

**Edson Luiz Valmorbida**

**Indicadores equilibrados de erro em funcional de  
interesse para aproximação de problemas  
elípticos e parabólicos pelo método de Galerkin  
descontínuo**

**Florianópolis (SC)**

**Março, 2018**



Edson Luiz Valmorbida

**INDICADORES EQUILIBRADOS DE ERRO EM FUNCIONAL  
DE INTERESSE PARA APROXIMAÇÃO DE PROBLEMAS  
ELÍPTICOS E PARABÓLICOS PELO MÉTODO DE  
GALERKIN DESCONTÍNUO**

Tese submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática para  
obtenção do grau de Doutor em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski

Florianópolis (SC)

Março, 2018



,  
Indicadores equilibrados de erro em funcional de interesse para aproximação de problemas elípticos e parabólicos pelo método de Galerkin descontínuo : / Edson Luiz Valmorbidia; orientador, Prof. Dr. Igor Mozolevski. - Florianópolis (SC) 2018.

121 p.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas -- CFM. Programa de Pós-Graduação em Matemática .

Inclui Referências

1. Matemática Aplicada. 2. Elementos Finitos de Galerkin descontínuo.  
3. Estimativa de erro em funcional de interesse. 4. Equações elípticas e parabólicas. I. Prof. Dr. Igor Mozolevski. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática . II. Indicadores equilibrados de erro em funcional de interesse para aproximação de problemas elípticos e parabólicos pelo método de Galerkin descontínuo.



**Edson Luiz Valmorbida**

**Indicadores equilibrados de erro em funcional de interesse  
para aproximação de problemas elípticos e parabólicos pelo  
método de Galerkin descontínuo**

Tese submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Matemática para  
obtenção do grau de Doutor em  
Matemática.

---

**Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão**  
Coordenador

---

**Prof. Dr. Igor Mozolevski**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Abimael Fernando Dourado Loula (LNCC)**

---

**Prof. Dr. Álvaro Luiz de Bortoli (UFRGS)**

---

**Prof. Dr. Licio Hernanes Bezerra (UFSC)**

---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luciane Inês Assmann Schuh (UFSC)**

Florianópolis (SC)  
Março, 2018



## AGRADECIMENTOS

Quando alguém decide percorrer o caminho do doutorado, esta pessoa precisa saber que é uma decisão que afeta não somente sua vida mas a vida das pessoas ao seu redor. Sendo assim, algumas pessoas precisam ser mencionadas pois eu gostaria que soubessem que foram importantes para mim e muito me ajudaram neste período.

A primeira pessoa que gostaria de agradecer é o meu orientador, Professor Igor, pelas inúmeras horas de conversa e orientação. Pela sua paciência em explicar e auxiliar nas atividades e por todo conhecimento compartilhado.

Não posso deixar de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), em especial os meus colegas de trabalho do DAMAT-LD, pelo voto de confiança que me foi dado não só através do período que fiquei afastado e da organização de horários de aula convenientes mas, também, por me ouvir quando precisei e compartilhar experiências.

O convívio diário com quem faz doutorado pode ser estressante. Por isso, não posso deixar de agradecer a minha namorada, Luciana, por seu suporte no meu dia a dia e por entender as tantas vezes que precisei me dedicar ao trabalho.

Ouvi uma professora dizer uma vez “é tão difícil falar com as outras pessoas sobre o que a gente faz”. Por isso, gostaria de agradecer aos colegas Everton e Felipe por permitir que eu pudesse conversar e debater assuntos da nossas áreas e trocar ideias. Além deles, deixo aqui registrado o meu agradecimento aos colegas Sara, Maíra, Fit, Paulinho e Mateus que compartilharam comigo várias horas na sala da pós.

Amigos verdadeiros são difíceis de encontrar hoje em dia. Amigos de longa data são difíceis de serem cultivados. Muito estão nos meus agradecimentos do TCC e da dissertação de mestrado. Agradeço ao Maycon, ao Bernardo e ao Rodrigo pelos vários momentos de descontração e suporte. Tenho muita sorte em poder contar com vocês e não tenho como agradecer-los suficientemente. Agradeço ao Leo pelas trocas de experiências e conversas. Ao Farol e a Laís, agradeço por me acolher na vida de vocês e sempre me ajudarem.

Encerro meus agradecimentos mencionando aquelas pessoas que sem-

pre estiveram comigo. Mesmo distantes fisicamente sempre carrego no coração junto com os seus ensinamentos. Aos meus pais Joanez e Terezinha o meu grande obrigado por tudo. A minha irmã e melhor amiga, Cristiane, a certeza que posso sempre contar contigo e que você pode contar comigo.

## RESUMO

Este trabalho apresenta resultados teóricos e práticos sobre indicadores de erro equilibrados para funcional de interesse na aproximação de problemas elípticos lineares e parabólicos lineares e não-lineares pelo método de Galerkin descontínuo. A introdução dos fluxos equilibrados na representação do erro no funcional de interesse permite melhorar a qualidade do indicador de erro que é um primeiro resultado importante deste trabalho (no caso parabólico). A segunda contribuição do trabalho é a aproximação da solução do problema dual, que faz parte da representação do erro, pelo método de Galerkin descontínuo de ordem mais alta que o método primal. Neste caso, o indicador de erro torna-se assintoticamente exato. A construção de indicadores de erro em funcional de interesse para o método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço para problemas parabólicos lineares e não-lineares é a terceira contribuição deste trabalho. Todas as técnicas acima mencionadas usam recuperação equilibrada de fluxo discreto em espaço de Raviart-Thomas. A reconstrução de fluxo equilibrado numa base específica em espaços de Raviart-Thomas de alta ordem é mais uma contribuição importante. Resultados numéricos são apresentados no decorrer do trabalho para demonstrar a eficiência dos métodos apresentados. Os indicadores de erro também são utilizados para adaptação meta orientada em vários testes numéricos.

**Palavras-chave:** Métodos de elementos finitos de Galerkin descontínuo. Espaços de Raviart-Thomas de alta ordem. Problemas elípticos. Problemas parabólicos não-lineares. Indicadores de erro em funcional de interesse.



## ABSTRACT

This thesis presents theoretical and practical results on equilibrated error indicators for functional of interest in the approximation of linear elliptic problems and linear and non-linear parabolic problems by the discontinuous Galerkin method. The introduction of the equilibrated fluxes in the representation of the error in the functional of interest allows to improve the quality of the error indicator that is a first important result of this work (in the parabolic case). The second contribution of the work is the approximation of the solution to the dual problem, which enters in the representation of error, by the discontinuous Galerkin method of order higher that of primal method. In this case, the error indicator becomes asymptotically exact. The construction of error indicators for functional of interest for the discontinuous Galerkin method in time and space for linear and nonlinear parabolic problems is the third contribution of this work. All of the above techniques use equilibrated reconstruction of discrete flux in Raviart-Thomas space. Equilibrated flux reconstruction on a specific basis in high-order Raviart-Thomas spaces is another important contribution. Numerical results are presented in the course of the work to demonstrate the efficiency of the developed methods. Error indicators are also used for goal oriented mesh adaptation in various numerical experiments.

**Keywords:** Discontinuous Galerkin finite element methods. High order Raviart-Thomas spaces. Elliptic problems. Nonlinear parabolic problems. Error indicators for functional of interest.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Funções de base $\Phi_l^{E_i}$ para $l = 1$ (primeira linha), $l = 2$ (segunda linha) e $l = 3$ (terceira linha) para o espaço $\mathbb{RT}^2(\hat{T})$ . . . . .	61
Figura 2 – Funções de base $\Psi_m^{\hat{T}}$ para $m = 1, 2$ e $3$ na primeira linha e $m = 4, 5$ e $6$ na segunda linha para o espaço $\mathbb{RT}^2(\hat{T})$ . . . . .	62
Figura 3 – Malha inicial não estruturada com 48 elementos. . . . .	64
Figura 4 – Norma energia do erro e ordem de convergência (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para $\theta = 0.25, \theta = 0.5$ e $\theta = 0.75$ na marcação de Dörfler e $k = 1$ e $2$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente correspondendo ao erro de $\approx 0.01$ na norma energia ( com $DOF = 104991$ para $k = 1$ e $DOF = 7692$ para $k = 2$ ). . . . .	68
Figura 5 – Norma energia do erro e ordem de convergência (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para $\theta = 0.25, \theta = 0.5$ e $\theta = 0.75$ na marcação de Dörfler e $k = 3$ e $4$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente correspondendo ao erro de $\approx 0.01$ na norma energia ( com $DOF = 4270$ para $k = 3$ e $DOF = 3930$ para $k = 4$ ). . . . .	69
Figura 6 – Malha inicial estruturada com 200 elementos. . . . .	70
Figura 7 – Erro no funcional de meta (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para $\theta = 0.5$ na marcação de Dörfler e $k = 1, 2$ e $3$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento. . . . .	71
Figura 8 – Erro relativo no funcional de meta e indicador de erro relativo (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para refinamento e $\theta = 0.5$ na marcação de Dörfler e $k = 1$ e $2$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento. . . . .	73

Figura 9 – Erro relativo no funcional de meta e indicador de erro relativo (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para refinamento e  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler e  $k = 3$  e  $4$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento. . . . . 74

Figura 10 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.1$  e  $t = 0.25$  com  $\omega$  deslocado da diagonal do domínio. . . . 93

Figura 11 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.35$  e  $t = 0.5$  com  $\omega$  deslocado da diagonal do domínio. . . . 94

Figura 12 – Malha estruturada utilizada para o teste 2 dos problemas parabólicos não-lineares. . . . . 106

Figura 13 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.2, 0.35, 0.5$  e  $t = 0.7$ . . . . . 109

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Erros e taxas de convergência para diferentes ordens de aproximação $k$ e refinamento $N_r$ . . . . .	66
Tabela 2	– Teste 1: erros, indicadores de erro, taxas de convergência em $t$ e índices de eficiência. . . . .	91
Tabela 3	– Teste 2: erros, indicadores de erro e índices de eficiência. . . . .	92
Tabela 4	– Teste 1: erros, indicadores de erro e índices de eficiência. . . . .	107



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS . . . . .	23
2.1	Introdução . . . . .	23
2.1.1	Espaços funcionais . . . . .	23
2.1.2	Problema de difusão . . . . .	27
2.1.3	Problema de advecção-difusão-reação . . . . .	29
2.2	Método de Galerkin descontínuo . . . . .	30
2.2.1	Malhas e espaços discretos . . . . .	30
2.2.2	Formulação SIPdG para o problema de difusão e estimativas a priori . . . . .	35
2.2.3	Formulação dG para o problema de ADR e estimativas a priori . . . . .	37
3	ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS . . . . .	41
3.1	Estimativa de erro a posteriori na norma de energia . . . . .	42
3.1.1	Problema de difusão . . . . .	42
3.2	Estimativa de erro a posteriori no funcional de meta . . . . .	45
3.2.1	Problema de difusão . . . . .	45
3.2.2	Problema de advecção-difusão . . . . .	51
3.3	Base para o espaço de Raviart-Thomas de alta ordem . . . . .	56
3.4	Resultados numéricos . . . . .	63
3.4.1	Teste 1: Norma energia - Problema suave . . . . .	64
3.4.2	Teste 2: Norma energia - Refinamento adaptativo . . . . .	67
3.4.3	Teste 3: Funcional de interesse - Difusão . . . . .	68
3.4.4	Teste 4: Funcional de interesse - Advecção-difusão . . . . .	72
4	MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO . . . . .	75

4.1	Introdução . . . . .	75
4.2	Problema parabólico de advecção-difusão . . . . .	75
4.3	Método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço . . . . .	77
5	ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI EM FUNCIONAL DE META EM TEMPO E ESPAÇO PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO LINEARES . . . . .	83
5.1	Indicador de erro . . . . .	84
5.2	Resultados numéricos . . . . .	86
5.2.1	Malhas dinâmicas e estratégia de adaptação . . . . .	87
5.2.2	Teste 1 - Decomposição de indicadores de erro . . . . .	90
5.2.3	Teste 2 - Adaptação dinâmica de malha . . . . .	91
6	ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI EM FUNCIONAL DE META EM TEMPO E ESPAÇO PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS NÃO-LINEARES . . . . .	95
6.1	Equação parabólica não-linear e método de Newton . . . . .	95
6.2	Indicadores de erro para funcional de interesse para equação parabólica não-linear . . . . .	98
6.2.1	Teoria de erro em funcional de interesse para problemas variacionais não-lineares . . . . .	98
6.2.2	Representação do erro na aproximação do funcional de interesse . . . . .	102
6.3	Resultados numéricos . . . . .	105
6.3.1	Algoritmo de adaptação de malha . . . . .	105
6.3.2	Teste 1 - Refinamento uniforme . . . . .	107
6.3.3	Teste 2 - Refinamento adaptativo . . . . .	107
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .	111
	REFERÊNCIAS . . . . .	115

# 1 INTRODUÇÃO

Uma grande variedade de métodos numéricos foi desenvolvida nas últimas décadas para resolver sistemas de equações em derivadas parciais (EDP) não-lineares em domínios computacionais de alta dimensão e geometria complicada.

A simulação de processos reais de ciência e engenharia leva a necessidade de resolver problemas discretos de grande porte em tempo real com uma tolerância admissível de erro. Entretanto, a limitação dos recursos computacionais, no caso de problemas de grande porte, implica na necessidade de resolver o problema com erro mínimo permitido pelo sistema computacional disponível.

Visando este objetivo, recentemente foi desenvolvida uma série de métodos numéricos adaptativos que permitem encontrar uma aproximação discreta para a solução de um problema contínuo dentro de uma tolerância dada com o mínimo de esforço computacional.

No caso de métodos de elementos finitos, os parâmetros da discretização são o diâmetro dos elementos da malha e o grau dos polinômios locais em cada elemento. Neste caso, a estratégia dos métodos adaptativos pode ser considerada como um problema não-linear de otimização com restrições: encontre uma malha computacional e as ordens de aproximação dentro de cada elemento que satisfazem a restrição sobre o erro de aproximação e minimizam o esforço computacional. Este problema resolve-se por iterações usando algoritmos adaptativos. Em cada iteração a malha computacional é modificada no espaço ( $h$ -adaptação), a ordem de aproximação é modificada ( $p$ -adaptação) ou ambas as modificações são realizadas ( $hp$ -adaptação).

A estratégia de modificação é baseada em estimativas a priori que oferecem uma aproximação para o erro numérico do método. Estimativas deste tipo são desenvolvidas para aproximação de erro de discretização na norma energia em todo o domínio computacional. Uma revisão detalhada da teoria das estimativas a posteriori pode ser encontrada nos trabalhos de [1, 2].

Em vários problemas práticos de engenharia e ciência, a informação principal sobre o comportamento do processo modelado por um sistema de EDP é acessível por meio de funcionais de interesse definidos sobre a solução

aproximada. Na engenharia de petróleo, por exemplo, o funcional de interesse pode ser considerado a saturação de petróleo na vizinhança do poço produtor, [3, 4]. Outro exemplo clássico é o cálculo de parâmetros aerodinâmicos tais como o coeficiente de arrasto, na dinâmica de fluidos computacional, [5].

Recentemente desenvolveram-se estimativas de erro orientadas ao funcional de interesse, que estimam o erro em quantidades individuais de interesse usando técnicas de dualidade e resolvem com precisão esta quantidade. A chave para estimar o erro em tais quantidades é a formulação de um problema auxiliar, que é o problema dual para o problema considerado, e filtra as informações necessárias para uma estimativa precisa do erro na quantidade de interesse, [6].

Várias estratégias para estimativa de erro em funcional de interesse foram propostas no caso de problemas elípticos: as estimativas de erro baseadas na norma de energia dos erros nas soluções primal e dual [7], método DWR (*dual-weighted residual*) de ponderação residual dual [4], estimativas baseadas no método de recuperação de gradiente [8], entre outras. A abordagem geral para obter estimativas de erro em funcional de interesse consiste, por um lado, em derivar uma representação do erro envolvendo a solução primal e a solução dual exata e, por outro lado, na construção de uma aproximação suficientemente precisa da solução dual a fim de obter uma estimativa de erro totalmente computável e confiável. No caso do método DWR a representação do erro é composta pelo resíduo no elemento na forma forte e integrais nas arestas da malha que incluem o salto do fluxo difusivo. Uma representação do erro deste tipo não é robusta na norma energia com relação a ordem de aproximação no método de elementos finitos como foi demonstrado em [9, 10]. Tendo isso em mente, neste trabalho introduziu-se um fluxo equilibrado reconstruído do fluxo total discreto da solução numérica do problema em espaços de Raviart-Thomas na representação do erro. Desta maneira, a estrutura do resíduo no elemento foi melhorada e as integrais nas arestas da malha foram eliminadas devido a continuidade da componente normal do fluxo em espaços de Raviart-Thomas. Vale mencionar também que as estimativas na norma energia, que usam a técnica de fluxos equilibrados, são robustas relativamente a ordem de aproximação polinomial([11, 10, 12, 13, 14, 15, 16]).

O índice de eficiência do indicador de erro (a razão entre o indicador de erro e o erro exato) no funcional de interesse depende significativamente da escolha da aproximação da solução exata do problema dual no espaço mais rico que o espaço do problema primal. Caso esta aproximação seja bem acurada, pode-se esperar que o índice seja próximo de um. Na prática de elementos finitos, o problema dual é resolvido no mesmo espaço que o problema primal e depois a solução aproximada é elevada para um espaço mais rico usando uma técnica de suavização. Mas, se o problema dual é resolvido no espaço mais rico, o índice de eficiência é assintoticamente exato, isto é, tende para um quando a malha é refinada e/ou a aproximação polinomial é aumentada [16]. Portanto, neste trabalho usamos esta técnica na construção de indicadores de erro para os problemas elípticos e parabólicos.

Como mencionado acima, a reconstrução de fluxo equilibrado em espaço de Raviart-Thomas tem sido intensamente utilizada, tanto na teoria quanto na prática, nos métodos de elementos finitos como ferramenta para a construção de estimativas de erro na norma energia que sejam totalmente computáveis, eficientes e confiáveis. Uma importante aplicação da recuperação de fluxo é a recuperação da velocidade na equação de Darcy a partir da solução do método de Galerkin descontínuo que, por sua vez, aparece no estudo de fluidos multifásicos em meios porosos, ver [17, 18].

Devido as propriedades conservativas, o método de Galerkin descontínuo permite a reconstrução do fluxo nos espaços de Raviart-Thomas através da prescrição dos momentos como graus de liberdade do espaço no elemento, ver [19]. Mesmo assim, este processo pode exigir um grande esforço computacional para os espaços de Raviart-Thomas de alta ordem. Neste contexto, apresentamos uma base para os espaços de Raviart-Thomas, ver [20]. Posteriormente, obtemos a reconstrução de fluxo e, com isso, calculamos as estimativas de erro a posteriori. Para demonstrar o potencial do método, usamos estas estimativas para refinar adaptativamente a malha.

O trabalho é organizado da seguinte maneira. No capítulo 2, são brevemente apresentados os conceitos teóricos básicos sobre os espaços de funcionais e elementos da teoria abstrata para problemas elípticos nos casos de difusão pura e equação de advecção-difusão-reação. Ainda no capítulo 2, introduzimos o método de Galerkin descontínuo para as discretizações destes

problemas e apresentamos os principais resultados teóricos sobre estimativas de erro a priori. No capítulo 3, discutimos técnicas de estimativas a posteriori na norma energia e no funcional de meta. Aqui, também desenvolvemos o ingrediente principal para a implementação prática destas estimativas - a técnica de reconstrução de fluxos equilibrados em espaços de Raviart-Thomas de alta ordem da solução aproximada do método de Galerkin descontínuo. No capítulo 4, apresentamos os problemas parabólicos e sua formulação pelo método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço. No capítulo 5, deduzimos a representação do erro a posteriori no funcional de meta para o método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço para problemas parabólicos. Além disso, tratamos da estratégia de adaptação dinâmica de malha utilizando os indicadores de erro apresentados. No capítulo 6, apresentamos primeiramente o método de Newton para as equações parabólicas não-lineares. Em seguida, tratamos da teoria de estimativa de erro a posteriori em funcional de interesse em tempo e espaço para o método de Galerkin descontínuo para os problemas parabólicos não-lineares e, por fim, deduzimos a representação do erro na aproximação de funcional de interesse. Ao final dos capítulos 3, 5 e 6 são apresentados resultados numéricos para comprovar a eficácia dos métodos estudados. As implementações feitas fazem uso das rotinas apresentadas em [21], principalmente no que diz respeito aos algoritmos de refinamento desrefinamento das malhas.

Parte dos resultados obtidos neste trabalho foram apresentados no *International Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM - 2016)* e publicados na série *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, ver [20].

## 2 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS

Neste capítulo trataremos dos problemas elípticos do tipo difusão puro e do problema de advecção-difusão-reação. Primeiramente, apresentamos as principais ferramentas para o estudo desses problemas e, em seguida, apresentamos as suas formulações discretas através do método de Galerkin descontínuo com penalização interior. Também serão apresentadas estimativas a priori para essas aproximações.

### 2.1 INTRODUÇÃO

#### 2.1.1 Espaços funcionais

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach equipados com as normas  $\|\cdot\|_X$  e  $\|\cdot\|_Y$ , respectivamente, e assuma  $Y$  reflexivo. Denotamos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço vetorial gerado pelos operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ .

Considere o problema modelo linear abstrato:

$$\text{Encontrar } u \in X \text{ tal que } a(u, w) = \langle f, w \rangle_{Y', Y}, \quad \forall w \in Y, \quad (2.1)$$

em que  $a \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathbb{R})$  é uma forma bilinear limitada,  $f \in Y' = \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$  é uma forma linear limitada e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y', Y}$  denota a relação de dualidade entre  $Y'$  e  $Y$ . Ou ainda, definindo o operador linear limitado  $A \in \mathcal{L}(X, Y')$  tal que

$$\langle Av, w \rangle_{Y', Y} = a(v, w), \quad \forall (v, w) \in X \times Y,$$

podemos reescrever o problema (2.1) como

$$\text{Encontrar } u \in X \text{ tal que } Au = f \text{ em } Y'. \quad (2.2)$$

O problema (2.2) é dito bem posto se,  $\forall f \in Y'$ , admite uma e apenas uma solução  $u \in X$  e existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_X \leq C \|f\|_{Y'}.$$

Ainda, neste caso, o problema (2.2) é bem posto se  $A$  é um isomorfismo (veja [22]). De fato, em espaços de Banach, se  $A \in \mathcal{L}(X, Y')$  é um

isomorfismo, então  $A^{-1}$  é limitado e  $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y',X)} \leq C$ . Disso segue que a solução  $u \in X$  satisfaz a estimativa a priori

$$\|u\|_X = \|A^{-1}f\|_X \leq C\|f\|_{Y'}.$$

O teorema a seguir oferece uma condição necessária e suficiente para que o problema (2.1) seja bem posto.

**Teorema 2.1 (Banach-Necas-Babuska (BNB))** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço de Banach reflexivo. Sejam  $a \in \mathcal{L}(X \times Y, \mathbb{R})$  e  $f \in Y'$ . Então, o problema (2.1) é bem posto se, e somente se,*

i) *Existe uma constante  $C > 0$  tal que,  $\forall v \in X$ ,*

$$C\|v\|_X \leq \sup_{w \in Y \setminus \{0\}} \frac{a(v, w)}{\|w\|_Y},$$

ii)  $\forall w \in Y$ , *vale a implicação*

$$\forall v \in X \text{ tal que } a(v, w) = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Além disso, a seguinte estimativa a priori é válida:

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{C}\|f\|_{Y'}.$$

**Demonstração:** Veja [22]. ■

Um conceito importante quando falamos sobre existência e unicidade de solução para problemas elípticos é a coersividade.

**Definição 2.1** *Sejam  $X$  um espaço de Hilbert e  $a \in \mathcal{L}(X \times X, \mathbb{R})$ . Dizemos que a forma bilinear  $a$  é coersiva em  $X$  se existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$C\|v\|_X^2 \leq a(v, v), \quad \forall v \in X.$$

Analogamente, dizemos que o operador linear limitado  $A \in \mathcal{L}(X, X')$  definido por

$$\langle Av, w \rangle_{X', X} = a(v, w), \quad \forall (v, w) \in X \times X,$$

é coersivo se existe  $C > 0$  tal que

$$C\|v\|_X^2 \leq \langle Av, v \rangle_{X', X}, \quad \forall v \in X.$$

O resultado a seguir garante que o problema (2.1) seja bem posto, neste caso  $X$  é um espaço de Hilbert e  $Y = X$ .

**Lema 2.1 (Lax-Milgram)** *Sejam  $X$  um espaço de Hilbert,  $a \in \mathcal{L}(X \times X, \mathbb{R})$  e  $f \in X'$ . Então, se a forma bilinear  $a$  é coersiva em  $X$ , o problema (2.1) é bem posto. Equivalentemente, se o operador  $A \in \mathcal{L}(X, X')$  é coersivo, o problema (2.2) é bem posto. Além disso, vale a seguinte estimativa a priori:*

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{C} \|f\|_{X'}.$$

**Demonstração:** Veja [22]. ■

A seguir apresentamos as definições e resultados iniciais sobre duas classes de espaços importantes na teoria dos problemas elípticos e dos métodos de elementos finitos, os espaços  $L^p(\Omega)$  e  $H^m(\Omega)$ . Mas, antes disso, precisamos da definição a seguir.

**Definição 2.2** *Chamamos de domínio um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ , que é limitado, conexo e tem fronteira  $\partial\Omega$  Lipschitz.*

**Definição 2.3** *Sejam  $\Omega$  um domínio e  $p$  um número real positivo. Definimos o espaço  $L^p(\Omega)$  como o conjunto das funções mensuráveis  $u$  em  $\Omega$  para as quais*

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

*Definimos também a norma de  $v \in L^p(\Omega)$  como*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup \text{ess}\{|v(x)| \text{ para quase todo } x \in \Omega\}.$$

Para maiores detalhes sobre os espaços  $L^p(\Omega)$ , veja [23, 24, 25].

Como é sabido, os espaços  $L^p(\Omega)$ , munidos da norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  são espaços de Banach. Em particular, para  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert quando equipado com o produto interno

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} vw.$$

A proposição a seguir é um resultado clássico da teoria dos espaços  $L^p(\Omega)$  e um caso particular da desigualdade de Hölder. A demonstração pode ser encontrada em [23].

**Proposição 2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** *Se  $v, w \in L^2(\Omega)$  então vale que  $vw \in L^1(\Omega)$  e*

$$\int_{\Omega} |vw| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Definição 2.4** *Dado  $\Omega$  um domínio e dados  $m \geq 0$  um inteiro e  $1 \leq p \leq \infty$  um número real, definimos o espaço de Sobolev*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) / \partial^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

em que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice com  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  e  $\partial^\alpha$ , no sentido de distribuições, é definido por

$$\int_{\Omega} \partial^\alpha v w = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \partial^\alpha w, \quad w \in C_0^\infty(\Omega),$$

sendo  $\partial^\alpha w$  definido como

$$\partial^\alpha w = \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e  $C_0^\infty(\Omega)$  o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis em  $\Omega$  com suporte compacto.

O espaço de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach quando equipado com a norma

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Neste trabalho estaremos interessados apenas no caso particular em que  $p = 2$ . Neste caso, usa-se a notação  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ . Os espaços  $H^m(\Omega)$  são espaços de Hilbert quando equipados com o produto interno

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha v, \partial^\alpha w)_{L^2(\Omega)}$$

que induz a norma e a seminorma

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para  $m \geq 1$ , pode ser demonstrado que toda  $u \in H^m(\Omega)$  admite o traço na fronteira  $\partial\Omega$ .

**Proposição 2.2 (Desigualdade do Traço,  $p = 2$ )** *Existe  $C$  tal que*

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

**Demonstração:** Veja [26]. ■

Para uma teoria completa dos espaços de Sobolev, veja [23].

### 2.1.2 Problema de difusão

Nesta seção apresentamos alguns resultados clássicos da teoria das equações elípticas. Por simplicidade, aqui consideramos como problema modelo a equação de Poisson com condição de fronteira de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

com  $f \in L^2(\Omega)$ .

A formulação fraca de (2.3) é:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } B(u, v) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V, \quad (2.4)$$

com  $V = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) / v|_{\partial\Omega} = 0\}$  e a forma bilinear

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

**Lema 2.2 (Desigualdade de Poincaré)** *Seja  $\Omega$  um domínio. Então, existe uma constante  $C_{\Omega} > 0$  tal que, para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^d},$$

Pela desigualdade de Poincaré podemos inferir que a forma bilinear  $a$  é coersiva em  $V$ . Portanto, segue do Lema de Lax-Milgram 2.1 que o problema (2.4) é bem posto.

**Teorema 2.2** *Se  $u \in H^2(\Omega)$  então os problemas (2.3) e (2.4) são equivalentes.*

**Demonstração:** Integrando por partes a equação (2.3),  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} f v = - \int_{\Omega} \Delta u v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \mathbf{n}.$$

O resultado segue do fato que  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Agora, partindo de (2.4) e integrando por partes, concluímos que

$$\int_{\Omega} (f + \Delta u)v = 0, \quad \forall v \in H_D^1(\Omega).$$

Agora, como  $f + \Delta u$  está em  $L^2(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$  é denso em  $L^2(\Omega)$ , temos que  $f = -\Delta u$  em  $L^2(\Omega)$ . ■

**Definição 2.5** *Chamamos  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$  de produto interno de energia em  $H_0^1(\Omega)$ . Além disso,  $a(u, u) = |u|_1^2$  é a chamada de norma energia.*

Usando a desigualdade de Poincaré é fácil verificar que a forma  $B(\cdot, \cdot)$  é contínua e coersiva em  $V$  na norma energia. Portanto, a unicidade de solução do problema (2.4) segue do Teorema de Riesz.

**Teorema 2.3 (Teorema de Riesz)** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert. Então, para cada funcional linear contínuo  $F \in H'$ , existe um único  $u \in H$  tal que*

$$F(v) = (u, v), \quad \forall v \in H.$$

**Demonstração:** Veja [26]. ■

**Definição 2.6** *O problema elíptico (2.3) chama-se regular se a solução fraca  $u$  do problema (2.4) pertence a  $H^2(\Omega)$  e existe uma constante  $C > 0$ , que depende só de  $\Omega$ , tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.5}$$

**Observação 2.1** *A regularidade elíptica é válida, por exemplo, quando  $\Omega$  é um conjunto poligonal convexo, veja [27]. Neste trabalho sempre vamos supor que esta propriedade é válida.*

### 2.1.3 Problema de advecção-difusão-reação

Nesta seção trataremos dos principais resultados acerca do problema de advecção-difusão-reação com condição de fronteira de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (-D\nabla u + \beta u) + \tilde{\mu} u = f, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

em que  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\tilde{\mu} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $D \in L^\infty(\Omega)$  uniformemente limitada inferiormente em  $\Omega$  por uma constante real positiva e  $\beta \in [Lip(\Omega)]^d$ , tal que  $\nabla \cdot \beta = 0$ .

A formulação fraca de (2.6) é:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in V, \quad (2.7)$$

com  $V = H_0^1(\Omega)$  e forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega} D\nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} u \beta \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \tilde{\mu} u v.$$

Note que o termo advectivo está escrito na forma conservativa.

A função

$$\sigma(u) = -D\nabla u + \beta u$$

é denominada fluxo difusivo-advectivo e, por construção,  $\sigma(u) \in H(\text{div}, \Omega)$ . Dessa forma, a equação de advecção-difusão-reação pode então ser reescrita como

$$\nabla \cdot \sigma(u) + \tilde{\mu} u = f, \quad (2.8)$$

e a forma bilinear  $a$  como

$$a(u, v) = \int_{\Omega} -\sigma(u) \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \tilde{\mu} u v.$$

Como  $u \in H^1(\Omega)$  e  $\beta$  é suave, podemos, da mesma forma, considerar o termo advectivo na sua forma não conservativa, isto é,

$$-\nabla \cdot (D\nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f, \quad (2.9)$$

com  $\mu = \tilde{\mu} + \nabla \cdot \beta$ . Porém, se  $D$  anula-se localmente, a solução exata pode apresentar descontinuidades e as duas formas deixam de ser equivalentes.

A forma conservativa é mais natural do ponto de vista físico uma vez que expressa um princípio de conservação básico. De fato, integrando a equação (2.8) sobre um volume de controle  $V \subset \Omega$ , obtemos

$$\int_{\partial V} \sigma(u) \cdot \mathbf{n}_V + \int_V \tilde{\mu} u = \int_V f,$$

em que  $\mathbf{n}_V$  denota a normal exterior a  $\partial V$ .

Essa equação expressa o fato de que a variação de  $u$ , no volume de controle  $V$ , em decorrência dos processos difusivos e advectivos através do bordo  $\partial V$  mais a quantidade gerada ou gasta pelo termo de reação sobre  $V$  é igual a integral do termo fonte  $f$  sobre  $V$ .

Vamos supor que existe uma constante real  $\mu_0 > 0$  tal que

$$\Lambda := \tilde{\mu} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 \text{ q.s. em } \Omega. \quad (2.10)$$

Então, integrando por partes, podemos demonstrar que

$$a(v, v) = \|D^{1/2} \nabla v\|_{[L^2(\Omega)]^d}^2 + \|\Lambda^{1/2} v\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

isto é, a forma bilinear  $a$  é coersiva em  $V$ . Segue do Lema de Lax-Milgram 2.1 que (2.7) é bem posto.

## 2.2 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO

Nesta seção apresentamos as formulações discretas do método de elementos finitos e, também, a formulação simétrica do método de Galerkin descontínuo (dG) com penalidade interna (SIPdG, do inglês *symmetric interior penalty discontinuous Galerkin*) para o problema de difusão puro e a formulação dG para o problema de advecção-difusão-reação (ADR). Resultados acerca das estimativas de erro a priori para esses métodos também são apresentados.

### 2.2.1 Malhas e espaços discretos

Como é usual na maior parte da bibliografia, iremos assumir que  $\Omega$  é um domínio poligonal em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.7** *Seja  $\Omega$  um domínio. Uma malha ou triangularização de  $\bar{\Omega}$  é um conjunto  $\mathcal{T}_h$  de triângulos  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que satisfaz:*

- $T_i \subset \bar{\Omega}$  e  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n T_i$ .
- *A intersecção  $T_i \cap T_j$  de dois triângulos distintos é uma aresta cuja as extremidades são vértices de  $T_i$  e  $T_j$ , apenas um vértice destes triângulos ou vazia.*

*Os nós da malha  $\mathcal{T}_h$  são os vértices dos triângulos  $T_i$  que a compõem.*

*Um dos triângulos de uma triangularização é chamado de elemento da malha.*

Denotaremos por  $h_T$  o diâmetro de  $T$  e por  $\rho_T$  o diâmetro do maior círculo inscrito em  $T$ . Assumiremos a condição de regularidade para os elementos de uma família de malhas  $\{\mathcal{T}_h\}$ , isto é, existe uma constante  $C_{reg} > 0$  (que não depende do diâmetro da malha) tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq C_{reg}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

**Observação 2.2** *Essa definição é equivalente a: existe  $\alpha_0$  tal que  $\alpha_T \geq \alpha_0$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ , em que  $\alpha_T$  é o menor ângulo de  $T$ .*

As definições a seguir apresentam alguns conceitos e terminologias que são usuais no contexto deste trabalho, mas que foram postos aqui com o intuito de apresentar a notação utilizada.

**Definição 2.8** *Seja  $\mathcal{T}_h$  uma malha para o domínio  $\Omega$  e  $E$  uma aresta de  $\mathcal{T}_h$ . Diferenciamos  $E$  em duas situações:*

- i) *Existem dois elementos distintos  $T_1$  e  $T_2$  tais que  $E = \partial T_1 \cap \partial T_2$ . Neste caso,  $E$  é chamada de interface ou aresta interior.*
- ii) *Existe  $T \in \mathcal{T}_h$  tal que  $E = \partial T \cap \partial \Omega$ . Neste caso,  $E$  é chamada de aresta de fronteira.*

Usaremos as seguintes notações para diferenciar cada tipo de aresta:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h &= \{\text{Arestas de } \mathcal{T}_h\}, \\ \mathcal{E}_h^{\text{int}} &= \{\text{Arestas interiores de } \mathcal{T}_h\} = \\ &= \{E \in \mathcal{E}_h / \exists T_-, T_+ \in \mathcal{T}_h : \bar{E} = \bar{T}_- \cap \bar{T}_+\}, \\ \mathcal{E}_h^\partial &= \{\text{Arestas de fronteira de } \mathcal{T}_h\} = \\ &= \{E \in \mathcal{E}_h / E \subset \partial\Omega\}.\end{aligned}$$

Para uma aresta  $E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}$  a escolha dos elementos  $T_-$  e  $T_+$  pode ser feita de maneira arbitrária mas fixa. Na prática, esta ordenação é fornecida pelo gerador de malha. Para cada aresta  $E \in \mathcal{E}_h$  vamos definir um vetor unitário  $\mathbf{n}_E$  que é ortogonal a  $E$  e aponta de  $T_-$  para  $T_+$  caso  $E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}$  ou coincide com o vetor exterior a  $\Omega$  caso  $\mathcal{E}_h^\partial$ .

Além disso, sendo  $\partial\Omega_D$  e  $\partial\Omega_N$  as partes de  $\partial\Omega$  correspondentes a fronteira de  $\Omega$  nas quais o problema tenha condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente, denotamos então as partes de  $\mathcal{E}_h^\partial$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h^D &= \{\text{Arestas de fronteira com condição de Dirichlet}\}, \\ \mathcal{E}_h^N &= \{\text{Arestas de fronteira com condição de Neumann}\}.\end{aligned}$$

**Definição 2.9** Para toda  $u \in H^1(\mathcal{T}_h)$  e  $E \in \mathcal{E}_h$  definimos o salto:

$$[[u]]|_E = \begin{cases} (u|_{T_-})|_E - (u|_{T_+})|_E, & E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}, \bar{E} = \bar{T}_- \cap \bar{T}_+ \\ (u|_T)|_E, & E \in \mathcal{E}_h^\partial, E \subset \bar{T} \cap \partial\Omega, \end{cases}$$

e a média:

$$\{\{u\}\}|_E = \begin{cases} \frac{1}{2}((u|_{T_-})|_E + (u|_{T_+})|_E), & E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}} \\ (u|_T)|_E, & E \in \mathcal{E}_h^\partial, E \subset \bar{T} \cap \partial\Omega, \end{cases}$$

**Definição 2.10** Seja  $\mathbf{v}$  uma função definida em  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dizemos que  $\mathbf{v}$  admite divergente fraco (no sentido de distribuições) se

- $\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2$ ;
- existe uma função  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (a)  $w \in L^2(\Omega)$ ;
- (b)  $\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega} w \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ .

**Definição 2.11** Para uma família de malhas triangulares regulares  $\mathcal{T}_h$  em  $\Omega$ , definimos os seguintes espaços discretos:

- Espaço dos polinômios reais sobre  $T$  com grau menor ou igual a  $k$ :  $\mathbb{P}_k(T)$ .

- Espaço de elementos finitos (descontínuos):

$$V_h^k := \{v_h \in L^2(\Omega) / v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

- Espaço de Sobolev particionado:

$$H^m(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) / \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in H^m(T)\}.$$

- Espaços  $H(\text{div}, \Omega)$  e  $H(\text{div}, \mathcal{T}_h)$ :

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2 / \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H(\text{div}, \mathcal{T}_h) = \{\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^2 / \mathbf{u}|_T \in H(\text{div}, T), \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

sendo  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  o divergente fraco de  $\mathbf{u}$ .

Algumas propriedades desses espaços valem ser mencionadas:

- $H(\text{div}, \Omega)$  é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\text{div}, \Omega).$$

- Para cada  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, \Omega)$  existe o traço normal  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_\Omega|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ .
- O espaço  $[H^1(\Omega)]^2$  é um subconjunto de  $H(\text{div}, \Omega)$ .
- O espaço  $H^m(\Omega)$  é um subconjunto de  $H^m(\mathcal{T}_h)$ .

Além disso, os dois resultados a seguir são válidos. Sua demonstrações, junto a outras propriedades destes espaços, podem ser encontradas em [19].

**Proposição 2.3** *Uma função  $u \in H^1(\mathcal{T}_h)$  pertence a  $H^1(\Omega)$  se, e somente se,  $[[u]]|_E = 0, \forall E \in \mathcal{E}_h^{int}$ . Neste caso,*

$$\nabla u|_T = \nabla(u|_T) = (\nabla_h u)|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

em que  $\nabla_h : H^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$  é o operador de gradiente discreto tal que  $\nabla_h u_h|_T = \nabla(u_h|_T), \forall T \in \mathcal{T}_h$ .

**Proposição 2.4** *Seja  $u \in H(\text{div}, \mathcal{T}_h)$ , tal que  $u \cdot n_E \in L^2(E), \forall E \in \mathcal{E}_h^{int}, n_E \perp E$ . Então,  $u \in H(\text{div}, \Omega)$  se, e somente se,  $[[u \cdot n_E]]|_E = 0, \forall E \in \mathcal{E}_h^{int}$ .*

Dois últimos resultados que precisam ser mencionados são a desigualdade inversa e a desigualdade do traço discreto. Estas duas desigualdades são ferramentas importantes na análise dos métodos de Galerkin descontínuo. A primeira fornece uma cota superior local para o gradiente de funções discretas. Já a segunda, fornece uma cota superior local para as funções discretas sobre as arestas.

**Lema 2.3 (Desigualdade inversa)** *Seja  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  uma sequência de malhas regulares, com parâmetro  $\rho$ . Então, para todo  $h$ , todo  $v_h \in \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$  e todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , existe uma constante  $C_{inv} > 0$ , que depende apenas de  $\rho$  e  $k$ , tal que*

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(T)} \leq C_{inv} \frac{1}{h_T} \|v_h\|_{L^2(T)}.$$

**Demonstração:** Veja [19]. ■

**Lema 2.4 (Desigualdade do traço discreto)** *Seja  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  uma sequência de malhas regulares, com parâmetro  $\rho$ . Então, para todo  $h$ , todo  $v_h \in \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$ , todo  $T \in \mathcal{T}_h$  e todo  $E \in \mathcal{E}_h$ , existe uma constante  $C_{tr}$ , que depende apenas de  $\rho$  e  $k$ , tal que*

$$h_T^{1/2} \|v_h\|_{L^2(E)} \leq C_{tr} \|v_h\|_{L^2(T)}.$$

**Demonstração:** Veja [19]. ■

### 2.2.2 Formulação SIPdG para o problema de difusão e estimativas a priori

Considere o problema modelo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = g_D, & \text{em } \partial\Omega_D \\ -\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N, & \text{em } \partial\Omega_N \end{cases} \quad (2.11)$$

com  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Definição 2.12 (SIPdG)** Para todo  $u, v \in H^2(\mathcal{T}_h)$ , definimos a forma bilinear  $B_h(\cdot, \cdot)$  e o funcional  $F(\cdot)$  da formulação fraca do método de Galerkin com penalização interior em espaço de Sobolev particionado para o problema modelo (2.11):

$$\begin{aligned} B_h(u, v) &= \int_{\mathcal{T}_h} \nabla_h u \cdot \nabla_h v + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^D} \gamma_E [[u]] [[v]] - \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^D} (\{\{\nabla_h u\}\} \cdot \mathbf{n}_E [[v]] + \{\{\nabla_h v\}\} \cdot \mathbf{n} [[u]]) \\ F(v) &= \int_{\mathcal{T}_h} f v + \int_{\mathcal{E}_h^N} g_N v - \int_{\mathcal{E}_h^D} (\nabla_h v \cdot \mathbf{n} - \gamma_E v) g_D \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo  $\gamma: \mathcal{E}_h \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(E) = \gamma_E > 0$ .

A formulação fraca SIPdG do problema (2.11) em espaço de Sobolev particionado é:

$$\text{Encontrar } u \in H^2(\mathcal{T}_h) \text{ tal que } B_h(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H^2(\mathcal{T}_h). \quad (2.13)$$

O lema e o teorema a seguir mostram a consistência da formulação SIPdG em espaço de Sobolev particionado com o problema (2.11). Estes resultados podem ser demonstrados utilizando a proposição 2.3. Denotamos por  $H_{g_D}^1(\Omega)$  o conjunto das funções de  $H^1(\Omega)$  que satisfazem a condição de Dirichlet  $u = g_D$  em  $\partial\Omega_D$ .

**Lema 2.5** Seja  $u \in H_{g_D}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  uma solução fraca do problema modelo (2.11). Então  $u$  é solução do problema SIPdG em espaço de Sobolev particionado.

**Demonstração:** Veja [28]. ■

**Teorema 2.4** *Seja  $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)$  uma solução do problema SIPdG em espaço de Sobolev particionado. Então  $u$  é solução do problema modelo (2.11).*

**Demonstração:** Veja [28]. ■

**Definição 2.13** *Definimos,  $\forall v \in H^2(\mathcal{T}_h)$ , as duas normas*

$$\begin{aligned} \|v\|_{dG}^2 &= \|\nabla_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^D} \gamma_E \llbracket v \rrbracket^2 \\ \|v\|_{dG}^2 &= \|v\|_{dG}^2 + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^D} \frac{1}{\gamma_E} \{ \{ \nabla_h v \} \}^2 \end{aligned}$$

Na norma  $\| \cdot \|_{dG}$ , a forma bilinear SIPdG (2.12) é contínua (veja [19]). Porém, a coersividade não pode ser provada em dimensão infinita.

**Teorema 2.5 (coersividade em dimensão finita)** *Seja  $B_h(\cdot, \cdot)$  a forma bilinear SIPdG (2.12) em  $V_h^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Suponha a constante de penalização  $\gamma_E = \beta \frac{k^2}{h_E}$ ,  $\beta > 0$ . Então, existe  $\beta_0 > 0$  tal que,  $\forall \beta > \beta_0$ ,*

$$B_h(u, u) \geq \alpha \|u\|_{dG}^2, \quad \forall u \in V_h^k.$$

em que  $\alpha$  não depende de  $k$  e  $h_E$ .

**Demonstração:** Veja [19]. ■

A formulação fraca SIPdG do problema (2.11) em espaço de elementos finitos descontínuos de dimensão finita é:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h^k, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ tal que } B(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (2.14)$$

**Observação 2.3** *A existência e unicidade de solução para a formulação (2.14) é uma consequência imediata do Teorema 2.2. Para a solução fraca em espaço de Sobolev particionado de dimensão infinita, a existência segue do Lema 2.5. No entanto, a unicidade de solução não pode ser garantida (veja [28]).*

**Teorema 2.6 (Estimativa de erro a priori)** *Sejam  $u \in H^1(\Omega) \cap H^s(\mathcal{T}_h)$ ,  $s \geq 2$ , uma solução fraca em espaço de Sobolev particionado de (2.13),  $u_h \in V_h^k$  uma solução de (2.14) e  $\gamma_E$  de modo a garantir a coersividade de  $B$  em  $V_h^k$ . Então, existe  $C > 0$ , dependendo da constante de regularidade da malha, tal que*

$$\| \|u - u_h\| \|_{dG} \leq C \frac{h^{\mu-1}}{k^{s-3/2}} \|u\|_{H^s(\Omega)}$$

com  $\mu = \min(k+1, s)$ .

**Demonstração:** Veja [19]. ■

### 2.2.3 Formulação dG para o problema de ADR e estimativas a priori

Na seção 2.1.3 apresentamos a forma fraca do problema de advecção-difusão-reação (ADR). Vamos exibir agora a formulação do método de Galerkin descontínuo com penalização interior para esse problema, bem como as estimativas de erro a priori para ela. Nesta parte, seguimos o trabalho de [29]. As demonstrações foram omitidas mas podem ser encontradas nesta referência.

Considere o problema ADR na forma (2.9). Assim como feito anteriormente, introduzimos a reação efetiva  $\Lambda$  e assumimos a condição

$$\Lambda(x) := \tilde{\mu} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 \geq 0, \forall x \in \Omega.$$

Para mostrarmos os resultados sobre estimativas a priori, em particular para a estabilidade, precisamos definir mais algumas hipóteses sobre os coeficientes do problema:

(H1)  $\exists \zeta \in W^{k+1, \infty}(\Omega)$  tal que

$$\beta \cdot \nabla \zeta \geq 2b_0 := 2 \frac{\|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}}{L}$$

em  $\Omega$ , sendo  $L$  o diâmetro do domínio;

(H2)  $\exists c_\beta$  tal que

$$|\beta(x)| \geq c_\beta \|\beta\|_{W^{1, \infty}(\Omega)}, \quad \forall x \in \Omega;$$

(H3) Dada uma família de triangularizações regulares  $\{\mathcal{T}_h\}$  de  $\Omega$ ,  $\exists c_\Lambda > 0$  tal que  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\|\Lambda\|_{L^\infty(T)} \leq c_\Lambda \left( \min_T \Lambda(x) + b_0 \right).$$

A motivação para estas condições não serão apresentadas aqui mas podem ser encontradas em [29] com detalhes.

O método de Galerkin descontínuo para o problema de advecção-difusão-reação (ADR) é:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h^k \text{ tal que } B_h^{ADR}(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k. \quad (2.15)$$

em que a forma bilinear  $B_h^{ADR}$  é definida como

$$\begin{aligned} B_h^{ADR}(u, v) &= \int_{\Omega} (D\nabla u + \beta u) \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \mu uv + \int_{\mathcal{E}_h} \delta_{D,E} [[u]] [[v]] \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h} (\{(D\nabla u) \cdot \mathbf{n}\} [[v]] + [[u]] \{(D\nabla_h v) \cdot \mathbf{n}\}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}}} ((\beta \cdot \mathbf{n}) \{\{u\}\} + \delta_{\beta,E} [[u]]) [[v]] + \int_{\mathcal{E}_h^{\partial}} (\beta \cdot \mathbf{n})^{\oplus} uv. \end{aligned} \quad (2.16)$$

e o funcional linear  $F$  é dado pela expressão

$$F(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\mathcal{E}_h^{\partial}} g_D (\delta_{D,E} v + (D\nabla v) \cdot \mathbf{n} - (\beta \cdot \mathbf{n})^{\ominus} v).$$

Aqui utilizamos as seguintes notações:

$$(\beta \cdot \mathbf{n})^{\oplus} = \max(\beta \cdot \mathbf{n}, 0) \quad \text{e} \quad (\beta \cdot \mathbf{n})^{\ominus} = \min(\beta \cdot \mathbf{n}, 0).$$

Além disso,

$$\delta_{\beta,E} = \frac{1}{2} |\beta \cdot \mathbf{n}_E|.$$

**Observação 2.4** A formulação (2.15) é apresentada com condição de fronteira não-homogênea pois esta será a utilizada nos capítulos seguintes.

A consistência do problema (2.15) é imediata da construção uma vez que

$$B_h^{ADR}(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^k.$$

A estabilidade é mostrada na norma

$$\|v\|_{d}^2 := \|v\|_{d}^2 + \|v\|_{rc}^2,$$

em que

$$\|v\|_{d}^2 := D\|\nabla_h v\|_{L^2(\Omega)} + D\|v\|_j^2 := D\|\nabla_h v\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \frac{D}{|E|} \|[[v]]\|_{L^2(E)}^2,$$

$$\|v\|_{rc}^2 := \|(\bar{\Lambda} + b_0)^{1/2} v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \| |\beta \cdot \mathbf{n}|^{1/2} [[v]] \|_{L^2(E)}^2,$$

sendo  $b_0 = \|\beta\|_{0,\infty,\Omega}/L$  como definido em (H1) e  $\bar{\Lambda}$  dado por

$$\bar{\Lambda}|_T = \min_{x \in T} \Lambda(x), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

No caso do regime de advecção dominante é importante ter controle sobre a derivada direcional. Por isso, apresentaremos também resultados para a norma

$$\|v\|_{dG}^2 := \|v\|^2 + \|v\|_S^2,$$

em que

$$\|v\|_S^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\|\beta\|_{L^\infty(T)}} \|\pi_h^k(\beta \cdot \nabla v)\|_{L^2(T)}^2,$$

e  $\pi_h^k$  denota a projeção  $L^2$  sobre  $V_h^k$ . Com isso, temos um termo com a derivada direcional e podemos ter o controle necessário.

**Observação 2.5** *A presença da projeção na definição da norma acima deve-se ao caso em que  $\beta$  é uma função variável. No caso em que  $\beta$  é constante ou linear por partes, esta projeção não é necessária.*

Para encerrar esta seção, apresentamos duas estimativas de erro a priori nas normas definidas.

**Teorema 2.7** *Seja  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  solução de (2.6) e seja  $u_h$  solução do problema discreto (2.15). Então, existe uma constante  $C_0$ , que depende de  $\Omega$ , da*

regularidade de  $\mathcal{T}_h$  e da ordem de aproximação polinomial (mas independente de  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $D$  e  $h$ ), tal que

$$\|u - u_h\| \leq C_0 h^k \left( D^{1/2} + \|\beta\|_\infty^{1/2} h^{1/2} + \|\rho\|_\infty^{1/2} h \right) |u|_{k+1}$$

**Teorema 2.8** *Seja  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  solução de (2.6) e seja  $u_h$  solução do problema discreto (2.15). Então, existe uma constante  $C_1$ , que depende de  $\Omega$ , da regularidade de  $\mathcal{T}_h$  e da ordem de aproximação polinomial (mas independente de  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $D$  e  $h$ ), tal que*

$$\|u - u_h\|_{dG} \leq C_1 h^k \left( D^{1/2} + \|\beta\|_\infty^{1/2} h^{1/2} + \|\rho\|_\infty^{1/2} h \right) |u|_{k+1}$$

Os teoremas 2.7 e 2.8 fornecem estimativas de erro a priori robustas que são ótimas em todos os regimes. Com isso, temos que  $\|u - u_h\|$  e  $\|u - u_h\|_{dG}$  têm ordens

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(h^{k+1/2}), & \quad \text{para advecção dominante,} \\ \mathcal{O}(h^k), & \quad \text{para difusão dominante,} \\ \mathcal{O}(h^{k+1}), & \quad \text{para reação dominante.} \end{aligned}$$

### 3 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS

Neste capítulo apresentamos duas técnicas de estimativa a posteriori. A primeira, mais comum na literatura, faz uso da norma energia na estimativa de erro enquanto a segunda utiliza o erro em quantidades de interesse. Para os métodos baseados na norma energia, seguimos os resultados apresentados em [30, 15, 31, 11, 13, 32, 33]. Os métodos baseados em funcional de interesse, ou ainda estimativas de erro meta-orientadas, são mais recentes e começaram a ter destaque a cerca de duas décadas. Destacamos os trabalhos de [34, 7] e os mais recentes [16, 35].

Uma das principais motivações do estudo dos métodos de estimativa de erro a posteriori é a possibilidade de usá-los para fazer refinamento adaptativo. Enquanto as estimativas de erro na norma energia visam melhorar a aproximação da solução exata do problema, as estimativas em funcional de interesse permitem maior flexibilidade para que diferentes quantidades possam ser analisadas com maior cuidado. Isso permite que o refinamento adaptativo seja feito de modo a melhorar diretamente a aproximação deste funcional de interesse.

Reconstrução de fluxos equilibrados em espaços de Raviart-Thomas (RT) pode ser feita de diversas formas, por exemplo: via prescrição dos momentos [14], via método de elementos finitos mistos [12] e via base computacional modal [20]. Esta última é a que será apresentada neste capítulo. Nas duas primeiras seções apresentamos as estimativas de erro a posteriori na norma de energia e no funcional de interesse. A terceira seção é dedicada a detalhar a construção da base para os espaços RT. Ao final apresentamos resultados numéricos utilizando os dois estimadores desenvolvidos nas duas primeiras seções.

### 3.1 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI NA NORMA DE ENERGIA

#### 3.1.1 Problema de difusão

Considere a equação de Poisson não-homogênea com condição de Dirichlet nula:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

Aqui continuamos assumindo que o coeficiente difusivo  $D > 0$  é constante em  $\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ .

**Definição 3.1** Chamamos  $s_h \in H_0^1(\Omega)$  de reconstrução do potencial de  $u_h$  se  $s_h$  pode ser calculada em termos de  $u_h$ .

**Definição 3.2** Chamamos  $\mathbf{t}_h \in H(\text{div}, \Omega)$  de reconstrução de fluxo equilibrado de ordem  $k$  de  $u_h$  se

i)  $\mathbf{t}_h$  pode ser calculada em termos de  $u_h$

ii)  $\nabla \cdot \mathbf{t}_h|_T = \pi_T^k(f)$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ , em que  $\pi_T^k : L^2(T) \rightarrow \mathbb{P}_k$  é a projeção ortogonal em  $L^2$ .

Procuraremos o fluxo equilibrado reconstruído no espaço de Raviart-Thomas:

$$\mathbb{RT}^m(\mathcal{T}_h) = \{ \mathbf{t}_h \in H(\text{div}, \Omega) / \mathbf{t}_h|_T \in [\mathbb{P}_m(T)]^2 + \mathbf{x}\mathbb{P}_m(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Seguindo [14], usamos um método de reconstrução de fluxo equilibrado a partir da solução discreta  $u_h$  do problema (2.13) baseado na prescrição dos graus de liberdade de um elemento no espaço de Raviart-Thomas. Em cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , vamos definir um fluxo reconstruído  $\mathbf{t}_h \in \mathbb{RT}^k(T)$  pelos seus graus de liberdade:

- $\forall q_h \in \mathbb{P}_k(E)$  e  $\forall E \in \partial T$ ,

$$\int_E (\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_E) q_h = \int_E (-\mathbf{n}_E \cdot \{ \{ D\nabla_h u_h \} \}) + \alpha_E \frac{\gamma_{D,E}}{h_E} ([u_h]) q_h; \quad (3.2)$$

- Se  $k \geq 1$ ,  $\forall \mathbf{r}_h \in [\mathbb{P}_{k-1}(T)]^2$ ,

$$\int_T \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{r}_h = \int_T -D\nabla u_h \cdot \mathbf{r}_h + \sum_{E \in \partial T} \int_E \chi_{\mathcal{E}_h}(E) (\mathbf{n}_E \cdot D\mathbf{r}_h) [[u_h]], \quad (3.3)$$

em que

$$\chi_{\mathcal{E}_h}(E) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}} \\ 1, & \text{se } E \in \mathcal{E}_h^{\partial}. \end{cases}$$

O lema a seguir garante que, usando as expressões (3.2)-(3.3), obtemos uma reconstrução de fluxo equilibrado de  $u_h$ .

**Lema 3.1** *Seja  $u_h$  uma solução discreta do problema (2.13). Então, para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ , a seguinte igualdade vale*

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_h|_T = \pi_T^k(f).$$

**Demonstração:** Note primeiramente que  $\nabla \cdot \mathbf{t}_h|_T \in \mathbb{P}_k(T)$ . Seja  $w_h \in \mathbb{P}_k(T)$ . Pelo teorema de Green, segue que  $w_h|_E \in \mathbb{P}_k(E)$ ,  $\forall E \in \mathcal{E}_h$ . Assim, de (3.2)-(3.3) temos que

$$\begin{aligned} \int_T (\nabla \cdot \mathbf{t}_h) w_h &= - \int_T \mathbf{t}_h \cdot \nabla w_h + \sum_{E \in \partial T} \int_E (\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}) w_h = \int_T D\nabla_h u_h \cdot \nabla_h \tilde{w}_h - \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \left( \int_E \mathbf{n}_E \cdot \{ \{ D\nabla_h \tilde{w}_h \} \} [[u_h]] + \int_E (\mathbf{n}_E \cdot \{ \{ D\nabla_h u_h \} \} - \alpha_E \frac{\gamma_{D,E}}{h_E} [[u_h]]) [[\tilde{w}_h]] \right) = \\ &= B_h(u_h, \tilde{w}_h) = \int_{\mathcal{T}_h} f \tilde{w}_h = \int_T f w_h \end{aligned}$$

em que  $\tilde{w}_h$  é a extensão por zero fora de  $T$ . ■

O teorema a seguir garante que o estimador que iremos definir é confiável.

**Teorema 3.1** *Seja  $u$  solução fraca de (2.4) e  $u_h \in H^1(\mathcal{T}_h)$  arbitrário. Sejam  $\mathbf{t}_h$  e  $s_h$ , respectivamente, as reconstruções de fluxo e potencial. Então:*

$$\begin{aligned} \|D^{1/2} \nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left( \|D^{1/2} \nabla_h u_h + D^{-1/2} \mathbf{t}_h\|_{L^2(T)} + \frac{h_T}{\pi} \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h\|_{L^2(T)} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|D^{1/2} \nabla(u_h - s_h)\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

**Demonstração:** Veja [32]. ■

**Definição 3.3** *Seja  $V(T)$  o conjunto de nós de Lagrange no elemento  $T$ . Definimos o interpolador de Oswald como  $I_{Os} : \mathbb{P}_k \rightarrow \mathbb{P}_k$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ , tal que,  $\forall a \in V(T)$  e  $\forall v_h \in V_h^k$ ,*

$$(I_{Os}v_h)(a) = \frac{1}{|\mathcal{T}_a|} \sum_{T \in \mathcal{T}_a} v_h|_T(a)$$

em que  $\mathcal{T}_a = \{T \in \mathcal{T}_h / a \in \bar{T}\}$  e é conhecido como estrela do nó  $a$ .

Ou seja, o interpolador de Oswald é uma média dos valores que  $v_h$  assume em um nó quando restrito a um triângulo  $T$  que contém  $a$  no seu fecho. O interpolador de Oswald pertence a  $H_0^1(\Omega)$  e, portanto, é reconstrução de potencial de  $u_h$ .

Introduzimos o estimador de erro

$$\eta^2(u_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta^2(T) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} ((\eta_{\mathcal{O}}(T) + \eta_{\nabla}(T))^2 + \eta_{\mathcal{H}}^2(T)) \quad (3.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{O}}(T) &= \frac{h_T}{\pi} \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h(u_h)\|_{L^2(T)}, \\ \eta_{\nabla}(T) &= \|D^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\sigma}_h(u_h) - \mathbf{t}_h(u_h))\|_{L^2(T)}, \\ \eta_{\mathcal{H}}(T) &= \|D^{\frac{1}{2}}(\nabla_h(u_h) - \nabla_h(I_{Os}u_h))\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

**Definição 3.4** *Definimos o índice de eficiência para o estimador de erro  $\eta(u_h)$  como*

$$I_{\eta} = \frac{\eta(u_h)}{\|D^{\frac{1}{2}}(\nabla u - \nabla_h u_h)\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Para enunciar os teoremas sobre a limitação inferior (local) precisamos definir primeiramente a seguinte norma:

$$\|v\|_{DG, \omega_T}^2 = \|D^{1/2} \nabla_h v\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \bar{\gamma} \sum_{E \subset \omega_T} \frac{1}{h_E} \|[[v]]\|_{L^2(E)}^2$$

em que  $\omega_T$  é a família de elementos de  $\mathcal{T}_h$  que tem intersecção não vazia com  $T$  e  $\bar{\gamma}$  sendo a constante que garante a coersividade da forma bilinear da formulação SIPdG do problema.

**Teorema 3.2 (Limitação inferior - parte conforme)** *Para cada elemento  $T \in \mathcal{T}_h$ , existe uma constante  $C_T$ , que depende de  $D$ , tal que a seguinte estimativa vale*

$$\eta_{\nabla}(T) \leq C_T \|u - u_h\|_{DG, \omega_T}.$$

**Demonstração:** Veja [32, 12]. ■

**Teorema 3.3 (Limitação inferior - parte não conforme)** *Suponha que  $u_h \in V_h^k \cap H_0^1(\Omega)$ . Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , existe uma constante  $C_T$ , que depende de  $D$ , tal que a seguinte estimativa vale*

$$\eta_{\mathcal{N}}(T) \leq C_T \|u - u_h\|_{DG, \omega_T}.$$

**Demonstração:** Veja [32, 12]. ■

## 3.2 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI NO FUNCIONAL DE META

Nesta seção apresentamos uma estratégia de estimativa de erro a posteriori que se baseia na reconstrução de fluxos equilibrados em espaços de Raviart-Thomas.

Os resultados mostrados aqui seguem os trabalhos de [16] e [35]. As demonstrações foram omitidas aqui mas podem ser encontradas nestas referências.

### 3.2.1 Problema de difusão

Considere a equação de Poisson não-homogênea com condição de Dirichlet nula:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.5)$$

em que  $D$  é uma função constante por partes estritamente positiva e  $f \in L^2(\Omega)$ .

Como visto no capítulo anterior, a formulação fraca do problema (3.5) é:

$$\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em que

$$B(u, v) = \int_{\Omega} D\nabla u \cdot \nabla v,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v.$$

Com o intuito de garantir que as estimativas no funcional de meta são exatas assintoticamente, assumiremos que o problema modelo (3.5) possui a propriedade de regularidade elíptica (2.5).

Estaremos interessados em um funcional de meta  $Q$  definido sobre  $L^2(\Omega)$  de modo que

$$Q(v) = \int_{\Omega} q v$$

em que  $q \in L^2(\Omega)$  denota a representante de Riesz de  $Q$ . Definimos também o problema dual correspondente na forma forte como:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (D\nabla p) = q & \text{em } \Omega, \\ p = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

e a sua forma fraca como:

$$\text{Encontrar } p \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } B(v, p) = Q(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Vale destacar que, das duas formulações fracas, temos a relação de equivalência primal-dual

$$F(p) = B(u, p) = Q(u).$$

Apenas por questões de referência, reescrevemos a seguir a formulação fraca discreta dos problemas primal e dual uma vez que a formulação fraca para o problema de difusão puro já foi apresentada no capítulo anterior.

As formulações fracas discretas do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo com penalização interior simétrica (SIPdG) são:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h^k \text{ tal que } B_h(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k, \quad (3.7)$$

$$\text{Encontrar } p_h \in V_h^m \text{ tal que } B_h(v_h, p_h) = Q(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^m, \quad (3.8)$$

em que  $B_h : V_h^k \times V_h^k \rightarrow \mathbb{R}$  é a forma bilinear dada por (2.12).

O próximo teorema é uma ferramenta importante para demonstrar os resultados que apresentaremos sobre o estimador de erro. Introduzimos uma cota inferior  $\gamma(\mathcal{T}_h)$  para  $\gamma_E$  que é computável (veja [16]):

$$\gamma_E \geq \gamma(\mathcal{T}_h), \quad \forall E \in \mathcal{E}_h. \quad (3.9)$$

Essa condição é suficiente para garantir a existência e unicidade da solução pelo método SIPdG.

**Teorema 3.4** *Suponha  $\Omega$  um domínio poligonal convexo em  $\mathbb{R}^2$  e, também, que a solução de (3.5) pertença a  $H^{k+1}(\Omega)$ . Seja  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  uma família de malhas triangulares regulares encadeadas em  $\Omega$  e assuma que os parâmetros  $\gamma_E$  satisfazem a condição de estabilidade (3.9). Então, as seguintes estimativas de erro para a solução do problema (3.7) pelo método de Galerkin descontínuo com uma constante  $C > 0$ , que depende apenas da constante de regularidade da malha  $\mathcal{T}_h$ , são válidas:*

$$\begin{aligned} \| \|u - u_h\| \|_h &\leq Ch^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^{k+1} \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

em que

$$\| \|v_h\| \|_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|_{[L^2(T)]^2}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \gamma_E \|[[v_h]]\|_{L^2(E)}^2.$$

O objetivo deste capítulo é estudar o erro de aproximação no funcional de meta:

$$\mathcal{E} = Q(u - u_h) = Q(u) - Q(u_h).$$

**Definição 3.5** *O erro  $\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h)$  no funcional de meta é dito ser de exato ordem  $l > 0$  com respeito a solução  $u_h$  se existem constantes  $\underline{C} > 0$  e  $\bar{C} > 0$ , que dependem apenas de  $u$  e  $Q$ , tal que*

$$\underline{C}h^l \leq |Q(u) - Q(u_h)| \leq \bar{C}h^l,$$

para um  $h > 0$  suficientemente pequeno.

**Observação 3.1** *Note que a condição acima pode deixar de ser válida quando  $u - u_h \in \text{Ker } Q$ , isto é,  $Q(u) = Q(u_h)$ . Porém, essa situação ocorre raramente na prática e será desconsiderada.*

Como dito anteriormente, procuraremos o fluxo equilibrado reconstruído no espaço de Raviart-Thomas:

$$\mathbb{RT}^m(\mathcal{T}_h) = \{ \mathbf{t}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega) / \mathbf{t}_h|_T \in [\mathbb{P}_m(T)]^2 + \mathbf{x}\mathbb{P}_m(T), \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Estes espaços já estão bem descritos na literatura. As principais propriedades destes espaços estão apresentadas na última seção deste capítulo.

**Definição 3.6** *Seja  $u_h \in V_h^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , e seja  $l = \max\{0, k - 1\}$ . Seja  $\pi_h^l : L^2(\Omega) \rightarrow V_h^l$  denotando o operador de projeção  $L^2$ -ortogonal. Um vetor  $\mathbf{t}_h(u_h) \in \mathbb{RT}^l(\mathcal{T}_h)$ , reconstruído a partir de  $u_h$ , é dito ser um fluxo equilibrado com respeito ao problema (3.5) se*

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_h(u_h) = \pi_h^l(f).$$

A seguir, aplicaremos a reconstrução de fluxos equilibrados para estimar o erro no funcional de meta. Seguindo os passos de [16], para um  $\mathbf{t}_h \in \mathbb{RT}^l(\mathcal{T}_h)$ , podemos escrever o erro no funcional como

$$\mathcal{E} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h) p - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{t}_h + D\nabla u_h) \cdot \nabla p - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{n}_E \cdot D\nabla p) [[u_h]],$$

de onde segue o teorema a seguir sobre a representação do erro no funcional de meta.

**Teorema 3.5** *Sejam  $u_h \in V_h^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , uma aproximação da solução  $u \in H_0^1(\Omega)$  do problema primal (3.5) e  $p_h \in V_h^m$ ,  $m > k$ , uma aproximação da solução  $p \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  do problema (3.6). Suponha que  $u_h$  e  $p_h$  admitam reconstruções de fluxo equilibrado  $\mathbf{t}_h(u_h) \in \mathbb{RT}^l(\mathcal{T}_h)$ ,  $l = \max\{0, k - 1\}$  e  $\mathbf{t}_h(p_h) \in \mathbb{RT}^{m-1}(\mathcal{T}_h)$ , respectivamente. Então, o erro no funcional de meta  $Q$  pode ser representado como*

$$\mathcal{E} = Q(u) - Q(u_h) = \eta(u_h, p_h; \mathbf{t}_h(u_h), \mathbf{t}_h(p_h)) + \mathcal{R}(u, p; u_h, p_h),$$

em que o estimador de erro  $\eta$  é definido como:

$$\begin{aligned} \eta = \eta(u_h, p_h; \mathbf{t}_h(u_h), \mathbf{t}_h(p_h)) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \pi_h^l(f)) p_h \\ &+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{t}_h(u_h) + D\nabla u_h) \cdot D^{-1} \mathbf{t}_h(p_h) \\ &- \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{t}_h(p_h)) [[u_h]], \end{aligned}$$

e o termo residual como:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(u, p; u_h, p_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \pi_h^l(f))(p - p_h) \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{t}_h(u_h) + D\nabla u_h) \cdot D^{-1}(D\nabla p + \mathbf{t}_h(p_h)) \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E (\mathbf{n}_E \cdot (D\nabla p + \mathbf{t}_h(p_h))) [[u_h]]. \end{aligned}$$

O último termo do estimador  $\eta$  pode ser reescrito como uma soma sobre os elementos da malha. Isso nos permite escrevê-lo na seguinte forma:

$$\eta = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(T) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\mathcal{O}}(T) + \eta_{\nabla}(T) + \eta_{\mathcal{R}}(T), \quad (3.10)$$

com

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{O}}(T) &= \int_T (f - \pi_h^l(f)) p_h \\ \eta_{\nabla}(T) &= \int_T (\mathbf{t}_h(u_h) + D\nabla u_h) \cdot D^{-1} \mathbf{t}_h(p_h) \\ \eta_{\mathcal{R}}(T) &= \sum_{E \in \partial T} \chi_{\mathcal{E}_h}(E) [[u_h]] (\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{t}_h(p_h)), \end{aligned}$$

e

$$\chi_{\mathcal{E}_h}(E) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}} \\ 1, & \text{se } E \in \mathcal{E}_h^{\partial}. \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir resultados sobre a representação (3.10) do erro com o intuito mostrar que ele fornece um estimador de erro no funcional de meta que é assintoticamente exato para o problema primal. É importante destacar que a estratégia escolhida foi a de aproximar a solução do problema dual através do método de Galerkin descontínuo de ordem mais alta que a do problema primal. Isto se baseia na possibilidade de fácil implementação do método em qualquer dimensão e ao fato dele ser localmente conservativo.

O fluxo equilibrado  $\mathbf{t}_h^{k-1}(u_h) \in \mathbb{RT}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$  para a solução dG  $u_h \in V_h^k$  é definido localmente em  $\mathbb{RT}^{k-1}(T)$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ , pelos momentos:

- Para  $k \geq 1$ :  $\forall q_h \in \mathbb{P}_{k-1}(E)$  e  $\forall E \in \mathcal{E}_h$ ,

$$\int_E \mathbf{n}_E \cdot \mathbf{t}_h^{k-1}(u_h) q_h = \int_E (-\{\{\mathbf{n} \cdot D\nabla u_h\}\} + \gamma_E [[u_h]]) q_h; \quad (3.11)$$

- Para  $k \geq 2$ :  $\forall \mathbf{r}_h \in (\mathbb{P}_{k-2}(T))^d$  e  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ ,

$$\int_T \mathbf{t}_h^{k-1}(u_h) \cdot \mathbf{r}_h = - \int_T D\nabla u_h \cdot \mathbf{r}_h + \sum_{E \in \partial T} \int_E \chi_{\mathcal{E}_h}(E) \mathbf{n} \cdot D\mathbf{r}_h[[u_h]]. \quad (3.12)$$

**Definição 3.7** Uma função  $f \in L^2(\Omega)$  é dita ter oscilações de ordem  $l \in \mathbb{N}_0$  em  $V_h^k$  se existe  $C > 0$ , dependendo apenas de  $f$  e da constante de regularização de  $\mathcal{T}_h$ , tal que

$$\|f - \pi_h^k f\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^l, \quad \forall \mathcal{T}_h.$$

Como mencionado anteriormente, a demonstração dos dois teoremas a seguir fazem uso do teorema 3.4.

**Teorema 3.6** Suponha que a função  $f \in L^2(\Omega)$  do problema (3.5) tenha oscilações de ordem  $k-1$  em  $V_h^{k-1}$ . Seja  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  e  $u_h \in V_h^k$  soluções de (3.5) e (3.7), respectivamente. Além disso, seja  $\mathbf{t}_h(u_h) \in \mathbb{RT}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$  o fluxo equilibrado com respeito a  $u_h$  dado por (3.11)-(3.12). Então, existe uma constante  $C > 0$ , que depende apenas de  $D$ ,  $f$  e da constante de regularização de  $\mathcal{T}_h$ , tal que

$$\|\mathbf{t}_h^{k-1}(u_h) + D\nabla_h u_h\|_{[L^2(\Omega)]^2} \leq Ch^k.$$

**Teorema 3.7** Suponha que a função  $f \in L^2(\Omega)$  do problema (3.5) tenha oscilações de ordem  $k-1$  em  $V_h^{k-1}$ . Seja  $u \in H^{k+1}(\Omega)$  e  $p \in H^{m+1}(\Omega)$  soluções de (3.5) e (3.6), respectivamente. Suponha também que a representação de Riesz  $q$  do funcional de meta tem oscilações de ordem  $m-1$  em  $V_h^{m-1}$ . Seja  $u_h \in V_h^k$  e  $p_h \in V_h^m$  soluções SIPdG de (3.7) e (3.8), respectivamente. Então, existe uma constante  $C > 0$ , dependendo apenas da constante de regularidade de  $\mathcal{T}_h$ , dos dados dos problemas primal e dual  $D$ ,  $f$  e  $q$  e das soluções exatas  $u$  e  $p$ , tal que

$$|\mathcal{R}(u, p; u_h, p_h)| \leq Ch^{k+m}.$$

Destes teoremas podemos concluir o resultado desejado sobre o estimador de erro (3.10).

**Teorema 3.8** *Sob as condições do teorema 3.7 e supondo que o erro do funcional de meta é correto de ordem  $h^{2k}$ , o estimador de erro (3.10) é assintoticamente exato, isto é,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\eta(u_h, p_h; \mathbf{t}_h^{k-1}(u_h), \mathbf{t}_h^{m-1}(p_h))}{Q(u) - Q(u_h)} = 1.$$

### 3.2.2 Problema de advecção-difusão

Considere o problema de advecção-difusão não-homogêneo com condição de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (-D\nabla u + \beta u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.13)$$

em que  $D$  é uma função constante por partes estritamente positiva,  $f \in L^2(\Omega)$  e o campo vetorial  $\beta \in [Lip(\Omega)]^2$  é Lipschitz e  $\nabla \cdot \beta = 0$  em  $\Omega$ .

A forma fraca do problema de advecção-difusão (3.13) é:

$$\text{Encontrar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

em que

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} (D\nabla u - \beta u) \cdot \nabla v, \\ F(v) &= \int_{\Omega} f v. \end{aligned}$$

Dado um funcional contínuo  $Q$  definido sobre  $L^2(\Omega)$ , que será o funcional de interesse, o problema dual na forma fraca pode ser escrito como:

$$\text{Encontrar } p \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } B(v, p) = Q(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Ou ainda, se  $q \in L^2(\Omega)$  é o representante de Riesz do funcional  $Q$ , podemos escrever a forma forte do problema dual como:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (-D\nabla p - \beta p) = q & \text{em } \Omega, \\ p = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.14)$$

Seja  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  uma família de malhas regulares, com  $h$  sendo o diâmetro da malha. As formulações fracas discretas dos dois problemas acima pelo método de Galerkin descontínuo com penalização interior são:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h^k \text{ tal que } B_h(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^k, \quad (3.15)$$

$$\text{Encontrar } p_h \in V_h^m \text{ tal que } B_h(v_h, p_h) = Q(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^m, \quad (3.16)$$

em que  $B_h$  é a forma bilinear dada por

$$\begin{aligned} B_h(u_h, v_h) &= \int_{\mathcal{T}_h} D \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h - \int_{\mathcal{T}_h} u_h (\beta \cdot \nabla_h v_h) \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h} (\{ \{ (D \nabla_h u_h) \cdot \mathbf{n} \} \} \llbracket v_h \rrbracket + \llbracket u_h \rrbracket \{ \{ (D \nabla_h v_h) \cdot \mathbf{n} \} \}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h} \delta_D \llbracket u_h \rrbracket \llbracket v_h \rrbracket + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}}} ((\beta \cdot \mathbf{n}) \{ \{ u_h \} \} + \delta_\beta \llbracket u_h \rrbracket) \llbracket v_h \rrbracket \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} (\beta \cdot \mathbf{n})^\oplus u_h v_h. \end{aligned}$$

com a devida troca de sinal no coeficiente advectivo  $\beta$ . Aqui,  $\delta_D, \delta_\beta : \mathcal{E}_h \rightarrow \mathbb{R}$  são constantes por partes definidas como

$$\delta_D|_E = \gamma_E D k^2 h_E^{-1}, \quad E \in \mathcal{E}_h, \text{ e } \delta_\beta|_E = |\beta \cdot \mathbf{n}|/2, \quad E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}.$$

Apresentamos a seguir resultados sobre a análise de erro do método estudado. Duas hipóteses a cerca das soluções primal e dual precisam ser feitas:

**H1)** As soluções  $u$  e  $p$  dos problemas primal e dual, respectivamente, são suficientemente suaves, isto é,  $u, p \in H^2(\mathcal{T}_h)$  e  $u, p, \mathbf{n} \cdot \nabla u$  e  $\mathbf{n} \cdot \nabla p$  são contínuos sobre cada aresta  $E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}$ .

**H2)** O termo  $\beta \cdot \nabla_h v_h \in V_h^k$  para todo  $v_h \in V_h^k$ .

Definimos, para  $v \in H^1(\mathcal{T}_h) \cap V_h^k$ , a norma

$$\begin{aligned} \| \| v \| \|^2 &= \int_{\mathcal{T}_h} \left( D |\nabla_h v|^2 + \frac{\|\beta\|_\infty}{L} v^2 \right) \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h} \left( \left( \frac{D}{h_{\mathcal{E}_h}} + |\beta \cdot \mathbf{n}| \right) \llbracket v \rrbracket^2 + h_{\mathcal{E}_h} D \{ \{ \nabla_h v \} \}^2 \right), \end{aligned}$$

em que  $L$  é o diâmetro do domínio  $\Omega$ .

O teorema a seguir fornece uma estimativa a priori para a solução SIPdG de alta ordem para o problema (3.13). Ele é uma ferramenta importante para demonstrar o último teorema desta seção.

**Teorema 3.9** *Suponha válidas as hipóteses H1 e H2. Sejam  $u \in H^{k+1}(\Omega)$ ,  $k \geq 1$  solução do problema (3.13) e  $u_h$  solução de Galerkin descontínuo de ordem  $k$  do problema discreto (3.15). Então, existe uma constante  $C > 0$ , que depende de  $\Omega$ , da constante de regularidade de  $\mathcal{T}_h$  e da ordem de aproximação  $k$ , mas independe de  $D$ ,  $\beta$  e  $h$ , tal que*

$$\| \| u - u_h \| \| \leq C(D^{1/2} + \|\beta\|_\infty^{1/2} h^{1/2}) h^k \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}.$$

**Demonstração:** Veja [36]. ■

Da hipótese H1, a formulação (3.15) é consistente e vale a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\begin{aligned} B_h(u - u_h, v_h) &= 0, \quad \forall v_h \in V_h^k, \\ B_h(w_h, p - p_h) &= 0, \quad \forall w_h \in V_h^k. \end{aligned}$$

Usando esta propriedade, obtemos a representação para o erro no funcional de interesse:

$$\mathcal{E}_Q(u_h) = Q(u) - Q(u_h) = B_h(u - u_h, p) = B_h(u - u_h, p - p_h).$$

**Observação 3.2** *Usando esta representação, a continuidade da forma bilinear e a estimativa a priori do teorema 3.9, é possível mostrar que  $|Q(u) - Q(u_h)| = \mathcal{O}(h^{2k})$  se o termo difusivo é dominante e  $|Q(u) - Q(u_h)| = \mathcal{O}(h^{2k+1})$  se o termo advectivo é dominante.*

Denotamos por  $\sigma_h(u_h) = -D\nabla_h u_h + \beta u_h$  o fluxo total para a solução SIPdG  $u_h$ .

**Definição 3.8** Um vetor  $\mathbf{t}_h \in \mathbb{RT}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$  é dito ser um fluxo equilibrado reconstruído para a solução SIPdG  $u_h \in V_h^k$  do problema (3.15) se

$$\nabla \cdot \mathbf{t}_h = \pi_h^{k-1}(f),$$

em que  $\pi_h^{k-1}$  denota a projeção  $L^2$  sobre  $V_h^{k-1}$ .

Usando uma aproximação de ordem maior  $\hat{p}_h \in V_h^m$ ,  $m > k$ , da solução exata dual  $p$ , temos a representação do erro na forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_Q(u_h) &= \int_{\mathcal{T}_h} (f - \pi_h^{k-1}(f)) \hat{p}_h + \int_{\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\sigma}_h(u_h) - \mathbf{t}_h) \cdot \nabla_h \hat{p}_h \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h} \{ \{ \mathbf{n} \cdot D\nabla \hat{p}_h \} \} [u_h] + \Delta(u, p; u_h, \hat{p}_h) \end{aligned} \quad (3.17)$$

em que o termo residual  $\Delta(u, p; u_h, \hat{p}_h)$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta(u, p; u_h, \hat{p}_h) &= \int_{\mathcal{T}_h} (f - \pi_h^{k-1}(f))(p - \hat{p}_h) \\ &\quad - \int_{\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{\sigma}_h(u_h) - \mathbf{t}_h) \cdot (\nabla p - \nabla_h \hat{p}_h) \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h} (\mathbf{n} \cdot D\nabla p - \{ \{ \mathbf{n} \cdot D\nabla_h \hat{p}_h \} \}) [u_h]. \end{aligned}$$

Assim, temos o estimador de erro, que é totalmente computável, a seguir:

$$\begin{aligned} \eta(u_h, \hat{p}_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (f - \pi_h^{k-1}(f)) \hat{p}_h \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\sigma}_h(u_h) - \mathbf{t}_h) \cdot \nabla_h \hat{p}_h \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h} \{ \{ \mathbf{n} \cdot D\nabla \hat{p}_h \} \} [u_h] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Resta tratarmos da reconstrução do fluxo equilibrado  $\mathbf{t}_h \in \mathbb{RT}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$  com respeito a solução dG  $u_h \in V_h^k$ . A ideia é calcular os graus de liberdade de  $\mathbf{t}_h$  a partir dos fluxos numéricos:

- Para  $k \geq 1$ ,  $\forall E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}, \forall q_h \in \mathbb{P}_{k-1}(E)$ ,

$$\int_E \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n} q_h = \int_E (\{ \{ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h(u_h) \} \} + (\delta_D + \delta_\beta) [u_h]) q_h; \quad (3.19)$$

- Para  $k \geq 1$ ,  $\forall E \in \mathcal{E}_h^\partial$ ,  $\forall q_h \in \mathbb{P}_{k-1}(E)$ ,

$$\int_E \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n} q_h = \int_E (-(D\nabla_h u_h) \cdot \mathbf{n} + (\delta_D + (\beta \cdot \mathbf{n})^\oplus) u_h) q_h; \quad (3.20)$$

- Para  $k \geq 2$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h$ ,  $\forall \mathbf{r}_h \in [\mathbb{P}_{k-2}(T)]^d$ ,

$$\int_T \mathbf{t}_h \cdot \mathbf{r}_h = \int_T \sigma_h(u_h) \cdot \mathbf{r}_h + \int_{\partial T} \chi_{\mathcal{E}_h} (D\mathbf{r}_h \cdot \mathbf{n}) [[u_h]]; \quad (3.21)$$

em que  $\chi_{\mathcal{E}_h}|_E = 1/2$  se  $E \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}$  e  $\chi_{\mathcal{E}_h}|_E = 1$  se  $E \in \mathcal{E}_h^\partial$ .

**Lema 3.2** *Sejam  $u_h \in V_h^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , a solução  $dG$  de (3.15) e  $\mathbf{t}_h \in \mathbb{RT}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$  definido por (3.19)-(3.21). Então  $\mathbf{t}_h$  é o fluxo equilibrado reconstruído de  $u_h$ .*

**Definição 3.9** *Definimos o índice de eficiência para o estimador de erro  $\eta(u_h, \hat{p}_h)$  como*

$$I_\eta = I_\eta(u_h, \hat{p}_h) = \frac{\eta(u_h, \hat{p}_h)}{\mathcal{E}_Q(u_h)}.$$

*O estimador de erro  $\eta$  é dito ser assintoticamente exato se*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} I_\eta(u_h, \hat{p}_h) = 1.$$

No sentido da definição acima, segue de (3.17) que o estimador de erro  $\eta(u_h, \hat{p}_h)$  é assintoticamente exato se, e somente se,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\Delta(u, p; u_h, \hat{p}_h)}{\mathcal{E}_Q(u_h)} = 0.$$

O número de Péclet é um parâmetro adimensional utilizado no estudo de fenômenos de transporte e definido como a razão da taxa de advecção pela taxa de difusão.

**Teorema 3.10** *Assuma as hipóteses H1 e H2 e que  $f \in V_h^{k-1}$ . Sejam  $u \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ ,  $k \geq 1$ , e  $p \in H^{m+1}(\mathcal{T}_h)$ ,  $m > k$ , as soluções dos problemas primal (3.13) e dual (3.14), respectivamente. Seja  $u_h \in V_h^k$  e  $\hat{p}_h \in V_h^m$  as soluções dos problemas discretos primal (3.15) e dual (3.16), respectivamente. Além disso, suponha que o funcional de meta seja correto com ordem  $2k$ , isto é,*

$$|Q(u) - Q(u_h)| \geq c(D^{1/2} + \|\beta\|_\infty^{1/2} h^{1/2})^2 \|u\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)} \|p\|_{H^{m+1}(\mathcal{T}_h)}$$

em que  $c > 0$  independe de  $D$ ,  $\beta$  e  $h$ . Então, existe uma constante  $C$  que depende do domínio  $\Omega$ , da constante de regularidade de  $\mathcal{T}_h$  e da ordem de aproximação  $k$ , porém, independe de  $D$ ,  $\beta$  e  $h$ , tal que

$$\left| \frac{\Delta(u, p; u_h, \hat{p}_h)}{Q(u) - Q(u_h)} \right| \leq C(1 + Pe^{\frac{1}{2}})h^{m-k} \frac{\|P\|_{H^{m+1}(\mathcal{T}_h)}}{\|P\|_{H^{k+1}(\mathcal{T}_h)}}. \quad (3.22)$$

**Corolário 3.1** *Sobre as hipóteses do teorema anterior, o estimador de erro (3.18) é assintoticamente exato se a ordem da aproximação de Galerkin descontínuo do problema dual for maior que a ordem da aproximação de Galerkin descontínuo do problema primal.*

**Observação 3.3** *Entretanto, a estimativa (3.22) mostra que, mesmo para soluções suaves, para valores grandes do número de Péclet a convergência assintótica pode deteriorar.*

### 3.3 BASE PARA O ESPAÇO DE RAVIART-THOMAS DE ALTA ORDEM

Nesta seção, apresentaremos a construção do método computacional de reconstrução de fluxos a partir da solução de problemas elípticos obtida pelo método de Galerkin descontínuo. O método apresentado tem como principais características a eficiência e o baixo custo computacional. Para isso, utilizamos uma base computacional específica para os espaços de Raviart-Thomas de alta ordem.

Essa base computacional foi desenvolvida de modo que os coeficientes dos fluxos equilibrados com respeito a essa base possam ser calculados de forma barata a partir dos momentos dos fluxos numéricos da solução do problema pelo método de Galerkin descontínuo. Posteriormente, estes fluxos equilibrados reconstruídos são utilizados para calcular estimadores de erro a posteriori e que, por sua vez, são utilizados para fazer refinamento adaptativo da malha do problema.

A implementação de  $\mathbb{RT}^0$  está presente na maioria dos pacotes computacionais e foi discutida com detalhes em [37]. Já o trabalho apresentado aqui não se restringe ao espaço de Raviart-Thomas de ordem mais baixa. Maio-

res detalhes sobre os espaços de Raviart-Thomas podem ser encontrados em [38].

Seja  $\Omega$  um domínio poligonal em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\mathcal{T}_h$  uma família de malhas triangulares regulares, em que  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h(T)$  denota o diâmetro da malha e  $h(T)$  é o diâmetro do elemento  $T$ .

Como definido anteriormente, associado a triangularização  $\mathcal{T}_h$ , o espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas é

$$\mathbb{RT}^k(\mathcal{T}_h) = \{\mathbf{u}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{u}_h|_T \in \mathbb{RT}^k(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

E, associado a cada triângulo  $T \in \mathcal{T}_h$  o espaço de Raviart-Thomas local é definido por

$$\mathbb{RT}^k(T) = [\mathbb{P}_k(T)]^2 + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathbb{P}_k(T),$$

em que  $\mathbb{P}_k(T)$  denota o espaço dos polinômios em  $T$  de grau menor ou igual a  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Para  $\mathbf{u} \in \mathbb{RT}^k(T)$  os graus de liberdade são dados por

$$\int_{\partial T} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_T) p, \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(\partial T); \quad (3.23)$$

$$\int_T \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}_{k-1}(T)]^2 \quad \text{se } k \geq 1. \quad (3.24)$$

A base apresentada aqui é calculada a partir dos graus de liberdade (3.23) e (3.24). Para isso, construímos a base sobre o elemento mestre e depois estendemos a definição para um elemento  $T \in \mathcal{T}_h$  qualquer através da transformação de Piola.

**Definição 3.10** *Definimos o triângulo de referência  $\hat{T}$  como aquele cujos vértices são:*

$$\hat{\mathbf{v}}_1 = (-1, -1)', \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = (1, -1)', \quad \hat{\mathbf{v}}_3 = (-1, 1)';$$

ou ainda,

$$\hat{T} = \{\hat{\mathbf{v}}^1, \hat{\mathbf{v}}^2, \hat{\mathbf{v}}^3\} = \{(r, s)' \mid r, s \geq -1; r + s \leq 0\}.$$

Para  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $T = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ ,  $\mathbf{v}^1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{v}^2 = (x_2, y_2)$ ,  $\mathbf{v}^3 = (x_3, y_3)$  a aplicação canônica afim  $\pi_T : \hat{T} \rightarrow T$  é definida como:

$$\pi_T(r, s) = -\frac{r+s}{2}\mathbf{v}^1 + \frac{r+1}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{s+1}{2}\mathbf{v}^3 = (x(r, s), y(r, s))'.$$

**Definição 3.11** A transformação de Piola, associada a  $\pi_T$ , para  $\hat{\mathbf{u}} \in [L^2(\hat{T})]^2$  é definida por

$$P_T \hat{\mathbf{u}}(x, y) = \frac{1}{|\det J_T|} J_T \hat{\mathbf{u}}(\pi_T(r, s)),$$

em que  $J_T$  é a matriz jacobiana de  $\pi_T$ .

**Lema 3.3 (Propriedades da Transformação de Piola)** Para  $\mathbf{u} \in H(\text{div}, T)$  e  $v \in H^1(T)$  temos que

$$\begin{aligned} \int_T (\nabla \cdot \mathbf{u})v &= \int_{\hat{T}} (\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}})\hat{v}; \\ \int_T \mathbf{u} \cdot \nabla v &= \int_{\hat{T}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{v}; \\ \int_{\partial T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_T v &= \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\hat{T}} \hat{v}, \end{aligned}$$

em que  $\hat{\mathbf{u}} = P_T^{-1} \mathbf{u}$  e  $\hat{v} = \pi_T^{-1} v$ .

O teorema a seguir mostra como é possível construir a base para o espaço de Raviart-Thomas.

**Teorema 3.11** No espaço de Raviart-Thomas  $\mathbb{RT}^k(T)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $T = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$  existe uma base  $\{\Phi_{i,l}^{\partial T}, \Psi_m^T\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $l = 1, \dots, k+1$ ,  $m = 1, \dots, 2M$ ,  $M = \frac{k(k+1)}{2}$  tal que

(B1) Para cada  $i, i' \in \{1, 2, 3\}$  e  $l \in \{1, \dots, k+1\}$ ,

$$\Phi_{i,l}^{\partial T} \cdot \mathbf{n}_{i'}^T|_{E_{i'}} = \delta_{i,i'} \mathbb{L}_l^i, \quad ,$$

em que  $E_i$  denota a aresta do triângulo oposto ao vértice  $\mathbf{v}^i$ ,  $\mathbf{n}_i^T$  é o vetor unitário normal a aresta  $E_i$  exterior a  $T$  e  $\{\mathbb{L}_l^i\}_{l=0}^k$  é o conjunto ortonormal de polinômios de Legendre em  $L^2(E_i)$ .

(B2)  $\Psi_m^T$ ,  $m = 1, \dots, 2M$  forma uma base em  $L^2([\mathbb{P}_{k-1}(\hat{T})]^2)$  e

$$\Psi_m^T \cdot \mathbf{n}_i|_{E_i} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, m \in \{1, \dots, 2M\}.$$

**Demonstração:** Seguindo [39], sobre o elemento mestre  $\hat{T}$ , considere

$$\mathbf{e}_1(r, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+1 \\ s+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(r, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r-1 \\ s+1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3(r, s) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r+1 \\ s-1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t}_1(r, s) = \frac{s+1}{2} \begin{pmatrix} r+1 \\ s-1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2(r, s) = \frac{r+1}{2} \begin{pmatrix} r-1 \\ s+1 \end{pmatrix}.$$

Definimos

$$\hat{\Phi}_{i,l}(r, s) = \mathbb{L}_{l-1}(s) \mathbf{e}_i(r, s), \quad i = 1, 2,$$

$$\hat{\Phi}_{3l}(r, s) = \mathbb{L}_{l-1}(r) \mathbf{e}_3(r, s), \quad l \in \{1, \dots, k+1\},$$

em que  $\{\mathbb{L}_n\}_{n=0}^k$  são os polinômios de Legendre normalizados que formam um sistema ortonormal para  $L^2([-1, 1])$ . Como  $\hat{\Phi}_{i,l}$  satisfaz a propriedade

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_j|_{\hat{E}_j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_j|_{\hat{E}_j} = \delta_{ij}, \quad i \in \{2, 3\}, j \in \{1, 2, 3\}$$

obtemos

$$\hat{\Phi}_{i,l}^{\partial \hat{T}} \cdot \mathbf{n}_{i'}|_{\hat{E}_{i'}} = \delta_{i,i'} \mathbb{L}_l^i.$$

Note que

$$\int_{\hat{E}_i} (\hat{\Phi}_{i,l'}^{\partial \hat{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) (\hat{\Phi}_{i,l}^{\partial \hat{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) = \delta_{ll'}, \quad l, l' \in \{1, \dots, k+1\}, i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.25)$$

Agora, definimos

$$\hat{\Psi}_m = \hat{p}_m(r, s) \mathbf{t}_1(r, s), \quad m = 1, \dots, M,$$

$$\hat{\Psi}_m = \hat{p}_{m-M}(r, s) \mathbf{t}_2(r, s), \quad m = M+1, \dots, 2M,$$

em que os polinômios  $\hat{p}_m$  formam a base ortonormal de Dubiner para  $\mathbb{P}_{k-1}(\hat{T})$ , veja [40]. Como

$$\mathbf{t}_j(r, s) \cdot \mathbf{n}_i|_{\hat{E}_i} = 0, \quad j \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2, 3\},$$

temos que  $\hat{\Psi}_m \cdot \mathbf{n}_i|_{\hat{E}_i} = 0$ .

Assim, usando a transformação de Piola, as funções

$$\begin{aligned}\Phi_{i,l}^{\partial T} &= P \circ \Phi_{il} \circ \pi_T^{-1}, \\ \Psi_m^T &= P \circ \hat{\Psi}_m \circ \pi_T^{-1}\end{aligned}$$

formam uma base para  $\mathbb{RT}^k(T)$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ , e satisfazem as propriedades (B1) - (B2). ■

As figuras (1) e (2) exibem a base  $\{\Phi_{i,l}^{\partial T}, \Psi_m^T\}$  para  $\mathbb{RT}^2(\hat{T})$  que foi utilizada. É possível perceber as propriedades B1 e B2.

A seguir, vamos demonstrar como recuperar os coeficientes correspondentes a esta base a partir dos graus de liberdade do espaço de elementos finitos de Raviart-Thomas  $\mathbb{RT}^k$ .

Considere, em  $[\mathbb{P}_{k-1}(T)]^2$ , uma base  $\{\mathbf{P}_m^T\}_{m=1}^{2M}$ , definida por

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_m^T &= \begin{pmatrix} p_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, M; \\ \mathbf{P}_m^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ p_{M-m} \end{pmatrix}, \quad m = M+1, \dots, 2M,\end{aligned}$$

em que os polinômios  $p_m$  formam uma base de Dubiner para  $\mathbb{P}_{k-1}(T)$ .

**Lema 3.4** *Seja  $\mathbf{u}_h \in \mathbb{RT}^k(\mathcal{T}_h)$  e suponha que*

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_h|_T = \sum_{i',l'} c_{i',l'}^{\partial T} \Phi_{i',l'}^{\partial T} + \sum_{m'} c_{m'}^T \Psi_{m'}^T \quad (3.26)$$

seja a sua representação local na base  $\{\Phi_{i,l}^{\partial T}, \Psi_m^T\}$  de  $\mathbb{RT}^k(T)$ .

Sejam

$$\mu_{i,l}^{\partial T}(\mathbf{u}_T) = \int_{E_i} (\mathbf{u}_T \cdot \mathbf{n}_i) \mathbb{L}_l^i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, l \in 1, \dots, k+1; \quad (3.27)$$

$$\mu_m^T(\mathbf{u}_T) = \int_T \mathbf{u}_T \cdot \mathbf{P}_m, \quad m \in \{1, \dots, 2M\}, \quad (3.28)$$

os graus de liberdade de  $\mathbf{u}_T$ . Então

$$c_{i,l}^{\partial T} = \mu_{i,l}^{\partial T}(\mathbf{u}_T), \quad i \in \{1, 2, 3\}, l \in 1, \dots, k+1 \quad (3.29)$$

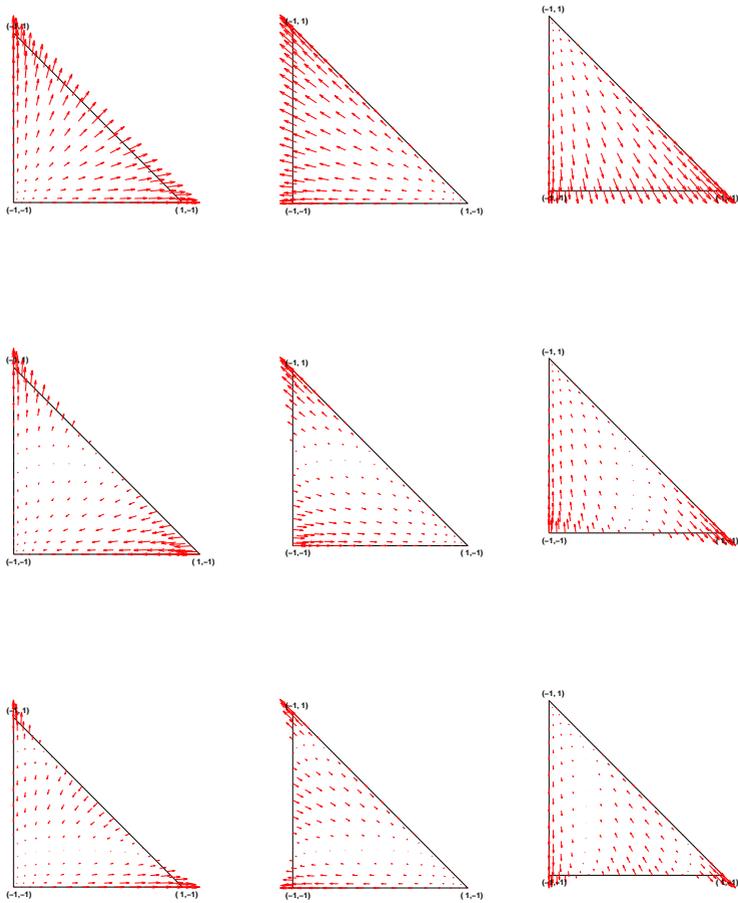


Figura 1 – Funções de base  $\Phi_l^{E_i}$  para  $l = 1$  (primeira linha),  $l = 2$  (segunda linha) e  $l = 3$  (terceira linha) para o espaço  $\mathbb{RT}^2(\hat{T})$ .

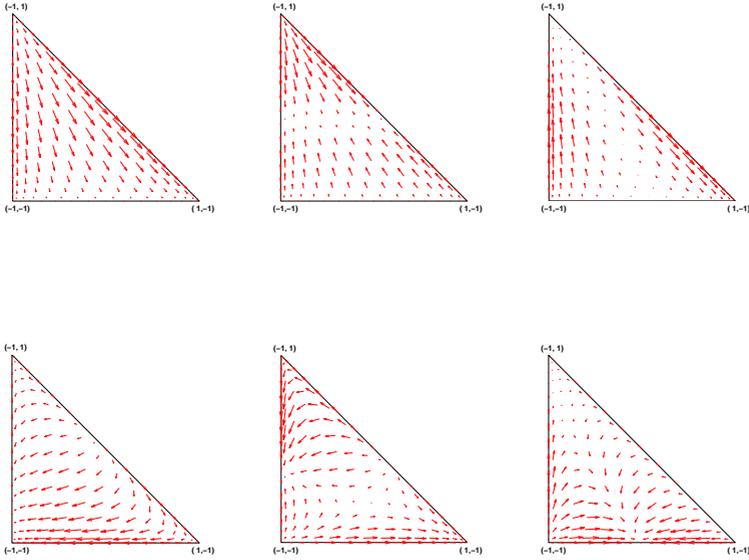


Figura 2 – Funções de base  $\Psi_m^T$  para  $m = 1, 2$  e  $3$  na primeira linha e  $m = 4, 5$  e  $6$  na segunda linha para o espaço  $\mathbb{RT}^2(\hat{T})$ .

e

$$\mathbf{c}^T = G_T^{-1} \mathbf{F}_T, \quad (3.30)$$

em que  $\mathbf{c}^T = (c_1^T, \dots, c_{2M}^T)'$ ,

$$G_T = \left[ \int_T \Psi_i^T \cdot \mathbf{P}_j^T \right]_{2M \times 2M}, \quad \mathbf{F}_T = \left[ \mu_m^T(\mathbf{u}) - \sum_{i,l} \mu_{i,l}^{\partial T} \int_T \Phi_{i,l}^{\partial T} \cdot \mathbf{P}_m^T \right]_{2M \times 1}.$$

**Demonstração:** Substituindo (3.26) em (3.27) obtemos

$$\begin{aligned} \mu_{i,l}^{\partial T}(\mathbf{u}_T) &= \sum_{i',l'} c_{i',l'}^{\partial T} \int_{E_i} (\Phi_{i',l'}^{\partial T} \cdot \mathbf{n}_i) (\Phi_{i,l}^{\partial T} \cdot \mathbf{n}_i) + \\ &+ \sum_{m'} c_{m'}^T \int_{E_i} (\Psi_{m'}^T \cdot \mathbf{n}_i) (\Phi_{i,l}^{\partial T} \cdot \mathbf{n}_i) = c_{i,l}^{\partial T} \int_E \mathbb{L}_{l'} \mathbb{L}_l = c_{i,l}^{\partial T} \end{aligned}$$

uma vez que as propriedades (B1), (B2) e (3.25) são válidas.

Analogamente, de (3.28) obtemos

$$\mu_m^T(\mathbf{u}_T) = \sum_{i',l'} c_{i',l'}^{\partial T} \int_T \Phi_{i',l'}^{\partial T} \cdot \mathbf{P}_m^T + \sum_{m'} c_{m'}^T \int_T \Psi_{m'}^T \cdot \mathbf{P}_m^T,$$

que é justamente o sistema  $G_T \mathbf{c}^T = \mathbf{F}_T$ . ■

**Observação 3.4** *O lema 3.4 fornece uma forma barata, no sentido computacional, de se recuperar o fluxo a partir dos momentos (3.27) e (3.28) pois, em cada elemento da malha precisamos apenas resolver um sistema linear pequeno.*

**Observação 3.5** *Note que*

$$\int_T \Psi_{m'}^T \cdot \Psi_m^T = |J_T| \int_{\hat{T}} P_T \Psi_{m'}^T \cdot P_T \Psi_m^T = \int_{\hat{T}} (J_T J_T^T) / |J_T| \hat{\Psi}_{m'}^T \cdot \hat{\Psi}_m^T$$

e, portanto, segue que

$$c_m^T = \mu_m^T(\mathbf{u}_T) - \sum_{i,l} \mu_{i,l}^{\partial T}(\mathbf{u}_T) \int_T \Phi_{i,l}^{\partial T} \cdot \Psi_m^T, \quad m \in 1, \dots, 2M$$

para triângulos nos quais  $(J_T J_T^T) / |J_T| = Id$ . Isto ocorre para elementos que sejam triângulos retângulos isósceles, por exemplo, o que permite que a reconstrução de fluxo seja calculada diretamente dos momentos sem a necessidade da solução de sistemas lineares locais.

### 3.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para exemplificar o funcionamento do método desenvolvido, iremos apresentar a seguir uma série de testes numéricos feitos. Apesar de, até aqui, termos nos restringido ao caso de condições de fronteira de Dirichlet homogênea, os resultados aqui apresentados não se restringem a essas condições. O desenvolvimento feito pode ser estendido aos casos apresentados.

### 3.4.1 Teste 1: Norma energia - Problema suave

Este primeiro teste consiste na aproximação da solução do problema modelo (3.1) no qual a solução exata é suave e igual a  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ , o domínio  $\Omega = (0, 1)^2$  e o coeficiente de difusão é constante igual a 1. Utilizou-se o método de Galerkin descontínuo de ordens  $k = 1, 2, 3, 4$  em uma sequência de malhas obtidas através de refinamento uniforme por bisseção de uma malha inicial não estruturada com 48 elementos, apresentada na figura 3.

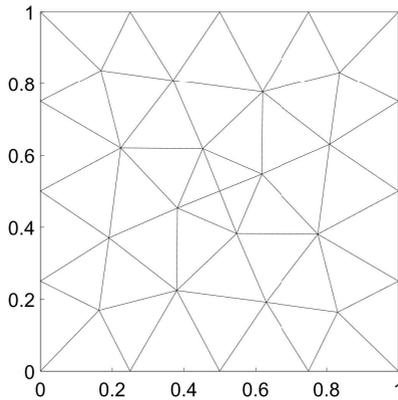


Figura 3 – Malha inicial não estruturada com 48 elementos.

Denotamos por  $e(u_h) = \|D^{-\frac{1}{2}}(\sigma(u) - \sigma_h(u_h))\|_{L^2(\Omega)}$  o erro da aproximação SIPdG, por  $e(\mathbf{t}_h) = \|D^{-\frac{1}{2}}(\sigma(u) - \mathbf{t}_h(u_h))\|_{L^2(\Omega)}$  o erro da aproximação do fluxo exato pelo fluxo reconstruído e por  $e(\nabla \cdot \mathbf{t}_h) = \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h(u_h)\|_{L^2(\Omega)}$  o erro no equilíbrio do fluxo reconstruído. A tabela 1 apresenta os erros e as taxas de convergência do método SIPdG e do fluxo equilibrado reconstruído a partir da solução discreta usando a base computacional apresentada.

Dados  $h_1$  e  $h_2$  o diâmetro de duas malhas e  $e_{h_1}$  e  $e_{h_2}$  os erros de aproximação da solução em alguma norma, as taxas de convergência são cal-

culadas por meio da seguinte expressão:

$$\mathcal{O}(e) = \frac{\log\left(\frac{\|e_{h_1}\|}{\|e_{h_2}\|}\right)}{\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}$$

É possível observar que o método SIPdG aproxima corretamente a solução exata do problema e exibe ordem de convergência  $k$  como previsto no teorema 3.4. O erro de aproximação do fluxo exato pelo fluxo equilibrado reconstruído é, também, de ordem  $k$ , que é a ordem ótima para essa aproximação. Por fim, a ordem de convergência do desvio da oscilação é  $k + 1$ , o que quer dizer que o fluxo  $\mathbf{t}_h$  é equilibrado com ordem  $k - 1$ .

$k$	$N_r$	$e(u_h)$ $\mathcal{O}(e(u_h))$	$e(\mathbf{t}_h)$ $\mathcal{O}(e(\mathbf{t}_h))$	$e(\nabla \cdot \mathbf{t}_h)$ $\mathcal{O}(e(\nabla \cdot \mathbf{t}_h))$
1	1	$2.779 \times 10^{-1}$ 2.951	$3.664 \times 10^{-1}$ 2.605	$6.013 \times 10^{-2}$ 5.544
	2	$1.394 \times 10^{-1}$ 0.995	$1.879 \times 10^{-1}$ 0.964	$1.521 \times 10^{-2}$ 1.983
	3	$6.984 \times 10^{-2}$ 0.997	$9.425 \times 10^{-2}$ 0.995	$3.813 \times 10^{-3}$ 1.996
	4	$3.495 \times 10^{-2}$ 0.999	$4.711 \times 10^{-2}$ 1.000	$9.540 \times 10^{-4}$ 1.999
2	1	$2.480 \times 10^{-2}$ 5.058	$3.184 \times 10^{-2}$ 4.275	$3.725 \times 10^{-3}$ 8.005
	2	$6.227 \times 10^{-3}$ 1.994	$7.819 \times 10^{-3}$ 2.026	$4.685 \times 10^{-4}$ 2.991
	3	$1.561 \times 10^{-3}$ 1.996	$1.944 \times 10^{-3}$ 2.008	$5.864 \times 10^{-5}$ 2.998
	4	$3.910 \times 10^{-4}$ 1.998	$4.852 \times 10^{-4}$ 2.003	$7.332 \times 10^{-6}$ 3.000
3	1	$1.011 \times 10^{-3}$ 7.457	$1.294 \times 10^{-3}$ 6.806	$2.743 \times 10^{-4}$ 9.262
	2	$1.294 \times 10^{-4}$ 2.965	$1.648 \times 10^{-4}$ 2.973	$1.697 \times 10^{-5}$ 4.015
	3	$1.623 \times 10^{-5}$ 2.995	$2.050 \times 10^{-5}$ 3.007	$1.059 \times 10^{-6}$ 4.003
	4	$2.029 \times 10^{-6}$ 3.000	$2.547 \times 10^{-6}$ 3.008	$6.613 \times 10^{-8}$ 4.001
4	1	$6.619 \times 10^{-5}$ 8.177	$8.910 \times 10^{-5}$ 7.072	$8.448 \times 10^{-6}$ 11.581
	2	$4.042 \times 10^{-6}$ 4.033	$5.414 \times 10^{-6}$ 4.041	$2.801 \times 10^{-7}$ 4.915
	3	$2.514 \times 10^{-7}$ 4.007	$3.371 \times 10^{-7}$ 4.005	$8.856 \times 10^{-9}$ 4.983
	4	$1.570 \times 10^{-8}$ 4.001	$2.109 \times 10^{-8}$ 3.999	$2.775 \times 10^{-10}$ 4.996

Tabela 1 – Erros e taxas de convergência para diferentes ordens de aproximação  $k$  e refinamento  $N_r$ .

### 3.4.2 Teste 2: Norma energia - Refinamento adaptativo

Consideramos agora o problema (3.1) com as mesmas condições de domínio, coeficiente de difusão e malha inicial do teste anterior, porém, agora com solução exata dada por

$$u(x, y) = x(x-1)y(y-1) \arctan \left( 60 \sqrt{(x-5/4)^2 + (y+1/4)^2 - 1} \right).$$

Este problema visa mostrar como o método se comporta quando aplicado a um problema cuja solução apresenta regiões de altos gradientes no interior do domínio.

Diferentemente do teste 1, neste teste utilizamos refinamento adaptativo, a partir da malha inicial, usando o método proposto por Dörfler (veja [41]), isto é, os elementos do conjunto minimal  $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_h$ , tais que  $\sum_{T \in \mathcal{M}} \eta(T) \geq \theta \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta(T)$ , são refinados. Aqui,  $\eta$  é o estimador na norma energia dado em (3.4).

As figuras 4 e 5 mostram, na primeira coluna, o erro na norma energia e a ordem de convergência, calculados usando refinamento uniforme e refinamento adaptativo com  $\theta = 0.25$ ,  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$  para a estratégia de marcação de Dörfler, em função dos graus de liberdade DOF (do inglês “*degrees of freedom*”) em escala logarítmica para as ordens do método SIPdG  $k = 1, 2, 3, 4$ . A segunda coluna exhibe os índices de eficiência. A terceira coluna apresenta a malha correspondente ao erro  $\approx 0.01$  para  $\theta = 0.25$ .

Note que, para uma dada ordem do método de Galerkin descontínuo, a norma energia do erro é similar para diferentes parâmetros de marcação de Dörfler e, assintoticamente, exhibe taxas de convergência ótimas. Os índices de eficiência permanecem acima de 1 e são, assintoticamente, próximos de 1 mesmo quando a ordem de aproximação aumenta. É possível observar também que o número de graus de liberdade necessário para atingir o mesmo erro de aproximação global decresce quando a ordem de aproximação polinomial  $k$  aumenta. A respeito da adaptação, fica visível que o método refina a malha principalmente sobre a região onde a solução exata apresenta gradientes de maior magnitude.

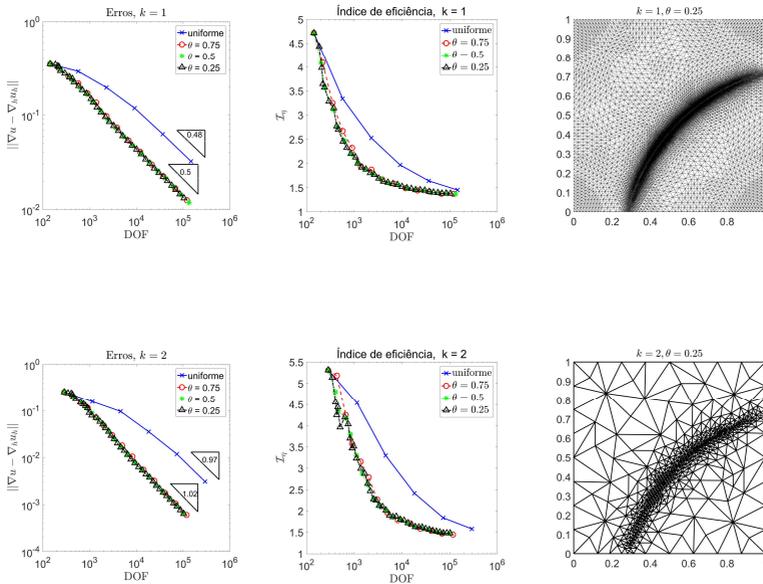


Figura 4 – Norma energia do erro e ordem de convergência (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para  $\theta = 0.25$ ,  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$  na marcação de Dörfler e  $k = 1$  e  $2$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente correspondendo ao erro de  $\approx 0.01$  na norma energia ( com  $DOF = 104991$  para  $k = 1$  e  $DOF = 7692$  para  $k = 2$ ).

### 3.4.3 Teste 3: Funcional de interesse - Difusão

Neste exemplo, tratamos da equação (3.5) com solução dada por

$$u(x, y) = x(x-1)y(y-1) \arctan \left( 60\sqrt{(x-5/4)^2 + (y+1/4)^2 - 1} \right).$$

O domínio é  $\Omega = (0, 1)^2$  e o coeficiente de difusão é constante igual a 1. Utilizou-se o método de Galerkin descontínuo de ordens  $k = 1, 2$  e  $3$  em uma sequência de malhas obtidas através de refinamento uniformes e adaptativos de uma malha inicial estruturada com 200 elementos (figura 6).

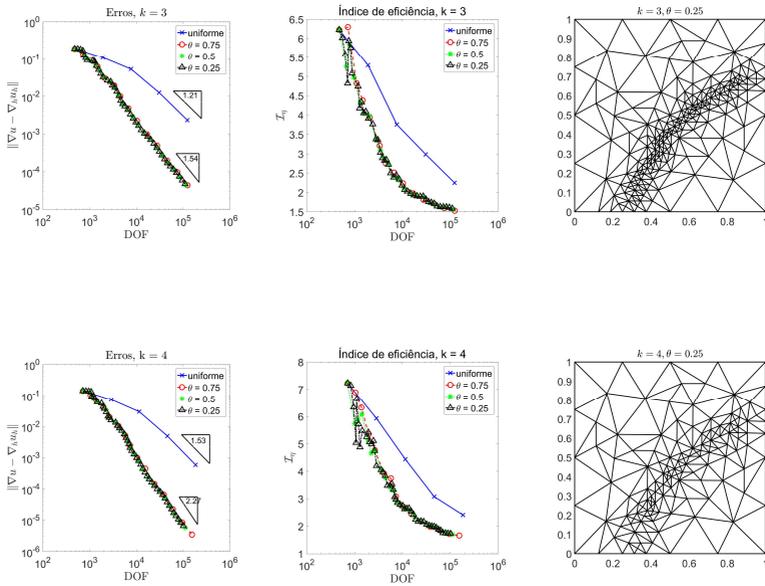


Figura 5 – Norma energia do erro e ordem de convergência (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para  $\theta = 0.25$ ,  $\theta = 0.5$  e  $\theta = 0.75$  na marcação de Dörfler e  $k = 3$  e  $4$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente correspondendo ao erro de  $\approx 0.01$  na norma energia ( com  $DOF = 4270$  para  $k = 3$  e  $DOF = 3930$  para  $k = 4$ ).

O funcional de interesse estudado foi

$$Q(u) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} u,$$

em que  $\omega = [0.1, 0.2] \times [0.8, 0.9]$ . O valor exato da quantidade de interesse é  $Q(u) = 0.024714657756$ .

A figura 7 mostra, na primeira coluna, os erro no funcional de meta e os indicadores de erro  $\eta$  (calculados através de (3.18)) usando refinamento uniforme e refinamento adaptativo com  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler em escala logarítmica, em função de DOF. Tanto o erro no funcional quanto os in-

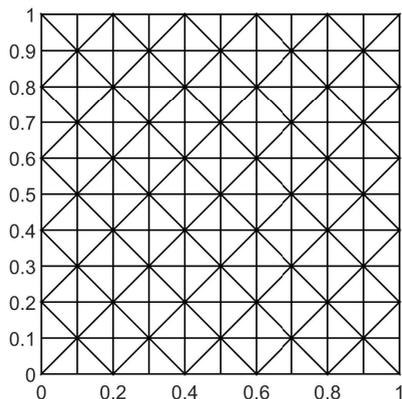


Figura 6 – Malha inicial estruturada com 200 elementos.

dicadores são relativos, isto é, os dados apresentados correspondem as quantias  $\frac{Q(u-u_h)}{Q(u)}$  e  $\frac{\eta}{Q(u)}$ . A segunda coluna exibe os índices de eficiência e a terceira coluna apresenta a malha adaptativa final para cada ordem de método SIPdG.

É importante observar o efeito que o funcional de interesse tem sobre o refinamento adaptativo. Enquanto no teste 2 a adaptação ocorre apenas na região em que a solução exata  $u$  tem gradientes altos, neste caso, a adaptação ocorre também dentro da região de interesse  $\omega$ . Inicialmente, devido ao fato da malha inicial ser mais grossa, o índice de eficiência exibe oscilações, porém, quando a malha é adaptada, o indicador se aproxima do erro.

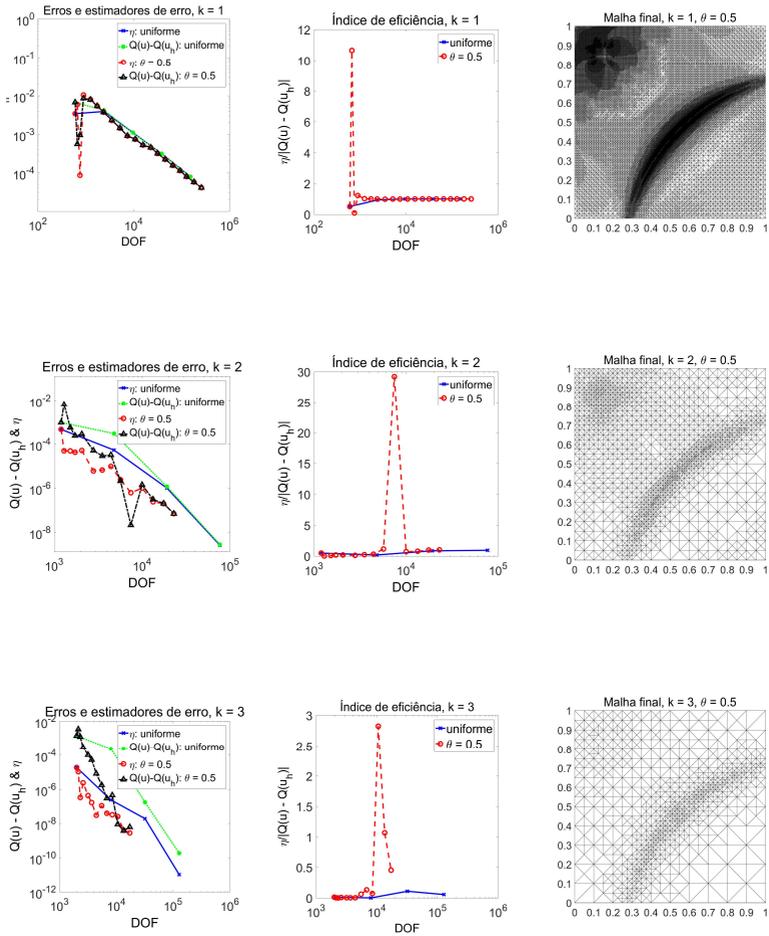


Figura 7 – Erro no funcional de meta (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler e  $k = 1, 2$  e  $3$ . À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento.

### 3.4.4 Teste 4: Funcional de interesse - Advecção-difusão

Consideramos o problema (3.13) com solução exata dada por

$$u(x, y) = 10xy(1 - y)(e^{-x} - e^{-1 + \frac{x-1}{\varepsilon}}),$$

em que  $\varepsilon = 10^{-2}$ , o coeficiente difusivo  $D$  é constante igual a  $\varepsilon$  e o coeficiente advectivo é  $\beta = (1, 0)$ .

O domínio utilizado é  $\Omega = (0, 1)^2$ . Utilizou-se ordens  $k = 1, 2, 3$  e  $4$  para o método SIPdG em uma sequência de malhas refinadas uniforme e adaptativamente a partir de uma malha inicial estruturada com 50 elementos.

O funcional de interesse estudado foi

$$Q(u) = \int_{\Omega} u,$$

O valor exato da quantidade de interesse é  $Q(u) = 0.43433185198253$ .

As figuras 8 e 9 seguem o mesmo formato do teste anterior. Isto é, na primeira coluna, apresentamos os erros no funcional de meta e os indicadores de erro  $\eta$  (calculados através de (3.18)) usando refinamento uniforme e refinamento adaptativo com  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler em escala logarítmica, em função de DOF. Tanto o erro no funcional quanto os indicadores são relativos, isto é, os dados apresentados correspondem as quantias  $\frac{Q(u-u_h)}{Q(u)}$  e  $\frac{\eta}{Q(u)}$ . A segunda coluna exhibe os índices de eficiência e a terceira coluna apresenta a malha adaptativa final para cada ordem de método SIPdG.

Podemos notar que, aumentando a ordem de aproximação, a ordem de convergência do erro na malha adaptativa é significativamente menor que a ordem de convergência na malha uniforme. Vale ressaltar também que número de elementos da malha necessário para chegar no mesmo erro diminui com o aumento da ordem de aproximação.

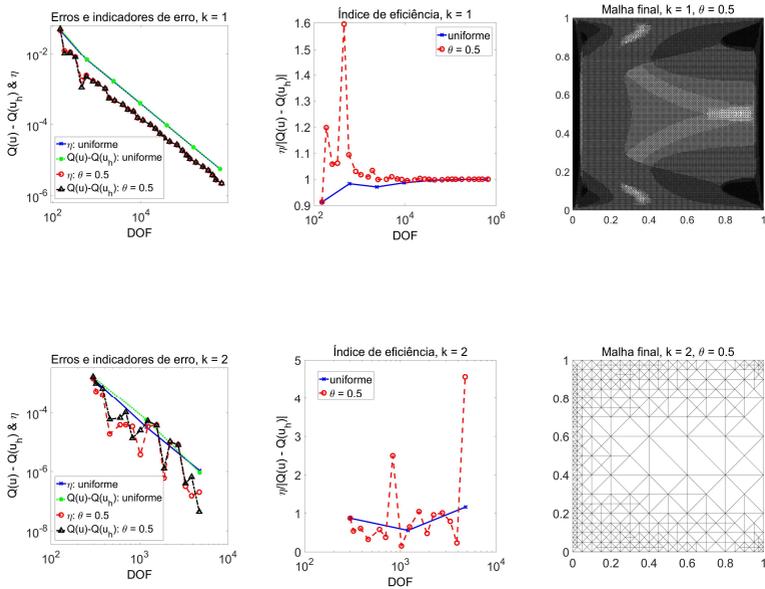


Figura 8 – Erro relativo no funcional de meta e indicador de erro relativo (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para refinamento e  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler e  $k = 1$  e 2. À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento.

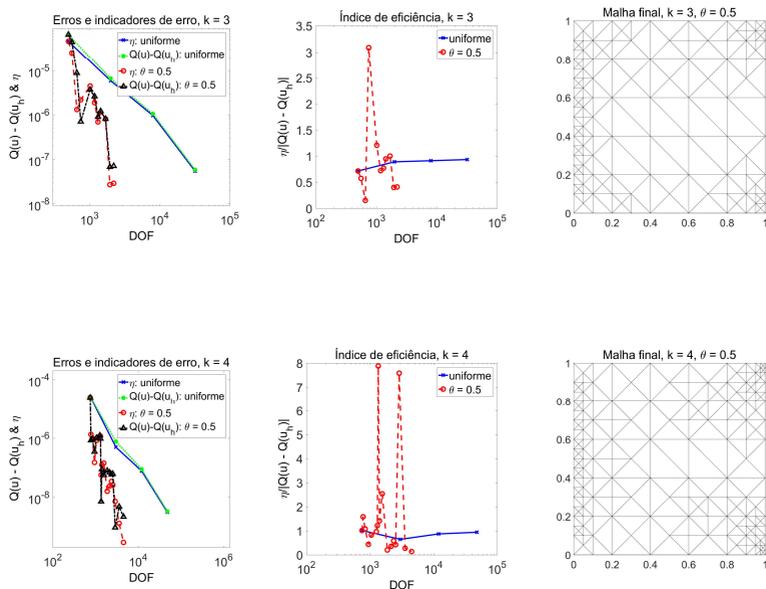


Figura 9 – Erro relativo no funcional de meta e indicador de erro relativo (à esquerda) e índice de eficiência (ao centro) em função de DOF em escala logarítmica para refinamento e  $\theta = 0.5$  na marcação de Dörfler e  $k = 3$  e 4. À direita, malhas refinadas adaptativamente no último nível de refinamento.

## 4 MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DE ADVECCÃO-DIFUSÃO

Neste capítulo trataremos dos problemas parabólicos do tipo advecção-difusão. Primeiramente, introduzimos as notações e espaços necessários e, em seguida, apresentamos a formulação discreta do método de Galerkin descontínuo no tempo e espaço. Também serão apresentadas estimativas a priori para essas aproximações. A bibliografia sobre esta parte é extensa, com destaque a [42, 43, 44, 45, 46].

### 4.1 INTRODUÇÃO

Sejam  $V$  um espaço normado equipado com a norma  $\|\cdot\|_V$  e  $(0, T)$  um intervalo no tempo. Consideramos os espaços das funções que mapeiam este intervalo  $(0, T)$  em  $V$ , mais precisamente, para  $r \geq 1$ , definimos

$$L^r(0, T; V) = \left\{ z : (0, T) \rightarrow V \text{ mensurável} / \int_0^T \|z(t)\|_V^r dt < \infty \right\}$$

com

$$\|z\|_{L^r(0, T; V)} = \left( \int_0^T \|z(t)\|_V^r dt \right)^{1/r}.$$

**Observação 4.1** *Caso  $V$  seja um espaço de Banach, então  $L^r(0, T; V)$  também é.*

### 4.2 PROBLEMA PARABÓLICO DE ADVECCÃO-DIFUSÃO

Seja  $\Omega$  um domínio poliedral em  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  e seja  $I = (0, T)$  um intervalo no tempo. Considere o problema parabólico com condição de Dirichlet não-homogênea:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) + \nabla \cdot (\beta u) = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = g_D, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

em que o coeficiente de difusão  $\varepsilon$  é constante por partes e estritamente positivo em  $\Omega \times [0, T]$  de modo que existe uma constante  $\varepsilon_0$  tal que  $\varepsilon(x, t) \geq$

$\varepsilon_0 > 0$ . O coeficiente  $\beta$  é definido como um campo vetorial continuamente diferenciável em  $\Omega$  tal que  $\|\beta\|_\infty \leq 1$ ,  $\forall (x, t) \in \Omega \times [0, T]$  e  $f \in L^2(0, T; \Omega)$ . Além disso, como no capítulo 2, assumimos que existe uma constante  $\beta_0 \geq 0$  tal que

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta(x, t) \geq \beta_0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

Esta condição garante existência e unicidade de solução fraca. Por fim, denotaremos por  $\sigma(u) = -\varepsilon \nabla u + \beta u \in H(\text{div}, \Omega)$  o fluxo total de  $u$ .

Dividimos  $\partial\Omega$  em 2 partes  $\partial\Omega = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  em que

- $\beta \cdot \mathbf{n} \geq 0$  em  $\Gamma^+$ ;
- $\beta \cdot \mathbf{n} < 0$  em  $\Gamma^-$ .

**Definição 4.1** Dizemos que uma equação parabólica do tipo (4.1) tem regime de difusão dominante quando

$$\|\beta\|_\infty \leq C\varepsilon_0,$$

sendo  $C$  uma constante positiva moderada, e dizemos que tem regime de advecção dominante quando

$$\varepsilon_0 \ll \|\beta\|_\infty.$$

**Observação 4.2** Para simplificar a notação, daqui em diante denotaremos:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv.$$

Vamos definir a seguir os espaços nos quais iremos construir a formulação variacional para o problema parabólico. Os dois primeiros já foram definidos anteriormente mas serão rerepresentados aqui.

**Definição 4.2** Definimos os seguintes espaços

$$H_0^s(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = 0\};$$

$$H_D^s(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega) / u|_{\partial\Omega} = g_D\};$$

$$X_0(I, \Omega) = \{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) / \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\};$$

$$X_D(I, \Omega) = \{u \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega)) / \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}.$$

A formulação fraca do problema (4.1) é:

$$\text{Encontrar } u \in X_D(I, \Omega) \text{ tal que } \mathcal{B}(u, v) = \int_0^T (f, v), \quad \forall v \in X_0(I, \Omega), \quad (4.2)$$

em que

$$\mathcal{B}(u, v) := \int_0^T (\partial_t u, v) + \int_0^T B(u, v),$$

sendo

$$B(u, v) = (\varepsilon \nabla u, \nabla v) - (u, \beta \cdot \nabla v)$$

a forma bilinear em  $H^1(\Omega)$  associada a parte de advecção-difusão, e com  $u(\cdot, 0) = u_0$ .

**Teorema 4.1 (Existência e unicidade)** *Sejam  $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  e  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Então, existe uma única solução  $u \in X_D(I, \Omega)$  para (4.2). Além disso, existe uma constante  $C$  positiva de modo que vale a desigualdade*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right), \quad \forall t \in (0, T).$$

**Demonstração:** Veja [45]. ■

### 4.3 MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO NO TEMPO E NO ESPAÇO

Sejam  $I = (0, T)$  um intervalo no tempo e  $N$  um número inteiro positivo. Considere uma sequência de tempos discretos  $\{t_n\}_{0 \leq n \leq N}$  tal que  $t_0 = 0$  e  $t_N = T$ . Introduzimos ainda o intervalo no tempo  $I_n = (t_{n-1}, t_n]$  e o passo no tempo  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ , para  $1 \leq n \leq N$ . Denotaremos por  $\tau = \max_n \tau_n$  e  $I_\tau = \{I_n\}_{1 \leq n \leq N}$ . Além disso, escrevemos  $f^n = f|_{I_n}$ .

**Definição 4.3** *Do mesmo modo como feito para o salto  $[[\cdot]]$  sobre uma aresta  $E$  da malha espacial, definimos o salto no tempo de uma função  $u = u(\cdot, t)$  no tempo  $t_i$  como*

$$[[u]]_i = \lim_{t \rightarrow t_i^+} u(\cdot, t) - \lim_{t \rightarrow t_i^-} u(\cdot, t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Seja  $\mathcal{T}_{\tau h} = \{\mathcal{T}_{h,n}\}_{n=0}^{N-1}$  uma família de malhas associada com a partição no tempo  $I_{\tau}$ . Vamos supor que as malhas  $\mathcal{T}_{h,n}$  e  $\mathcal{T}_{h,n+1}$  são compatíveis, isto é, a segunda pode ser obtida a partir do refinamento ou desrefinamento de triângulos de  $\mathcal{T}_{h,n}$ .

Definimos os espaços de Sobolev particionado

$$\begin{aligned} X(I_{\tau}, \mathcal{T}_{h,n}) &= \{u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / u \in L^2(I_n, H^s(\mathcal{T}_{h,n})), \\ &\quad \partial_t u \in L^2(I_n, H^{-1}(\Omega, \mathcal{T}_{h,n})), n = 1, \dots, N\}; \\ V &= \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / v|_{I_n} \in H^s(\mathcal{T}_{h,n})\}, \end{aligned}$$

sendo  $s > 3/2$ .

Com isso, podemos enunciar a formulação variacional do método de Galerkin descontínuo no tempo em espaços particionados: encontrar  $u \in X(I_{\tau}, \mathcal{T}_{h,n})$  tal que,  $\forall v \in V$ ,

$$\mathcal{B}_{\tau h}(u, v) := \int_{I_{\tau}} ((\partial_t u, v) + B_h(u, v)) + \sum_{i=0}^N ([[u]]_i, v(t_i^+)) = \int_I F(v). \quad (4.3)$$

A forma bilinear associada com a discretização no espaço da parte advecção-difusão pelo método de Galerkin descontínuo  $dG(l)$  é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} B_h(v, w) &= \int_{\mathcal{T}_h} \varepsilon (\nabla_h v_h \cdot \nabla_h w) - \int_{\mathcal{T}_h} v (\beta \cdot \nabla_h w) \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h} (\{ \{ (\varepsilon \nabla_h v) \cdot \mathbf{n} \} \} [[w]] + [[v]] \{ \{ (\varepsilon \nabla_h w) \cdot \mathbf{n} \} \}) \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h} \delta_{\varepsilon} [[v]] [[w]] + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}}} ((\beta \cdot \mathbf{n}) \{ \{ v \} \} + \delta_{\beta} [[v]]) [[w]] \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^{\partial}} (\beta \cdot \mathbf{n})^{\oplus} v w. \end{aligned}$$

sendo  $\delta_{\varepsilon}$  o termo de penalização do salto sobre as arestas e  $(\beta \cdot \mathbf{n})^{\oplus} = \max(\beta \cdot \mathbf{n}, 0)$ . Além disso, o funcional linear  $F$  é dado pela expressão

$$F(v) = \int_{\Omega} f(\cdot, t) v + \int_{\mathcal{E}_h^{\partial}} g_D (\delta_{\varepsilon} |_{E} v + (\varepsilon \nabla_h v) \cdot \mathbf{n} - (\beta \cdot \mathbf{n})^{\ominus} v)$$

sendo  $(\beta \cdot \mathbf{n})^{\ominus} = \min(\beta \cdot \mathbf{n}, 0)$ .

A seguir apresentamos as formulações dos métodos de Galerkin descontínuo e contínuo no tempo para o problema (4.1). Como usaremos uma

base local descontínua no tempo no espaço de testes, poderemos escrever os métodos nas suas formas locais. Para isso, precisamos definir os seguintes espaços de dimensão finita:

- $V_h^l = \{v \in L^2(\Omega) / v|_T \in \mathbb{P}_l(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\};$
- $V_{\tau h}^l = \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / v|_{I_n} \in V_h^l(\mathcal{T}_{h,n})\};$
- $\tilde{V}_{\tau h}^{k,l} = \{v_{\tau h} \in L^2(I, L^2(\Omega)) / v_{\tau h}|_{I_n} \in \mathbb{P}_k(V_h^l), n = 1, \dots, N\};$
- $V_{\tau h}^{k,l} = \left\{ v_{\tau h} \in \tilde{V}_{\tau h}^{k,l} / v_{\tau h} \in C(\bar{I}, L^2(\Omega)) \right\}.$

A formulação de Galerkin descontínuo de ordem  $k$  no tempo e ordem  $l$  no espaço,  $dG(k)dG(l)$ , para o problema (4.1) é: encontre  $u_{\tau h} \in \tilde{V}_{\tau h}^{k,l}$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau} ((\partial_t u_{\tau h}, v_{\tau h}) + B_h(u_{\tau h}, v_{\tau h})) dt + \sum_{i=0}^N ([u_{\tau h}]_i, v_{\tau h}(t_i^+)) = \\ = \int_I F(v_{\tau h}) dt, \quad \forall v_{\tau h} \in \tilde{V}_{\tau h}^{k,l} \end{aligned}$$

em que  $v_{\tau h}(t_i^+)$  denota o limite à direita no instante de tempo  $t_i$  da função  $v_{\tau h}$  definida no intervalo de tempo  $I_{i+1}$ .

A formulação de Galerkin contínuo de ordem  $k$  no tempo e descontínuo de ordem  $l$  no espaço,  $cG(k)dG(l)$ , é: encontre  $u_{\tau h} \in V_{\tau h}^{k,l}$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{I_\tau} ((\partial_t u_{\tau h}, v_{\tau h}) + B_h(u_{\tau h}, v_{\tau h})) dt + (u_{\tau h}(0^+), v_{\tau h}(0^+)) = \\ = (u_0, v_{\tau h}(0^+)) + \int_I F(v_{\tau h}) dt, \quad \forall v_{\tau h} \in \tilde{V}_{\tau h}^{k-1,l} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os dois métodos apresentados acima podem ser desacoplados de forma que, a partir da condição inicial, possamos resolver sequencialmente o problema em cada um dos intervalos  $I_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Dessa forma, podemos reescrevê-los da formas a seguir.

O método  $dG(k)dG(l)$  local é: para  $n = 1, \dots, N$ , encontrar  $u_{\tau h}^n = u_{\tau h}|_{I_n} \in \mathbb{P}_k(I_n, V_h^l)$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{I_n} ((\partial_t u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) + B_h(u_{\tau h}^n, v_{\tau h})) dt + (u_{\tau h}^n(t_{n-1}^+), v_{\tau h}(t_{n-1}^+)) = \\ = (u_{\tau h}^{n-1}(t_{n-1}^+), v_{\tau h}(t_{n-1}^+)) + \int_{I_n} F(v_{\tau h}) dt, \quad \forall v_{\tau h} \in \mathbb{P}_k(I_n, V_h^l) \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que  $u_{\tau h}^0 = u_0$ .

O método  $cG(k)dG(l)$  local é: encontrar  $u_{\tau h} \in V_{\tau h}^{k,l}$ , para  $n = 1, \dots, N$ ,  $u_{\tau h}^n = u_{\tau h}|_{I_n} \in \mathbb{P}_k(I_n, V_h^l)$  tal que

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} ((\partial_t u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) + B_h(u_{\tau h}^n, v_{\tau h})) dt + \delta_{n,1}(u_{\tau h}(0^+), v_{\tau h}(0^+)) = \\ & = \delta_{n,1}(u_0, v_{\tau h}(0^+)) + \int_{I_n} F(v_{\tau h}) dt, \quad \forall v_{\tau h} \in \mathbb{P}_{k-1}(I_n, V_h^l), \end{aligned} \quad (4.6)$$

em que

$$\delta_{n,1} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

No presente trabalho, estamos interessados nas formulações  $dG(0)dG(l)$ , para o problema primal, e  $cG(1)dG(l)$ , para o problema dual com ordem superior  $l$  no espaço.

Neste caso, a formulação  $dG(0)dG(l)$  local é:

$$\tau_n B_h(u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) + (u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) = (u_{\tau h}^{n-1}, v_{\tau h}) + \tau_n F(v_{\tau h})(t_n), \quad \forall v_{\tau h} \in V_h^l, \quad (4.7)$$

em que  $(u_{\tau h}^0, v_{\tau h}) = (\pi_{V_h^l}(u_0), v_{\tau h})$  e  $\pi_{V_h^l}(u_0)$  é a projeção de  $u_0$  sobre  $V_h^l$ . Note que o método  $dG(0)dG(l)$  local é o método de Euler implícito na derivada em relação a  $t$  e média na integral do lado direito de (4.5).

Aproximando as integrais no tempo pelo método dos trapézios, a formulação  $cG(1)dG(l)$  local pode ser apresentada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n}{2} B_h(u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) + (u_{\tau h}^n, v_{\tau h}) &= (u_{\tau h}^{n-1}, v_{\tau h}) - \frac{\tau_n}{2} B_h(u_{\tau h}^{n-1}, v_{\tau h}) \\ &+ \frac{\tau_n}{2} (F(v_{\tau h})(t_{n-1}) + F(v_{\tau h})(t_n)), \quad \forall v_{\tau h} \in \mathbb{P}_{k-1}(I_n, V_h^l). \end{aligned}$$

Neste caso, o método é uma das variantes do método de Cranck-Nicolson.

Denotaremos por  $\mathcal{E}_{h,n}$  o conjunto de todas as arestas de  $\mathcal{T}_{h,n}$  e, da mesma forma, para suas partes  $\mathcal{E}_h^{\text{int}}$  e  $\mathcal{E}_h^\partial$ . Dada uma família de malhas compatíveis  $\mathcal{T}_{h,n}$ , usaremos a seguinte notação para cada  $E \subset \partial K$ ,  $K \in \mathcal{T}_{h,n}$ :

$$\|v\|_{\beta,E} = \int_E |\beta \cdot \mathbf{n}| v^2.$$

Vamos definir a seguinte norma para todo  $v \in H^1(\mathcal{T}_{h,n})$ :

$$\begin{aligned} \|v\|_{E,m}^2 = & \varepsilon |v|_{H^1(\mathcal{T}_{h,n})} + \beta_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,m}^e} \left( \|v\|_{\beta,E \cap \partial\Omega}^2 + \|[[v]]\|_{\beta,E \cap \Gamma^+} \right) \\ & + \varepsilon \left( \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,m}^{int}} \frac{1}{|E|} \int_E [[v]]^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{h,m}^{\Gamma^+}} \frac{1}{|E|} \int_E v^2 \right) \end{aligned}$$

Encerramos este capítulo com uma estimativa de erro a priori para problemas parabólicos de tipo advecção-difusão.

**Teorema 4.2** *Sejam  $u$  solução de (4.1) e  $u_{\tau h}$  solução de (4.3) com método  $dG(k)dG(l)$ ,  $k, l \geq 1$ . Supondo que a solução exata é suficientemente lisa no tempo e no espaço, existe uma constante  $C$ , que independe de  $h$ ,  $\tau$  e  $\varepsilon$  tal que vale a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \|u_{\tau h} - u\|_{E,n}^2 dt \leq & Ch^{2l} \left( |u|_{L^2(0,T;H^{l+1}(\Omega))}^2 + |u|_{\mathcal{C}(0,T;H^{l+1}(\Omega))}^2 \right) \\ & + C\tau^{2k} \left( |u|_{H^{k+1}(0,T;L^2(\Omega))}^2 + |u|_{H^{k+1}(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

**Demonstração:** Ver [42]. ■

**Observação 4.3** *O teorema acima é válido apenas para o método  $dG(k)dG(l)$  nos casos em que  $k \geq 1$ . Para  $dG(0)dG(l)$ , pode ser demonstrado (veja [47, 48]) que temos primeira ordem de aproximação no tempo:*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N \int_{I_n} \|u_{\tau h} - u\|_{E,n}^2 dt} \sim \mathcal{O}(h^l + \tau).$$

Além disso, para  $cG(1)dG(l)$  temos segunda ordem de aproximação no tempo:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N \int_{I_n} \|u_{\tau h} - u\|_{E,n}^2 dt} \sim \mathcal{O}(h^l + \tau^2).$$



## 5 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI EM FUNCIONAL DE META EM TEMPO E ESPAÇO PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO LINEARES

Neste capítulo apresentamos os indicadores de erro do método de Galerkin descontínuo para problemas parabólicos do tipo:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla u) + \nabla \cdot (\beta u) = f, & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u = g_D, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T), \\ u|_{t=0} = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (5.1)$$

nas mesmas condições do problema (4.1). Aqui, sem perda de generalidade, vamos supor que  $\nabla \cdot \beta = 0$ . De fato, esta condição é satisfeita em vários problemas práticos, por exemplo, para o campo de velocidade de fluxo de um líquido incompressível.

As estimativas a posteriori na norma energia do tipo residual para equações parabólicas de advecção-difusão já são bem estudadas para método de elementos finitos conformes no espaço, ver [2]. Os trabalhos de [49, 50, 51] apresentam as estimativas residuais para funcional de interesse para esta mesma classe de problemas. Além disso, em [52], os autores tratam de adaptação dinâmica de malhas para este tipo de estimativas de erro. No entanto, as estimativas residuais não são robustas relativamente a ordem de aproximação, ver [10, 9]. Alternativamente, as estimativas a posteriori equilibradas, que são robustas em relação a ordem de aproximação, foram introduzidas em [53, 54, 55, 56], na norma energia.

Sendo assim, o objetivo deste capítulo é apresentar estimativas a posteriori equilibradas para o erro em funcional de interesse para os métodos de Galerkin descontínuo de alta ordem no espaço e no tempo aplicado a equações parabólicas do tipo advecção-difusão.

Considere o seguinte funcional de meta:

$$Q(u) = \int_I (u, q_1) dt + (q_2, u(\cdot, T)), \quad (5.2)$$

sendo  $q_1 \in L^2(0, T; H_0^{-1}(\Omega))$  e  $q_2 \in L^2(\Omega)$ .

Seja  $z \in X_0(I, \Omega)$  uma solução do problema variacional dual

$$\begin{cases} \mathcal{B}(w, z) = \int_0^T (q_1, w), & \forall w \in X_0(I, \Omega), \\ z(T) = q_2. \end{cases}$$

em que  $\mathcal{B}$  é a forma bilinear dada em (4.2). Então, o problema dual na forma forte correspondente é:

$$\begin{cases} -\partial_t z - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla z) - \beta \cdot \nabla z = q_1, & \text{em } \Omega \times [0, T), \\ z = 0, & \text{em } \partial\Omega \times [0, T), \\ z|_{t=T} = q_2, & \text{em } \Omega; \end{cases} \quad (5.3)$$

**Observação 5.1** *Nas mesmas condições do problema primal, o problema dual admite uma única solução fraca  $z \in X_0(I, \Omega)$ .*

**Observação 5.2** *Note que, fazendo a substituição  $\xi = T - t$  e usando a propriedade  $\nabla \cdot \beta = 0$ , obtemos:*

$$\partial_\xi z - \nabla \cdot (\varepsilon \nabla z) - \nabla \cdot (\beta z) = q_1$$

em que  $z(t) = z(T - \xi)$  e a equação do problema dual fica igual a equação do problema primal exceto pelo sinal do coeficiente de advecção.

A solução  $u$  do problema primal (5.1) e a solução  $z$  do problema dual (5.3) são relacionados através da seguinte relação:

$$\begin{aligned} Q(u) &= \int_0^T (u, q_1) dt + (q_2, u(T)) \\ &= F(z) - (u_0, z(0)) - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varepsilon (\nabla z \cdot \mathbf{n}) g_D. \end{aligned}$$

## 5.1 INDICADOR DE ERRO

Seja  $u_{\tau h}$  uma aproximação da solução primal pelo método  $dG(k)dG(l)$ . Usando a definição do método  $dG(k)dG(l)$ , as propriedades da solução dual e uma série de manipulações, obtemos a seguinte expressão para o erro no

funcional de interesse:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_Q(u_{\tau h}) &= Q(u) - Q(u_{\tau h}) = \int_I (f, z) - \int_{I_\tau} (\partial_t u_{\tau h}, z) \\
 &+ \int_{I_\tau} (\sigma_h(u_{\tau h}), \nabla z) + \int_{I_\tau} \int_{\mathcal{E}_h} \varepsilon(\nabla z \cdot \mathbf{n}) [[u_{\tau h}]] \\
 &- \sum_{n=1}^N (\llbracket u_{\tau h} \rrbracket_{n-1}, z(t_{n-1}))
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

sendo  $\sigma(u_{\tau h}) = -\varepsilon \nabla_h u_{\tau h} + \beta u_{\tau h}$  o fluxo total discreto.

A expressão (5.4) representa o erro no funcional de interesse. Porém, para calcular este erro, seria preciso que a solução dual  $z$  estivesse disponível. Para construir o indicador de erro no funcional de meta substituiremos  $z$  na expressão (5.4) por uma aproximação de alta ordem.

Com esta aproximação de alta ordem espera-se que o indicador de erro seja assintoticamente exato (veja [16]), isto é, quando  $h, \tau \rightarrow 0$  temos que o índice de eficiência

$$I_{\tau h} = \frac{\eta_{\tau h}}{\mathcal{E}_Q(u_{\tau h})},$$

converge para 1.

Seja  $\widetilde{z}_{\tau h} \in V_{\tau h}^{k+1, l+1}$  uma solução  $cG(k+1)dG(l+1)$  para o problema dual. Definimos

$$\hat{z}_{\tau h} = I_{Osw}(\widetilde{z}_{\tau h}),$$

em que  $I_{Osw}$  é o interpolador de Oswald.

Definimos o indicador de erro como

$$\begin{aligned}
 \eta_{\tau h} &= \int_I (f, \hat{z}_{\tau h}) - \int_{I_\tau} (\partial_t u_{\tau h}, \hat{z}_{\tau h}) + \int_{I_\tau} (\sigma_h(u_{\tau h}), \nabla_h \hat{z}_{\tau h}) \\
 &+ \int_{I_\tau} \int_{\mathcal{E}_h} \varepsilon \{ \{ \nabla \hat{z}_{\tau h} \cdot \mathbf{n} \} \} [[u_{\tau h}]] - \sum_{n=1}^N (\llbracket u_{\tau h} \rrbracket_{n-1}, \hat{z}_{\tau h}(t_{n-1}))
 \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, os métodos residuais não são robustos em relação a ordem de aproximação. Por isso, utilizamos a estratégia de fluxos equilibrados [16].

**Definição 5.1** Um fluxo  $\hat{\sigma}_{\tau h}(\cdot, t) \in \mathbb{RT}^{l-1}(\mathcal{T}_{\tau h})$ ,  $t \in I_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  é chamado de equilibrado se

$$\nabla_h \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}(\cdot, t) = \pi_{l-1}(f(\cdot, t) - \partial_t u_{\tau h}(\cdot, t)), \quad t \in I_n,$$

sendo  $\pi_{l-1}$  um projetor em  $L^2(\Omega)$ .

O fluxo equilibrado é reconstruído a partir da solução discreta em espaços de Raviart-Thomas de alta ordem. A reconstrução de fluxo é feita como no caso elíptico apresentado, veja também [20].

Seja  $\hat{\sigma}_{\tau h} \in \mathbb{RT}^{l-1}(\mathcal{T}_{\tau h})$  a reconstrução de fluxo equilibrado para uma solução aproximada  $u_{\tau h} \in V_{\tau h}^{kl}$ . O indicador equilibrado de erro é, então, definido como

$$\begin{aligned} \eta_{\tau h} = & \int_{I_\tau} (f - \partial_t u_{\tau h} - \nabla_h \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}, \hat{z}_{\tau h}) + \int_{I_\tau} (\sigma_h(u_{\tau h}) - \hat{\sigma}_{\tau h}, \nabla_h \hat{z}_{\tau h}) \\ & + \int_{I_\tau} \int_{\mathcal{E}_h} \varepsilon \{ \{ \nabla \hat{z}_{\tau h} \cdot \mathbf{n} \} \} [ [ u_{\tau h} ] ] - \sum_{n=1}^N ([ [ u_{\tau h} ] ]_{n-1}, \hat{z}_{\tau h}(t_{n-1})) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Além de obter um indicador de erro equilibrado e robusto, gostaríamos de utilizar este indicador de erro para realizar adaptação dinâmica da malha no tempo e no espaço. Para isso, o indicador de erro (5.5) é separado em duas partes (veja [49]), uma correspondente ao erro no funcional cometido na aproximação no tempo,  $\eta^t$ , e a outra para o erro no espaço,  $\eta^s$ . Esta decomposição não é única e pode depender do problema em consideração e, portanto, precisa ser ajustada usando métodos diferentes (veja, por exemplo, [52, 50]).

Assim,  $\eta_{\tau h} = \eta^t + \eta^s$ , em que o indicador no tempo é:

$$\eta^t = \int_{I_\tau} (f - \partial_t u_{\tau h} - \nabla_h \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}, \hat{z}_{\tau h}) - \sum_{n=1}^N ([ [ u_{\tau h} ] ]_{n-1}, \hat{z}_{\tau h}(t_{n-1})); \quad (5.6)$$

e o indicador no espaço:

$$\eta^s = \int_{I_\tau} (\sigma_h(u_{\tau h}) - \hat{\sigma}_{\tau h}, \nabla_h \hat{z}_{\tau h}) + \int_{I_\tau} \int_{\mathcal{E}_h} \varepsilon \{ \{ \nabla \hat{z}_{\tau h} \cdot \mathbf{n} \} \} [ [ u_{\tau h} ] ]. \quad (5.7)$$

## 5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentaremos resultados numéricos visando confirmar a precisão assintótica dos indicadores de erro desenvolvidos e mostrar o potencial destes na adaptação de malha.

### 5.2.1 Malhas dinâmicas e estratégia de adaptação

Antes de mostrar os resultados, alguns pontos em relação a implementação e a estratégia de adaptação da malha precisam ser expostos. A decisão entre refinar e desrefinar a malha ou diminuir o passo no tempo é crucial no processo de adaptação. Existe uma extensa bibliografia com diferentes estratégias de adaptação. A referência clássica para estas estratégias é [49]. Em [51] o autor apresenta uma estratégia de adaptação baseada em indicadores de erro na norma energia e constrói um algoritmo de modo que o erro relativo estimado satisfaça uma determinada condição de tolerância. No trabalho [50], a estratégia apresentada limita os indicadores no tempo e no espaço individualmente de forma que a soma de todos os indicadores, acumulada para todos os instantes de tempo, fique limitada superiormente por uma tolerância pré-estabelecida.

Foi nas referências [57, 52] que a estratégia utilizada neste trabalho se baseou. Nestes dois trabalhos, indicadores no tempo e espaço são calculados e um fator de equilíbrio  $\xi$  é utilizado para comparar os indicadores e decidir o que deve ser feito. Isso tem como objetivo balancear os erros decorrentes do tempo e do espaço. A escolha desse fator de equilíbrio pode ser feita de diversas formas, porém, aqui utilizamos os indicadores de erro calculados na malha sem adaptação para estipular este parâmetro. Esta estratégia mostrou-se apropriada através de testes numéricos. O algoritmo a seguir esboça a estrutura do método adaptativo.

---

#### Algoritmo 1 Estratégia de adaptatividade

---

**Se**  $\eta^n > TOL$   
**Se**  $|\eta_t^n| > \xi |\eta_s^n|$   
 Refinamento no tempo;  
**Senão Se**  $|\eta_s^n| > \xi |\eta_t^n|$   
 Refinamento e desrefinamento no espaço (usando  $\eta_s^n$ );  
**Senão**  
 Refinamento (tempo e espaço) e desrefinamento (espaço) usando  $\eta_s^n$ .  
**Fim Se**  
**Fim Se**

---

**Observação 5.3** *Aqui utilizamos a expressão “desrefinar” para falar sobre o processo de engrossar a malha, diminuindo assim o número de elementos*

*dela nos locais onde o indicador de erro aponta que o erro no funcional é baixo e, portanto, pode-se poupar esforço computacional.*

Além deste algoritmo, algumas condições foram impostas para melhorar o funcionamento.

- Para evitar que o método ande com um passo muito curto e cause erros numéricos, um limite mínimo para o tamanho do passo no tempo foi imposto.
- Caso  $\eta_{\tau h}$  for muito pequeno (menor que uma determinada tolerância), o método não realiza nenhum refinamento. Isso evita que refinamentos e desrefinamentos desnecessários sejam feitos.
- Quando o método faz um número considerável de passos sem precisar refinar nem no tempo e nem no espaço (como é caso do item anterior) o algoritmo tenta desrefinar a malha espacial para diminuir o número de graus de liberdade.
- De forma a evitar que o código demande muito esforço computacional, um limitante superior para o número de graus de liberdade em cada passo no tempo também foi imposto. Desta forma, se no passo de tempo anterior o número máximo de graus de liberdade foi atingido, o algoritmo tenta desrefinar a malha para diminuir este valor.
- Como descrito no algoritmo, para o refinamento no espaço utilizamos apenas  $\eta_s^n$  para marcar os elementos para refinar e desrefinar.

Quanto a resolução do problema, a abordagem seguiu os seguintes passos:

1. Resolver o problema dual na malha inicial para todos os instantes de tempo (começando em  $t = T$ );
2. Para cada passo no tempo, resolver o problema primal;
3. Calcular os indicadores de erro para o passo de tempo em questão;

4. Fazer a adaptação da malha no tempo e no espaço seguindo o algoritmo mostrado.
5. Projetar a solução dual para a nova malha e/ou interpolar para o instante de tempo seguinte.

Este último passo precisa ser feito pois o problema dual já foi resolvido em todos os instantes de tempo da malha uniforme. Dessa forma optou-se por projetar a solução dual na malha espacial ou interpolar para algum instante de tempo no qual ela não esteja disponível (no caso em que houve um refinamento no tempo). Isso evita que uma nova aproximação para o problema dual tenha que ser calculada.

Como a aproximação no tempo do problema dual é linear, a interpolação para um instante de tempo em que a aproximação não foi calculada tem um custo baixo (no sentido computacional). De fato, podemos utilizar um ajuste linear a partir das soluções aproximadas no intervalo de tempo que contém o instante  $\tilde{t}$  desejado, isto é,

$$z(\tilde{t}, \cdot) \approx z_{\tau h}^{\tilde{n}} = z_{\tau h}^n + \left( \frac{z_{\tau h}^n - z_{\tau h}^{n+1}}{t_n - t_{n+1}} \right) (\tilde{t} - t_n), \quad \tilde{t} \in I_n.$$

Agora, quando é necessário projetar a solução de uma malha espacial em outra, como é o caso dos refinamentos adaptativos, precisamos calcular os novos coeficientes nos elementos que foram refinados ou desrefinados.

Sempre que um elemento da malha é refinado este é dividido em duas partes iguais. Sendo assim, para calcular o coeficiente  $c_j^{K_i}$ ,  $j = 1, \dots, DOF_{K_i}$  e  $i = 1, 2$  com  $K = K_1 \cup K_2$  o elemento da malha mais grossa e  $K_1$  e  $K_2$  os elementos da malha mais fina e  $DOF_{K_i}$  o número de graus de liberdade no elemento  $K_i$ , precisamos calcular:

$$c_j^{K_i} = \int_{K_i} u_T \phi_j^{K_i}, \quad i = 1, 2,$$

em que  $\phi_j$  denota os elementos da base do espaço.

Por outro lado, ao desrefinar a malha temos dois elementos  $K_1$  e  $K_2$ , cada um com seus coeficientes para a solução dual aproximada, e precisamos calcular os coeficientes para o elemento  $K = K_1 \cup K_2$  que é criado. Os

coeficientes são calculados usando a expressão:

$$\begin{aligned} c_j^K &= \int_K u_T \phi_j^K = \int_{K_1} u_{K_1} \phi_j^K + \int_{K_2} u_{K_2} \phi_j^K = \\ &= J_K \left( \sum_{(r_i, s_i) \in K_1} w_i u_{K_1}(r_i, s_i) \phi_j^K(r_i, s_i) + \sum_{(r_i, s_i) \in K_2} w_i u_{K_2}(r_i, s_i) \phi_j^K(r_i, s_i) \right) \end{aligned}$$

em que  $w_i$  são os pesos da quadratura numérica e  $J_K$  é o Jacobiano da transformação afim.

### 5.2.2 Teste 1 - Decomposição de indicadores de erro

Para confirmar a decomposição dos indicadores de erro no tempo e no espaço, vamos considerar um problema teste com solução primal que depende somente do tempo. Caso os problemas primal e dual fossem bem resolvidos no espaço, o indicador de erro no tempo deve ser dominante na decomposição.

Considere o domínio  $\Omega = [0, 1]^2$  e  $T = 0.5$ . Seja  $u$  a solução exata do problema primal (5.1) dada pela expressão

$$u(x, y, t) = \sin(\pi t).$$

Os coeficientes para o problema são constantes e dados por:

$$\varepsilon \equiv 1, \quad \beta \equiv (1, 1).$$

O termo fonte  $q_1$  e a condição inicial  $q_2$  são dados de forma que a solução dual exata seja:

$$p(x, y, t) = 10^4 xy(x-1)(y-1)e^{-100(x-1/4)^2 - 100(y-1/2)^2}.$$

O funcional de interesse  $Q$ , dado em (5.2), é calculado utilizando estes  $q_1$  e  $q_2$ .

O problema primal (5.1) e o problema dual (5.3) foram resolvidos numa sequência de malhas compatíveis no tempo mantendo uma malha suficientemente fina no espaço com 16384 elementos. Para a solução numérica do problema primal foi usado o método  $dG(0)dG(1)$  (4.7) e, para o problema dual, o método  $cG(1)dG(2)$  (4.6) no sentido inverso do tempo (veja

$N$ $\tau_n$	$\#K$ $h$	$\ e(T)\ $ $\mathcal{O}(\ e(T)\ )$	$\eta_{\tau h}$ $\mathcal{O}(\eta_{\tau h})$	$\eta'$ $\mathcal{O}(\eta')$	$\eta^s$ $\mathcal{O}(\eta^s)$	$Q(u - u_h)$ $\mathcal{O}(Q(u - u_h))$	$I_{\tau h}$
4 0.125	16384 0.015625	$2.320e-02$ —	$1.964e-01$ —	$1.964e-01$ —	$2.043e-05$ —	$1.396e-01$ —	1.41
8 0.0625	16384 0.015625	$1.196e-02$ 0.956	$9.819e-02$ 1	$9.818e-02$ 1	$9.898e-06$ 1.05	$8.334e-02$ 0.744	1.18
16 0.03125	16384 0.015625	$6.065e-03$ 0.98	$4.909e-02$ 1	$4.909e-02$ 1	$4.870e-06$ 1.02	$4.530e-02$ 0.879	1.08
32 0.015625	16384 0.015625	$3.053e-03$ 0.99	$2.455e-02$ 1	$2.454e-02$ 1	$2.415e-06$ 1.01	$2.359e-02$ 0.941	1.04
64 0.0078125	16384 0.015625	$1.531e-03$ 0.995	$1.227e-02$ 1	$1.227e-02$ 1	$1.203e-06$ 1.01	$1.203e-02$ 0.971	1.02

Tabela 2 – Teste 1: erros, indicadores de erro, taxas de convergência em  $t$  e índices de eficiência.

observação 5.2). Os indicadores de erro foram calculados conforme a decomposição (5.6) e (5.7).

A tabela 2 mostra o comportamento dos indicadores de erro para o primeiro teste. Primeiramente, é possível ver que o método  $dG(0)dG(1)$  converge com primeira ordem na variável temporal que condiz com os resultados teóricos apresentados. O erro no funcional de interesse e indicadores de erro também convergem com a mesma ordem. Além disso,  $\eta'$  se sobressai em relação a  $\eta^s$ , o que indica que a separação entre tempo e espaço do indicador de erro está correta para este problema.

### 5.2.3 Teste 2 - Adaptação dinâmica de malha

No domínio  $\Omega = [0, 1]^2$ , consideremos o problema (5.1) com coeficientes definidos da seguinte maneira: coeficiente de difusão  $\varepsilon \equiv 0.01$  e campo advectivo  $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (1, 1)$ .

A parte direita do primal e a condição inicial correspondem a solução exata:

$$u(x, y, t) = 2^5 xy(1-x)(1-y) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( \frac{1}{\varepsilon} (\rho - 1) \right) \right),$$

em que

$$\rho = \sqrt{\left( x - x_0 - \beta_1 \left( \frac{1}{20} + t \right) \right)^2 + \left( y - y_0 - \beta_2 \left( \frac{1}{20} + t \right) \right)^2}$$

e também,  $c = 1/\varepsilon$  e  $x_0 = y_0 = -1/2$ . A solução exata apresenta uma frente circular que se desloca na direção da diagonal apresentando gradientes altos em toda a frente.

Como funcional de interesse consideremos (5.2) com  $q_1$  e  $q_2$  definidos como

$$q_1 \equiv 0, \quad q_2 \equiv \frac{1}{|\omega|} \chi_\omega$$

em que  $\omega = [0.5, 0.625] \times [0.625, 0.75]$ .

Para confirmar a precisão dos indicadores de erro, o problema primal (5.1) e o problema dual (5.3) foram resolvidos numa sequência de malhas encaixadas no tempo e no espaço. Para a solução numérica do problema primal foi usado o método  $dG(0)dG(1)$  (4.7) e, para o problema dual, o método  $cG(1)dG(2)$  (4.6) no sentido inverso do tempo (veja observação 5.2). Os indicadores de erro foram calculados conforme as fórmulas (5.6) e (5.7).

Os erros e índice de eficiência para o refinamento uniforme estão apresentados na tabela 3 para  $T = 0.5$ . Como podemos ver nesta tabela, o método converge, o indicador de erro representa de forma coerente o erro no funcional e é assintoticamente exato.

$N$ $\tau_n$	$\#K$ $h$	$\ e(T)\ $	$\eta_{\tau h}$	$\eta'$	$\eta^s$	$Q(u - u_h)$	$I_{\tau h}$
200 —	16 —	$5.029e-01$	$2.391e-01$	$-2.803e-01$	$5.193e-01$	$2.031e-01$	1.18
800 0.000625	64 0.25	$1.626e-01$	$1.027e-01$	$-6.625e-02$	$1.689e-01$	$7.825e-02$	1.31
3200 $1.56e-04$	256 0.125	$6.560e-02$	$-4.189e-02$	$1.043e-01$	$-1.462e-01$	$4.094e-02$	1.02
12800 $3.9e-05$	1024 0.0625	$2.592e-02$	$-6.359e-04$	$1.359e-02$	$-1.423e-02$	$7.080e-04$	0.898

Tabela 3 – Teste 2: erros, indicadores de erro e índices de eficiência.

Para o processo adaptativo, a malha inicial utilizada foi o refinamento 2 (com 64 elementos) e  $\tau = 0.00625$ . Além disso, o critério de marcação utilizado foi o do máximo com parâmetro de adaptação  $\theta_1 = 0.5$  e  $\theta_2 = 0.1$ . Dessa forma, o algoritmo de marcação indica, primeiramente, todos os elementos nos quais

$$\eta_{\tau h}(K) \geq \theta_1 \max_{\tilde{K} \in \mathcal{T}_{h,n}} \eta_{\tau h}(\tilde{K})$$

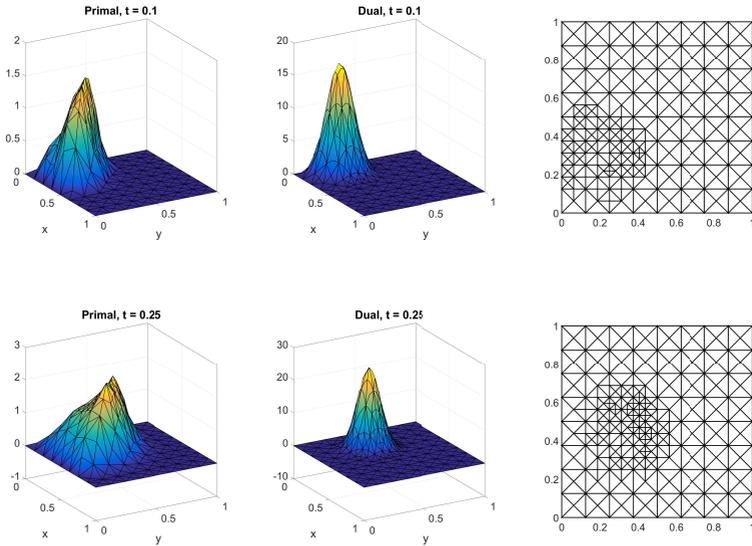


Figura 10 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.1$  e  $t = 0.25$  com  $\omega$  deslocado da diagonal do domínio.

e, em seguida, indica os elementos restantes que satisfazem a desigualdade acima para  $\theta_2$ . Dessa forma, evita-se a situação em que poucos elementos sejam marcados por conterem erros significativamente maiores que os demais.

Nas figuras 10 e 11 apresentamos a solução primal e dual, além do comportamento da malha adaptada, em 4 instantes de tempo. Estas figuras claramente mostram que a malha é adaptada seguindo as frentes de altos gradientes da solução primal e dual. Como consequência, devido a convecção, é possível perceber que a adaptação é feita não no próprio domínio de observação mas na região de origem do erro para a qual este é transportado.

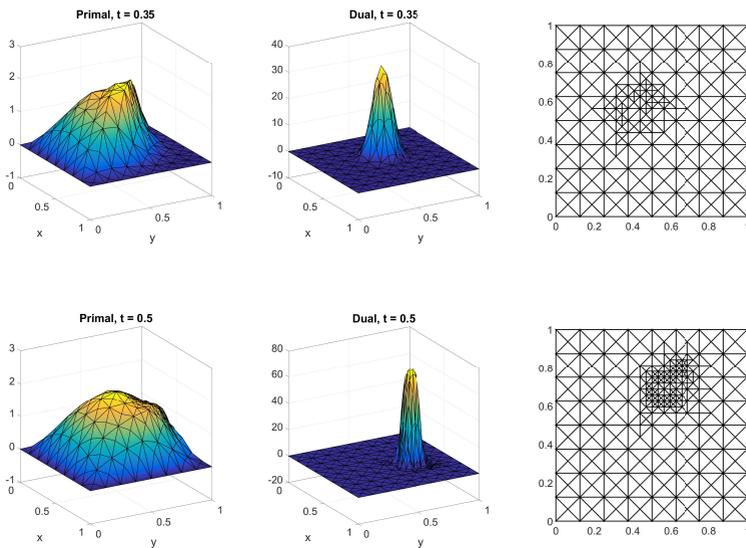


Figura 11 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.35$  e  $t = 0.5$  com  $\omega$  deslocado da diagonal do domínio.

## 6 ESTIMATIVA DE ERRO A POSTERIORI EM FUNCIONAL DE META EM TEMPO E ESPAÇO PARA O MÉTODO DE GALERKIN DESCONTÍNUO PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS NÃO-LINEARES

Este capítulo trata dos indicadores de erro na aproximação do funcional de interesse para problemas parabólicos não-lineares. Neste caso, o problema primal tem que ser linearizado na vizinhança da solução exata e resolvido por um método iterativo (utilizou-se o método de Newton) antes de resolver o problema dual.

A solução numérica do problema primal é armazenada para que possa ser utilizada na aproximação do problema dual. Este, por sua vez, é formulado inicialmente na forma contínua por meio de um operador adjunto ao operador linearizado do problema primal não-linear. Depois, um método dual consistente e de ordem maior que o método utilizado para o problema primal no espaço e no tempo é aplicado para obter uma aproximação da solução exata no problema dual.

Esta aproximação é utilizada na avaliação dos indicadores de erro na aproximação do erro no funcional de interesse.

### 6.1 EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO-LINEAR E MÉTODO DE NEWTON

As técnicas para aproximação de solução de problemas elípticos e parabólicos, reconstrução de fluxo em espaço de Raviart-Thomas e adaptação de malha via indicadores de erro em funcional de meta apresentadas nos capítulos anteriores formam o ferramental necessário para resolver o problema (6.1). Esta seção apresentará a formulação do problema parabólico na forma não-linear e, também, o método de Newton para esta equação.

Considere o problema parabólico não-linear com condição de fronteira

mista de Dirichlet e Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \nabla \cdot (f(u)\beta - \varepsilon(u)\nabla u) = g, \\ u|_{\Gamma_D^-} = u_{in}, \quad u|_{\Gamma_D^+} = u_{out}, \\ (-\varepsilon(u)\nabla u + f(u)\beta) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Devido a não-linearidade, este problema não pode ser resolvido exatamente da mesma forma como apresentado no capítulo 4. Discretizamos no tempo e resolvemos em cada passo com o método de Galerkin descontínuo. Para lidar com a não linearidade, aplicamos o método de Newton.

Para discretizar o problema usamos o método  $dG(0)dG(l)$ , apresentado em (4.7), e obtemos o problema local não-linear: dado  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , encontre  $u_{\tau h}^n \in V_h^l$  tal que

$$\tau_n B_h(u_{\tau h}^n; v_h) + (u_{\tau h}^n, v_h) = (u_{\tau h}^{n-1}, v_h) + \tau_n F(v_h)(t_n), \forall v_h \in V_h^l, \quad (6.2)$$

sendo  $u_{\tau h}^0 = \pi_{V_h^l}(u_0)$  a projeção  $L^2$  de  $u_0$  sobre  $V_h^l$ .

A forma semilinear  $B_h(\cdot; \cdot)$  corresponde a discretização da equação não-linear pelo método de Galerkin descontínuo na variável espacial e é definida em  $V_h^l \times V_h^l$  como:

$$\begin{aligned} B_h(u_h; v_h) &= \int_{\mathcal{T}_h} (\varepsilon(u_h)\nabla_h u_h - f(u_h)\beta) \cdot \nabla v_h \\ &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{D}}} \{ \{ \varepsilon(u_h)\nabla_h u_h \} \cdot \mathbf{n}[[v_h]] + \{ \varepsilon(u_h)\nabla_h v_h \} \cdot \mathbf{n}[[u_h]] + \\ &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{D}}} \delta_\varepsilon [[u_h]] [[v_h]] + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}}} f(u_h^\uparrow)\beta \cdot \mathbf{n}[[v_h]], \end{aligned} \quad (6.3)$$

sendo  $\delta_\varepsilon$  o parâmetro de penalização do termo difusivo e  $v^\uparrow$  denota um procedimento de *upwind* definido como

$$v^\uparrow = \begin{cases} v^+, & \text{se } \beta \cdot \mathbf{n} < 0, \\ v^-, & \text{se } \beta \cdot \mathbf{n} > 0. \end{cases}$$

O funcional  $F$  é definido em  $V_h^I$  como:

$$\begin{aligned} F(v_h) &= \int_{\Omega} g(\cdot, t) v_h \\ &+ \int_{\Gamma_D^+} u_{out}(\cdot, t) (\delta_{\varepsilon} v_h - \varepsilon(u_{out}(\cdot, t)) \nabla v_h \cdot \mathbf{n}) - \int_{\Gamma_D^+} f(s_{out}) (\beta \cdot \mathbf{n}) v_h \\ &+ \int_{\Gamma_D^-} u_{in}(\cdot, t) (\delta_{\varepsilon} v_h - \varepsilon(u_{in}(\cdot, t)) \nabla v_h \cdot \mathbf{n}) - \int_{\Gamma_D^-} f(s_{in}) (\beta \cdot \mathbf{n}) v_h. \end{aligned}$$

Para introduzir o método de Newton para este problema variacional não linear vamos antes apresentar a definição dele em um espaço de Banach, [58].

Seja  $V$  um espaço de Banach e  $B(\cdot; \cdot)$  uma forma semilinear em  $V \times V$ . Seja  $B'(u; w, v)$  a derivada de Gâteaux definida em  $w \in V$  como

$$B'(u; w, v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} (B(u + \theta w; v) - B(u; v)), \quad \forall S, v \in V.$$

Considere o problema variacional não linear

$$B(u; v) = F(v) \quad \forall v \in V.$$

O método de Newton para este problema consiste dos seguintes passos:

---

**Algoritmo 2** Método de Newton

---

- 1: Escolha uma aproximação inicial  $u_0 \in V$  e uma tolerância  $TOL$ ;
- 2: Encontrar  $w^{(j)}$ ,  $j \geq 0$ , tal que

$$B'(u^{(j)}; w^{(j)}, v) = F(v) - B(u^{(j)}; v)$$

- sendo  $u^{(0)} = u_0$ ;
  - 3: Faça  $u^{(j+1)} = u^{(j)} + w^{(j)}$ ;
  - 4: **Se**  $\|w^{(j)}\| < TOL$
  - 5:   Encerre;
  - 6: **Senão**
  - 7:   retorne ao segundo passo com  $u^{(j+1)}$ ;
  - 8: **Fim Se**
- 

Calculando a derivada de Gâteaux da forma semilinear  $B_h(\cdot; \cdot)$  obte-

mos:

$$\begin{aligned}
 B'_h(u; w, v_h) &= \int_{\mathcal{T}_h} \boldsymbol{\varepsilon}(u) \nabla w \cdot \nabla v_h + \int_{\mathcal{T}_h} \boldsymbol{\varepsilon}'(u) w \nabla u \cdot \nabla v_h - \int_{\mathcal{T}_h} f'(u) w (\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla v_h) \\
 &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{D}}} \{ \{ \boldsymbol{\varepsilon}(u) \nabla w \cdot \mathbf{n} \} \} [[v_h]] + [[w]] \{ \{ \boldsymbol{\varepsilon}(u) \nabla v_h \cdot \mathbf{n} \} \} \\
 &\quad - \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{D}}} \{ \{ \boldsymbol{\varepsilon}'(u) w \nabla u \cdot \mathbf{n} \} \} [[v_h]] + [[u]] \{ \{ \boldsymbol{\varepsilon}'(u) w \nabla v_h \cdot \mathbf{n} \} \} \\
 &\quad + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}} \cup \mathcal{E}_h^{\text{D}}} \delta_{\boldsymbol{\varepsilon}} [[w]] [[v_h]] + \int_{\mathcal{E}_h^{\text{int}}} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}) f'(u^\uparrow) w^\uparrow [[v_h]].
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação para a iteração do método de Newton para o sistema não-linear (6.2) no intervalo  $I_n$  é: dado  $u_{\tau_h}^{n,j}$ , para  $j = 0, 1, \dots$ , encontre  $w_h^j \in V_h^l$  tal que,  $\forall v_h \in V_h^l$ ,

$$B'_h(u_{\tau_h}^{n,j}; w_h^j, v_h) + \frac{1}{\tau_n} (w_h^j, v_h) = F(v_h)(t_n) + \frac{1}{\tau_n} (u_{\tau_h}^{n-1} - u_{\tau_h}^{n,j}, v_h) - B_h(u_{\tau_h}^{n,j}; v_h),$$

sendo  $u_{\tau_h}^{n,0} = u_{\tau_h}^{n-1}$ . Tendo isso, obtemos:

$$u_{\tau_h}^{n,j+1} = u_{\tau_h}^{n,j} + w_h^j$$

e o algoritmo continua conforme apresentado acima.

## 6.2 INDICADORES DE ERRO PARA FUNCIONAL DE INTERESSE PARA EQUAÇÃO PARABÓLICA NÃO-LINEAR

Nesta seção consideraremos o funcional de interesse:

$$Q(u) = \int_0^T \int_{\Omega} q_1 u + \int_{\Omega} q_2 u(\cdot, T)$$

Como nesta seção consideraremos equações parabólicas não-lineares, começaremos a apresentar alguns resultados básicos sobre a teoria de estimativas a posteriori de erro para funcional de interesse na solução de um problema não-linear variacional em espaço de Banach.

### 6.2.1 Teoria de erro em funcional de interesse para problemas variacionais não-lineares

Sejam  $V$  um espaço de Banach,  $B(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear definida em  $V \times V$  e  $F$  um funcional linear contínuo em  $V$ .

Consideramos em  $V$  um problema variacional não-linear:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \quad (6.4)$$

Seja  $Q$  um funcional de interesse que descreve algumas propriedades específicas da solução  $u$  deste problema. Vamos supor que  $Q$  é um funcional linear e contínuo em  $V$ .

A teoria de estimativas de erro em aproximação de funcional de interesse para problemas não-lineares foi desenvolvida em [6] e esta seção segue este trabalho.

A ideia principal da teoria é apresentar o problema de cálculo do funcional de interesse como um problema de otimização, isto é, um problema de minimização com restrições:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que } Q(u) = \inf_{v \in M} Q(v),$$

sendo

$$M = \{v \in V / B(v, w) = F(w), \forall w \in V\}.$$

O mínimo  $u$ , encontrado deste problema, corresponde a um ponto estacionário  $(u, z) \in V \times V$  do lagrangeano

$$L(u, z) = Q(u) - F(u) - B(u; z),$$

sendo  $z$  o multiplicador de Lagrange.

Como os pontos críticos  $(u, p)$  do lagrangeano satisfazem a equação

$$L'((u, z); (v, q)) = 0, \quad \forall (v, q) \in V \times V,$$

temos que

$$Q(v) - B'(u; v, z) + F(q) - B(u; q) = 0, \quad \forall (v, q) \in V \times V.$$

Na expressão acima,  $B'(u; v, z)$  denota a derivada de Gâteaux de  $B(u; v)$ :

$$B'(u; v, z) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta^{-1} (B(u + \theta z; v) - B(u; v)).$$

Desta equação temos um sistema

$$\begin{cases} B(u, q) = F(q), & \forall q \in V \\ B'(u; v, z) = Q(v), & \forall v \in V. \end{cases}$$

Neste sistema, a primeira equação é a formulação variacional do problema (6.4) e a segunda é uma equação que determina o problema dual:

$$\text{Encontrar } z \in V \text{ tal que } B'(u; v, z) = Q(u), \quad \forall v \in V.$$

Seja  $\{V_h\}_{h>0}$  uma família de subespaços de dimensão finita em  $V$ , que aproxima  $V$ . Consideramos um método de Galerkin para aproximação da solução do problema variacional primal:

$$\text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que } B_h(u_h, v_h) = F_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad (6.5)$$

sendo  $B_h$  e  $F_h$  uma aproximação consistente de  $B$  e  $F$ . Vamos supor que os problemas (6.4) e (6.5) admitem única solução nos seus respectivos espaços.

Da mesma maneira, para uma família de subespaços  $\{\hat{V}_h\}_{h>0}$  em  $V$  consideramos uma aproximação de Galerkin para o problema dual:

$$\text{Encontrar } z_h \in \hat{V}_h \text{ tal que } B'(u_h; w_h, z_h) = Q(w_h), \quad \forall w_h \in \hat{V}_h. \quad (6.6)$$

Vamos supor, também, que o problema (6.6) admite única solução.

Seja  $e_h = u - u_h$  o erro da aproximação da solução primal pelo método de Galerkin e seja

$$R_h(u_h, v) = F_h(v) - B_h(u_h, v), \quad \forall v \in V$$

o resíduo da aproximação. Caso o método de Galerkin seja consistente, este possui a propriedade da ortogonalidade

$$R_h(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Nestas condições, para o erro da aproximação de funcional de interesse, é válida a seguinte representação.

**Teorema 6.1** *Para a aproximação de Galerkin do problema primal (6.5) é válida a representação de erro no funcional de interesse:*

$$Q(u) - Q(u_h) = R_h(u_h, z) + \tilde{R}_h \quad (6.7)$$

sendo  $z$  a solução do problema dual e  $\tilde{R}_h$  o resto da aproximação linear dado por

$$\tilde{R}_h = \int_0^1 B_h''(u_h + \theta e_h, e_h, e_h, z).$$

**Demonstração:** [6] ■

**Observação 6.1** Em aplicações práticas, o resto  $\tilde{R}_h$ , que é de terceira ordem em  $e_h$ , pode ser desprezado dependendo do tipo de não-linearidade do problema primal. Assim, temos uma representação simplificada do erro no funcional:

$$Q(u) - Q(u_h) = R_h(u_h, z).$$

**Observação 6.2** A representação de erro (6.7) não depende da solução exata, mas depende da solução exata do problema dual. Caso esta última não esteja disponível (o que acontece na maioria das aplicações práticas), para fazer uma representação calculável,  $z$  é substituída por uma aproximação discreta  $z_h$ . Note que, se  $z_h$  pertence ao mesmo espaço  $V_h$  que  $u_h$ , então a representação torna-se inútil uma vez que  $R_h(u_h, z_h) = 0$ .

**Observação 6.3** Na prática de elementos finitos, para obter uma aproximação  $\hat{z}_h$  de ordem superior para a solução exata do problema dual, este é inicialmente aproximado no mesmo espaço  $V_h$  do problema primal. A solução aproximada  $z_h \in V_h$  é estendida para um espaço de ordem superior refinando a malha ou aumentando a ordem de aproximação usando a técnica de suavização sobre patch. É esta a aproximação  $\hat{z}_h$  que se usa na representação do erro. Neste caso, o índice de eficiência

$$I_h^Q(u_h) = \left| \frac{R(u_h, \hat{z}_h)}{Q(u) - Q(u_h)} \right|$$

fica próximo de 1 (ver [6]).

Caso  $\hat{z}_h$  seja escolhido como solução do problema dual discreto em um espaço de aproximação  $W_h$  mais rico que  $V_h$ , o índice de eficiência é assintoticamente exato, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_h^Q(u_h) = 1,$$

veja [6, 35].

### 6.2.2 Representação do erro na aproximação do funcional de interesse

Consideramos o problema não-linear na forma geral:

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot \sigma(u) = g, & \text{em } \Omega \times (0, T] \\ u|_{\Gamma_D^- \times (0, T]} = u_{in}, \quad u|_{\Gamma_D^+ \times (0, T]} = u_{out}, \\ -\sigma(u) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N \times (0, T]} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (6.8)$$

em que  $\sigma(u) = -\varepsilon(u)\nabla u + f(u)\beta$  é o fluxo total.

A formulação fraca para este problema é:

Encontrar  $u \in L^2(0, T; H_{\Gamma_D}^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u; v) &= F(v), \quad \forall v \in L^2(0, T; H_{\Gamma_D, 0}^1(\Omega)) \\ u(\cdot, 0) &= u_0, \end{aligned}$$

sendo a forma semilinear  $\mathcal{B}(\cdot; \cdot)$  e o funcional  $F$  definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u; v) &= \int_0^T (\partial_t u, v) - (\sigma(u), \nabla v) \, dt, \\ F(v) &= \int_0^T (g, v) \, dt. \end{aligned}$$

Considere o funcional de interesse na forma

$$Q(u) = \int_0^T \left( \int_{\Omega} q_1 u \right) + \int_{\Omega} q_2 u(\cdot, T),$$

sendo  $q_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  e  $q_2 \in L^2(\Omega)$ .

Seja  $u_{\tau h}$  uma aproximação da solução do problema (6.8) pelo método  $dG(k)dG(l)$ . Conforme a representação do erro em funcional de interesse para o problema variacional semilinear abstrato, temos

$$Q(u) - Q(u_{\tau h}) \approx F_{\tau h}(z) - \mathcal{B}_{\tau h}(u_{\tau h}; z), \quad (6.9)$$

sendo  $\mathcal{B}_{\tau h}$  e  $F_{\tau h}$  a forma semilinear e o funcional do método dG, respectivamente. Nesta representação,  $z$  é uma solução do problema variacional dual

$$\mathcal{B}'(S; v, z) = Q(v). \quad (6.10)$$

Calculando a derivada da forma semilinear temos:

$$\mathcal{B}'(u; v, z) = \int_0^T \left( (\partial_t u, z) + (\varepsilon(u) \nabla v, \nabla z) + (\tilde{\beta}(u) v, \nabla z) \right) dt,$$

sendo  $\tilde{\beta}(u) = \varepsilon'(u) \nabla u - f'(u) \beta$ .

Integrando por partes a formulação variacional (6.10) podemos verificar que a solução  $z$  é uma solução do problema dual:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t z - \nabla \cdot (\varepsilon(u) \nabla z) + \tilde{\beta}(u) \cdot \nabla z = q_1, \quad \text{em } \Omega \times [0, T), \\ z = 0, \quad \text{em } \Gamma_D \times [0, T), \\ \varepsilon(u) \nabla z \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{em } \Gamma_N \times [0, T), \\ z|_{t=T} = q_2, \quad \text{em } \Omega; \end{array} \right. \quad (6.11)$$

**Observação 6.4** *Note que, diferentemente do problema primal, o problema dual (6.11) é uma equação parabólica linear com condições de fronteira mista de Dirichlet e Neumann. Sendo assim, este pode ser resolvido seguindo os passos descritos no capítulo 4.*

Usando o fato de que  $z(\cdot, t) \in H^2(\Omega)$ ,  $\forall t \in [0, T)$ , devido a regularidade elíptica na representação (6.9) obtemos

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(u_{\tau h}) &= \int_0^T \left( (g, z) - (\partial_t u_{\tau h}, z) \right. \\ &\quad \left. - (\sigma(u_{\tau h}), \nabla z) + \int_{\Gamma^0 \cup \Gamma_D} \{ \{ \varepsilon(u_{\tau h}) \nabla z \cdot \mathbf{n} \} \} [[u_{\tau h}]] \right) dt \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left( [[u_{\tau h}]]_{n-1}, z(t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

Seja  $\hat{\sigma}_{\tau h}$  o fluxo equilibrado de  $\sigma(u_{\tau h})$  em espaço de Raviart-Thomas, isto é,  $\hat{\sigma}_{\tau h}(\cdot, t) \in \mathbb{RT}^{l-1}$  e

$$\nabla_h \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}(\cdot, t) = \pi_{l-1}(g(\cdot, t) - \partial_t u_{\tau h}(\cdot, t)).$$

Somando e subtraindo o fluxo reconstruído  $\hat{\sigma}_{\tau h}^n$  e integrando por partes o termo envolvendo  $(\hat{\sigma}_{\tau h}, \nabla z)$ , a representação equilibrada do erro no funci-

onal pode ser apresentada como:

$$\begin{aligned} Q(u) - Q(u_{\tau h}) &= \int_0^T (g - \partial_t u_{\tau h} - \nabla \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}, z) \\ &+ \int_0^T \left( (\sigma(u_{\tau h}) - \hat{\sigma}_{\tau h}, \nabla z) + \int_{\Gamma^0 \cup \Gamma_D} \{ \{ \varepsilon(u_{\tau h}) \nabla z \cdot \mathbf{n} \} \} [[u_{\tau h}]] \right) dt \\ &- \sum_{n=1}^N ([[u_{\tau h}]]_{n-1}, z(t_{n-1})). \end{aligned}$$

Para obter um indicador de erro computável temos que substituir nesta representação a solução exata do problema dual por uma aproximação em um espaço mais rico que o espaço de aproximação do problema primal.

Como o problema primal neste capítulo é aproximado pelo método  $dG(0)dG(l)$ , consideramos para o problema dual o método  $cG(1)dG(l+1)$ . Assim, a formulação local deste é (note que a integração é realizada na direção contrária do tempo): Dada uma aproximação da condição inicial  $z_h^N \in V_h^{l+1}$  (por exemplo,  $z_h^N = \pi_{L^2(\Omega)}(q_2(\cdot, T))$ ) para  $n = N, N-1, \dots, 1$ , encontre  $z_h^{n-1} \in V_h^{l+1}$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{\tau_n}{2} B_h^n(z_h^{n-1}, v_h) + (z_h^{n-1}, v_h) &= (z_h^n, v_h) - \frac{\tau_n}{2} B_h^n(z_h^n, v_h) \\ &+ \frac{\tau_n}{2} (Q_h(v_h)(t_{n-1}) + Q_h(v_h)(t_n)), \quad \forall v_h \in V_h^{l+1}. \end{aligned}$$

Aqui a forma bilinear  $B_h^n(\cdot, \cdot)$  e funcional  $F$  correspondem a versão estabilizada do método SIPdG para a equação de advecção-difusão na forma não conservativa (ver [36] e suas referências):

$$\begin{aligned} B_h^n(z, v_h) &= \int_{\mathcal{F}_h} (\varepsilon(u_h^n) \nabla_h z \cdot \nabla v_h + (\tilde{\beta}(u_h^n) \cdot \nabla_h z) v_h) \\ &- \int_{\Gamma_D^-} (\tilde{\beta}(u_h^n) \cdot \mathbf{n}) z v_h - \int_{\Gamma^0} (\tilde{\beta}(u_h^n) \cdot \mathbf{n}) [[z]] v_h^\dagger \\ &- \int_{\Gamma^0 \cup \Gamma_D} (\{ \{ \varepsilon(u_h^n) \nabla_h z \cdot \mathbf{n} \} \} [[v_h]] + \{ \{ \varepsilon(u_h^n) \nabla_h v_h \cdot \mathbf{n} \} \} [[z]]) \\ &+ \int_{\Gamma^0 \cup \Gamma_D} \delta_\varepsilon [[z]] [[v_h]], \end{aligned}$$

$$Q_h^1(v_h)(t) = \int_{\mathcal{F}_h} q_1(\cdot, t) v_h.$$

Aqui, denotamos

$$v^\downarrow = \begin{cases} v^L, & \text{se } \tilde{\beta} \cdot \mathbf{n} < 0 \\ v^R, & \text{se } \tilde{\beta} \cdot \mathbf{n} > 0. \end{cases}$$

Substituindo a solução exata  $z$  do problema dual pela aproximação  $z_{\tau h}$  obteremos os indicadores do erro no tempo e no espaço:

$$Q(u) - Q(u_{\tau h}) \approx \sum_{n=1}^N (\eta_n^t + \eta_n^s),$$

sendo

$$\eta_n^t = \tau_n \int_{\mathcal{F}_{h,n}} (g(\cdot, t_n) - \nabla \cdot \hat{\sigma}_{\tau h}^n - \frac{1}{\tau_n} (u_{\tau h}^n - u_{\tau h}^{n-1})) \frac{\hat{z}_h^{n-1} + \hat{z}_h^n}{2}$$

o indicador no tempo e

$$\begin{aligned} \eta_n^s &= \sum_{K \in \mathcal{T}_{h,n}} \eta_n^K, \\ \eta_n^K &= \tau_n \int_K (\sigma_h^n - \hat{\sigma}_h^n) \cdot \frac{\nabla_h \hat{z}_h^{n-1} + \nabla_h \hat{z}_h^n}{2} \\ &\quad - \tau_n \sum_{E \in \partial K} \int_E \chi_{\mathcal{E}}(E) \llbracket u_h^n \rrbracket \{ \{ \mathcal{E}(u_h^n) \} \} \frac{(\nabla_h \hat{z}_h^{n-1} + \nabla_h \hat{z}_h^n) \cdot \mathbf{n}}{2} \end{aligned}$$

o indicador no espaço.

Aqui,  $\hat{z}_{\tau h}^n$  denota o interpolador de Oswald de  $z_h^n$ .

## 6.3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Esta seção dedica-se a apresentar alguns resultados numéricos obtidos através dos algoritmos e métodos apresentados no decorrer deste capítulo.

A malha estruturada utilizada nos testes consiste de um domínio  $\Omega = [0, 1]^2$  dividido 4 elementos (teste 1) e em 450 elementos (teste 2), veja a figura 12.

### 6.3.1 Algoritmo de adaptação de malha

A estratégia de adaptação influencia diretamente no comportamento do método e na solução obtida. O algoritmo utilizado para fazer a adaptação foi o mesmo mostrado no capítulo 5, isto é:

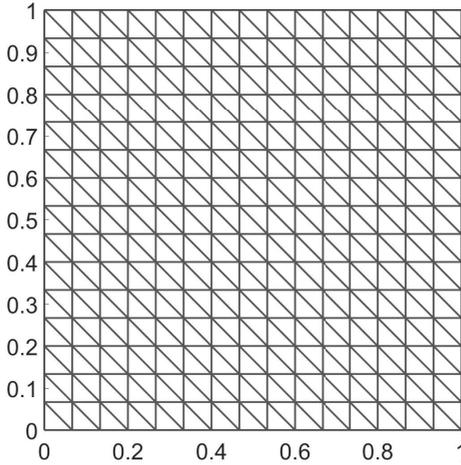


Figura 12 – Malha estruturada utilizada para o teste 2 dos problemas parabólicos não-lineares.

---

**Algoritmo 3** Estratégia de adaptatividade

---

**Se**  $\eta^n > TOL$

**Se**  $|\eta_t^n| > \xi |\eta_s^n|$

        Refinamento no tempo;

**Senão Se**  $|\eta_s^n| > \xi |\eta_t^n|$

        Refinamento e desrefinamento no espaço (usando  $\eta_s^n$ );

**Senão**

        Refinamento (tempo e espaço) e desrefinamento (espaço) usando  $\eta_s^n$ .

**Fim Se**

**Fim Se**

---

Para a estratégia de solução do problema, é preciso perceber que o problema dual depende da solução primal. Por isso, antes de resolver o problema dual, resolvemos o primal em uma malha no tempo e no espaço uniforme. Tendo a solução do problema primal, o problema dual pode ser resolvido (sem adaptação também). Por fim, o problema primal é resolvido novamente porém, agora, fazendo adaptação da malha no tempo e no espaço.

### 6.3.2 Teste 1 - Refinamento uniforme

Neste teste demonstramos o comportamento e a convergência do método para um problema não-linear com solução exata. Consideramos o problema (6.8) com condições de fronteira e termo fonte de modo que a solução exata é:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( c \left( \sqrt{(x - x_0 - c_1 t)^2 + (y - y_0 - c_2 t)^2} - 1 \right) \right);$$

em que  $c = 1/\bar{\varepsilon}$ ,  $x_0 = y_0 = -1/2$ ,  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) = (1, 1)$  e  $\bar{\varepsilon} = 0.1$ , como feito no teste do capítulo anterior. Porém, agora consideramos uma equação não-linear com coeficiente de difusão  $\varepsilon(u) = 2\bar{\varepsilon}(u + 1)$  e campo advectivo  $f(u) = \mathbf{c}u$ .

No funcional de interesse, utilizamos  $q_1$  e  $q_2$  dados por:

$$q_1 \equiv 0, \quad q_2 \equiv \frac{1}{|\omega|} \chi_\omega$$

em que  $\omega = [0.125, 0.25]^2$ .

$N$ $\tau_n$	$\#K$ $h$	$\ e(T)\ $	$\eta_{th}$	$\eta^s$	$\eta^r$	$Q(u - u_h)$	$I_h$
4 —	16 —	$4.36e-02$	$9.67e-02$	$2.32e-01$	$-1.35e-01$	$2.33e-02$	4.15
16 0.00625	64 0.25	$1.47e-02$	$1.37e-02$	$7.31e-02$	$-5.94e-02$	$7.95e-02$	0.172
64 0.0015625	256 0.125	$5.35e-03$	$6.30e-03$	$1.92e-02$	$-2.55e-02$	$6.31e-03$	1
256 $3.9e-04$	1024 0.0625	$2.02e-03$	$3.84e-03$	$7.69e-03$	$-1.15e-02$	$3.94e-03$	0.975
1024 $9.76e-05$	4096 0.03125	$9.45e-04$	$2.26e-03$	$3.36e-03$	$-5.62e-03$	$2.29e-03$	0.986

Tabela 4 – Teste 1: erros, indicadores de erro e índices de eficiência.

A tabela 4 mostra o comportamento dos erros, dos indicadores de erro no tempo final  $T = 0.1$  e do índice de eficiência para diferentes níveis de refinamento no tempo e no espaço. É possível perceber que o método converge e o índice de eficiência é assintoticamente exato.

### 6.3.3 Teste 2 - Refinamento adaptativo

Apresentamos agora um resultado para ilustrar o comportamento do refinamento adaptativo da malha. Consideramos aqui a mesma solução exata

para o problema primal:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctg \left( c \left( \sqrt{(x - x_0 - \beta_1 t)^2 + (y - y_0 - \beta_2 t)^2 - 1} \right) \right);$$

em que  $c = 1/\bar{\varepsilon}$ ,  $x_0 = y_0 = -1/2$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (1, 1)$ . Porém, agora utilizamos  $\bar{\varepsilon} = 1e - 2$ , tempo final  $T = 0.7$ . Estas duas últimas condições implicam que a solução exata terá uma frente se propagando pelo domínio que é mais aguda do que no primeiro teste e, também, irá se propagar mais dentro do domínio. Para o problema dual, mudamos apenas a região de interesse para  $\omega = [0.625, 0.75]^2$ .

Na figura 13 apresentamos a solução primal e dual, além do comportamento da malha adaptada, em 4 instantes de tempo. Como pode ser observado, a malha é adaptada inicialmente seguindo a frente da solução primal e, depois, concentra-se na região de interesse. Isso acontece devido ao domínio da advecção no processo de transporte. No tempo inicial a malha não é adaptada na região de interesse mas, na região em que o erro é propagado para este. Quando a frente da solução primal atinge a região de interesse, a malha continua sendo adaptada sobre esta e não se propaga mais na direção do fluxo advectivo.

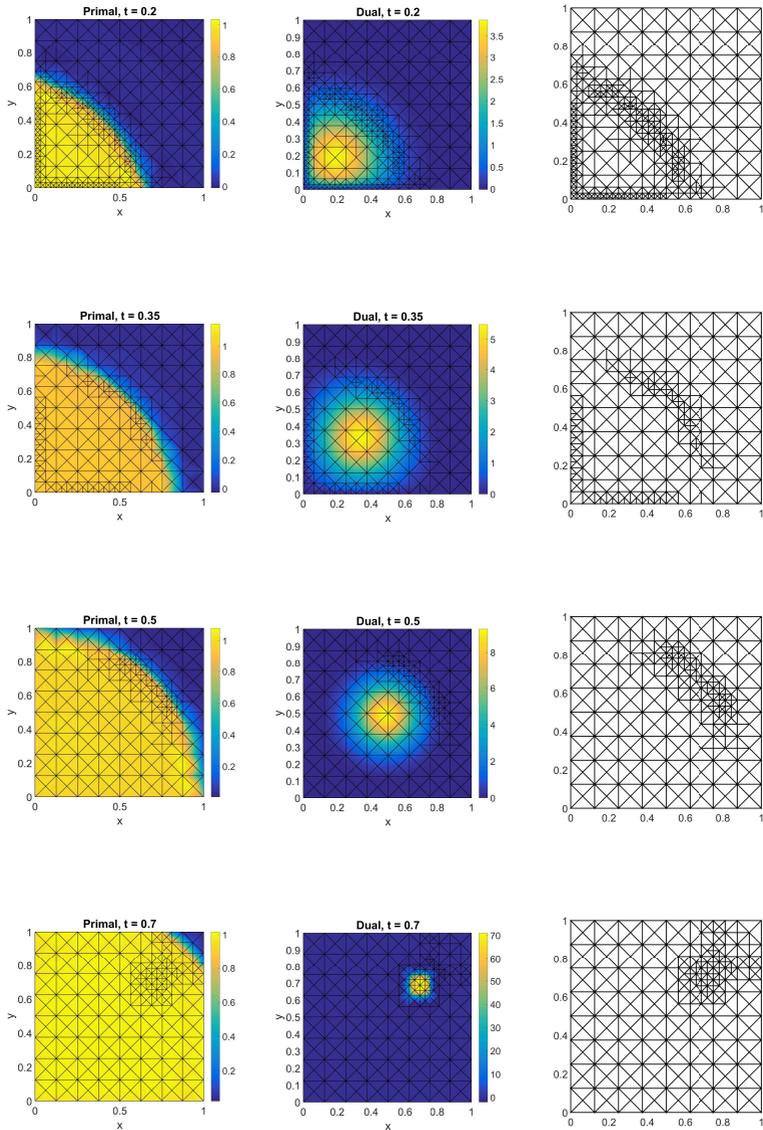


Figura 13 – Teste 2: Soluções aproximadas primal (esquerda) e dual (centro) e malha (direita) correspondente para  $t = 0.2, 0.35, 0.5$  e  $t = 0.7$ .



## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

No decorrer deste trabalho estudou-se indicadores de erro equilibrados para aproximação de funcional de interesse e adaptação de malha para problemas elípticos e parabólicos (lineares e não-lineares) utilizando o método de Galerkin descontínuo.

Para os problemas elípticos estudou-se o método de Galerkin descontínuo para equações dos tipos difusão e difusão-advecção-reação. Além disso, tratamos da técnica de reconstrução equilibrada de fluxos no espaço de Raviart-Thomas de alta ordem para esta classe de métodos. Utilizando a prescrição dos graus de liberdade, foi desenvolvida a técnica de reconstrução de fluxos equilibrados que foram usados, posteriormente, para calcular os indicadores de erro. Com este objetivo, foi construída uma base computacional para os espaços RT que permite recuperar o fluxo reconstruído a partir dos momentos do fluxo discreto da solução numérica do método de Galerkin descontínuo. Nesta parte, desenvolveu-se um código eficiente que implementa esta base modal e a reconstrução de fluxo em espaços de Raviart-Thomas de alta ordem.

Esta construção foi utilizada na abordagem de dois tipos de estimativas de erro a posteriori equilibradas. Primeiramente, para estimativas a posteriori na norma energia, foram estudados e implementados indicadores de erro que usam fluxos equilibrados. A robustez dos estimadores em relação a ordem de aproximação foi confirmada através de experimentos numéricos. Além disso, estratégias de adaptação baseadas neste estimador de erro foram apresentadas para altas ordens de aproximação. Em uma série de experiências numéricas, foi demonstrado que o número de graus de liberdade necessários para garantir o mesmo erro diminui quando a ordem de aproximação polinomial aumenta. No segundo tipo de estimativa, no funcional de interesse, obtemos uma representação do erro no funcional de interesse em termos da solução exata do problema dual e dos fluxos equilibrados do problema primal. Substituindo esta solução exata do problema dual (que não acessível na prática) por uma aproximação de Galerkin descontínuo de ordem mais alta que a do primal, foram construídos estimadores e indicadores de erro. Foi demonstrado e confirmado por meio de experiências numéricas, que o

estimador de erro é assintoticamente exato. Os indicadores de erro foram utilizados em processos de adaptação de malha meta orientada e os testes mostraram que indicadores de erro captam bem a singularidade na solução primal e claramente detectam a região de interesse por meio da solução dual.

Para os problemas parabólicos lineares, apresentamos inicialmente o método de Galerkin descontínuo em tempo e espaço  $dG(k)dG(l)$  e o método de Galerkin contínuo no tempo e descontínuo no espaço  $cG(k)dG(l)$ . Para esta classe de problemas foram desenvolvidos indicadores de erro no tempo e no espaço na aproximação de um funcional de interesse. O problema dual é formulado a partir do funcional de interesse estudado e, com isso, foi possível desenvolver a representação do erro. Assim como no caso elíptico, utilizou-se uma aproximação de ordem maior no tempo e no espaço para o problema dual, o que nos permitiu obter o indicador equilibrado e completamente computável de erro em funcional de interesse. Desenvolvemos um algoritmo de adaptação dinâmica de malhas em tempo e espaço, o qual faz uso dos indicadores de erro acima apresentados e técnicas de refinamento e desrefinamento das malhas. O estimador e os indicadores no tempo e no espaço foram testados e mostrou-se, através de testes numéricos, que o indicador é assintoticamente exato. O algoritmo de adaptação foi testado o que mostrou a eficiência da adaptação dinâmica de malhas.

O trabalho encerra apresentando indicadores de erro equilibrados em funcional de interesse para o método de Galerkin descontínuo para problemas parabólicos não-lineares. Inicialmente, o problema não-linear foi linearizado e utilizou-se o método de Newton, combinado com o método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço, para aproximar a solução do problema primal. Indicadores de erro foram desenvolvidos na base da teoria geral de erro em funcional de interesse para problemas variacionais não-lineares. A representação do erro em funcional de interesse foi obtida na forma na qual está presente a solução exata do problema dual. Assim como feito no caso linear, utilizou-se uma aproximação de ordem mais alta para o problema dual o que nos permitiu obter indicadores de erro calculáveis para os problemas parabólicos não-lineares. Os resultados numéricos apresentados mostraram que o estimador de erro é assintoticamente exato e os indicadores de erro são eficientes na aproximação de funcional de interesse pelo método de Galerkin

descontínuo no tempo e espaço usando malhas dinâmicas adaptativas.

Todos os códigos deste trabalho foram desenvolvidos dentro do ambiente do *software* MATLAB<sup>®</sup>.

Parte dos resultados obtidos neste trabalho foram apresentados no *International Conference on Spectral and High Order Methods* (ICOSAHOM - 2016) e publicados na série *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, ver [20].

O trabalho apresentado aqui será continuado seguindo os seguintes passos:

1. Desenvolver algoritmos adaptativos no tempo e no espaço para solução numérica eficiente de problemas de valor inicial e de fronteira para equações parabólicas lineares e não-lineares pelo método de Galerkin descontínuo de alta ordem no tempo;
2. Desenvolver métodos adaptativos do tipo Newton-Galerkin para aproximação de problemas parabólicos não-lineares pelo método de Galerkin descontínuo no tempo e no espaço. Desenvolver técnicas de controle de erro de convergência do método de Newton-Galerkin na base de estimadores de erro em funcional de meta;
3. Desenvolver métodos de adaptação de malha meta orientados para a equação de pressão e a equação de saturação em problemas de fluxos bifásicos em meios porosos.



## REFERÊNCIAS

- 1 AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], 2000. xx+240 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). ISBN 0-471-29411-X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/9781118032824>.
- 2 VERFÜRTH, R. *A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods*. EUA: Oxford University Press, 2013.
- 3 CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006. v. 2. xxx+531 p. (Computational Science & Engineering, v. 2). ISBN 0-89871-606-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718942>.
- 4 CHAVENT, J. J. G. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation: single phase, multiphase, and multicomponent flows through porous media*. [S.l.: s.n.], 1978.
- 5 FIDKOWSKI, K. J.; DARMOFAL, D. L. Review of output-based error estimation and mesh adaptation in computational fluid dynamics. *AIAA Journal*, v. 49, n. 4, p. 673–694, 2011.
- 6 BECKER, R.; RANNACHER, R. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numer.*, v. 10, p. 1–102, 2001. ISSN 0962-4929. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0962492901000010>.
- 7 ODEN, J.; PRUDHOMME, S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications*, v. 41, n. 5, p. 735 – 756, 2001. ISSN 0898-1221. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122100003175>.
- 8 KUZMIN, D.; KOROTOV, S. Goal-oriented a posteriori error estimates for transport problems. *Math. Comput. Simulation*, v. 80, n. 8, p. 1674–1683, 2010. ISSN 0378-4754. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2009.03.008>.
- 9 MELENK, J. M.; WOHLMUTH, B. I. On residual-based a posteriori error estimation in *hp*-FEM. *Adv. Comput. Math.*, v. 15, n. 1-4, p. 311–331 (2002), 2001. ISSN 1019-7168. A posteriori error estimation and adaptive computational methods. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1014268310921>.

- 10 BRAESS, D.; PILLWEIN, V.; SCHÖBERL, J. Equilibrated residual error estimates are  $p$ -robust. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 198, n. 13-14, p. 1189–1197, 2009. ISSN 0045-7825. Disponível em: (<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.010>).
- 11 BRAESS, D.; FRAUNHOLZ, T.; HOPPE, R. H. W. An equilibrated a posteriori error estimator for the interior penalty discontinuous Galerkin method. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 52, n. 4, p. 2121–2136, 2014. ISSN 0036-1429. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1137/130916540>).
- 12 ERN, A.; VOHRALÍK, M. Polynomial-degree-robust a posteriori estimates in a unified setting for conforming, nonconforming, discontinuous Galerkin, and mixed discretizations. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 53, n. 2, p. 1058–1081, 2015. ISSN 0036-1429. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1137/130950100>).
- 13 ERN, A.; VOHRALÍK, M. Flux reconstruction and a posteriori error estimation for discontinuous Galerkin methods on general nonmatching grids. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, v. 347, n. 7-8, p. 441–444, 2009. ISSN 1631-073X. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.017>).
- 14 ERN, A.; NICAISE, S.; VOHRALÍK, M. An accurate  $h(\text{div})$  flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *Comptes Rendus Mathématique*, v. 345, n. 12, p. 709 – 712, 2007. ISSN 1631-073X. Disponível em: (<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X07004360>).
- 15 CREUSÉ, E.; NICAISE, S. A posteriori error estimator based on gradient recovery by averaging for discontinuous Galerkin methods. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 234, n. 10, p. 2903–2915, 2010. ISSN 0377-0427. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2010.03.027>).
- 16 MOZOLEVSKI, I.; PRUDHOMME, S. Goal-oriented error estimation based on equilibrated-flux reconstruction for finite element approximations of elliptic problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 288, p. 127–145, 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2014.09.025>).
- 17 ERN, A.; MOZOLEVSKI, I. Discontinuous Galerkin method for two-component liquid–gas porous media flows. *Computational Geosciences*, v. 16, n. 3, p. 677–690, 2012. ISSN 1573-1499. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1007/s10596-012-9277-3>).
- 18 ERN, A.; MOZOLEVSKI, I.; SCHUH, L. Accurate velocity reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of two-phase porous media

flows. *Comptes Rendus Mathématique*, v. 1513, n. 9, p. 463–582, 2009. ISSN 1631-073X. Disponível em: ([http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631-073X\(09\)00060-0](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631-073X(09)00060-0)).

19 PIETRO, D. A. D.; ERN, A. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*. Springer, Heidelberg, 2012. v. 69. xviii+384 p. (Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], v. 69). ISBN 978-3-642-22979-4. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-22980-0>).

20 MOZOLEVSKI, I.; VALMORBIDA, E. L. Efficient equilibrated flux reconstruction in high order Raviart -Thomas space for discontinuous Galerkin methods. In: *Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations ICOSAHOM 2016*. Springer International Publishing, 2017. p. 467–479. Disponível em: (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385637>).

21 CHEN, L. *iFEM: an integrated finite element method package in MATLAB*. [S.l.], 2009.

22 ERN, A.; GUERMOND, J.-L. *Theory and practice of finite elements*. Springer-Verlag, New York, 2004. v. 159. xiv+524 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 159). ISBN 0-387-20574-8. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-4355-5>).

23 ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*. Second. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003. v. 140. xiv+305 p. (Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), v. 140). ISBN 0-12-044143-8.

24 EVANS, L. C. *Partial differential equations*. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. v. 19. xviii+662 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19). ISBN 0-8218-0772-2.

25 BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, New York, 2011. xiv+599 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0.

26 BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*. Third. Springer, New York, 2008. v. 15. xviii+397 p. (Texts in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 978-0-387-75933-3. Disponível em: (<http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>).

27 GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. [S.l.]: Pitman, 1985. (Monographs and Studies in Mathematics, 24).

28 PRUDHOMME, S. et al. *Review of A Priori Error Estimation for Discontinuous Galerkin Methods*. Texas, 2000.

- 29 AYUSO, B.; MARINI, L. D. Discontinuous Galerkin methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, v. 47, n. 2, p. 1391–1420, fev. 2009. ISSN 0036-1429. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1137/080719583>).
- 30 COCHEZ-DHONDT, S.; NICAISE, S. Equilibrated error estimators for discontinuous Galerkin methods. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, v. 24, n. 5, p. 1236–1252, 2008. ISSN 0749-159X. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/num.20315>).
- 31 CREUSÉ, E.; NICAISE, S. A posteriori error estimator based on gradient recovery by averaging for convection-diffusion-reaction problems approximated by discontinuous Galerkin methods. *IMA J. Numer. Anal.*, v. 33, n. 1, p. 212–241, 2013. ISSN 0272-4979. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/imanum/drr052>).
- 32 ERN, A.; STEPHANSEN, A. F.; VOHRALÍK, M. Guaranteed and robust discontinuous Galerkin a posteriori error estimates for convection-diffusion-reaction problems. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 234, n. 1, p. 114–130, 2010. ISSN 0377-0427. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.12.009>).
- 33 ERN, A.; STEPHANSEN, A. F. A posteriori energy-norm error estimates for advection-diffusion equations approximated by weighted interior penalty methods. *J. Comput. Math.*, v. 26, n. 4, p. 488–510, 2008. ISSN 0254-9409.
- 34 PRUDHOMME, S.; ODEN, J. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 176, n. 1, p. 313 – 331, 1999. ISSN 0045-7825. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782598003430>).
- 35 MOZOLEVSKI, I.; PRUDHOMME, S. A robust goal-oriented estimator based on the construction of equilibrated fluxes for discontinuous Galerkin finite element approximations of convection-diffusion problems. Submetido. 2015. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01130388>).
- 36 HOUSTON, P.; SCHWAB, C.; SÜLI, E. Discontinuous  $hp$ -finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 39, n. 6, p. 2133–2163, 2002. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036142900374111>).

- 37 BAHRIAWATI, C.; CARSTENSEN, C. Three matlab implementations of the lowest-order raviart-thomas mfem with a posteriori error control. *Computational Methods in Applied Mathematics*, p. 333–361, 2005.
- 38 VALMORBIDA, E. L. *Método de elementos finitos mistos para problemas elípticos e parabólicos degenerados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Fevereiro 2013.
- 39 ERVIN, V. J. Computational bases for  $RT_k$  and  $BDM_k$  on triangles. *Comput. Math. Appl.*, v. 64, n. 8, p. 2765–2774, 2012. ISSN 0898-1221. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2012.08.011>.
- 40 DUBINER, M. Spectral methods on triangles and other domains. *J. Sci. Comput.*, v. 6, n. 4, p. 345–390, 1991. ISSN 0885-7474. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01060030>.
- 41 DÖRFLER, W. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 33, n. 3, p. 1106–1124, 1996. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0733054>.
- 42 FEISTAUER, M.; HAJEK, J.; SVADLENKA, K. Space-time discontinuous Galerkin method for solving nonstationary linear convection-diffusion-reaction problems. *Applications of Mathematics*, Applications of Mathematics, 2007.
- 43 THOMÉE, V. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 2000. (Springer Series in Computational Mathematics).
- 44 RIVIÈRE, B. *Discontinuous Galerkin Methods for Solving Elliptic and Parabolic Equations: Theory and Implementation*. Philadelphia: SIAM, 2008.
- 45 QUARTERONI, A.; VALLI, A. *Numerical approximation of partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2008.
- 46 SCHÖTZAU, D.; SCHWAB, C. An  $hp$  a priori error analysis of the DG time-stepping method for initial value problems. *Calcolo*, v. 37, n. 4, p. 207–232, 2000. ISSN 0008-0624. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s100920070002>.
- 47 RIVIÈRE, B.; WHEELER, M. F. A discontinuous Galerkin method applied to nonlinear parabolic equations. In: *Discontinuous Galerkin methods (Newport, RI, 1999)*. Springer, Berlin, 2000, (Lect. Notes Comput. Sci. Eng., v. 11). p. 231–244. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-642-59721-3_17).

- 48 DOLEJŠI, V.; FEISTAUER, M.; HOZMAN, J. Analysis of semi-implicit DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems on nonconforming meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, n. 29-30, p. 2813–2827, 2007. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.09.025>).
- 49 ERIKSSON, K.; JOHNSON, C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 28, n. 1, p. 43–77, 1991. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0728003>).
- 50 HARTMANN, R. *A posteriori* Feehlerschätzung und adaptive Schrittweiten- und Ortsgittersteuerung bei Galerkin-Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung. Dissertação (Diplomarbeit) — Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, 1998.
- 51 PICASSO, M. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 167, n. 3-4, p. 223–237, 1998. ISSN 0045-7825. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00121-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00121-2)).
- 52 SCHMICH, M.; VEXLER, B. Adaptivity with dynamic meshes for space-time finite element discretizations of parabolic equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 30, n. 1, p. 369–393, 2007/08. ISSN 1064-8275. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/060670468>).
- 53 ERN, A.; SMEARS, I.; K, M. V. Guaranteed, locally space-time efficient, and polynomial-degree robust a posteriori error estimates for high-order discretizations of parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 55, n. 6, p. 2811–2834, 2017. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/16M1097626>).
- 54 DOLEJŠI, V.; ERN, A.; VOHRALÍK, M. A framework for robust a posteriori error control in unsteady nonlinear advection-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 51, n. 2, p. 773–793, 2013. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/110859282>).
- 55 ERN, A.; VOHRALÍK, M. A unified framework for a posteriori error estimation in elliptic and parabolic problems with application to finite volumes. In: *Finite volumes for complex applications VI. Problems & perspectives. Volume 1*, 2. Springer, Heidelberg, 2011, (Springer Proc. Math., v. 4). p. 821–837. Disponível em: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20671-9\\_85](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20671-9_85)).
- 56 ERN, A.; VOHRALÍK, M. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM J. Numer. Anal.*,

v. 48, n. 1, p. 198–223, 2010. ISSN 0036-1429. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/090759008>.

57 LARSON, M. G.; MÅLQVIST, A. Goal oriented adaptivity for coupled flow and transport problems with applications in oil reservoir simulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, n. 37-40, p. 3546–3561, 2007. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.10.038>.

58 ALLAIRE, A. C. G. *Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation (Numerical Mathematics and Scientific Computation)*. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2007. (Numerical Mathematics and Scientific Computation). ISBN 0199205213,9780199205219.