

Definição 1.19. *Dizemos que uma função contínua $f : X \to Y$, entre espaços topológicos X e Y, é uma* equivalência homotópica *quando existe uma função contínua $g : Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$. Nesse caso, dizemos que g é um inverso homotópico de f, e que os espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. Para indicar esse fato, escrevemos $X \equiv Y$ ou $f : X \equiv Y$.*

Espaços com o mesmo tipo de homotopia são equivalentes do ponto de vista homotópico. Noutras palavras, são isomorfos na categoria $\underline{HTop}$. Mais precisamente, temos a:

Proposição 1.20. *Se $X \equiv X'$ e $Y \equiv Y'$, então a cardinalidade de $[X, Y]$ é igual à cardinalidade de $[X', Y']$.*

Demonstração: Sejam $\Phi : X' \equiv X$ e $\tau : Y \equiv Y'$ equivalências homotópicas. Defina a função $\eta : [X, Y] \to [X', Y']$, pondo-se $\eta([f]) = [\tau \circ f \circ \Phi]$. Tal função está bem definida, pois já mostramos, anteriormente, que a composição de classes de homotopia não depende dos representantes que se tome nas classes. Como τ e Φ são equivalências homotópicas, podemos tomar $\tau^* : Y' \to Y$ e $\Phi^* : X \to X'$ inversas homotópicas de τ e Φ, respectivamente. A função $\Upsilon : [X', Y'] \to [X, Y]$ definida por $\Upsilon([f]) = [\tau^* \circ f \circ \Phi^*]$ é, pois, a inversa de η, como verifica-se facilmente. Segue que η é bijetora. **(c.q.d)**

Proposição 1.21. *A relação tipo de homotopia é uma relação de equivalência na Categoria dos Espaços Topológicos.*

Demonstração: Se X é espaço topológico, a função identidade em X é uma equivalência homotópica entre X e X. Se $\phi : X \equiv Y$, um inverso homotópico para ϕ nos fornece a simetria $Y \equiv X$. Finalmente, se $\phi : X \equiv Y$ e $\psi : Y \equiv Z$, então a composição $\psi \circ \phi : X \to Z$ é uma equivalência homotópica entre X e Z, como se verifica facilmente. **(c.q.d)**

Exemplo 1.22. Afirmo que $S^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Com efeito, seja $\imath : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ a inclusão e seja $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^1$, dada por $p(x) = x/|x|$, a projeção radial. Para todo $x \in S^n$, tem-se $(p \circ \imath)(x) = x/|x| = x$, ou seja, $p \circ \imath = \mathrm{id}_{S^n}$.

Além disso, se $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, então x pode ser ligado ao ponto $p(x) = x/|x|$ por um segmento de reta contido em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, uma vez que $0 \notin [x, p(x)]$. Segue que $\imath \circ p$ é homotópico à função identidade em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, por meio de uma homotopia linear, como queríamos demonstrar.

Um raciocínio exatamente análogo ao anterior permite-nos demonstrar que a bola fechada unitária $B^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ é tal que $B^{n+1} \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^n.

Definição 1.23. *Um espaço topológico X chama-se* contrátil *se, e somente se, X possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto, isto é, um espaço topológico formado por um único elemento.*

O Exemplo 1.15 na página 12 nos mostra que $\mathbb{R}^n$ é contrátil, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, o Lema 1.3 na página 10 implica todo espaço Vetorial Normado ser contrátil. Mais do que isso: todo espaço convexo E é contrátil, pois dadas duas funções quaisquer que tomam valores em E, podemos tomar uma homotopia linear entre elas, vide Exemplo 1.2 na página 9.

Proposição 1.24. *Um Espaço Topológico X é contrátil $\Leftrightarrow$ a função identidade em X é homotópica a uma função constante em X.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha que $f : X \equiv \{p\}$. Seja g um inverso homotópico de f. Temos $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Além disso, deve ser $g(f(x)) = g(p)$, para todo $x \in X$. Logo, $g \circ f$ é constante.
($\Leftarrow$) Seja $f : X \to X$, $f(x) = x_0$, função constante tal que $f \simeq \mathrm{id}_X$. Considere as funções $\overline{f} : X \to \{x_0\}$ e $\imath : \{x_0\} \to X$ dadas por $\overline{f}(x) = x_0$ e $\imath(x_0) = x_0$. Note que $\imath \circ \overline{f} = f \simeq \mathrm{id}_X$ e $\overline{f} \circ \imath = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, o que nos mostra que X tem o mesmo tipo de homotopia que o ponto $\{x_0\}$, ou seja, X é contrátil. **(c.q.d)**

Proposição 1.25. *Quaisquer duas funções contínuas de um espaço topológico arbitrário em um espaço contrátil são homotópicas.*

Demonstração: Seja X espaço arbitrário e Y um espaço contrátil. A Proposição 1.24 nos garante a existência de uma função constante $h : Y \to Y$, tal que $h \simeq \mathrm{id}_Y$. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas arbitrárias. Pela Proposição 1.7 na página 11, temos $f = \mathrm{id}_Y \circ f \simeq h \circ f$. Analogamente, mostra-se que $g \simeq h \circ g$. Por outro lado, é claro que $h \circ f = h \circ g$, pois h é constante, o que nos dá $f \simeq g$. **(c.q.d)**

Corolário 1.26. *Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.*

Demonstração: Seja X espaço contrátil. Tome $p, q \in X$. A proposição acima nos diz que as funções constantes $f, g : X \to X$, definidas por $f(x) = p$ e $g(x) = q$, são homotópicas. A partir de qualquer homotopia H entre f e g, obtemos um caminho $\lambda : I \to X$, ligando p a q, definindo-se $\lambda(t) = H(p, t)$. **(c.q.d)**

Observe que a definição do caminho λ, da demonstração acima, poderia ter sido feita da seguinte maneira: fixado qualquer ponto $x_0 \in X$, a aplicação $t \mapsto H(x_0, t)$, $t \in I$, define um caminho que liga os pontos p e q.

Proposição 1.27. *Sejam X um espaço topológico contrátil e Y um espaço conexo por caminhos. Para quaisquer funções contínuas $f, g : X \to Y$, têm-se $f \simeq g$.*

Demonstração: Tome uma homotopia $H : X \times I \to X$ entre id_X e uma função constante. Também, note que $f \circ H : X \times I \to Y$ é uma homotopia entre f e uma constante. Da mesma forma, g é homotópica a alguma constante. Como Y é conexo por caminhos, obtemos que ambas essas constantes são homotópicas, donde segue que $f \simeq g$. **(c.q.d)**

O teorema que se segue exibe uma simples, porém útil, relação entre homotopia e extensão de funções contínuas. Esse tipo de relação será melhor discutida e aprofundada nos tópicos adiantes, nos quais introduziremos o importante conceito de retração de espaços.

Teorema 1.28. *Seja X um espaço topológico e $f : S^n \to X$ função contínua. São equivalentes:*
(1) *Existe uma função $\overline{f} : D^{n+1} \to X$ tal que $\overline{f}|S^n = f$, em que D^{n+1} é a bola fechada unitária $n+1$-dimensional.*
(2) *f é homotópica a uma constante.*

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & X \\ D^{n+1} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2): Tome $x_0 \in S^n$ ponto qualquer. Defina $F : S^n \times I \to X$ pondo $F(x,t) = \overline{f}((1-t)x + tx_0)$. Temos $F(x,0) = \overline{f}(x) = f(x)$ e $F(x,1) = \overline{f}(x_0) = f(x_0)$, para todo $x \in S^n$. Sendo F contínua como a composição de funções contínuas, tiramos que F é uma homotopia entre f e a função constante $x \mapsto \overline{f}(x_0)$, $x \in S^n$, como queríamos.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seja $H : f \simeq c$ uma homotopia entre f e uma função constante c, que leva todo ponto de S^n num ponto $y_0 \in X$. Vamos mostrar que a função

$$\overline{f} : D^{n+1} \to X, \text{ dada por } \overline{f}(x) = \begin{cases} y_0, \text{ se } 0 \leq |x| \leq 1/2 \\ H(x/|x|, 2-2|x|), \text{ se } 1/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

está bem definida, é contínua e tal que $\overline{f}|S^n = f$, o que completará a demonstração. Com efeito, $\overline{f}(x) = H(2x, 1) = c(2x) = y_0$, sempre que $|x| = 1/2$, o que nos mostra que $\overline{f}$ está bem definida. A continuidade de $\overline{f}$ segue em virtude do lema da colagem, uma vez que são contínuas as restrições de tal função aos conjuntos fechados $\{x \in D^{n+1} \mid 0 \leq |x| \leq 1/2\}$ e $\{x \in D^{n+1} \mid 1/2 \leq |x| \leq 1\}$ (a primeira porque toda função constante é contínua e a segunda porque é a composição de F com a aplicação contínua $x \mapsto (x/|x|, 2-2|x|)$. Finalmente, para todo $x \in S^n$, têm-se $\overline{f}(x) = F(x,0) = f(x)$, donde segue que $\overline{f}|S^n = f$. **(c.q.d)**

A função $\overline{f}$, do teorema anterior, chama-se uma extensão contínua de f ao conjunto D^{n+1}. Noutras palavras, o teorema acima nos diz que uma função contínua, definida em S^n, é homotópica a uma função constante se, e somente se, pode-se estender continuamente tal função ao conjunto D^{n+1}. Daí, e da Proposição 1.25 na página 14, obtemos o:

Corolário 1.29. *Qualquer função contínua, de S^n num espaço contrátil, pode ser estendida para o disco fechado unitário D^{n+1}.*

Observação 01. Tomando $n = 1$, utilizaremos, quando conveniente, o teorema acima substituindo o disco D^2 por um retângulo $I \times J$ e substituindo o círculo S^1 pela fronteira $\partial(I \times J)$, tendo em vista que o teorema se aplica a quaisquer espaços homeomorfos a S^n e D^{n+1}, respectivamente.

Observação 02. A implicação (2) $\Rightarrow$ (1), do teorema, possui uma segunda demonstração, cuja ideia nos será útil para demonstrar algumas proposições futuras. Sendo assim, a faremos novamente nas linhas que se seguem.

Segunda Demonstração para (2) $\Rightarrow$ (1): Seja H uma homotopia entre f e uma constante. Suponha que, para certos $x, x' \in S^n$ e $t, t' \in I$, tenhamos $(1-t)x = (1-t')x'$. Tomando normas, vê-se imediatamente que $t = t'$. Se $t \neq 1$, então $1 - t = 1 - t' \neq 0$, e sendo $(1-t)x = (1-t')x'$, concluímos que $x = x'$. Logo, para que se tenha $(1-t)x = (1-t')x'$, é necessário e suficiente que $(t, x) = (t', x')$ ou $t = 1 = t'$. Portanto, $(1-t)x = (1-t')x'$ nos dá que $H(x, t) = H(x', t')$.

Considere a aplicação contínua $\phi : S^n \times I \to D^{n+1}$ dada por $\phi(x, t) = (1-t)x$. Note que ϕ é sobrejetora, pois, dado $y \in D^{n+1}$, tem-se $x = y/|y| \in S^n$, e sendo $|y| \leq 1$, temos $y = \phi(x, 1 - |y|) \in \phi(S^n \times I)$. Daí, e do parágrafo anterior, tiramos que a aplicação $\overline{f} : D^{n+1} \to X$, definida por $\overline{f}(x(1-t)) = H(x, t)$ está bem definida e é tal que $\overline{f} \circ \phi = H$. O Teorema 20 na página 88 do Apêndice nos garante, finalmente, a continuidade de $\overline{f}$, uma vez que H e ϕ são contínuas. **(c.q.d)**

Conforme já dito, o argumento anterior de passagem ao quociente será frequentemente utilizado nas demonstrações futuras.

1.4 Retração e Extensões de Aplicações Contínuas

Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : F \to Y$ uma função contínua, definida num subconjunto fechado $F \subseteq X$ de X e tomando imagens em Y. Nessas condições, surge-nos a seguinte pergunta: É possível estender continuamente a função f a todo espaço X, ou seja, existe uma função contínua $\overline{f} : X \to Y$, de forma que $\overline{f}|F = f$?

Ora, o Corolário 1.29 na página 15 nos garante uma resposta afirmativa a essa pergunta no caso de $X = D^{n+1}$, $F = S^n$ e Y ser contrátil. Também, o Teorema da Extensão de Tietze e Urysohn nos diz que tal problema tem solução sempre que X for normal e Y for um intervalo da reta. Vejamos agora uma outra maneira de abordar essa ideia.

Definição 1.30. *Seja X um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que uma aplicação contínua $r : X \to Y$ é uma* retração *se, e somente se, r for uma extensão contínua, ao espaço X, da aplicação* id_Y. *Nesse caso, o espaço Y chama-se um* retrato *de X.*

Note que, para $r : X \to Y$ ser uma retração, é necessário e suficiente que $r(y) = y$, para todo $y \in Y$, isto é: $r|Y = \mathrm{id}_Y$. É claro, também, que toda retração é uma função sobrejetiva.

Do ponto de vista de extensão, uma retração pode ser interpretada da seguinte maneira: um subespaço $Y \subseteq X$ é um retrato de X sempre que $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ puder ser estendida continuamente a uma função $r : X \to Y$. A figura a seguir ilustra essa situação. Entenda por $\imath$ a inclusão natural de Y em X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r"] & Y \\ Y \arrow[u, "\imath"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Note que Y é um retrato de X se, e somente se, a inclusão $\imath : Y \to X$ possui inversa à esquerda na categoria $\underline{Top}$ dos espaços topológicos e funções contínuas.

Exemplo 1.31. Todo ponto $x_0 \in X$ é um retrato de X. Com efeito, a função constante $r : X \to \{x_0\}$, definida de forma óbvia, é contínua e sua restrição ao espaço-ponto $\{x_0\}$ coincide, evidentemente, com a identidade nesse espaço. Pelo mesmo motivo, tem-se $\{x_0\} \times Y$ retrato de $X \times Y$, seja qual for o espaço topológico Y que se tome.

Exemplo 1.32. Se X é conexo e Y é desconexo, então Y não é retrato de X, porque a imagem de toda função contínua definida em X é um espaço conexo. Em particular, $\mathbb{Q}$ não é retrato de $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.33. Se $X = X_1 \cup X_2$, em que X_1 e X_2 são conjuntos fechados com um único ponto em comum, isto é, $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$, então X_1 e X_2 são retratos de X. De fato, a função $r : X \to X_1$ definida por $f(x) = x$, se $x \in X_1$, e $f(x) = x_0$ caso $x \in X_2$, é uma retração. De maneira análoga, mostra-se que X_2 é retrato de X.

Exemplo 1.34. Todo retrato de um espaço de Hausdorff é fechado. Ora, se Y é um retrato de X por meio da retração $r : X \to Y$, então $Y = \{x \in X \mid r(x) = x\}$, ou seja, Y coincide com o conjunto dos pontos fixos de r, o qual é fechado em X sempre que X é um espaço de Hausdorff, porque é a imagem inversa da diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X; x = y\}$ por meio da aplicação contínua $f : X \to X \times X$, $f(x) = (x, r(x))$, que por sua vez é fechada em X, pelo Teorema 1 na página 83 do Apêndice.

A proposição que se segue exibe, de forma mais evidente, a relação entre extensão de funções contínuas e espaços retráteis.

Proposição 1.35. *Seja X um espaço topológico. A fim de que um subespaço $Y \subseteq X$ seja um retrato de X, é necessário e suficiente que toda aplicação contínua $f : Y \to Z$, sendo o espaço topológico Z tomado aleatoriamente, possua uma extensão contínua $\overline{f} : X \to Z$.*

Demonstração: Suponha que $r : X \to Y$ é uma retração. Então, dado qualquer espaço topológico Z e qualquer função contínua $f : Y \to Z$, a composição $\overline{f} = f \circ r$ é uma extensão contínua de f, donde segue que a condição é necessária. Reciprocamente, suponha que toda função $f : Y \to Z$, com Z espaço qualquer, possa ser estendida continuamente a uma função $\overline{f} : X \to Z$. Em particular, a inclusão $\imath : Y \to Y$ pode ser estendida continuamente a uma função $\bar{\imath} : X \to Y$, ou seja, Y é um retrato de X. Portanto, a condição é suficiente. **(c.q.d)**

Uma das relações mais importantes entre retrações e contrações de S^n é exposta no Teorema abaixo.

Teorema 1.36. *Seja n um número inteiro não negativo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *S^n não é contrátil.*

2. *S^n não é um retrato de D^{n+1}.*

3. *(Brouwer) Toda função contínua $f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ possui um ponto fixo.*

Demonstração: A equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) é uma consequência imediata do Teorema 1.28 na página 15 aplicado à identidade em S^n. Mostremos que (3) $\Rightarrow$ (2). Com efeito, suponha que $r : D^{n+1} \to S^n$ seja uma retração. Nesse caso, a função

$f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ dada por $f(x) = -r(x)$ seria contínua e livre de pontos fixos, o que contradiz a afirmação (3). Resta provar que (1) $\Rightarrow$ (3). De fato, suponha que S^n são é contrátil. Primeiramente, vamos mostrar que se $g : S^n \to S^n$ é uma função homotópica a uma aplicação constante, então g possui pontos fixos.

Ora, se não fosse assim, então g seria homotópica à aplicação antípoda $\alpha : S^n \to S^n$, $\alpha(x) = -x$, por meio da homotopia $H : S^n \times I \to S^n$ dada por

$$H(x,t) = \frac{(1-t)g(x) - tx}{|(1-t)g(x) - tx|}.$$

Logo, por transitividade, α seria homotópica a uma aplicação constante. Portanto, $\alpha \circ \alpha = id_{S^n}$ seria homotópica a uma constante, contradizendo a hipótese de que S^n não é contrátil.

Agora, seja $f : D^{n+1} \to D^{n+1}$ uma função contínua. Suponha, por absurdo, que f não possui pontos fixos. Defina $h : D^{n+1} \to S^{n+1}$ pondo $h(x) = \dfrac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$. A função h assim definida é contínua e não possui pontos fixos. Com efeito, caso $x \in S^n$ seja um ponto fixo de h, teríamos $x \cdot |f(x) - x| = f(x) - x$, ou seja, $x \cdot (|f(x) - x| + 1) = f(x)$, ou ainda, $|f(x)| = |f(x) - x| + 1 > 1$ (a desigualdade é estrita porque, por hipótese, $f(x) - x \neq 0$), o que contradiz o fato de que $f(x) \in D^{n+1}$. Segue que a restrição $g = h|S^n$ possui extensão contínua. Novamente, pelo Teorema 1.28 na página 15, tiramos que $g : S^n \to S^n$ é homotópico a uma constante. Pela observação acima, isso implica g possuir pontos fixos, um absurdo. **(c.q.d)**

Corolário 1.37 (Da demonstração)**.** *Se S^n não é contrátil, então toda função contínua $f : S^n \to S^n$, homotópica a uma constante, possui pontos fixos.*

O item (3) do teorema acima é o enunciado clássico do famoso Teorema do ponto fixo de Brouwer, cuja demonstração será exposta mais adiante. Em particular, o resultado acima nos revela outras duas versões equivalentes para esse Teorema.

Definição 1.38. *Um subespaço $Y \subseteq X$ chama-se um* retrato fraco *do espaço topológico X quando existe uma função contínua $r : X \to Y$ tal que a restrição $r|Y$ de r ao subespaço Y é homotópica a função identidade em Y. Nesse caso, a função r chama-se uma* retração fraca *de X a Y.*

A fim de que uma aplicação contínua $r : X \to Y$ seja uma retração fraca de X a $Y \subseteq X$, é necessário e suficiente que a inclusão $\imath : Y \to Y$ possua um inverso homotópico à esquerda na Categoria $\underline{HTop}$. Em particular, todo retrato de X é um retrato fraco de X.

Definição 1.39. *Diz-se que um par topológico (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias* (PEH) *em relação a Y quando, dadas aplicações contínuas $g : X \to Y$ e $G : A \times I \to Y$ tais que $g(x) = G(x, 0)$, para todo $x \in A$, existir uma função contínua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = g(x)$, para todo $x \in X$ e $F|(A \times I) = G$.*

Noutras palavras, o par (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias em relação a Y se toda homotopia entre a restrição $g|A$ de uma função contínua $g : X \to Y$ e uma função contínua arbitrária pode ser estendida a uma homotopia entre g e uma função contínua arbitrária.

Outra maneira de enunciar a PEH de (X, A) relativamente a Y é dizer que toda função contínua $H : X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$ se estende a uma função contínua $H' : X \times I \to Y$.

Do ponto de vista de diagramas, um par (X, A) possuir a PEH em relação a Y significa a existência de uma função $H : X \times I \to Y$ que faça comutar o diagrama abaixo, para quaisquer funções $g : X \to Y$ e $G : A \times I \to Y$. As flechas sem nome denotam as inclusões triviais.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "g"] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "H"']
\end{tikzcd}
$$

Quando o par (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias em relação a qualquer espaço topológico, diz-se simplesmente que (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias.

Exemplo 1.40. Se (X, A) tem a propriedade de extensão de homotopias, então a função identidade em $X \times \{0\} \cup A \times I$ estende-se a uma função $H : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$. Segue, nesse caso, que $X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato de $X \times I$.

Vale a recíproca: Se $X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato de $X \times I$, então (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias. Com efeito, basta notar que, dada uma função $g : X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$, a composição $r \circ g : X \times I \to Y$, em que r é uma retração de $X \times I$ a $X \times \{0\} \cup A \times I$, estende g ao espaço $X \times I$.

A ideia mais importante da propriedade de extensão de homotopias é que ela é invariante por homotopias, no seguinte sentido: Se (X, A) tem a PEH com respeito a Y e $f, g : A \to Y$ são homotópicas, então f se estende a X se, e somente se, g também o faz. Com efeito, se $h : X \to Y$ é extensão de f e $H : A \times I \to Y$ é uma homotopia entre f e g, a propriedade de extensão de homotopias garante a existência de uma função $F : X \times I \to Y$ que estende H. Isso signifca que $F_1 : X \to Y$, $F_1(x) = F(x, 1)$ é uma extensão de g ao espaço X. Portanto, o problema de extensão de funções contínuas, descrito no início desse capítulo, pode ser tomado como um problema na Categoria $\underline{HTop}$.

Exemplo 1.41. Pelo exemplo anterior, obtemos que um par (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias em relação a Y se, e somente se, o par $(X \times Z, A \times Z)$ também a possui, seja qual for o espaço topológico Z que se tome. De fato, $X \times \{0\} \cup A \times I$ é um retrato de (X, A) se, e somente se, $(X \times Z) \times \{0\} \cup (A \times Z) \times I$ é um retrato de $(X \times Z) \times I$.

Exemplo 1.42. Segue diretamente dos Exemplos 1.34 na página 17 e 1.41 que, quando X é um espaço de Hausdorff e o par (X, A) possui a PEH, A deve ser fechado em X, necessariamente.

Definição 1.43. *Sejam X e X' Espaços Topológicos. Uma função contínua $f : X' \to X$ chama-se uma cofibração quando, dadas aplicações contínuas $g : X \to Y$ e $G : X' \times I \to Y$, com Y tomado arbitrariamente, tais que $g(f(x')) = G(x', 0)$, para quaisquer $x' \in X'$ e $t \in I$, existir uma função contínua $F : X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0) = g(x)$, para todo $x \in X$ e $F(f(x'), t) = G(x', t)$, para todo par $(x', t) \in X' \times I$. O diagrama abaixo ilustra essa situação. As fechas sem nome denotam inclusões óbvias.*

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] & & X' \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd, "f \times \mathrm{id}_I"] \\
& Y & \\
X \arrow[rr] \arrow[ur, "g"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "F"']
\end{tikzcd}
$$

Como se vê facilmente, a inclusão $\imath : A \to X$ é uma cofibração se, e somente se, o par (X, A) possui a propriedade de extensão de homotopias com relação a qualquer espaço. Nesse caso, diremos apenas que o par (X, A) possui a PEH. Vejamos, abaixo, de que maneira um par (X, A) que possui a propriedade de extensão de homotopias em relação a A relaciona-se com o conceito de retratibilidade fraca introduzido acima.

Proposição 1.44. *Seja (X, A) um par que possui a propriedade de extensão de homotopias relativamente a A. Nessas condições, A é um retrato fraco de X se, e somente se, A é um retrato de X.*

Demonstração: Basta mostrar a implicação $(\Rightarrow)$. Para isso, seja $r : X \to A$ uma retração fraca. Tome uma homotopia $H : A \times I \to A$ entre $r|A$ e id_A. Têm-se $H(x, 0) = r(x)$, para todo $x \in A$. Como (X, A) possui a PEH, existe $G : X \times I \to A$ tal que $G(x, 0) = r(x)$, para todo $x \in X$, e $G|(A \times I) = H$. Seja $r' : X \to A$ a aplicação dada por $r'(x) = H(x, 1)$. Então $r \simeq r'$ e, além disso, $r'(a) = H(a, 1) = \mathrm{id}_A(a) = a$, para todo $a \in A$, logo r' é uma retração de X ao espaço A. **(c.q.d)**

As vezes, um retrato A do espaço X pode ser identificado por meio de um tipo particular de homotopia, a qual exerce extrema importância à topologia quociente em X/A. Trata-se das *deformações retráteis.* Vejamos o que isso significa.

Definição 1.45. *Seja (X, A) um par topológico. Uma homotopia $H : X \times I \to X$ chama-se uma* deformação retrátil forte *de X ao subespaço A quando $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1(X) = A$ e $H_t|A = \mathrm{id}_A$, $\forall t \in I$.*

Noutras palavras, uma homotopia H entre a identidade em X e uma função de X em A diz-se uma deformação retrátil quando a imagem dos pontos A permanece fixa durante o processo homotópico de deformação. Evidentemente, a condição $H_t(a) = a$, para todo $t \in I$ e todo $a \in A$ equivale a dizer que H é uma homotopia relativa a A. Logo $H : \mathrm{id}_X \simeq H_1(\mathrm{rel.}A)$. A relação mais importante entre deformações retráteis e retratos é dada pela proposição abaixo.

Proposição 1.46. *Se existe uma deformação retrátil forte H de um espaço X a um subespaço $A \subseteq X$, então A é um retrato de X.*

Demonstração: Defina $r : X \to A$ pondo $r(x) = H(x, 1) = H_1(x)$, para todo $x \in X$. Tal r está bem definida, porque $H_1(X) = A$. Por hipótese, tem-se $r(a) = H_1(a) = \mathrm{id}_A(a) = a$, para qualquer $a \in A$. Sendo H uma função contínua, segue que r também o é. Por conseguinte, r é uma retração. **(c.q.d)**

Proposição 1.47. *Se um espaço X admite uma deformação retrátil forte a um ponto, então X é contrátil.*

Demonstração: Seja $H : X \times I \to X$ deformação retrátil de X a um ponto $x_0 \in X$. Isso significa que a função identidade em X é homotópica à função constante $x \mapsto x_0$. O resultado segue da Proposição 1.24 na página 14. **(c.q.d)**

Nem todo retrato de X provém de uma deformação retrátil. De fato, todo ponto de X é um retrato, em virtude do Exemplo 1.31 na página 17. Por outro lado, a proposição anterior garante que se existir uma deformação retrátil de X a um de seus pontos, então X deve ser contrátil, logo conexo por caminhos, tendo em vista o Corolário 1.26 na página 14.

O resultado a seguir exibe uma relação entre cofibrações e contrações, o qual terá sua importância revelada no Capítulo 4, durante o estudo dos recobrimentos de uma árvore.

Teorema 1.48. *Se o par (X, A) possui a PEH e A é contrátil, então a projeção canônica $q : X \to X/A$ é uma equivalência homotópica.*

Demonstração: Seja $G : A \times I \to A$ uma homotopia entre a identidade em A e uma função constante $c : A \to A$, $c(x) = x_0$. Tal G pode, sem problemas, ser considerada como uma aplicação $G : A \times I \to X$ tomando valores em X, pois $A \subseteq X$ e a continuidade é preservada. Como (X, A) possui a PEH, podemos estender tal homotopia G a uma homotopia $H : X \times I \to X$ tal que $H_0 = \mathrm{id}_X$, conforme indica o diagrama comutativo abaixo, no qual as fechas não nomeadas consistem em inclusões triviais.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dd, "\imath"'] & & A \times I \arrow[dl, "G"'] \arrow[dd] \\
& X & \\
X \arrow[rr] \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "H"']
\end{tikzcd} .$$

Tem-se $H_t(A) \subseteq A$, para todo $t \in A$. Dessa forma, a imagem de A pela composição $q \circ H_t : X \to X/A$ é um ponto, para todo t. Portanto, passando-se ao quociente, obtemos, para todo $t \in I$, uma aplicação $\overline{H}_t$, induzida por H_t, tal que $q \circ H_t = \overline{H}_t \circ q$. A função H_1 aplica A em um ponto (o ponto ao qual A se contrai). Fica bem definida, então, uma função $g : X/A \to X$ para a qual $g \circ q = H_1 \simeq H_0 = \mathrm{id}_X$ (conforme figura abaixo).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "q"] \\
X/A \arrow[r, "\overline{H_1}"'] \arrow[ur, "g"] & X/A
\end{tikzcd}$$

Isso significa que $q \circ g(\overline{x}) = q(g(q(x))) = (q \circ H_1)(x) = \overline{H}_1(q(x)) = \overline{H}_1(\overline{x})$, o que nos dá $q \circ g = \overline{H_1} \simeq \overline{H}_0 = \mathrm{id}_{X/A}$. Daí, segue-se o resultado. **(c.q.d)**

Capítulo 2

O Grupo Fundamental

O objetivo desse capítulo é definir um importante funtor entre as categorias $\underline{HTop}$ e $\underline{Grp}$. Noutras palavras, a cada par formado por um espaço topológico X e um ponto $x_0 \in X$ fixo, faremos corresponder um grupo, chamado o *Grupo Fundamental* de X com base em x_0, ou, equivalentemente, o *Primeiro Grupo de Homotopia* de X e x_0. Essa correspondência será feita de tal forma que dois espaços topológicos homeomorfos devem ser associados a Grupos Fundamentais isomorfos.

O Grupo Fundamental é, provavelmente, o invariante algébrico mais simples que pode ser associado à noção de homotopia. A sua importância é revelada em caráter imediato, ora por meio das inúmeras aplicações que descreve em Análise e Álgebra Abstrata, as quais serão devidamente descritas nos capítulos posteriores, ora por servir de motivação para o estudo de novas situações em Topologia Algébrica, como o da noção de Recobrimento, que complementa de forma extremamente eficiente e simples as ideias apresentadas nesse capítulo. As referências principais aqui utilizadas são [6], [4], [12] e [1].

2.1 Homotopia de Caminhos

A relevância maior para o estudo do Grupo Fundamental não é dada prioritariamente pela noção de aplicações homotópicas, mas sim por um caso particular dessa ideia, a saber, a homotopia de caminhos. Atenção especial será dada a homotopias de caminhos fechados, isto é, caminhos cujo ponto inicial coincide com o ponto final.

Lembramos que um caminho no espaço topológico X é uma função $\lambda : I \to X$ contínua. Como $I = [0, 1]$ é um espaço convexo, segue que I é contrátil, logo todo caminho em I é homotópico a um caminho constante. Assim sendo, considerar homotopias de caminhos como sendo simplesmente homotopia de funções não traz benefícios muito substanciais. Em virtude desse fato, considere a definição a seguir.

Definição 2.1. *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos num espaço topológico X. Diz-se que uma aplicação contínua $H : I \times I \to X$ é uma homotopia de caminhos entre a e b quando $H : a \simeq b$ e, além disso, $H(0, t) = a(0) = b(0)$ e $H(1, t) = a(1) = b(1)$, para todo $t \in I$. Nesse caso, os caminhos a e b chamam-se caminhos homotópicos, e escreve-se $a \cong b$ ou $H : a \cong b$ para indicar esse fato.*

Uma homotopia de caminhos entre os caminhos a e b nada mais é do que uma homotopia entre a e b relativa ao bordo $\partial I = \{0, 1\}$ do intervalo I. Ou seja, $a, b : I \to X$ são caminhos homotópicos se, e somente se, $a \simeq b(\text{rel. } \partial I)$. Em particular, para que a e b sejam caminhos homotópicos, ambos devem iniciar no mesmo ponto

$a(0) = b(0)$ e ter o mesmo ponto final $a(1) = b(1)$. Por esse motivo, costumamos dizer que uma homotopia de caminhos é uma *homotopia de extremos fixos*.

Para que uma função contínua $H : I^2 \to X$ seja uma homotopia de caminhos entre os caminhos a e b, é necessário e suficiente que, para quaisquer $s, t \in I$, sejam válidas as seguintes igualdades:

1. $H(s, 0) = a(s)$; $H(s, 1) = b(s)$
2. $H(0, t) = a(0) = b(0)$; $H(1, t) = a(1) = b(1)$

As igualdades em (1) significam que $H : a \simeq b$. A segunda afirmação significa que a homotopia acima é relativa a ∂I e que as extremidades dos caminhos a e b coincidem.

Exemplo 2.2. Seja E um espaço vetorial normado e $X \subseteq E$ um subespaço convexo. Dois caminhos $a, b : I \to X$ são caminhos homotópicos se, e somente se, $a(0) = b(0)$ e $a(1) = b(1)$. De fato, por ser X convexo, sempre existe uma homotopia linear entre quaisquer caminhos em X. Para que essa homotopia seja uma homotopia de caminhos, basta, por definição, que a e b tenham as mesmas extremidades.

O exemplo acima será de extrema importância para demonstrarmos a existência do Grupo Fundamental de um espaço topológico X. Além disso, esse exemplo é suficiente para que o leitor se convença da enormidade de situações nas quais o conceito de homotopia de caminhos se faz presente. Em particular, ele garante que são homotópicos os caminhos $a, b : I \to \mathbb{R}^2$ dados por $a(t) = (\cos(\pi t), \operatorname{sen}(\pi t))$ e $b(t) = (1-2t, 0)$, os quais parametrizam o semi-círculo unitário superior e o segmento de reta de extremidades $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Evidentemente, poderíamos ter definido, de forma análoga, a noção de homotopia de caminhos para caminhos definidos em qualquer intervalo compacto $[s_0, s_1]$ da reta. Entretanto, dada qualquer função contínua $f : [s_0, s_1] \to X$, podemos tomar um homeomorfismo $\phi : I \to [s_0, s_1]$ e considerar o caminho $a = f \circ \phi : I \to X$ definido em I. Veremos, adiante, que para efeito do estudo de homotopias, os caminhos a e f não possuem diferença alguma. Usaremos, quando conveniente, homotopias de caminhos não necessariamente definidos em I, sem maiores comentários.

As vezes, principalmente quando os caminhos forem fechados, nos será interessante considerar homotopias livre entre tais caminhos. Vejamos a definição desse conceito.

Definição 2.3. *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos fechados. Uma função contínua $H : I^2 \to X$ chama-se uma* homotopia livre *entre os caminhos a e b quando $H : a \simeq b$ e, além disso, $H(1, t) = H(0, t)$, para todo $t \in I$. Nesse caso, os caminhos a e b chamam-se livremente homotópicos.*

Conforme definição acima, uma homotopia livre de caminhos $H : I^2 \to X$ entre os caminhos a e b, em X, significa que, a cada instante $t \in I$, o caminho $H_t : I \to X$, definido por $H_t(s) = H(s, t)$, é fechado.

O exemplo mais simples e conhecido de homotopia livre é considerado a seguir.

Exemplo 2.4. Seja $X = S^1 \times S^1$ o toro. Para cada $t \in I$, o caminho $H_t : I \to X$ definido por $H_t(s) = (t, \sqrt{1-t^2}, \cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s))$ é fechado, isto é, $H_t(0) = H_t(1)$, para todo $t \in I$. Evidentemente, têm-se $H : H_0 \simeq H_1$. Logo, $H : I^2 \to X$, $H_t(s) = H(s, t)$ é uma homotopia livre entre H_0 e H_1. Geometricamente, a cada instante t, o gráfico da função contínua H_t descreve um meridiano do Toro.

Toda homotopia de caminhos entre caminhos fechados é uma homotopia livre. De fato, se $a, b : I \to X$ são fechados e $H : a \cong b$, então $H(0,t) = a(0) = a(1) = b(1) = b(0) = H(1,t)$, para todo $t \in I$.

Como a homotopia de caminhos é um caso particular de homotopia relativa, segue que a relação de homotopia de caminhos é uma relação de equivalência no espaço topológico $C(I, X)$, vide Teorema 1.2. O mesmo se dá para a homotopia livre de caminhos. A classe de equivalência de um caminho $a : I \to X$, segundo a relação de homotopia de caminhos, será denotada por $[a]$ e denomina-se classe de homotopias de caminhos de a.

A partir de agora, passaremos a olhar uma homotopia de caminhos num espaço X não só pelo ponto de vista topológico, mas também sobre o ponto de vista algébrico. Para isso, introduziremos uma operação no espaço $C(I, X)$ dos caminhos em X. Essa operação determinará, sobre certas condições, uma estrutura algébrica nesse espaço. Isso nos deixará quase prontos para, enfim, definirmos a noção de grupo fundamental.

Definição 2.5. *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos no espaço topológico X tais que b começa no ponto em que a termina, isto é, $a(1) = b(0)$. Definimos $ab : I \to X$, chamado a* concatenação *de a e b, pondo-se*

$$ab(t) = \begin{cases} a(2t), & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ b(2t-1), & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Evidentemente, as restrições $ab|[0,1/2]$ e $ab|[1/2,1]$ são contínuas, donde segue que ab é uma função contínua, ou seja, ab é um caminho em X que começa em $a(0)$ e termina em $b(1)$. Intuitivamente, tal caminho ab percorre a imagem de a com o dobro da velocidade que a leva para fazê-lo. Idem para b. Às vezes, ab é chamado de *caminho justaposto* de a e b.

Convém observar que o produto ab está bem definido somente quando o ponto final de a é igual ao ponto inicial de b. Portanto, sempre que escrevermos que ab pode ser efetuado, ou ab está definido, estaremos dizendo que $a(1) = b(0)$

Embora a operação acima seja a mais útil do ponto de vista da homotopia de caminhos, convém lembrar que, em virtude de toda homotopia de caminhos ser, em particular, uma homotopia, é possível utilizarmos a operação de composição de caminhos, a qual está bem definida nas classes de homotopia de caminhos, conforme explicitado na seção anterior.

Definição 2.6. *Seja $a : I \to X$ um caminho no espaço topológico X. Definimos o* caminho inverso *de a como sendo o caminho $a^{-1} : I \to X$ dado por $a^{-1}(t) = a(1-t)$.*

Denotando por $j : I \to I$ o caminho $j(t) = 1 - t$, vê-se que o caminho inverso $a^{-1} = a \circ j$ é uma composição de funções contínuas, logo é de fato uma função contínua de I em X, ou seja, um caminho.

Observação: Não se deve confundir o caminho inverso a^{-1} com a função inversa de a, que existe quando a é bijetor. Ambos possuem a mesma notação, mas sempre ficará claro no contexto da situação qual dos dois acima situados estará sendo mencionado. Também não se deve confundir a imagem inversa de um conjunto por a com a imagem de um conjunto pelo caminho inverso.

Notemos que o caminho inverso de a começa onde a termina e termina onde a começa. A proposição a seguir garante que o produto de caminhos e o inverso de um caminho podem ser definidos, sem ambiguidade, no conjunto das classes de homotopia de caminhos em X.

Proposição 2.7. *Sejam $a, b, a', b' : I \to X$ caminhos tais que $F : a \cong a'$ e $G : b \cong b'$. Então $ab \cong a'b'$ e $a^{-1} \cong (a')^{-1}$.*

Demonstração: Defina $H : I \times I \to X$ por $H(s,t) = F(2s,t)$, se $s \in [0, 1/2]$ e $H(s,t) = G(2s-1,t)$ se $s \in [1/2, 1]$. É claro que H é contínua, pois são contínuas as restrições de H aos subconjuntos fechados $[0, 1/2] \times I$ e $[1/2, 1] \times I$, respectivamente. Dado $s \in [0, 1/2]$, tem-se $H(s, 0) = F(2s, 0) = a(2s) = ab(s)$ e $H(s, 1) = F(2s, 1) = a'(2s) = a'b'(s)$. Também, para $s \in [1/2, 1]$, obtemos $H(s, 0) = G(2s-1, 0) = b(2s-1) = ab(s)$ e $H(s, 1) = G(2s-1, 1) = b'(2s-1) = a'b'(s)$. Segue que $H : a \simeq b$. Além disso, $H(0,t) = F(0,t) = ab(0) = a'b'(0)$ e $H(1,t) = G(1,t) = a'b'(1) = ab(1)$. Daí, concluímos que H é uma homotopia de caminhos entre ab e $a'b'$.

Para mostrar a segunda afirmação, definimos $L : I \times I \to X$ pondo $L(s,t) = F(1-s,t)$. Sendo L a composição das funções contínuas F e $(s,t) \mapsto (1-s,t)$, segue que L é contínua. Além disso, $L(0,t) = F(1,t) = a(1) = a^{-1}(0) = (a')^{-1}(0)$ e $L(1,t) = F(0,t) = a(0) = a^{-1}(1) = (a')^{-1}(1)$.

Finalmente, $L(s,0) = F(1-s,0) = a(1-s) = a^{-1}(s)$ e $L(s,1) = F(1-s,1) = a'(1-s) = (a')^{-1}(s)$. Portanto $L : a^{-1} \cong (a')^{-1}$. **(c.q.d)**

A partir de agora, salvo quando dissermos o contrário, X e Y serão sempre espaços topológicos.

Definição 2.8. *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos tais que ab está bem definido. Definimos o produto das classes de homotopia de caminhos de a e b por $[a][b] = [ab]$ e a classe inversa por $[a]^{-1} = [a^{-1}]$.*

A Proposição 2.7 garante que a definição acima não depende dos representantes da classe de homotopia de caminhos que se tome no quociente $C(I, X)/\cong$ do conjunto dos caminhos em X pela relação de homotopia de caminhos em X.

Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Denotamos por $e_x : I \to X$ o caminho constante $e_x(t) = x$, para todo $t \in I$ e por ϵ_x a classe de homotopia de caminhos de e_x, ou seja, $\epsilon_x = [e_x]$.

Definição 2.9. *Sejam $a : I \to X$ um caminho e $\lambda : I \to I$ uma função contínua tal que $\lambda(\partial I) \subseteq \partial I$. A composição $\varphi = a \circ \lambda$ chama-se uma reparametrização do caminho a. Diz-se que φ é*

1. *positiva, quando $\lambda(0) = 0$ e $\lambda(1) = 1$;*
2. *negativa, quando $\lambda(0) = 1$ e $\lambda(1) = 0$;*
3. *trivial, quando $\lambda(0) = \lambda(1)$.*

Lema 2.10. *Sejam $a : I \to X$ um caminho que começa em $x = a(0)$ e termina em $y = a(1)$, e $\varphi = a \circ \lambda$ uma reparametrização de a.*

1. *Se φ é positiva, então $\varphi \cong a$.*
2. *Se φ é negativa, então $\varphi \cong a^{-1}$.*
3. *Se φ é trivial, então $\varphi \cong e_x$ ou $\varphi \cong e_y$.*

Demonstração Suponha φ positiva. Pelo Exemplo 2.2 na página 23, segue que $\lambda \cong \mathrm{id}_I$. Portanto $\varphi = a \circ \lambda \cong a \circ \mathrm{id}_I = a$. Se φ é negativa, então λ e $\psi : I \to I$, $\psi(t) = 1 - t$, são caminhos com as mesmas extremidades no espaço normado I, logo homotópicos, invocando-se novamente o Exemplo 2.2. Daí $\varphi = a \circ \lambda \cong a \circ \psi = a^{-1}$.

Finalmente, suponhamos que seja φ uma reparametrização trivial, digamos $\lambda(0) = 0 = \lambda(1)$, para fixar ideias. Os mesmos argumentos usados acima garantem que λ é, nesse caso, homotópico ao caminho constante $b : I \to I$ que associa, a todo $t \in I$, o ponto 0. Dessa forma, $\varphi = a \circ \lambda \cong a \circ b = e_x$. Analogamente, se for $\lambda(0) = 1 = \lambda(1)$, tem-se $\varphi \cong e_y$. **(c.q.d)**

Exemplo 2.11. Sejam $a : I \to X$ um caminho e $a_1 = a|[0;1/2]$, $a_2 = a|[1/2,1]$ restrições de a. Tomemos $\varphi_1 : I \to [0,1/2], \varphi_2 : I \to [1/2,1]$ homeomorfismos lineares crescentes. Pondo $b_1 = a_1 \circ \varphi_1$ e $b_2 = a_2 \circ \varphi_2$, tem-se $a \cong b_1 b_2$. Com efeito, definindo-se $\varphi : I \to I$ por $\varphi([0;1/2]) = \varphi_1$ e $\varphi([1/2;1]) = \varphi_2$, obtemos que $b = a \circ \varphi$, logo b é uma reparametrização positiva de a, donde segue a afirmação. Um raciocínio análogo mostra que, dados $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = 1$, e escrevendo, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $a_i = a|[t_i; t_{i+1}] \circ \varphi_i$, onde $\varphi_i : I \to [t_i, t_{i+1}]$ é o homeomorfismo linear crescente, tem-se $a \cong a_1 a_2 \cdots a_k$.

2.2 Grupoide Fundamental

O conjunto das classes de homotopia de caminhos com extremos fixos, num espaço topológico X, munido da operação de produto de caminhos, chama-se o grupoide fundamental de X e será de notado por $\Pi(X)$. Por enquanto, isso será apenas uma definição, mas a noção de grupoide é bastante geral e será devidamente abordada no Capítulo 3. O teorema que se segue mostra que, de fato, $\Pi(X)$ é um grupoide no sentido mais abrangente. É conveniente observar que tal grupoide está muito longe de ser um grupo, pois sequer o produto está definido para quaisquer caminhos que se tome.

Teorema 2.12. *Sejam $a, b, c : I \to X$ caminhos tais que os produtos ab e bc podem ser efetuados. Sejam $x = a(0)$ a origem de a e $y = a(1)$ o ponto final de a. Sejam, também, $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ e $\gamma = [c]$. Nessas condições, são válidas as seguintes condições:*

1. $\alpha(\alpha)^{-1} = \epsilon_x$;
2. $(\alpha)^{-1}\alpha = \epsilon_y$;
3. $\epsilon_x \alpha = \alpha = \alpha \epsilon_y$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Demonstração: A ideia da prova é encontrar reparametrizações convenientes dos caminhos acima, de forma a utilizar o Lema anterior. Tais reparametrizações serão calculadas simplesmente observando-se a definição dos produtos dos caminhos envolvidos. Para provar **(1)**, note que

$$aa^{-1} = \begin{cases} a(2t), & t \in [0, 1/2] \\ a^{-1}(2t-1) = a(1-2t+1) = a(2-2t), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Isso significa que $aa^{-1} = a \circ \lambda$, em que $\lambda : I \to I$ é tal que $\lambda(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/2] \\ 2 - 2t, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$ Como $\lambda(0) = 0 = \lambda(1)$, obtemos que aa^{-1} é uma reparametrização trivial de a. Pelo Lema 5, segue que $aa^{-1} = a \circ \lambda \cong e_x$. Daí, vem $\alpha\alpha^{-1} = [e_x] = \epsilon_x$.

(2) Baseando-se na ideia acima, vê-se rapidamente que $a^{-1}a = a \circ \lambda_1$, em que $\lambda_1 : I \to I$ é definida por $\lambda_1(t) = 1 - 2t$ se $t \in [0, 1/2]$ e $\lambda_1(t) = 2t - 1$ quando $t \in [1/2, 1]$. Logo, $a^{-1}a$ é uma reparametrização trivial de a, com $\lambda_1(0) = 1 = \lambda_1(1)$, ou seja, $a^{-1}a \cong e_y$, ou ainda, $\alpha^{-1}\alpha = \epsilon_y$.

(3) Mostremos primeiro que $\epsilon_x\alpha = \alpha$. Com efeito,

$$(e_x a)(t) = \begin{cases} e_x(2t) = x, & t \in [0; 1/2] \\ a(2t - 1), & t \in [1/2; 1]. \end{cases}$$

Isso mostra que, definindo-se $\lambda_2 : I \to I$ por $\lambda_2(t) = 0$, se $t \in [0; 1/2]$ e $\lambda_2(t) = 2t - 1$ se $t \in [1/2; 1]$, então $e_x a = a \circ \lambda_2$, ou seja, $e_x a$ é uma reparametrização positiva de a, donde segue que $e_x a \cong a$, como queríamos. Da mesma forma, a função $\lambda_3 : I \to I$ dada por $\lambda_3(t) = 2t$ se $t \in [0; 1/2]$ e $\lambda_3(t) = 1$ quando $t \in [1/2; 1]$, é tal que $ae_y = a \circ \lambda_3$. Logo, ae_y é uma reparametrização positiva de a, o que nos dá $ae_y \cong a$.

(4) Por definição, tem-se

$$(ab)c(t) = \begin{cases} ab(2t), & t \in [0; 1/2] \\ c(2t - 1), & t \in [1/2; 1] \end{cases} = \begin{cases} a(4t), & t \in [0, 1/4] \\ b(4t - 2), & t \in [1/4; 1/2] \\ c(2t - 1), & t \in [1/2; 1], \end{cases}$$

$$a(bc)(t) = \begin{cases} a(2t), & t \in [0; 1/2] \\ bc(2t - 1), & t \in [1/2; 1] \end{cases} = \begin{cases} a(2t), & t \in [0; 1/2] \\ b(4t - 2), & t \in [1/2; 3/4] \\ c(4t - 3), & t \in [3/4; 1]. \end{cases}$$

Percebendo-se que as funções $\phi_1 : [0; 1/4] \to [0, 1/2]$, $\phi_2 : [1/4; 1/2] \to [1/2; 3/4]$ e $\phi_3 : [1/2; 1] \to [3/4; 1]$ dadas por $\phi_1(t) = 2t$, $\phi_2(t) = t + 1/4$ e $\phi_3(t) = 1/2(t + 1)$ são homeomorfismos, obtemos que a aplicação $\lambda_4 : I \to I$ dada por

$$\lambda_4(t) = \begin{cases} \phi_1(t), & t \in [0; 1/4] \\ \phi_2(t), & t \in [1/4; 1/2] \\ \phi_3(t), & t \in [1/2; 1] \end{cases}$$

é tal que $(ab)c \circ \lambda_4 = a(bc)$, donde segue que $a(bc)$ é uma reparametrização positiva de $(ab)c$, ou seja, $(ab)c \cong a(bc)$. Isso encerra a demonstração. **(c.q.d)**

2.3 Grupo Fundamental

A partir de agora, consideraremos pares do tipo (X, x_0), em que X é um espaço topológico e $x_0 \in X$ é um ponto fixado chamado o *ponto base* de X. Um caminho $a : I \to X$ tal que $a(0) = x_0 = a(1)$ chama-se um caminho fechado com base em x_0, ou equivalentemente, um laço com base em x_0. Tomando-se a notação de par topológico e considerando-se x_0 como um espaço topológico formado por um único ponto, podemos escrever que um laço com base em x_0 é uma função contínua $a : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ entre pares.

Evidentemente, o produto de dois laços com base em x_0 sempre pode ser efetuado. Além disso, pelo Teorema anterior, escrevendo-se $\epsilon = \epsilon_{x_0}$, temos $\alpha\epsilon = \alpha = \epsilon\alpha$ e $\alpha\alpha^{-1} = \epsilon = \alpha^{-1}\alpha$, para toda classe $\alpha = [a]$ de um laço a com base em x_0. Isso significa que a coleção das classes de homotopia de laços com ponto base em x_0 é um grupo com a operação de produto de caminhos.

Definição 2.13. *Seja X um espaço topológico e $x_0 \in X$ ponto base. O subconjunto do grupoide fundamental $\Pi(X)$ formado por todas as classes de homotopia de laços com base em x_0 chama-se o* Grupo Fundamental *ou, equivalentemente, o* Primeiro Grupo de Homotopia *do par (X, x_0) e é denotado por $\pi_1(X, x_0)$.*

É natural nos perguntarmos até que ponto a escolha do ponto base influencia na estrutura do Grupo Fundamental. Na verdade, não é possível garantir que $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ sejam isomorfos para quaisquer $x_0, x_1 \in X$ pontos base que se tome. Entretanto, para ser válido esse resultado, é suficiente que X seja conexo por caminhos. É o que diz a:

Proposição 2.14. *Se $x_0, x_1 \in X$ pertencem à mesma componente conexa por caminhos do espaço topológico X, então $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.*

Demonstração: Tomemos um caminho $c : I \to X$ com origem em x_1 e fim em x_0. Seja $\gamma = [c]$. Agora, consideremos a aplicação $\overline{\gamma} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ definida por $\overline{\gamma}(\alpha) = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, para cada $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$. Dados $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, tem-se $\overline{\gamma}(\alpha\beta) = \gamma(\alpha\beta)\gamma^{-1} = (\gamma\alpha\gamma^{-1})(\gamma\beta\gamma^{-1}) = \overline{\gamma}(\alpha)\overline{\gamma}(\beta)$, logo $\overline{\gamma}$ é um homomorfismo de grupos. Evidentemente, a associação $\alpha \in \pi_1(X, x_1) \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ é um homomorfismo inverso de $\overline{\gamma}$. Segue que $\overline{\gamma}$ é um isomorfismo. **(c.q.d)**

Corolário 2.15. *Se X é conexo por caminhos, então $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$, para quaisquer $x_0, x_1 \in X$.*

Convém observar que, se $\pi_1(X, x_0)$ for abeliano, então o isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$, definido na demonstração acima, não depende da classe do caminho que liga x_1 a x_0 que tomemos. Noutra palavras, tem-se $\overline{\gamma} = \overline{\lambda}$, para quaisquer γ, λ classes de caminhos ligando x_1 a x_0. A verificação desse fato é imediata. É claro que, no caso geral de não ser abeliano o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, o isomorfismo $\overline{\gamma}$ varia com a classe γ escolhida.

Em virtude da proposição acima, costuma-se escrever simplesmente $\pi_1(X)$, omitindo-se o ponto base, para denotar o grupo fundamental de um espaço X conexo por caminhos. Uma noção mais precisa para essa notação será dada futuramente, quando considerarmos, sobre certas condições, os elementos do grupo fundamental de X simplesmente como classes de homotopias livres de caminhos fechados em X.

O teorema que se segue exibe a relação mais importante entre homotopia livre e homotopia de caminhos.

Teorema 2.16. *Sejam $a, b : I \to X$ caminhos fechados, com base nos pontos x_0 e y_0, respectivamente. Então a e b são livremente homotópicos se, e somente se, existe um caminho $c : I \to X$, ligando x_0 a y_0, tal que $a \cong cbc^{-1}$.*

Demonstração: Suponhamos a e b livremente homotópicos. Se H é uma homotopia livre entre a e b, definimos $c : I \to X$ pondo $c(t) = H(0, t) = H(1, t)$, o qual é um caminho ligando x_0 a y_0. Seja $\varphi : \partial(I \times I) \to I \times I$ dada por $\varphi(0,t) = (0,0)$, $\varphi(1,t) = (1,0)$, $\varphi(s,0) = (s,0)$ e

$$\varphi(s,1) = \begin{cases} (0,4s), & 0 \le s \le 1/4 \\ (4s-1,1), & 1/4 \le s \le 1/2 \\ (1,2-2s), & 1/2 \le s \le 1, \end{cases}$$

para quaisquer $t, s \in I$. Evidentemente, φ é contínua e transforma o bordo $\partial(I \times I)$ do quadrado $I \times I$ nele mesmo. Como $I \times I$ é contrátil, existe $\overline{\varphi} : I \times I \to I \times I$ extensão contínua de φ, pelo Corolário 1.29 na página 15. Pondo $K = H \circ \overline{\varphi}$, verifica-se rapidamente que $K : a \cong (cb)c^{-1}$.

Reciprocamente, suponha a e $(cb)c^{-1}$ caminhos homotópicos. Para cada $t \in I$, seja $d_t : I \to X$ o caminho $d_t(s) = c(st)$, ou seja, a reparametrização de $c|[0,t]$ ao intervalo I. Defina $F : I \times I \to X$ pondo

$$F(s,t) = (d_t^{-1}a)d_t(s) = \begin{cases} c(t-4st), & s \in [0,1/4] \\ a(4s-1), & s \in [1/4,1/2] \\ c(2ts-t), & s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

F é contínua, porque são contínuas suas restrições aos intervalos fechados $[0,1/4]$, $[1/4,1/2]$ e $[1/2,1]$. Tem-se $F(s,0) = (e_{x_0}a)e_{x_0}$, $F(s,1) = (c^{-1}a)c$. Além disso, $F(0,t) = c(t) = F(1,t)$, para todo $t \in I$. Portanto F é uma homotopia livre entre $(e_{x_0}a)e_{x_0}$ e $(c^{-1}a)c$. Mas $(e_{x_0}a)e_{x_0} \cong a$ e, por hipótese, $(c^{-1}a)c \cong b$ (pois $a \cong (cb)c^{-1} \Rightarrow (c^{-1}a)c \cong b$). Em particular, a é livremente homópico a $(e_{x_0}a)e_{x_0}$ e b é livremente homotópico a cbc^{-1} (pois a e b são fechados). Por transitividade e simetria, segue que a e b são livremente homotópicos. **(c.q.d)**

Corolário 2.17. *Se $a : I \to X$ é um caminho fechado, com base em x_0, e livremente homotópico a uma constante, então $a \cong e_{x_0}$.*

Demonstração: Seja $e_y : I \to X$ caminho constante livremente homotópico a $a : I \to X$. Pelo Teorema acima, existe um caminho $c : I \to X$ ligando x_0 a y, tal que $a \cong ce_yc^{-1} \cong cc^{-1} \cong e_{x_0}$. **(c.q.d)**

Corolário 2.18. *Sejam $a, b : I \to X$ fechados com base em x_0. Então a e b são livremente homotópicos se, e somente se, $[a]$ e $[b]$ são conjugados no grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração: De fato, $[a]$ e $[b]$ são conjugados em $\pi_1(X, x_0) \Leftrightarrow$ existe $c : I \to X$ caminho fechado com base em x_0 tal que $[a] = [c][b][c]^{-1} = [cbc^{-1}] \Leftrightarrow a$ e b são livremente homotópicos com base em x_0. **(c.q.d)**

Com um pouco mais de trabalho, é possível associar, a cada par topológico (X, x_0) e a cada $n \in \mathbb{N}$, um grupo $\pi_n(X, x_0)$, chamado o n-ésimo grupo de homotopia de (X, x_0). Isso justifica o fato do grupo fundamental chamar-se também primeiro grupo de homotopia. Isso também mostra, a grosso modo, que π_1 é o invariante algébrico mais simples associado à ideia de homotopia.

2.4 Espaços Simplesmente Conexos

Grande parte dos resultados envolvidos no contexto da Análise Vetorial e Complexa dependem, evidentemente, das propriedades topológicas dos ambientes nos quais as aplicações vetoriais consideradas estiverem definidas. Por exemplo, a existência de primitiva de uma função vetorial pode ser garantida dependendo-se da topologia do domínio de tal aplicação. Um dos tipos de ambientes mais importantes nesse contexto são, pois, os conjuntos simplesmente conexos. Vejamos o que isso significa.

Definição 2.19. *Um espaço X, conexo por caminhos, chama-se* simplesmente conexo *quando $\pi_1(X, x) = \{0\}$, para todo $x \in X$.*

Noutras palavras, X diz-se simplesmente conexo quando é conexo por caminhos e todo caminho fechado a com base num ponto x é tal que $a \cong e_x$.

Exemplo 2.20. Em virtude do Exemplo 1.3 na página 10, vemos que todo espaço convexo é simplesmente conexo. Em particular, todo espaço vetorial normado também o é. Daí, segue que $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$. Também, bolas fechadas e abertas em $\mathbb{R}^n$ são simplesmente conexas.

Proposição 2.21. *A fim de que um espaço X seja simplesmente conexo, é necessário e suficiente que dois caminhos quaisquer em X, que possuem as mesmas extremidades, sejam homotópicos.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Se quaisquer caminhos em X de mesmas extremidades são homotópicos, então, em particular, todo caminho fechado com base em x é homotópico ao caminho constante e_x, o que mostra que a condição é suficiente. Reciprocamente, suponha X simplesmente conexo e sejam $a, b : I \to X$ caminhos ligando x_0 a x_1. Então ba^{-1} é fechado com base em x_0. Logo, obtemos $ba^{-1} \cong e_{x_0}$. Segue que $b \cong be_{x_1} \cong b(a^{-1}a) \cong (ba^{-1})a \cong e_{x_0}a \cong a$. Assim, a condição é necessária. **(c.q.d)**

A fim de atribuir outras caracterizações aos espaços simplesmente conexos, passemos a estudar as aplicações de S^1 num espaço qualquer X. Nesse caso, as homotopias terão como domínio o cilindro $S^1 \times I$ e não mais o quadrado $I \times I$.

Começamos tomando a aplicação contínua e sobrejetiva $\psi_0 : I \to S^1$, definida por $\psi_0(t) = e^{2\pi i t}$. Sendo I compacto e S^1 Hausdorff, ψ_0 é uma aplicação quociente (vide apêndice).

Proposição 2.22. *Os caminhos fechados em X estão em correspondência biunívoca com as aplicações contínuas de S^1 em X.*

Demonstração: Como ψ_0 é uma aplicação quociente, $a = \overline{a} \circ \psi_0$ é um caminho se, e somente se, $\overline{a} : S^1 \to X$ é contínua. Agora, um caminho $a : I \to X$ se escreve na forma $a = \overline{a} \circ \psi_0$, em que $\overline{a}$ é uma aplicação contínua de S^1 em X, se, e somente se, a é fechado. Com efeito, é claro que todo caminho dessa forma é fechado, porque ψ_0 é um caminho fechado. Reciprocamente, se $a(0) = x_0 = a(1)$, pomos $\overline{a}(\psi_0(0)) = x_0$ e $\overline{a}|S^1 \setminus \{\psi_0(0)\} = a \circ (\psi_0|(0, 1])^{-1}$. Obtemos portanto $a = \overline{a} \circ \psi_0$. Mostramos, assim, que a correspondência $\overline{a} \mapsto a = \overline{a} \circ \psi_0$ é bijetora. **(c.q.d)**

Proposição 2.23. *Existe uma bijeção entre homotopias de funções contínuas $f : S^1 \to X$ e homotopias livres de caminhos fechados em X.*

Demonstração: Defina $\tau : I \times I \to S^1 \times I$ pondo $\tau(s, t) = (\psi_0(s), t)$. Vê-se que τ é uma sobrejeção contínua entre o quadrado $I \times I$ e o cilindro $S^1 \times I$. Além disso, $\overline{H} : S^1 \times I$ é uma homotopia se, e somente se, $H = \overline{H} \circ \tau : I \times I \to X$ é uma homotopia livre de caminhos. Portanto $\overline{H} \mapsto H = \overline{H} \circ \tau$ é a bijeção procurada. **(c.q.d)**

Corolário 2.24. *Dois caminhos fechados $a, b : I \to X$, com $a = \overline{a} \circ \psi_0$ e $b = \overline{b} \circ \psi_0$ são livremente homotópicos se, e somente se, $\overline{a}, \overline{b} : S^1 \to X$ são homotópicas.*

Observação: Vamos tomar $e_1 = (1, 0)$ como ponto base de S^1. Dado $x_0 \in X$, as proposições acima garantem que se dois caminhos $a, b : I \to X$ fechados com base em x_0 são caminhos homotópicos, isto é, cumprem $a \cong b$, se, e somente se, existe uma homotopia de pares topológicos entre as aplicações correspondentes $\overline{a}, \overline{b} : (S^1, e_1) \to (X, x_0)$.

Com isso, obtemos o seguinte:

Teorema 2.25. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. São equivalentes:*

1) *X é simplesmente conexo;*
2) *Todo caminho fechado em X é livremente homotópico a um caminho constante;*
3) *Quaisquer duas aplicações contínuas $f, g : S^1 \to X$ são homotópicas;*
4) *Toda aplicação contínua $f : S^1 \to X$ se estende continuamente ao disco D^2.*

Demonstração: (1) $\Leftrightarrow$ (2) segue do Corolário 2.17 na página 29. A Proposição 2.23 garante que (2) $\Leftrightarrow$ (3). Finalmente, a observação feita logo após o Corolário 2.24 nos dá (3) $\Leftrightarrow$ (4). **(c.q.d)**

Exemplo 2.26. Seja $f : S^1 \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Como $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, o Teorema acima nos diz que existe uma extensão $\overline{f} : D^2 \to \mathbb{C}$ de f ao disco. Em particular, existe uma função complexa contínua $g : D^2 \to \mathbb{C}$ tal que $(g|S^1)(z) = 1/z$.

2.5 O Homomorfismo Induzido

Nosso objetivo, por agora, é mostrar que a associação $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$ determina um funtor covariante, chamado o funtor Grupo Fundamental. Para isso, a cada função contínua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, devemos definir um homomorfismo $\pi_1(f) = f_*$, o qual chamaremos o *homomorfismo induzido* de f por π_1, fato que justifica o título acima. Façamos isso agora.

Em primeiro lugar, notemos que a coleção dos pares topológicos com ponto base (X, x_0) é uma subcategoria de $\underline{\mathrm{Top}}^{(2)}$, definida no Exemplo 1.12 na página 12. Tal subcategoria será denotada por $\underline{\mathrm{PTop}}$. Dessa forma, uma função contínua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ entre objetos de $\underline{\mathrm{PTop}}$ consiste em uma função continua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Dada $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ função contínua, defina $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ pondo, para cada $\alpha = [a]$ classe de um caminho fechado $a : I \to X$ com base em x_0, $f_*(\alpha) = [f \circ a]$. Se b for caminho fechado com base em x_0 tal que $a \cong b$, então $f \circ a \cong f \circ b$, ou seja, f_* está bem definida. Além disso, dados $[a], [b] \in \pi_1(X, x_0)$, tem-se $f \circ (ab) = (f \circ a)(f \circ b)$. Com efeito, se $t \in [0; 1/2]$, então $(f \circ (ab))(t) = f(ab(t)) = f(a(2t)) = ((f \circ a)(f \circ b))(t)$. Se, porém, $t \in [1/2; 1]$, então $(f \circ (ab))(t) = f(ab(t)) = f(b(2t - 1)) = ((f \circ a)(f \circ b))(t)$, donde segue a afirmação feita.

Isso significa que $f_*([ab]) = f_*([a])f_*([b])$, ou seja, f_* é, de fato, homomorfismo de grupos. Agora, dada $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ uma função contínua entre os pares

(Y, y_0) e (Z, z_0), a composição $g \circ f : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ é tal que $(g \circ f)_*([a]) = [(g \circ f) \circ a] = [g \circ (f \circ a)] = g_*([f \circ a]) = g_*(f_*([a])) = (g_* \circ f_*)([a])$, para todo $[a] \in \pi_1(X, x_0)$. Portanto $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. É claro, também, que se $\mathrm{id} : X \to X$ é a identidade em X, então $\mathrm{id}_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade. Com isso, provamos a

Proposição 2.27. *Existe um funtor covariante $\pi_1 : \underline{PTop} \to \underline{grp}$, chamado o funtor grupo fundamental, que associa a cada par (X, x_0) o seu grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ e a cada função contínua $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ o homomorfismo induzido $\pi_1(f) = f_*$.*

Quando $f : X \to Y$, $f(x_0) = y_0$ é um homeomorfismo, tem-se, em virtude da proposição acima, que $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um isomorfismo de grupos. Portanto, podemos afirmar que os grupos fundamentais de espaços homeomorfos são isomorfos.

Evidentemente, duas aplicações $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ que são homotópicas relativamente a x_0 induzem o mesmo homomorfismo nos seus grupos fundamentais. Diz-se, então, que π_1 é invariante por homotopias.

Proposição 2.28. *Se $A \subseteq X$ é um retrato de X e $\imath : (A, x_0) \to (X, x_0)$ é a inclusão, então $\imath_*$ é um monomorfismo.*

Demonstração: Seja $r : X \to A$ uma retração. Tem-se $r \circ \imath = \mathrm{id}_A$. Segue que $r_* \circ \imath_* = (r \circ \imath)_* = \pi_1(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\pi_1(A, x_0)}$, ou seja, r_* é uma inversa à esquerda de $\imath_*$, ou ainda, $\imath_*$ é injetivo. **(c.q.d)**

Proposição 2.29. *Sejam X e Y conexos por caminhos. Se $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$ e $g : (X, x_0) \to (Y, g(x_0))$ são funções contínuas homotópicas e $\overline{\gamma} : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, g(x_0))$ é um isomorfismo definido como na Proposição 2.14 , então é comutativo o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[dd, "\overline{\gamma}"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, g(x_0))
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Seja $H : I \times X \to Y$ uma homotopia entre f e g. Tome $a : I \to X$ um caminho fechado com base em x_0. Defina a aplicação $G : I \times I \to Y$ pondo $G(s, t) = (H(a(s), t)$. Note que $G(s, 0) = H(a(s), 0) = f(a(s)) = (f \circ a)(s)$, $G(s, 1) = H(a(s), 1) = g(a(s)) = (g \circ a)(s)$ e $G(0, t) = H(a(0), t) = H(a(1), t) = G(1, t)$, para quaisquer $s, t \in I$. Portanto, G é uma homotopia livre entre $f \circ a$ e $f \circ b$. Pela Proposição 2.16 na página 28, existe um caminho $c : I \to Y$, ligando $f(x_0)$ a $g(x_0)$, tal que $f \circ a \cong c(f \circ b)c^{-1}$. Pondo $\gamma = [c]$, obtêm-se $\overline{\gamma}(f_*([a])) = \gamma[f \circ a]\gamma^{-1} = [g \circ a] = g_*([a])$ **(c.q.d)**

A ideia de que o grupo fundamental consiste em um invariante homotópico fica melhor entendida pela proposição a seguir.

Teorema 2.30. *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos. Se $f : X \to Y$ é uma equivalência homotópica entre X e Y, então $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja g um inverso homotópico de f. Considere $x_0 \in X$ ponto base de X. Sejam $x_1 = g(f(x_0))$ e $f^1_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(Y, f(x_1))$ o homomorfismo induzido por f em (X, x_1). Se c é um caminho ligando x_1 a x_0, d é um caminho ligando $f(x_1)$ a $f(x_0)$, $\gamma = [c]$ e $\delta = [d]$, então é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\overline{\gamma}"'] & \pi_1(Y,f(x_0)) \arrow[d, "\overline{\delta}"] \arrow[dl, "g_*"'] \\
\pi_1(X,x_1) \arrow[r, "f^1_*"'] & \pi_1(Y,f(x_1))
\end{tikzcd}$$

De fato, como $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, a proposição anterior nos dá $(g \circ f)_* \simeq \overline{\gamma} \circ (\mathrm{id}_X)_*$, isto é, $g_* \circ f_* = \overline{\gamma}$. Sendo $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, segue, pelo mesmo motivo, que $f^1_* \circ g_* = \overline{\delta}$. Isso mostra a comutatividade do diagrama.

Agora, de $g_* \circ f_* = \overline{\gamma}$ e de $\overline{\gamma}$ ser um isomorfismo, concluímos que g_* é sobrejetiva. Da mesma forma, a igualdade $f^1_* \circ g_* = \overline{\delta}$ implica g_* ser injetiva. Portanto g_* é um isomorfismo. Por conseguinte, f_* e f^1_* também o são. **(c.q.d)**

Corolário 2.31. *Se X e Y são conexos por caminhos e têm o mesmo tipo de homotopia, então $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*

Corolário 2.32. *Todo espaço contrátil é simplesmente conexo.*

Corolário 2.33. $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$.

Demonstração: Segue do teorema acima e do Exemplo 1.22 na página 13. **(c.q.d)**

O Teorema 1.28 na página 15, juntamente com o grupo fundamental, possui uma consequência interessante ao estudo de homotopias, no sentido que permite determinar quando duas funções dadas de um espaço em outro são homotópicas. Essa noção fica melhor estabelecida por meio do teorema abaixo.

Teorema 2.34. *Se $h : S^1 \to Y$ é contínua e homotópica a uma constante, então h_* é o homomorfismo nulo.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.28 na página 15, existe $\overline{h} : D^2 \to Y$ extensão de h ao disco fechado D^2. Seja $\imath : S^1 \to B^2$ a inclusão. Sejam $x_0 \in S^1$ ponto base e $y_0 = h(x_0)$. Passando-se ao grupo fundamental, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1,x_0) \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "\imath_*"'] & & \pi_1(Y,y_0) \\
& \pi_1(D^2,x_0) \arrow[ur, "\overline{h}_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Sendo D^2 simplesmente conexo, deve ser $\imath_*$ o homomorfismo nulo. Portanto $h_* = \overline{h}_* \circ \imath_*$ também o é. **(c.q.d)**

2.6 Grupo Fundamental do Círculo

A partir de agora, nosso intuito é de calcular o grupo fundamental do círculo S^1. Desse resultado, decorrerão vários teoremas importantes e não triviais. Esse fato ilustra a importância das ideias estabelecidas até aqui.

O cálculo será feito da maneira mais elementar possível. O estudo da noção de espaços de recobrimento, do qual trataremos no Capítulo 4, tornaria a demonstração muito mais rápida, porém faria-nos perder o caráter elementar que buscamos nessa seção. Na realidade, todos os conceitos que envolvem espaço de recobrimento tentam, de certa forma, generalizar as ideias que estabeleceremos aqui.

Considere a aplicação exponencial $\psi : \mathbb{R} \to S^1$, dada por $\psi(t) = e^{it}$. Estamos, evidentemente, pensando em S^1 como sendo o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo um. Dados $t, t' \in \mathbb{R}$, tem-se $\psi(t + t') = e^{i(t+t')} = e^{it+it'} = e^{it}e^{it'} = \psi(t)\psi(t')$. Isso significa que ψ é um homomorfismo sobrejetivo entre o grupo aditivo dos números reais e o grupo multiplicativo S^1.

O núcleo de ψ é o grupo $2\pi\mathbb{Z}$. Além disso, a imagem inversa de um ponto $w \in S^1$ por ψ é $\psi^{-1}(\{w\}) = \{t + 2k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}\}$, em que $t \in \mathbb{R}$ é qualquer número tal que $\psi(t) = w$. Do ponto de vista geométrico, t é uma determinação, em radianos, do ângulo entre w e o eixo real, ou seja, t é um argumento de w. Quando $t \in (-\pi, \pi]$, diz-se que t é o argumento principal de w.

Proposição 2.35. *Para todo $t \in \mathbb{R}$, a restrição $\psi_t = \psi|(t, t + 2\pi)$ é um homeomorfismo de $(t, t + 2\pi)$ sobre $S^1 \setminus \{\psi(t)\}$.*

Demonstração: É claro que ψ_t é uma bijeção contínua. Seja $p = \psi(t)$. Vamos mostrar que $\psi_t^{-1} : S^1 \setminus \{p\} \to (t, t + 2\pi)$ é contínua. Para isso, tome uma sequência de pontos $y_n \in S^1 \setminus \{p\}$ tal que $y_n \longrightarrow q \in S^1 \setminus \{p\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha $s_n \in (t, t + 2\pi)$ tal que $\psi_t(s_n) = y_n$. Tem-se $\psi_t(s_n) \longrightarrow q$. O ponto t não pode ser limite de nenhuma subsequência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pois, caso contrário, seria $\psi_t(s_n) \longrightarrow \psi_t(t) = p$, o que não ocorre. Logo, qualquer limite de uma subsequência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve ser um número $b \in (t, t + 2\pi)$ tal que, em virtude da continuidade de ψ, satisfaz $\psi_t(b) = q$. Como ψ_t é injetiva, vê-se que b é o único valor de aderência de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja, $s_n \longrightarrow b$. Em resumo, mostramos que $s_n = \psi_t^{-1}(y_n) \longrightarrow b = \psi_t^{-1}(q)$, donde segue que ψ_t^{-1} é contínua, e assim ψ_t é homeomorfismo. **(c.q.d)**

Vejamos, agora, uma relação entre a aplicação ψ e caminhos $a : I \to S^1$ em S^1. Mais precisamente, mostraremos que todo caminho desse tipo pode ser estendido, sobre certas condições, a um caminho $\tilde{a} : I \to \mathbb{R}$, chamado o *seu levantamento*, ou, geometricamente, a *função ângulo* de a. Façamos isso para caminhos definidos em qualquer compacto $J = [c, d]$.

Proposição 2.36. *Sejam $J = [c, d]$ um intervalo compacto, $a : J \to S^1$ um caminho e $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a(c) = \psi(t_1)$. Existe um único caminho $\tilde{a} : J \to \mathbb{R}$, com ponto inicial t_1, tal que $a = \psi \circ \tilde{a}$.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\ {[c,d]} \arrow[ur, "\tilde{a}"] \arrow[r, "a"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Demonstração: Suponha, primeiramente, que a é não sobrejetivo. Digamos $y \in S^1 \setminus a(J)$. Sendo $a(c) \neq y$, deve existir um único $x \in \psi^{-1}(\{y\})$ tal que $t_1 \in (x, x + 2\pi)$.

Pela proposição 2.8, $\psi_x = \psi|(x, x+2\pi)$ é um homeomorfismo sobre $S^1 \setminus \{y\}$. Portanto $\tilde{a} = \psi_x^{-1} \circ a$ é uma função desejada, nesse caso.

Consideremos, agora, o caso em que a é sobrejetivo. Nesse caso, a continuidade uniforme de a nos fornece uma decomposição de J em intervalos compactos justapostos $J = J_1 \cup \cdots \cup J_k$, cada um dos quais com um extremo em comum, de modo que $a(J_i) \neq S^1$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Pelo caso anterior, segue que a proposição é válida para as restrições $a_i = a|J_i$. Escolhemos, então, um caminho $\tilde{a}_1 : J_1 \to \mathbb{R}$ de modo que $\tilde{a}_1(c) = t_1$ e $a_1 = \psi \circ \tilde{a}_1$. Agora, para cada $i \in \{2, \ldots, k\}$, escrevemos $\{t_i\} = J_i \cap J_{i-1}$ e escolhemos caminhos $\tilde{a}_i : J_i \to \mathbb{R}$ tais que $\tilde{a}_i(t_i) = \tilde{a}_{i-1}(t_i)$ e $a_i = \psi \circ \tilde{a}_i$. Finalmente, definimos $\tilde{a} : J \to \mathbb{R}$ pondo $\tilde{a}|J_i = \tilde{a}_i$, a qual cumpre, evidentemente, a condição exigida.

Resta mostrar a unicidade de a. Com efeito, suponha que $\tilde{a}, b : J \to \mathbb{R}$ são tais que $\psi \circ \tilde{a} = \psi \circ b$ e $\tilde{a}(c) = b(c)$. Isso significa que $\tilde{a}(s)$ e $b(s)$ são ambos argumentos de $e^{i\tilde{a}(s)} = e^{ib(s)}$, para todo $s \in J$, ou seja, $\tilde{a}(s) - b(s)$ é sempre um múltiplo de 2π. Portanto, a função $f : J \to \mathbb{Z}$ dada por $f(s) = \dfrac{\tilde{a}(s) - b(s)}{2\pi}$ está bem definida e é contínua. Pelo Teorema do valor intermediário, e sendo $f(s) \in \mathbb{Z}$, para todo $s \in J$, segue que $f(J)$ é um ponto, isto é, f é constante. Daí, e da hipótese de $\tilde{a}(c) = b(c)$, vem que f é identicamente nula e então $\tilde{a} = b$. **(c.q.d)**

Conforme dito anteriormente, chamaremos $\tilde{a}$ uma *função ângulo* de a. Tal nome justifica-se pelo fato geométrico já observado de $\tilde{a}(s)$ ser uma determinação do ângulo com que $a(s)$ faz com o eixo real. A função ângulo se altera conforme alteramos a escolha do ponto t_1. Entretanto, essa alternância é periódica, pois se uma função-ângulo tem início num ponto t_1, então as demais devem iniciar em pontos da forma $t_1 + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Consequentemente, toda função ângulo de a tem a forma $\widehat{a} = \tilde{a} + 2k\pi$.

Feitas essas considerações, estamos prontos para mostrar que $\pi_1(S^1)$ é cíclico infinito. A ideia é simples: a cada caminho fechado $a : I \to S^1$, vamos associar um número inteiro $\eta(a)$, chamado o seu *grau*, que corresponde ao número líquido de voltas que o caminho a dá em torno de S^1. Por número líquido, entendemos como a diferença entre número de voltas dadas por a no sentido anti-horário pelo número de voltas dadas no sentido horário, isto é, o número de voltas orientadas positivamente menos o número de voltas orientadas negativamente. Mostraremos que a correspondência $a \mapsto \eta(a)$ está bem definida no conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados, e que define um isomorfismo de $\pi_1(S^1)$ sobre $\mathbb{Z}$. Continuaremos indicando por $\psi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação exponencial $\psi(t) = e^{it}$.

Teorema 2.37. *O grupo fundamental do círculo é cíclico infinito.*

Demonstração: Dado um caminho fechado $a : I \to S^1$, defina $\eta(a) = \dfrac{\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)}{2\pi}$, em que $\tilde{a}$ é uma função ângulo de a. Diz-se que $\eta(a)$ é o *grau* do caminho a. Note que, sendo a fechado, $\eta(a)$ é um número inteiro. Além disso, $\eta(a)$ não depende da função ângulo escolhida para a, já que duas funções-ângulo quaisquer diferem sempre de um múltiplo de 2π.

Mostremos que η pode ser definida, sem ambiguidade, em $\pi_1(S^1)$. Para isso, suponha $a \cong b$. Escolha $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \mathbb{R}$ impondo que $\tilde{a}(0) = \tilde{b}(0)$. Isso pode ser feito em virtude de que $a(0) = b(0)$ (por serem a e b homotópicos), e da Proposição 2.9.

No caso particular em que $a(s)$ e $b(s)$ nunca são pontos antípodas, isto é, $|a(s) - b(s)| < 2$ para todo $s \in I$, vê-se que $|\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| < \pi$, pois, caso contrário, existiria, pelo teorema do valor intermediário aplicado a $|\tilde{a} - \tilde{b}|$ e do fato de $\tilde{a}(0) - \tilde{b}(0) = 0$, um ponto $s \in I$ tal que $|\tilde{a}(s) - \tilde{b}(s)| = \pi$, ou seja, $a(s)$ e $b(s)$ seriam antípodas, uma contradição. Por outro lado, $a(1) = b(1)$ implica $|\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)|$ ser múltiplo de 2π. Logo, deve ser $|\tilde{a}(1) - \tilde{b}(1)| = 0$, isto é, $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$, ou seja, $\eta(a) = \eta(b)$.

O caso geral reduz-se a esse. De fato, seja H uma homotopia entre a e b. A continuidade uniforme de H nos fornece um $\delta > 0$ para o qual $t, t' \in I$, $|t - t'| < \delta \Rightarrow |H(s,t) - H(s,t')| < 2$, para todo $s \in I$. Tomando pontos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, tais que $t_j - t_{j-1} < \delta$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, e pondo $a_0 = a$, $a_j(s) = H(s, t_j)$ e $a_k = b$, obtemos caminhos fechados $a_j : I \to S^n$ tais que $|a_{j-1}(s) - a_j(s)| < 2$ para todo $s \in I$. Então, pelo caso acima mencionado, tem-se $\eta(a) = \eta(a_1) = \cdots = \eta(a_{k-1}) = \eta(b)$.

Obtemos, assim, que a função $\eta : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$ dada por $\eta([a]) = \eta(a)$ está bem definida, pois não depende do representante $a : I \to S^1$ que se tome.

Sejam, agora, $a, b : I \to S^1$ caminhos fechados com o mesmo ponto base. Afirmamos que $\eta(ab) = \eta(a) + \eta(b)$. Com efeito, escolha $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \mathbb{R}$ funções-ângulo para a e b, respectivamente, de forma que $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(0)$. Então $\tilde{a}\tilde{b} : I \to \mathbb{R}$ está bem definido e é uma função ângulo de ab. De fato,

$$(\psi \circ \tilde{a}\tilde{b})(t) = \begin{cases} \psi(\tilde{a}(2t)) = a(2t), & t \in [0; 1/2] \\ \psi(\tilde{b}(2t-1) = b(2t-1), & t \in [1/2; 1] \end{cases} = ab(t).$$

Por conseguinte,

$$\eta(ab) = \frac{\tilde{a}\tilde{b}(1) - \tilde{a}\tilde{b}(0)}{2\pi} = \frac{\tilde{b}(1) - \tilde{a}(0)}{2\pi} = \frac{(\tilde{b}(1) - \tilde{b}(0)) + (\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0))}{2\pi} = \eta(a) + \eta(b).$$

Isso significa que η é um homomorfismo de grupos.

Suponha que $\eta(a) = 0$, para algum caminho fechado $a : I \to S^1$. Isso implica $\tilde{a}(0) = \tilde{a}(1)$, seja qual for a função ângulo $\tilde{a}$ que se tome. A aplicação $H : I \times I \to \mathbb{R}$ dada por $H(s,t) = (1-t)\tilde{a}(s) + t\tilde{a}(0)$ é, como se vê facilmente, uma homotopia entre $\tilde{a}$ e $e_{\tilde{a}(0)}$. Finalmente, a função $K : I \times I \to S^1$ dada por $K = \psi \circ H$ nos dá uma homotopia entre a e o caminho constante $e_{a(0)}$. Segue que $[a]$ é a classe nula, ou seja, o núcleo de η é trivial, ou ainda, η é injetivo.

Finalmente, tome $q \in S^1$ e $n \in \mathbb{Z}$. Seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(y) = q$ e considere o caminho fechado $a : I \to S^n$ dado por $a(s) = e^{i(y + 2n\pi s)}$. Note que a tem base em q e $\tilde{a}(s) = y + 2n\pi s$ é uma de suas funções-ângulo. Portanto $\eta(s) = \dfrac{\tilde{a}(1) - \tilde{a}(0)}{2\pi} = n$, isto é, η é sobrejetivo. **(c.q.d)**

Todos os resultados que se seguem são consequências diretas do isomorfismo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ acima. O Corolário abaixo fará uso do fato de que a esfera S^n é simplesmente conexa, sempre que $n \geq 2$. Isso será devidamente demonstrado no Capítulo 3 (veja Exemplo 3.16 na página 51).

Corolário 2.38. *Para todo $n \neq 2$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^2$ não são homeomorfos.*

Demonstração: Se $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ fossem homeomorfos, então $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ também o seriam. Mas isso é impossível, porque $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é conexo por caminhos, mas $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ não. Tome, agora, $n > 2$. Suponha que exista um homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. Deve ser, então, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homeomorfo a $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Evidentemente, esse último também é homeomorfo a $Z = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pelo Exemplo 1.22 na página 13, sabemos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e S^{n-1} têm o mesmo tipo de homotopia. Portanto $\pi_1(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^{k-1})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Isso mostra que $\pi_1(X) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $n > 2$, então $\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^{n-1}) \cong \{0\} \neq \mathbb{Z} \cong \pi_1(X)$. Absurdo, porque X e Z serem homeomorfos implica $\pi_1(X) \cong \pi_1(Z)$. Segue que X e Z não podem ser homeomorfos, logo f não pode existir. **(c.q.d)**

Corolário 2.39. *S^1 não é contrátil.*

Demonstração: Se S^1 fosse contrátil, então seria $\pi_1(S^1) \cong \{0\}$, pelo Corolário 2.32. O Teorema 2.37 garante que isso não ocorre. **(c.q.d)**

Teorema 2.40 (Brouwer)**.** *Toda função contínua $f : D^2 \to D^2$ possui um ponto fixo.*

Demonstração 01: Invocando-se o Teorema 1.36 na página 17, basta mostrarmos que S^1 não é um retrato de D^2. Com efeito, se fosse assim, então, pela Proposição 2.28 na página 32, o homomorfismo $\imath_*$, induzido pela inclusão $\imath : S^1 \to D^2$, seria injetivo. Mas $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ e D^2 é simplesmente conexa, logo $\imath_*$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}$ sobre o grupo trivial $\{0\}$, o qual não pode ser injetivo.

Demonstração 02: Segue diretamente do Corolário 2.39 e da equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (3) do Teorema 1.36 na página 17. **(c.q.d)**

Teorema 2.41. *Se $f : S^1 \to S^1$ é contínua e homotópica a uma constante, então existe $z \in S^1$ tal que $f(-z) = f(z)$.*

Demonstração: Seja $\psi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação exponencial dada por $\psi(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)$ e seja $a : I \to S^1$ a restrição $\psi|I$. Então $b = f \circ a$ é um caminho em S^1 homotópico a uma constante, logo $[b] = \epsilon_{x_0}$, para algum $x_0 \in S^1$. Seja $\tilde{b} : I \to \mathbb{R}$ uma função-ângulo para b. Tem-se $0 = \eta(b) = (\tilde{b}(0) - \tilde{b}(1))/2\pi$, ou seja, $\tilde{b}(0) = \tilde{b}(1)$. Sendo $\tilde{b}$ um caminho fechado, a Proposição 2.22 na página 30 garante a existência de $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $\tilde{f} \circ a = \tilde{b}$. Daí, segue que $\psi \circ \tilde{f} \circ a = \psi \circ \tilde{b} = b = f \circ a$. Mas a é sobrejetivo, logo $\psi \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\tilde{b}"] \arrow[d, "a"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\tilde{f}"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Se $\tilde{f}$ assume o mesmo valor em um par de antípodas z_0 e $-z_0$, o teorema está provado. Caso isso não ocorra, então a função $h : S^1 \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)$ seria contínua e tal que $h(z_0) = -h(-z_0)$. Em virtude da conexidade de S^1, deve existir $z \in S^1$ tal que $h(z) = 0$, isto é, $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(-z)$, ou ainda, $f(z) = f(-z)$. **(c.q.d)**

Corolário 2.42 (Da Demonstração)**.** *A fim de que uma aplicação contínua $f : S^1 \to S^1$ seja homotópica a uma constante, é necessário e suficiente que exista $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f = \psi \circ \tilde{f}$.*

Demonstração: O primeiro parágrafo da demonstração do teorema acima garante que a condição é necessária. Reciprocamente, suponha $\tilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f = \psi \circ \tilde{f}$. Como $\mathbb{R}$ é contrátil, tem-se $\tilde{f}$ homotópica a uma constante. Portanto f também o é. **(c.q.d)**

Teorema 2.43 (Borsuk-Ulam)**.** *Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração: Suponha que $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua e $f(x) \neq f(-x)$, para todo $x \in S^2$. Defina $g : S^2 \to S^1$ pondo $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$. Como se vê facilmente, g é uma função contínua e ímpar, ou seja, $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in S^2$. Restringindo-se g ao equador $E = \{(x, y, z) \in S^2;\ \ z = 0\}$, obtemos uma função $h = g|E : E \to S^1$ contínua e ímpar.

Identificando-se o equador E com o círculo S^1, podemos considerar $h : S^1 \to S^1$. Como h estende-se a toda esfera S^2, em particular estende-se ao hemisfério $H = \{(x, y, z) \in S^2;\ \ z \geq 0\}$, o qual é um conjunto contrátil, pois é homeomorfo ao disco $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2;\ \ |x| = 1\}$. Segue, do Teorema 1.28 na página 15, que h é homotópica a uma constante. Pelo Teorema 2.41, existe $x \in S^1$ tal que $h(x) = h(-x)$. Mas isso não ocorre, pois h é ímpar. **(c.q.d)**

Corolário 2.44. *S^2 não é homeomorfo a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}^2$.*

Tanto o Teorema do ponto fixo de Brouwer quanto o teorema de Borsuk-Ulam são válidos para dimensões maiores, e podem ser demonstrados com maior generalidade por meio do estudo da homologia simplicial (veja [**?**], páginas 114 e 176).

Existe uma interpretação curiosa do Teorema de Borsuk-Ulam, que afirma que a cada instante existem, sobre a superfície da terra, dois pontos diametralmente opostos nos quais a temperatura e a pressão atmosférica coincidem.

Teorema 2.45 (Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui uma raiz complexa.*

Demonstração: Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ um polinômio de grau $n > 0$. Sem perda de generalidade, suponha $a_n = 1$. Suponha que $p(z)$ não possui raiz complexa. Então, para cada $r \geq 0$, o caminho $a_r(s) = \dfrac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}$ é fechado em $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, com base no ponto 1. Para cada $r \geq 0$, a aplicação $H_r : I^2 \to S^1$, $H(s, t) = a_{tr}(s)$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos fechados a_r e $a_0 = e_1$, com base no ponto 1. Portanto $[a_r] = 0$ para todo $r \geq 0$. Tome $r > 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. Como $r > 1$, obtemos que $r^{k-1} < r^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, quando $|z| = r$, tem-se

$$|z|^n = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)|z^n| \geq |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|.$$

Por conseguinte, o polinômio $p_t(z) = z^n + t(a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1})$ não possui raízes no círculo $|z| = r$, sempre que $t \in I$. Dessa forma, pondo

$$F(s, t) = \frac{p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi i s})/p_t(r)|},$$

vê-se que F é uma homotopia de caminhos entre a_r e $b(s) = e^{2\pi i n s}$. Se η é a função grau que define o isomorfismo $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, então $0 = \eta(a_0) = \eta(a_r) = \eta(b) = n$, pois $a_0 \cong a_r \cong b$ e η consiste em determinar o número líquido de voltas de um caminho fechado em torno do ponto base. Portanto, $n = 0$, donde segue que p é constante. Contradição. **(c.q.d)**

Corolário 2.46. *Toda função polinomial de grau $n > 0$ em $\mathbb{C}$ é sobrejetiva.*

Proposição 2.47. *Se X e Y são espaços conexos por caminhos, então $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Demonstração: Sejam $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Escreva $Z = X \times Y$ e $z_0 = (x_0, y_0) \in Z$. Consideremos $p : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ e $q : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ as projeções naturais. Um caminho fechado $a : I \to Z$, com base em z_0, é da forma $a(s) = (a_1(s), a_2(s))$, em que $a_1 = p \circ a : I \to X$ é fechado com base em x_0 e $a_2 = q \circ a : I \to Y$ é fechado com base em y_0. Definimos $\varphi : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(y, y_0)$ pondo $\varphi(\alpha) = (p_*(\alpha), q_*(\alpha))$. Se $H : a \cong a'$, em que $a'(s) = (a'_1(s), a'_2(s))$, então as homotopias $K_1 = p \circ H : a_1 \cong a'_1$ e $K_2 = q \circ H : a_2 \cong a'_2$ nos dão uma homotopia $K : I^2 \to X \times Y$ entre $\varphi([a])$ e $\varphi([a'])$, a saber, $K(x,t) = (K_1(x,t), K_2(x,t))$. Segue que φ está bem definida e, evidentemente, é um isomorfismo de grupos. **(c.q.d)**

Corolário 2.48. *O grupo fundamental do toro $S^1 \times S^1$ é o produto de dois grupos cíclicos infinitos.*

Demonstração: Com efeito, $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. **(c.q.d)**

2.7 Grupos Fundamentais Abelianos

Já sabemos que se $\pi_1(X, x_0)$ for abeliano, para algum $x_0 \in X$, com X espaço conexo por caminhos, então $\pi_1(X, x)$ é abeliano para todo $x \in X$. Mostraremos, agora, com auxílio do Teorema 2.16 na página 28 e seus corolários, que se o grupo $\pi_1(X)$ for abeliano, então ele pode ser considerado como o grupo das classes de homotopias livres de caminhos fechados em X.

Teorema 2.49. *Seja X conexo por caminhos. Se $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, então $\pi_1(X, x_0)$ está em bijeção com as classes de homotopias livres de caminhos fechados em X.*

Demonstração: Dado $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, seja $\Omega(\alpha)$ a classe de homotopia livre que contém α. Tal Ω está bem definida, porque dois caminhos fechados e homotópicos com extremos fixos são sempre livremente homotópicos. Além disso, se $[b] = \beta$ é uma classe de homotopia livre de caminhos fechados com base num ponto $x_1 \in X$, então tomando-se $a : I \to X$ caminho ligando x_0 a x_1, tem-se $c = (ab)a^{-1}$ livremente homotópico a b, sendo c fechado com ponto base em x_0. Finalmente, se $\Omega(\alpha) = \Omega(\beta)$ para certos $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$, então, pelo Corolário 2.18 na página 29, α e β são conjugados no grupo abeliano $\pi_1(X, x_0)$, donde segue que $\alpha = \beta$. Portanto, Ω é bijeção. **(c.q.d)**

O grupo fundamental do círculo foi calculado da maneira mais elementar possível. Vejamos, a seguir, uma demonstração direta de que tal grupo é abeliano. Se tivéssemos feito isso desde o início, poderíamos ter calculado $\pi_1(S^1)$ simplesmente olhando-se para as classes de homotopias livres de caminhos em S^1, conforme Teorema acima. Isso tornaria todo o cálculo feito mais simples, uma vez que toda homotopia de caminhos fechados é uma homotopia livre.

Definição 2.50. *Uma* multiplicação *num espaço topológico X é uma função $m : X \times X \to X$. Denota-se $m(x,y) = x \cdot y$, para cada $x, y \in X$. Um ponto $e \in X$ chama-se um* elemento neutro *de m se, e somente se, $e \cdot x = x = x \cdot e$, para todo $x \in X$.*

Definição 2.51. *Seja X um espaço topológico dotado de multiplicação contínua com elemento neutro. Sejam $a, b : I \to X$ caminhos. Definimos o caminho-produto $a \cdot b : I \to X$ pondo $(a \cdot b)(s) = a(s) \cdot b(s)$.*

Observe que $a \cdot b$ consiste na restrição da multiplicação $m : X \times X \to X$ ao subconjunto compacto $a(I) \times b(I)$, logo é de fato um caminho em X. Se a e b são fechados com base no elemento neutro e, então $a \cdot b$ também o é.

Proposição 2.52. *Seja X um espaço munido de multiplicação contínua com elemento neutro e. Se $a, b, a', b' : I \to X$ são fechados, com base no elemento neutro e, e tais que $H : a \cong a'$ e $G : b \cong b'$, então $a \cdot b \cong a' \cdot b'$.*

Demonstração: Defina $F : I \times I \to X$ por $F(s,t) = H(s,t) \cdot G(s,t)$. F é evidentemente contínua, como a restrição da multiplicação de X ao compacto $H(I \times I) \times G(I \times I)$. Além disso, $F(s,0) = H(s,0) \cdot G(s,0) = a(s) \cdot b(s) = (a \cdot b)(s)$. Analogamente, $F(s,1) = (a' \cdot b')(s)$. Também, $F(0,t) = H(0,t) \cdot G(0,t) = e \cdot e = e = (a \cdot b)(0) = (a' \cdot b')(0) = (a' \cdot b')(1) = (a \cdot b)(1) = e = e \cdot e = H(1,t) \cdot G(1,t) = F(1,t)$. Por conseguinte, F é uma homotopia de caminhos entre $a \cdot b$ e $a' \cdot b'$. **(c.q.d)**

Da proposição acima, obtemos uma nova operação no conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados com base no elemento neutro $\pi_1(X, e)$: basta definir $\alpha \cdot \beta = [a \cdot b]$, sempre que $\alpha = [a]$ e $\beta = [b]$. Mostraremos, a seguir, um fato curioso: a existência de uma multiplicação contínua com elemento neutro e em X obriga que o grupo fundamental $\pi_1(X, e)$ seja abeliano. Isso nos conduzirá também a uma relação entre o produto de caminhos do grupo fundamental e o produto induzido pela multiplicação.

Proposição 2.53. *Seja X espaço topológico munido de multiplicação contínua com elemento neutro e e sejam $a, b : I \to X$ caminhos fechados com base em e. Então $ae_e \cdot e_e b = ab$ e $e_e a \cdot be_e = ba$.*

Demonstração: Sejam $s \in [0, 1/2]$ e $s' \in [1/2, 1]$. Tem-se $(ae_e \cdot e_e b)(s) = ae_e(s) \cdot e_e b(s) = a(2s) \cdot e_e(2s) = a(2s) \cdot e = a(2s) = ab(s)$. Além disso, $(ae_e \cdot e_e b)(s') = ae_e(s') \cdot e_e b(s') = e_e(2s'-1) \cdot b(2s'-1) = e \cdot b(2s'-1) = b(2s'-1) = ab(s')$. Isso mostra que $ae_e \cdot e_e b = ab$. A outra igualdade é provada de modo análogo. **(c.q.d)**

Teorema 2.54. *Seja X espaço dotado de multiplicação com elemento neutro e. Então $\pi_1(X, e)$ é abeliano e $\alpha\beta = \alpha \cdot \beta$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \pi_1(X, e)$.*

Demonstração: Dados $a, b : I \to X$ fechados com ponto base em e, tem-se

$$ab = ae_e \cdot e_e b \cong a \cdot b \cong e_e a \cdot be_e = ba,$$

donde segue o resultado. **(c.q.d)**

Corolário 2.55. *O grupo fundamental de um grupo topológico é abeliano.*

Como S^1 é um grupo topológico, com a operação multiplicação de números complexos, segue-se do corolário acima que $\pi_1(S^1)$ é abeliano, como já sabíamos.

2.8 Consequências de $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ à Integração complexa

Todos os conceitos abordados até aqui mostram-se de extrema importância à outras áreas da Matemática. Uma aplicação bem interessante do estudo de homotopias de caminhos é a teoria de integração complexa. Em particular, obtêm-se com elegância e simplicidade os Teoremas de integração de Cauchy. Além disso, essa ideia nos permite caracterizar de uma forma bastante calculável os conjuntos simplesmente conexos do plano $\mathbb{R}^2$. Ideias muito parecidas ocorrem, também, no estudo das integrais curvilíneas, em Análise Vetorial.

Os teoremas que discutiremos a seguir tem âmbito no plano $\mathbb{R}^2$. Para transportar tal problema a um ambiente mais conhecido, façamos assim: dado um caminho fechado $a : I \to \mathbb{R}^2$ e um ponto $z_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus a(I)$, defina o caminho $a_1 : I \to S^1$ pondo $a_1(t) = (a(t) - z_0)/|a(t) - z_0|$, o qual é evidentemente fechado, em virtude de a o ser. Como vimos no Teorema 2.37 na página 35, o grau do caminho a_1 é o número $\eta(a_1) = (\tilde{a_1}(1) - \tilde{a_1}(0))/2\pi$, em que $\tilde{a_1}$ é uma função-ângulo de a_1. Sabemos que $\eta(a_1)$ é sempre um número inteiro e que não depende da função-ângulo $\tilde{a_1}$ escolhida. Para tornar a notação mais conveniente, passaremos a escrever $\eta(a, z_0)$ em vez de $\eta(a_1)$, e chamaremos tal número o *índice de a com respeito a z_0*.

Em virtude do Teorema 2.37 na página 35, segue imediatamente que:

1. Se a^{-1} é o caminho inverso de a, então $\eta(a, z_0) = -\eta(a^{-1}, z_0)$;
2. Se a é livremente homotópico a b, então $\eta(a, z_0) = \eta(b, z_0)$.
3. Se $z \in \mathbb{R}^2 \setminus a(I)$ pertence à mesma componente conexa por caminhos de z_0, então $\eta(a, z_0) = \eta(a, z)$.

Com efeito, a única afirmação não trivial é a (3). Para verificá-la, convém perceber a igualdade óbvia $\eta(a, z_0) = \eta(a - z_0, (0, 0))$ $(*)$. Se $c : I \to \mathbb{R}^2$ é um caminho ligando z_0 a z, defina $F : I \times I \to \mathbb{R}^2$ pondo $F(s, t) = a(s) - c(t)$. Como se vê imediatamente, F é uma homotopia livre (em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) entre os caminhos $a - z_0$ e $a - z$. O resultado segue-se, portanto, de (2) e de $(*)$.

Um caminho fechado $a : I \to X$ chama-se *simples* quando $a|(0, 1)$ é injetivo, isto é, quando $a(t) = a(s)$ implicar $t = s$, exceto para $t, s \in \{0, 1\}$ (pois a é fechado).

Evidentemente, como o índice de um caminho fechado consiste em contar o número líquido de voltas percorridas no seu traço quando t varia em I, então se z_0 pertence à componente conexa por caminhos limitada de $X = \mathbb{R}^2 \setminus a(I)$ (Teorema da Curva de Jordan), tem-se $|\eta(a, z_0)| = 1$. Por outro lado, mostra-se que se z_0 pertencer à componente conexa por caminhos ilimitada de X, então $\eta(a, z_0) = 0$.

Vejamos como calcular o índice de um caminho fechado sob o ponto de vista do Cálculo Integral. Lembramos, da Análise Complexa, que se $a : I \to \mathbb{C}$ é um caminho de classe C^1, isto é, se a for derivável e sua derivada a' for contínua em todos os pontos de I, então define-se, para uma função complexa f, definida e contínua em $a(I)$, a integral curvilínea de f com respeito a a pondo

$$\int_a f(z)\,dz = \int_0^1 f(a(t))a'(t)\,dt$$

.

Proposição 2.56. *Se a é um caminho de classe C^1 em $\mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C} \setminus a(I)$, então*

$$\eta(a, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_a \frac{\mathrm{dz}}{z - w}$$

.

Demonstração: Seja $a_1 : I \to \mathbb{C}$ o caminho $a_1(t) = (a(t) - w)/r(t)$, em que $r(t) = |a(t) - w|$, e seja $\tilde{a_1}$ uma de suas funções-ângulo. Escreva $b = \tilde{a_1}$. Tem-se $a(t) - w = r(t)e^{ib(t)}$, logo

$$\int_b \frac{dz}{z - w} = \int_0^1 [(r'e^{ib} + irb'e^{ib})/re^{ib}]dt =$$

$$= [\log(r(t)) + ib(t)]|_0^1 = i(b(1) - b(0)) =$$

$$= 2\pi i[b(1) - b(0)]/(2\pi) = 2\pi i \eta(b, w). \quad \textbf{(c.q.d)}$$

Decorre, da proposição acima, o:

Teorema 2.57 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Seja f uma função complexa analítica num conjunto aberto conexo $A \subseteq \mathbb{C}$. Seja a um caminho fechado de classe C^1 em A. Se $w \in A \setminus a(I)$, então*

$$\eta(a, w) \cdot f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_a \frac{f(z)}{z - w} \mathrm{dz}.$$

Capítulo 3

O Teorema de Van-Kampen

Do ponto de vista prático, o cálculo do grupo fundamental de um espaço pode ser bastante complicado. Uma forma de remediar esse problema é buscando-se resultados que permitem simplificar ou algoritmizar as contas envolvidas nesse processo. O Teorema de Seifert Van-Kampen, que trataremos neste capítulo, é uma das ferramentas mais poderosas e úteis existentes para tal finalidade, porque garante a possibilidade de calcular o grupo fundamental de um espaço topológico X a partir dos grupos fundamentais de subespaços conexos por caminhos de X.

Tendo em vista a extrema importância desse resultado, iremos enunciá-lo da forma mais geral possível. Algumas restrições a tal enunciado nos permitirão tratar dos casos mais conhecidos, porém menos abrangentes, de tal teorema. O tratamento pelo qual serão feitas as exposições será inteiramente categórico e funtorial, fato que garantirá a generalidade desejada. Antes de mais nada, façamos uma revisão das ideias algébricas centrais que utilizaremos. Os livros de [10] e [9] contém boas leituras sobre as discussões aqui envolvidas.

3.1 Grupoides e Esqueleto de uma Categoria

Definição 3.1. *Uma Categoria C chama-se um* grupoide *se, e somente se, todo morfismo entre objetos de C é um isomorfismo.*

Noutras palavras, uma categoria C é dita ser um grupoide quando, dados quaisquer objetos x, y de C e qualquer morfismo $f : x \to y$, existir um morfismo $g : y \to x$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_x$.

Exemplo 3.2. Evidentemente, para qualquer espaço topológico X, o grupoide fundamental $\Pi(X)$ (definido no Capítulo 2), quando visto como uma categoria, é um grupoide (conforme exposto na seção anterior). A coleção de todos os grupoides é ainda uma categoria: basta tomar os funtores entre grupoides como sendo os morfismos. Denotaremos essa categoria dos grupoides por $\underline{Gpd}$. A correspondência $X \mapsto \Pi(X)$ define um funtor Π entre a categoria dos espaços topológicos e a categoria dos grupoides, chamado o funtor grupoide fundamental. A cada função contínua $f : X \to Y$ entre espaços topológicos, $\Pi(f)$ é o morfismo induzido por f entre $\Pi(X)$ e $\Pi(Y)$.

Definição 3.3. *Seja C uma categoria. Um esqueleto de C é uma subcategoria que possui um objeto para cada classe de isomorfismo de objetos de C.*

Evidentemente, todo esqueleto de uma categoria C é uma subcategoria plena de C. A noção de esqueleto pode parecer um pouco estranha aos leitores iniciantes, mas ela é extremamente simples e comum em matemática. Por exemplo, quando falamos de um grupo G cíclico infinito, pensamos imediatamente no grupo aditivo dos números inteiros. Isso acontece porque para se entender as propriedades algébricas de G, basta compreender as propriedades algébricas de $\mathbb{Z}$, em virtude do isomorfismo $G \cong \mathbb{Z}$. Portanto, não é necessário preocupar-se em estudar rigorosamente toda a categoria dos grupos, mas sim um esqueleto dela. Essa ideia fica ainda mais clara a partir da proposição que se segue.

Proposição 3.4. *Toda Categoria é equivalente a um de seus esqueletos.*

Demonstração: Seja C uma categoria e S um esqueleto de C. Considere $J : S \to C$ como o funtor inclusão, isto é, $J(x) = x$ e $J(f) = f$ sempre que x for objeto de S e f um morfismo. Vamos mostrar que J é uma equivalência homotópica.

Para cada objeto x em C, definimos $F(x)$ como sendo o único objeto em S que é isomorfo a x. Denotaremos por $\alpha_x : x \to F(x)$ como sendo qualquer isomorfismo entre x e $F(x)$. Quando x é também um objeto de S, tomemos α_x como sendo a identidade. Se $f : x \to y$ é um morfismo em C, declare $F(f) : F(x) \to F(y)$ como $F(f) = \alpha_y \circ f \circ (\alpha_y)^{-1}$. As aplicações $x \mapsto F(x)$ e $f \mapsto F(f)$ definem um funtor $F : C \to S$. Com efeito, é claro que $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$. Dados $f : x \to y$ e $g : y \to z$ morfismos em C, tem-se

$$\begin{aligned} F(g \circ f) = \alpha_z \circ (g \circ f) \circ (\alpha_x)^{-1} &= \alpha_z \circ g \circ ((\alpha_y)^{-1} \circ \alpha_y) \circ f \circ (\alpha_x)^{-1} = \\ &= (\alpha_z \circ g \circ (\alpha_y)^{-1}) \circ (\alpha_y \circ f \circ (\alpha_x)^{-1}) = F(g) \circ F(f). \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que F é um funtor "inverso"de J. Para isso, basta perceber que comutam, para quaisquer $x, y \in \mathrm{obj}(S)$, $f : x \to y$ morfismo, $z, w \in \mathrm{obj}(C)$ e $g : z \to w$ morfismo em C, os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} x = (F \circ J)(x) \arrow[r, "\imath_x"] \arrow[d, "(F\circ J)(f) = f"'] & \mathrm{id}_S(x) = x \arrow[d, "f = \mathrm{id}(f)"] \\ y = (F \circ J)(y) \arrow[r, "\imath_y"] & \mathrm{id}_S(y) = y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (J \circ F)(z) \arrow[r, "(\alpha_z)^{-1}"] \arrow[d, "\alpha_w \circ g \circ (\alpha_z)^{-1}"'] & \mathrm{id}_C(z) = z \arrow[d, "g"] \\ (J \circ F)(w) \arrow[r, "(\alpha_w)^{-1}"] & \mathrm{id}_C(w) = w \end{tikzcd} .$$

De fato, o diagrama da esquerda significa que $F \circ J = \mathrm{id}_S$, e o da direita nos dá $J \circ F \cong \mathrm{id}_C$. A verificação da comutatividade de ambos é imediata. **(c.q.d)**

Se X é um espaço topológico e $x \in X$ é seu ponto base, então podemos considerar $\pi_1(X, x)$ como sendo um grupoide que possui um único elemento. Os morfismos são os elementos do grupo e a composição de morfismos é a multiplicação do grupo. Esse fato será usado no resultado que se segue.

Corolário 3.5. *Seja X um espaço conexo por caminhos. Para todo $x \in X$, a inclusão $\pi_1(X, x) \to \Pi(X)$ é uma equivalência categórica.*

Demonstração: Com efeito, o grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ é um esqueleto de $\Pi(X)$. Isso justifica-se pela igualdade óbvia $\pi_1(X, x) = \mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x, x)$. **(c.q.d)**

Dados S e K esqueletos de uma categoria C, a Proposição 3.4 garante que S é equivalente a C e, também, K é equivalente a C. Portanto, S é equivalente a K. Isso mostra que o esqueleto de uma categoria é único, a menos de isomorfismos. Tendo em mãos essa unicidade, passemos a denotar um esqueleto qualquer de C por $\mathrm{Sk}(C)$.

3.2 O Teorema para Grupoides

Qualquer família $U = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos pode ser considerada como uma categoria cujos objetos são os conjuntos de U e cujos morfismos são as inclusões de conjuntos.

A correspondência $U_\lambda \mapsto \Pi(U_\lambda)$, com $\lambda \in L$, define um funtor $\Pi|U$ entre U e a categoria dos grupoides, o qual chamaremos a restrição de Π a U. Ou seja, $\Pi|U$ é um U-diagrama de grupoides. Esses fatos serão usados a seguir sem maiores comentários.

Definição 3.6. *Uma família de conjuntos $U = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ chama-se fechada para interseções finitas se, para quaisquer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se $U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n} = U_\lambda$, para algum $\lambda \in L$.*

Noutras palavras, U é fechada para interseções finitas se a interseção de quaisquer finitos elementos de U é ainda um elemento de U.

Feitas essas considerações, podemos passar, diretamente, ao teorema principal desse capítulo.

Teorema 3.7 (Van-Kampen)**.** *Sejam X um espaço topológico e $U = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de X por subconjuntos abertos conexos por caminhos. Suponha que U é fechada para interseções finitas. Então $\Pi(X)$ é o limite injetivo do diagrama $\Pi|U$. Simbolicamente, $\Pi(X) \cong \operatorname{colim}_{U_\lambda \in U} \Pi(U_\lambda)$.*

Demonstração: Sejam C um grupoide qualquer e $\eta : \Pi|U \to \underline{C}$ um morfismo entre U-diagramas de grupoides. Devemos mostrar que existe um morfismo $\tilde{\eta} : \Pi(X) \to C$ que faz com que comute o diagrama abaixo, para quaisquer $\lambda, \mu \in L$.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U_\lambda) \arrow[dr, "\Pi(\imath_\lambda)"] \arrow[drr, bend left, "\eta_\lambda"] \arrow[dd, "\imath"'] & & \\
& \Pi(X) \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & C \\
\Pi(U_\mu) \arrow[ur, "\Pi(\imath_\mu)"'] \arrow[urr, bend right, "\eta_\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

Lembramos que $\tilde{\eta}$ deve ser um morfismo de grupoides, ou seja, um funtor entre $\Pi(X)$ e C. Pois bem: dado qualquer objeto $x \in \Pi(X)$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in U_\lambda$. Definimos, então, $\tilde{\eta}(x) = \eta_\lambda(x)$. Suponha que exista $\mu \in L$, com $\mu \neq \lambda$, para o qual $x \in U_\mu$. Então $x \in U_\lambda \cap U_\mu$, que é um objeto de U, por definição, e denotando por $\imath_{\lambda,\mu}$ a inclusão $U_\lambda \cap U_\mu \hookrightarrow X$, obtemos a comutatividade do diagrama que se segue.

$$\begin{tikzcd}
& \Pi(U_\lambda) \arrow[dr, "\pi(\imath_\lambda)"'] \arrow[drr, "\eta_\lambda"] & & \\
\Pi(U_\lambda \cap U_\mu) \arrow[ur, "\Pi(\imath)"] \arrow[rr, "\Pi(\imath_{\lambda,\mu})"'] \arrow[rrr, bend right, "\eta_{\lambda,\mu}"'] & & \Pi(X) \arrow[r, "\tilde{\eta}"'] & C
\end{tikzcd}$$

Com efeito, é evidente a igualdade $\Pi(\imath_\lambda) \circ \Pi(\imath) = \Pi(\imath_{\lambda,\mu})$, em que $\imath : U_{\lambda,\mu} \hookrightarrow U_\lambda$. Também, o fato de $\tilde{\eta} \circ \Pi(\imath_\lambda) = \eta_\lambda$ segue da própria definição de $\tilde{\eta}$. Daí, $\eta_\lambda \circ \Pi(\imath) = (\tilde{\eta} \circ \Pi(\imath_\lambda)) \circ \Pi(\imath) = \tilde{\eta} \circ (\Pi(\imath_\lambda) \circ \Pi(\imath)) = (\tilde{\eta} \circ \Pi(\imath_{\lambda,\mu})) = \eta_{\lambda,\mu}$. Observe que a última igualdade consiste exatamente na definição de $\tilde{\eta}$ nos pontos de $U_\lambda \cap U_\mu$.

Portanto, tem-se $\eta_{\lambda,\mu}(x) = (\eta_\lambda \circ \Pi(\imath))(x) = \eta_\lambda(x)$. Analogamente, verifica-se que $\eta_{\lambda,\mu}(x) = \eta_\mu(x)$. Isso implica $\eta_\lambda(x) = \eta_\mu(x)$. Segue que a definição de $\tilde{\eta}$ não depende do U_λ que se tome na cobertura U, logo $\tilde{\eta}$ está bem definida nos objetos de $\Pi(X)$.

Passemos à definição de $\tilde{\eta}$ nos morfismos em $\Pi(X)$. Para tanto, tome um caminho $a : I \to \Pi(X)$ tal que $a(0) = x$ e $a(1) = y$. Na notação categórica de $\Pi(X)$, isso equivale a dizer que a classe de homotopia de a é um morfismo entre x e y, ou seja, podemos escrever $a : x \to y$.

Suponha, primeiro, que $a(I) \subseteq U_\lambda$, para algum $\lambda \in L$. Nesse caso, definimos $\tilde{\eta}[a] = \eta_\lambda[a]$. Vimos acima que, se $\mu \in L$ é tal que $a(I) \subseteq U_\mu$, então deve ser $\eta_\lambda[a] = \eta_\mu[a]$, logo não há ambiguidade na atuação de $\tilde{\eta}$ neste primeiro caso.

No caso geral, seja tem-se apenas $a(I) \subseteq \Pi(X)$. Como $X = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$, então $I = a^{-1}(\Pi(X)) = \bigcup_{\lambda \in L} a^{-1}(\Pi(U_\lambda))$, ou seja, as imagens inversas por a dos $\Pi(U_\lambda)$, $\lambda \in L$, formam uma cobertura aberta de I.

A compacidade desse último nos dá uma decomposição $I = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cdots \cup [t_n, 1]$ tal que, pondo $0 = t_0$ e $1 = t_{n+1}$, existem $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in L$ tais que $a([t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_{\lambda_j}$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Portanto, para cada j, o caminho $a_j = a|[t_j, t_{j+1}]$ atua em somente um aberto da cobertura U e, além disso, é claro que $[a] = [a_0] \circ [a_1] \circ \ldots \circ [a_n]$. Escreva $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$. Tal conjunto P é uma partição de I com a propriedade de que a imagem, por a, de todo sub-intervalo fechado de I cujos extremos são pontos de P com índices consecutivos está inteiramente contida em algum aberto da cobertura U. Qualquer partição com a propriedade acima será chamada uma *partição boa* do intervalo I referente ao caminho a. Definimos, assim, $\tilde{\eta}[a] = \zeta(a, P) = \eta_{\lambda_0}[a_0] \circ \ldots \circ \eta_{\lambda_n}[a_n] = \tilde{\eta}[a_0] \circ \ldots \circ \tilde{\eta}[a_n]$.

Vamos mostrar que a definição de $\tilde{\eta}$ não depende da partição que se tome em I. De fato, sejam $P = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1\}$ e $P' = \{t'_0 = 0 < t'_1 < t'_2 < \cdots < t'_l < t_{l+1} = 1\}$ partições de I tais que, para cada $(i, j) \in \{0, 1, 2, \ldots, k\} \times \{0, 1, 2, \ldots, l\}$, existem $\lambda_i, \mu_j \in L$ para os quais $a([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{\lambda_i}$ e $a([t'_{j-1}, t'_j]) \subseteq U_{\mu_j}$. Dado um caminho $a : I \to X$, devemos mostrar que $\zeta(a, P) = \zeta(a, P')$.

Para tanto, seja $Q = P \cup P'$. Sendo Q um refinamento de P e P', podemos escrever $Q = \{0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_m < r_{m+1} = 1\}$. Se, para um dado $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, o intervalo $Q_i = [r_i, r_{i+1}]$ for igual a algum subintervalo $P_j = [t_j, t_{j+1}]$ referente a partição P, então é evidente que $Q_i \subseteq U_{\lambda_j}$. O mesmo ocorre se $Q_i = P'_j$, para algum $j \in \{0, 1, \ldots, l\}$. Suponha, agora, que $r_i = t_j$ e $r_{i+1} = t'_{s+1}$. Ora, tem-se, evidentemente, $Q_i = [r_i, r_{i+1}] \subseteq U_{\lambda_i} \cap U_{\mu_s} = U_\lambda$, para algum $\lambda \in L$, pois U é fechada para interseções finitas. Isso mostra que cada subintervalo $[r_i, r_{i+1}]$ de I referente à partição Q está contido em algum aberto da cobertura U. Como $\tilde{\eta}$ não depende do termo de U que se tome, tem-se $\zeta(a, P) = \tilde{\eta}[a|P_0] \circ \tilde{\eta}[a|P_1] \circ \cdots \circ \tilde{\eta}[a|P_k] = \tilde{\eta}[a|Q_0] \circ \tilde{\eta}[a|Q_1] \circ \cdots \circ \tilde{\eta}[a|Q_m] = \zeta(a, Q)$. Analogamente, $\zeta(a, P') = \zeta(a, Q)$, donde $\zeta(a, P) = \zeta(a, P')$, provando, assim, a afirmação.

Resta mostrar que $\tilde{\eta}$ está bem definido nas classes de homotopia de caminhos em X. Para isso, tomemos $H : a \cong b$ homotopia de caminhos $a, b : x \to y$. O lema de Lebesgue, aplicado à cobertura formada pelas imagens inversas dos abertos de U pela homotopia H nos fornece uma decomposição do compacto $I \times I$ como a reunião de sub-retângulos $R_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$, com $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq m$, para certos $k, m \in \mathbb{N}$, de forma que $R_{ij} \subseteq U_\lambda$, para algum $\lambda \in L$. Refinando, se necessário for, as partições $P = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1\}$ e $Q = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m < s_{m+1} = 1\}$ do intervalo I, podemos supor que P e

Q são partições boas de I referentes aos caminhos a e b, respectivamente.

Os caminhos que ligam vértices opostos de qualquer retângulo R_{ij} são homotópicos, em virtude do Exemplo 2.2 na página 23. Uma tal homotopia sempre pode ser estendida para uma homotopia do próprio retângulo, por ser esse um conjunto contrátil. Noutras palavras, denotando ϵ_x^j como a classe de homotopia do caminho constante em x restrita ao intervalo $[s_j, s_{j+1}]$, tem-se $\epsilon_x^j[a_i] = [b_i]\epsilon_y^j$. Sendo as imagens de tais caminhos inteiramente contidas em algum aberto de U, obtemos $\eta(\epsilon_x^j[a_i]) = \eta([b_i]\epsilon_y^j)$, para quaisquer $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq m$ que se tome. Em função disso, concluímos imediatamente que $\tilde{\eta}(\epsilon_x[a]) = \tilde{\eta}([b]\epsilon_y)$, tendo em vista que a definição de $\tilde{\eta}$ depende só da definição de η de cada um dos caminhos a_i e b_j considerados acima. Por outro lado, tem-se

$$\tilde{\eta}(\epsilon_x[a]) = \eta_{\mu_0}(\epsilon_x^0) \circ \cdots \circ \eta_{\mu_m}(\epsilon_x^m) \circ \eta_{\lambda_0}[a_0] \circ \cdots \circ \eta_{\lambda_k}[a_k] = \eta_{\lambda_0}[a_0] \circ \cdots \circ \eta_{\lambda_k}[a_k] = \tilde{\eta}[a],$$

e, analogamente, $\tilde{\eta}(\epsilon_y[b]) = \tilde{\eta}[b]$, donde segue que $\tilde{\eta}[a] = \tilde{\eta}[b]$. **(c.q.d)**

3.3 O Teorema para Grupos Fundamentais

Conforme já mencionado, a versão mais importante do Teorema de Seifert - Van Kampen descreve, no âmbito da teoria dos grupos, o grupo fundamental de um de um espaço conexo por caminhos coberto por subconjuntos conexos por caminhos, em termos dos homomorfismos induzidos pelas inclusões naturais. Existem, na realidade, várias formas equivalentes de enunciá-lo, cada uma das quais utilizando-se de uma linguagem algébrica própria.

A mais apropriada no contexto da Matemática Moderna é a linguagem categórica, da qual trataremos a seguir. Apresentamos, logo em seguida, algumas das formas mais fracas do teorema, juntamente a vários exemplos de utilidade prática nos quais ele se aplica.

Teorema 3.8 (Seifert Van-Kampen)**.** *Seja X um espaço conexo por caminhos e $x_0 \in X$ ponto base. Seja $U = \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ cobertura fechada para interseção finita, formada por conjuntos abertos conexos por caminhos. Suponha que $x_0 \in U_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. O funtor $\pi_1(\_\_, x_0)$, restrito a cada um dos U_λ, fornece um U-diagrama de grupos. O grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ é o colimite desse diagrama.*

Demonstração: Suponha, primeiramente, que a cobertura U é finita. Seja G um grupo qualquer e $\eta : \pi_1|U \to \underline{G}$ um morfismo de U-diagramas de grupos, isto é, uma transformação natural entre $\pi_1|U$ e $\underline{G}$. Para cada $\lambda \in L$, seja $\imath_\lambda : U_\lambda \to X$ a inclusão. Devemos construir um homomorfismo de grupos $\tilde{\eta} : \pi_1(X, x_0) \to G$, único a menos de isomorfismos, de forma que o diagrama seguinte seja comutativo, para quaisquer $\lambda, \mu \in L$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_\lambda, x_0) \arrow[dr, "\pi_1(\imath_\lambda)"] \arrow[drr, bend left, "\eta_\lambda"] \arrow[dd, "\imath_*"'] & & \\
& \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & G \\
\pi_1(U_\mu, x_0) \arrow[ur, "\pi_1(\imath_\mu)"'] \arrow[urr, bend right, "\eta_\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

Como sempre, pensamos G como um grupoide que possui um único objeto, cujos morfismos são os elementos do grupo e cuja composição de morfismos é o produto do grupo. Já vimos que a inclusão $J : \pi_1(X, x_0) \to \Pi(X)$ é uma equivalência categórica, cujo inverso é o funtor $F : \Pi(X) \to \pi_1(X, x_0)$, determinado pelas classes de homotopia dos caminhos em X cujo ponto inicial é x_0, ou seja, caminhos $a_y : x_0 \to y$, em que $y \in X$, com a propriedade de que, quando $x = y$, escolhemos $F([a]) = \epsilon_{x_0}$.

Sendo U finita e fechada para interseções finitas, podemos escolher caminhos $a_y : x_0 \to y$ que moram inteiramente em um dos U_λ, desde que seja $y \in U_\lambda$. De fato, se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in L$ são tais que $y \in U_{\lambda_1}$, …, $y \in U_{\lambda_k}$, e sendo cada um desses conjuntos conexos por caminhos, o caminho a_y tem sua imagem inteiramente contida em $V = U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_k}$. Por hipótese, $V = U_\lambda$, para algum $\lambda \in L$. A partir de agora, sempre que escrevermos $a_y(I) \subseteq U_\lambda$, estamos considerando que este conjunto U_λ é o menor de todos os termos de U que contém a imagem de a_y, ou seja, é a interseção de todos os termos de U que contém a_y.

É imediato que $F \circ J = \mathrm{id}_X$. Cada um dos caminhos a_y, com $a_y(I) \subseteq U_\lambda$, determinam equivalências inversas $F_\lambda : \Pi(U_\lambda) \to \pi_1(U_\lambda, x_0)$ às respectivas inclusões $J_\lambda : \pi_1(U_\lambda, x_0) \to \Pi(U_\lambda)$. Portanto, os funtores

$$\Pi(U_\lambda) \xrightarrow{\quad F_\lambda \quad} \pi_1(U_\lambda, x_0) \xrightarrow{\quad \eta_\lambda \quad} G$$

nos dão um U- diagrama de grupoides $\Pi|U \to \underline{G}$. Pelo Teorema de Van Kampen para grupoides, segue que $\Pi(U_\lambda)$ é o colimite de tal diagrama. Isso significa a existência de uma única transformação natural $\psi : \Pi(X) \to G$ que faz comutar, para todo $\lambda \in L$:

$$\begin{tikzcd}
\Pi(U_\lambda) \arrow[d, "\Pi(\imath_\lambda)"'] \arrow[dr, "\psi_\lambda = \eta_\lambda \circ F_\lambda"] & \\
\Pi(X) \arrow[r, "\psi"'] & G
\end{tikzcd}$$

Finalmente, definimos o homomorfismo de grupos $\tilde{\eta} = \psi \circ J$. Se $\zeta : \pi_1(X, x_0) \to G$ for outra transformação natural que faz comutar o diagrama acima, então $\zeta \circ F : \Pi(X) \to G$, restrita a U_λ é igual a $\eta_\lambda \circ F_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Logo, pela unicidade de ψ, obtemos $\psi = \zeta \circ F$, e assim $\zeta = \psi \circ J = \tilde{\eta}$, donde segue a unicidade de $\tilde{\eta}$.

Provemos o caso geral. Seja S a coleção dos subconjuntos finitos de U que são fechados para interseções finitas. Dado $P \in \mathsf{S}$, escreva U_P para denotar a reunião de todos os conjuntos de U pertencentes a P, isto é, $U_P = \bigcup_{\lambda \in L_P} U_\lambda$, em que L_P é o conjunto dos índices $\lambda \in L$ tais que $U_\lambda \in P$. Ora, isso significa que P é uma cobertura finita de U_P. O caso provado anteriormente garante que $\operatorname{colim}_{U_\lambda \in P} \pi_1(U_\lambda, x) \cong \pi_1(U_P, x)$.

Passemos a considerar S como uma categoria: basta declarar que existe um morfismo $P \to Q$ entre $P, Q \in \mathsf{S}$, sempre que $U_P \subseteq U_Q$. Afirmo que $\operatorname{colim}_{P \in \mathsf{S}} \pi_1(U_P, x) \cong \pi_1(X, x)$.

Com efeito, em virtude da compacidade de I e $I \times I$, podemos tomar, para qualquer laço $a : I \to X$ com base em x e para qualquer homotopia $H : I \times I \to X$ de laços com base em x, subdivisões de I e $I \times I$, respectivamente, de modo que a imagem por a e por H de cada subdivisão de I e de $I \times I$ esteja inteiramente contida em U_P, para algum $P \in \mathsf{S}$. Como sempre, isso implica imediatamente $\pi_1(X, x)$, relativamente à família de homomorfismos de inclusão $\alpha_P : \pi_1(U_P, x) \to \pi_1(X, x)$, ter a propriedade universal que caracteriza o limite injetivo, donde segue a afirmação feita.

O próximo passo é notar que a coleção D dos pares da forma (U_λ, P), com $U_\lambda \in P$, é uma categoria. De fato, basta declarar a existência de um morfismo $f : (U_\lambda, P) \to (U_\mu, Q)$ sempre que $U_\lambda \subseteq U_\mu$ e $U_P \subseteq U_Q$. Obtêm-se, daí, o funtor $F' : U \to \mathsf{S}$ dado por $F'(U_\lambda) = \{U_\lambda\}$. Com isso, também $F : U \to D$, $F(U_\lambda) = (U_\lambda, \{U_\lambda\})$, é um funtor entre U e D. O funtor π_1 induz, dessa forma, um morfismo de colimites

$$\mathrm{colim}_{U_\lambda \in U}\, \pi_1(U_\lambda, x) \to \mathrm{colim}_{(U_\lambda, P)\in D}\, \pi_1(U_\lambda, x).$$

Finalmente, a projeção de D na primeira coordenada, dada por $(U_\lambda, P) \mapsto U_\lambda$, nos fornece uma correspondência funtorial entre D e U. Por conseguinte, a composição de tal com o funtor $\pi_1(-, x)$ induz o morfismo de colimites

$$\mathrm{colim}_{(U_\lambda, P)\in D}\, \pi_1(U_\lambda, x) \to \mathrm{colim}_{U_\lambda \in U}\, \pi_1(U_\lambda, x),$$

Vê-se facilmente que os dois morfismos acima são inversos um do outro. Em resumo, segue-se que

$$\pi_1(X, x) \cong \mathrm{colim}_{P\in \mathsf{S}}\, \pi_1(U_P, x) \cong \mathrm{colim}_{P\in\mathsf{S}}(\mathrm{colim}_{U_\lambda\in U}\, \pi_1(U_\lambda, x)) \cong$$

$$\cong \mathrm{colim}_{(U_\lambda, P)\in D}\, \pi_1(U_\lambda, x) \cong \mathrm{colim}_{U_\lambda \in U}\, \pi_1(U_\lambda, x).\ \textbf{(c.q.d)}$$

Embora o teorema acima nos permita listar imediatamente uma grande quantidade de exemplos e aplicações do cálculo de grupos fundamentais, deixaremos para fazê-lo no próximo tópico. Antes, vejamos como se dá a versão mais conhecida desse resultado. Ela representa a tradução do que fizemos anteriormente à linguagem implacável da teoria dos grupos. É aconselhável, ao leitor que deseje prosseguir nessa seção, que possua conhecimento satisfatório dos tópicos citados no Apêndice B. A título de notação, lembramos que, dados dois grupos G e H, seu produto livre será denotado por $G * H$.

Teorema 3.9 (Van Kampen - clássico)**.** *Seja X um espaço conexo por caminhos e sejam $U, V \subseteq X$ subconjuntos abertos e conexos por caminhos de X tais que $X = U \cup V$ e $U \cap V$ é também conexo por caminhos e não vazio. Seja $x_0 \in U \cap V$. Denote por j_1 e j_2 as inclusões naturais de $\pi_1(U, x_0)$ e $\pi_1(V, x_0)$ em $\pi_1(X, x_0)$, respectivamente, e por i_1 e i_2 as inclusões de $\pi_1(U \cap V)$ em $\pi_1(U, x_0)$ e $\pi_1(V, x_0)$, respectivamente. Se G é um grupo e $\varphi_1 : \pi_1(U, x_0) \to G$, $\varphi_2 : \pi_1(V, x_0) \to G$ são homomorfismos de grupos tais que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$, então existe um único homomorfismo $\psi : \pi_1(X, x_0) \to H$ que faz comutar o diagrama abaixo.*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & \\
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "i_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\psi"] & H \\
 & \pi_1(V, x_0) \arrow[u, "j_2"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Além disso,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)}{N} = H,$$

onde N é o menor subgrupo normal de $G = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ gerado pelos elementos da forma $i_1^{-1}(\alpha)i_2(\alpha)$, com $\alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

Demonstração: Ora, as hipóteses acima significam que $C = \{U, V, U \cap V\}$ é uma cobertura aberta de X formada por conjuntos conexos por caminhos e fechada por interseções finitas. Pelo Teorema de Seifert Van-Kampen, o funtor $\pi_1(-, X)$ aplicado às inclusões j_1 e j_2 induz um C-diagrama de grupos, do qual $\pi_1(X, x_0)$ é o colimite. A definição de colimite é precisamente o enunciado acima.

Para provar a segunda afirmação, seja $j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ o homomorfismo do produto livre G que estende os homomorfismos j_1 e j_2, induzidos das inclusões triviais. Por ser $\pi_1(X, x_0)$ gerado pelas imagens de j_1 e j_2, segue que j é sobrejetivo. Dado $g \in \pi_1(U \cap v, x_0)$, tem-se $(j \circ i_1)(g) = (j_1 \circ i_1)(g) = \imath(g) = (j_2 \circ i_2)(g) = (j \circ i_2)(g)$, o que acarreta $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in \ker(j)$, e como $\ker(j)$ é normal, obtêm-se $N \subseteq \ker(j)$.

Isso significa que j induz um homomorfismo sobrejetor $k : G/N \to \pi_1(X, x_0)$. Afirmo que k é isomorfismo. Com efeito, sejam $\varphi_1 : \pi_1(U, x_0) \to H$ e $\varphi_2 : \pi_1(V, x_0) \to H$ as aplicações canônicas. Tem-se $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$. Pelo Teorema de Van-Kampen, existe um homomorfismo $\eta : \pi_1(X, x_0) \to H$ tal que $\eta \circ j_1 = \varphi_1$ e $\eta \circ j_2 = \varphi_2$. Um cálculo bem simples mostra que $\eta = k^{-1}$, como queríamos demonstrar. Pelo Teorema do Isomorfismo, segue imediatamente que $N = \ker(j)$. **(c.q.d)**

Uma consequência imediata que será utilizada com frequência nas aplicações que seguem é o seguinte:

Corolário 3.10. *Seja $X = U \cup V$, com U e V abertos conexos por caminhos em X. Suponha que $U \cap V$ é conexo por caminhos, com $x_0 \in U \cap V$. Se i e j são as inclusões de $U \cap V$ em U e V, respectivamente, então $\pi_1(X, x_0)$ é gerado pelas imagens dos homomorfismos induzidos i_* e j_*.*

Corolário 3.11. *Seja $X = U \cup V$, em que U e V são conjuntos abertos simplesmente conexos. Se $U \cap V$ é não vazio e conexo por caminhos, então X é simplesmente conexo.*

Demonstração: Ora, o Corolário 3.10 significa que todo caminho $a : I \to X$ fechado, com base um ponto $x_0 \in U \cap V$, é da forma $a = b_1 b_2 \cdots b_k$, em que cada b_i, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, é um laço em X com base em x_0 inteiramente contido em U ou V. Sendo U e V simplesmente conexos, vem que $[b_i] = \epsilon_{x_0}$, para todo i. Por conseguinte, $[a] = [b_1][b_2] \cdots [b_k] = \epsilon_{x_0}$, donde segue que $\pi_1(X)$ é trivial. **(c.q.d)**

Exemplo 3.12. A hipótese de $U \cap V$ ser não vazio é indispensável para o corolário acima. Com efeito, os subconjuntos do plano $A = \{(x, y);\ x > 0\}$ e $B = \{(x, y);\ x < 0\}$ são ambos abertos simplesmente conexos. Porém a reunião $A \cup B$ não é simplesmente conexa, pois sequer é conexa por caminhos. Isso acontece porque $A \cap B = \varnothing$. Esse fato também mostra que $U \cap V \neq \varnothing$ é necessária para o Teorema de Van-Kampen, uma vez que o Corolário 3.11 é devido a ele.

Exemplo 3.13. Não é verdade que a reunião de dois espaços simplesmente conexos quaisquer com um ponto em comum seja simplesmente conexa. Para contra-exemplo, veja [12], página 48.

Corolário 3.14. *Assuma as hipóteses do Teorema* 3.8. *Se* $U \cap V$ *é simplesmente conexo, então* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

Corolário 3.15. *Nas mesmas hipóteses do Teorema* 3.8*, se* V *for simplesmente conexo, então* $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0)/N$*, em que* N *é o menor subgrupo normal de* $\pi_1(U, x_0)$ *que contém a imagem de* i_1.

3.4 Aplicações

Como já mencionado, são imensas as aplicações e consequências do teorema que dá nome a este capítulo. Listaremos abaixo aquelas que julgamos ser as mais importantes.

Exemplo 3.16. S^n é simplesmente conexa, para todo $n > 1$.

Demonstração: Sejam $p = (0, 0, \ldots, 1)$ e $q = (0, 0, \ldots, -1)$ os polos norte e sul de S^n, respectivamente. Escreva $U = S^n \setminus \{p\}$ e $V = S^n \setminus \{q\}$. Ambos U e V são abertos em S^n e homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, pois sabe-se que as projeções esteriográficas são homeomorfismos. Por conseguinte, U e V são simplesmente conexos. Além disso, $U \cap V = S^n \setminus \{p, q\}$ é conexo por caminhos, pois é homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e $n > 1$. Invocando o Corolário 3.11, segue o resultado. **(c.q.d)**

Observação: Note-se que, se $n = 1$, o conjunto $U \cap V$ é desconexo, o que nos dá uma intuição de S^1 não ser simplesmente conexo.

Exemplo 3.17. A reunião $X = S^n \cup S^m$ de duas esferas de dimensões $n, m > 1$, com um ponto p em comum, é simplesmente conexa.

Demonstração: Tome $x \in S^n \setminus \{p\}$ e $y \in S^m \setminus \{p\}$. Escreva $U = X \setminus \{x\}$ e $V = X \setminus \{y\}$. Ambos U e V são abertos em X, porque $\{x\}$ e $\{y\}$ são fechados. Além disso, U e V são simplesmente conexos, tendo em vista o fato das inclusões de S^m em U e de S^n em V serem equivalências homotópicas. Por conseguinte, o Corolário 3.11 garante que $X = U \cup V$ é simplesmente conexo. **(c.q.d)**

Definição 3.18. *Seja* $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família de espaços tais que* S_λ *é homeomorfo a* S^1*, para todo* $\lambda \in L$*. Suponha que* $x_\lambda \in S_\lambda$ *é ponto base de* X_λ*, para cada* $\lambda \in L$*. O buquê* X *dos círculos* S_λ *é definido como sendo o quociente da reunião disjunta* $\amalg_{\lambda \in L} S_\lambda$ *pela relação de equivalência que identifica os pontos base de cada* S_λ*, isso é,* x_λ *é equivalente a* x_μ*, para quaisquer* $\lambda, \mu \in L$.

Em virtude da definição acima, vê-se que a topologia de X coincide com a topologia fraca no conjunto $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ dos círculos considerados. Noutras palavras, tem-se $A \subseteq X$ aberto em X se, e somente se, $A \cap S_\lambda$ é aberto em S_λ, para todo $\lambda \in L$. Como cada círculo S_λ é um espaço de Hausdorff e a aplicação $\varphi : X \to \{x\}$, em que x é a classe de equivalência dos pontos bases dos círculos S_λ, é fechada, segue que X também é um espaço de Hausdorff, vide Apêndice.

Teorema 3.19. *Seja* X *o buquê dos círculos* $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$*, sendo* p *o ponto comum entre todos eles. Então* $\pi_1(X, p)$ *é um grupo livre com um gerador para cada círculo, a saber,* $\pi_1(X, p)$ *é isomorfo ao produto livre de* $|L|$ *cópias de* $\mathbb{Z}$.

Demonstração: Cada um dos círculos S_λ possui uma vizinhança aberta contrátil V_λ do seu ponto base x_λ (por exemplo, um semicírculo contendo tal ponto). Dado $\lambda \in L$, seja U_λ a reunião de S_λ com todos os V_μ, para $\mu \neq \lambda$. Coloquemos C como sendo a coleção de todos os U_λ e de interseções finitas entre eles, os quais são evidentemente todos conjuntos abertos e conexos por caminhos. Pelo Teorema de Van-Kampen, segue que $\pi_1(X)$ é o colimite do diagrama $\pi_1|C$. Acontece que a interseção de dois ou mais dos U_λ é um conjunto contrátil, pois consistem em arcos de círculos, os quais são homeomorfos a intervalos abertos da reta, que são contráteis. Dessa forma, tais interseções não exercem contribuição alguma ao grupo fundamental de X. No fim das contas, isso significa que $\pi_1(X)$ é gerado pelas imagens dos $\pi_1(S_\lambda)$, cada um dos quais é isomorfo a $\mathbb{Z}$. **(c.q.d)**

Exemplo 3.20 (O Grupo Fundamental de uma Superfície Compacta)**.** Uma 2-Variedade (ou Variedade Topológica de dimensão 2) consiste em um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e localmente homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$. Chamaremos uma 2-Variedade simplesmente de *uma superfície*. Calcularemos agora o grupo fundamental de uma superfície compacta.

Para isso, convém lembrar que toda superfície compacta pode ser vista como o quociente de um polígono por uma relação de equivalência que identifica, dois a dois, os lados desse polígono. Isso não será demonstrado aqui, mas o leitor poderá encontrar uma boa discussão acerca do assunto em [4] ou [5].

O *gênero* g de uma superfície compacta M consiste, grasso modo, no número de 'buracos' ou 'alças' contidas em M. Quqando M é orientável, tal número fica bem definido pela relação $g = (2 - \chi(M))/2$, em que $\chi(M)$ é a característica de Euler de M, isto é, dada qualquer triangularização de M com V vértices, A arestas e F faces, tem-se $\chi(M) = V - A + F$. Ambos, gênero e característica de Euler, são invariantes topológicos.

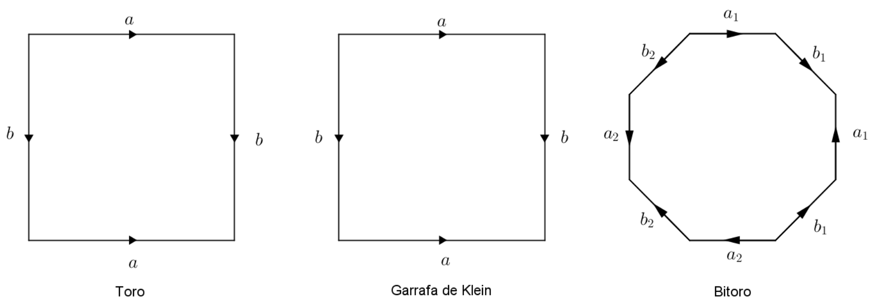
A maneira de se identificar os lados de um polígono a fim de se obter uma superfície compacta é chamada um *esquema de identificação*. Existem 3 maneiras de fazer tal identificação, ou seja, existem (exatamente) 3 tipos de esquemas de identificação possíveis. O primeiro refere-se à superfície orientável de gênero zero (portanto homeomorfa à esfera S^2). Esse é o caso mais simples, em que o polígono possui 2 lados, os quais colam-se um no outro (veja a figura abaixo).

Outro tipo de esquema diz respeito a uma superfície compacta orientável de gênero $g \geq 1$. Faz-se o seguinte: tomamos um polígono de $4g$ lados, digamos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$. Pensemos nesses lados orientados (basta tomar caminhos que os parametrizam) por setas, de modo que ao percorrer os lados desse polígono no sentido horário, a ordem dessas setas nos fornece uma palavra $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Tal w corresponderá a um caminho fechado na superfície (o quociente).

Finalmente, o esquema de tipo 3 nos fornece, passando-se ao quociente, uma superfície não orientável de gênero $g = h - 1$. O polígono deve ter $2h$ lados, os quais indicaremos por $c_1, c_1, c_2, c_2, \ldots, c_h, c_h$. A orientação desses lados deve percorrer todo o polígono no sentido horário. Noutras palavras, ao orientar cada lado por uma seta, o sentido das setas ao se percorrer o contorno do polígono no sentido horário deve coincidir com o sentido do percurso. Por conseguinte, a palavra $\gamma = c_1^2 c_2^2 \cdots c_h^2$ é um caminho fechado na superfície.

Como w e γ, definidos acima, são homotópicas a constantes nos polígonos a elas considerados, devem ser também homotópicos no quociente, ou seja, na superfície.

Seja $p : P \to S$ a aplicação quociente de um polígono P em uma superfície S. O bordo de P é transformado por p num buquê de círculos (cujo grupo fundamental pode ser calculado, vide Teorema 3.5) em S. Para uma superfície orientável de gênero $g \geq 1$, o número de círculos desse buquê é, evidentemente, igual a $2g$. Se, porém, S for não orientável, o buquê será formado por $h = g + 1$ círculos. Além disso, p transforma homeomorficamente o interior de P sobre o complementar desse buquê na superfície.



Tendo em vista essas considerações, estamos prontos para determinar o grupo fundamental de uma superfície compacta arbitrária. Isso será feito no que se segue.

Teorema 3.21. *O grupo fundamental de uma superfície compacta orientável de gênero $g \geq 1$ possui $2g$ geradores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_g, \beta_g$, com a propriedade de que $\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1} \cdots \alpha_g\beta_g\alpha_g^{-1}\beta_g^{-1} = 1$. O grupo fundamental de uma superfície compacta não orientável de gênero g possui $h = g + 1$ geradores $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$ e uma única relação $\gamma_1^2\gamma_2^2 \cdots \gamma_h^2 = 1$.*

Demonstração: Segue imediatamente do teorema anterior e das considerações acima. **(c.q.d)**

Exemplo 3.22 (Grupo Fundamental da Garrafa de Klein)**.** Lembremos que a Garrafa de Klein K é o espaço quociente do quadrado I^2 pela relação de equivalência que identifica os lados de I^2 segundo o esquema dado na figura acima.

Sendo K não orientável, segue-se, do teorema acima, que o grupo fundamental da garrafa de Klein possui dois geradores a e b, os quais cumprem $a^2b^2 = 1$.

Capítulo 4

Espaços de Recobrimento

4.1 Definição e Exemplos

A ideia central para o cálculo do grupo fundamental do círculo é olhar para homotopias em S^1 como homotopias em $\mathbb{R}$, e a partir dessas obter informações sobre aquelas. Sobre certas condições, esse truque pode ser generalizado. Isto é: para se calcular o grupo fundamental de um espaço X, vamos considerar as homotopias em X como sendo homotopias em um espaço maior $\tilde{X} \supseteq X$, chamado um espaço de recobrimento de X.

Na realidade, a teoria de espaços de recobrimento mostra-se relevante não só em topologia, mas também em geometria diferencial, análise complexa e à teoria dos grupos de Lie. A razão principal pela qual há interesse em estudarmos esse tópico é que o grupo fundamental, aliado às ideias de recobrimento, permite que se dê uma resposta algébrica ao problema topológico de saber se uma função contínua $f : X \to Y$ admite um levantamento $\tilde{f} : X \to \tilde{Y}$.

Nem todo espaço X admite um recobrimento conexo por caminhos, noção que definiremos a seguir. Entretanto, é possível estabelecer condições suficientes (e necessárias) para garantir a existência de recobrimentos. Isso será feito no final do capítulo. Indicamos, ao leitor que queira complementar tais resultados, as obras de [12], [2] e [1].

Definição 4.1. *Uma função contínua $p : \tilde{X} \to X$ chama-se uma* aplicação de recobrimento *quando todo ponto $x \in X$ pertence a uma vizinhança $V_x \subseteq X$ cuja imagem inversa por p é a reunião disjunta $p^{-1}(V_x) = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$ de uma família de abertos com a propriedade de que $p|U_\alpha : U_\alpha \to V_x$ é um homeomorfismo, para todo $\alpha \in L$. Cada uma dessas vizinhanças V_x chama-se uma* vizinhança distinguida *de x. O conjunto X é dito a* base do recobrimento *p e o conjunto $\tilde{X}$ diz-se um* espaço de recobrimento *de X.*

Observação: Tanto $\tilde{X}$ quanto p serão chamados de recobrimento, sem maiores comentários. Uma afirmação mais precisa seria dizer que um recobrimento de X é um par $(p; \tilde{X})$, em que $p : \tilde{X} \to X$ é uma aplicação de recobrimento. Toda aplicação de recobrimento é sobrejetiva, por definição.

Exemplo 4.2. Todo recobrimento é um homeomorfismo local. Com efeito, a imagem por p de cada ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ pertence a uma vizinhança distinguida V, cuja imagem inversa por p é a reunião disjunta de abertos disjuntos U_α, $\alpha \in L$, os quais se aplicam homeomorficamente por p sobre V. Um desses abertos, digamos U_0, deve conter o ponto $\tilde{x}$. Então U_0 é uma vizinhança de $\tilde{x}$ tal que $p|U_0$ é um homeomorfismo sobre V.

Não vale a recíproca, isto é, nem todo homeomorfismo local é um recobrimento. Basta tomar um homeomorfismo local que não seja sobrejetivo (ver Exemplo 27 na página 89 do Apêndice). Mais diretamente, seja $p : (0,2) \to S^1$ a função $p(t) = (\cos 2\pi t; \operatorname{sen} 2\pi t)$. Como p é uma restrição de um homeomorfismo local a um conjunto aberto, então p é homeomorfismo local (sobrejetor). Entretanto, $p(1) \in S^1$ não possui vizinhanças distinguidas, como se vê facilmente. Portanto, p não é recobrimento.

Exemplo 4.3. A aplicação exponencial $\psi : \mathbb{R} \to S^1$, $\psi(t) = e^{it} = (\cos(t); \operatorname{sen}(t))$ é um recobrimento. De fato, dado qualquer $y \in S^1$, vamos mostrar que existe uma vizinhança distinguida V de y. Basta tomar $V = S^1 \setminus \{-y\}$, notando-se que $p^{-1}(V) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}(t-(2n+1)\pi; t+(2n+1)\pi)$, em que $t \in \mathbb{R}$ é qualquer ponto para o qual $\psi(t) = y$. Evidentemente, para cada $n \geq 0$, a restrição $f|((t-(2n+1)\pi; t+(2n+1)\pi)$ é um homeomorfismo sobre V.

Exemplo 4.4. Para qualquer espaço X, a função identidade $\mathrm{id}_X : X \to X$ é, evidentemente, uma aplicação de recobrimento. Segue que todo espaço é um recobrimento de si mesmo. Daí, o produto de um espaço X por um espaço discreto D é um recobrimento de X cuja cardinalidade de cada vizinhança distinguida é igual a cardinalidade de D.

Se $p : \tilde{X} \to X$ e $q : \tilde{Y} \to Y$ são recobrimentos, então a função $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ dada por $(p \times q)(\tilde{x}; \tilde{y}) = (p(\tilde{x}); q(\tilde{y}))$ é uma aplicação de recobrimento. Com efeito, dado $(x; y) \in X \times Y$, podemos tomar vizinhanças distinguidas de $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ de x e y, respectivamente. Tem-se

$$(p \times q)^{-1}(U \times V) = \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha \times \bigcup_{\beta \in J} V_\beta = \bigcup_{(\alpha;\beta) \in L \times J} U_\alpha \times V_\beta.$$

Evidentemente, essa união é disjunta e, para todo $(\alpha; \beta) \in L \times J$, $(p \times q)|(U_\alpha \times V_\beta)$ é um homeomorfismo sobre $U \times V$. Segue que $U \times V$ é uma vizinhança distinguida de $(x; y)$.

Em particular, o toro $S^1 \times S^1$ é recoberto pelo plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e pelo cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. Todo homeomorfismo é um recobrimento.

Exemplo 4.5. Seja $n \in \mathbb{N}$. A aplicação $p : S^1 \to S^1$ dada por $p(z) = z^n$ (novamente, pensamos em S^1 como o grupo dos números complexos de módulo 1) é uma aplicação de recobrimento. Com efeito, p é evidentemente contínua e sobrejetiva. Além disso, dado $x = e^{i\theta} \in S^1$, sabemos que as raízes n-ésimas de x constituem o conjunto $\{e^{(2\pi ik+\theta)/n};\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$. Dado $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, seja $z_k = e^{(2\pi ik+\theta)/n}$. Escolha $\delta > 0$ tão pequeno que $B(z_k, \delta) \cap B(z_l, \delta) = \varnothing$, sempre que $k \neq l$, e tal que $p|(B(z_k, \delta))$ é um homeomorfismo, para todo k. Pondo $B_k = B(z_k, \delta)$, defina $V = f(B_0) \cap f(B_1) \cap \cdots \cap f(B_{n-1})$, a qual é uma vizinhança distinguida de x.

Exemplo 4.6. Seja G um grupo topológico e H um subgrupo discreto normal de G. A projeção $\pi : G \to G/H$ um recobrimento. De fato, a topologia quociente em G/H garante que $U \subseteq G/H$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G. Em particular, dado um subconjunto $V \subseteq G$ aberto em G, tem-se $\pi^{-1}(\pi(V)) = \displaystyle\bigcup_{h \in H} h \cdot V$, ou seja, $\pi^{-1}(\pi(V))$ é uma reunião de abertos em G (veja Teorema 29 na página 90 do Apêndice), ou ainda, $\pi^{-1}(\pi(V))$ é aberto em G, o que nos garante que $\pi(V)$ é aberto em G/H. Isso significa que π é uma aplicação aberta.

Sendo H discreto, existe uma vizinhança aberta W da unidade $e \in G$ tal que $W \cap H = \{e\}$. O item (2) do Teorema 29 na página 90 do Apêndice garante, então, a existência de uma vizinhança V da unidade tal que $V \cdot V \subseteq W$ (a qual pode ser tomada simétrica, isto é, com $V = V^{-1}$). Assim, para qualquer $g \in G$, o conjunto $\pi(g \cdot V)$ é uma vizinhança aberta de $\pi(g)$ e, além disso, obtêm-se a decomposição $\pi^{-1}(\pi(g)) = \bigcup_{h \in H} V \cdot gh$.

Mostremos que tal reunião é disjunta. De fato, se $v, v' \in V$ e $h, h' \in H$ são tais que $vgh = v'gh'$, então $v^{-1}(v') = gh(h')^{-1}g^{-1} \in V^{-1}V \cap H = \{e\}$, donde $v = v'$ e $h = h'$, como queríamos.

É claro também que $\pi|(V \cdot gh)$ é um homeomorfismo sobre $\pi(g \cdot V)$, para todo $h \in H$. Segue-se que $\pi(g \cdot V)$ é uma vizinhança distinguida de $\pi(g)$. Por conseguinte, π é uma aplicação de recobrimento.

Exemplo 4.7. Todo recobrimento é uma função quociente. Com efeito, todo recobrimento é um homeomorfismo local sobrejetivo. Assim, pelo Teorema 24 na página 89 do Apêndice, segue o resultado.

Definição 4.8. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ recobrimento. Para cada $x \in X$, a imagem inversa $p^{-1}(\{x\})$ chama-se a* fibra *sobre x. A cardinalidade de $p^{-1}(x)$ diz-se o* número de folhas *da fibra sobre x.*

Exemplo 4.9. Cada fibra $p^{-1}(w)$ do recobrimento $p : S^1 \to S^1$ (veja Exemplo 4.5), dado por $p(z) = z^n$, possui n folhas, a saber, as raízes n-ésimas de w.

Quanto ao recobrimento $q : G \to G/H$, dado no Exemplo 4.6, vê-se que a fibra de cada ponto $gH \in G/H$ coincide precisamente com a ordem de H.

Proposição 4.10. *Se X é conexo e $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento, então todas as fibras $p^{-1}(x)$ possuem o mesmo número de folhas.*

Demonstração: Para todos os pontos x, y de uma vizinhança distinguida V, o número de folhas da fibra sobre x é igual ao número de folhas da fibra sobre y. Isso significa que o conjunto dos pontos x de X cuja fibra sobre x possui um número cardinal dado é aberto em X. Além disso, X é a união disjunta desses abertos disjuntos nos quais o número de folhas de cada fibra sobre cada um de seus pontos é constante. Mas X é conexo, logo só pode existir um desses abertos. **(c.q.d)**

Motivados pela proposição anterior, diremos que um recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$, com X conexo, é um *recobrimento de n folhas* quando $n = |p^{-1}(x)|$, para algum $x \in X$.

Lembramos que uma aplicação contínua $f : X \to Y$ chama-se *localmente injetiva* se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U_x de x, restrita à qual f é injetiva.

Um conjunto X chama-se *localmente conexo* se, e somente se, dados $x \in X$ e $U \subseteq X$ vizinhança de x, existir uma vizinhança conexa C de x tal que $C \subseteq U$. Intuitivamente, isso equivale a dizer que X possui vizinhanças conexas arbitrariamente pequenas.

Exemplo 4.11. Conexidade local não implica conexidade e vice-versa. De fato, todo conjunto discreto com mais de um ponto é localmente conexo, mas não é conexo. Reciprocamente, seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos eixos coordenados e as retas verticais da forma $(1/n, y)$, com $n \in \mathbb{N}$ e $y \geq 0$. Tal espaço é evidentemente conexo (por caminhos), mas qualquer vizinhança suficiente pequena do ponto $(0, 1)$ é desconexa, logo X não é localmente conexo.

A fim de que X seja localmente conexo, é necessário e suficiente que, para cada aberto $A \subseteq X$, as componentes conexas de A sejam subconjuntos abertos de X. Com efeito, suponha X localmente conexo e $A \subseteq X$ aberto em X. Seja C uma componente conexa de A e tome $x \in C$. Como $x \in X$, existe uma vizinhança conexa V de X tal que $V \subseteq A$. Então $V \cup C$ é uma vizinhança conexa de x contida em A e contendo C. Pela maximalidade de C, segue que $C = V \cup C$ e então $V \subseteq C$, donde x é ponto interior, ou seja, C é aberto.

Reciprocamente, suponha que para todo aberto $A \subseteq X$, as componentes conexas de A sejam abertas em X. Então, dados $x \in X$ e $A \subseteq X$ um aberto contendo x, a componente conexa C_x de x em A é uma vizinhança aberta (por hipótese) e conexa de x contida em A, donde X é localmente conexo.

Por conseguinte, num espaço localmente conexo, todo ponto $x \in X$ possui vizinhanças simultaneamente abertas e conexas, todas arbitrariamente pequenas. Esse fato será usado na proposição que se segue sem maiores comentários.

Observação: É claro que se $A \subseteq X$ é um aberto em X e $x \in A$, a componente conexa C_x de x em A é um conjunto conexo contido em A e contendo x. No entanto, isso não implica X ser localmente conexo (caso contrário todo espaço seria localmente conexo!), porque C_x não é necessariamente uma vizinhança de x, ou seja, C_x não necessariamente contém um aberto que contém x. Portanto, a hipótese acima de C_x ser aberto é fundamental.

Evidentemente, todo subconjunto aberto de uma vizinhança distinguida de um recobrimento $p : \tilde{X} \to Y$ é ainda uma vizinhança distinguida. Portanto, quando X é localmente conexo, podemos tomar as vizinhanças distinguidas todas conexas. O mesmo vale se X for localmente compacto ou possuir qualquer característica local em termos de suas vizinhanças.

Proposição 4.12. *Seja X um conjunto localmente conexo. Uma aplicação contínua $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento $\Leftrightarrow$ $p|p^{-1}(C)$ é um recobrimento, para toda componente conexa C de X.*

Demonstração: ($\Rightarrow$): Seja C uma componente conexa de X e $x \in C$. Seja V uma vizinhança aberta distinguida de x. Como X é localmente conexo, então C é aberto, logo $U = C \cap V$ é um aberto em X que contém x e contido em V. Portanto, U é uma vizinhança distinguida de x em p, e em particular, em $p|p^{-1}(C)$.

($\Leftarrow$): Dado $x \in X$, tem-se $x \in C_x$, logo existe uma vizinhança distinguida aberta U de x em C_x, pois $p|p^{-1}(C_x)$ é recobrimento. Como C_x é aberto em X, então U também o é. Daí, U é uma vizinhança distinguida de x em X. **(c.q.d)**

4.2 Levantamento de Caminhos e Homotopias

Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e seja $Z \supseteq Y$ um espaço que contém Y, isto é, um espaço para o qual existe uma função sobrejetiva $p : Z \to Y$. Um levantamento de f ao espaço Z (relativamente a p) é uma função $\tilde{f} : X \to Z$ tal que $p \circ f = \tilde{f}$. O diagrama comutativo abaixo ilustra essa situação.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

As questões de levantamentos que mais nos interessam são os problemas de levantamento de caminhos e homotopias. Vejamos, com maior precisão, o que isso significa.

Definição 4.13. *Seja $p : Z \to X$ uma função sobrejetiva. Diz-se que p goza da* propriedade de levantamento de caminhos (plc) *se, dado um caminho $a : I \to X$ e um ponto $z \in Z$ tal que $p(z) = a(0)$, existe um levantamento $\tilde{a} : I \to Z$ de a começando em z, isto é, um caminho em Z tal que $\tilde{a}(0) = z$ e $p \circ \tilde{a} = a$. Caso cada caminho a possua um único levantamento $\tilde{a}$, então dizemos que p goza da* propriedade única do levantamento de caminhos (pluc)*.*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{a}"] \arrow[r, "a"'] & X \end{tikzcd}$$

Exemplo 4.14. A Proposição 2.36 na página 34 mostra que a aplicação exponencial $\psi : \mathbb{R} \to S^1$, $\psi(t) = e^{it}$, goza da pluc. Ressaltamos que não é coincidência o fato de ψ ser uma aplicação de recobrimento, conforme veremos adiante.

Definição 4.15. *Sejam $f : X \to Z$ uma função contínua e $H : X \times I \to Y$ uma homotopia. Seja $p : Z \to Y$ uma função sobrejetiva tal que $H(x, 0) = (p \circ f)(x)$, para cada $x \in X$. Diz-se que uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \to Z$ é um levantamento da homotopia H relativamente a p se, e somente se, $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$ e $p \circ \tilde{H} = H$.*

Mais importante do que própria ideia de levantamento de uma homotopia é o fato de uma função contínua possuir a propriedade do levantamento de homotopias (ou a propriedade do levantamento único de homotopias). A definição abaixo esclarece essa noção.

Definição 4.16. *Uma função contínua $p : Z \to Y$ possui a* propriedade do levantamento de homotopias (plh) *com respeito ao espaço X quando, dadas $f : X \to Z$ função contínua e $H : X \times I \to Y$ homotopia tais que $H(x; 0) = (p \circ f)(x)$, $\forall x \in X$, existe uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \to Z$ que levanta H relativamente a p, ou seja, existe uma homotopia $\tilde{H}$ tal que $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$ e $p \circ \tilde{H} = H$. Se, para cada H e f escolhidas, o levantamento $\tilde{H}$ for único, então diz-se que p goza da* propriedade do levantamento único de homotopias (pluh) *em relação a X.*

A situação anterior é melhor expressa pelo diagrama abaixo. A função $\imath : X \to X \times I$ é a inclusão $\imath(x) = (x, 0)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

Proposição 4.17. *Se $p : Y \to Z$ tem a propriedade do levantamento de homotopias em relação a X e $f, g : X \to Y$ são homotópicas, então f pode ser levantada a Z se, e somente se, g possui levantamento a Z.*

Demonstração: Seja $H : f \simeq g$ homotopia entre f e g. Suponha que f pode ser levantada a Z por p, ou seja, suponha que exista $\tilde{f} : X \to Z$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Como p possui a plh, existe uma homotopia $\tilde{H} : X \times I \to Z$ tal que $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ e $p \circ \tilde{H} = H$. Definimos $\tilde{g} : X \to Z$ pondo $\tilde{g}(x) = \tilde{H}(x, 1)$. Tem-se $(p \circ g)(x) = (p \circ \tilde{H})(x, 1) = H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Segue que $\tilde{g}$ é um levantamento de g. Analogamente, se admitirmos que g possui levantamento, conclui-se que f também possui. **(c.q.d)**

A proposição acima significa que, num espaço X que possui a plh, o problema topológico de se procurar levantamentos de funções $f : X \to Y$ pode ser abordado em categorias homotópicas. Evidentemente, isso nos conduz a pensar no grupo fundamental como uma boa ferramenta para abordar essa questão.

Definição 4.18. *Uma função contínua $p : Y \to Z$ chama-se uma* fibração *quando p possui a propriedade do levantamento de homotopias em relação a qualquer espaço.*

Proposição 4.19. *Toda fibração sobrejetiva possui a propriedade do levantamento de caminhos.*

Demonstração: Seja $p : Y \to Z$ uma fibração e seja $a : I \to Y$ um caminho. Seja $z \in Z$ um ponto tal que $p(z) = a(0)$. O caminho a pode ser naturalmente considerado como uma homotopia $H : \{q\} \times I \to Y$, em que $\{q\}$ é um espaço-ponto e $H(q; t) = a(t)$. Além disso, considere a função $f : \{q\} \to Z$ definida por $f(q) = z$. Em virtude de p ser uma fibração, podemos levantar H para uma homotopia $\tilde{H} : \{q\} \times I \to Z$ para a qual $\tilde{H}(q; 0) = f(q) = z$ e $p \circ \tilde{H} = H$. Defina, finalmente, $\tilde{a} : I \to Z$ pondo $\tilde{a}(t) = \tilde{H}(q; t)$. Tem-se $(p \circ \tilde{a})(t) = (p \circ \tilde{H})(q; t) = H(q; t) = a(t)$ e $\tilde{a}(0) = \tilde{H}(q; 0) = z$. Portanto $\tilde{a}$ é um levantamento de a começando em z. **(c.q.d)**

Exemplo 4.20. A projeção natural $p : X \times Y \to X$ é uma fibração. Além disso, para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(\{x\}) = \{x\} \times Y$ é homeomorfo a Y. Com efeito, a segunda afirmação é evidente. O diagrama abaixo ilustra, por sua vez, a primeira frase. Nele, leia-se B como um conjunto qualquer, $\imath : B \to B \times I$ a projeção $\imath(b) = (b, 0)$, $H : B \times I \to X$ uma homotopia.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & X \times Y \arrow[d, "p"] \\ B \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"'] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

O Teorema a seguir mostra-se extremamente útil para demonstrar-se propriedades de unicidade de levantamentos.

Teorema 4.21. *Sejam Y um conjunto conexo e $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento. Se duas funções contínuas $f, g : Y \to \tilde{X}$ tais que $p \circ f = p \circ g$ coincidem em um ponto $y_0 \in Y$, então $f = g$.*

Demonstração: Seja $A = \{y \in Y; f(y) = g(y)\}$. Vamos mostrar que $A = Y$. Sendo Y conexo e A não vazio (pois $y_0 \in A$), basta mostrar que A é aberto e fechado em Y. Com efeito, seja $y \in A$. Seja U uma vizinhança distinguida de $x = p(f(y)) = p(g(y))$. Tome $\tilde{U}$ a única vizinhança de $f(y) = g(y) \in \tilde{X}$ restrita à qual p é um homeomorfismo. Então $f^{-1}(\tilde{U}) \cap g^{-1}(\tilde{U})$ é um aberto de Y contendo y. Segue que y é ponto interior de Y, logo Y é aberto.

Agora, tome $y \in \overline{A}$. Novamente, denotemos por x o ponto $p(f(y)) = p(g(y))$. Escolha uma vizinhança distinguida U de x. Se $y \notin A$, então devem existir vizinhanças disjuntas $V_1 \ni f(y)$ e $V_2 \ni g(y)$, pertencentes a união $p^{-1}(U)$, tais que $p|V_1$ e $p|V_2$ são homeomorfismos sobre U. De fato, se fosse $V_1 = V_2$ então $p(f(y)) = p(g(y))$ implicaria $f(y) = g(y)$, pois seriam $f(y)$ e $g(y)$ pontos de $V_1 = V_2$ e $p|V_1 = p|V_2$ é, em particular, injetiva. Isso contradiria a suposição de que $y \notin A$. Logo $V_1 \neq V_2$, o que implica V_1 e V_2 serem disjuntas, pois, por definição, $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta.

Em virtude da continuidade de f e g, obtemos uma vizinhança $W \subseteq Y$ de y para a qual $f(W) \subseteq V_1$ e $g(W) \subseteq V_2$. Mas toda vizinhança de $y \in \overline{A}$ possui pontos de A, portanto existe $w \in W \cap A$, isto é, $f(w) = g(w) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$, um absurdo. Isso significa que $y \in A$, e daí $\overline{A} = A$, donde segue que A é fechado. **(c.q.d)**

O teorema que se segue exprime a relação mais importante entre espaços de recobrimento e levantamento de funções contínuas.

Teorema 4.22. *Todo recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é uma fibração.*

Demonstração: Sejam $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento, $f : Y \to \tilde{X}$ uma função contínua e $H : Y \times I \to X$ homotopia tal que $H(y; 0) = (p \circ f)(y)$, para todo $y \in Y$. Da compacidade de I e do fato de p ser um recobrimento, segue que, para todo ponto $y \in Y$, existe uma vizinhança $V_y \ni y$ e pontos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ em I, tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $H(V_y \times [t_{i-1}; t_i])$ está inteiramente contido numa vizinhança distinguida de X.

Vamos construir uma homotopia $\tilde{H}_y : V_y \times I \to \tilde{X}$ que levanta $H|(V_y \times I)$. Para isso, vamos definir, indutivamente, funções contínuas $G_i : V_y \times [t_{i-1}; t_i] \to \tilde{X}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, que levantam a restrição de H a $V_y \times [t_{i-1}, t_i]$. Com efeito, seja $U \subseteq X$ vizinhança distinguida que contém $H(V_y \times [t_0; t_1])$. Escreva $p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in L} \tilde{U}_\lambda$, em que, para cada $\lambda \in L$, $p|\tilde{U}_\lambda$ é um homeomorfismo sobre U. Dado $\lambda \in L$, defina $U_\lambda = f^{-1}(\tilde{U}_\lambda)$. A família $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ é, assim, uma coleção de abertos disjuntos que cobrem V_y em Y. Basta definir G_1 como a única função tal que, para cada $\lambda \in L$, $G_1|U_\lambda = (p|\tilde{U}_\lambda)^{-1} \circ (H|(U_\lambda \times [t_0, t_1]))$. Tem-se $p \circ G_1 = H|(V_y \times [t_0, t_1])$ e $G_1(y', 0) = f(y')$, para todo $y' \in V_y$.

$$\begin{tikzcd} V_y \arrow[r, "f|V_y"] \arrow[d, "\imath"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ V_y \times I \arrow[ur, "\tilde{H}_y"] \arrow[r, "H|(V_y\times I)"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ V_y \times [t_{i-1}, t_i] \arrow[ur, "G_i"] \arrow[r, "H|(V_y\times[t_{i-1},t_i])"'] & X \end{tikzcd}$$

Assuma que G_{i-1} está definida, para $1 < i \leq m$. Seja U' uma vizinhança distinguida contendo $H(V_y \times [t_{i-1}, t_i])$. Se $(\tilde{U'}_\mu)_{\mu \in J}$ é a coleção de abertos disjuntos de $p^{-1}(U')$ que se aplicam homeomorficamente sobre U', para cada $\mu \in J$, então colocamos $U'_\mu = f(\tilde{U}'_\mu)$, para cada $\mu \in J$. Novamente, $(U'_\mu)_{\mu \in J}$ é uma cobertura de V_y. A função G_i é definida, portanto, de forma que $G_i|U'_\mu = (p|U'_\mu)^{-1} \circ (H|(U'_\mu \times [t_{i-1}, t_i]))$. Então, para cada i, vale que $p \circ G_i = H|(V_y \times [t_{i-1}, t_i])$ e que $G_i(y', 0) = f(y')$, para todo $y' \in V_y$.

Finalmente, definimos $\tilde{H}_y : V_y \times I \to \tilde{X}$ pondo $\tilde{H}|(V_y \times [t_{i-1}, t_i]) = G_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Tal $\tilde{H}_y$ é um levantamento de $H|(V_y \times I)$, em virtude da construção de cada uma das funções G_i.

Dado qualquer outro ponto $z \in Y$, afirmamos que $\tilde{H}_z$ e $\tilde{H}_y$ coincidem em $(V_y \times I) \cap (V_z \times I)$. Com efeito, se $y' \in V_y \cap V_z$, então as restrições $\tilde{H}_y|(y' \times I)$ e $\tilde{H}_z|(y' \times I)$ tem como domínio o espaço conexo $y' \times I$, tomam valores em $\tilde{X}$ e, além disso, para todo $t \in I$, tem-se $p \circ (\tilde{H}_y|(y' \times I))(y', t) = H(y', t) = p \circ (\tilde{H}_z|(y' \times I))(y', t)$. Como $\tilde{H}_y|(y' \times I)(y', 0) = f(y') = \tilde{H}_z|(y' \times I)(y', 0)$, a afirmação segue-se diretamente daí e do Teorema 4.1.

O parágrafo acima nos garante, por fim, que a aplicação $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$, dada por $\tilde{H}|(V_y \times I) = \tilde{H}_y$, está bem definida. Tal $\tilde{H}$ é, pois, o levantamento da homotopia H que buscamos. **(c.q.d)**

Corolário 4.23. *Todo recobrimento goza da propriedade de levantamento de homotopias* (plh).

Corolário 4.24. *Todo recobrimento goza da propriedade do levantamento único de caminhos* (pluc).

Demonstração: A existência segue do teorema anterior e da Proposição 4.19. A unicidade é consequência do fato de I ser conexo e do Teorema 4.21. **(c.q.d)**

Com o intuito de se descobrir situações nas quais se tem existência de recobrimento garantida para funções em geral, e não somente para caminhos ou homotopias, façamos a seguir um pequeno estudo a respeito das fibras de um recobrimento.

Proposição 4.25. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua localmente injetiva. Então $f^{-1}(y)$ é discreto em X, para todo $y \in Y$.*

Demonstração: Por f ser localmente injetiva, todo ponto $x \in f^{-1}(\{y\})$ possui uma vizinhança U para a qual $f(u) = y \Leftrightarrow u = x$. Daí, $U \cap f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$, ou seja, x é isolado. **(c.q.d)**

Corolário 4.26. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento, então toda fibra sobre $x \in X$ é um conjunto discreto.*

Corolário 4.27. *Se X é compacto, Y é Hausdorff e $f : X \to Y$ é contínua localmente injetiva, então $f^{-1}(\{y\})$ é finito, para todo $y \in Y$.*

Demonstração: Sendo Y Hausdorff, deve ser $\{y\}$ fechado em Y, para todo $y \in Y$. Da continuidade de f, obtemos que $f^{-1}(\{y\})$ é fechado no conjunto compacto X, portanto compacto. Além disso, pela proposição anterior, segue que $f^{-1}(\{y\})$ é discreto. Portanto $f^{-1}(\{y\})$ é compacto e discreto, ou seja, finito. **(c.q.d)**

Não vale a volta do corolário acima. Por exemplo, considere a função $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x|$. A função f é contínua, definida num conjunto compacto, tomando valores num espaço de Hausdorff, e, além disso, $f^{-1}(\{y\})$ é finito, para cada $y \in \mathbb{R}$. Mas f não é localmente injetiva, porque não existe vizinhança alguma do ponto zero restrita à qual f seja injetiva.

Proposição 4.28. *Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ recobrimento. Se $\tilde{X}$ é conexo por caminhos, então quando $\tilde{x}$ percorre a fibra $p^{-1}(x_0)$, a imagem $p_*(\tilde{X}, \tilde{x})$ descreve toda a classe de conjugação de $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.*

Demonstração: Tome $\alpha \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$. Da Proposição 2.14 na página 28, podemos escrever $\alpha = [\tilde{c}\tilde{b}\tilde{c}^{-1}]$, em que $[\tilde{b}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$ e $\tilde{c} : I \to \tilde{X}$ é um caminho começando em $\tilde{x_0}$ e terminando em $\tilde{x}$. Assim, pondo $\gamma = [c]$, obtêm-se $p_*(\alpha) = \gamma p_*([\tilde{b}])\gamma^{-1}$, ou seja, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = \gamma H \gamma^{-1}$. Reciprocamente, seja $G = \gamma H \gamma^{-1}$ um subgrupo conjugado de H em $\pi_1(X, x_0)$. Suponha $\gamma = [c]$. Considere o levantamento $\widetilde{c^{-1}}$ do caminho fechado c^{-1} começando em $\tilde{x_0}$. Coloquemos $\tilde{x} = \widetilde{c^{-1}}(1)$. Tem-se $p \circ \tilde{c} = c$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ e $\tilde{c}(1) = \tilde{x_0}$. Esse é exatamente o caso anterior. Segue que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = \gamma H \gamma^{-1} = G$. **(c.q.d)**

A proposição a seguir poderia ter sido enunciada como um corolário do Teorema 4.22 na página 60. Optamos por trazê-la somente agora, porque sua demonstração torna-se mais limpa com o estudo das fibras de um recobrimento, conforme o leitor perceberá no que se segue.

Proposição 4.29. *Sejam $p : \tilde{X} \to X$ recobrimento e $a, b : I \to X$ caminhos. Se $a \cong b$, então quaisquer levantamentos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ que possuem o mesmo ponto inicial são homotópicos, isto é, $\tilde{a} \cong \tilde{b}$.*

Demonstração: Escreva $a(0) = p(\tilde{x_0}) = b(0)$, para algum $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$. Sejam $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \tilde{X}$ levantamentos de a e b, rescpectivamente, começando no ponto $\tilde{x_0}$. Seja $H : a \cong b$ homotopia entre a e b e $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ levantamento de H tal que $\tilde{H}(s, 0) = \tilde{a}(x)$, para todo $s \in I$. Como $p(\tilde{H}(0, t)) = H(0, t) = a(0) = b(0)$ e $p(\tilde{H}(1, t)) = H(1, t) = a(1) = b(1)$ não dependem de $t \in I$, então $\tilde{H}(0, t) = \tilde{x_0}$ e $\tilde{H}(1, t) = \tilde{x_1}$ também não o fazem, pois, em virtude do Corolário 4.26 na página 61, as fibras $p^{-1}(a(0))$ e $p^{-1}(a(1))$ são discretas. O caminho $s \mapsto \tilde{H}(s, 1)$ em X é, assim, um levantamento de b começando em $\tilde{x_0}$. Pelo Corolário 4.24 na página 61, p goza da pluc, logo $\tilde{H}(s, 1) = \tilde{b}(s)$ para todo $s \in I$. Portanto $\tilde{H} : \tilde{a} \cong \tilde{b}$. **(c.q.d)**

As duas proposições que se seguem terão devida importância para o estudo do problema de determinar quando é que um espaço admite um recobrimento, o qual será abordado em sequência.

Proposição 4.30. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento, com $p(\tilde{x_0}) = x_0$, então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ é injetivo e a imagem $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ é o subgrupo formado pelas classes de homotopias de caminhos fechados em X, com ponto base em x_0, cujos levantamentos a $\tilde{X}$, começando em $\tilde{x_0}$, são fechados.*

Demonstração: Tome $\alpha = [\tilde{a}] \in \ker(p_*)$. Então $p \circ \tilde{a} = a$ é homotópico ao caminho constante e_{x_0}, isto é, $a \cong e_{x_0}$. Além disso, $\tilde{a}$ e $e_{\tilde{x_0}}$ são levantamentos de a e e_{x_0} começando em $\tilde{x_0}$, respectivamente. Pela Proposição 4.29, segue que $\tilde{a} \cong e_{\tilde{x_0}}$. Logo, $\ker(p_*)$ é o grupo trivial e portanto p_* é injetivo.

Provemos a segunda afirmação. Ora, um caminho fechado com base em x_0 que se levanta a um caminho fechado com base em $\tilde{x_0}$ pertence evidentemente à imagem de p_*. Reciprocamente, tome $\alpha \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$, digamos $\alpha = [a]$. Seja b um laço com base em $\tilde{x_0}$ tal que $p_*([b]) = [a]$, ou seja, $[p \circ b] = [a]$, ou ainda, $a' = p \circ b \cong a$. O levantamento de a' é o caminho b, o qual é fechado com base em $\tilde{x_0}$. Se $\tilde{a}$ é o levantamento de a começando em $\tilde{x_0}$, a Proposição 4.29 garante que $\tilde{a} \cong b$. Em particular, isso mostra que $\tilde{a}$ é um laço com base em $\tilde{x_0}$. **(c.q.d)**

Proposição 4.31. *O número de folhas de um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$, com $p(\tilde{x_0}) = x_0$, X e $\tilde{X}$ conexos por caminhos, é igual ao índice da imagem H de p_* em $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração: Seja $a : I \to X$ um caminho fechado com base em x_0. Tome $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ levantamento de a começando em $\tilde{x_0}$. Toda classe $[h] \in H$ é representada por um caminho da forma $h = p \circ \tilde{h}$, em que $\tilde{h}$ é fechado com base em $\tilde{x_0}$. Logo, o caminho $\tilde{h}\tilde{a}$ é um levantamento de ha com ponto final em $\tilde{a}(1) \in p^{-1}(x_0)$. Além disso, se $a \cong b$, a Proposição 4.29 garante que seus levantamentos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$, começando em $\tilde{x_0}$, são tais que $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$. Isso mostra que a correspondência Φ entre as classes laterais de H em $\pi_1(X, x_0)$ e a fibra sobre x_0, dada por $\Phi[Ha] = \tilde{a}(1)$, está bem definida.

Mostremos que essa associação é sobrejetora. Com efeito, dado $\tilde{x_1} \in p^{-1}(\{x_0\})$, tome $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ caminho ligando $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1}$. Tal caminho é evidentemente um levantamento, começando em $\tilde{x_0}$, de $a = p \circ \tilde{a}$, o qual é fechado com base em x_0. Portanto $\tilde{x_1} = \Phi[Ha]$ e Φ é sobrejetora.

Finalmente, suponha $\Phi[Ha] = \Phi[Hb]$, para certos $a, b : I \to X$ fechados com base em x_0. Então ab^{-1} é fechado com base em x_0 e levanta-se a um caminho fechado com base em $\tilde{x_0}$ (a saber, $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$), ou seja, $[ab^{-1}] \in H$, ou ainda, $[Ha] = [Hb]$. Isso mostra a injetividade de Φ. **(c.q.d)**

Corolário 4.32. *Se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então o número de folhas de um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é igual à cardinalidade de $\pi_1(X)$.*

Exemplo 4.33. Como consequência da proposição anterior, calcularemos o grupo fundamental do espaço projetivo real P^n (para definição, veja o Exemplo 18 na página 88 do Apêndice). Isso será feito em dois casos. Para o caso $n = 1$, note que P^1 e S^1 são homeomorfos. Com efeito, seja $f : S^1 \to S^1$ dada por $f(z) = z^2$ e seja $q : S^1 \to P^1$ a aplicação canônica. Ora, f é contínua e tal que $f(z) = f(w)$ se, e somente se, $z = \pm x$. Portanto, passando-se ao quociente, obtemos uma aplicação $\overline{f} : P^1 \to S^1$ contínua, bijetora, e tal que $\overline{f} \circ q = f$.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "q"] & P^1 \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ S^1 \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd}$$

Mas P^1 é compacto e S^1 é Hausdorff. Logo, pelo Corolário 2 do Apêndice, $\overline{f}$ é um isomorfismo. Por conseguinte, tem-se $\pi_1(P^1) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Tome, agora, $n \geq 2$. Considere a aplicação quociente $p : S^n \to P^n$. Em virtude do Exemplo 4.6, segue que p é um recobrimento. Da definição de P^n, vê-se que p possui duas folhas. Como $n \geq 2$, tem-se S^n simplesmente conexa, logo $|\pi_1(P^n)| = 2$. Por conseguinte, $\pi_1(P^n)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

A Proposição que se segue mostrar-se-á de grande importância ao Teorema 4.37 na página 65, o qual consiste no resultado central dessa seção. A proposição anterior poderia, também, ter sido enunciado como um corolário dessa que se segue.

Proposição 4.34. *Sejam $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento e $a, b : I \to X$ caminhos começando no ponto x e que terminam no ponto y. Se $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \tilde{X}$ são levantamentos de a e b, respectivamente, ambos começando no mesmo ponto $\tilde{x}$, então $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$ se, e somente se, $[ab^{-1}] \in H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.*

Demonstração: Se $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$, então o caminho $c = ab^{-1}$ é fechado com base em x. Além disso, $c = p \circ \tilde{c}$, em que $\tilde{c}$ é o levantamento de c começando em $\tilde{x}$. Por conseguinte, $[c] \in H$. Reciprocamente, suponha $[ab^{-1}] \in H$. Seja $\tilde{c}$ levantamento de $c = ab^{-1}$ começando em $\tilde{x}$. Pela Proposição 4.30, $\tilde{c}$ é fechado, com base em $\tilde{x}$. Defina $\gamma, \lambda : I \to \tilde{X}$ pondo $\gamma(s) = \tilde{c}(s/2)$ e $\lambda(s) = \tilde{c}(1 - s/2)$. Tem-se $\gamma(0) = \tilde{c}(0) = \tilde{x} = \tilde{c}(1) = \lambda(0)$, $(p \circ \gamma)(s) = p(\tilde{c}(s/2)) = ab^{-1}(s/2) = a(s)$ e $(p \circ \lambda)(s) = p(\tilde{c}(1 - s/2)) = ab^{-1}(1 - s/2) = b^{-1}(1 - s) = b(s)$, para todo $s \in I$. Isso significa que γ e λ são levantamentos de a e b, respectivamente, começando no ponto $\tilde{x}$. Pela unicidade do levantamento de caminhos, segue que $\gamma = \tilde{a}$ e $\lambda = \tilde{b}$. Portanto $\tilde{a}(1) = \gamma(1) = \tilde{c}(1/2) = \lambda(1) = \tilde{b}(1)$. **(c.q.d)**

Corolário 4.35. *Sejam $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ uma função contínua e $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ um recobrimento. Suponha que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$. Se $a, b : I \to Y$ são caminhos ligando y_0 a $y \in Y$, e se $\tilde{c}, \tilde{d} : I \to \tilde{X}$ são os levantamentos de $f \circ a = c$ e $f \circ b = d$, respectivamente, ambos começando em $\tilde{x_0}$, então $\tilde{c}(1) = \tilde{d}(1)$.*

Demonstração: Ora, tem-se $[cd^{-1}] = [f \circ ab^{-1}] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. O resultado segue-se da proposição acima. **(c.q.d)**

Corolário 4.36. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ recobrimento com $\tilde{X}$ simplesmente conexo. Dois caminhos $a, b : I \to X$ de mesmas extremidades x_0 e x_1 são caminhos homotópicos se, e somente se, seus levantamentos $\tilde{a}$ e $\tilde{b}$ a partir de um ponto $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ terminam no mesmo ponto.*

Demonstração: Como $\pi_1(\tilde{X}) = \{0\}$, tem-se $p_*(\pi_1(\tilde{X})) = \{0\}$. Daí, e da proposição anterior, segue que $a \cong b \Leftrightarrow [ab^{-1}] = \epsilon_{x_0} \Leftrightarrow [ab^{-1}] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}))$, o que ocorre se, e somente se, $\tilde{a}(1) = \tilde{b}(1)$. **(c.q.d)**

Mais particularmente, o corolário acima mostra que se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então a fim de que um caminho fechado $a : I \to X$ seja homotópico a uma constante, é necessário e suficiente que algum de seus levantamentos seja fechado (e portanto todos os seus levantamentos sejam fechados).

Nem sempre podemos garantir a existência de levantamento de uma função $f : Y \to X$ relativamente a um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$. Esse é, no entanto, um assunto de grande interesse à topologia e será abordado nas linhas que se seguem. A garantia de tal levantamento só é alcançada se estabelecermos duas restrições à topologia de Y, a saber, a conexidade por caminhos e a conexidade por caminhos local. Mais precisamente:

Teorema 4.37. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ recobrimento, com $p(\tilde{x_0}) = x_0$. Seja Y um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. A fim de que uma função contínua $f : Y \to X$, com $f(y_0) = x_0$, admita um levantamento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, com $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$, é necessário e suficiente que $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$.*

Demonstração: A condição é necessária porque $p \circ \tilde{f} = f$ implica $p_* \circ \tilde{f}_* = f_*$. Vejamos que é suficiente. Para isso, seja $y \in Y$ e a um caminho ligando y_0 a y em Y. Então $b = f \circ a$ é um caminho que começa em x_0. Tome $\tilde{b}$ levantamento de b começando em $\tilde{x_0}$. Defina $\tilde{f}(y) = \tilde{b}(1)$. O Corolário 4.35 garante-nos que tal aplicação $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ está bem definida. Tem-se $(p \circ \tilde{f})(y) = p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{b}(1)) = b(1) = f(a(1)) = f(y)$, ou seja, $p \circ \tilde{f} = f$. Mostremos que $\tilde{f}$ é contínua. Daí, seguir-se-á que $\tilde{f}$ é um levantamento de f, e o teorema será demonstrado.

Com efeito, seja $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ uma vizinhança aberta de $\tilde{f}(y)$. Seja U uma vizinhança aberta de $f(y)$ tal que $p|\tilde{U} : \tilde{U} \to U$ é um homeomorfismo. Em virtude da continuidade de f, existe W vizinhança conexa por caminhos (Y é localmente conexo por caminhos) e aberta de y tal que $f(W) \subseteq V$. Fixemos um caminho a ligando y_0 a y. Sendo W conexo por caminhos, podemos tomar, para cada $w \in W$, um caminho $a_w : I \to W$ ligando y a w. Cada caminho $(f \circ a)(f \circ a_w)$ tem como levantamento o caminho $(\widetilde{f \circ a})(\widetilde{f \circ a_w})$, em que $\widetilde{f \circ a_w} = (p|\tilde{U})^{-1} \circ f \circ a_w$. Portanto $\tilde{f}(w) \in \tilde{U}$, isto é, $\tilde{f}(W) \subseteq \tilde{U}$, donde obtêm-se a continuidade de $\tilde{f}$. **(c.q.d)**

As duas proposições que se seguem são, em verdade, consequências do teorema acima. Ambas são essencialmente não triviais, mas quando estudadas a partir da teoria de recobrimento, se tornam extremamente simples.

Proposição 4.38. *Toda função contínua $f : S^2 \to T^2$ é homotópica a uma constante.*

Demonstração: Seja $p : \mathbb{R}^2 \to T^2 = S^1 \times S^1$ o recobrimento $p(x, y) = (e^{ix}, e^{iy})$. O teorema acima assegura que f possui um levantamento $\tilde{f} : S^2 \to \mathbb{R}^2$ se, e somente se, $f_*(\pi_1(S^2)) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}^2))$. Acontece que S^2 é simplesmente conexa, logo a imagem do homomorfismo induzido $f_* : \{0\} = \pi_1(S^2) \to \pi_1(T^2)$ é o grupo trivial, o qual está evidentemente contido em qualquer grupo. Por conseguinte, f admite um levantamento $\tilde{f} : S^2 \to \mathbb{R}^2$. Sendo $\mathbb{R}^2$ um conjunto contrátil, segue-se que f_* é homotópico a uma constante h. Daí, conclui-se que $f = p \circ f_*$ é homotópica a $p \circ h$, a qual é uma função constante porque h o é. **(c.q.d)**

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

Mais geralmente (e com a mesma demonstração), mostra-se que toda função contínua $f : S^n \to T^n$ é homotópica a uma constante.

Proposição 4.39. *Toda função contínua $f : S^n \to S^1$, com $n > 1$, é homotópica a uma constante.*

Demonstração: Seja $\psi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação (de recobrimento) exponencial. Novamente, a imagem do homomorfismo $f_* : \pi_1(S^n) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ é o grupo trivial, em virtude de ser S^n simplesmente conexa. Por conseguinte, f admite um levantamento $\tilde{f} : S^n \to \mathbb{R}$ (Teorema 4.37). Por $\mathbb{R}$ ser contrátil, segue que $\tilde{f}$ é homotópica a uma constante. Da mesma forma que na proposição anterior, isso implica imediatamente f ser homotópica a uma constante. **(c.q.d)**

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\
S^n \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1
\end{tikzcd}$$

Aplicaremos novamente o Teorema 4.37 na página 65 para estabelecer condições segundo as quais uma função complexa contínua admite um ramo de logaritmo. Lembramos que uma função complexa $f : U \to \mathbb{C}$ definida em um aberto U de $\mathbb{C}$, diz-se *holomorfa* em U quando é diferenciável em todos os pontos de U. Se f é contínua e existe uma função $g : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ contínua tal que $f(z) = e^{g(z)}$, para todo $z \in U$, então g chama-se um ramo de $\log f(z)$, e diz-se que f admite um ramo de logaritmo.

Proposição 4.40. *Sejam $U \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f : U \to \mathbb{C}$ contínua. A fim de que exista um ramo de $\log f(z)$ é necessário e suficiente que o número de voltas que $f \circ a : I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dá em torno da origem seja igual a zero, para todo caminho $a : I \to U$ fechado.*

Demonstração: Ora, o número de voltas que $f \circ a$ dá em torno da origem é igual a zero se, e somente se, o homomorfismo induzido $f_* : \pi_1(U, u_0) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ é nulo. Considere o recobrimento $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dado por $p(z) = e^z$. Como $\mathbb{C}$ é simplesmente conexo, o homomorfismo induzido p_* é nulo. Pelo Teorema 4.3, f admite levantamento relativamente a p se, e somente se, $f_* = 0$. Agora, um levantamento g de f deve ser da forma $g(z) = e^{f(z)}$, para todo $z \in U$, isto é, g é um ramo de $\log f(z)$. O resultado segue-se. **(c.q.d)**

Corolário 4.41. *Se $U \subseteq \mathbb{C}$ é aberto simplesmente conexo, então toda função contínua $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ admite um ramo de $\log f(z)$.*

4.3 Homomorfismos e Transformações de Recobrimento

Um espaço X pode admitir vários recobrimentos. Como sabemos, o próprio X é um recobrimento dele próprio. Estudar todos os recobrimentos de um espaço pode ser, portanto, uma tarefa árdua. Entretanto, muitos desses recobrimentos podem ser equivalentes, em um sentido que definiremos a seguir. Essa equivalência é tomada de forma mais geral do que simplesmente topológica, isto é, dois recobrimentos homeomorfos são equivalentes, mas o contrário pode não ocorrer. Para tornar mais simples o entendimento dessas ideias, trataremos dos *grupos propriamente descontínuos de homeomorfismos*.

Dado um espaço topológico X, o conjunto dos homeomorfismos de X em X consiste em um grupo, munido da operação de composição. Qualquer subgrupo G desse grupo chama-se um *grupo de homeomorfismos* de X. Para tornar a notação mais consistente, denotaremos a imagem de um ponto $x \in X$ pelo homeomorfismo $g : X \to X$ por gx.

Existe uma ação $\phi : X \times G \to X$ do grupo G no espaço X, definida por $\phi(x, g) = gx$. A órbita de um ponto $x \in X$ mediante tal ação é o conjunto $G \cdot x = \{gx; g \in G\}$, a qual é a classe de equivalência de x segundo a relação de equivalência $\sim$, dada por $x \sim y \Leftrightarrow y = gx$, para algum $g \in G$. Por conseguinte, dados $x, y \in X$, tem-se $x \cdot G = y \cdot G$ ou $x \cdot G \cap y \cdot G = \varnothing$.

Definição 4.42. *Um grupo G de homeomorfismos de X chama-se* propriamente descontínuo *quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança V tal que, se $g, h \in G$ e $g \neq h$, então $g \cdot V \cap h \cdot V = \varnothing$. Uma vizinhança V desse tipo diz-se uma* vizinhança conveniente *de x.*

A ação ϕ definida anteriormente diz-se **propriamente descontínua** quando G é um grupo propriamente descontínuo.

Equivalentemente, isso significa que para todo $g \in G$, diferente da identidade, tem-se $g \cdot V \cap V = \varnothing$. De fato, se essa condição for satisfeita e $g, h \in G$ são distintos, então $h^{-1}g \neq \mathrm{id}_X$, donde segue que $h^{-1}g \cdot V \cap V = \varnothing$ e, por conseguinte, $g \cdot V \cap h \cdot V = \varnothing$.

Essa condição mostra que nenhum homeomorfismo de um grupo propriamente descontínuo G possui pontos fixos, exceto a identidade. Isso ocorre se, e somente se, $g \neq h$ implicar $gx \neq hx$, para todo $x \in X$. Portanto, a ação φ é livre, ou seja, G age livremente em X.

Exemplo 4.43. Seja $\alpha : S^n \to S^n$ a aplicação antípoda. Então $G = \{\mathrm{id}_{S^n}, \alpha\}$ é um grupo de homeomorfismos de S^n, em virtude de que $\alpha^2 = \mathrm{id}_{S^n}$. Tem-se G propriamente descontínuo, porque todo ponto $x \in S^n$ está contido em uma vizinhança V contida em um hemisfério, a qual cumpre $\alpha \cdot V \cap V = \varnothing$.

Denotaremos por X/G o quociente de X pela relação de equivalência $\sim$, cujas classes são as órbitas $G \cdot x$, para cada $x \in X$. Considere a aplicação canônica $p : X \to X/G$ (a qual é uma aplicação quociente). Note que, dado $A \subseteq X$ aberto, tem-se $p^{-1}(p(A)) = \displaystyle\bigcup_{g \in G} g \cdot A$. Como $g \cdot A$ é aberto em X/G, para todo $g \in G$, segue que $p^{-1}(p(A))$ é aberto em X, ou seja, $p(A)$ é aberto em X/G, ou ainda, p é uma aplicação aberta.

O resultado mais importante acerca dos grupos propriamente descontínuos é exibido abaixo.

Teorema 4.44. *Seja G um grupo de homeomorfismos de X que age livremente num espaço X. São equivalentes:*

1) *G é propriamente descontínuo.*

2) *A projeção canônica $p : X \to X/G$ é um recobrimento.*

3) *$p : X \to X/G$ é localmente injetiva.*

Demonstração: (2) $\Rightarrow$ (3) é evidente. Se (3) ocorre, toda vizinhança aberta V na qual p é injetiva será uma vizinhança conveniente, pois não contém pontos de mesma órbita. Logo (3) $\Rightarrow$ (1). Falta mostrar que (1) $\Rightarrow$ (2). Para isso, tome $y = p(x) \in X/G$ e $U \ni x$ vizinhança conveniente. Tem-se $V = p(U)$ aberto, em virtude de p ser aberta. Além disso, $p^{-1}(V)$ é a reunião dos abertos $g \cdot U$, com g variando em G, os quais são disjuntos porque U é conveniente. A restrição de p a cada um desses abertos $g \cdot U$ é injetiva, logo é um homeomorfismo entre U e $p(g(U)) = p(U) = V$. Portanto, V é uma vizinhança distinguida de y. **(c.q.d)**

Obtemos, assim, as bases teóricas essenciais para se estudar os *homomorfismos de recobrimento* de um espaço X, os quais nos levarão à definição da equivalência (isomorfismo) entre recobrimentos citada no início da discussão, noções que serão englobadas em uma categoria, cujos objetos são recobrimentos de X e cujos morfismos coincidem com tais homomorfismos de recobrimentos que definiremos a seguir.

Definição 4.45. *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ recobrimentos de mesma base. Uma função contínua $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ chama-se um* homomorfismo *entre $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ quando $p_1 = p_2 \circ f$, ou seja, quando o diagrama abaixo comuta.*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 4.46. Sejam $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ e $q : S^1 \times \mathbb{R} \to T^2$ recobrimentos do toro, dados por $p(s,t) = (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$ e $q(z,t) = (z, e^{2\pi i t})$. Então, a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times \mathbb{R}$, definida por $f(s,t) = (e^{2\pi i s}, t)$ é um homomorfismo de recobrimentos. Com efeito, $f \circ q = p$.

Como de praxe, um *isomorfismo* entre recobrimentos p_1 e p_2 é um homomorfismo $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ que é um homeomorfismo. Um isomorfismo entre recobrimentos chama-se um *automorfismo* quando $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$. Um homomorfismo entre recobrimentos diz-se um *endomorfismo* quando $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$. Evidentemente, todo automorfismo é um endomorfismo.

O conjunto dos recobrimentos de X será indicado por Rec(X). Tal conjunto constitui uma categoria Rec(X), cujos morfismos são os homomorfismos de recobrimentos de X e a composição de morfismos é a composição de homomorfismos.

É relevante também estudarmos as propriedades de um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ fixado. Para isso, consideremos o conjunto $G(\tilde{X}|X)$ dos automorfismos do recobrimento p, ao qual associaremos uma estrutura de grupo com a composição. Os elementos de $G(\tilde{X}|X)$ são, portanto, homeomorfismos $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$. Cada um desses elementos será chamado uma *transformação de recobrimento.*

É conveniente estudar como cada fibra de um recobrimento se comporta por meio de transformações de recobrimento e por meio de homomorfismos de recobrimento. A fim de fazê-lo, considere $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ recobrimentos de mesma base e $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ um homomorfismo. Então:

1. f aplica cada fibra $p_1^{-1}(x)$ na fibra $p_2^{-1}(x)$. Ora, tem-se $p_1 = p_2 \circ f$. Assim, se $p_1(y) = x$, então $p_2(f(y)) = p_1(y) = x$, ou seja, $f(y) \in p_2^{-1}(x)$.

2. Um endomorfimo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ aplica cada fibra $p^{-1}(x)$ nela própria.

3. Se f é um isomorfismo, então f é, para cada x, uma bijeção entre as fibras $p_1^{-1}(x)$ e $p_2^{-1}(x)$.

4. Uma transformação de recobrimento consiste, vide itens anteriores, em uma permutação entre cada fibra $p^{-1}(x)$.

Proposição 4.47. *Sejam $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ e $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ recobrimentos, com $\tilde{X}_1$ conexo. Se dois homomorfismos $f, g : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ coincidem em algum ponto $\tilde{x}_1$, então $f = g$.*

Demonstração: Com efeito, as igualdades $p_1 = p_2 \circ f$ e $p_1 = p_2 \circ g$ significam que f e g são levantamentos da função contínua p_1 relativamente a p_2. O resultado segue-se do Teorema 4.21 na página 60. **(c.q.d)**

Vejamos a relação entre grupos de automorfismos de um recobrimento e grupos propriamente descontínuos de homeomorfismos de base conexa.

Proposição 4.48. *Seja G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos do espaço conexo X. Então, G é o grupo de automorfismos do recobrimento $p : X \to G/X$, isto é, $G = G(X|X/G)$.*

Demonstração: Tome $g \in G$. Então $p(g(x)) = G \cdot gx = G \cdot x = p(x)$, seja qual for $x \in X$. Portanto $p \circ g = p$, ou seja, $g \in G(X|X/G)$. Seja, agora, $f : X \to X$ uma transformação de recobrimento. Fixe $x_0 \in X$ e defina $x_1 = f(x_0)$. Como x_0 e x_1 pertencem à mesma fibra (pois f é transformação de recobrimento), existe $g \in G$ tal que $gx_0 = x_1$. Da Proposição 4.47, vem que $f = g$. Portanto $f \in G$. **(c.q.d)**

Uma aplicação direta do resultado acima é o seguinte.

Exemplo 4.49. Os homomorfismos do recobrimento $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ do toro, vide Exemplo 4.46, são as translações $(s, t) \mapsto (s + m, t + n)$, para $m, n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.50 (Existência de homomorfismos). *Sejam $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \to (X, x)$ e $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}) \to (X, x)$ recobrimentos. Suponha $\tilde{X}, \tilde{Y}$ espaços conexos e localmente conexos por caminhos. Existe um homomorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ com $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ se, e somente se, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}))$.*

Demonstração: Ora, um homomorfismo f consiste em um levantamento de p relativamente ao recobrimento q. Assim, o resultado decorre imediatamente do Teorema 4.37 na página 65. **(c.q.d)**

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Corolário 4.51. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento, com $\tilde{X}$ simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Se $q : \tilde{Y} \to X$ é um recobrimento e $\tilde{Y}$ é conexo, então existe um recobrimento $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ para o qual $q \circ f = p$.*

Demonstração: Tome $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ tais que $p(\tilde{x}) = q(\tilde{y})$. Como $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, segue que $\{0\} = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subseteq q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}))$. **(c.q.d)**

Corolário 4.52. *Considere as hipóteses do teorema acima. Para o homomorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ser um isomorfismo, é necessário e suficiente que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = p_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}))$.*

Demonstração: Não há dúvidas sobre a necessidade. Vejamos a suficiência. Ora, assumindo a igualdade, o teorema garante-nos a existência de um homomorfismo $g : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ tal que $g(\tilde{y}) = \tilde{x}$. Tem-se $g \circ f = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ (pois $\tilde{x}$ fica fixo por $g \circ f$) e $f \circ g = \mathrm{id}\,\tilde{Y}$ (mesmo argumento). Portanto, f é homeomorfismo (logo isomorfismo de recobrimentos). **(c.q.d)**

Corolário 4.53. *Seja X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos. Quaisquer dois recobrimentos simplesmente conexos de X são isomorfos.*

Demonstração: Basta ver que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = \{0\} = p_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}))$ e usar o corolário acima. **(c.q.d)**

Em virtude dos resultados acima, obtém-se que, se $\tilde{X}$ é simplesmente conexo e X é conexo e localmente conexo por caminhos, então o recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ recobre qualquer outro recobrimento conexo $\tilde{Y}$ do espaço X. Motivados por isso, consideremos a definição abaixo.

Definição 4.54. *Um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ chama-se* universal *quando $\tilde{X}$ é simplesmente conexo.*

Evidentemente, se X é conexo e localmente conexo por caminhos, então só existe um (a menos de isomorfismos) recobrimento universal de X.

Façamos uma pausa para um exemplo (clássico, como de praxe). Conhecemos vários recobrimentos do círculo S^1. Mas, no fim das contas, quantos recobrimentos do círculo existem, a menos de isomorfismo? Ora, o recobrimento nostálgico $\psi : \mathbb{R} \to S^1$ dado pela aplicação exponencial $\psi(t) = e^{it}$ tem domínio simplesmente conexo, logo é o recobrimento universal de S^1. Vejamos quantos mais recobrimentos (em verdade, não universais) existem, utilizando-se dos resultados vistos acima.

Exemplo 4.55 (Os recobrimentos de S^1)**.** Como $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, seus subgrupos são da forma $n\mathbb{Z}$, com n natural (ou igual a zero). A cada um desses subgrupos, corresponde biunivocamente o recobrimento $p_n : S^1 \to S^1$, dado por $p_n(z) = z^n$ (o qual é um recobrimento de n folhas). Quando $n = 0$, tem-se $p_0 = \psi$ (o recobrimento universal). Em virtude do Teorema 4.50, qualquer outro recobrimento $p : \tilde{X} \to S^1$, com $\tilde{X}$ conexo, deve ser isomorfo a um desses. Logo, os recobrimentos do círculo são ψ e p_n ($n \in \mathbb{N}$) e portanto o grupo das transformações de recobrimentos do círculo é (conforme já esperávamos) isomorfo aos inteiros.

Proposição 4.56. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ recobrimento, com $\tilde{X}$ conexo por caminhos. Seja $x_0 \in X$ um ponto. As afirmações abaixo são equivalentes:*

1) *Para algum $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, o subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ é normal.*
2) *Dados $\tilde{x}, \tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, os subgrupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})))$ e $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$ são normais e iguais.*
3) *Dado $a : I \to X$ caminho fechado com base em x_0, ou todos os levantamentos de a a partir dos pontos da fibra $p^{-1}(x_0)$ são fechados ou nenhum deles é fechado.*

Demonstração: Em virtude da Proposição 4.34 na página 64, a condição 3 significa que $[a] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = H$ ocorre se, e somente se, $[a] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$. Isso equivale a dizer que todos os subgrupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ são iguais conforme $\tilde{x}$ varia na fibra $p^{-1}(x_0)$. Pela Proposição 4.28 na página 62, isso também equivale à normalidade desses subgrupos (pois variar $\tilde{x}$ na fibra $p^{-1}(x_0)$ corresponde a uma conjugação no subgrupo H), e portanto (3) $\Leftrightarrow$ (1). A equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) é evidente. **(c.q.d)**

Definição 4.57. *Um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ chama-se* regular *quando $\tilde{X}$ é conexo por caminhos e uma das condições acima (e portanto todas) é satisfeita.*

Em geral, a regularidade de um recobrimento depende do ponto base $x_0 \in X$ escolhido inicialmente. Esse problema, no entanto, é resolvido quando X é conexo por caminhos (vide Proposição 2.14 na página 28).

Exemplo 4.58. Se $\pi_1(X)$ é abeliano, então todo recobrimento $p : \tilde{X} \to X$, com $\tilde{X}$ conexo por caminhos, é regular. Com efeito, todo subgrupo de um grupo abeliano é normal. Em particular, o Corolário 2.55 na página 40 nos diz que todo recobrimento conexo por caminhos de um grupo topológico é regular.

Exemplo 4.59. Seja $\tilde{X}$ um conjunto conexo por caminhos. Então, todo recobrimento de duas folhas $p : \tilde{X} \to X$ é regular. De fato, todo subgrupo de índice 2 é normal. Daí, e da Proposição 4.56, segue o resultado.

As vezes, um recobrimento regular é chamado de *recobrimento normal*. Vejamos, agora, a relação mais importante entre automorfismos de um recobrimento e sua regularidade. Isso será expresso na Proposição 4.60, a qual utilizar-se-á do teorema abaixo (e seus corolários).

Antes de prosseguir, vamos declarar $\tilde{X}$ conexo e localmente conexo por caminhos, até o final dessa seção.

Seja $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento e $\tilde{x}, \tilde{y} \in p^{-1}(x_0)$. Pelo Teorema 4.37 na página 65, a existência de um endomorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ equivale a escrever que $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{y})) = G$. Além disso, f é um automorfismo se, e somente se, tem-se $H = G$. Tendo em vista esse fato, considere a:

Proposição 4.60. *Um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é regular se, e somente se, dados dois pontos $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$, existe um automorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ com $f(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$.*

Demonstração: Se p é regular, então $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}))$. Pelo Teorema 4.37, isso significa que existe um endomorfismo $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ com $f(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$. Pelo Corolário 4.52, segue que f é um isomorfismo. Reciprocamente, a existência do automorfismo f equivale a dizer que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_1}))$, para quaisquer $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in p^{-1}(x_0)$, ou seja, todos os subgrupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ são normais e iguais quando $\tilde{x}$ percorre a fibra $p^{-1}(x_0)$, ou seja, p é regular. **(c.q.d)**

Noutras palavras, o recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ é regular se, e somente se, o grupo $G(\tilde{X}|X)$ das transformações de recobrimento de p opera transitivamente nas fibras.

Exemplo 4.61. Sejam X um espaço conexo por caminhos e G um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de X. Pela Proposição 4.44 na página 67, segue que a aplicação quociente $p : X \to X/G$ é uma aplicação de recobrimento. Mostremos que p é regular. De fato, tome $x_0, x_1 \in X$ tais que $p(x_0) = p(x_1)$, ou seja, $x_1 = g(x_0)$, para algum $g \in G$. Pela Proposição 4.44 na página 67, G é o grupo de automorfismos de p, ou seja, g é um automorfismo. Assim, a Proposição 4.60 assegura que p é regular.

Mostraremos, agora, que, sobre certas hipóteses, vale a recíproca do exemplo anterior, isto é, todo recobrimento regular pode ser considerado como a aplicação quociente sobre o espaço das órbitas de um certo grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de $\tilde{X}$.

Teorema 4.62. *Seja $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento, com $\tilde{X}$ conexo e X conexo e localmente conexo por caminhos. Sejam $G = G(\tilde{X}|X)$ e $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ o recobrimento quociente. Se p é regular, então existe um homeomorfismo $f : \tilde{X}/G \to X$ para o qual o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\
\tilde{X}/G \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Tome $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$. Então $p(\tilde{x}) = p(\tilde{y})$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{x}) = \tilde{y}$. Isso equivale a dizer que $G \cdot \tilde{x} = G \cdot \tilde{y}$, ou seja, $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$. Passando-se ao quociente, obtemos uma aplicação contínua e bijetora $f : \tilde{X}/G \to X$ tal que $f \circ \pi = p$. Sendo p uma aplicação aberta, segue que f também o é. Por conseguinte, f é um homeomorfismo. **(c.q.d)**

Vejamos como a regularidade de um recobrimento facilita o cálculo de grupos fundamentais. Para isso, o seguinte resultado é bastante expressivo.

Proposição 4.63. *Sejam $\tilde{X}$ conexo por caminhos e X conexo e localmente conexo por caminhos. Seja $p : (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to (X, x_0)$ um recobrimento. Se $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \subseteq \pi_1(X, x_0)$, então $G(\tilde{X}|X) \cong N(H)/H$, onde $N(H)$ é o normalizador de H em $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração: Defina $\varphi : N(H) \to G(\tilde{X}|X)$ pondo $\varphi([a]) = g$, em que $g : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é a transformação de recobrimento tal que $g(\tilde{x_0}) = \tilde{x_1}$, onde $\tilde{x_0} = \tilde{a}(0)$, $\tilde{x_1} = \tilde{a}(1)$ e $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ é o levantamento de a a partir de $\tilde{x_0}$. Das proposições 4.29 na página 62 e 4.47 na página 69, segue que φ está bem definida.

Mostremos que φé um homomorfismo. Para isso, tome $[a], [b] \in N(H)$ e sejam $\tilde{a}, \tilde{b} : I \to \tilde{X}$ levantamentos de a e b, respectivamente, começando em $\tilde{x_0}$. Escreva $\tilde{a}(1) = \tilde{x_1}$ e $\tilde{h}(1) = \tilde{x}$. Se g é uma transformação de recobrimento que leva $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1}$ e h é uma transformação de recobrimento que leva $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x}$, então $(g \circ h)(\tilde{x_0}) = g(h(\tilde{x_0})) = g(\tilde{x})$. Além disso, note que $\tilde{a}(g \circ \tilde{b})$ é um levantamento de ab começando em $\tilde{x_0}$. Tem-se, também, $(\tilde{a}(g \circ \tilde{b}))(1) = (g \circ \tilde{b})(1) = g(\tilde{b}(1)) = g(\tilde{x})$. Por conseguinte, $\varphi([ab]) = g \circ h = \varphi([a]) \circ \varphi([b])$.

Dado $f \in G(\tilde{X}|X)$, coloquemos $\tilde{x_1} = f(\tilde{x_0})$. Seja $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ um caminho ligando $\tilde{x_0}$ a $\tilde{x_1}$. Então $a = p \circ \tilde{a}$ é um caminho fechado em X com base em x_0. Além disso, sendo f um automorfismo, deve-se ter $H = [a]^{-1}H[a]$ (vide Proposição 4.28 na página 62 e Proposição 4.50), ou seja, $[a] \in N(H)$. Portanto, $\varphi([a]) = f$.

Finalmente, note que $\varphi([a]) = \mathrm{id}_{\tilde{X}} \Leftrightarrow \tilde{a}(1) = \tilde{x_0} \Leftrightarrow [a] \in H$. Isso significa que H é o núcleo de φ. Pelo Teorema do Isomorfismo para grupos, segue o resultado. **(c.q.d)**

Corolário 4.64. *Considere as hipóteses do teorema. Se o recobrimento p é regular, então $G(\tilde{X}|X) \cong \pi_1(X, x_0)/H$.*

De fato, p regular significa que H é normal, logo $N(H) = \pi_1(X, x_0)$.

Corolário 4.65. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é o recobrimento universal de X e $\tilde{X}$ é localmente conexo por caminhos, então $G(\tilde{X}|X) \cong \pi_1(X, x_0)$*

4.4 Existência e Classificação dos Espaços de Recobrimento

Passemos ao problema de existência e classificação dos recobrimentos. Mais precisamente, dado um espaço X conexo por caminhos, existem duas perguntas importantes a serem respondidas, a saber: X possui recobrimento universal? e quantos recobrimentos X admite, a menos de isomorfismos?

O método segundo o qual responderemos essas perguntas consistir-se-á em associar a cada recobrimento p de um espaço X conexo por caminhos, o subgrupo de $\pi_1(X)$ dado pela imagem do homomorfismo induzido p_*. Tal correspondência chama-se a *Correspondência de Galois*. O nome não é uma surpresa, pois em verdade, os conceitos envolvidos lembram bastante o Teorema Fundamental da Teoria de Galois.

Definição 4.66. *Um espaço X diz-se* semilocalmente simplesmente conexo *quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $U \subseteq X$ tal que a inclusão $\imath : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ é trivial.*

Noutras palavras, a fim de que X seja semilocalmente simplesmente conexo, é necessário e suficiente que todo ponto $x \in X$ possua uma vizinhança U tal que todo caminho fechado em U é homotópico a uma constante em X.

Exemplo 4.67. Todo conjunto simplesmente conexo é semilocalmente simplesmente conexo. Em particular, todo conjunto contrátil é semilocalmente simplesmente conexo. A recíproca não é válida. O círculo S^1, por exemplo, não é contrátil mas é localmente simplesmente conexo, pois todo ponto x pertence a um semicírculo, o qual é um conjunto contrátil por ser homeomorfo a um intervalo aberto.

Proposição 4.68. *Se $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento e $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então X é semilocalmente simplesmente conexo.*

Demonstração: Tome $x \in X$. Se U é uma vizinhança distinguida de x, então existe um aberto $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ tal que a restrição de p a $\tilde{U}$ aplica-se homeomorficamente sobre U. Todo caminho fechado a em U levanta-se, portanto, a um caminho fechado $\tilde{a}$ em $\tilde{U}$, o qual deve ser homotópico a um caminho constante, em virtude de ser $\pi_1(\tilde{X}) = \{0\}$. Por conseguinte, o próprio caminho $a = p \circ \tilde{a}$ deve ser homotópico a uma constante em X. O resultado segue. **(c.q.d)**

Não se deve confundir um espaço localmente simplesmente conexo com um espaço semilocalmente simplesmente conexo. Todo conjunto localmente simplesmente conexo é, evidentemente, semilocalmente simplesmente conexo. Em particular, as variedades topológicas e os poliedros são localmente simplesmente conexos. Entretanto, a recíproca não se aplica, conforme nos mostra o exemplo próximo.

Exemplo 4.69. Seja X a reunião, para cada $n \in \mathbb{N}$, dos círculos C_n de raio $1/n$ e centro $(1/n, 0)$. O cone C de origem $O = (0, 0)$ e base X é contrátil, logo semilocalmente simplesmente conexo, mas não é localmente simplesmente conexo, pois não há vizinhança alguma da origem que seja simplesmente conexa.

O (corolário do) teorema a seguir é a resposta ao problema da existência de recobrimentos universais com base conexa. Em particular, ele estabelece que a recíproca da Proposição 4.68 é valida para espaços localmente conexos por caminhos.

Teorema 4.70. *Seja X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Dados $x_0 \in X$ e um subgrupo $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$, existem um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$, com $\tilde{X}$ conexo (por caminhos), e um ponto $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$ tais que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = H$.*

Demonstração: Tome $a, b : I \to X$ caminhos começando em x_0. Escreva $a \sim b$ sempre que $a(1) = b(1)$ e $[ab^{-1}] \in H$. Tal $\sim$ é, evidentemente, uma relação de equivalência no conjunto Y dos caminhos de X que começam em x_0. A classe de equivalência de um caminho a pela relação $\sim$ será denotada por $\overline{a}$. Seja $\tilde{X}$ o quociente de Y por $\sim$ e defina a aplicação $p : \tilde{X} \to X$ pondo $p(\overline{a}) = a(1)$, a qual está bem definida em virtude da definição de $\sim$.

Vamos introduzir uma topologia em $\tilde{X}$ segundo a qual p é um recobrimento e $\tilde{X}$ é conexo por caminhos. Consideremos a coleção $\mathfrak{B}$ formada pelos abertos $U \subseteq X$, conexos por caminhos, e tais que todo caminho em U é homotópico a uma constante em X. Essa coleção $\mathfrak{B}$ é uma base de X, em virtude de X ser localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Agora, dados $\overline{a} \in \tilde{X}$ e $U \in \mathfrak{B}$ com $a(1) \in U$, coloquemos $\tilde{U}(\overline{a}) = \{\overline{ab}; b(I) \subseteq U\}$.

Os conjuntos $\tilde{U}(\overline{a})$, quando a varia em Y, formam a base de uma topologia em $\tilde{X}$. Com efeito, todo ponto $\overline{a} \in \tilde{X}$ pertence a $\tilde{U}(\overline{a})$, em que $U \in \mathfrak{B}$ contém o ponto $a(1)$. Além disso, a interseção $\tilde{U}(\overline{a}) \cap \tilde{V}(\overline{b})$ contém evidentemente $\tilde{W}(\overline{ab})$, em que $W = U \cap V$, donde segue a afirmação.

Com essa topologia em $\tilde{X}$, a aplicação p é aberta e contínua. De fato, se U é aberto em X e a é um caminho em U que começa em x_0 e termina em $a(1) \in U$, então $p^{-1}(U) = \bigcup_{a \in Y \cap U} \tilde{U}(\overline{a})$, donde segue a continuidade de p. O fato de p ser aberta decorre imediatamente de $\mathfrak{B}$ ser base de X e p levar termos da base de $\tilde{X}$ em elementos de $\mathfrak{B}$.

Além disso, $p|\tilde{U}(\overline{a})$ é uma bijeção (logo um homeomorfismo) sobre U. Dois conjuntos da forma $\tilde{U}(\overline{a})$ e $\tilde{U}(\overline{b})$, com $a, b \in Y \cap U$, coincidem ou são disjuntos. Como $p^{-1}(U)$ é uma reunião de abertos desse tipo, segue-se que p é um recobrimento.

Dado um caminho $a : I \to X$, de origem x_0, defina $a_t : I \to X$ pondo $a_t(s) = a(st)$, para cada $t \in I$. Noutras palavras, a_t é uma reparametrização ao intervalo I da restrição $a|[0, t]$. O levantamento de a com início no ponto $\tilde{x_0} = \overline{e_{x_0}}$ é o caminho $\tilde{a} : I \to \tilde{X}$ definido por $\tilde{a}(t) = \overline{a_t}$. Uma conta bem simples mostra que qualquer ponto $\overline{a} \in \tilde{X}$ liga-se a $\tilde{x_0}$ por meio do caminho $t \mapsto \overline{a_t}$. Isso implica $\tilde{X}$ ser conexo por caminhos.

Finalmente, uma classe de homotopia $[a]$ pertence a $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$ se, e somente se, $\tilde{a}$ é um caminho fechado, o que ocorre se, e somente se, $\overline{a} = \overline{e_{x_0}}$, ou seja, $\tilde{a} \in H$. Portanto $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})) = H$ e o teorema está demonstrado. **(c.q.d)**

Corolário 4.71. *Seja X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. Então X admite um recobrimento universal $p : \tilde{X} \to X$.*

Juntando-se o Teorema de Existência com os resultados a respeito de homomorfismos de recobrimento vistos anteriormente, obtêm-se o Teorema de Classificação dos Recobrimentos, o qual mostra de que maneira os recobrimentos podem ser classificados por meio dos subgrupos do grupo fundamental da base.

Teorema 4.72 (Classificação)**.** *Seja X conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo. O conjunto das classes de isomorfismo de recobrimentos conexos por caminhos que preservam ponto-base estão em bijeção com o conjunto dos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. Se ignorarmos os pontos base, tem-se uma* *bijeção entre classes de isomorfismo de recobrimentos conexos por caminhos e classes de conjugação dos subgrupos de* $\pi_1(X, x_0)$.

Demonstração: Para cada recobrimento $p : \tilde{X} \to X$, com $\tilde{X}$ conexo por caminhos, coloquemos $\phi(p) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}))$. O Teorema 4.70 e o Corolário 4.71 garantem que ϕ é a bijeção referente à primeira afirmação. A segunda afirmação segue-se desses dois resultados acima e da Proposição 4.28 na página 62. **(c.q.d)**

Exemplo 4.73 (Recobrimento da Garrafa de Klein)**.** Seja K a garrafa de Klein. Já vimos que $G = \pi_1(K)$ possui dois geradores a e b, os quais satisfazem a relação $ab = ba^{-1}$ (veja o esquema de identificação da garrafa de Klein). Segue que podemos escrever $G = \langle a, b;\ abab^{-1} = 1\rangle$.

Observe que $a^x b^y = 1 \Leftrightarrow a^x = b^{-y} \Leftrightarrow x = y = 0$. Por conseguinte, tem-se $a^x b^y = a^z b^w \Leftrightarrow x = y$ e $z = w$.

Defina $H = \langle a^4, b\rangle$. O recobrimento que corresponde ao subgrupo H consiste numa superfície S. Seja $\varphi : G \to H$ pondo $\varphi(a) = a^4$ e $\varphi(b) = b$, a qual é evidentemente sobrejetiva. Então, φ é um homomorfismo de grupos (satisfazendo a condição de compatibilidade $\varphi(a^4ba^4b^{-1}) = a^4a^{-4}bb^{-1} = 1$).

Além disso, a observação feita acima mostra que $a^x b^y \in ker\varphi$ se, e somente se, $x = y = 0$, ou seja, φ é injetiva. Por conseguinte, φ é um isomorfismo de grupos e S é homeomorfa a K.

Por outro lado, H não é normal em G. Com efeito, $aba^{-1} = a^2b \notin H$. Isso significa que H corresponde a um recobrimento não normal da garrafa de Klein.

4.5 Grafos e Grupos Livres

Mostraremos, agora, uma importante aplicação do conteúdo exposto até aqui à teoria dos grupos. Mais precisamente, provaremos que todo subgrupo de um grupo livre é ainda um grupo livre. Isso será feito estudando-se os recobrimentos de certos tipos de espaços topológicos, chamados grafos. Na verdade, os grafos que nos serão de interesse maior são aqueles que chamaremos de árvores, mas para se estudar árvores com certa eficácia convém que nos concentremos nas propriedades gerais dos grafos, em primeira mão. Vejamos as definições e os exemplos mais importantes acerca desses quesitos.

Definição 4.74. *Sejam X um espaço topológico Hausdorff e $X^0 \subseteq X$ um conjunto discreto e fechado. Diz-se que o par (X, X^0) é um* grafo *se, e somente se, as condições a seguir são satisfeitas:*

1. *$X \setminus X^0$ é reunião disjunta de subconjuntos abertos $a_i \subseteq X$, $i \in J$, cada um dos quais é homeomorfo ao intervalo $(0, 1)$. Tais subconjuntos chamam-se* arestas abertas *de (X, X^0).*

2. *A fronteira $\partial(a_i) = \overline{a_i} \setminus a_i \subseteq X$ de cada aresta a_i, com $i \in J$, é não vazia e possui exatamente um ou exatamente dois pontos. Se $\partial(a_i)$ possuir um único ponto, então $\overline{a_i}$ é homeomorfo a S^1. Caso contrário, $\tilde{a}_i$ é homeomorfo a $I = [0, 1]$. Os fechos $\overline{a_i}$ das arestas abertas a_i chamam-se* arestas fechadas*, ou simplesmente* arestas *de (X, X^0).*

3. *A topologia de X coincide com a topologia fraca relativamente ao conjunto das arestas, isto é: um conjunto $A \subseteq X$ é aberto (respectivamente fechado) se, e somente se, $A \cap \overline{a_i}$ é aberto (respectivamente fechado), para todo $i \in J$.*

Nesse caso, os pontos do conjunto X^0 chamam-se os vértices *do grafo* (X, X^0).

Como de costume, sempre que ficar implícito qual o conjunto de vértices $X^0 \subseteq X$ que torna (X, X^0) um grafo, escreveremos simplesmente o grafo X em vez do grafo (X, X^0).

A fim de que uma função $f : X \to Y$ de um grafo X num espaço Y seja contínua, é necessário e suficiente que seja contínua a restrição de f ao fecho de cada uma das arestas de X. Isso segue imediatamente do fato de que X possui a topologia fraca relativamente às arestas $\overline{a_i}$.

Exemplo 4.75. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja C_n o círculo de centro $(1/n, 0)$ e raio $(1/n)$. Sejam $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ a reunião desses círculos e $X^0 = \{(0,0)\}$ a origem do plano. Quando X é considerado como um subespaço de $\mathbb{R}^2$, o par (X, X^0) não é um grafo. Com efeito, a condição (3) da definição acima não é satisfeita: basta ver que o conjunto $A = \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2;\ \ n \in \mathbb{N}\}$ não é fechado em X, porque $(0,0) \in \overline{A} \setminus A$, mas $A \cap \overline{C_n}$ é fechado, para todo $n \in \mathbb{N}$ (pois é um ponto).

Exemplo 4.76. Tomando $X = \mathbb{R}$ e $X^0 = \mathbb{Z}$, vê-se imediatamente que (X, X^0) é um grafo, cujas arestas são os intervalos da forma $[n, n+1]$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 4.77. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x = n\}$ e $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = n\}$. Escrevendo $C_n = A_n \cup B_n$ e $D_n = A_n \cap B_n$, defina $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ e $X^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Então (X, X^0) é um grafo. A verificação é imediata.

Uma das ideias mais importantes inerente ao estudo dos grafos é que as propriedades topológicas, como compacidade e conexidade, são facilmente verificáveis. A proposição abaixo estabelece uma caracterização dos grafos compactos, e o corolário da Proposição 4.83 na página 77 estabelecerá a caracterização dos grafos conexos.

Definição 4.78. *Um grafo (X, X^0) chama-se* finito *quando possui finitos vértices e arestas.*

Definição 4.79. *Um grafo (X, X^0) diz-se* localmente finito *quando cada vértice pertence a um número finito de arestas.*

Proposição 4.80. *Um grafo (X, X^0) é compacto se, e somente se, é finito.*

Demonstração: Suponha (X, X^0) compacto, Como X^0 é fechado no espaço compacto X, tem-se X^0 compacto. Mas X^0 é discreto. Assim, X^0 é compacto e discreto, portanto finito. Agora, para cada vértice $y \in X^0$, podemos tomar uma vizinhança aberta V_y tal que nenhuma aresta aberta de (X, x^0) esteja contida numa reunião dos V_y (qualquer reunião desse tipo é finita em virtude de ser X^0 finito).

Então, da cobertura aberta $\{V_y; y \in X^0\} \cup \{a_i; i \in J\}$, em que $(a_i)_{i\in J}$ é a coleção de arestas abertas de X, podemos extrair uma subcobertura finita. Entretanto, como as arestas abertas são disjuntas duas a duas e como nenhuma reunião dos V_y contém alguma aresta aberta de X, segue-se que todas as arestas abertas devem pertencer a tal subcobertura. Portanto a própria cobertura deve ser finita, donde segue que o conjunto de arestas é finito.

Reciprocamente, se (X, X^0) é finito, então $X = X^0 \cup \bigcup_{i\in J} \overline{a_i}$ é a reunião finita de conjuntos compactos. Por conseguinte, X é compacto. **(c.q.d)**

Corolário 4.81. *Um grafo é localmente finito se, e somente se, é localmente compacto.*

Definição 4.82. *Um* subgrafo *de um grafo* (X, X^0) *é um subpar* $(A, A^0) \subseteq (X, X^0)$*, com* $A^0 = X^0 \cap A$*, que ainda é um grafo tomando-se em* A *a topologia induzida por* X*.*

Equivalentemente, a fim de que $A \subseteq X$ seja um subgrafo de X é necessário e suficiente que A seja reunião de vértices e arestas fechadas de X.

Um vértice $x \in X^0$ diz-se *isolado* quando não pertence ao fecho de aresta alguma.

Proposição 4.83. *Todo ponto* $x \in X$ *de um grafo* X *possui um sistema fundamental de vizinhanças contráteis.*

Demonstração: Isso é evidente se x for ponto interior a alguma aresta (a qual é contrátil por ser homeomorfa a um intervalo da reta, que é contrátil) ou um vértice isolado de X. Consideremos o caso de x ser um vértice não isolado. Seja U uma vizinhança aberta de x. Para cada aresta a contendo x, tem-se $U \cap \overline{a}$ vizinhança aberta de x em $\overline{a}$. A condição (2) da definição de grafo garante-nos a existência de uma vizinhança V de x tal que $V \cap \overline{a}$ é uma vizinhança contrátil e aberta em $\overline{a}$, com $V \cap \overline{a} \subseteq U \cap \overline{a}$, e tal que, para toda aresta a' que não contém x, tem-se $V \cap \overline{a'} = \varnothing$. Por definição, V é aberto em X. Resta ver que V é contrátil em X (sabemos apenas que V é contrátil em $\overline{a}$).

Com efeito, para cada aresta a contendo x, o ponto $\{x\}$ é imagem de uma deformação retrátil de $V \cap \overline{a}$, ou seja, existe $\varphi_a : (V \cap \overline{a}) \times I \to V \cap \overline{a}$ função contínua tal que $\varphi_a(y, 0) = y$, $\varphi_a(y, 1) = x$ e $\varphi_a(x, t) = x$, para todo $t \in I$. Definimos então, para cada aresta a contendo x, $\varphi : V \times I \to V$ pondo $\varphi|(V \cap \overline{a}) = \varphi_a$, a qual é contínua por construção. Segue que $\{x\}$ é imagem uma deformação retrátil de V e portanto V é contrátil. **(c.q.d)**

Corolário 4.84. *Todo grafo é localmente conexo por caminhos e semilocalmente simplesmente conexo.*

Corolário 4.85. *Um grafo* X *é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.*

Demonstração: De fato, todo conjunto conexo e localmente conexo é conexo por caminhos, vide apêndice. **(c.q.d)**

Em particular, num grafo conexo, quaisquer dois vértices v e w podem ser ligados por um *caminho reduzido de arestas*, isto é, um caminho $\lambda : I \to X$ tal que $\lambda(I) = \overline{a_1} \cup \cdots \cup \overline{a_n}$, com $\lambda(0) = v$ vértice de $\overline{a_1}$, $\lambda(1) = w$ vértice de $\overline{a_n}$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, a interseção $\overline{a_i} \cap \overline{a_{i+1}} = \{v_i\}$ é um vértice e tem-se $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$. Noutras palavras, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ das interseções de arestas de índices consecutivos contém $n-1$ vértices de X. Tais vértices chamam-se os *vértices intermediários* de λ. O caminho λ pode, então, ser identificado com a sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de arestas de X, fato que justifica o nome dado acima.

Tem-se $a_i \neq a_j$, sempre que $i \neq j$, pois caso contrário um dos vértices seria interseção de dois pares distintos de arestas consecutivas ou a interseção delas conteria mais do que um ponto, a saber, uma aresta toda. Logo, as arestas que identificam λ são todas distintas, ou seja, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ é formado por n elementos. Toda aresta é, evidentemente, um caminho de arestas ligando seu(s) vértice(s). Os caminhos constantes serão também considerados caminhos reduzidos de arestas, aos quais se associa a sequência vazia de arestas.

A definição acima não é universal. Alguns autores definem um caminho reduzido de arestas de forma bem mais geral (veja [4]), porém essa ideia não possui relevância ao objetivo que almejamos no momento.

O *comprimento* de um caminho de arestas $\lambda = (a_1, \ldots, a_n)$ é o número n de coordenadas de λ. Caso λ seja constante, diz-se que o comprimento de λ é zero. Dados dois vértices $v, w \in X$, sempre existe um caminho reduzido $\hat{\lambda}(v, w) = (a_1, \ldots, a_n)$ de arestas com comprimento mínimo no conjunto de todos os caminhos reduzidos de arestas entre v e w.

Se $\lambda = (a_1, \ldots, a_n)$ é um caminho reduzido de arestas começando em v e terminando em w, então o caminho inverso λ^{-1} é ainda um caminho reduzido de arestas, a saber $\lambda^{-1} = (a_n, \ldots, a_1)$. Dois caminhos reduzidos de arestas são iguais quando possuem o mesmo comprimento e as arestas que os formam coincidem coordenada a coordenada.

O caso mais interessante de um grafo conexo é expresso na definição que se segue.

Definição 4.86. *Um grafo conexo X de arestas $(a_i)_{i \in J}$ chama-se uma* árvore *quando, dados dois vértices $u, v \in X^0$, existe um único caminho reduzido de arestas começando em u e terminando em v, isto é, quando $X \setminus a_i$ é desconexo, para todo $i \in J$.*

Exemplo 4.87. Todo ponto é uma árvore. Além disso, grafos formados por uma única aresta homeomorfa a I e $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ são exemplos de árvores. Por outro lado, qualquer polígono convexo em $\mathbb{R}^2$ é um grafo (basta tomar seus lados como sendo as arestas e seus vértices como sendo os vértices do grafo), mas não é uma árvore, pois ao retirarmos qualquer aresta dele, ainda é possível ligar quaisquer dois de seus vértices por um caminho de arestas. Visto de outra forma, o caminho que percorre todas as arestas do polígono é um caminho fechado não constante, o que não pode ocorrer numa árvore.

Exemplo 4.88. Uma árvore T não pode conter arestas homeomorfas a S^1, pois uma aresta desse tipo é um caminho reduzido de arestas que leva um ponto nele próprio, fato que ocorre também para todos os caminhos constantes. Por conseguinte, todo grafo que contém (ao menos) uma aresta e possuindo um único vértice não pode ser uma árvore, pois nesse caso todas as suas arestas devem ser homeomorfas ao círculo.

A respeito da topologia das árvores, valem as seguintes propriedades.

1. Um subgrafo conexo de uma árvore é uma árvore.

   Com efeito, se o conjunto obtido ao retirarmos uma aresta aberta de um subgrafo conexo de uma árvore T for ainda conexo, então, em particular, T menos essa aresta seria também conexo, o que contradiz o fato de X ser uma árvore.

2. Numa árvore, quaisquer dois vértices podem ser ligados por um único reduzido caminho de arestas de comprimento mínimo. (Evidente).

   Um *circuito* em um grafo X é uma sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de arestas distintas tais que, pondo v_i, u_i como sendo os vértices de a_i, com $i \in \{1, \ldots, k\}$, tem-se $u_1 = v_n$ e $u_{i+1} = v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

3. Um grafo conexo é uma árvore se, e somente se, não contém circuitos.

   De fato, a reunião das arestas fechadas de todo circuito em um grafo X é um subgrafo conexo. Por conseguinte, se X fosse uma árvore, tal reunião também o seria. Mas nenhum circuito é uma árvore, pois um circuito ou contém alguma aresta fechada, ou contém um caminho reduzido de arestas não constante.

   Um vértice num grafo X chama-se *livre* quando pertence a uma única aresta.

4. Toda árvore finita possui algum vértice livre.

   Tome uma aresta a_1 de vértices u_1, v_1. Se v_1 não é livre, deve pertencer a uma aresta a_2 de vértices $u_2 = v_1$ e v_2. Se v_2 não é livre, então pertence a uma aresta a_3 de vértices $u_3 = v_2$ e v_3. Prosseguindo assim, e tendo em vista que a árvore é finita, obteremos um vértice livre ou uma aresta a_n contendo um vértice v_n que deve coincidir com um dos u_j anteriores. Isso nos leva a um circuito, fato que é impossível em uma árvore.

A propriedade mais importante das árvores expressa-se abaixo.

Proposição 4.89. *Toda árvore é contrátil.*

Demonstração: Suponha, primeiro, uma árvore finita. Procederemos por indução no número n de arestas. O caso $n = 1$ é evidente. Se a proposição vale para toda árvore contendo k arestas, então seja T uma árvore contendo $k + 1$ arestas. Pelo item 4 acima, deve existir uma aresta a de vértices u e v, um dos quais (digamos u) não pertence a nenhuma outra aresta de T. Contraindo tal aresta a ao vértice u e mantendo fixos os demais pontos de T, obtêm-se uma deformação retrátil de T, a qual nos dá uma equivalência homotópica entre T e uma subárvore de k arestas, a qual é contrátil, por hipótese de indução, donde segue que T é contrátil. Isso demonstra o caso finito.

Suponha agora T árvore infinita. Tome $x_0 \in T$ e considere, para cada $v \in T$, um caminho $\gamma_v : I \to T$ começando em v e terminando em x_0. Denotando por T^0 o conjunto dos vértices de T, defina $H : T^0 \times I \to T$ pondo $H(v,t) = \gamma(t)$. Estenderemos H à uma homotopia $\overline{H} : T \times I \to T$ entre id_T e a aplicação constante $x \mapsto x_0$, o que demonstrará o resultado.

Para isso, tome uma aresta a de X. A reunião das imagens dos lados do retângulo $a \times I$ está contida numa subárvore finita Y de T. Com efeito, todos os lados de $a \times I$ são compactos, logo suas imagens por H estão contidas num número finito de arestas, ou seja, numa subárvore finita de T, e a reunião finita de subárvores finitas é ainda uma subárvore finita. Como Y é contrátil, a aplicação $H' : \partial(a \times I) \to Y$ dada por $H'(u,t) = \gamma_u(t)$, $H'(v,t) = \gamma_v(t)$, $H'(x,0) = x$ e $H'(x,1) = x_0$ (em que $t \in I$ e $u, v \in T^0$ é homotópica a uma constante, logo pode ser estendida a uma função contínua $\overline{H}_a : a \times I \to T$, em virtude do Teorema 1.28 na página 15 (Observação 01). Finalmente, obtemos a homotopia desejada $\overline{H} : T \times I \to T$ pondo $\overline{H}|(a \times I) = \overline{H}_a$, para cada aresta a de T. **(c.q.d)**

Definição 4.90. *Seja X um grafo conexo. Uma árvore $T \subseteq X$ de X diz-se maximal se, e somente se, $T \subseteq T'$ implicar $T = T'$, para qualquer árvore $T' \subseteq X$ de X.*

Para o próximo teorema, o qual declara-se de extrema importância ao resultado que almejamos demonstrar, relembremos o famoso *Lema de Zorn*, o qual é válido uma vez aceitado o Axioma da Escolha como verdade.

Lema 4.91 (Zorn). *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia $(x_i)_{i\in J}$ de elementos de X possui uma cota superior, então X admite elemento maximal.*

Teorema 4.92. *Qualquer árvore $T \subseteq X$ de um grafo X está contida em uma árvore maximal $\hat{T}$.*

Demonstração: O teorema é evidente caso X seja finito, pois nesse caso em X está contido um número finito de árvores. Suponhamos X infinito. Seja $(T_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cadeia de árvores de X que contém T e ordenada pela inclusão. Mostremos que $T' = \bigcup_{\lambda\in L} T_\lambda$ é uma árvore de X contendo T. Com efeito, T' é reunião de vértices e arestas fechadas de X, portanto é um subgrafo de X. Além disso, T' é conexo e contém T, porque é uma reunião de conjuntos conexos, cada um dos quais contém a árvore T.

Finalmente, suponha que exista um caminho $\gamma = (a_1, \ldots, a_n)$ fechado de arestas de em T'. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tome $\lambda_i \in L$ tal que $a_i \subseteq T_{\lambda_i}$. Como $(T_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma cadeia ordenada por inclusão, deve haver $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que que $a_i \subseteq T_{\lambda_i} \subseteq T_{\lambda_{i_0}}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por conseguinte, o caminho γ seria um caminho fechado de arestas em $T_{\lambda_{i_0}}$, o que contradiz o fato de $T_{\lambda_{i_0}}$ ser uma árvore. Segue que tal γ não pode existir e, portanto, T' é uma árvore. Pelo Lema de Zorn, segue o resultado. **(c.q.d)**

Proposição 4.93. *Seja X um grafo e $T \subseteq X$ uma árvore. A fim de que $T \subseteq X$ seja maximal, é necessário e suficiente que T contenha todos os vértices de X.*

Demonstração: *Necessário*: Procederemos por absurdo. Se a implicação for falsa, então existe uma aresta a com um vértice em T e o outro em $X \setminus T$. Ou seja, $\overline{a} \nsubseteq T$. Por outro lado, $\overline{a} \cup T$ é ainda uma árvore, a qual contém T propriamente. Isso contradiz a maximalidade de T. Por conseguinte, deve ser $X^0 \subseteq T$.

Suficiente: Se toda aresta de T estiver em X então $T = X$ e não há o que fazer. Caso contrário, existe uma aresta a de X tal que $a \nsubseteq T$. Entretanto, como os vértices de a estão em T, tem-se $T' = T \cup a$ subgrafo conexo de X que contém um caminho fechado de arestas. Isso significa que T' não pode ser uma árvore. Por conseguinte, nenhum subgrafo de X contendo T propriamente pode ser uma árvore, donde segue que T é maximal. **(c.q.d)**

Teorema 4.94. *Sejam X um grafo conexo e $T \subseteq X$ uma árvore maximal de X. Então $\pi_1(X)$ é um grupo livre no conjunto $\{a_i\}_{i\in J}$ das arestas de $X \setminus T$.*

Demonstração: Sabemos que a projeção $p : X \to X/T$ é uma equivalência homotópica, pois T é contrátil (Proposição 1.48 na página 21). Portanto, o quociente X/T consiste num grafo com um único vértice , ou seja, é homeomorfo a um buquê de círculos, cujo grupo fundamental é livre, gerado pelas imagens dos caminhos dados por arestas em $X \setminus T$, vide terceira aplicação do Teorema de Van Kampen. **(c.q.d)**

Proposição 4.95. *Todo recobrimento de um grafo é um grafo.*

Demonstração: Seja $p : \tilde{X} \to X$ um recobrimento. Ponha $\tilde{X}^0 = p^{-1}(X^0)$. Além disso, identificando cada aresta fechada $\overline{a_i} \subseteq X$, $i \in J$, com um caminho $a_i : I \to X$, consideremos a coleção $(\tilde{a}_i)_{i\in J}$ dos levantamentos $\tilde{a}_i$ dos a_i. Tem-se $\tilde{X} \setminus \tilde{X}^0 = \bigcup_{i\in J} \tilde{a}_i$.

Além disso, sendo p um homeomorfismo local, a topologia de $\tilde{X}$ coincide com a topologia de $\tilde{X}$ vista como um grafo cujo conjunto de vértices é $\tilde{X}^0$, pois ambos contém os mesmos abertos básicos. Segue-se o resultado. **(c.q.d)**

Corolário 4.96 (Da demonstração)**.** *Os vértices e as arestas do recobrimento de um grafo X consistem nos levantamentos dos vértices e das arestas de X.*

Existe um invariante topológico bastante importante em matemática, chamado a *Característica de Euler*. Embora possa ser definido em circunstâncias bastante gerais (em superfícies, por exemplo, por meio da integral da curvatura gaussiana ou nos poliedros, pelo estudo do anel de cohomologia de deRham como sendo a soma alternada dos números de Betti, os quais são dimensões de certos espaços vetoriais, logo invariantes).

Entretanto, definiremos aqui apenas como obter a característica de Euler de um grafo. Isso nos permitirá calcular o número de geradores de um subgrupo H de um grupo livre (o qual demonstraremos ser também um grupo livre) sabendo-se apenas o número de geradores do grupo inicial e supondo-se o finito o índice de H. A definição se assemelha muito à clássica fórmula $\chi(P) = V - A + F$ vista no ensino médio para poliedros P. Isso não ocorre à toa: de fato, todo poliedro é homeomorfo a um grafo plano! Passemos às definições formais.

Definição 4.97. *Seja X um grafo finito formado por V vértices e A arestas. O número $\chi(X) = V - A$ chama-se a* Característica de Euler do grafo *X.*

Teorema 4.98. *Se T é uma árvore finita, então $\chi(T) = 1$.*

Demonstração: Isso é evidente se T possui um única aresta. Se a proposição valer para toda árvore finita com n arestas, então seja T uma árvore com $n + 1$ arestas. Um dos vértices de T deve ser livre, logo deve pertencer a uma única aresta a. Portanto, ao retirar-se de T o interior de a mais o outro vértice de a, obtêm-se uma subárvore $T' \subseteq T$, a qual cumpre $\chi(T') = 1$, por hipótese de indução. Por outro lado, é claro que $\chi(T') = \chi(T)$, pois para se reobter T a partir de T' basta acrescentar-lhe um vértice e o interior de uma aresta. O resultado segue-se.**(c.q.d)**

Corolário 4.99. *Seja X um grafo conexo finito. Então $\pi_1(X)$ é livre com $1-\chi(X)$ geradores.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.94, $\pi_1(X)$ possui um gerador para cada aresta de $X \setminus T$, em que T é uma árvore maximal contida em X. Como T possui $V - 1$ arestas, em que V é o número de vértices de X (e também de T, pela Proposição 4.93), então, o número de arestas de $X \setminus T$ (e portanto de geradores de $\pi_1(X)$) é $A-(V-1) = 1-(V-A) = 1-\chi(X)$, sendo A o número de arestas de X. **(c.q.d)**

Corolário 4.100. *A Característica de Euler é um invariante homotópico no conjunto dos grafos conexos.*

Demonstração: Se X e Y são grafos conexos com o mesmo tipo de homotopia, seus grupos fundamentais são isomorfos e livres, pelo Teorema 4.94. Por conseguinte, possuem o mesmo número de geradores, donde segue o resultado. **(c.q.d)**

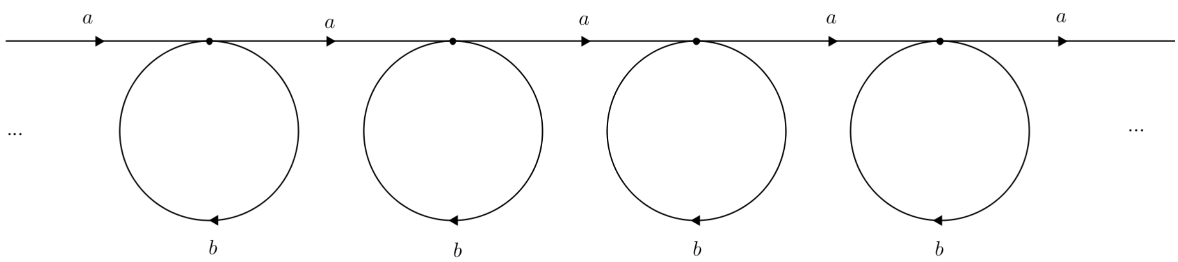
Obtemos, finalmente, o Teorema mais esperado do capítulo. O leitor perceberá que toda a teoria estabelecida até aqui será usada nas poucas linhas da demonstração abaixo. Assim, embora a demonstração seja curta, ela envolve um longo tempo de trabalho e de desenvolvimento lógico presente em todo o texto.

Teorema 4.101. *Todo subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se G é livre com k geradores e F é um subgrupo de G com $[G : F] = n \in \mathbb{N}$, então F (é livre e) possui $1 - n + nk$ geradores.*

Demonstração: Seja G um grupo livre. Tome X um grafo tal que $\pi_1(X) \cong G$ (por exemplo, seja X um buquê de círculos cuja cardinalidade coincide com a cardinalidade da base de G). Para cada subgrupo F de G, existe um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X})) = F$. Logo, o teorema do isomorfismo garante que $\pi_1(\tilde{X}) \cong F$, pois p_* é injetivo, pela Proposição 4.30 na página 62. Mas $\tilde{X}$ é um grafo. Portanto $\pi_1(\tilde{X}) \cong G$ é livre, vide Teorema 4.94.

Suponha, agora, que G é livre com k geradores e F é um subgrupo de G de índice $n \in \mathbb{N}$. Em virtude do Corolário 4.99, tem-se $\chi(X) = 1 - k$. Seja $\tilde{X}$ o recobrimento de X que corresponde-se ao subgrupo F. Então $\chi(\tilde{X}) = n \cdot \chi(X) = n - nk$. Por conseguinte, F é um grupo livre com $1 - \chi(\tilde{X}) = 1 - n + nk$ geradores. **(c.q.d)**

Exemplo 4.102. Seja X o algarismo 8 (reunião de dois círculos com um ponto em comum). Considere o recobrimento $\tilde{X}$ de X, ilustrado abaixo, vide projeção de recobrimento $p : \tilde{X} \to X$.



Note que $p_*(\pi_1(\tilde{X})) = H \cong \{a^{k_1}b^{l^1}a^{k_2}b^{l^2} \cdots a^{k_n}b^{l_n};\ l_1 + \cdots + l_n = 0\}$ (lembre que o a imagem de um laço por p_* levanta-se a um laço). Mas H é livre, pelo teorema anterior. Tem-se,assim, $H \cong F_\infty$. Por outro lado, $\pi_1(X) \cong F_2$ e $H \subseteq \pi_1(X)$. Obtemos, dessa forma, o exemplo de um subgrupo livre com infinitos geradores de um grupo livre com finitos geradores.

Apêndice A

Dicionário de Topologia Geral

O pré-requisito mais indispensável para que se possa introduzir os conceitos da Topologia Algébrica é, naturalmente, o conteúdo do qual se ocupa a Topologia Geral. Essa se destaca por estabelecer restrições diretamente à coleção dos conjuntos abertos da topologia a ser abordada. Ora precisa-se garantir a existência de um número suficiente de abertos (Axiomas de Separação), ora precisa-se garantir que não existem abertos demais (axiomas de enumerabilidade/compacidade). Os espaços, aqui, não possuem, necessariamente, nenhum tipo de estrutura ou natureza algébrica, e o método de estudo é provindo da Teoria de Conjuntos.

Tendo em vista que a Topologia Geral estabelece uma linguagem para todos os outros ramos da Topologia, estabeleceremos, neste capítulo, as definições e os Teoremas a respeito do tema que são mais utilizados no tratamento da Topologia Algébrica. Alguns deles podem ser apresentados de uma forma um pouco diferente, dependendo da referência utilizada. As demonstrações, quando houverem, serão sucintas. As referências principais que utilizaremos aqui são [14] e [9].

Mesmo assim, assumiremos que o leitor já tenha conhecimento das definições básicas, tais como as noções de Espaços Topológicos, funções contínuas, bases topológicas, sistemas fundamentais de vizinhanças, conexidade, conexidade por caminhos, compacidade, topologia produto, topologia métrica, dentre outros. Os textos de [14] e [9] são boas leituras para acompanhar as ideias abaixo.

Axiomas de Separação

O Axioma de separação mais importante consiste, certamente, no Axioma de Hausdorff. No que pese essa afirmação, o teorema que se segue será utilizado com frequência em aplicações futuras.

Teorema 1. *A respeito de um espaço topológico X, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *X é um espaço de Hausdorff.*
2. *A diagonal $\triangle = \{(x, y) \in X \times X; x = y\}$ é um subconjunto fechado de $X \times X$.*
3. *Cada ponto $x \in X$ é a interseção de todas as vizinhanças fechadas de x.*

Demonstração: Suponha que X é de Hausdorff e escreva $X' = X \times X$. Dado $(x, y) \in X'$ com $x \neq y$, existem U, V abertos disjuntos tais que $x \in U$ e $y \in V$. Em particular, o fato de $U \cap V = \varnothing$ significa que se $(u, v) \in U \times V$, então $u \neq y$, logo $(u, v) \in X' \setminus \triangle$. Portanto $(x, y) \in U \times V \subseteq X \setminus \triangle$, o que mostra ser $X' \setminus \triangle$ aberto em X' e por conseguinte, obtemos a implicação (1) $\Rightarrow$ (2).

Para mostrar que (2) $\Rightarrow$ (3), tome $x \in X$ e suponha que y é um ponto que pertence a toda vizinhança fechada de X. Se fosse $y \neq x$, então $(x, y) \notin \triangle$, logo existiriam abertos U, V disjuntos tais que $(x, y) \in U \times V \subseteq X \setminus \triangle$. Assim, $X \setminus V$ seria uma vizinhança fechada de x (pois contém U), mas $y \notin X \setminus V$, uma contradição.

Finalmente, mostremos que (3) implica (1). Com efeito, sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Então existe uma vizinhança fechada F de x que não contém y, pois, caso contrário y estaria em toda vizinhança fechada contendo x, ou seja, y seria um ponto da interseção U de todas as vizinhanças fechadas contendo x. Mas, por hipótese, $U = \{x\}$, logo seria $x = y$, um absurdo. Seja U um aberto de X tal que $x \in U \subseteq F$ e escreva $V = X \setminus F$. Tem-se $y \in V$, o qual é aberto em X e, além disso, $U \cap V \subseteq F \cap V = \varnothing$. Portanto X é Hausdorff. **(c.q.d)**

Teorema 2. *Se X é um espaço métrico, então X é normal e todo ponto de X é fechado em X. Consequentemente, X é regular e Hausdorff.*

Demonstração: Se $x \in X$, mostremos que $X' = X \setminus \{x\}$ é aberto. Ora, dado $y \in X'$ tem-se $d(x, y) = \epsilon > 0$. Portanto $y \in B(x, \epsilon) \subseteq X'$, ou seja, y é ponto interior de X', donde X' é aberto. Isso mostra que $\{x\}$ é fechado e assim todo ponto de X é fechado. Agora, para mostrar que X é normal, tome $F, G \subseteq X$ subconjuntos fechados, não vazios e disjuntos. Defina a função $\varphi : X \to [0, 1]$ pondo

$$\varphi(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}.$$

Tal φ é evidentemente contínua. Além disso, $\varphi(x) = 0$ se $x \in F$, e $\varphi(x) = 1$ quando $x \in G$. Sejam $U = \{x \in X;\ \varphi(x) < 1/2\}$ e $V = \{x \in X;\ \varphi(x) > 1/2\}$. Em virtude da continuidade de φ , os conjuntos U e V são abertos em X . É claro, também, que $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ e $U \cap V = \varnothing$. Daí, segue que X é normal. **(c.q.d)**

A recíproca é falsa. Por exemplo, seja $X = I^I$ o conjunto das funções $f : I \to I$. Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n : I \to I$ converge para $f : I \to I$ na topologia produto se, e somente se, converge simplesmente para f. Ora, X é Hausdorff, pois é um produto de espaços de Hausdorff. Além disso, X é compacto, em virtude do Teorema de Tychonov. Entretanto, X não é sequencialmente compacto, pois a sequência de funções $g_n : I \to I$ dadas por $g_n(x) = |\operatorname{sen}(n)|$, para todo $x \in I$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, não admite subsequência alguma que seja simplesmente convergente. Por conseguinte, X não é metrizável.

A saber, a função φ do teorema acima chama-se uma função de Urysohn do par (F, G), e deve-se ao matemático russo Pavel Urysohn. O Lema de Urysohn afirma que todo par (F, G) de subconjuntos fechados disjuntos de um conjunto normal X possui uma função de Urysohn. Mais importante do que isso é o Teorema de Metrização de Urysohn, que afirma que todo espaço de Hausdorff normal, com base enumerável, é homeomorfo a um subconjunto do cubo de Hilbert, e portanto metrizável. Ambos esses resultados bem poderiam ser incluídos nessas notas, não fosse o nosso receio de torná-las infinitas. O leitor encontrará boas demonstrações desses resultados em [14], [6] e [9].

Separação e Compacidade

Espaços compactos que satisfazem algum axioma de separação se comportam bem como domínios de funções contínuas. Vejamos isso e algumas propriedades importantes de conjuntos compactos que são geralmente utilizadas sem maiores comentários durante o texto.

Teorema 3. *A imagem de um compacto por uma função contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ contínua e $K \subseteq X$ compacto. Seja $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $f(K)$. Então $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de K, da qual tomamos uma subcobertura finita $K \subseteq U = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$. É claro que $f(K) \subseteq f(U) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. **(c.q.d)**

Teorema 4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Todo subconjunto infinito de um conjunto compacto X possui ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja $S \subseteq X$ infinito e suponha que S não possui ponto de acumulação em X. Então, para cada $x \in X$, existe um aberto $V_x \subseteq X$, contendo x, tal que $V_x \setminus \{x\} \cap S = \varnothing$. Da cobertura aberta $(V_x)_{x \in X}$ de X, extraímos uma subcobertura finita, digamos $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Como S intercepta cada um dos V_x em no máximo um ponto, segue que $S = X \cap S = (V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}) \cap S = (V_{x_1} \cap S) \cup \cdots \cup (V_{x_n} \cap S)$ possui, no máximo, um número finito de pontos, uma contradição. **(c.q.d)**

Corolário 5. *Todo conjunto compacto e discreto é finito.*

Teorema 6. *Todo subconjunto fechado F de um compacto K é compacto.*

Demonstração. Seja $C = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ cobertura aberta de F. Sendo $K \setminus F$ aberto em K, segue que $\{C, K \setminus F\}$ é uma cobertura aberta de K. Logo, devem existir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ para os quais $K = U_{\lambda_1} \cup \cdots U_{\lambda_n} \cup (K \setminus F)$. Evidentemente, $F \subseteq U_{\lambda_1} \cup \cdots U_{\lambda_n}$. **(c.q.d)**

Teorema 7. *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto K de X é fechado em X.*

Demonstração: Se $x \in X \setminus K$, então, para cada $y \in K$, tomemos abertos disjuntos $U_y, V_y \subseteq X$ tais que U_y contém y e V_y contém x. A compacidade de K nos garante que $K \subseteq U = U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$. Seja $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$. Como $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \varnothing$, obtemos que K e V são disjuntos, o que implica $x \in V \subseteq X \setminus K$. Logo $X \setminus K$ é aberto em X, ou ainda, K é fechado. **(c.q.d)**

Corolário 8. *Se K é compacto, X é Hausdorff e $f : K \to X$ é contínua, então f é uma aplicação fechada. Consequentemente, se f for bijetora, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração: Seja $F \subseteq K$ fechado em K. Do Teorema 6, segue que F é compacto. Portanto, $f(F) \subseteq X$ é compacto, em virtude do Teorema 3. Finalmente, o teorema acima garante que $f(F)$ é fechado em X. **(c.q.d)**

Teorema 9. *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.*

Demonstração: Seja K um espaço de Hausdorff compacto. Sejam F, G subconjuntos fechados e disjuntos de K. O Teorema 6 garante que F e G são compactos. Fixe $x \in F$ arbitrariamente. Agora, para cada $y \in G$, tome U_y^x, V_y^x abertos disjuntos tais que $x \in U_y^x$ e $y \in V_y^x$, os quais formam uma cobertura aberta de G, da qual extraímos uma subcobertura finita $G \subseteq V_{y_1}^x \cup \cdots \cup V_{y_k}^x$. Escreva $U^x = U_{y_1}^x \cap \cdots \cap U_{y_k}^x$

e $V^x = V^x_{y_1} \cup \cdots \cup V^x_{y_k}$. Tem-se $U^x \cap V^x = \varnothing$, $x \in U^x$ e $G \subseteq V^x$. Quando x varia em F, os conjuntos U^x formam uma cobertura aberta de F, da qual extraímos uma subcobertura finita $F \subseteq U^{x_1} \cup \cdots \cup U^{x_m}$. Finalmente, colocamos $U = U^{x_1} \cup \cdots \cup U^{x_m}$ e $V = V^{x_1} \cap \cdots \cap V^{x_m}$. É claro que $U \cap V = \varnothing$, U contém F e V contém G.**(c.q.d)**

Corolário 10. *Se X é Hausdorff compacto, $F \subseteq X$ é fechado em X e A é um aberto contendo F, então existe $U \subseteq X$, aberto em X, tal que $F \subseteq U$ e $\overline{U} \subseteq A$.*

Demonstração: Segue diretamente do teorema acima e do Teorema 2. **(c.q.d)**

Uma ideia importante utilizada em todo o trabalho é o Lema de Lesbegue para espaços métricos. Para enunciá-lo, considere primeiro uma definição.

Definição 4.103. *Seja $C = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ cobertura de um espaço métrico X. Diz que $\delta > 0$ é um* número de Lebesgue *da cobertura C se, e somente se, para todo subespaço U de X que cumpre diam$(U) < \delta$, existir $\lambda \in L$ tal que $U \subseteq U_\lambda$.*

Evidentemente, se δ é um número de Lebesgue de C, então todo número menor do que δ também o é.

Teorema 11 (Lebesgue)**.** *Toda cobertura aberta $C = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ de um espaço métrico compacto K possui um número de Lebesgue.*

Demonstração. Procederemos por contradição. Suponha que nenhum número seja um número de Lebesgue de C. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos obter um conjunto $S_n \subseteq K$ tal que diam$(S_n) < 1/n$ e $S_n \nsubseteq U_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Dado $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n \in S_n$. Passando-se a uma subsequência, caso necessário, podemos supor $x_n \longrightarrow x \in K$. Seja $\lambda \in L$ tal que $x \in U_\lambda$. Como U_λ é aberto em K, deve existir $\delta > 0$ para o qual $B(x, \delta) \subseteq U_\lambda$. Agora, escolha $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, de forma que $1/n < \delta/2$ e $d(x, x_n) < \delta/2$. Então, para todo $y \in S_n$, tem-se $d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < 1/n + \delta/2 < \delta$. Portanto $S_n \subseteq B(x, \delta) \subseteq U_\lambda$, o que nos dá uma contradição. **(c.q.d)**

Corolário 12. *Se K é um espaço métrico compacto e $f : K \to M$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Tome $\epsilon > 0$. Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue da cobertura aberta $C = (f^{-1}(B(x, \epsilon/2))_{x \in M}$ de K. Dados $x, y \in K$ com $d(x, y) < \delta$, o diâmetro do conjunto $\{x, y\}$ é menor do que δ, logo $x, y \in f^{-1}(B(z, \epsilon/2))$, para algum $z \in M$. Por conseguinte $f(x), f(y) \in B(z, \epsilon/2))$, donde segue que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. **(c.q.d)**

O lema abaixo, conhecido como Lema da Colagem, embora elementar, foi utilizado com frequência nas demonstrações, e por isso decidimos incluí-lo neste capítulo.

Teorema 13 (Colagem)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma função. Sejam $F_1, \ldots, F_n \subseteq Y$ subconjuntos fechados de Y tais que $Y = F_1 \cup \cdots \cup F_n$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que as restrições $f_i = f|F_i$ sejam contínuas, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demonstração: Que é necessário, não há dúvidas. Mostremos a suficiência. Para isso, tome qualquer subconjunto $F \subseteq Y$ fechado. Deve-se ter $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup \cdots \cup f_n^{-1}(F)$. Como cada f_i é contínua, então $f_i^{-1}(F)$ é fechado em X, para todo $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. Portanto $f^{-1}(F)$ é fechado em X. **(c.q.d)**

Topologia Quociente e Aplicações Quociente

Sejam X um espaço topológico, Y um conjunto qualquer e $f : X \to Y$ uma função. Vamos construir uma topologia em Y, da seguinte maneira: diremos que $A \subseteq Y$ é aberto em Y se, e somente se, $f^{-1}(A) \subseteq X$ é um aberto de X. Essa topologia leva o nome de *topologia co-induzida* por f e X.

Com efeito, $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ e $f^{-1}(Y) = X$, logo Y e $\varnothing$ são abertos em Y. Se $(U_\alpha)_{\alpha \in L}$ é uma família de abertos de Y, então a igualdade

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in L} f^{-1}(U_\alpha)$$

nos mostra que a união desses abertos também é aberto em Y. Finalmente, a identidade $f^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_n)$ significa que interseções finitas de abertos de Y são abertos em Y. Portanto a topologia co-induzida em Y é, de fato, uma topologia em Y.

A topologia co-induzida em Y é, evidentemente, a topologia mais fina em Y que torna contínua a função $f : X \to Y$.

Teorema 14. *Sejam X e Y espaços topológicos, em que Y possui a topologia co-induzida pela aplicação $f : X \to Y$. Para qualquer espaço topológico Z e para qualquer função $g : Y \to Z$, tem-se g contínua se, e somente se, $g \circ f$ é contínua.*

Demonstração: A implicação ($\Rightarrow$) é evidente. Reciprocamente, se $g \circ f$ é contínua, então $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ é aberto em X, sempre que $U \subseteq Z$ é aberto em Z. Como Y tem a topologia co-induzida por f, isso implica $g^{-1}(U)$ aberto em Y. Por conseguinte, g é contínua. **(c.q.d)**

Definição 15. *Uma função $f : X \to Y$ chama-se uma aplicação quociente quando $f(X) = Y$ e, além disso, para qualquer $g : Y \to Z$, com Z espaço topológico qualquer, tem-se g contínua se, e somente se, $g \circ f$ o for.*

Exemplo 16. Todo homeomorfismo $f : X \to Y$ é uma aplicação quociente. Com efeito, se $g : Y \to Z$ é uma função, então $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$, e sendo f^{-1} contínua (pois f é homeomorfismo), tem-se g contínua sempre que $g \circ f$ o for.

Não vale a recíproca desse fato. De fato, se X é um espaço topológico qualquer formado por mais de um ponto e $x_0 \in X$, então a função $f : X \to \{x_0\}$ dada por $f(x) = x_0$, para todo $x \in X$, é uma aplicação quociente não injetiva.

O teorema acima mostra que se X e Y são espaços topológicos e a topologia de Y é co-induzida por uma aplicação $f : X \to Y$ sobrejetiva, então f é uma aplicação quociente.

Definição 17. *Seja X um espaço topológico e $\sim$ uma relação de equivalência em X. Seja $X/_\sim$ o quociente de X por $\sim$. A topologia no espaço $X/_\sim$, co-induzida pela aplicação canônica $\varphi : X \to X/_\sim$, chama-se a topologia quociente em $X/_\sim$.*

Seja X um espaço topológico e $A \subseteq X$ um subconjunto. Salvo quando dissermos o contrário, denotaremos X/A como sendo o espaço quociente de X pela relação de equivalência segundo a qual dois pontos de x são equivalentes se, e somente se, eles são iguais ou pertencem a A. Isto é, a relação que identifica pontos de A. Seja $\varphi : X \to X/A$ a projeção canônica. A topologia de X/A, segundo a Definição 3, consiste em todos os subconjuntos U de X/A tais que $\varphi^{-1}(U)$ é aberto em X. Sempre que escrevermos X/a dessa forma, estaremos considerando nesse espaço tal topologia quociente.

Exemplo 18 (Espaço Projetivo P^n)**.** Seja $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera de dimensão n. Seja R a relação de equivalência que em S^n que identifica pontos antípodas, isto é, $xRx' \Leftrightarrow x = -x'$. O espaço quociente S^n/R chama-se o espaço projetivo n-dimensional e é indicado por P^n. Seja $\varphi : S^n \to P^n$ a projeção canônica. Para cada $x \in S^n$, tem-se $\varphi(x) = \{x, -x\}$. Por definição, os abertos de P^n são os subconjuntos da forma $\varphi^{-1}(A)$, em que A é um aberto de S^n. Pode-se demonstrar que P^n é metrizável, por meio da métrica d, que associa a cada par $p, q \in P^n$, com $p = \{x, -x\}$ e $q = \{y, -y\}$, o número real $d(p, q) = \min\{|x - y|, |x + y|\}$.

Exemplo 19 (O Toro)**.** Sabe-se que o toro T^2 consiste do espaço $S^1 \times S^1$ com a topologia produto. Mais geralmente, diz-se que o espaço $(S^1)^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ é o toro n dimensional, o qual denotamos por T^n. Estabeleceremos, agora, uma maneira mais algébrica de se olhar para esse espaço, fazendo uso da topologia quociente. para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, escrevamos $x \equiv y(\text{mod}\mathbb{Z}^n)$ sempre que $x - y \in \ \mathbb{Z}^n$. A relação $\equiv (\text{mod } \ \mathbb{Z}^n)$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^n$.

Vamos mostrar que o espaço quociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ é homeomorfo a T^n. Com efeito, seja $\psi : \mathbb{R} \to S^1$ a aplicação exponencial $\psi(t) = e^{2\pi i t}$. Além disso, seja $\psi_n : \mathbb{R}^n \to T^n$ a aplicação $\psi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (\psi(t_1), \ldots, \psi(t_n))$. Se $t \in \mathbb{R}$, vê-se facilmente que $\psi|(t, t + 1)$ é um homeomorfismo. Isso implica imediatamente que, para cada $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevendo-se $A(t) = (t_1, t_1 + 1) \times \cdots \times (t_n, t_n + 1)$, a restrição $\psi_n|A(t)$ é um homeomorfismo. Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ a projeção canônica. Defina $\overline{\varphi} : T^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ pondo $\overline{\varphi}(\psi_n(t)) = \varphi(t)$, a qual faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & T^n \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\
& \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n &
\end{tikzcd}$$

Teorema 20. *Seja X um espaço topológico. Sejam $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ compactos e seja $\phi : K \to L$ uma aplicação contínua e sobrejetiva. A fim de que uma aplicação $g : L \to X$ seja contínua, é necessário e suficiente que $g \circ \phi : K \to X$ também o seja.*

Demonstração: Se g for contínua, é óbvio que a composição $g \circ \phi$ também o é. Logo, a condição é necessária. Reciprocamente, tome um subconjunto $F \subseteq L$ tal que $\phi^{-1}(F) \subseteq K$ é fechado em K. Sendo K compacto, $\phi^{-1}(F)$ também o é. Segue que $\phi(\phi^{-1}(F)) = F$ é compacto em L, e portanto fechado. Isso mostra que $F \subseteq L$ é fechado se, e somente se, $\phi^{-1}(F)$ é fechado, ou seja, ϕ é uma aplicação quociente e que a topologia de L é co-induzida por ϕ. Assim, se $Y \subseteq X$ for fechado em X e $g \circ \phi$ for contínua, então $(g \circ \phi)^{-1}(Y) \subseteq K$ é fechado em K, ou seja, $\phi^{-1}(g^{-1}(Y))$ é fechado em K, donde segue que $g^{-1}(Y) \subseteq L$ é fechado em L, e g é contínua. Portanto, a condição é suficiente. **(c.q.d)**

Homeomorfismos Locais

Definição 21. *Uma função contínua $f : X \to Y$ chama-se um homeomorfismo local quando, para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança $U_x \subseteq X$ de x tal que $f|U_x$ é um homeomorfismo sobre sua imagem em Y.*

Como todo homeomorfismo é uma aplicação aberta, segue que a imagem $f(U_x)$ é sempre aberta em Y.

Teorema 22. *Todo homeomorfismo é um homeomorfismo local. Um homeomorfismo local $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta.*

Demonstração: A primeira afirmação é evidente. Provemos a segunda. Com efeito, seja $A \subseteq X$ um aberto de X. Para cada $a \in A$, existe uma vizinhança U_a de a tal que $f|U_a$ é um homeomorfismo sobre $f(U_a)$. Portanto $f(A) = f(\bigcup_{a\in A} U_a \cap A) = f(\bigcup_{a\in A}(U_a \cap A)) = \bigcup_{a\in A} f(U_a \cap A)$. Como $U_a \cap A \subseteq U_a$ e $f|U_a$ é homeomorfismo, segue que $f(U_a \cap A)$ é aberto em Y, para todo $a \in A$, logo a união $\bigcup_{a\in A} f(U_a \cap A)$ também o é, e então f é aberta. **(c.q.d)**

Exemplo 23. Se X é compacto e Y é Hausdorff e conexo, então todo homeomorfismo local $f : X \to Y$ é sobrejetivo. De fato, a imagem $f(X) \subseteq Y$ é compacto no espaço de Hausdorff Y, logo fechado. Como f é aberta, $f(X)$ é aberto em Y. A conexidade de Y nos dá, finalmente, $f(X) = Y$.

Teorema 24. *Todo homeomorfismo local sobrejetivo $f : X \to Y$ é uma aplicação quociente.*

Demonstração: Seja $g : Y \to Z$ uma aplicação tal que $g \circ f : X \to Z$ é contínua. Dado $A \subseteq Z$ aberto em Z, tem-se $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ aberto em X. Pelo Teorema acima, $f(f^{-1}(g^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$ é aberto em Y, donde segue que g é contínua. **(c.q.d)**

Exemplo 25. Todo homeomorfismo local $f : X \to Y$ é localmente injetivo. Isto é: para cada ponto $x \in X$, existe um aberto U_x contendo x, restrita ao qual f é injetiva. A recíproca é falsa. Por exemplo, seja $f : [0; 2\pi) \to S^1$ a função $f(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t)$, a qual é claramente injetiva (globalmente). Nenhuma vizinhança X de zero pode ser transformada homeomorficamente numa vizinhança de $f(0)$ em S^1, porque a inversa $f|U$ nunca é contínua.

Por outro lado, se f for localmente injetiva e aberta, então será homeomorfismo local.

Exemplo 26. A aplicação exponencial $\psi : \mathbb{R} \to S^1$, dada por $\psi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é um homeomorfismo local. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$, seja $U_x = (x - \pi; x + \pi)$. A restrição $\psi|U_x$ é evidentemente um homeomorfismo sobre $f(U_x) \subseteq S^1$. Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$, U_x é uma vizinhança restrita à qual f aplica-se homeomorficamente sobre sua imagem.

Exemplo 27. Um homeomorfismo local não é necessariamente sobrejetivo. Por exemplo, a aplicação $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\psi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ ainda é um homeomorfismo local, pelo mesmo argumento do exemplo acima.

Grupos Topológicos

Definição 28. *Um grupo topológico consiste de um espaço topológico G, munido de uma estrutura de grupo, tal que as aplicações $m : G \times G \to G$ e $r : G \to G$, dadas por $m(g, h) = gh$ e $r(x) = x^{-1}$ são contínuas.*

Evidentemente, a topologia de $G \times G$ considerada acima é a topologia produto. A função m consiste na operação do grupo G. Salvo quando mencionada explicitamente a operação de G, o produto $m(g,h)$ de dois elementos $g, h \in G$ será sempre denotado por gh.

Exemplos de Grupos Topológicos.

1. Todo espaço vetorial normado E é um grupo topológico abeliano relativamente à operação de adição $(x, y) \mapsto x + y$. Com efeito, E é um espaço métrico (logo topológico), com a métrica induzida pela norma $|.|$ de E. A desigualdade triangular $|(x+y) - (x'+y')| \leq |x - x'| + |y - y'|$, que ocorre para todos os $x, x', y, y' \in E$, mostra que a adição em E é uma contração fraca, portanto contínua. Também $r : x \mapsto -x$ é contínua, porque $|x - y| = |y - x|$, para quaisquer $x, y \in E$, ou seja, r é uma isometria.

2. O conjunto dos números reais não nulos e o conjunto dos números complexos não nulos, munidos da multiplicação, são grupos topológicos. Também é um grupo topológico o grupo $GL(n)$ das matrizes $n \times n$ reais invertíveis, com a operação de multiplicação de matrizes. A verificação desses fatos é deixada ao leitor.

3. Todo subgrupo H de um grupo topológico G é ainda um grupo topológico, munido da topologia induzida. Diz-se então que H é um subgrupo topológico de G. Em decorrência disso e do exemplo 2 acima, obtêm-se que o conjunto dos números reais positivos, o círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ e o grupo $O(n)$ das matrizes reais $n \times n$ ortogonais são (sub)grupos topológicos.

4. Se G e H são grupos topológicos, então o grupo $G \times H$, considerado com a multiplicação $(g,h)(g',h') = (gg', hh')$, é um grupo topológico munido da topologia produto. Com efeito, são contínuas as funções coordenadas da multiplicação, em virtude do fato de G e H serem grupos topológicos. Portanto tal multiplicação é contínua. O mesmo argumento mostra que a aplicação $(x, y) \to (x^{-1}, y^{-1})$ é contínua, como queríamos.

5. Em virtude dos dois exemplos anteriores, obtêm-se que o n-toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ são grupos topológicos.

Uma vizinhança de e diz-se *simétrica* quando $V = V^{-1}$. Não é difícil construir vizinhanças simétricas de e: basta ver que se V é vizinhança de e, então $U = V \cap V^{-1}$ será uma vizinhança simétrica de e.

Teorema 29. *Seja G um grupo topológico. Então:*

(1) *As vizinhanças de um ponto $x \in G$ são da forma $xV = \{xv;\ v \in V\}$, em que V é uma vizinhança do elemento neutro e.*

(2) *Se U é uma vizinhança do elemento neutro e, existe uma vizinhança V de e tal que $VV \subseteq U$.*

(3) *G é Hausdorff se, e somente se, o elemento neutro e é fechado em G.*

(4) *Se H é um grupo topológico, um homomorfismo $f : G \to H$ é contínuo se, e somente se, é contínuo no elemento neutro e.*

Demonstração: (1): Seja $V = x^{-1}U$. Sendo V a imagem de U pela translação à esquerda por x^{-1}, a qual é um homeomorfismo, com $e \in V$, segue que V é uma vizinhança de e. É claro que $U = (xx^{-1})U = x(x^{-1}U) = xV$.

(2): Seja $m : G \times G \to G$ a multiplicação do grupo. Então $m^{-1}(U) \subseteq G \times G$ é um aberto contendo (e, e). Portanto, existe um aberto V contendo e tal que $(e, e) \in V \times V \subseteq m^{-1}(U)$, ou seja, $m(V \times V) \subseteq U$, ou ainda, $VV \subseteq U$.

(3): É evidente que G Hausdorff implica e ser fechado (veja Teorema 2 na página 84). Reciprocamente, suponha e fechado em G. Tome $g \in G$, com $g \neq e$. Seja V uma vizinhança simétrica de e tal que $e \notin gV$. Se $h \in gV \cap V$, então $h = gv$, para algum $v \in V$ e portanto $g = hv^{-1} \in V$. Mas V é simétrica, logo $g^{-1} \in V$, donde $e \in gV$, uma contradição. Por conseguinte, tem-se $V \cap gV = \varnothing$.

Agora, se $u, v \in G$ e $u \neq v$, então $e \neq v^{-1}u = w$. Pelo caso anterior, existe V vizinhança de e tal que $V \cap wV = \varnothing$. Portanto $vV \cap uV = \varnothing$, ou seja, vV e uVsão vizinhanças de u e v que os separam.

(4): Suponha f contínua em $e \in G$. Tome $g \in G$. Seja $r_g : G \to G$ a multiplicação à direita por g, isto é, a função tal que $r_g(h) = hg$, para cada $h \in G$. Note que r_g é um homeomorfismo. Agora, sendo f homomorfismo, tem-se $(f \circ r_g)(h) = f(hg) = f(h)f(g) = (r_{f(g)} \circ f)(h)$, isto é, $f \circ l_g = r_{f(g)} \circ f$. Como f é contínua em e, segue que $r_{f(g)} \circ f$ também o é, e como r_g é homeomorfismo, segue que f é contínua em $g = r_g(1)$. **(c.q.d)**

Apêndice B - Álgebra

Essas notas de apêndice foram incluídas ao texto com o objetivo de fixar as notações e estabelecer os resultados centrais relacionados à Álgebra Moderna que foram utilizados no trabalho.

Álgebra é o estudo de conjuntos e operações. Mais precisamente, a fim de extrair propriedades topológicas ou geométricas de um certo conjunto, convém estudar as propriedades das operações que podem ser definidas nele. Evidentemente, é impossível demonstrar teoremas não triviais que valham para qualquer conjunto munido de qualquer operação arbitrária. Sendo assim, o algebrista possui a função de estabelecer restrições a tais operações, de forma a considerar apenas aquelas que satisfaçam um número mínimo de axiomas. Um conjunto munido de operações satisfazendo certos axiomas específicos chama-se uma estrutura algébrica.

Portanto, a Álgebra resume-se ao estudo dessas estruturas algébricas e de certos tipos de funções entre elas. De acordo com o número de operações e os tipos de axiomas que se estude num conjunto, determina-se uma estrutura algébrica diferente. Entre as estruturas mais úteis destacam-se os grupos, os módulos, os anéis e as álgebras. A Álgebra Linear, disciplina bastante famosa em aplicações, e a Análise Funcional, por transitividade, podem ser vistas como casos particulares da teoria de módulos, embora o enfoque da segunda seja extremamente diferente.

Todos os conceitos acima podem ser generalizados numa linguagem algébrica apropriada, chamada a linguagem categórica, provinda da Teoria de Categorias. Essa linguagem está presente em todo o trabalho, e os tópicos mais essenciais e úteis a respeito dela serão expostos aqui. Para informações mais bem detalhadas, sugerimos a consulta de [22] e [10]

Categorias e Funtores

A Teoria de Categorias é uma área bastante geral que destaca-se pela elegância e pela limpidez dos conceitos apresentados. É uma área de pesquisa que vem crescendo e tende a ganhar cada vez mais espaço entre todas as disciplinas. Isso ocorre devido ao fato dela determinar uma linguagem que mostra-se útil em generalizações de qualquer outra teoria. Não temos pretensão de entrar em muitos detalhes sobre o assunto, até porque isso exigira muito tempo e muito espaço livre sobrando. Admitindo essa máxima, vamos estabelecer, de maneira extremamente objetiva, a linguagem categórica e funtorial, que serve de base a todo este trabalho.

Definição 30. *Uma Categoria é uma coleção C de objetos que satisfazem as seguintes condições:*

i) dados dois objetos x e y, existe um conjunto $Hom_C(x;y)$, cujos elementos chamam-se os morfismos de x em y;

ii) para cada par $(f, g) \in Hom_C(x; y) \times Hom_C(y; z)$ de morfismos, existe um morfismo $g \circ f \in Hom_C(x; z)$ chamado a composição de g e f, sempre que x, y e z são objetos de C;

iii) para cada objeto x de C, existe um morfismo $\mathrm{id}_x \in Hom_C(x; x)$, chamado o morfismo identidade em x, de forma que $f \circ \mathrm{id}_x = f$ e $\mathrm{id}_x \circ g = g$, sempre que $f \in Hom(x; y)$, $g \in Hom(y; x)$ e y é um objeto de X;

iv) associatividade da composição: dados x, y, z e w objetos de C e $f \in Hom_C(x; y)$, $g \in Hom_C(y; z)$, $h \in Hom_C(z; w)$, vale que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Observação: Abusando de notação, escrevemos $x \in C$ ou $x \in \mathrm{obj}(C)$ para indicar que x é um objeto da categoria C. Além disso, denotamos por $f : x \to y$ para indicar que f é um morfismo entre x e y, ou seja, $f \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$. As vezes, os morfismos de C são chamados as *funções admissíveis* de C.

Exemplos.

1. Declarando-se como objetos os conjuntos e como morfismos as funções entre conjuntos, obtêm-se a categoria $\underline{Sets}$. A composição de morfismos é simplesmente a composição de funções.

2. A coleção cujos objetos são os espaços topológicos e cujos morfismos são as funções contínuas entre dois espaços topológicos é uma categoria, chamada categoria $\underline{Top}$. A composição de morfismos é a composição de funções contínuas.

3. Tomando-se os grupos como sendo objetos e os homomorfismos de grupos como sendo morfismos, tem-se uma categoria, a qual indicamos por $\underline{Grp}$.

4. A coleção dos grupos abelianos e homomorfismos entre grupos abelianos é uma categoria, que será indicada por $\underline{Ab}$.

5. Se pusermos os anéis como sendo os objetos e os homomorfismos de anéis por serem os morfismos, obtemos uma categoria. Denotaremos tal categoria por $\underline{Ring}$.

6. Colocando como objetos os anéis com unidade e como morfismos os homomorfismos entre anéis com unidade que preservam unidade, obtemos uma categoria e a denotamos por $\underline{ring}$.

7. Seja R um anel com unidade. A categoria dos R- módulos à esquerda e dos homomorfismo entre R-módulos módulos a esquerda é denotada por $\underline{R - mod}$. Analogamente, tem-se a categoria $\underline{mod - R}$ dos R-módulos a direita e homomorfismos entre R-módulos a direita.

8. O produto de duas categorias $C \times D$ é uma categoria cujos objetos são os pares (x, y), com $x \in C$ e $y \in D$ e $\mathrm{Hom}_{C\times D}((x, y), (x', y')) = \{(f, f');\ \ f : x \to x'$ e $f' : y \to y'\}$. A composição de dois morfismos $(f, f') : (x, x') \to (y, y')$ e $(g, g') : (y, y') \to (z, z')$ é o morfimso $(g \circ f, g' \circ f')$.

9. Todo conjunto X é uma categoria: basta por, para $x, y \in X$ com $x \neq y$, $\mathrm{Hom}_X(x, y) = \varnothing\}$. Noutras palavras, basta considerar como morfismos apenas os morfismos identidade. Diz-se, nesse caso, que X é uma *categoria discreta*.

Nos exemplos 3 a 7 acima, a composição de morfismos é simplesmente a composição usual de homomorfismos de grupos, anéis e módulos.

Definição 31. *Uma subcategoria de uma categoria C é uma coleção de objetos de C e de mosfismos entre objetos de C que ainda é uma categoria. Uma subcategoria C' de C chama-se plena quando $Hom_C(x, y) = Hom_{C'}(x, y)$, para quaisquer $x, y \in C'$.*

Exemplo 32. $\underline{Ab}$ é uma subcategoria plena de $\underline{grp}$. Por outro lado, $\underline{ring}$ não é uma subcategoria plena de $\underline{Ring}$, porque nem todo morfismo entre anéis com unidade preserva a unidade.

Definição 33. *Seja C uma categoria e sejam $x, y \in C$. Um morfismo $f : x \to y$ chama-se um isomorfismo entre x e y se, e somente se, existe um morfismo $g : y \to x$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_x$.*

Exemplo 34. Como já era de se esperar, isomorfismos de grupos, anéis, R- módulos, etc, constituem-se em isomorfismos de objetos nas categorias correspondentes $\underline{Grp}$, $\underline{ring}$, $\underline{R - mod}$, etc. Uma função entre dois conjuntos na categoria $\underline{Set}$ é um isomorfismo se, e somente se, é bijetora.

A maneira com que a teoria de categorias relaciona várias áreas da matemática se dá por meio de associações entre categorias. Isto é: a cada objeto de uma categoria C faz-se associar um objeto de uma categoria D. A partir dessa associação, busca-se descobrir propriedades importantes de C conhecendo-se D. Trata-se do estudo dos funtores.

Definição 35. *Sejam C e D categorias. Um funtor covariante $F : C \to D$ entre C e D é uma correspondência que associa, a cada objeto $x \in C$, um único objeto $F(x) \in D$, e a cada morfismo $f : x \to y$ um único morfismo $F(f) : F(x) \to F(y)$, de forma que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *$F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$, para todo $x \in C$;*

2. *$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, para quaisquer f, g morfismos em C cuja composição estiver bem definida.*

Exemplos de Funtores.

1. A cada objeto $(X, \tau) \in \underline{Top}$ façamos corresponder ao conjunto $X \in \underline{Sets}$ e a cada função contínua $f : X \to Y$ façamos corresponder a própria função $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{Sets}}(X, Y)$. Isso define um funtor entre essas duas categorias, chamado *funtor esquecimento*. Em verdade, a associação acima consiste simplesmente em esquecer-se da topologia de X que o torna um espaço topológico e enxergá-lo só como um conjunto.

2. Seja R um anel com unidade e M um R-módulo à esquerda. Para cada R módulo à esquerda N, seja $F(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)$, e para cada homomorfismo de R-módulos $f : N \to P$, defina $F(f) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, P)$ pondo $F(f)(g) = f \circ g$, para cada $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Tal correspondência define um funtor covariante F entre a categoria dos R-módulos à esquerda e a categoria dos grupos abelianos.

   Com efeito, para todo $N \in$ R-mod, o conjunto $Hom_R(M, N)$ é um grupo abeliano com a operação que faz corresponder, a cada par $\varphi, \psi : M \to N$ de homomorfismos de R-módulos, o homomorfismo $\varphi + \psi : M \to N$ dado por $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$, em que $+$ é a operação interna do R-módulo N. A verificação de que $\varphi + \psi$ é um homomorfismo de R-módulos é imediata. Além disso, a justificativa para que $Hom_R(M, N)$ munido da operação acima seja um grupo abeliano segue imediatamente do fato de $(N, +)$ ser um grupo abeliano.

É claro que $F(\mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}$. Resta verificar que, para $f : N \to P$ e $g : P \to Q$ morfismos de R-módulos, tem-se $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$. Ora, se $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, então $F(f \circ g)(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = f \circ F(g)(\varphi) = F(f)(F(g)(\varphi)) = (F(f) \circ F(g))(\varphi)$. Isso estabelece o resultado.

Transformações Naturais

Tendo em vista a importância que os funtores exercem no estudo das categorias, no sentido de permitirem obter informações de uma categoria a partir de outra, faz-se de extrema conveniência qualquer processo que permita buscar também informações de um funtor a partir de outro. No que pese tal afirmação, estudaremos agora as transformações naturais entre funtores, as quais consistem num exemplo bastante razoável de um processo do tipo citado acima. Também mostra-se útil em diversas situações um sistema que permita associar a certas coleções de imagens de objetos de uma categoria por um funtor a um único objeto na categoria em que tal funtor assume os seus valores. Daí nasce a ideia dos limites e colimites. Vamos às definições básicas e exemplos.

Definição 36. *Sejam $F, G : C \to D$ funtores covariantes entre duas categorias C e D. Diz-se que uma coleção $\phi = \{\phi_X \in Hom_D(F(X), G(X));\ X \in C\}$ é uma* transformação natural *entre os funtores F e G, e escreve-se $\phi : F \to G$, quando a correspondência $X \mapsto \phi_X$ é uma função e o diagrama abaixo comuta, para quaisquer $X, Y \in C$ e $f \in Hom_C(X, Y)$.*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd} .$$

Quando ϕ_X é um isomorfismo, para todo $X \in C$, diz-se que ϕ é um isomorfismo natural. *Nesse caso, F e G chamam-se* funtores isomorfos *e escreve-se $F \cong G$.*

Definição 37. *Duas Categorias C e D dizem-se* equivalentes *quando existem funtores $F : C \to D$ e $G : D \to C$ para os quais $F \circ G \cong \mathrm{id}_D$ e $G \circ F \cong \mathrm{id}_C$, em que $\mathrm{id}_C : C \to C$ e $\mathrm{id}_D : D \to D$ são os funtores identidade.*

Colimites

As definições que se seguem tentam exprimir, de modo artificial, porém essencialmente simples, a ideia de convergência em categorias. Isso é determinado apenas por meio dos objetos e da lei de composição das categorias envolvidas, de modo que nenhuma estrutura adicional será adotada. Convém ressaltar que essas ideias podem ser generalizadas ainda mais, de modo apropriado. No entanto, como as noções abaixo serão pouco utilizadas (especificamente, ao Teorema de Van-Kampen), resolvemos excluir as noções mais gerais, as quais necessitariam certos conhecimentos de lógica matemática e de teoria dos conjuntos mais delicados, e prezar pela objetividade e didática na apresentação.

Definição 38. *Seja D um conjunto que é, simultaneamente, uma categoria. Seja C uma categoria qualquer. Um funtor $F : D \to C$ chama-se um D-diagrama de objetos de C.*

Exemplo 39. A coleção $D(C)$ de todos os D-diagramas de objetos de C é uma categoria cujos morfismos são transformações naturais entre funtores. Qualquer objeto $x \in C$ determina o D-diagrama constante $\underline{x}$, que associa cada $y \in D$ a x e cada morfismo $f \in Hom_D(y, z)$ ao morfismo id_x.

Definição 40. *Seja F um D-diagrama de objetos de C. Sejam $x \in C$ e $\eta : F \to \underline{x}$ é um morfismo de D-diagramas. Suponha que existam um objeto $y \in C$, um morfismo de D-diagramas $\imath : F \to \underline{y}$ e uma única função $\tilde{\eta} : y \to x$ em C que faz comutar, para todo morfismo $d : z \to z'$ em D, o seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
F(z) \arrow[rr, "F(d)"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "\eta"'] & & F(z') \arrow[dl] \arrow[ddl, "\eta"] \\
& y \arrow[d, "\tilde{\eta}"] & \\
& x &
\end{tikzcd}.$$

Nesse caso, o objeto y acima chama-se o colimite do D-diagrama de objetos de C e escreve-se $y = \operatorname{colim} F$

Grupos e Produtos Livres

Definição 41. *Sejam G um grupo e X um subconjunto de G. Dizemos que G é um grupo livre em X (ou com geradores em X) quando, para todo grupo H e toda função função $f : X \to H$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\imath"'] & H \\
G \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

em que $\imath : X \to G$ é a inclusão em G.

Definição 42. *Seja X um conjunto. Suponha que exista uma bijeção $x \mapsto x^{-1}$ entre X e um conunto X^{-1} tal que $X \cap X^{-1} = \varnothing$. Então, definimos $F(X)$ como sendo o conjunto das sequências finitas de elementos de X e X^{-1} tais que (x, x^{-1}) ou (x^{-1}, x) não são subsequências, para todo $x \in X$.*

A relação entre o conjunto $F(X)$ e os grupos livres expressa-se no teorema abaixo.

Teorema 43. *O conjunto $F(X)$ é um grupo com a operação de concatenar sequências, de forma que todas as subsequências da forma (x, x^{-1}) e (x^{-1}, x) sejam eliminadas, para todo $x \in X$. Tal $F(X)$ é livre em X e, se existir um grupo G livre em X, então $G \cong F(X)$. Além disso, se Y é um conjunto, então $F(X) \cong F(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$.*

Por esse motivo, $F(X)$ chama-se o grupo livre com base em X, ou, equivalentemente, o grupo livre gerado por X. O teorema baixo pode ser útil em algumas situações.

Teorema 44. *Todo grupo é o quociente de um grupo livre.*

Definição 45. *Sejam $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de grupos, G um grupo e $(g_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de homomorfismos $g_\lambda : G_\lambda \to G$. Então G chama-se o* produto livre *de $(G_\lambda)_{\lambda \in L}$ quando, para todo grupo H e homomorfismos $f_\lambda : G_\lambda \to H$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $\varphi \circ g_\lambda = f_\lambda$, qualquer que seja $\lambda \in L$.*

Demonstra-se que o produto livre, definido acima, sempre existe e, além disso, é único a menos de isomorfismos. Ele é denotado por $G = *_\lambda G_\lambda$. A relação mais importante entre grupos livres e produtos livres prossegue na linha próxima.

Teorema 46. *Se X é um conjunto, então $F(X) \cong *_{x \in X} \langle x \rangle$.*

Bibliografia Principal - Comentada

A seguir, expomos nossa opinião e um breve resumo a respeito das obras mais importantes em Topologia Algébrica utilizadas como referência. Esperamos que isso possa servir de apoio aos estudantes que estiverem procurando uma obra mais completa sobre os conceitos aqui apresentados, bem como faça com que esses não percam o entusiasmo com a disciplina.

Referências Bibliográficas

[1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2010

Traz o que há de mais moderno em topologia algébrica. Não é por menos que seja um livro extremamente recente. Conta com uma quantidade considerável de exemplos, ilustrações e de motivações para teoremas importantes. Utiliza uma linguagem descontraída, com demonstrações diretas e bem detalhadas. É um dos únicos livros sobre o assunto que trazem a definição de CW-complexos já de início, o que justifica em grande fato a característica modernista que lhe foi empregada;

[2] Edwin Spanier, *Algebraic topology*, 1966

Spanier é a referência definitiva em Topologia Algébrica. Todos os conceitos importantes da matéria estão presentes, utilizando-se implacavelmente da linguagem de categorias para formular seus resultados. Por esse motivo, é de uma limpidez impressionante. É dito que o autor leu e releu várias vezes os rascunhos da obra, e cada vez que um argumento repetia-se duas ou mais vezes em demonstrações ou exemplos diferentes, ele o resumia em um lema. Não há topólogo algébrico algum que não reconheça a importância de seu trabalho;

[3] Albrecht Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, 1978

A obra de Dold dá preferência ao estudo de homologia e cohomologia. Também não dispensa o uso das categorias. Conta com muitos exemplos e diagramas comutativos.

[4] Willian S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, 1967

O livro de Massey talvez seja a mais clássica introdução ao estudo do grupo fundamental e dos espaços de recobrimento de todos os tempos. Conta com uma linguagem leve, bem detalhada e várias ilustrações. Traz também uma classificação das variedades compactas de dimensão 2, uma bela discussão acerca de grupos livres e várias formulações para o Teorema de Van Kampen;

[5] Seifert and threfall, *Lehrbuch der Topologie*, 1934

Talvez um dos melhores livros de matemática de todos os tempos. Não só pela maneira elegante e entusiástica como se apresenta, mas também por conseguir transmitir os conteúdos com uma facilidade tremenda. Possui uma tradução para o inglês;

[6] G. Bredon, *Geometry and topology*, 1993

É um livro que conduz o leitor desde o básico até as teorias mais modernas com uma capacidade fantástica. Possui um notório poder de síntese e não deixa de lado os problemas mais delicados. Contém, também, uma ótima introdução à topologia geral com ênfase no ponto de vista geométrico, razão que justifica o título.

[7] George W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, 1978

Possui muita informação (cerca de 744 páginas). As demonstrações são técnicas e pouco detalhadas. Por causa disso, não recomenda-se a leitura em caráter introdutório. O aluno que já tiver mais experiência e familiaridade com os assuntos, no entanto, encontrará nele um bom dicionário de topologia algébrica. Sua maior qualidade é a quantidade enorme de diagramas que o compõe, os quais tornam as demonstrações mais curtas e belas.

[8] K. Jänich, *Topology*, 1980

Trata-se de uma divertida introdução à topologia algébrica. Não dá ênfase ao rigor matemático, logo as demonstrações em sua maioria são esboços bem humorados que transmitem as ideias que estão escondidas na teoria.

[9] James R. Munkres, *Topology - A First Course*, 1975

Uma obra prima. Demonstrações bem detalhadas, muitos exemplos, exercícios bem formulados e uma capacidade admirável de fornecer as intuições de cada matéria. Metade do livro expõe tudo o que se precisa saber de topologia geral, e a outra metade revela-se como uma introdução à topologia algébrica por meio do grupo fundamental e dos espaços de recobrimento.

[10] J.P May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, 1999

Como o próprio título diz, a teoria é exposta de forma concisa. Logo, trata apenas dos teoremas principais de cada tópico, cujas demonstrações são dadas por afirmações não triviais, cada uma das quais deve ser verificada pelo leitor, como exercício. Recomenda-se que seja lido com um espírito bem humorado e que não o faça sem um lápis e um papel na mão.

[11] Lynn Seebach, *Counterexamples in topology*, 1990

O leitor que busca encontrar exemplos de espaços topológicos estranhos e contra-exemplos de resultados importantes de topologia geral, deve consultá-lo. Essa é sua finalidade. Não possui teoremas nem desenvolve muito a teoria, mas consegue tirar uma dúvida em poucos segundos.

[12] Elon Lages Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, 4^a Edição, 2012
Elon revela toda sua competência e genialidade na produção dessa obra, que é

original, recheada de exemplos maravilhosos, demonstrações claras e que provavelmente me influenciou bastante na escrita desse trabalho, sobretudo na notação e na maneira de se expor os conteúdos. Embora não contenha o Teorema de Van Kampen, em vista de seu caráter introdutório, possui uma discussão bem interessante acerca de recobrimentos diferenciáveis, espaços projetivos complexos e recobrimento duplo orientado. Provavelmente seja a única obra em português bem sucedida no assunto.

[13] Elon Lages Lima, *Homologia Básica*, 2012

Talvez a melhor e mais resumida introdução à álgebra homológica e à cohomologia de todos os tempos. Feliz na escolha dos tópicos, carrega o leitor a assuntos difíceis com uma naturalidade impressionante. As demonstrações são curtas, mas muito bem escritas. Trata-se de um complemento homológico ao caráter puramente homotópico de [12].

Bibliografia Complementar

[14] Elon Lages Lima. *Elementos de Topologia Geral*, 3^a Edição, 2014

[15] Elon Lages Lima, *Espaços Métricos*, 4^a Edição, 2005

[16] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, Vol 02*, 11^a Edição, 2015

[17] Elon Lages Lima, *Introdução à Topologia Diferencial*

[18] Elon Lages Lima, *Variedades Diferenciáveis*

[19] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, Vol 01*, 14^a Edição, 2014

[20] Alcides Lins Neto, *Funções de Uma Variável Complexa*, 2^a Edição, 2012

[21] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable, Vol 01*, 2^a Edição, 2010

[22] Eduardo Tengan, *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*, 1^a Edição, 2016

[23] Thomas W. Hungerford, *Álgebra*, 1^a Edição, 1974

[24] Paul Halmos, *Naive Set Theory*

Índice Remissivo