Jefferson Jacques Andrade

REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: CONCEITUALIZAÇÃO DOS DIVERSOS TIPOS DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação de mestrado submetido(a) ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica Programa da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Educação Matemática
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária
da UFSC.

Andrade, Jefferson Jacques
Registro de representação semiótica : conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software GeoGebra / Jefferson Jacques Andrade ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2018.
191 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Sistemas Lineares. 3. Representações semióticas. I. Moretti, Méricles Thadeu . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Jefferson Jacques Andrade

REGISTRO DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: CONCEITUALIZAÇÃO DOS DIVERSOS TIPOS DE SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 27 de março de 2018.

____
Prof. Dr. José Francisco Custódio Filho
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Banca Examinadora:

____
Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina.

____
Prof. Dra. Lisani Geni Wachholz Coan
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Santa Catarina

____
Prof. Dr. David Antônio da Costa
Universidade Federal de Santa Catarina

Dedico esse trabalho a Deus e a três pessoas muito importantes em minha vida: minha mãe, Cecília de Fátima Andrade; minha esposa Priscilla Chaves Rodrigues Andrade e meu amigo e irmão Michelsch João da Silva, que sempre estiveram ao meu lado ajudando-me a superar as dificuldades impostas pela vida e nunca me deixando esmorecer, a fim de alcançar este grande objetivo.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Cecília de Fátima Andrade e à minha esposa Priscilla Chaves Rodrigues Andrade pelo apoio e pelo encorajamento para seguir em busca desse sonho.

Ao meu querido amigo Michelsch João da Silva, pela amizade, compreensão, apoio e paciência.

Ao meu querido amigo David, por me ajudar na formatação desse trabalho.

Aos colegas de Unisul, Maurici José Dutra, Diva Marília Flemming, Christian Wagner e Kellen Regina Silva, pelo apoio nesse processo.

Aos alunos do Colégio Adventista de Florianópolis-Centro, pela importante participação nesta pesquisa.

Ao Diretor Douglas Leal dos Santos do Colégio Adventista de Florianópolis-Centro e ao coordenador, Malton Fukner, pelo espaço proporcionado para a aplicação da proposta desse trabalho.

Aos docentes do PPGECT, pela dedicação prestada aos alunos que compõem nosso grupo de mestrado.

Ao professor Méricles Thadeu Moretti, pelas inúmeras contribuições e pela oportunidade de dividir com ele momentos tão gratificantes na produção desse trabalho. Sou grato, principalmente, pela confiança em mim depositada para a elaboração deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma pesquisa qualitativa cujo objetivo é aplicar uma sequência didática que aborde as conversões entre os diferentes registros de representações de um sistema linear no intuito de discutir a classificação desses sistemas. Para tal, empregou-se o software GeoGebra 6.0.400.0-offline. Aplicou-se a sequência didática aos alunos do 3° ano do ensino médio do Colégio Adventista de Florianópolis. Essa pesquisa propõe responder à seguinte questão de pesquisa: Uma proposta de aprendizagem a fim de construir como uma sequência didática, que contribua para discutir a classificação de sistemas lineares a partir da exploração e da conversão entre os registros gráficos, algébricos – conforme representação tradicional com equações e chave – e matriciais? Como essas conversões podem contribuir para que os alunos tenham melhor compreensão não apenas para determinar o conjunto solução de um sistema linear, mas para entender esse conjunto, classificá-lo e discuti-lo, quando necessário? A fundamentação teórica está alicerçada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003). Como metodologia, escolheram-se os pressupostos da Engenharia Didática, segundo descrição feita por Artigue (1996), já que é usada nas pesquisas de Didática da Matemática, que incluem uma parte experimental. Sobre o objeto matemático sistema linear, apresentou-se uma análise de dois livros didáticos e a apostila utilizada pelos alunos nessa instituição. Os resultados da pesquisa apontam para a relevância do uso do software GeoGebra 6.0.400.0-offline para a conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares. Confia-se que esta pesquisa encoraje novos trabalhos sobre conversões de registros semióticos. Como produto final, apresentou-se uma sequência didática que sirva como sugestão a outros professores para o ensino desse conteúdo.

Palavras-chave: Sistemas lineares. Registro de representação semiótica. Software GeoGebra. Engenharia didática.

ABSTRACT

The present work presents a qualitative research, whose aim is to apply a didactic sequence that addresses conversions between the different records of representations of a linear system in order to discuss the classification of these systems. In order to achieve this, we used GeoGebra 6.0.400.0-offline software. The didactic sequence was applied to students of the 3rd year of high school at Adventist School in Florianópolis. This research aims to answer the following research question: Does a learning proposal, built as a didactic sequence, contribute to discuss the classification of linear systems through the exploration and conversion between graphic, algebraic registers - according to traditional representation of the equations placed in brackets - and dot matrix? How can these conversions help students not only to determine the set solution of a linear system, but also to understand, classify and discuss it when necessary? The theoretical foundation is based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representation Records (2003). As methodology, we chose the assumptions of Didactic Engineering, as described by Artigue (1996), since it is used in Mathematics Didactics research, which includes an experimental part. On the mathematical object linear system, we present an analysis of two textbooks and the class material used by the students in this institution. The results of our research point to the relevance of the use of GeoGebra 6.0.400.0-offline software for the conceptualization of the various types of linear system solutions. We trust that our research will encourage new work on semiotic record conversions. We present as final product, a didactic sequence that can be used by other teachers when teaching this subject.

Keywords: Linear systems. Registration of semiotic representation. Software GeoGebra. Didactic engineering.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
PPGECT - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Inicia-se esta dissertação com a justificativa dessa pesquisa que mostra um pouco da trajetória profissional do autor, mestrando, as investigações sobre o tema, o objetivo e a questão de pesquisa.

Na qualidade de professor, busca-se estimular nos alunos o prazer de estudar a disciplina de matemática. Sabendo-se que ela tem um papel fundamental na vida estudantil, procura-se uma proposta de ensino que aborde Sistemas Lineares com alunos do ensino médio.

Meus primeiros passos como docente inicia-se em 1995, quando percebo que o ensino de Sistema de Equações Lineares começa na sétima série, atual oitavo ano, do ensino fundamental II. Nesse nível de ensino, evidenciam-se as técnicas de resoluções algébricas, as quais apresentam a resolução do sistema linear $2x2$ pelos métodos da adição, substituição e comparação. Tendo em vista que os livros e as apostilas adotados nas escolas, em que trabalhei ao longo desses 22 anos, raramente se apresentava a visão geométrica para solucionar esses problemas.

Identifica-se o ensino de Sistemas Lineares como um conteúdo de fundamental importância para alunos do ensino médio, assim como para alunos do ensino superior. Por meio deste trabalho, buscou-se analisar a viabilidade do ensino de Sistemas Lineares a partir da conversão de registros entre a forma com equações e chave, a forma matricial de um sistema linear (matriz aumentada) e a representação geométrica.

Essa pesquisa busca propor uma alternativa na forma de trabalhar tal objeto matemático no ensino médio, haja vista que nessa fase aborda-se não apenas Sistemas Lineares de ordem $2x2$, mas também Sistemas Lineares de ordem $3x3$ e todas as outras possíveis variações. Cabe ressaltar que outro importante fato que se depara nessa fase é a ausência de representações gráficas para sistemas lineares $3x3$. Logo, preocupados em vencer tal dificuldade, decide-se introduzir uma ferramenta computacional para a abordagem do estudo dos Sistemas Lineares que propiciasse ao aluno a visualização gráfica do objeto no espaço tridimensional. Para isso, elabora-se uma sequência didática que se encontra voltada à interpretação e à compreensão das soluções dos sistemas lineares nas formas com equações e chave, geométrica e matricial (matriz aumentada).

Buscaram-se, na Teoria das Representações Semióticas, os alicerces para embasar e fundamentar a pesquisa, uma vez que se reconhece que os alunos efetivamente compreendem o conteúdo quando conseguem modificar os registros em que esses se apresentam.

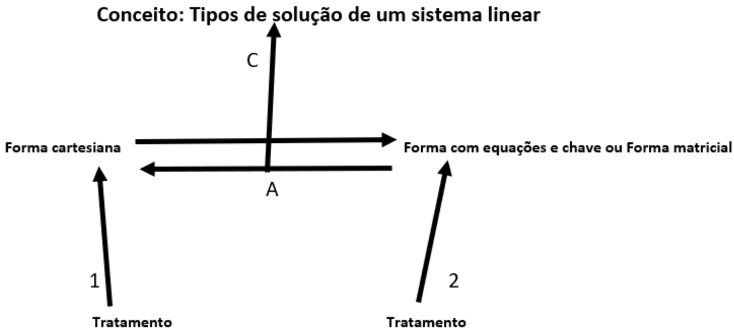
> [...] o entendimento dos objetos e dos conceitos em matemática começa, somente, no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e de coordenar espontaneamente dois registros de representação para um mesmo objeto. Obtêm-se, assim, as bases de um modelo cognitivo de funcionamento do pensamento que leva em conta todos os problemas suscitados no ensino de matemática. (DUVAL; MORETTI, 2012, p. 266).

Distinguem-se as enormes transformações que a sociedade passa nos últimos anos, devido ao grande avanço das tecnologias, seguindo orientações em relação ao uso dos recursos tecnológicos, utilizados para elaborar a sequência didática com o software GeoGebra. Fez-se esta escolha, uma vez que as leituras realizadas, durante as disciplinas do curso de mestrado, foram colocadas diante do inquestionável fato de que a tecnologia contribui efetivamente para o aprendizado dos alunos.

> Tem sido frequentemente lembrado que o último quarto do século 20 não teve precedentes na escala, finalidade e velocidade de sua transformação histórica, de modo que a única certeza para o futuro é que ele será bem diferente do que é hoje, e que assim será de maneira muito mais rápida do que nunca. A razão disso tudo está na revolução tecnológica, uma ideia que se tornou rotineira e lugar comum, nestes tempos de tecnocultura. (SANTAELLA, 2012, p.30).

A presente dissertação toma por base a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval na abordagem das diversas possibilidades de solução de um sistema linear. Essas soluções podem ser explicitadas em vários sistemas semióticos, tais como a representação cartesiana; a representação matricial e a representação algébrica conforme representação tradicional das equações colocadas em uma chave para designar o sistema. O trabalho tratará dos diversos tipos de soluções dos sistemas, em cada uma dessas representações. Respaldado na teoria de Duval, essa pesquisa busca, além de tratar individualmente cada um desses sistemas, realizar as conversões de registros.

Figura 1 - Hipótese de aprendizagem que mostra os diversos sistemas semióticos de representação envolvidos no conceito de solução de sistemas lineares.



Fonte: esquema construído pelos autores para o caso de três sistemas semióticos com base no modelo de representação centrada na função de objetivação em Duval (2004, p. 67 a 70).

Na Figura 1, a dupla seta indicada por A, entre as formas de representação de sistemas lineares indicam as operações de conversões enquanto as setas 1 e 2 designam as operações de tratamento. Já a seta C que converge para a parte superior da figura, para o **conceito: tipos de solução de um sistema linear**, corresponde ao que Duval (2004, p. 68) chama de compreensão integrativa.

Pretende-se promover uma compreensão mais abrangente do conceito acerca dos Sistemas Lineares para esclarecer que não se limita a somente cálculos por meio de técnicas memorizadas que muitas não evidenciam os conceitos matemáticos envolvidos. A intencionalidade deste trabalho é discutir conceitos que cerceiam os Sistemas Lineares, baseados em uma fundamentação teórica que carrega uma abordagem que envolve diferentes representações.

Verifica-se nos PNLEM (BRASIL, 2005) a importância em interpelar de maneira diversificada um mesmo conteúdo matemático.

> Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos: símbolos matemáticos, linguagem natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos. (BRASIL, 2005, p. 75).

Motivou-se à busca por novas abordagens devido a pouca variação de representação nos exercícios encontrados nos livros didáticos, tais como: o uso de tecnologias no ensino da matemática. Tendo em vista que as orientações curriculares para o ensino médio (2008) ressaltam a importância, para o aluno, da ferramenta computacional a fim de que ele possa comparar e refletir a respeito das diversas soluções apresentadas:

> Já se pensando na tecnologia para a matemática, há programas de computador (softwares) nos quais os alunos podem explorar e construir diferentes conceitos matemáticos, referidos a seguir como programas de expressão. São características desses programas: a) conter um certo domínio de saber matemático – a sua base de conhecimento; b) oferecer diferentes representações para um mesmo objeto matemático – numérica, algébrica; c) possibilitar a expansão de sua base de conhecimento por meio de macro construções; d) permitir a manipulação dos objetos que estão na tela. (BRASIL, 2008, p. 88).

No que se refere à solução de um sistema linear, o método sugerido pelas orientações curriculares para o ensino médio é a utilização do método do escalonamento por apresentar operações elementares.

> A resolução de sistemas $2x2$ ou $3x3$ também deve ser feita via operações elementares (processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem soluções. (BRASIL, 2008, p. 78).

Essa dissertação objetiva conceitualizar os diversos tipos de soluções dos sistemas lineares em suas possíveis representações, ancorados na Teoria de Representações Semióticas de Duval.

Com base nessas percepções, faz-se necessário questionar se **uma proposta de aprendizagem, construída como uma sequência didática, contribui para discutir a classificação de sistemas lineares a partir da exploração e da conversão entre os registros gráficos, algébricos – conforme representação tradicional com equações e chave – e matriciais (matriz aumentada)? Como essas conversões podem contribuir para que os alunos tenham melhor compreensão não apenas para determinar o conjunto solução de um sistema linear, mas**

para entender esse conjunto, classificá-lo e discuti-lo, quando necessário?

Diante do exposto, pretende-se desenvolver uma sequência didática que possa vir a contribuir com o estudo de Sistemas Lineares. Para responder ao problema de pesquisa, apresenta-se um objetivo geral e, a partir desse, os objetivos específicos, relatados a seguir:

1.1 OBJETIVO GERAL

Elaborar uma proposta pedagógica, baseada nas conversões entre os diferentes registros de representações semióticas, que contribua para a compreensão dos estudantes, acerca da classificação dos Sistemas Lineares, realizando inferências sobre a solução.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para se tentar alcançar tal objetivo, propõe-se:

a) transitar entre os diferentes registros de representações dos Sistemas Lineares, com o propósito de oportunizar a compreensão da solução desses sistemas;
b) elaborar uma proposta que favoreça a compreensão da classificação de Sistemas de Equações Lineares;
c) utilizar o software GeoGebra como instrumento para favorecer a realização das conversões;
d) propiciar ao aluno a possibilidade de compreender que um sistema linear pode ser representado em diversos registros e oportunizar a conversão entre estas formas de representação.

A presente pesquisa trata da aplicação de uma sequência didática que será realizado com alguns alunos do 3º ano do ensino médio do Colégio Adventista de Florianópolis - Centro, escola privada localizada na região da grande Florianópolis – SC. Por meio da sequência didática proposta, faremos recortes dos dados – que foram gravados por meio de fotos e áudio – e analisaremos a validade da proposta na aprendizagem de Sistemas Lineares para alunos do ensino médio.

O presente trabalho está delineado em sete capítulos, sendo o atual introdutório e os demais descrevendo as diversas etapas da pesquisa.

O capítulo dois apresenta uma discussão das representações semióticas no contexto da Educação Matemática. Discute a importância das conversões dos registros para obter diferentes formas de representações de um objeto matemático e levanta a questão de não tratar o objeto como um todo quando se encontra em apenas uma ou outra forma de representação.

Desvenda-se no capítulo três uma abordagem da engenharia didática como uma forma particular de organização dos procedimentos metodológicos da pesquisa. |Faz-se, também, o embasamento pela escolha do método do escalonamento para a resolução e classificação de sistemas lineares, assim como a justificativa pela escolha do software GeoGebra como ferramenta de auxílio no desenvolvimento da sequência didática. Para finalizar, apresentam-se os procedimentos metodológicos, descrevendo os passos que viabilizaram a realização do instrumento de nossa pesquisa, assim como a sua descrição.

No capítulo quatro, busca-se realizar uma reflexão sobre as recomendações apontadas por documentos oficiais como: Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (BRASIL, 2000) e nas Orientações Curriculares para o Ensino médio (BRASIL, 2008). Além disso, apontam-se as leituras realizadas a respeito do tema proposto que serviram como base para o desenvolvimento deste trabalho.

O capítulo cinco realça-se uma revisão sobre o tópico Sistemas Lineares, usando como referencial teórico o livro *Álgebra Linear* de STEINBRUCH e WINTERLE, tradicionalmente utilizado no ensino superior. Para tal, salienta-se como o conteúdo é abordado pelos autores e quais as maneiras de resolução apresentadas por eles. Ainda, realizou-se um estudo sobre a forma como os Sistemas Lineares são propostos nos livros didáticos. Para tal, analisou-se como o conteúdo é abordado pelos autores, quais as maneiras de resolução apresentadas e a relevância dada em relação à variação dos registros em que se pode encontrar um sistema linear. Para facilitar a ordenação das ideias, propuseram-se recortes justificando as colocações efetuadas.

Exibiu-se, no capítulo seis, a análise de dados, *a priori* das atividades propostas na sequência didática, assim como recortes da sequência aplicada; extrai-se *a posteriori* à luz das representações semióticas.

No capítulo sete, expõem-se as considerações finais do trabalho. Finalmente, encontram-se o apêndice com documentos de autorização para realização deste trabalho e a sequência didática construída pelos autores.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Nesse trabalho, tratar-se-ão os diversos tipos de soluções dos sistemas lineares em cada uma dessas representações: solução vazia, solução única e infinitas soluções. Além de tratar individualmente cada um desses sistemas, principalmente coordenará conforme apregoa o referencial teórico, para que a aprendizagem do conceito aconteça, nos diversos sistemas de representações.

Foi o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, o responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual analisa a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Segundo essa teoria, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de representação semiótica, os quais Duval (1993) definem como sendo as

> [...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. (p.39).

Em sua teoria, Duval explica que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático. Denomina-se sistema ou registro semiótico o sistema no qual se representa um objeto matemático. Tais registros são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado. Um exemplo matemático, no qual pode ser visualizado um objeto destacando seu sistema semiótico e o seu registro de representação, pode ser verificado no estudo da Álgebra Linear diante do uso de registros simbólicos para representar um Sistema Linear.

Nas atividades matemáticas, representa-se um objeto utilizando vários registros de representação. Segundo a teoria de Duval, é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Na realidade, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem conforme evidencia o pensamento a seguir:

> a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. (Duval, 2003, p.14).

As representações são consideradas, geralmente, como uma simples maneira de exteriorização das representações mentais para fins de comunicação; entretanto, vale ressaltar que essa visão é limitada uma vez que elas exerceram e exercem um papel primordial na construção do pensamento matemático. Duval (2003) destaca a importância dos registros de representação para a matemática dizendo que "o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (p.13), ou seja, o desenvolvimento da própria matemática se deu em função dos registros usados para expressar as ideias construídas.

As palavras de Duval descritas acima evidenciam a importância e a necessidade do uso das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso por meio de registros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento. Na verdade, os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem o uso de registros de representação, conforme afirma Duval (2003):

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (p.21).

Haja vista que cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza. Tomar consciência dos conteúdos existentes em cada registro de representação e estabelecer relações entre eles significa apropriar-se do objeto estudado. A esse respeito, Moretti (2002) afirma que

> de um ponto de vista cognitivo, uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados. (p.27).

São as representações, segundo Duval, que quando convertidas umas nas outras conduzem ao aprendizado dos objetos estudados; nesse sentido, pode-se então dizer que o estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymund Duval perpassa pela verificação da construção gradativa do conhecimento mediante conversões estabelecidas entre as diversas formas de representação. Sendo assim, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

Em suma, as palavras de Duval (2003) querem dizer que “a compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro” (p.21), daí a necessidade de se desenvolver um ensino que prime em trabalhar com diferentes representações dos objetos matemáticos a serem estudados.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica diz que durante o processo de estudo dos objetos matemáticos deve ser dado ênfase a duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são procedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os registros permanecem num mesmo sistema de representação, mediante a escrita de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros; já a conversão é um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado. Ao discutir as transformações de tratamento e conversão em sua teoria, Duval (2003) descreve que

> os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação.
> As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita

> algébrica de uma equação em sua representação gráfica. (p.16) .

Embora seja clara a diferença entre tratamentos e conversões, é comum as pessoas confundirem essas transformações. Esse tipo de confusão deve ser evitado, pois se trata de transformações distintas, embora o processo de conversão necessite do uso de tratamentos diferentes para acontecer. Essa confusão evidencia-se no pensamento de Duval (2003) quando afirma que

> é comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como, por exemplo, em geometria) ou reduzi-la a uma codificação.... Passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou ainda, passar de uma expressão em português - como “o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa” - à escrita simbólica – no caso, “x>y”, seria igualmente uma codificação, como toda escrita literal de relações entre os números. (p.17).

Os tratamentos estão ligados à forma de representação dos objetos os quais contêm conteúdos próprios, e não ao estudo do objeto matemático em si. Por isso, é um grande erro reduzir a conversão a uma forma de tratamento. Não são regras de correspondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conversão, mas sim a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros. A esse respeito Duval (2003) diz que

> há por trás da aplicação de uma regra de decodificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. (p.17).

Isso justifica, consoante a teoria de Duval, porque a conversão das representações não pode e não deve ser redutível a uma simples forma de tratamento. Apesar de a conversão, sob o ponto de vista matemático, não efetuar nenhum papel intrínseco nos processos de justificação e prova, ela é de fundamental importância, sob o ponto de vista cognitivo, pois interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Na realidade, segundo a Teoria dos Registros de Representação é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber. A distinção dos dois tratamentos abordados se faz necessária por serem elementos constitutivos dessa teoria, por isso se procurará explicitá-los.

No estudo de Sistemas Lineares, por exemplo, diante dos diferentes tratamentos que podem ser dados ao estudo deste objeto matemático, ou seja, por meio das diversas formas de registro de representação semiótica empregadas no processo de resolução de um sistema, insere-se a percepção de características próprias do objeto tais como as propriedades que se manifestam na construção gradativa de cada conceito. Tendo em vista que os conceitos conduzem a uma tomada de consciência do objeto estudado na medida em que permitem a apropriação dos seus significados.

Considerando a Teoria dos Registros de Representação, segundo a qual a compreensão dos objetos acontece mediante a articulação de ao menos dois registros, Duval (2003) chama atenção para a forma de acesso aos objetos matemáticos estudados, dizendo que isso só é possível por meio de suas representações; todavia, ressalta que usar um registro para representar um objeto não significa estar tratando do objeto em si, embora seja isso que possa parecer. Diante dessas questões, ou seja, mediante a diferenciação entre representação e objeto, Duval (2003) elaborou o que chamou de paradoxo da compreensão em matemática por meio do seguinte questionamento: Como podemos não confundir um objeto e a sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação? (p.21) O paradoxo da compreensão em matemática de Duval causa inquietação, porque nos remete à seguinte situação: como é possível não querer que os alunos confundam os objetos com as representações se só se reconhecem os objetos pelas representações?

Foi buscando responder às questões acima evidenciadas que Duval (2003) destacou em sua teoria a necessidade de não se identificar os objetos representados com o conteúdo das representações que o torna acessível, ou seja, as representações correspondem a meios para se chegar ao objeto, e não o objeto em si. O conhecimento das várias representações não significa apropriar-se do objeto em si, mas sim tomar conhecimento dos conteúdos específicos de cada representação que conduzem à tomada de consciência do objeto estudado, ou seja, do seu aprendizado.

Do ponto de vista pedagógico, é preciso procurar o melhor registro a ser usado para que os alunos possam "aprender" matemática mudando apenas os sistemas de representação, mas mantendo as referências ao objeto estudado. Isso acontece por que os alunos não reconhecem o objeto estudado diante de representações diferentes, conforme afirma Duval (2003): "...o sucesso para a grande maioria dos alunos em matemática ocorre no caso dos monorregistros" (p.21). No estudo de matriz, por exemplo, os alunos não associam este objeto matemático ao estudo de sistemas. Embora sejam tratamentos distintos dados ao estudo de um mesmo objeto matemático, eles são apresentados de maneira única e isolada, sem estabelecer uma relação de conversão. No ensino de matemática, é importante destacar que não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação. Os objetos abstratos tratados dentro da matemática não são diretamente acessíveis à percepção se não por meio de representações, daí ser necessário para a sua apreensão o uso de registros.

Para Duval, a relação entre os diferentes tipos de registros de representação implica uma interpretação semiótica dos objetos. E é durante a relação estabelecida entre os registros que os significados aparecem originando a construção do conhecimento.

Ao se tratar um registro é preciso considerar que existem regras de tratamento próprias a cada tipo de registro cuja natureza e forma de tratamento variam de um registro a outro. Diante de um tratamento adequado, dado ao estudo de um objeto, é possível transformar a sua forma de representação permanecendo o conteúdo do objeto matemático tratado.

A respeito da forma de tratamento e o estudo do conteúdo do objeto matemático tratado, Duval (2009) diz que não se deve confundir o conteúdo explícito da representação e o objeto que ela representa, uma vez que este conteúdo depende do sistema que permite produzir a representação e não o objeto.

3 REFERENCIAL METODOLÓGICO

Neste capítulo, apresentar-se-á a engenharia didática como instrumento metodológico da pesquisa, além do embasamento pela escolha do método do escalonamento para a resolução e para a classificação de sistemas lineares, assim como a justificativa pela escolha do software GeoGebra como ferramenta de auxílio no desenvolvimento da sequência didática. Finaliza-se o capítulo, expondo os procedimentos metodológicos da pesquisa.

3.1 A ENGENHARIA DIDÁTICA

Para iniciar os procedimentos, define-se a Engenharia Didática como o referencial metodológico, justificando a apresentação nesta pesquisa. Abordaram-se, ainda, algumas características importantes desta metodologia, bem como a importância que ela representa no contexto da Educação Matemática.

Desenvolveu-se esta pesquisa baseada nas conjecturas da Engenharia Didática segundo Artigue (1996) como referencial metodológico, tendo por finalidade analisar situações didáticas da matemática relacionadas a parte experimental em sala de aula, com intuito de compreender as relações entre a investigação e a ação do sistema de ensino.

Neste estudo, foi elaborado, aplicado e analisado uma sequência didática com o objetivo de contribuir para a compreensão dos alunos do 3° ano do ensino médio acerca de uma abordagem que inclui inicialmente as representações algébricas para a classificação de sistemas lineares $m \times n$ com o auxílio do software GeoGebra 6.0.400.0-offline.

Ressaltou-se aqui que a escolha pelo software GeoGebra vincula-se ao fato de ser este um software livre, intuitivo e por ter a potencialidade de gerar gráficos em três dimensões e rodar nos principais sistemas operacionais de computadores que são Windows, Mac OS X e Linux, além das plataformas dos sistemas móveis como: Android e IOS.

A Engenharia Didática, conforme Artigue (1996), compreende as seguintes fases: análises prévias ou preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação e análise *a posteriori* e validação. As análises preliminares têm embasamento no quadro teórico didático geral e nos conhecimentos didáticos já abordados quando da escolha e levantamento sobre o assunto a ser estudado. Neste trabalho, citou-se na introdução documentos oficiais como as Orientações curriculares para o ensino médio (2008), os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (2005) e artigos como o de Santaella (2012).

A fase de concepção e análise *a priori* consiste na elaboração experimental da ação em sala de aula. Cabe ao aluno o papel principal; e ao professor, o papel da retomada das questões discutidas. Segundo Machado (2008),

> [...] fica claro que a análise a priori objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: descritivo e previsivo. Não há nela, tradicionalmente, lugar para o papel do professor, que, quando aparece, é simplesmente no aspecto descritivo. (MACHADO, 1996, p. 244).

Nessa fase, o pesquisador opta por variáveis pertinentes ao tema sobre o qual se pesquisa, que lhe propicia fazer uma retomada e aprofundar-se a respeito dos dados durante o estudo.

Almouloud (2007) ressalta que as situações problemas devem ser desenvolvidas de modo a permitir ao aluno agir, expressar-se, refletir e evoluir por iniciativa própria de forma a adquirir novos conhecimentos, enquanto o papel do professor é o de mediador e orientador.

Segundo Machado (2008), a fase de *experimentação* é a da realização da engenharia com uma certa população de alunos. Ela se inicia no momento em que se dá o contato professor/pesquisador com tal população de alunos, objeto da investigação.

Na aplicação e na análise da sequência, devem-se prever os instrumentos de coleta de dados, organizar e verificar as produções dos alunos, bem como estudar modificações possíveis no estudo proposto, nos fundamentos teóricos e metodológicos, averiguar os principais resultados em relação à questão de pesquisa e retomar o problema, com síntese das conclusões e das avaliação quanto às limitações de pesquisa.

A análise *a posteriori* é o conjunto de resultados que se pode tirar da exploração dos dados recolhidos durante a experimentação. A análise se apoia no conjunto desses dados recolhidos durante a experimentação, que é o momento de colocar em funcionamento todo o dispositivo construtivo, corrigindo-o quando as análises locais do desenvolvimento experimental identificando-se tal necessidade.

Nessa fase, analisou-se a produção dos sujeitos que dela participaram por meio de protocolos, fotos e gravações em áudio sendo comparados os dados coletados com a análise *a priori*. Baseou-se a validação da pesquisa na confrontação entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*.

3.2 MÉTODO DE ESCALONAMENTO

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008) sugerem o uso do método de escalonamento por apresentar operações elementares, bem como a discussão de suas soluções.

> A resolução de sistemas $2x2$ ou $3x3$ também deve ser feita via operações elementares, com discussão das diferentes situações. As simples apresentações de equações sem explicações fundadas em raciocínio lógico devem ser abandonadas pelo professor. (BRASIL, 2008, p. 78).

Portanto, torna-se fundamental o professor utilizar, em suas aulas, os processos de resolução alicerçados em operações elementares para resolução e discussão de sistemas lineares.

Nessa questão de pesquisa, propõe-se desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática, objetivando classificar um Sistema Linear a fim de se utilizar ferramentas algébricas, método do escalonamento e por meio de ferramentas computacionais, como o software GeoGebra, sendo apresentado o software no próximo tópico.

GeoGebra foi escolhido por ser um software de fácil manuseio; ocupar pouca memória no computador, tablete ou smartphone; possibilitar o trabalho tanto no R^2 quanto no R^3 e ser um sistema livre que roda nas mais diferentes plataformas. Para fazer uso do software, criou-se uma sequência com orientações e ferramentas necessárias para a representação no registro gráfico de um ponto tanto em duas quanto em três dimensões, tendo em vista a representação de uma reta definida por uma equação linear ou fornecendo-se dois pontos distintos.

Dando continuidade, mostra-se a representação de um plano no espaço por meio de uma equação linear. Torna-se fundamental ressaltar que, mediante a dificuldade da representação gráfica de planos no espaço tridimensional, é fundamental a utilização de uma ferramenta computacional nesta pesquisa.

3.3 O SOFTWARE GEOGEBRA

Atualmente, as tecnologias fazem parte do cotidiano e, muitas vezes, nem se percebe que há bem pouco tempo era-se tecnologicamente limitado. Facilmente, constata-se que a computação trouxe significativas transformações à sociedade, tornando quase impossível imaginar o dia a dia sem a utilização do computador. Na educação, ainda se está em um processo de adaptação, como toda mudança, aprende-se muito, vence-se preconceitos frente à utilização de novas tecnologias.

Como professores, aprende-se a não temer a utilização das tecnologias, haja vista que elas serão úteis no processo de ensino e aprendizagem. Aprende-se a saber fazer, a saber utilizá-las, uma vez que são parceiras nas atividades profissionais.

Kenski (2006, p. 84) nos diz que

> chegamos então a um outro momento. Ainda não sabemos muito sobre as novas tecnologias. Elas se alteram velozmente. Sempre há inovações, sempre há o que aprender. Ainda sentimos insegurança, mas aprendemos a ousar, a ir além, a “aprender fazendo” ou “aprender pelo erro”, como diziam nossos antigos e queridos teóricos educacionais. Curiosidade, ousadia, parceria, tentativas mil até acertar... e nos orgulhamos quando conseguimos alcançar nossos intentos com o auxílio das ferramentas tecnológicas. Pequenos desafios e vitórias cotidianas que nos habilitam a novas ousadias, novos saltos.

Cotidianamente, percebem-se as dificuldades entre os alunos para construírem manualmente os gráficos, que representam a conversão de registro de um sistema linear da forma algébrica para forma gráfica. Esse obstáculo compromete a aprendizagem, visto que no ambiente de sala de aula estuda-se somente o conceito e alguns métodos de resolução, ficando obscura a compreensão da sua classificação e do significado geométrico pela via gráfica. Portanto, o uso da ferramenta computacional mostrou-se importante na visualização dos gráficos e na compreensão da classificação quanto às soluções desses.

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na

> possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. (DUVAL, 2003, p.14).

A possibilidade do uso de novas tecnologias em sala de aula, um software ou qualquer objeto de aprendizagem, pode mudar a orientação do ensino de matemática. A utilização destes novos recursos, coloca-nos diante de um vasto campo de possibilidades para a realização de experimentos e práticas pedagógicas que seriam impossíveis sem o uso dessas ferramentas.

> O uso de computadores força, não somente apenas a reconhecer na área de experimentos uma fonte de ideias matemáticas e um campo para ilustração de resultados, mas também um lugar onde permanentemente ocorrerá confrontação entre teoria e prática. Isso coloca um problema, que ocorrerá no treinamento de professores tanto quanto de estudantes, de estimular a atitude experimental (observação, teste, controle de variáveis...) ao lado, e no mesmo nível, da atitude matemática (hipótese, prova, verificação...). (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 110).

Para tal, utilizou-se o programa matemático GeoGebra na versão 6.0.400.0-offline, como ferramenta de ensino das interpretações geométricas de sistemas lineares.

O GeoGebra é um programa matemático livre, podendo ser instalado em computadores, celulares e tabletes por meio do endereço eletrônico http://www.geogebra.org. Tem por objetivo principal fazer com que o estudo da matemática seja mais dinâmico e de fácil entendimento, fazendo com que desperte o interesse do aluno pela busca constante do conhecimento matemático. Trata-se de um programa que pode ser utilizado nos vários níveis de ensino e reúne uma quantidade bastante significativa de ferramentas que engloba a geometria, a álgebra e o cálculo. O GeoGebra na sua versão 6.0.400.0-offline tem um diferencial que amplia sua base de visualização que é a sua janela de tridimensionalidade (janela 3D). É um programa de simples manuseio devido sua barra de menu explicar e orientar detalhadamente o que devesse fazer passando o cursor do mouse sobre o botão, sendo assim os alunos têm a possibilidade de criar ou construir o que desejam de forma autônoma.

3.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente, procurou-se a direção do Colégio para solicitar a permissão de citar o nome da instituição na pesquisa e, também, para explicar que a pesquisa seria realizada com consentimento dos alunos do 3° ano do ensino médio. Realizou-se a pesquisa em momentos que não afetaram o desenvolvimento da grade curricular regular de horários; tratando-se, portanto, de uma atividade extracurricular. Informou-se a direção de que os registros do desenvolvimento desta pesquisa seriam realizados por meio de protocolos, fotos e gravações de áudio (No apêndice A, encontrasse a autorização da instituição de ensino para a realização da pesquisa e no apêndice B, o termo de autorização dos alunos para essa participação).

Apresentou-se para a coordenação do colégio um cronograma em que se reservava uma sala de aula, bem como garantisse que não ocorreria nenhum choque com as atividades regulares destes alunos previstas em calendário escolar.

Para a realização desta pesquisa, escolheu-se o 3° ano do ensino médio, turma composta por 27 alunos regularmente matriculados. A escolha desta turma ocorreu, porque estes alunos já tiveram este conteúdo no 2° ano do ensino médio, dessa forma poder-se-ia averiguar se a conversão de registros com a utilização do software GeoGebra proporcionaria mais aprendizado ao tema proposto.

Após conversa com toda a turma e explicação sobre os objetivos dessa pesquisa, oito alunos se dispuseram a participar deste trabalho. Estes alunos foram divididos em 4 duplas, as quais foram nomeadas como: dupla A, dupla B, dupla C e dupla D.

Para o melhor desenvolvimento desta sequência didática, fez-se uma divisão em partes da sequência construída; primeiramente, houve um encontro em que se buscou familiarizar os sujeitos da pesquisa com o software GeoGebra, ferramenta utilizada no desenvolvimento da sequência. Posteriormente, trabalhou-se o estudo da solução de uma equação do 1º grau de duas variáveis e sua representação gráfica, estabelecendo relações de pertinência ou não de um ponto a uma reta; em seguida, os alunos trabalharam com sistemas de equações em duas formas: geométrica e algébrica com o intuito de verificar quanto à compreensão deles acerca de suas representações e realizar as conversões entre seus registros.

Ainda nesse momento, apresentaram-se sistemas com apenas uma solução, com infinitas soluções e, também, sistemas que não possuiam soluções. Dando continuidade, trabalhou-se a mesma metodologia com equações lineares com três variáveis, abordando situações que colocavam os sujeitos pesquisados diante dos três tipos de classificação para sistemas lineares (possível e determinado - SPD, possível e indeterminado - SPI e impossível - SI), desafiando-os a classificá-los quanto ao número de soluções.

4 ESTUDOS INICIAIS

Neste capítulo, salientam-se as recomendações dadas pelos documentos oficiais; leituras sobre o tema, a revisão bibliográfica. Além disso, será realizada uma breve revisão matemática acerca do tema sistemas lineares; far-se-á a análise de dois livros didáticos e da apostila utilizada pelo colégio, uma vez que é campo de pesquisa no qual o pesquisador leciona a respeito do tema sistemas lineares; e justificativa pela opção do uso do método de escalonamento para a resolução e discussão do sistema linear $m \times n$ e pelo uso do software GeoGebra.

4.1. ORIENTAÇÕES DOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Embasado em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (BRASIL, 2002) e nas Orientações Curriculares para o Ensino médio (BRASIL, 2008), verificaram-se as recomendações transmitidas aos professores em relação ao estudo de sistemas lineares.

A escolha do tema: **conceitualização dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software GeoGebra** vem ao encontro das recomendações existentes nos documentos oficiais, que destacam a importância na seleção dos conteúdos, sugerindo:

> a escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um “fazer matemático” por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento. (BRASIL, 2008, p.70).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (BRASIL, 2002), sabe-se da necessidade de se partir do conhecimento prévio dos alunos. Portanto, na abordagem do tema Sistemas Lineares, é fundamental iniciar a sequência didática interpelar, primeiramente, a respeito dos sistemas lineares $2x2$, tema já abordado no ensino fundamental, para posteriormente se trabalhar com os sistemas lineares $3x2$ e $3x3$.

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os

> conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para os sistemas 3 por 3 [...]. (BRASIL, 2002, P.122).

Observando as Orientações Curriculares para o Ensino médio (BRASIL, 2008), alicerçou-se a sequência didática de tal forma que se preconizasse não apenas a resolução de Sistemas Lineares por métodos algébricos, mas também se abordassem os métodos gráficos. No que se refere aos métodos algébricos de resolução de Sistemas Lineares, a sequência desta pesquisa utilizará o método do escalonamento como forma de determinação para a solução do sistema linear, assim como a classificação, pois trata-se de um método que emprega as operações elementares.

> No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema 2X2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2X3 ou 3X3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3X3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes. (BRASIL, 2008, p.77-78).

O emprego do software GeoGebra na sequência didática desta pesquisa também encontra fundamento nas Orientações Curriculares para o Ensino médio (BRASIL, 2008) em que se verifica a existência de softwares nos quais os alunos podem explorar diversos conceitos matemáticos. Estes softwares apresentam ferramentas que propiciam, de forma intuitiva, o processo que caracteriza o pensamento matemático, ou seja, os alunos fazem experimentos, esboçam ideias e desenvolvem estratégias para resolver problemas. Para o estudo de sistemas lineares, tem-se uma grande variedade de softwares, entre eles o GeoGebra. Esse recurso facilita a exploração algébrica e gráfica, de forma simultânea, facilitando o aluno a entender conceitos, bem como o significado geométrico da solução de um sistema linear.

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. Nessa situação, o professor deve estar preparado para interessantes surpresas: é a variedade de soluções que podem ser dadas para um mesmo problema, indicando que as formas de pensar dos alunos podem ser bem distintas; a detecção da capacidade criativa de seus alunos, ao ser o professor surpreendido com soluções que nem imaginava, quando pensou no problema proposto; o entusiástico engajamento dos alunos nos trabalhos, produzindo discussões e trocas de ideias que revelam uma intensa atividade intelectual. (BRASIL, 2008 p.89).

Portanto, fundamentados em documentos oficiais, abordar-se-á, em uma sequência didática, um tema que faz parte do conteúdo programático do ensino médio, Sistemas Lineares de ordem mxn e para tal será utilizado o software GeoGebra.

A fim de explicar a sequência didática, exibem-se, na revisão bibliográfica, as leituras que embasaram o desenvolvimento desta pesquisa.

4.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Pesquisas recentes apontam para a importância existente entre as conversões dos registros de representação de um objeto matemático e a aprendizagem efetiva deste objeto.

Fazendo uma busca nos repositórios existentes que armazenam trabalhos que discutem assuntos dessa natureza, encontra-se a dissertação de mestrado de SILVA (2014). Nessa, o autor discute uma proposta de uma sequência didática em que se respalda nas conversões dos registros de representações da linguagem algébrica ou da linguagem natural para a linguagem geométrica e aplica-se a alunos do ensino fundamental. A proposta discute a existência (ou não) das soluções de sistemas lineares *2x2* com alunos do 7º ano do ensino fundamental. Em sua fundamentação, o autor ressalta que

> quanto mais registros de um mesmo objeto o aluno for capaz de mobilizar, mais facetas do objeto ele será capaz de perceber. Com isso, ele passa a ser capaz de evitar que se tome a representação como sendo o objeto, já que ele é capaz de perceber que o objeto em questão apresenta propriedades que não podem ser vistas numa determinada representação. É somente através do uso de diversas representações que ele tem à sua disposição que é possível abarcar o objeto como um todo. (SILVA, 2014, p. 25).

Relacionando-o com o trabalho que se vem construindo, acredita-se que a fala supracitada contribui para se acreditar que efetivamente um trabalho ancorado na conversão dos registros colabora para uma maior compreensão no que se refere à classificação dos Sistemas Lineares.

Ao finalizar o trabalho, o autor da dissertação intitulada Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau com Duas Variáveis Usando o Software GeoGebra, valida a proposta apresentada e faz uma reflexão interessante acerca da importância desse trabalho na sua vida como docente. SILVA (2014, p. 132) coloca que “compreender, respaldados no uso das representações semióticas, que o aprendizado se efetiva nas modificações dos registros, nos possibilita rever nossa prática enquanto professores”.

Ainda, a dissertação de mestrado Registros de Representação Semiótica no Estudo de Sistemas Lineares no Ensino Médio, apresentada por BOEMO (2015) ao Programa de Pós-graduação em Educação

Matemática e Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria corrobora com o trabalho que se vem realizando.

A autora faz um estudo em uma escola da região sobre a importância das conversões de registros de representações no ensino de Sistemas Lineares no ensino médio. Ela realiza um estudo em um livro didático utilizado na escola naquele momento e conclui que tal material se preocupa com as conversões dos registros e trabalha as diversas representações do objeto Sistemas Lineares. No entanto, ao realizar um estudo nas anotações trabalhadas pelos alunos (feitas pelos professores da disciplina na lousa), é evidente a preocupação ao ver a importância dada ao estudo do sistema apenas na forma algébrica, sem a preocupação da conversão dos registros.

Boemo (2015) ainda aplica três sequências de atividades desenvolvidas por ela, que levantam elementos a fim de realizar um estudo que relacione as conversões do objeto matemático Sistemas Lineares e a compreensão dos alunos. Conclui, com a aplicação dessa sequência, que os alunos naturalmente sentiam-se mais confiantes em trabalhar o registro algébrico do que atividades que requeriam o tratamento em outro sistema representacional. Isso é facilmente compreendido, quando se lembra de que os professores priorizaram o estudo do conteúdo apenas na forma algébrica. Ela coloca, inclusive, que os alunos não associam a forma de representação gráfica com a algébrica e que apresentam sérias dificuldades em converter da linguagem natural para qualquer outro tipo de representação.

A autora ainda faz uma reflexão interessante sobre a importância da mobilização das representações quando se estuda matemática.

> Desse modo, enquanto existem áreas do conhecimento para as quais a língua natural e as imagens são suficientes para garantir o acesso aos seus objetos, na Matemática essas duas representações não bastam para que se tenha acesso aos seus objetos. Sendo assim, o ensino dos conceitos matemáticos pode e deve ser trabalhado por meio da mobilização de distintas representações. (BOEMO, 2015, p. 41).

Pantoja (2008) também realiza um estudo sobre o assunto ao apresentar a dissertação A Conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares ao

Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará.

A autora estuda a consistência da aplicação de uma sequência didática para o ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares na qual se estabelece uma conexão entre o método da substituição e o método do escalonamento. Realizou-se a pesquisa com alunos do ensino médio de uma escola da rede pública estadual da cidade de Belém.

Embora o trabalho apresentado pela autora não esteja centrado na conversão dos registros para a forma gráfica, ela apresenta importantes reflexões acerca da importância das conversões para o aprendizado do aluno:

> Apesar da conversão, sob o ponto de vista matemático, não efetuar nenhum papel intrínseco no processo de justificação e prova, ela é de fundamental importância, sob o ponto de vista cognitivo, pois interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Na realidade, segundo a Teoria dos Registros de Representação, é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber. (PANTOJA, 2008, p. 28).

Ressalta-se para que se aborde aqui apenas um recorte das pesquisas que discutem a importância das Conversões dos Registros de Representações Semióticas dos objetos matemáticos e as implicações que essas apresentam no ensino da disciplina. Há muito mais para estudar, haja vista que novas pesquisas sejam desenvolvidas nesse sentido e mais estudos com base nas produções já realizadas.

5 ANÁLISE DE LIVROS

Esse capítulo destina-se a fazer uma revisão bibliográfica dos Sistemas de Equações Lineares e sua abordagem nos livros didáticos.

5.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Neste tópico, pretende-se fazer uma rápida revisão do estudo de sistemas de equações lineares. Mesmo não sendo o objetivo de pesquisa realizar um estudo aprofundado de álgebra linear, verifica-se a necessidade de se definirem alguns tópicos sobre sistemas de equações lineares. Utilizar-se-á como referência o livro *Álgebra Linear*, 2° edição, dos autores Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle.

5.1.1 Equação linear

Equação linear é uma equação da seguinte forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, na qual $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ são variáveis; $a_1, a_2, a_3,..., a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis, e b é o termo independente.

5.1.2 Solução de uma equação linear

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem a solução. Esses valores são denominados raízes da equação linear.

5.1.3 Sistemas de equações lineares

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{211}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

5.1.4 Solução de um sistema linear

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema linear em identidade, isto é, que satisfazem a todas as equações do sistema, constituem a solução. Esses valores são denominados raízes do sistema de equações lineares.

5.1.5 Sistema compatível ou possível

Diz-se que um sistema de equações lineares é compatível ou possível, quando se admite solução, isto é, quando tem raízes.

5.1.6 Sistema determinado

Um sistema compatível ou possível é determinado quando admite uma única solução.

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$ é um sistema possível e determinado, S.P.D., pois tem como solução unicamente: x=7 e y=3

5.1.7 Sistema indeterminado

Um sistema compatível ou possível é indeterminado quando admite mais de uma solução (na verdade, admite infinitas soluções).

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$ é um sistema possível e indeterminado, S.P.I., pois tem infinitas soluções:

Tabela1- Possíveis soluções do sistema linear.

x	5	1	3	0	-1	15
y	0	2	1	2,5	3	-5

Fonte: Os autores.

5.1.8 Sistema incompatível ou impossível

Diz-se que um sistema de equações lineares é incompatível ou impossível quando não admite solução.

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=8 \end{cases}$ é impossível, S.I., pois a expressão $x+y$ não pode ser simultaneamente igual a 2 e igual a 8 para mesmos valores de x e y.

5.1.9 Sistemas equivalentes

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

Exemplo:

Os sistemas

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 3x+2y=7 \\ -x+y=1 \end{cases}$$

são equivalentes porque admitem a mesma solução:

x=1 e y=2

5.1.10 Operações elementares e sistemas equivalentes

Um sistema de equações lineares se transforma num sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações elementares:

a) Permutação de duas equações.
b) Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.
c) Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

Este método chama-se, *MÉTODO DE GAUSS-JORDAN.*

Exemplo:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \rightarrow L1 \\ x-y=1 \rightarrow L2 = L1 - L2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \rightarrow L1 \\ 0x+2y=4 \rightarrow L2 = \frac{1}{2}.L2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=2 \end{cases}$$

É importante ressaltar que todos os sistemas constantes no desenvolvimento deste exercício são equivalentes, isto é, têm a mesma solução:

y=2 e x=3

5.1.11 Sistemas de M Equações Lineares com N Variáveis (para M ≠ N ou M = N)

O método para resolver um sistema de M equações lineares com N variáveis é semelhante ao método de Gauss-Jordan, com a diferença de que a matriz dos coeficientes das variáveis não pode ser transformada na matriz unidade, porque ela é uma matriz retangular. Entretanto, o procedimento inicial é o mesmo, pois transforma-se no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, no qual i=j, e em zero os demais elementos das colunas em que se situam esses a_{ij}. Depois de realizadas algumas considerações, encontrar-se-á a solução do sistema.

5.1.12 Característica de uma Matriz

Quando se dispõe de uma matriz ampliada um sistema de M equações lineares com N variáveis e utiliza-se o método exposto anteriormente para a solução do sistema, isto é, quando se transforma no número 1, por meio de operações adequadas, cada elemento a_{ij}, para i=j $(a_{11}, a_{22,} ...)$ e em zeros os demais elementos das colunas em que se situam esses elementos a_{ij}, diz-se que a matriz inicial foi transformada numa matriz em forma de escada. A matriz ampliada do sistema será designada por A, a matriz na forma de escada por B e a matriz dos coeficientes das variáveis por V.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_1 = \frac{1}{2}.L_1$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = \frac{1}{2}.L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Portanto, há três matrizes a considerar:

$$A = \left\langle \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle$$ (Matriz ampliada do sistema)

$$B = \left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\rangle$$ (Matriz em forma de escada ou escalonada)

$$V = \left\langle \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\rangle$$ (Matriz dos coeficientes das varáveis)

Examinando-se as matrizes B e V, verifica-se que

a) a matriz B tem 2 linhas com elementos não todos nulos;

b) a matriz V (contida em B) tem 2 linhas com elementos não todos nulos.

Chama-se característica de A (da matriz ampliada do sistema), e se representa por Ca, ao número de linhas com elementos não todos nulos de B (matriz em forma de escada equivalente a A).

No exemplo apresentado, Ca=2, porque a matriz B tem duas linhas com elementos não todos nulos.

Intitula-se característica de V (da matriz dos coeficientes das variáveis contida em B), e se representa por Cv, ao número de linhas com elementos não todos nulos de V).

No exemplo apresentado, Cv=2, porque a matriz V tem duas linhas com elementos não todos nulos.

Como se vê, nesse exemplo, B representa um sistema de duas equações (m=2) com duas variáveis (n=2) e Ca=Cv. Nesse caso, o sistema é compatível e determinado.

Logo, pode-se definir da seguinte forma:

A característica Ca de uma matriz ampliada A, que representa um sistema de m equações lineares com n varáveis, não pode ser menor que a característica Cv da matriz V dos coeficientes das variáveis contidas na matriz B reduzida à forma de escada.

Quando Ca > Cv, o sistema é incompatível.

Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada.

C não pode ser maior que n (sendo n o número de variáveis).

Quando C = n, o sistema é compatível e determinado.

Quando C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

5.1.13 Sistema linear homogêneo

Quando num sistema de equações lineares os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado homogêneo. Todo sistema linear homogêneo tem pelo menos uma solução; essa solução, denominada solução trivial, é qualquer que seja o sistema, $x_i = 0$, x_i representando as variáveis e $i = 1,2,3,...,m.$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

5.2 ABORDAGEM DE SISTEMAS LINEARES EM LIVROS DIDÁTICOS

Primeiramente, menciona-se que se entende o livro didático como uma ferramenta importante para o aprendizado dos alunos, pois o texto didático servirá como um apoio na tarefa de formação dos alunos do ensino médio. Muitas vezes, é nesse material que o aluno procura conceitos e minimiza as dificuldades que não foram totalmente superadas em sala de aula com o professor.

Ainda hoje, o livro didático ocupa um papel central dentro da escola atual, mesmo coexistindo com inúmeros outros recursos tecnológicos, ele é um dos principais materiais do ensino e da aprendizagem no contexto escolar. De acordo com Costa e Allevato (2010, p.2), o livro didático tem a função de contribuir para o ensino aprendizagem, sendo considerado “um interlocutor, isto é, um componente que dialoga tanto com o professor quanto com os alunos”. Tornando-se de fato uma ferramenta importante de mediação de conhecimento.

Buscou-se também nesse trabalho discutir a importância que as representações desempenham no aprendizado dos estudantes; portanto, o livro didático, deve ser um facilitador dessas conversões. Além disso, é preciso que o livro aborde um objeto matemático sob diferentes pontos de vista e trabalhe as conversões entre os registros de representações desse objeto. O conteúdo Sistemas Lineares, por exemplo, pode ser representado nas mais diferentes linguagens: linguagem natural, linguagem algébrica, linguagem gráfica, entre outras.

Sabe-se que os livros se encontram nas instituições de ensino com o propósito de ser um aporte na promoção de uma educação de qualidade. Para isto, porém, ele deve oportunizar articulações não lineares, entre os conteúdos trabalhados, evitando tratá-los de maneira isolada e desconectada dos demais conteúdos.

Nessa seção, buscou-se

a) constatar os métodos de resolução abordados pelo autor;

b) verificar a relevância dada pelos autores às conversões dos registros do conteúdo Sistemas Lineares;

c) diagnosticar se promovem essas conversões para a forma geométrica, matricial e se discutem a classificação do sistema por meio desses tipos de resolução.

Cabe ressaltar que no cotidiano da unidade escolar em que se aplica a sequência, os alunos não estão habituados ao uso dos livros didáticos, uma vez que a escola trabalha com apostilas e, portanto, analisar-se-á, também, a apostila utilizada nesta unidade escolar.

Usou-se como critério para a seleção dos livros a disponibilidade deles em acervo na biblioteca da unidade escolar em que se realizou a pesquisa, assim como a própria apostila utilizada pelos alunos. Faz-se importante destacar também que alguns exercícios propostos na sequência didática foram adaptados desses livros didáticos. A Tabela 2 apresenta os livros e apostila selecionados para análise:

Tabela 2- Livros didáticos utilizados para análise.

Nº do livro	**Autor**	**Título**	**Editora**	**no**
Livro 1	Gelson Iezzi... [et al.]	Matemática: ciência e aplicações, vol.2: ensino médio	Saraiva	013
Livro 2	Antônio dos Santos Machado	Aprender e aplicar matemática, vol.2	Atual	011
Livro 3	Alexander dos Santos Dutra e Ingrid Regina Pellini Valenço	Matemática 8	Casa Publicador a Brasileira	012

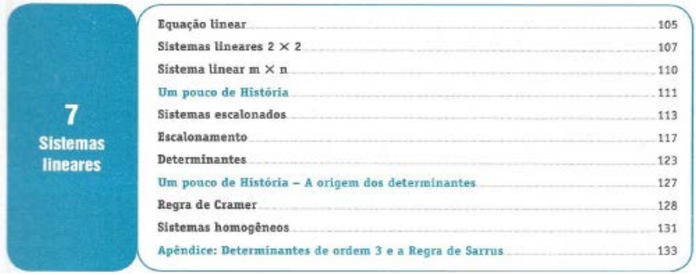
Fonte: Os autores.

Para facilitar a leitura, far-se-á a análise dos dois livros e da apostila utilizada pela turma escolhida separadamente e, ao final, emitir-se-ão as considerações sobre a apreciação realizada.

5.2.1 Matemática: ciência e aplicações, vol.2: ensino médio – Gelson Iezzi ...[et al.] - 2013

Neste livro, os autores destinam todo o capítulo 7, da página 105 a 133, para abordar o tema sistemas lineares. Conforme mostra a figura 2 abaixo:

Figura 2:Sumário do livro 1.

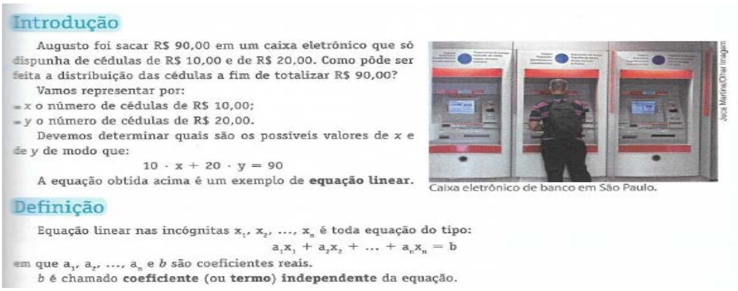


7 Sistemas lineares

Fonte: Livro 1, p. 5.

Para iniciar o capítulo 7, os autores problematizam uma situação cotidiana a qual modelam um problema matematicamente por meio de uma equação linear. Observa-se que os autores se utilizam de uma metodologia que preconiza contextualizar o conteúdo abordado, para posteriormente introduzir a definição de equação linear. Conforme se vê na Figura 3.

Figura 3 - Problematização de uma equação linear e definição de uma equação linear.



Introdução

Augusto foi sacar R$ 90,00 em um caixa eletrônico que só dispunha de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00. Como pôde ser feita a distribuição das cédulas a fim de totalizar R$ 90,00?

Vamos representar por:

- x o número de cédulas de R$ 10,00;
- y o número de cédulas de R$ 20,00.

Devemos determinar quais são os possíveis valores de x e de y de modo que:

$$10 \cdot x + 20 \cdot y = 90$$

A equação obtida acima é um exemplo de **equação linear**.

Juca Martins/Olhar Imagem

Caixa eletrônico de banco em São Paulo.

Definição

Equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ é toda equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n$ e b são coeficientes reais.

b é chamado **coeficiente** (ou **termo**) **independente** da equação.

Fonte: Livro 1 p. 105.

Na sequência, o autor apresenta a definição da solução de uma equação linear (Figura 4), trazendo casos que se têm como solução um par ordenado ou uma terna ordenada, conforme se vê na Figura 5.

Figura 4 - Solução de uma equação linear.

Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ se a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ for verdadeira, isto é, quando, na equação dada, substituímos x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n e, após efetuarmos as operações indicadas, obtemos uma sentença verdadeira.

Fonte: Livro 1 p. 106.

Figura 5 - Exemplo de solução de uma equação linear.

- A terna ou tripla ordenada $(-1, -1, 2)$ é solução da equação $2a - 3b + c = 3$, pois $2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) + 2 = -2 + 3 + 2 = 3$.

Fonte: Livro 1 p. 106.

Ao final deste tópico, os autores apresentam uma lista com 10 exercícios. Na sequência do capítulo, aborda-se o tópico sistemas lineares $2x2$. Mantendo a mesma metodologia, os autores primeiramente apresentam um problema que contextualiza o tema abordado, para na sequência definir um sistema linear dessa natureza. Posteriormente, eles resolvem o sistema formulado no problema que contextualiza o tema, utilizando os métodos de comparação e adição. É ressaltado pelo autor que os dois métodos já foram abordados no ensino fundamental.

A seguir, aborda-se um novo tópico: a interpretação geométrica e a classificação em que se apresentam três exemplos resolvidos em que se aborda cada equação linear do sistema separadamente e realiza um paralelo com a lei de formação de uma função linear, construindo na sequência o gráfico de cada uma das funções lineares. A partir desta conversão, os autores utilizam-se das relações entre as retas – concorrentes, paralelas e coincidentes – para determinarem se existe a solução e classificam o sistema na sequência. Um recorte pode ser visto na Figura 6.

Figura 6 - Interpretação geométrica e classificação de um sistema linear.

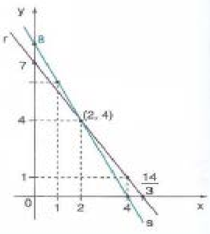
Interpretação geométrica e classificação

Além do processo algébrico, um sistema linear 2 × 2 pode ser resolvido graficamente. Acompanhe as situações a seguir.

I. Voltemos ao exemplo de Tina.

A equação linear $3x + 2y = 14$ é equivalente a $y = \frac{14 - 3x}{2}$, isto é, $y = -\frac{3x}{2} + 7$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta *r* representada ao lado. Já a equação linear $2x + y = 8$ equivale a $y = -2x + 8$, que é a lei de uma função afim cujo gráfico é a reta *s*. As retas *r* e *s* interceptam-se unicamente no ponto P (2, 4), isto é, o par ordenado (2, 4) é a única solução do sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, pois verifica, simultaneamente, as duas equações.

Nesse caso, dizemos que o **sistema é possível e determinado (S.P.D.)**.



Fonte: Livro 1 p. 108.

Assim como no anterior, esse tópico é encerrado com uma lista composta por oito exercícios.

Diferente da metodologia utilizada anteriormente, a abordagem do tópico Sistema Linear *mxn* é realizada com a apresentação de três exemplos, conforme recorte identificado na figura 7.

Figura 7 - Sistema linear *mxn* .

Sistema linear m × n

Definição

Um conjunto de *m* equações lineares e *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado **sistema linear m × n**.

- $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ é um sistema linear com três equações e três incógnitas.

Fonte: Livro 1 p. 110.

Os autores apresentam, então, a definição da solução de um sistema de *n* incógnitas e resolvem dois exemplos.

Após a apresentação dos Sistemas Lineares de ordem *mxn*, os autores propõem a conversão de registro associando sistemas lineares com matrizes, como se vê na figura 8.

Figura 8 - Matrizes associadas a um sistema linear.

Matrizes associadas a um sistema

Podemos associar a um sistema linear duas matrizes cujos elementos são os coeficientes das equações que formam o sistema.

Observe os sistemas lineares a seguir:

- Ao sistema $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ podemos associar as matrizes $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, chamada **matriz incompleta** formada pelos coeficientes das incógnitas, e a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, chamada **matriz completa**.

Fonte: Livro 1 p. 111.

É possível também perceber que o autor se preocupa com a transformação da forma matricial para a forma com equações e chaves, como se verifica na Figura 9.

Figura 9 - Representação matricial de um sistema linear.

– A equação matricial $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 7\end{pmatrix}$ é outra forma de representar o sistema $\begin{cases}x + y + z + w = 1\\ x - y - z + 2w = 7\end{cases}$.

Fonte: Livro 1 p. 112.

O tópico encerra-se com uma lista composta por seis exercícios. Os autores apresentam a seguir sistemas escalonados e sua resolução. Como se verifica na Figura 10.

Figura 10 - Sistemas escalonados.

Seja o sistema escalonado: $\begin{cases}x - 2y + z = -5\\ y + 2z = -3\\ 3z = -6\end{cases}$

Partindo da última equação, obtemos *z*. Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos *y*. Por fim, substituindo *y* e *z* na 1ª equação, obtemos *x*.

Acompanhe:

$$3z = -6 \Rightarrow z = -2 \quad (1)$$

$$y + 2\cdot(-2) = -3 \Rightarrow y - 4 = -3 \Rightarrow y = 1 \quad (2)$$

$$x - 2\cdot 1 + (-2) = -5 \Rightarrow x - 4 = -5 \Rightarrow x = -1 \quad (3)$$

Assim, a solução do sistema é $(-1, 1, -2)$.

Fonte: Livro 1 p. 113.

Este tópico é finalizado com a apresentação de uma lista de cinco exercícios. Na sequência, abordam-se os Sistemas Lineares não escalonados por meio da prática metodológica de inserir o tópico mediante um problema de aplicação prática. Dando prosseguimento ao tópico, aborda-se o tema Sistemas Lineares Equivalentes (Figura 11) e na sequência são indicados os procedimentos para o escalonamento de um Sistema Linear (Figura 12 e Figura 13).

Figura 11 - Sistemas equivalentes.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas lineares, S_1 e S_2, são equivalentes se toda solução de S_1 é solução de S_2, e vice-versa.

Os sistemas S_1: $\begin{cases}x + y = 2\\ x + 2y = 1\end{cases}$ e S_2: $\begin{cases}x - y = 4\\ 3x + 2y = 7\end{cases}$, por exemplo, são equivalentes, pois ambos admitem apenas o par $(3, -1)$ como solução.

Fonte: Livro 1 p. 117.

Figura 12: Procedimento para escalonamento de um sistema a).

Para isso, poderemos usar os seguintes procedimentos:

I. Multiplicar por k, $k \in \mathbb{R}^*$, os dois membros de uma equação qualquer do sistema.

II. Substituir uma equação do sistema pela soma dela, membro a membro, com alguma outra equação. Cada uma dessas equações pode ou não estar previamente multiplicada por um número real não nulo.

Fonte: Livro 1 p. 117.

Figura 13: Procedimento para escalonamento de um sistema b).

III. Trocar a posição de duas equações do sistema.

Observe que os dois primeiros procedimentos já foram usados quando estudamos a resolução de sistemas lineares 2×2.

Fonte: Livro 1 p. 118.

Após, exibem-se alguns exemplos resolvidos. Para ilustrar, realizou-se um recorte desses presente nas Figuras 14 e 15. É importante salientar que este é o único exemplo em que os autores se utilizam de uma conversão de registros para ratificar a classificação do sistema proposto.

Figura 14: Solução de um sistema por meio de escalonamento a).

Vamos escalonar e resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5. \\ -4x + y = -3 \end{cases}$

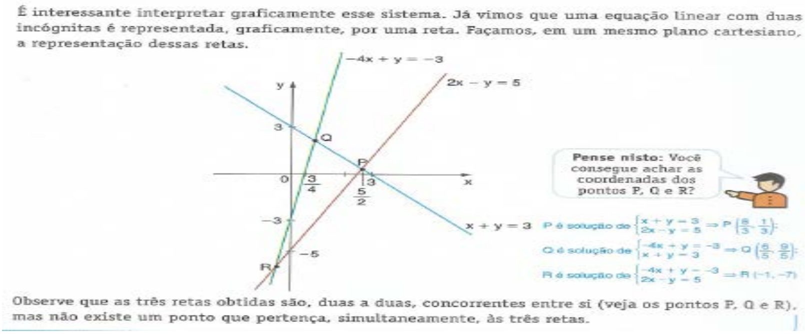
É preciso anular o coeficiente de x na 2ª e na 3ª equações. Temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -3y = -1 \leftarrow (-2) \times (1^{\text{a}}\text{ eq.}) + (2^{\text{a}}\text{ eq.}) \\ 5y = 9 \leftarrow (4) \times (1^{\text{a}}\text{ eq.}) + (3^{\text{a}}\text{ eq.}) \end{cases}$$

Esse sistema é impossível, pois a 2ª e a 3ª equações não podem ser satisfeitas simultaneamente. Assim, $S = \varnothing$.

Fonte: Livro 1 p. 120

Figura 15: Solução de um sistema por meio de escalonamento b).


É interessante interpretar graficamente esse sistema. Já vimos que uma equação linear com duas incógnitas é representada, graficamente, por uma reta. Façamos, em um mesmo plano cartesiano, a representação dessas retas.

P é solução de $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

Q é solução de $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$;

R é solução de $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow R(-1, -7)$

Observe que as três retas obtidas são, duas a duas, concorrentes entre si (veja os pontos P, Q e R), mas não existe um ponto que pertença, simultaneamente, às três retas.

Fonte: Livro 1 p. 121.

Este tópico é finalizado com a proposição de 11 exercícios. Dando seguimento ao capítulo, os autores abordam o assunto Determinantes. Como a proposta desta pesquisa está centrada na discussão de Sistemas Lineares, este objeto não será apresentado neste trabalho, uma vez que, nesse contexto, este tópico apenas fundamenta a resolução de Sistemas Lineares por meio da regra de Cramer.

Na sequência, os autores apresentam o método de Cramer para a resolução e para a classificação de Sistemas Lineares, cujo número de equações deve ser igual ao número de variáveis. Nessa discussão, os tipos de sistemas são divididos de duas formas: sistemas lineares $2x2$ e sistemas lineares $3x3$.

Como se pode observar na Figura 16, realiza-se a demonstração da regra de Cramer.

Figura 16: Demonstração da regra de Cramer para solucionar um sistema linear.

Demonstração:

Vamos construir um sistema equivalente a $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ usando o escalonamento:

Multiplicamos a 1ª equação por $(-c)$, $c \neq 0$, a 2ª equação por a, $a \neq 0$, e somamos:

$$\begin{array}{r} -\cancel{acx} - bcy = -ce \\ \cancel{acx} + ady = \ \ af \\ \hline (ad - bc)y = af - ce \end{array} \quad +$$

Obtemos:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ \underbrace{(ad - bc)}_{D}y = af - ce \end{cases}$$

O coeficiente de y, na 2ª equação do sistema escalonado, é igual a D (det M).

Como, por hipótese, $D \neq 0$, obtemos: $y = \dfrac{af - ce}{D}$. (1)

Note que $af - ce$ é o determinante da matriz obtida de M quando substituímos a 2ª coluna pela coluna dos eficientes independentes, isto é: $\begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$.

Representando $\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}$ por D_y em (1), obtemos:

$$\boxed{y = \frac{D_y}{D}}$$

Para obter o valor de x, substituímos y na 1ª equação do sistema escalonado:

$$ax + by = e \Rightarrow ax + b \cdot \frac{af - ce}{ad - bc} = e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (ad - bc)x + b \cdot (af - ce) = e \cdot (ad - bc) \overset{a \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ed - bf}{ad - bc} \quad (2)$$

Note que $ed - bf$ é o determinante da matriz obtida de M quando substituímos a 1ª coluna pela coluna s coeficientes independentes: $\begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}$.

Representando $\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix} = ed - bf$ por D_x em (2), obtemos:

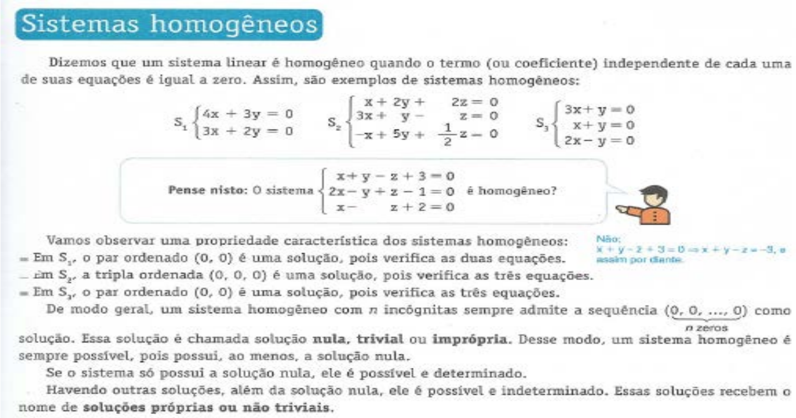
$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}}$$

Fonte: Livro 1 p. 121.

O capítulo é finalizado com a discussão de sistemas homogêneos (Figura 17) em que se realiza uma caracterização deste tipo de sistema, seguido de um comentário sobre as possíveis soluções de um sistema homogêneo e, posteriormente, sua classificação.

A seção é finalizada com dois exemplos resolvidos e uma lista composta com quatro exercícios.

Figura 17: Sistemas homogêneos.



Sistemas homogêneos

Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando o termo (ou coeficiente) independente de cada uma de suas equações é igual a zero. Assim, são exemplos de sistemas homogêneos:

$$S_1 \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ -x + 5y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Pense nisto: O sistema $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ é homogêneo?

Não: $x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow x + y - z = -3$, e assim por diante.

Vamos observar uma propriedade característica dos sistemas homogêneos:

- Em S_1, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as duas equações.
- Em S_2, a tripla ordenada (0, 0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.
- Em S_3, o par ordenado (0, 0) é uma solução, pois verifica as três equações.

De modo geral, um sistema homogêneo com n incógnitas sempre admite a sequência $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ zeros}})$ como solução. Essa solução é chamada solução **nula, trivial** ou **imprópria**. Desse modo, um sistema homogêneo é sempre possível, pois possui, ao menos, a solução nula.

Se o sistema só possui a solução nula, ele é possível e determinado.

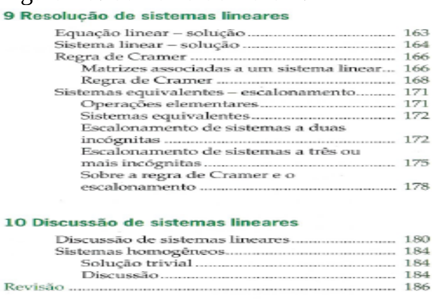
Havendo outras soluções, além da solução nula, ele é possível e indeterminado. Essas soluções recebem o nome de **soluções próprias ou não triviais**.

Fonte: Livro 1 p. 131.

5.2.2 Aprender e aplicar Matemática, vol.2 - Antônio dos Santos Machado – 2011

O livro 2 divide o tópico Sistemas lineares em dois capítulos: o capítulo 9 trata da resolução de sistemas lineares e o capítulo 10 aborda a discussão de sistemas lineares, como se observa na figura 18.

Figura 18: Sumário do livro 2.



9 Resolução de sistemas lineares

10 Discussão de sistemas lineares

Fonte: Livro 2 p. 5.

O capítulo 9 inicia utilizando-se de uma metodologia que primeiro traz um problema, contextualizando-o para ser, então, abordado equações lineares (Figura 19).

Figura 19: Abordagem de sistemas lineares.

A contagem centenária no basquete

No jogo de basquetebol os arremessos podem valer:

- 3 pontos, quando partem de fora da "linha dos 3 pontos" e acertam a cesta;
- 2 pontos, quando partem de dentro da "linha dos 3 pontos" e acertam a cesta;
- 1 ponto, para os lances livres acertados em cobrança de falta;
- 0 ponto, quando não acertam a cesta.

É possível fazer exatamente 100 pontos acertando 33 arremessos? E acertando 44 arremessos?

Em 33 arremessos o número máximo de pontos é $33 \times 3 = 99$; portanto não é possível fazer os 100 pontos.

Se forem 44 arremessos acertados, sendo *x* arremessos de 3 pontos, *y* de 2 pontos e *z* de 1 ponto, totalizando exatamente 100 pontos, temos duas equações que devem ser verificadas:

$$x + y + z = 44 \quad \text{e} \quad 3x + 2y + z = 100$$

Equações como essas são denominadas **equações lineares**.

Fonte: Livro 2 p. 163.

Na sequência, apresenta-se a definição de equações lineares, mostrando seus elementos e define-se o conjunto solução de uma equação linear (Figura 20).

Figura 20: Definição de equações lineares.

Equação linear — solução

Uma **equação linear a *n* incógnitas** sobre $\mathbb{R}$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_n x_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e b são números reais conhecidos e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas. Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são chamados **coeficientes** e b é o **termo independente**.

Uma solução da equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ para a qual a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots + a_n\alpha_n = b$ é verdadeira.

Conjunto solução ou **conjunto verdade** é o conjunto de todas as soluções da equação.

Uma equação linear a n incógnitas, $n > 1$, pode ser **indeterminada** (quando possui infinitas soluções) ou **impossível** (quando não possui solução).

Fonte: Livro 2 p. 163.

Encerra-se este tópico com alguns exemplos resolvidos (Figura 21 e Figura 22) e uma lista com oito exercícios.

Figura 21: Exemplo resolvido a).

Exemplos:

Na equação linear $3x + 2y + z = 100$:

- Os coeficientes são 3, 2 e 1 e o termo independente é 100.
- Para $x = 20$, $y = 15$ e $z = 10$, temos $3x + 2y + z = 3(20) + 2(15) + (10) = 60 + 30 + 10 = 100$. Logo, (20, 15, 10) é uma solução da equação.

Fonte: Livro 2 p. 163.

Figura 22: Exemplo resolvido b).

- Para $x = 10$, $y = 18$ e $z = 26$, temos $3x + 2y + z = 3(10) + 2(18) + (26) = 30 + 36 + 26 = 92$. Logo, (10, 18, 26) não é solução da equação.
- Podemos obter soluções da equação atribuindo valores a x e a y e, depois, calculando z. Por exemplo, para $x = 15$ e $y = 30$, vem: $3(15) + 2(30) + z = 100 \Rightarrow 45 + 60 + z = 100 \Rightarrow z = 100 - 105 = -5$. Então, $(15, 30, -5)$ é solução da equação.
- Para $x = \alpha$ e $y = \beta$, vem $z = 100 - 3\alpha - 2\beta$, sendo α e β dois números reais quaisquer. Dizemos que $(\alpha, \beta, 100 - 3\alpha - 2\beta)$ é a solução geral da equação. Como podemos escolher α e β quaisquer, a equação tem infinitas soluções. É uma equação indeterminada.

A equação linear $0x + 0y + 0z = 3$ não possui solução. É uma equação impossível.

$5x + 0y = 10$ é uma equação linear com coeficientes 5 e 0 e termo independente 10. Para todo α real, o par $(2, \alpha)$ é solução. A equação é indeterminada.

$x^2 + 7y = 9$ não é equação linear, porque apresenta a incógnita x elevada ao quadrado.

Fonte: Livro 2 p.164.

A seguir, o autor traz a conceitualização de um sistema linear com n incógnitas e, na sequência, define o conjunto solução ou conjunto verdade de um sistema linear (Figura 23).

Figura 23: Definição da solução de uma equação linear.

Sistema linear — solução

Um **sistema linear a *n* incógnitas** é um conjunto de duas ou mais equações lineares a *n* incógnitas, consideradas simultaneamente.

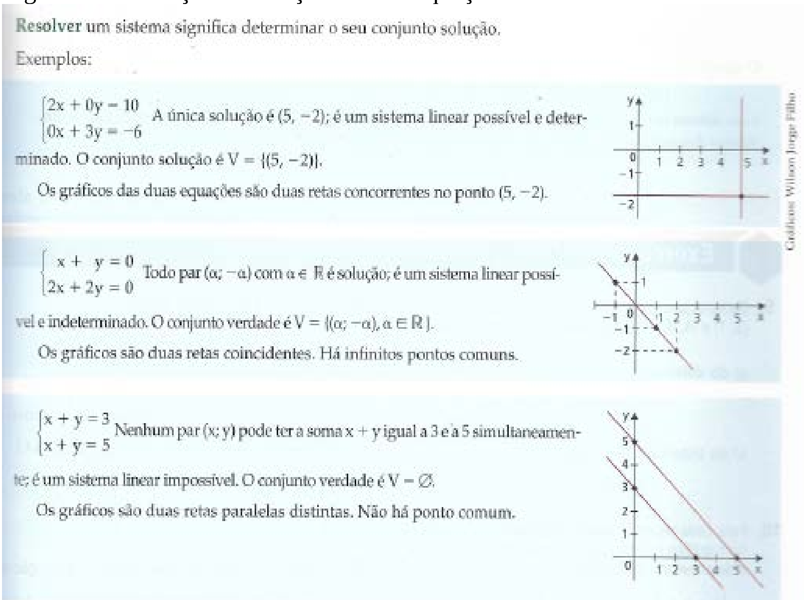
Uma sequência de *n* números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é **solução do sistema** se for solução de todas as equações do sistema.

Conjunto solução ou conjunto verdade é o conjunto de todas as soluções do sistema.

Fonte: Livro 2 p.164

Em seguida, a proposta do autor é evidenciar a solução de um sistema linear em dois registros: algébrico e geométrico, conforme se identifica na Figura 24.

Figura 24: Definição da solução de uma equação linear.



Resolver um sistema significa determinar o seu conjunto solução.

Exemplos:

$\begin{cases} 2x + 0y = 10 \\ 0x + 3y = -6 \end{cases}$ A única solução é $(5, -2)$; é um sistema linear possível e determinado. O conjunto solução é $V = \{(5, -2)\}$.

Os gráficos das duas equações são duas retas concorrentes no ponto $(5, -2)$.

$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ Todo par $(\alpha; -\alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ é solução; é um sistema linear possível e indeterminado. O conjunto verdade é $V = \{(\alpha; -\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Os gráficos são duas retas coincidentes. Há infinitos pontos comuns.

$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ Nenhum par $(x; y)$ pode ter a soma $x + y$ igual a 3 e a 5 simultaneamente; é um sistema linear impossível. O conjunto verdade é $V = \varnothing$.

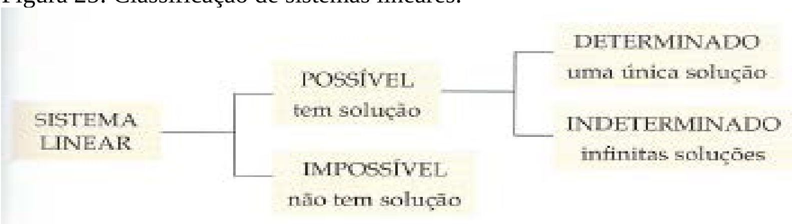
Os gráficos são duas retas paralelas distintas. Não há ponto comum.

Gráficos: Wilson Jorge Filho

Fonte: Livro 2 p.165

Este tópico é finalizado com a classificação de sistemas lineares (Figura 25) e a proposição de seis exercícios.

Figura 25: Classificação de sistemas lineares.



Fonte: Livro 2 p.164

Na sequência, o autor inicia a discussão da regra de Cramer, realizando a associação entre matrizes e sistemas lineares (Figura 26 e Figura 27).

Figura 26: Matrizes associadas a um sistema linear a).

Matrizes associadas a um sistema linear

Consideremos o sistema linear:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Fonte: Livro 2 p. 166.

Figura 27: Matrizes associadas a um sistema linear a).

Denominamos **matriz completa** de S a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

onde colocamos em cada linha, ordenadamente, os coeficientes e o termo independente de cada equação de S.

A matriz dos coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

é denominada **matriz incompleta** de S.

O sistema pode ser escrito na **forma matricial**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que é uma equação matricial:

$$A \cdot X = B$$

em que A é a matriz incompleta, X é uma matriz coluna contendo as incógnitas e B é a matriz coluna dos termos independentes.

Fonte: Livro 2 p. 167.

Depois são apresentados dois exemplos resolvidos (ver recorte na figura 28) e a proposição de um exercício.

Figura 28: Exemplo de matrizes associadas a um sistema linear

Para o sistema $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$,

a matriz completa e a incompleta são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

A forma matricial é: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fonte: Livro 2 p.167

O autor deduz a regra de Cramer com o objetivo de solucionar sistemas lineares de ordem nxn (Figura 29 e Figura 30).

Figura 29: Demonstração da regra de Cramer

a)

Regra de Cramer

Para simplificar os cálculos e notações, vamos deduzir e enunciar a regra de Cramer no caso de 3 equações e 3 incógnitas.

Dado o sistema linear S: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$

considere os determinantes:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (da matriz incompleta)

$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (da matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, os coeficientes de *x* pelos termos independentes)

$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (da matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, os coeficientes de *y* pelos termos independentes)

$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ (da matriz que se obtém trocando, na matriz incompleta, os coeficientes de *z* pelos termos independentes)

Fazendo $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$,

escrevemos o sistema *S* como equação matricial: $A \cdot X = B$.

Se $D = \det A \neq 0$, então a matriz *A* é invertível. Multiplicando por A^{-1} os dois membros, vem:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$I_3 \cdot X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

o que mostra que, se $D \neq 0$, o sistema admite solução. E pela unicidade da matriz inversa, podemos concluir que a solução é única.

Vamos supor que (α, β, γ) é a solução do sistema, isto é, que são verdadeiras as três igualdades ao lado.

$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = d_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = d_2 \\ a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma = d_3 \end{cases}$

Temos:

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma & b_1 & c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma & b_2 & c_2 \\ a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Fonte: Livro 2 p.168

Figura 30: Demonstração da regra de Cramer
b)

Subtraindo da 1ª coluna os elementos da 2ª multiplicados por β e os da 3ª multiplicados por γ, o determinante não se altera (segundo o teorema de Jacobi). Então:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1\alpha & b_1 & c_1 \\ a_2\alpha & b_2 & c_2 \\ a_3\alpha & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot D$$

Como $D \neq 0$, de $D_1 = \alpha \cdot D$ vem que $\alpha = \dfrac{D_1}{D}$.

De modo semelhante podemos deduzir que $\beta = \dfrac{D_2}{D}$ e $\gamma = \dfrac{D_3}{D}$.

Conclusão:

Se $D \neq 0$, então o sistema S é possível e determinado. Nesse caso, a única solução é:

$$\left(x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D}\right)$$

O raciocínio empregado pode ser aplicado a sistemas de n equações a n incógnitas. Vamos enunciar a regra de Cramer:

Dado um sistema linear de n equações a n incógnitas,

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

se o determinante D da matriz dos coeficientes for diferente de zero, então S é possível e determinado. A única solução é $\left(x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \dfrac{D_n}{D}\right)$,

em que D_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é o determinante obtido substituindo em D a coluna j pela coluna dos termos independentes.

Fonte: Livro 2 p.169

Este tópico é finalizado com a apresentação de dois exercícios resolvidos (ver recorte nas figuras 31 e 32) e a proposição de sete exercícios.

Figura 31: Exercício resolvido com a regra de Cramer
a)

Exercícios resolvidos

1 Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = -1. \\ 4x - y + 2z = 18 \end{cases}$

Resolução

Temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -25,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 18 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -50, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 18 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 18 \end{vmatrix} = -125$$

Fonte: Livro 2 p.169

Figura 32: Exercício resolvido com a regra de Cramer b)

Então: $x = \frac{D_1}{D} = \frac{-50}{-25} = 2$; $y = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-25} = 0$ e $z = \frac{D_3}{D} = \frac{-125}{-25} = 5$.

A única solução é (2, 0, 5).

O conjunto solução é $V = \{(2, 0, 5)\}$.

Fonte: Livro 2 p.170

Dando continuidade, o autor inicia um novo tópico com o título *Sistemas equivalentes – escalonamento*. Nesse momento, o autor aborda as limitações da utilização do método de Cramer para solucionar sistemas lineares e sugere um método geral para resolução e para classificação do sistema linear: escalonamento, método baseado em operações elementares sobre as equações do sistema, objetivando determinar um sistema equivalente ao inicial (Figura 33).

Figura 33: Sistemas equivalentes - escalonamento

Sistemas equivalentes — escalonamento

Aplicando a regra de Cramer, podemos, por exemplo, resolver sistemas lineares a três incógnitas que tenham três equações e apresentem o determinante da matriz incompleta, D, não nulo. Como fazer se $D = 0$? E no caso dos sistemas de 2 equações a 3 incógnitas? E os de 4 equações a 3 incógnitas?

Um método geral para resolver sistemas lineares é o **método de escalonamento**, que emprega as operações elementares sobre as equações do sistema.

Operações elementares

Dado um sistema linear *S*, denominamos **operações elementares** sobre as equações de *S* as seguintes operações:

1ª) trocar de lugar entre si duas equações;

2ª) multiplicar uma equação por um número real não nulo;

3ª) somar a uma equação uma outra equação do sistema previamente multiplicada por um número real.

Podemos demonstrar que, aplicando uma operação elementar, as soluções do sistema não se alteram.

Como exemplo, vamos considerar o sistema linear S: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

1ª) Trocando de lugar as duas equações, obtemos S_1: $\begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$

É evidente que S_1 e S possuem o mesmo conjunto solução.

2ª) Se multiplicarmos a primeira equação de S pelo número real k, $k \neq 0$, conservando a segunda, obteremos o sistema: $S_2 \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Se um par ordenado de números reais (α, β) é solução de S, temos que (α, β) também é solução de S_2 e, reciprocamente, se (α, β) é solução de S_2, também é solução de S, porque $a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \Leftrightarrow ka_1\alpha + kb_1\beta = kc_1$ $(\forall k \neq 0)$.

Logo, S_2 e S têm o mesmo conjunto solução.

3ª) Agora vamos conservar a primeira equação e somar à segunda equação de S a primeira multiplicada pelo número real k, obtendo o sistema S_3:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ (ka_1 + a_2)x + (kb_1 + b_2)y = kc_1 + c_2 \end{cases}$$

Se (α, β) é uma solução de S, então $a_1\alpha + b_1\beta = c_1$ e $a_2\alpha + b_2\beta = c_2$. Daí $(ka_1 + a_2)\alpha + (kb_1 + b_2)\beta = k(a_1\alpha + b_1\beta) + (a_2\alpha + b_2\beta) = kc_1 + c_2$. Logo, (α, β) é solução de S_3. Reciprocamente, se (α, β) é solução de S_3, também é de S (deixamos essa verificação para o leitor). Logo, S_3 e S têm o mesmo conjunto solução.

Fonte: Livro 2 p.171

O autor aborda na sequência sistemas equivalentes (ver figura 34).

Figura 34: Sistemas equivalentes

Sistemas equivalentes

Definição

Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando um deles pode ser obtido a partir do outro por meio de um número finito de aplicações de operações elementares.

Exemplo:

Os sistemas lineares $S_1\begin{cases} x+y=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$ e $S_2\begin{cases} x+y=3 \\ 2y=4 \end{cases}$

são equivalentes, porque S_2 é obtido a partir de S_1 somando-se a primeira equação à segunda.

Propriedade

Ao aplicar uma operação elementar sobre um sistema linear, obtemos um novo sistema que tem o mesmo conjunto solução do primeiro. Decorre, então, a seguinte propriedade:

Sistemas equivalentes possuem conjuntos soluções iguais.

Exemplo:

No exemplo acima, é fácil ver que a única solução de S_2 é o par (1, 2). Então, concluímos que também a única solução de S_1 é (1, 2). O conjunto solução de S_2 e também o de S_1 é $V = \{(1, 2)\}$.

Fonte: Livro 2 p.172

Para simplificar o entendimento, o autor resolve exemplos de sistemas lineares, utilizando o método do escalonamento, conforme recortes nas Figuras 35 e 36.

Figura 35: Resolução de um sistema linear por escalonamento
a)

Resolva o sistema: $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 12y = -2 \\ 5x - 21y = -23 \end{cases}$

Resolução

Temos:

$$\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 12y = -2 \\ 5x - 21y = -23 \end{cases} \overset{①}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 0x - 6y = 12 \\ 0x - 6y = 12 \end{cases} \overset{②}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 0x - 6y = 12 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \overset{③}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = -13 \\ y = -2 \end{cases}$$

(1) Somamos à segunda equação a primeira multiplicada por 2; somamos à terceira equação a primeira multiplicada por 5.

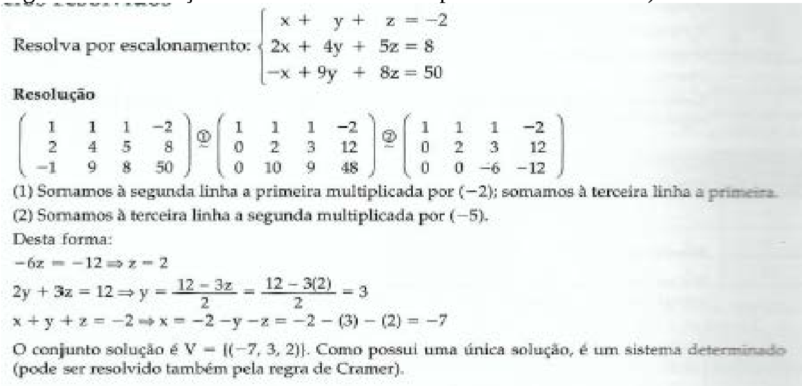
(2) Somamos à terceira equação a segunda multiplicada por (−1).

(3) Suprimimos a terceira equação, que aceita qualquer solução, e calculamos as incógnitas.

O conjunto solução é $V = \{(-13, -2)\}$. O sistema é possível e determinado.

Fonte: Livro 2 p.173

Figura 36: Resolução de um sistema linear por escalonamento a)



Resolva por escalonamento: $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 4y + 5z = 8 \\ -x + 9y + 8z = 50 \end{cases}$

Resolução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \\ -1 & 9 & 8 & 50 \end{pmatrix} \overset{①}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 10 & 9 & 48 \end{pmatrix} \overset{②}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

(1) Somamos à segunda linha a primeira multiplicada por (-2); somamos à terceira linha a primeira.

(2) Somamos à terceira linha a segunda multiplicada por (-5).

Desta forma:

$-6z = -12 \Rightarrow z = 2$

$2y + 3z = 12 \Rightarrow y = \dfrac{12 - 3z}{2} = \dfrac{12 - 3(2)}{2} = 3$

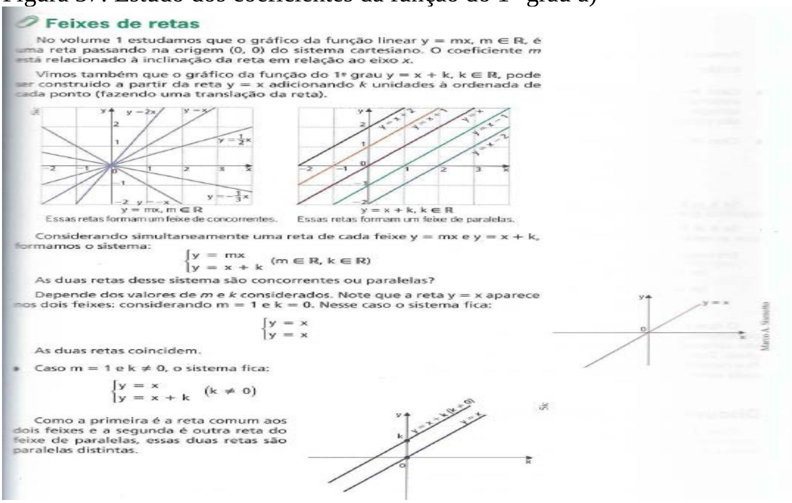
$x + y + z = -2 \Rightarrow x = -2 - y - z = -2 - (3) - (2) = -7$

O conjunto solução é $V = \{(-7, 3, 2)\}$. Como possui uma única solução, é um sistema determinado (pode ser resolvido também pela regra de Cramer).

Fonte: Livro 2 p.173

O tópico é encerrado com a proposta de 16 exercícios. O capítulo 10 é inteiramente dedicado à discussão da classificação de sistemas lineares. Neste capítulo, o autor inicia realizando um resgate do estudo de função linear, que ocorreu no volume 1 desta coleção. Na sequência, começa-se um estudo do gráfico de uma função do 1° grau, salientando a importância do coeficiente angular e do coeficiente linear na representação gráfica de uma reta, conforme figuras 37 e 38.

Figura 37: Estudo dos coeficientes da função do 1° grau a)



Feixes de retas

No volume 1 estudamos que o gráfico da função linear $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, é uma reta passando na origem (0, 0) do sistema cartesiano. O coeficiente m está relacionado à inclinação da reta em relação ao eixo x.

Vimos também que o gráfico da função do 1º grau $y = x + k$, $k \in \mathbb{R}$, pode ser construído a partir da reta $y = x$ adicionando k unidades à ordenada de cada ponto (fazendo uma translação da reta).

Essas retas formam um feixe de concorrentes. Essas retas formam um feixe de paralelas.

Considerando simultaneamente uma reta de cada feixe $y = mx$ e $y = x + k$, formamos o sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x + k \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R})$$

As duas retas desse sistema são concorrentes ou paralelas?

Depende dos valores de m e k considerados. Note que a reta $y = x$ aparece nos dois feixes: considerando $m = 1$ e $k = 0$. Nesse caso o sistema fica:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x \end{cases}$$

As duas retas coincidem.

- Caso $m = 1$ e $k \neq 0$, o sistema fica:

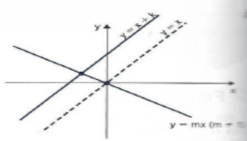
$$\begin{cases} y = x \\ y = x + k \end{cases} \quad (k \neq 0)$$

Como a primeira é a reta comum aos dois feixes e a segunda é outra reta do feixe de paralelas, essas duas retas são paralelas distintas.

Fonte: Livro 2 p.179.

Figura 38: Estudo dos coeficientes da função do 1° grau b)

- Caso $m \neq 1$, a reta escolhida no primeiro feixe é concorrente com a reta comum $y = x$ e, portanto, é concorrente com qualquer outra reta do segundo feixe. Então, caso $m \neq 1$, as duas retas do sistema são concorrentes, $\forall k$.



Agora vamos analisar algebricamente o sistema:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x + k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -mx + y = 0 \\ -x + y = k \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -m & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1$$

Temos: $D = 0 \Leftrightarrow -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Então:

- Caso $m \neq 1$, temos $D \neq 0$ e concluímos, pela regra de Cramer, que o sistema é possível e determinado, $\forall k$. Nesse caso, o sistema tem uma única solução. Isso significa que as duas retas têm um único ponto comum, logo são concorrentes.
- Caso $m = 1$, o sistema fica:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \quad (-1) \\ -x + y = k \end{cases} \sim \begin{cases} -x + y = 0 \\ 0x + 0y = k \end{cases}$$

Se $k = 0$, o sistema é indeterminado, portanto tem infinitas soluções. Isso significa que as duas retas têm infinitos pontos comuns, logo são coincidentes.

Se $k \neq 0$, o sistema é impossível, portanto não tem solução. Isso significa que as retas não têm ponto comum, logo são paralelas distintas.

Em resumo, temos:

$(m \neq 1, \forall k \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ sistema determinado (retas concorrentes)

$(m = 1, k = 0) \Rightarrow$ sistema indeterminado (retas coincidentes)

$(m = 1, k \neq 0) \Rightarrow$ sistema impossível (retas paralelas distintas)

O que fizemos chama-se discussão do sistema em função dos valores dos parâmetros *m* e *k* (parâmetro, no sistema, é uma variável em função da qual são colocados um ou mais coeficientes ou termos independentes das equações). Discutir um sistema linear em função de um ou mais parâmetros significa classificar o sistema em determinado, indeterminado ou impossível, para cada valor do parâmetro (ou de cada parâmetro).

Fonte: Livro 2 p.180.

Conforme se observa nas figuras 37 e 38 acima, o autor representa a reta em dois registros: algébrico e geométrico.

Na sequência, o autor apresenta uma metodologia para discutir sistemas lineares de n equações e n incógnitas. Para tal, ele relaciona o cálculo do determinante D da matriz incompleta[1] com a classificação do sistema, conforme observado na Figura 39.

Figura 39: Classificação de sistemas lineares.

Discussão de sistemas lineares

Para discutir um sistema linear S de n equações a n incógnitas, calculamos o determinante D da matriz incompleta. Caso $D \neq 0$, sabemos que o sistema é determinado, e no caso $D = 0$ escalonamos o sistema. Verifica-se que:

$D \neq 0 \Leftrightarrow S$ é determinado

$D = 0 \Leftrightarrow S$ é indeterminado ou impossível

Fonte: Livro 2 p.180.

[1] Matriz incompleta é a matriz construída com os coeficientes das incógnitas do sistema linear. (Machado p.167)

Logo após, são apresentados alguns exercícios resolvidos (ver recorte na figura 40) e uma lista com 15 exercícios.

Figura 40: Exemplos resolvidos

Discuta em função dos parâmetros *a* e *b*: $\begin{cases} 2x + 3y = b \\ 4x + ay = 10 \end{cases}$

Resolução

Temos $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 2a - 12$ e $2a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 6$.

Substituindo $a = 6$ no sistema, vem:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & b \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 10 - 2b \end{pmatrix}$$

$$10 - 2b = 0 \Leftrightarrow b = 5$$

Então:

$(a \neq 6, \forall b) \Rightarrow$ sistema determinado

$(a = 6, b = 5) \Rightarrow$ sistema indeterminado

$(a = 6, b \neq 5) \Rightarrow$ sistema impossível

Fonte: Livro 2 p.182.

O capítulo é finalizado com a abordagem dos sistemas homogêneos. Para tal, inicia-se definindo um sistema homogêneo (Figura 41), discorre-se sobre uma solução trivial [2] e finaliza realizando uma discussão sobre um sistema linear homogêneo (Figura 42).

Figura 41: Sistema Homogêneos

Sistemas homogêneos

Um sistema linear em que os termos independentes em todas as equações são iguais a zero é denominado **sistema homogêneo**.

Por exemplo:

$$S_1 \begin{cases} 7x + 11y = 0 \\ 3x + 20y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 \begin{cases} x + 9y = 0 \\ -3x + \dfrac{y}{2} = 0 \\ 23x - 11y = 0 \end{cases}$$

são sistemas homogêneos.

Fonte: Livro 2 p.184.

---

[2] A solução trivial de um sistema linear homogêneo é do tipo (0,0,0, ...,0). (Machado p.184)

Figura 42: Exemplos resolvidos

Discussão

Todo sistema linear homogêneo é sistema possível, pois admite pelo menos uma solução (a trivial). Assim, um sistema linear homogêneo só pode ser classificado em:

- **sistema determinado**: tem apenas a solução trivial;

ou

- **sistema indeterminado**: tem a solução trivial e outras soluções, denominadas soluções próprias.

No caso de um sistema linear homogêneo S de n equações a n incógnitas, sendo D o determinante da matriz incompleta, temos:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow S \text{ é determinado;}$$
$$D = 0 \Leftrightarrow S \text{ é indeterminado.}$$

Fonte: Livro 2 p.184.

Na sequência são apresentados alguns exemplos resolvidos (ver recorte na Figura 43) e uma lista com sete exercícios.

Figura 43: Resolução de sistemas homogêneos.

Classifique e resolva os sistemas homogêneos:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 7x + 8y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$

Resolução

Temos:

a) $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 38$ Como $D \neq 0$, o sistema é determinado. (Admite apenas a solução trivial.)

Logo, $V = \{(0, 0)\}$.

b) $D = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Como $D = 0$, o sistema é indeterminado. (Admite a solução trivial e soluções próprias.)

$$\begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Fazendo $x = \alpha$, vem $y = 2\alpha$.

Logo, $V = \{(\alpha, 2\alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Fonte: Livro 2 p.184

5.2.3 Matemática: VOL 8 – Dutra e Valenço – 2012

Neste livro, os autores destinam o módulo 24, da página 39 à 56, para abordar o tema Sistemas Lineares. Conforme mostra a figura 44.

Figura 44: Sumário.

MÓDULO 24

Fonte: Livro 3 p.1

Para iniciar o módulo 24, os autores problematizam uma situação cotidiana como ponto de partida para o estudo de sistemas lineares. Conforme a figura 45.

Figura 45: Introdução de sistemas lineares.

Um grupo de alunos se uniu com o objetivo de arrecadar fundos para comprar uma cadeira de rodas para um jovem carente. Eles resolveram realizar um festival de música no auditório da escola, que comporta 180 pessoas. Eles colocaram à venda 3 tipos de ingressos: **VIP**, a R$ 20,00; **normais**, a R$ 10,00; e, para **estudantes**, a R$ 5,00. Definiram também que o número de ingressos para estudantes deveria ser igual à metade da soma dos demais tipos de ingresso.

Quantos ingressos de cada tipo precisam ser vendidos, para se ter uma arrecadação de R$ 1 700,00 (valor necessário para alcançar o objetivo)?

Fonte: Livro 3 p.39

Observa-se que os autores se utilizam de uma metodologia que preconiza contextualizar o conteúdo abordado para, posteriormente, introduzir a definição de equação linear (Figura 46).

Figura 46: Definição de equação linear.

1. EQUAÇÕES LINEARES

Equações lineares são aquelas que possuem uma ou mais incógnitas de grau 1.

Equação linear: toda equação com *n* incógnitas: $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$, que pode ser apresentada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Sendo $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ constantes reais, chamadas de coeficientes das incógnitas; e b um número real chamado de termo independente da equação.

Fonte: Livro 3 p.39

Na sequência, os autores trazem um quadro apontando exemplos de equações não lineares (Figura 47).

Figura 47: Exemplos de equações não lineares.

Exemplos de equações não lineares

a) $x + y + zw = 0$

Não é equação linear, pois apresenta um termo misto com produto de duas incógnitas.

b) $x^2 + 5y - 6 = 8$

Não é equação linear, pois o expoente da incógnita x é diferente de 1.

Fonte: Livro 3 p.40

Dando continuidade, eles apresentam a definição da solução de uma equação linear, trazendo casos em que se obterá como solução uma ou mais terna ordenadas, conforme se vê na Figura 48.

Figura 48: Solução de uma equação linear.

Solução de uma equação linear

A solução de uma equação linear é um conjunto de termos ordenados que, substituídos pelas incógnitas, tornam a equação verdadeira. Uma equação linear pode possuir uma ou várias soluções possíveis.

Retomando o exemplo inicial, se tomarmos a equação $20x + 10y + 5z = 1\,700$, podemos encontrar várias soluções:

x	y	z	$20x + 10y + 5z = 1\,700$
30	100	20	$20(30) + 10(100) + 5(20) = 1\,700$
20	110	40	$20(20) + 10(110) + 5(40) = 1\,700$
20	100	60	$20(20) + 10(100) + 5(60) = 1\,700$
10	120	60	$20(10) + 10(120) + 5(60) = 1\,700$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Assim, (30, 100, 20), (20, 110, 40), (20, 100, 60) e (10, 120, 60) são apenas algumas da infinitas soluções reais que podemos encontrar para a equação $20x + 10y + 5z = 1\,700$.

Em se tratando de solução de uma equação linear, se experimentarmos, veremos que as soluções encontradas para a equação anterior são as mesmas encontradas para equações obtidas ao multiplicar tal equação por uma constante K não nula. Para exemplificar, vejamos as equações seguintes, que possuem todas as mesmas soluções:

$$20x + 10y + 5z = 1\,700 \qquad (x2) \Rightarrow 40x + 20y + 10z = 3\,400$$

$$20x + 10y + 5z = 1\,700 \qquad \left(x\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 4x + 2y + z = 340$$

Uma equação linear do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ possui as mesmas soluções que as equações do tipo $ka_1x_1 + ka_2x_2 + ka_3x_3 + \ldots + ka_nx_n = kb$, para qualquer número real $k \neq 0$.

Fonte: Livro 3 p.40

Dando prosseguimento ao capítulo, aborda-se o tópico Sistemas de Equações Lineares, em que os autores definem um sistema linear (Figura 49).

Figura 49: Sistemas de equações lineares.

Sistema de equações lineares: conjunto de m e n do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nesses casos, busca-se uma solução que atenda simultaneamente a todas as n equações lineares.

Fonte: Livro 3 p.40

Logo após a definição de um sistema linear, os autores apresentam três casos de sistemas lineares $2x2$: 1° caso - solução única; 2° caso – sem solução e 3° caso – infinitas soluções. Todos os casos abordados foram resolvidos pelo “método da soma” como se observa no recorte feito na Figura 50

Figura 50: Sistemas de equações $2x2$ – Resolução algébrica

1º caso – solução única

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$

Nesse caso, podemos eliminar uma variável se somarmos a segunda equação à primeira, multiplicada por −4, ou seja:

$$\begin{cases} x+y=6 & \times(-4) \\ 4x+2y=14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-4x}-4y=-24 \\ + \quad \cancel{4x}+2y=14 \\ \hline -2y=-10 \end{array}$$

Assim, é possível ver que $y = 5$. Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos $x = 1$. Portanto, a solução desse sistema é dada apenas por (1,5).

Fonte: Livro 3 p.40

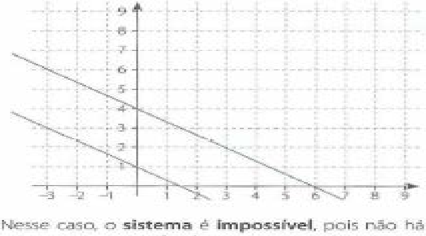
A seguir, aborda-se um novo tópico: interpretação gráfica e classificação. Nesse tópico, apresentam-se três casos resolvidos e esses abordam a representação gráfica de cada sistema linear. A partir desta conversão, os autores utilizam-se das relações entre as retas – concorrentes, paralelas e coincidentes – para determinarem se existe a solução e classificarem o sistema. Observe o recorte realizado na figura 51.

Figura 51: Interpretação gráfica

2º caso – sistema sem solução (impossível – SI)

$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

O gráfico do sistema linear apresenta duas retas paralelas.



Nesse caso, o **sistema** é **impossível**, pois não há nenhum ponto comum às duas retas, ou seja, a interseção entre as retas é vazia ($r \cap s = \varnothing$).

Fonte: Livro 3 p.41

Finalizando este tópico, os autores apresentam um quadro que ilustra as características e a classificação de um sistema linear (Figura 52).

Figura 52: Classificação de um sistema linear.

De forma geral, podemos classificar um sistema linear quanto a suas soluções da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}\text{Sistema possível} \\ \text{(admite solução)}\end{array}\begin{cases}\text{determinado (SPD)} \rightarrow \\ \qquad\qquad \text{uma única solução} \\ \text{indetermiado (SPI)} \rightarrow \\ \qquad\qquad \text{infinitas soluções}\end{cases}$$

Sistema impossível (SI) $\rightarrow$ não tem solução

Fonte: Livro 3 p.42

São abordados, a seguir, sistemas lineares de ordem *mxn*. Os autores propõem a conversão de registro associando sistemas lineares com matrizes, como se vê na Figura 53.

Figura 53: Sistemas Lineares associados a matrizes.

Matrizes associadas

A um sistema linear com m equações e n incógnitas, do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Podemos associar uma matriz em que cada linha seja formada, ordenadamente, pelos coeficientes e termos independentes de cada equação. De forma geral, temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Essa matriz é chamada de **matriz aumentada**. Nela, as incógnitas devem estar na mesma ordem de cada equação, e os termos independentes devem estar à direita.

Fonte: Livro 3 p.42

Na sequência, apresentam-se Sistemas Lineares na sua forma escalonada, como se observa na Figura 54. Dando continuidade, são mostrados casos de sistemas lineares escalonado resolvidos (Figura 55).

Figura 54: Sistemas lineares escalonados.

Sistemas escalonados

Existem alguns sistemas que, mesmo tendo várias equações, podem ser resolvidos com relativa facilidade. Exemplos:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -2 \\ y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 11 \\ -y + z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

Esses sistemas podem ser representados por meio das seguintes matrizes aumentadas:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

A partir da segunda linha, o número de zeros aumenta gradativamente, formando uma escada. Por essa razão, chamamos esse tipo de sistema de **sistema escalonado**.

Fonte: Livro 3 p.42

Figura 55: Exemplos resolvidos de sistemas lineares escalonados.

1º caso – sistema com solução única

$$\begin{cases} x + y - 2z = 11 \\ -y + z = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

Substituindo $z = -2$ na 2ª equação, temos:
$-y + (-2) = 0 \Leftrightarrow y = -2$

Substituindo $z = -2$ e $y = -2$ na 1ª equação, encontramos o valor de x:

$x + (-2) - 2(-2) = 11$
$x - 2 + 4 = 11$
$x = 9$

$S = \{(9, -2, -2)\}$

Em situações em que temos um sistema escalonado com o número de equações igual ao número de incógnitas, sempre poderemos chegar a uma solução única. Dizemos, então, que o sistema é possível e determinado (SPD).

Fonte: Livro 3 p.43

Dando continuidade, os autores iniciam o tópico de Sistemas Equivalentes. Nesse momento, os autores definem e apresentam um exemplo de sistemas equivalentes, como se observa na Figura 56.

Figura 56: Definição de sistema equivalente.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas são **equivalentes** se, e somente se, possuírem o mesmo conjunto solução.

Como exemplo, consideremos o sistema $A = \begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

que é equivalente ao sistema $B = \begin{cases} x + y = 6 \\ -2y = -10 \end{cases}$

Ambos possuem a dupla (1, 5) como solução.

Fonte: Livro 3 p.43

Nesse mesmo tópico, os autores exemplificam operações que podem ser feitas entre linhas ou com as equações de um sistema linear sem que seu conjunto solução seja alterado, objetivando determinar um sistema equivalente ao inicial (Figura 57).

Figura 57: Sistemas equivalentes – escalonamento

res. Como exemplo, consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+y+z=3 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+z=4 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ 3y+4z=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ 3y+4z=6 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_2} \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ z=0 \end{cases}$$

Finalmente, o sistema $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+y+z=3 \\ -x+2y+3z=3 \end{cases}$ é equivalente ao sistema escalonado $\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-z=-2 \\ z=0 \end{cases}$

Fonte: Livro 3 p.44

Na sequência, os autores apresentam a discussão de um sistema, à luz do que foi abordado até o presente momento sobre escalonamento de sistemas lineares. Para tal, apresentam-se três exemplos de sistemas lineares que se enquadram nos três casos possíveis de classificação de sistemas lineares. Ao final de cada exemplo, os autores mostram quadros conclusivos sobre a relação entre o sistema escalonado e sua classificação. Observe o recorte realizado na figura 58.

Figura 58: Discussão de um sistema possível e indeterminado

2º caso – sistema possível e indeterminado (SPI)

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{matriz ampliada}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Escalonando:

1º passo:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2º passo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1 \text{ e}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

3º passo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

4º passo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 7L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A última linha se anulou completamente. Portanto, ao reescrever o sistema agora escalonado, temos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

Nesse caso, o número de equações é menor que o número de incógnitas. Logo, trata-se de um sistema possível e indeterminado (SPI). Para termos uma noção das suas possíveis soluções, podemos escrever as variáveis x e y em função de z, obtendo $y = -z - 1$ e $x = -z$. Portanto, o conjunto solução pode ser descrito assim:

$$S = \{(-z, -z - 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Todas as vezes em que um sistema possuir um sistema escalonado equivalente ao número de equações não nulas menor que o número de incógnitas, ele será um **sistema possível e indeterminado (SPI)**.

Fonte: Livro 3 p.46

O tópico é finalizado com a apresentação de um exemplo resolvido.

Antes de abordar o tópico que relaciona Sistemas Lineares e Determinantes, os autores apresentam um breve histórico de quem foi

Gabriel Cramer[3]. Na sequência, são apresentados alguns exemplos da utilização deste método para resolução e classificação de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas, como se observa na Figura 59.

Figura 59: Sistemas Lineares e Determinantes.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

1º passo — resolver o **determinante geral (D)** dos coeficientes das incógnitas das equações, utilizando a regra de Sarrus.

$$D=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}=2$$

2º passo — calcular o determinante D_x, substituindo a coluna do x no determinante D pelos termos {0, 6, 1}.

$$D_x=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}=2$$

3º passo — calcular o determinante D_y, substituindo a coluna do y no determinante D pelos termos {0, 6, 1}.

$$D_y=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}=4$$

4º passo — calcular o determinante D_z, substituindo a coluna do z no determinante D pelos termos {0, 6, 1}.

$$D_z=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}=6$$

5º passo — dividir os determinantes D_x, D_y e D_z por D, para determinar, respectivamente, x, y e z.

$$x=\frac{D_x}{D} \Rightarrow x=\frac{2}{2}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D} \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

$$z=\frac{D_z}{D} \Rightarrow z=\frac{6}{2}=3$$

Portanto, o sistema é possível e determinado e sua solução é: S = {(1, 2, 3)}

> Quando o determinante da matriz dos coeficiente é nulo, então o sistema terá duas possibilidades:
> Se $D_x = D_y = D_z = 0$, então o sistema será **indeterminado.**
> Se $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ ou $D_z \neq 0$, então o sistema será **impossível**.

Fonte: Livro 3 p.49

Finalizando este tópico, os autores trazem um exemplo resolvido.

[3] **Gabriel Cramer** foi um matemático suíço que viveu no século XVIII e criou um método para resolver sistemas de equações simultâneas por meio de determinantes. Chama-se esse método de **regra de Cramer.**

Concluindo esse módulo de Sistemas Lineares, os autores apresentam o tópico Sistemas Lineares Homogêneos. Para tal, iniciam definindo um sistema homogêneo (Figura 60), discorrem sobre a solução trivial [4] e finalizam abordando as possíveis classificações de um sistema linear homogêneo

Figura 60: Sistema linear homogêneo a)

Sistema linear homogêneo

Chamamos de **sistema linear homogêneo** aquele sistema em que todos os termos independentes são nulos. Exemplos:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \\ x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$$

Um sistema linear homogêneo $n \times n$ é sempre possível, pois admite pelo menos a solução (0, 0, 0 ... 0), que chamamos de solução **trivial**, **nula** ou **imprópria**.

Para classificar um sistema linear homogêneo, devemos calcular o determinante dos coeficientes das incógnitas:

- Se o determinante for diferente de zero, o sistema será possível e determinado (SPD).
- Se o determinante for igual a zero, o sistema será possível e indeterminado (SPI).

Fonte: Livro 3 p.50

Por fim, os autores propõem 12 exercícios “Agora é sua vez” e na sequência são apresentados mais 40 exercícios “De olho no vestibular”.

5.2.4 Considerações sobre os livros didáticos analisados neste estudo

Após uma análise desses três livros didáticos estudados neste trabalho, abordar-se-ão brevemente algumas considerações sobre eles. Para tal, utilizar-se-á como base constatar os métodos de resolução abordados pelo autor; verificar-se-á a relevância dada pelos autores às conversões dos registros do conteúdo Sistemas Lineares e; diagnosticar se promovem essas conversões para a forma geométrica, matricial e se discutem a classificação do sistema por meio desses tipos de resolução.

---

[4] A solução trivial de um sistema linear homogêneo é do tipo (0,0,0, ...,0). (Machado p.184)

Identifica, nos livros 1 e 3, que no trabalho com sistemas lineares é dado mais atenção ao método de escalonamento do que a Regra de Cramer, fato positivo, uma vez que o Método de Cramer destina-se a resolver apenas Sistemas Lineares de ordem *n*. Já o livro 2 aborda o assunto evidenciando a mesma relevância para os dois métodos: escalonamento e Cramer.

Quando se trata das conversões dos registros da forma algébrica para a forma geométrica, é possível identificar que os três livros se preocupam apenas em realizá-las na situação específica de sistemas lineares *2x2*. Quando se trata de sistemas lineares de ordem diferentes das acima mencionada, os autores não realizam as conversões dos registros nem mesmo mencionam tal possibilidade.

É possível identificar que todos os livros estudados nesse trabalho realizam a conversão de registro da forma de equações entre chaves para a forma matricial (matriz aumentada). Cabe ressaltar a relevância de tal conversão para a resolução dos sistemas pelo método do escalonamento.

Ancorados na teoria de Duval, observam-se que todos os livros apresentam elementos que permitam que os alunos trabalhem o objeto matemático Sistemas Lineares em ao menos dois registros de representação e, mais que isso, transitem entre eles, proporcionando, assim, aprendizado efetivo do conteúdo.

6 ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, serão realizadas as fases descritas pela engenharia didática, como já mencionada no terceiro capítulo desse trabalho.

Iniciou-se, com a análise *a priori*, mostrando não apenas as expectativas em relação às atividades propostas, como também a análise das atividades realizadas pelos alunos participantes da pesquisa durante a fase de experimentação. A partir disso, realizou-se a análise *a posteriori*.

6.1 EXPERIMENTAÇÃO

No intuito de se coletarem os dados para análise, partiu-se para a fase de experimentação, que trata do primeiro contato com o grupo a ser pesquisado. Nesta etapa, trabalha-se diretamente com os alunos que fizeram parte desta pesquisa. Após a experimentação, utilizou-se recortes para realizar a análise *a posteriori* dos dados obtidos.

6.2 ANÁLISE À PRIORI E À POSTERIORI

Como já mencionado anteriormente, para preservar a identidade dos alunos participantes da pesquisa, serão indicados os participantes como duplas: A, B, C e D.

6.2.1 Sequência 1 – Familiarização com o software GeoGebra e alguns recursos básicos

6.2.1.1 Análise a priori

No primeiro contato com a turma para o desenvolvimento da pesquisa, colocou-se diante da situação de se apresentar aos quatro grupos de alunos (duplas) o software GeoGebra e algumas de suas funções básicas, que serviriam de subsídios para se continuar as atividades nas aulas seguintes.

Este encontro apresenta os seguintes objetivos:

a) verificar a familiaridade dos alunos com a tecnologia, bem como a utilização;

b) incentivar o uso de tecnologias como ferramenta para aprender matemática;

c) apresentar o software GeoGebra aos alunos;

d) apresentar algumas das potencialidades do software e as possíveis conversões dos objetos matemáticos por meio da janela algébrica e da janela gráfica;

e) mostrar as diversas formas de representação de um objeto matemático.

Iniciou-se com uma discussão sobre o uso de tecnologia no meio educacional e sua importância na aprendizagem dos alunos. Aproveitou-se o espaço para sabermos dos alunos acerca da familiaridade com o uso de softwares matemáticos como GeoGebra, por exemplo.

1. O ponto no plano cartesiano

a) Clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho;

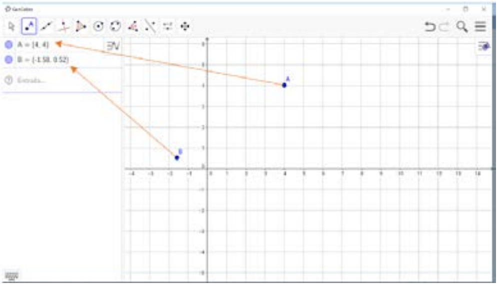
Observar-se-á o surgimento de duas janelas; **janela algébrica e janela de visualização gráfica.**

A **janela algébrica** exibe as informações algébricas dos objetos que estão na área de visualização (janela gráfica);

A **janela de visualização gráfica** permite realizar construções geométricas (pontos, retas, planos etc) por meio dos ícones disponíveis na barra de ferramentas ou pela digitação que pode ser realizada na janela de álgebra;

b) Clicar em  e na sequência em 

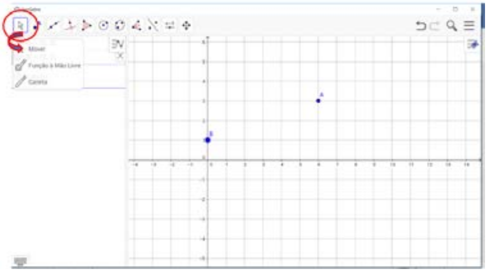
c) Clicar dentro da janela de visualização (perceba que cada ponto colocado está sendo registrado na janela algébrica com as coordenadas do tipo $(x\,,y)$.



d) Caso queira deletar algum ponto, basta clicar uma vez sobre as coordenadas desse ponto na janela algébrica e, em seguida, aperte **delete**.

e) Caso queira movimentar qualquer ponto colocado na janela de visualização, clique em , e na sequência em 

.



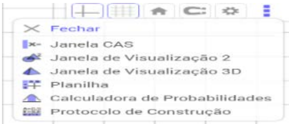
Em seguida, clique com o mouse sobre o ponto e arraste-o para onde desejar.

2. O ponto no espaço

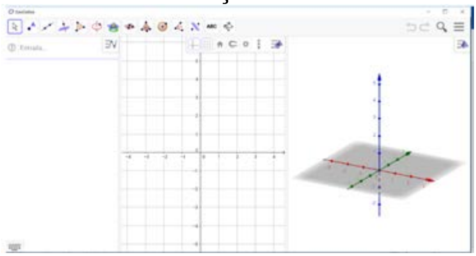
a) Clicar duas vezes sobre o ícone 

na área de trabalho, aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica.

b) Clique no botão, *alternar barra de estilos* , abrirá uma janela , nesta janela selecione: 

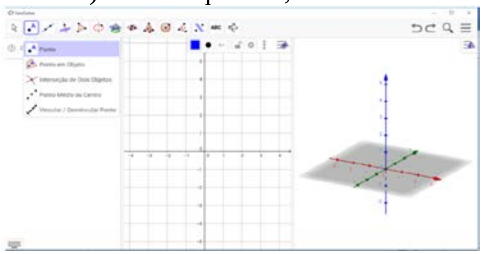
Abrirá a nova janela 

, então selecione *Janela de Visualização 3D.*

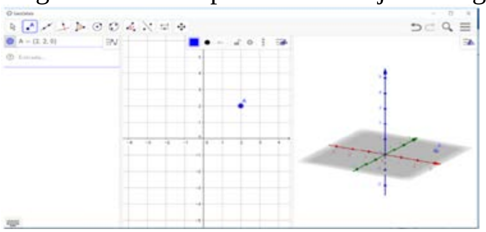


c) Na sequência, clicar em 

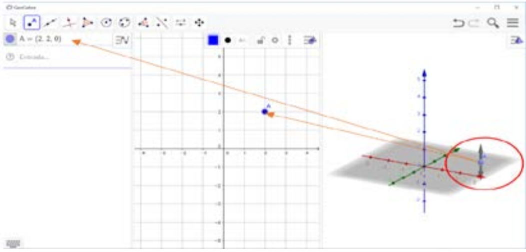
e na sequência em 



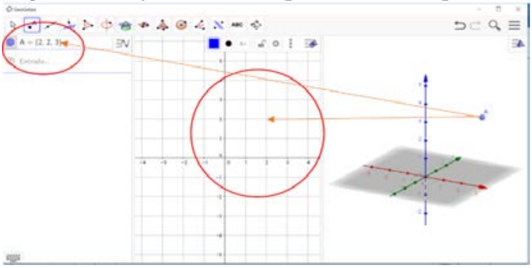
Em seguida, ao levar o cursor sobre o plano que está sombreado na janela 3D, observará o surgimento de um , sobre o plano sombreado. Posicione-o onde desejar e na sequência dê um clique. Observará o surgimento de um ponto tanto na janela algébrica quanto na janela 2D.



d) Em seguida, posicione o cursor sobre o ponto na janela 3D, observará o surgimento de duas setas com sentido contrário, indicando que pode mover o ponto nestes dois sentidos.



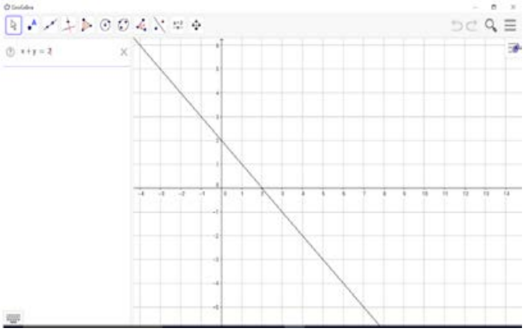
Na sequência arraste o ponto para onde desejar. Observará duas mudanças; a primeira nas coordenadas do ponto na janela algébrica e a segunda, na janela 2D, o ponto irá desaparecer.



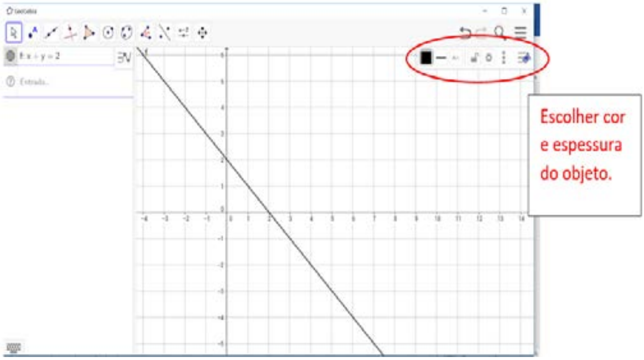
3. A reta no plano cartesiano

a) clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho, aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica

b) Na janela de entrada: digitar a seguinte equação: $x + y = 2$



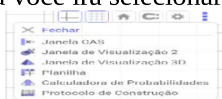
Clicando sobre a reta, você terá um menu  que permitirá alterar a cor da linha, assim como a espessura de seu traçado:



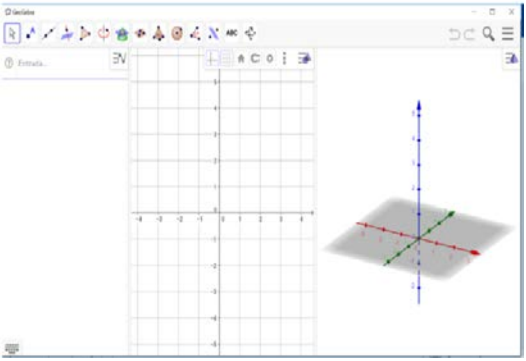
4. O plano no Espaço

a) Clique duas vezes sobre o ícone  na área de trabalho; aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica.

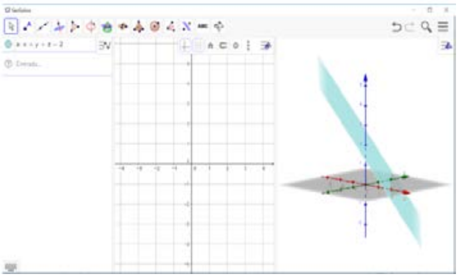
b) Clique no botão *alternar barra de estilos* , abrirá a janela . Nesta janela você irá selecionar .

Abrirá a nova janela 

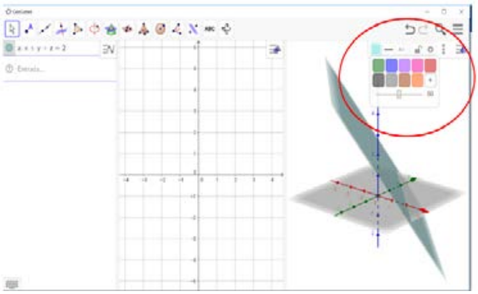
, então selecione *Janela de Visualização 3D*, pois trabalharemos com equações que possuem três variáveis e cada variável corresponde a uma dimensão.



c) Na janela de entrada, digitar a seguinte equação: $x + y + z = 2$



Clicando sobre o plano, você terá um menu , que permitirá alterar a cor do objeto, bem como a espessura de sua superfície.



6.2.1.2 Análise a posteriori

Durante o primeiro encontro, visualizou-se que alguns alunos optaram utilizar o software GeoGebra em seus smartphones. A justificativa foi a praticidade. Para a dupla A: *“estamos sempre juntos com o celular, além do que, é muito trabalhoso carregar um notebook”*.

Ao questionar os alunos sobre sua familiaridade com o software GeoGebra, todos responderam não o conhecer. No entanto, durante a aplicação da primeira sequência percebeu-se que eles não tiveram muitos problemas para baixá-lo em seus smartphones, muito menos em começar a manuseá-lo.

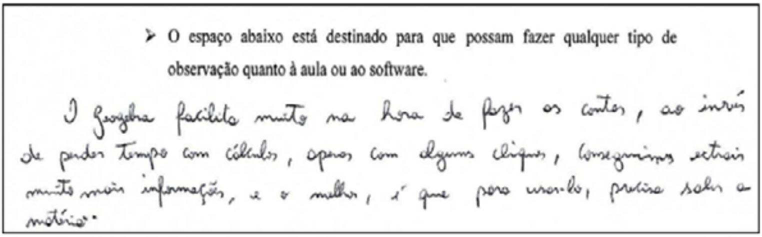
Fundamentados nas ideias de Kenski (2006), referente ao momento de rotineira utilização de ferramentas tecnológicas, as quais fazem uso no dia a dia, não surpreende, haja vista a facilidade com que os alunos se deparam frente ao uso dessa ferramenta.

Ao final da aplicação da primeira atividade, os alunos foram questionados sobre as primeiras impressões a respeito da utilização do software proposto. Observou-se que as duplas foram unânimes em apontar de forma positiva para a utilização desta ferramenta no desenvolvimento de atividades na disciplina de matemática.

> É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. (BRASIL, 2008 p.89).

Veem-se tais afirmações por meio do recorte identificado abaixo.

Figura 61: observação realizada pela dupla B na sequência 1



➢ O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao software.

O Geogebra facilita muito na hora de fazer os contas, ao invés de perder tempo com cálculos, apenas com alguns cliques, conseguimos extrair muito mais informações, e o melhor, é que para usá-lo, precisa saber a matéria.

Fonte: arquivo pessoal

Com base nas observações realizadas pelos alunos, afirma-se que a inserção da ferramenta tecnológica em uma sequência contribui na aprendizagem deles, pois torna possível a realização de conversões de registros do meio algébrico para o meio gráfico com mais dinamismo.

6.2.2 Sequência 2 – Verificando soluções de equações de duas variáveis e determinando soluções de sistemas de equações de duas variáveis

6.2.2.1 Análise a priori

Nesta sequência, buscou-se trabalhar a resolução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis, sendo que primeiramente as equações são apresentadas separadamente e, a partir das soluções encontradas para cada uma, pediu-se que determinassem a solução de um sistema formado por essas equações. Na sequência, requisita-se a solução desse sistema por meio da construção gráfica, usando a ferramenta tecnológica para fazer a conversão de forma rápida e dinâmica. Dando continuidade, deve ser feita a conversão do registro do sistema com equações e chave para sua forma matricial (matriz aumentada). Posteriormente, solicita-se que os alunos resolvam este sistema por meio de algum método algébrico.

Estabelece-se como objetivos para esse momento:

a) verificar soluções para equações do 1º grau com duas variáveis;

b) determinar solução de um Sistema Linear de duas equações e duas variáveis por meio geométrico e algébrico;

c) usar ferramentas (inserção de pontos, retas definidas por dois pontos) do GeoGebra para representar retas (conversão de registro da equação na forma algébrica) no plano.

Visando atingir os objetivos acima descritos, fez-se uma leitura do roteiro de aula, dando início às duas atividades que os alunos deviam responder até o fim do período.

1. Relação entre ponto e reta

a) Considerando a equação da reta $r: x - y = 4$, verifique se o ponto (1,5) pertence a reta *r*. Justifique sua resposta.

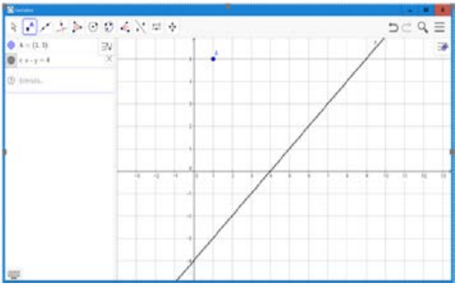
<u>*Resolução*</u>

Com base no ponto (1,5), tem-se que x=1 e y=5, portanto, ao substituir as coordenadas do ponto na equação da reta *r*, verificou-se que não se obteve uma verdade, logo o ponto não pertence a reta *r*.

$$r: x - y = 4$$
$$Substituindo$$
$$x = 1$$
$$y = 5$$
$$Temos:$$
$$1 - 5 = -4$$
$$Como\ 4 \neq -4,\ então\ o\ ponto\ não\ pertence\ a\ reta\ r.$$

Utilizando o GeoGebra vê-se:

Figura 62: representação gráfica da reta $x - y = 4$



Fonte: Os autores.

b) Considere a equação da reta *s*: $x + y = 10$, verifique se o ponto (1,5) pertence a reta *s*. Justifique sua resposta.

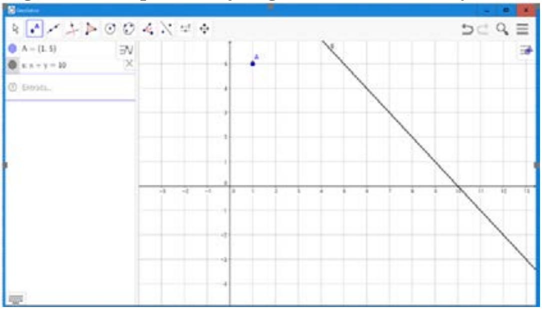
Resolução

Com base no ponto (1,5), tem-se que x=1 e y=5, portanto, ao substituirmos as coordenadas do ponto na equação da reta *s*, verificou-se que não se obteve uma verdade. Logo, o ponto não pertence a reta *s*.

$$s: x + y = 10$$
$$substituindo$$
$$x = 1$$
$$y = 5$$
$$Temos:$$
$$1 + 5 = 6$$
$$Como\ 6 \neq 10,\ então\ o\ ponto\ não\ pertence\ a\ reta\ s.$$

Utilizando o GeoGebra, tem-se

Figura 63: Representação gráfica da reta $x + y = 10$



Fonte: Os autores.

c) O ponto (7,3) pertence a reta r, indicada no exercício 01? O ponto (7,3) pertence a reta s, indicada no exercício 02? Justifique sua resposta.

Resolução

Com base no ponto (7,3), tem-se que x=7 e y=3; portanto, ao se substituírem as coordenadas do ponto nas equações das retas r e s, verifica que se obtém uma verdade, logo, o ponto pertence a ambas.

$$r : x - y = 4$$

$$s : x + y = 10$$

$$\textit{Dado o ponto } (7,3) \textit{ substituimos nas equações}:$$

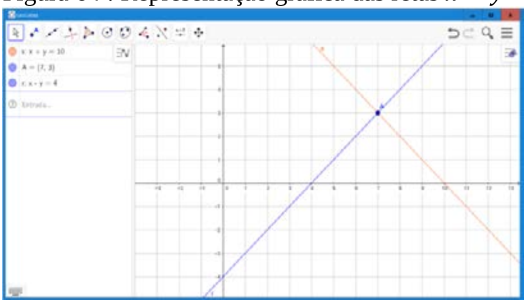
$$r : 7 - 3 = 4$$

$$s : 7 + 3 = 10$$

$$\textit{Logo verificamos que o ponto } (7,3) \textit{ satisfaz as duas equações.}$$

Utilizando o GeoGebra, tem-se

Figura 64 : Representação gráfica das retas $x - y = 4$ e $x + y = 10$.



Fonte: Os autores.

d) Qual a relação que você estabelece entre o ponto (7;3) e as retas *r* e *s*?

Resolução

O ponto (7,3) está na intersecção das retas *r* e *s*.

e) Olhando apenas a janela gráfica, consegue-se identificar mais pontos (diferentes do anterior) que satisfazem as duas equações simultaneamente? Se sim, quais?

Resolução

Observando a janela gráfica (figura 64) verifica-se que não existe mais nenhum ponto em comum entre as retas *r* e *s*, pois trata-se de duas retas concorrentes.

f) Baseado no que se verifica, qual outra interpretação se pode atribuir ao ponto (7;3)?

Resolução

Esse é o ponto que satisfaz simultaneamente as duas equações.

g) O que significa o ponto (7;3) no sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$?

Resolução

O ponto (7,3) representa a solução do sistema apresentado.

h) Como se pode escrever o sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$, na sua forma matricial (matriz aumentada)?

Resolução

Para escrever o sistema na forma matricial, utilizar-se-ão apenas os coeficientes das variáveis e os termos independentes.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{array} \right\rangle$$

i) É possível resolver o sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$ de outra forma que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível resolver, desenvolva a resolução. E, se existir mais de um método, apresente-o.

Resolução

- Método da substituição

O aluno poderá isolar uma das incógnitas numa das equações, substituir essa incógnita na outra equação pela expressão equivalente, resolver a equação que tem apenas uma variável e substituir o valor encontrado em uma equação que tenha as duas variáveis.

$$\begin{cases} x - y = 4 \rightarrow x = 4 + y \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Substituindo na outra equação

$4 + y + y = 10$

$2y = 10 - 4$

$2y = 6$

$y = 3$

Substituindo o valor de y em uma das equações

$x = 4 + y$

$x = 4 + 3$

$x = 7$

$S : (7,3)$

- <u>Método da adição</u>

O aluno poderá escolher uma incógnita para eliminar sempre que optar pelo método da adição. Como se mostra a resolução abaixo: Adicionam-se as equações, eliminando a incógnita y e encontrando o valor de x.

$$+\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$2x + 0y = 14$$

$$2x = 14$$

$$x = 7$$

O aluno poderá escolher qualquer uma das equações e substituir o valor de x encontrado para descobrir o valor de y.

Por opção, escolhe-se a 2° equação:

$$x + y = 10$$

$$7 + y = 10$$

$$y = 10 - 7$$

$$y = 3$$

$$S : (7,3)$$

- <u>Método de Gauss-Jordan ou Escalonamento</u>

O aluno deverá escrever o sistema na forma de uma matriz aumentada, formada pelos coeficientes das variáveis e pelos termos independentes.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{array} \right\rangle$$

Posteriormente, o aluno deverá realizar operações entre as linhas da matriz aumentada, objetivando transformar a matriz em uma matriz escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 1 & 1 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow L_2 = L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & -2 & | & -6 \end{pmatrix} \rightarrow L_2 = -\frac{1}{2} L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Retornando a forma de sistemas com equações e chave, ter-se-á o sistema na forma escalonada:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

A partir deste ponto (sistema na forma escalonada), o aluno terá o valor da varável y; portanto, deverá substituir o valor de y na outra equação obtendo o valor de x.

$$x - y = 4$$
$$x - 3 = 4$$
$$x = 4 + 3$$
$$x = 7$$
$$S : (7,3)$$

j) Que tipo de relação geométrica, pode-se estabelecer entre as retas *r* e *s* apresentadas no sistema $\begin{cases} r : x - y = 4 \\ s : x + y = 10 \end{cases}$?

<u>*Resolução*</u>

As retas r e s são retas concorrentes. Logo, possuem um único ponto em comum.

6.2.2.2 Análise a posteriori

Na sequência dois, nos itens (*a*), (*b*) e (*c*) constata-se que as duplas não tiveram problemas em verificar se os pontos de coordenadas (1,5) e (7,3) pertenciam ou não as retas $r : x - y = 4$ e $s : x + y = 10$.

Conforme observou-se no recorte presente na figura 65, as duplas A, B e D realizaram a substituição das coordenadas nas referidas equações e verificaram se os pontos satisfaziam ou não a equação.

Dessa forma, analisou-se que as referidas duplas optaram por realizar um tratamento na forma algébrica, não efetuando a conversão do registro para a forma gráfica. Palavras da Dupla B: "*a gente tem que fazer conta pra provar*". Neste momento, visualizou-se um fato que chamou a atenção para a Dupla B, considera-se uma resposta aceitável a representação algébrica, mas não a forma geométrica.

Identificou-se, portanto, que os estudantes veem o objeto matemático como equações de duas variáveis, mas de forma fragmentada, pensando que há apenas uma maneira de representá-lo, trata-se do todo desse objeto. Corroborando com essa ideia, Silva (2014, p. 25) defende que

> Um estudante de matemática que disponha de apenas uma forma de representar determinado objeto certamente confundirá o conteúdo da representação com o conteúdo do objeto, ou seja, vai achar que o objeto está dado de todo em sua representação [...].

Figura 65: resolução do item b), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla B

b) Considere a equação da reta s: $x+y=10$, verifique se o ponto (1,5) pertence a reta s. Justifique sua resposta.

$x + y = 10$
$1 + 5 = 10$
$6 \neq 10$

$\{P:(1,5) \notin s\}$

Fonte: Arquivo pessoal

No item *d*, questiona-se a relação entre o ponto (7,3) e as equações de retas *r* e *s*, as duplas A, C e D responderam da mesma forma, que o ponto pertence às retas *r* e *s*, portanto estão na intersecção das duas retas, como se observa na figura 66:

Figura 66: Resolução do item d), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla A

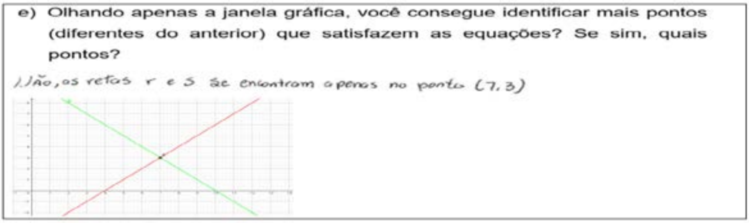
d) Qual a relação que você estabelece entre o ponto (7;3) e as retas r e s?

As retas r e s se encontram no ponto (7,3)

Fonte: Arquivo pessoal

Dando continuidade à análise da sequência dois, as duplas não tiveram problemas para responder aos itens *(e)* e *(f)*, os quais estavam alicerçados na representação gráfica das equações das retas *r* e *s.* As duplas conseguiram visualizar, por meio da utilização do software GeoGebra, que existe apenas um ponto que satisfaz as duas retas simultaneamente, e que o ponto (7,3) pertence a intersecção das duas retas. A representação do objeto em dois registros distintos, oportunizou a visualização da solução em diferentes registros, como se observa nas figuras 67 e 68:

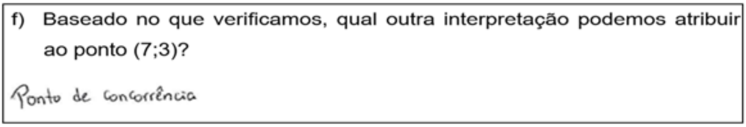
Figura 67: Resolução do item e), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla A


e) Olhando apenas a janela gráfica, você consegue identificar mais pontos (diferentes do anterior) que satisfazem as equações? Se sim, quais pontos?

Não, os retas r e s se encontram apenas no ponto (7,3)

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 68: Resolução do item f), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla A


f) Baseado no que verificamos, qual outra interpretação podemos atribuir ao ponto (7;3)?

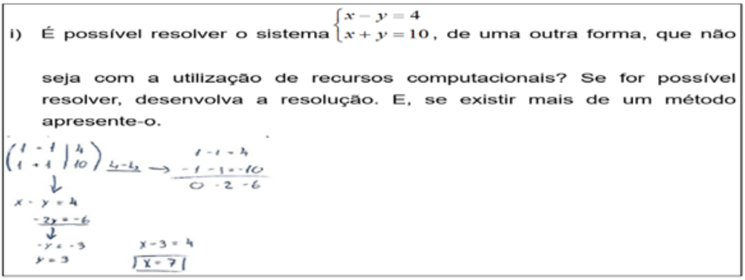
Ponto de concorrência

Fonte: Arquivo pessoal

No item (g), todas as duplas verificaram que o ponto (7,3) representa a solução do sistema linear formado pelas equações das retas *r* e *s*. Da mesma forma, no item (h), as duplas escreveram o sistema na forma matricial (matriz aumentada).

No item (i), verifica que as duplas não tiveram problemas para determinar a solução do sistema linear por meio de algum método algébrico. Ressalta-se que todas as duplas se utilizaram do método do escalonamento para determinar a solução do sistema. Selecionou-se o recorte da dupla D para ilustrar (figura 69) a afirmação.

Figura 69: Resolução do item i), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla D



i) É possível resolver o sistema $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$, de uma outra forma, que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível resolver, desenvolva a resolução. E, se existir mais de um método apresente-o.

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 1 & +1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - L_1}$ $\begin{array}{r} 1 \; -1 = 4 \\ -1 \; -1 = -10 \\ \hline 0 \; -2 \; -6 \end{array}$

$x - y = 4$
$-2y = -6$
$-y = -3$
$y = 3$

$x - 3 = 4$
$\boxed{x = 7}$

Fonte: Arquivo pessoal

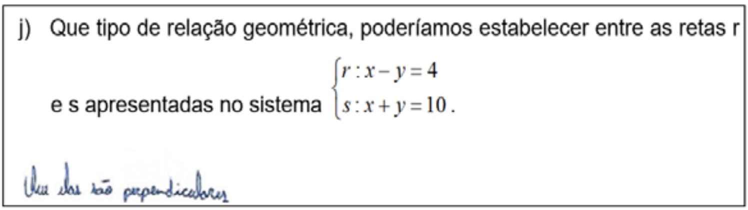
No item (j), todas as duplas responderam que as retas *r* e *s* são perpendiculares. A justificativa não foi apresentada no desenvolvimento da questão, veio por meio oral:

Dupla C: *"Colocando na forma reduzida, dá pra ver que o coeficiente angular da reta r é o oposto inverso da reta s, então as retas são perpendiculares."*

Observa-se aqui que os alunos realizaram uma mudança no tratamento algébrico das equações para realizar tal observação, o que induz a pensar que se sentem mais seguros trabalhando com a forma da algébrica desse objeto matemático.

Ressalta-se, ainda, que tal afirmação foi alicerçada nos conhecimentos prévios dos alunos referente ao conteúdo de geometria analítica. Selecionou-se o recorte (figura 70) da dupla D para ilustrar a afirmação.

Figura 70: Resolução do item j), atividade 01, sequência 2, feita pela dupla D



j) Que tipo de relação geométrica, poderíamos estabelecer entre as retas r e s apresentadas no sistema $\begin{cases} r : x - y = 4 \\ s : x + y = 10 \end{cases}$.

Que elas são perpendiculares

Fonte: Arquivo pessoal

Assim, a sequência dois, as duplas A e B descreveram em sua observação que foi importante relembrar o método do escalonamento, por ser muito útil na resolução de qualquer sistema. Como se observa a figura 71 seguir:

Figura 71: Observação realizada pela dupla B na sequência 2

Na aula, relembramos os métodos de resolução, principalmente o método de escalonamento, que é muito útil para qualquer [illegible] sistema.

Fonte: Arquivo pessoal

Fundamentados em Duval (2003), percebe-se na análise *a posteriori*, a importância da coordenação de registros de representação de um mesmo objeto para a compreensão em matemática. A conversão de registros favorece a compreensão dos objetos matemáticos.

6.2.3 Sequência 3 – Resolvendo sistemas lineares de duas equações e duas variáveis

6.2.3.1 Análise a priori

Neste momento, propõe-se trabalhar com sistemas lineares de duas equações e duas variáveis, sua representação gráfica, bem como outras formas de registros deste sistema linear e a discussão da solução desses sistemas.

Os seguintes objetivos são

a) utilizar o software GeoGebra para representar graficamente as equações apresentadas no sistema linear;

b) observar que uma equação linear de duas variáveis representa uma reta no plano cartesiano;

c) determinar soluções de um sistema linear de duas variáveis;

d) representar um sistema linear de duas equações e duas variáveis e suas soluções por meio de registros diferentes;

e) verificar a relação existente entre um par ordenado (solução de um sistema linear de duas variáveis) e as retas que representam esse sistema linear.

Visando atingir os objetivos acima descritos, faz-se uma leitura do roteiro de aula, dando assim início as duas atividades a que os alunos deviam responder até o fim do período.

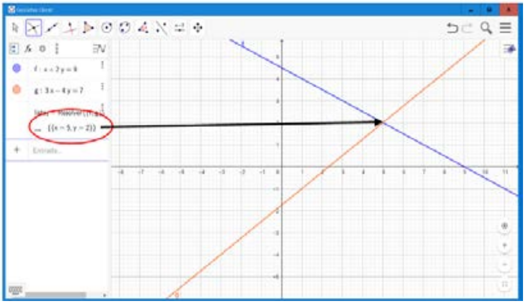
1. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

Resolução

Figura 72: Representação gráfica das retas $x + 2y = 9$ e $3x - 4y = 7$



Fonte: Os autores.

O aluno ao inserir as equações no software, automaticamente, determinará o ponto de intersecção entre as retas.

b) Escreva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ na sua forma matricial (Matriz aumentada).

Resolução

O sistema na forma de matriz aumentada é formado pelos coeficientes das variáveis x e y e pelos termos independentes.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -4 & 7 \end{array} \right\rangle$$

c) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

Resolução

O aluno realizará operações entre as linhas da matriz aumentada, objetivando transformar a matriz em uma matriz escalonada.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -4 & 7 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = 3.L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 10 & 20 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = \frac{1}{10}.L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right\rangle$$

d) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

<u>*Resolução*</u>

O sistema construído a partir da matriz escalonada será

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$x + 2.(2) = 9$$
$$x + 4 = 9$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

$$S:(5,2)$$

e) Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

<u>*Resolução*</u>

O aluno deverá observar que a solução do sistema é representada por um ponto que pertence, simultaneamente, as duas retas que estão representadas pelas equações fornecidas no sistema. Torna-se de fundamental importância que o aluno compreenda a conversão de registro presente nesta atividade.

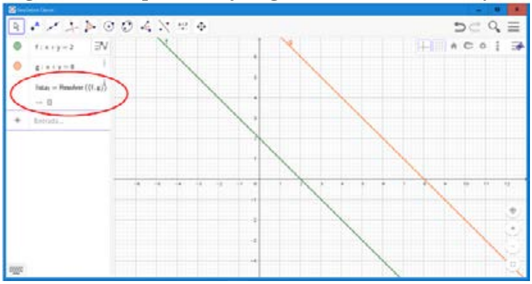
2. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Figura 73: Representação gráfica das retas $x + y = 2$ e $x + y = 8$



Fonte: Os autores.

O aluno ao inserir as equações no software, automaticamente verificará que as retas são paralelas.

b) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual? Se não, justifique sua resposta.

Resolução

Não existe nenhum par ordenado que satisfaça as duas equações simultaneamente, pois as retas obtidas são paralelas. Algo que pode ser verificado facilmente pelo coeficiente angular das equações de retas informadas no sistema. Ambas as equações têm coeficiente angular igual a (-1).

c) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, o que se determina sobre essas retas?

Resolução

As retas informadas no sistema não se cruzam. Logo, são retas paralelas.

d) O que se pode falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Resolução

Como não existe nenhum ponto que satisfaça as duas equações simultaneamente, conclui-se que este sistema não tem solução.

e) Escreva o sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$ na sua forma matricial (matriz aumentada).

<u>*Resolução*</u>

O sistema na forma de matriz aumentada é formado pelos coeficientes das variáveis x e y e pelos termos independentes.

$$\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right\rangle$$

f) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

<u>*Resolução*</u>

O aluno deverá realizar operações entre as linhas da matriz aumentada, objetivando transformar a matriz em uma matriz escalonada.

$$\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right\rangle \rightarrow L_2 = L_1 - L_2$$

$$\left\langle\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right\rangle$$

g) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

<u>*Resolução*</u>

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 0x + 0y = -6 \end{cases}$$

O aluno deverá verificar que a expressão *x*+*y* não pode ser simultaneamente igual a 2 e igual a 8 para os mesmos valores de *x* e *y*, portanto, impossibilitando a determinação da solução do sistema.

Outra forma esperada seria verificar a possibilidade de soluções do sistema por meio da característica de uma matriz.

h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

<u>*Resolução*</u>

O aluno deverá verificar que um sistema linear que não possui solução tem como representação gráfica um par de retas paralelas.

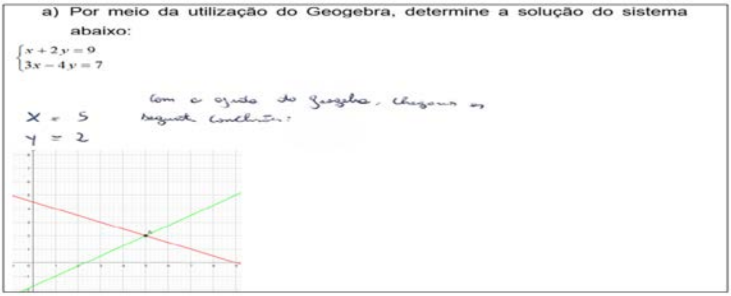
6.2.3.2 Análise a posteriori

A sequência três, para melhor entendimento, foi dividida em duas partes: exercício 1, subdividido em cinco itens e exercício 2 subdividido em oito itens.

No exercício 1, os itens (a), (b) e (c), foram respondidos corretamente e de igual modo por todas as duplas (observe recorte feito nas figuras 74, 75 e 76). Verificou-se que, por meio da conversão do registro da forma tradicional com equações e chave para a forma gráfica, utilizando o GeoGebra, as duplas facilmente identificaram a solução do sistema proposto. Fundamentados na ideia de Duval, entende-se que um mesmo objeto matemático deve ser convertido em ao menos duas diferentes representações para que exista aprendizagem.

> Há uma pluralidade de registros de representações de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (DUVAL, 2003, p.30).

Figura 74: Resolução do item a), atividade 01, sequência 3, feita pela dupla B



Fonte: arquivo pessoal

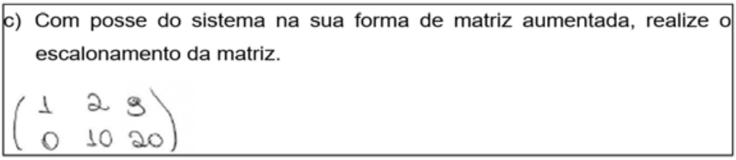
Figura 75: Resolução do item b), atividade 01, sequência 3, feita pela dupla A

b) Escreva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$, na sua forma matricial. (Matriz aumentada)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 76: resolução do item c), atividade 01, sequência 3, feita pela dupla A


c) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

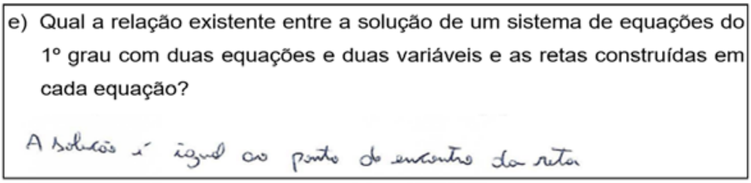
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Observa-se que o item (d) do exercício 1 foi respondido corretamente pelas duplas A, B e C, as quais conseguiram após o escalonamento da matriz aumentada, determinar a solução do sistema linear proposto.

O item (e), por sua vez, questiona a relação entre a solução do sistema linear e a posição das retas obtidas com a representação gráfica do sistema. Observou-se que as duplas conseguiram compreender a relação entre as retas e a solução do sistema linear com duas equações e duas variáveis, como se observa no recorte exposto na figura 77 a seguir:

Figura 77: Resolução do item e), atividade 01, sequência 3, feita pela dupla B


e) Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1° grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

A solucão é igual ao ponto do encontro da reta

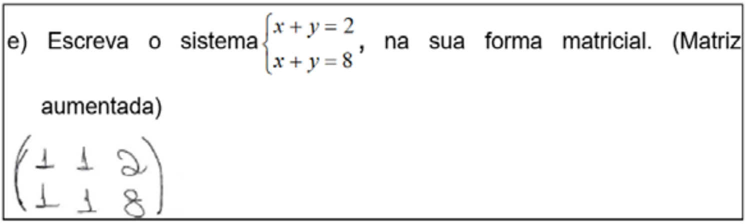
Fonte: Arquivo pessoal

Como já citado nesse trabalho, ancorados em Duval, ressalta-se que a possibilidade de mudança de registro de represetação pode ser um facilitador para aprendizagem do aluno.

No exercício 2, os itens (a), (b), (c) e (d), versavam sobre a representação gráfica do sistema linear proposto e sua solução por meio da utilização do software GeoGebra. Assim, como no exercício anterior, todas as duplas realizaram as conversões necessárias e os itens foram respondidos corretamente e de igual modo por todas as duplas.

Nos itens seguintes do exercício 2 – (e), (f), (g) e (h) – as duplas A, B e C conseguiram desenvolver corretamente todos os itens propostos, como se vê nas figuras 78, 79, 80 e 81 a seguir.

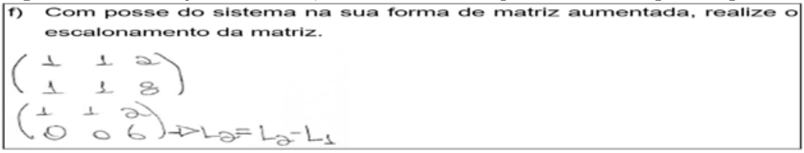
Figura 78: Resolução do item e), atividade 02, sequência 3, feita pela dupla A


e) Escreva o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=8 \end{cases}$, na sua forma matricial. (Matriz aumentada)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 79: Resolução do item f), atividade 02, sequência 3, feita pela dupla A

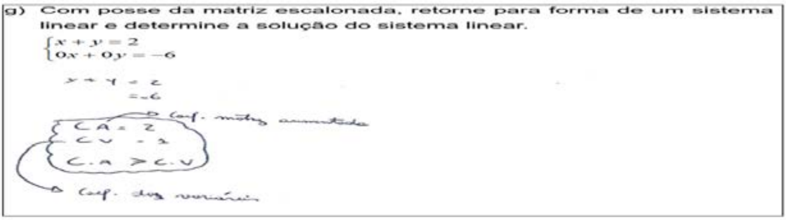

f) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L_2 = L_2 - L_1$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 80: Resolução do item g), atividade 2, sequência 3, feita pela dupla B


g) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

$\begin{cases} x+y=2 \\ 0x+0y=-6 \end{cases}$

$x + y = 2$

$= -6$

Coef. matriz aumentada

CA = 2

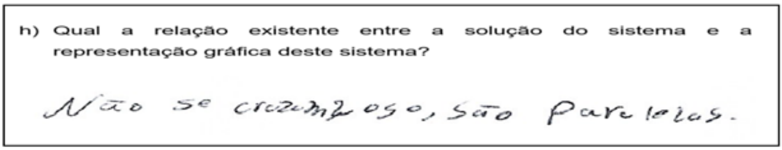
CV = 1

C.A > C.V

Coef. das variáveis

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 81: resolução do item h), atividade 02, sequência 3, feita pela dupla C


h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

Não se cruzam logo, são paralelas.

Fonte: Arquivo pessoal

Constata-se que as duplas não mostraram dificuldades ao realizarem a conversão do registro da forma tradicional com equações e chave para a forma matricial (matriz aumentada), nem mesmo no tratamento dentro da forma matricial, utilizando-se do método do escalonamento. A utilização do método do escalonamento justifica-se por estar alicerçado em operações elementares entre linhas, como já mencionado anteriormente neste trabalho.

6.2.4 Sequência 4 – Resolvendo e classificando Sistemas Lineares de duas equações e duas variáveis

6.2.4.1 Análise a priori

Neste momento, aborda-se o assunto Sistemas Lineares de Duas Equações e Duas Variáveis, a representação gráfica, bem como outras formas de registros deste sistema linear, a discussão da solução do sistema e a classificação.

Tem-se os seguintes objetivos:

a) utilizar o software GeoGebra para representar graficamente as equações apresentadas no sistema linear;

b) observar que uma equação de duas variáveis representa uma reta no plano cartesiano;

c) determinar soluções de um sistema linear de duas equações e duas variáveis;

d) representar um sistema linear de duas equações e duas variáveis e suas soluções por meio de registros diferentes;

e) verificar a relação existente entre um par ordenado (solução de um sistema linear de duas variáveis) e as retas que representam esse sistema linear;

f) classificar sistemas lineares por meio da interpretação de sua representação gráfica;

g) classificar sistemas lineares por meio de uma interpretação de sua representação Matricial (matriz escalonada).

Visando atingir os objetivos acima descritos, fez-se uma leitura do roteiro de aula, dando assim início às duas atividades a que os alunos deviam responder até o fim do período.

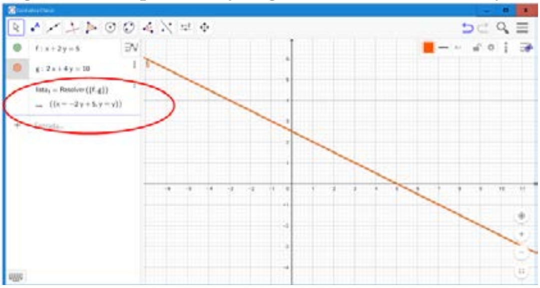
1. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

__Resolução__

Figura 82: Representação gráfica das retas $x + 2y = 5$ e $2x + 4y = 10$



Fonte: Os autores.

Conforme presente na figura 82, o aluno ao inserir as equações no software deverá perceber que uma variável foi escrita em função da outra, gerando, portanto, uma infinidade de soluções.

b) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual? Se não, justifique sua resposta.

__Resolução__

Existem infinitos pares ordenados que satisfazem simultaneamente as equações. Como as retas geradas pelo software são retas coincidentes, todos os pontos que pertencem a uma reta, também pertencem a outra.

c) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, o que determinamos sobre essas retas?

__Resolução__

Existem infinitos pontos em comum entre as duas retas, pois qualquer ponto que satisfaça a relação ($-2y+5$, y), atende as duas retas.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

__Resolução__

O sistema apresentado possui infinitas soluções, pois para qualquer $y \in \Re$ ter-se-á um x correspondente.

e) Escreva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ na sua forma matricial

(Matriz aumentada).

Resolução

O sistema na forma de matriz aumentada é formado pelos coeficientes das variáveis *x* e *y* e pelos termos independentes.

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \right\rangle$$

f) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

Resolução

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = 2.L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

g) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

O aluno deverá verificar que após o escalonamento, existe apenas uma expressão *2x+y=5*, logo, terá uma equação linear com duas varáveis. Portanto, para qualquer valor que atribuir a uma das variáveis, existirá um correspondente para a outra variável. Então, conclui-se que o sistema apresentará infinitas soluções. Outra forma esperada, seria verificar a possibilidade de soluções do sistema por meio da característica de uma matriz.

h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

Resolução

Como o sistema apresentado possui infinitas soluções, existem infinitos pontos que satisfazem ambas as equações, logo trata-se de retas coincidentes.

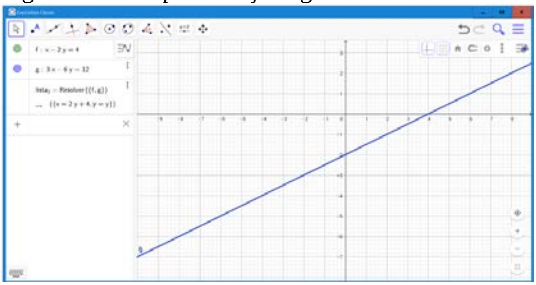
Inicia-se esse momento da aula realizando uma discussão acerca da classificação de um Sistema Linear.

2. Utilizando as discussões realizadas ao longo dessas atividades, classifique os sistemas usando a ferramenta computacional e justificando sua classificação. Na sequência, utilize um método algébrico para classificar os sistemas.

a) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{cases}$

Resolução

Figura 83: Representação gráfica das retas $x - 2y = 4$ e $3x - 6y = 12$



Fonte: Os autores.

O sistema apresentado possui infinitas soluções, pois as retas apresentadas são coincidentes.

Utilizando um método algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = -3.L_1 + L_2$$

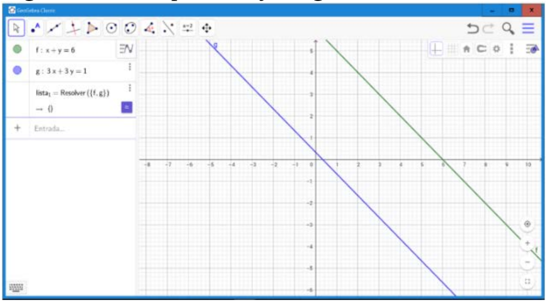
$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

Como a matriz aumentada escalonada, tem 1 linha com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=1. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas uma linha com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=1. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Seja n o número de variáveis do sistema, temos n=2. Se, C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$

Resolução

Figura 84: Representação gráfica das retas $x + y = 6$ e $3x + 3y = 1$



Fonte: Os autores.

O sistema apresentado não possui solução, pois as retas apresentadas são paralelas.

Utilizando um método algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 1 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = -3.L_1 + L_2$$

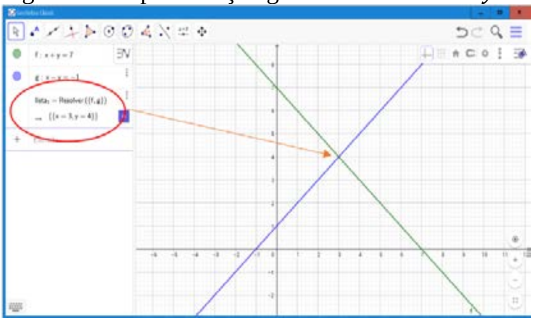
$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -17 \end{array} \right\rangle$$

Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=2. Entretanto, a matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas uma linha com elementos não todos nulos, logo a característica desta matriz Cv=1. Portanto, se Ca > Cv, então, este sistema é incompatível.

c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

<u>Resolução</u>

Figura 85: Representação gráfica das retas $x + y = 7$ e $x - y = -1$



Fonte: Os autores.

O sistema apresentado possui uma única solução, pois as retas apresentadas são concorrentes.

Utilizando um método algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = \frac{1}{2} L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right\rangle$$

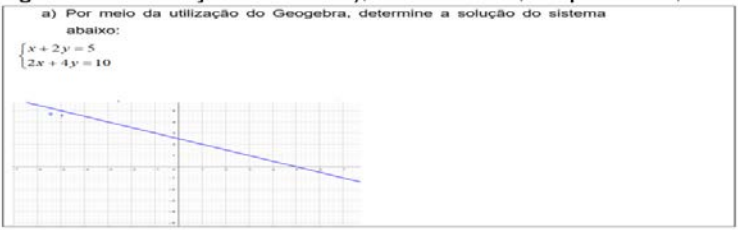
Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=2. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas duas linhas com elementos não todos nulos, logo a característica desta matriz Cv=2. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo n o número de variáveis, temos n=2. Quando C = n, o sistema é compatível e determinado.

6.2.4.2 Análise a posteriori

A sequência quatro, para facilitar o entendimento, foi dividida em duas partes: exercício 1, subdividido em oito itens e exercício 2, subdividido em três itens.

No exercício 1, o item (a) foi resolvido igualmente por todas as duplas. Observe no recorte presente na figura 86, que as duplas compreenderam a representação gráfica do sistema e formalizaram a resposta geometricamente, por meio do software GeoGebra.

Figura 86: Resolução do item a), atividade 01, sequência 4, feita pela dupla D



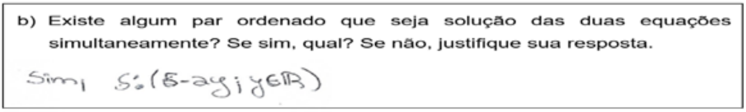
a) Por meio da utilização do Geogebra, determine a solução do sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Os itens (b), (c) e (d) também foram respondidos corretamente e de igual modo por todas as duplas. Como se observa nas figuras 87, 88 e 89.

Figura 87: Resolução do item b), atividade 01, sequência 4, feita pela dupla A

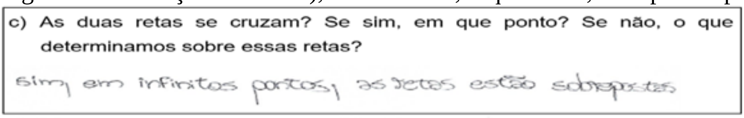


b) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual? Se não, justifique sua resposta.

Sim, $S:(5-2y; y \in \mathbb{R})$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 88: resolução do item c), atividade 01, sequência 4, feita pela dupla A

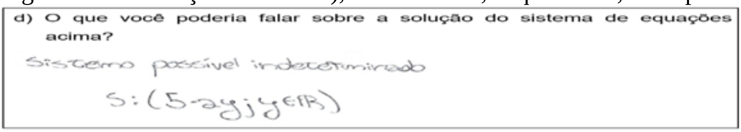


c) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, o que determinamos sobre essas retas?

sim, em infinitos pontos, as retas estão sobrepostas

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 89: Resolução do item d), atividade 01, sequência 4, feita pela dupla A



d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sistema possível indeterminado

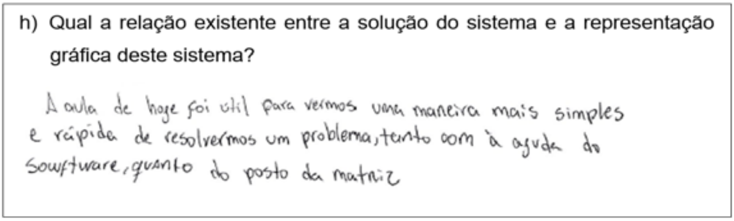
$S:(5-2y; y \in \mathbb{R})$

Fonte: Arquivo pessoal

Neste tópico de sequência que abordava sistema linear com infinitas soluções, verifica-se que os alunos não apresentaram dificuldades em generalizar a solução para o sistema proposto. Palavras da Dupla A: "*Como trata-se de apenas uma equação, basta isolar uma variável*". Novamente pode-se concluir que a conversão do registro tradicional com equações e chave para sua forma gráfica, por meio do GeoGebra, colaborou na construção da ideia mencionada pela Dupla A.

Nos itens seguintes (e), (f), (g) e (h), que consistiam em converter para a forma matricial (matriz aumentada) o sistema linear dado na sua forma com equações e chave tem o intuito de determinar/discutir a solução, destaca-se que todas as duplas alcançaram o objetivo proposto para a aula. Salienta-se, porém, a observação (figura 90) realizada pela dupla A quanto à utilização do software GeoGebra para converter os registros de representação dos sistemas trabalhados.

Figura 90: Resolução do item h), atividade 01, sequência 4, feita pela dupla A


h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

A aula de hoje foi util para vermos uma maneira mais simples e rápida de resolvermos um problema, tanto com à ajuda do Sowftware, quanto do posto da matriz

Fonte: Arquivo pessoal

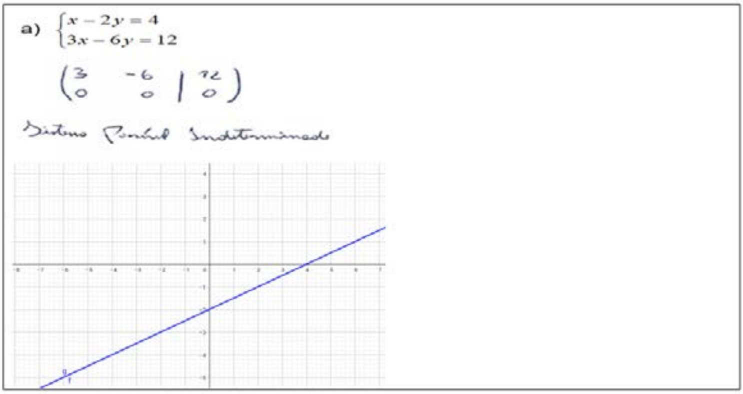
Percebe-se, com isso, que o uso do software GeoGebra tornou-se um facilitador na conversão do registro com equações e chave para sua representação gráfica. Mais que isso, oportunizou que o processo ocorresse de forma rápida e dinâmica. Contribuindo com essa ideia:

> O software Geogebra é uma ferramenta que auxilia no instante de construir ou mobilizar os registros de representação do objeto matemático [...], bem como no momento de analisa-los de forma conjunta, visto que a conversão dos signos matemáticos ocorre de forma rápida, dinâmica, sem provocar dificuldades operatórias que podem gerar obstáculos na construção dos significados. (SILVA, 2014, p. 34).

Nos registros realizados pelos alunos, percebeu-se novamente a facilidade na conversão de registros da forma tradicional do sistema representado com equações e chave para a forma matricial (matriz aumentada). Assim, como na atividade anterior, os alunos optaram por utilizar o escalonamento a fim de determinar a solução do sistema linear.

Dando continuidade a sequência quatro, o exercício 2 versa sobre a classificação de sistemas lineares mediante a conversão de registro da forma com equações e chave para a forma gráfica e por algum meio algébrico. Nessa etapa, todas as duplas obtiveram êxito na resolução dos itens do exercício 2, como se observa no recorte na figura 91.

Figura 91: Resolução do item a), atividade 02, sequência 4, feita pela dupla B



Fonte: Arquivo pessoal

Aponta-se que as duplas não apresentaram dificuldades em realizar as conversões tanto para a forma gráfica, quanto para a forma algébrica (matriz aumentada), fato que contribuiu significativamente para a determinação da solução e posterior classificação dos sistemas propostos.

Para finalizar essa atividade, as duplas fizeram comentários sobre as atividades realizadas até o momento. Verificamos nos registros que o método algébrico (escalonamento) para solução e classificação de sistemas lineares, com a utilização do software GeoGebra, apresentou excelentes resultados no desenvolvimento das atividades. Veja o recorte destacado na figura 92.

Figura 92: Observação realizada pela dupla C na sequência 4

O espaço abaixo está destinado para que possam fazer qualquer tipo de observação quanto à aula ou ao uso do software.

Através do método Algébrico podemos determinar os sistemas rapidamente. O geogebra facilita a observação dos sistemas.

Fonte: Arquivo pessoal

Ao fazer a análise dos registros feitos, percebeu-se também que as duplas efetivaram a transição entre os registros (sistemas com equações e chave, gráfico, matriz aumentada) corretamente, nos fazendo crer, respaldados por Duval (1993, p. 51 apud MORETTI 2012, p. 471), que houve a compreensão efetiva do conteúdo, uma vez que para o autor “a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação[...].”

6.2.5 Sequência 5 – Determinando e/ou verificando soluções de equações de três variáveis

Para um melhor entendimento do leitor, a próxima sequência está dividida em duas partes: anlalisando soluções de equações de três variáveis, determinando soluções para sistemas de equações de três variáveis.

6.2.5.1 Sequência 5A – Verificando soluções de equações de três variáveis

6.2.5.1.1 Análise a priori

Nossa proposta para a iniciar o assunto de Equações Lineares de três variáveis e sua representação gráfica com os alunos tem os seguintes objetivos:

a) utilizar o software GeoGebra para construir a representação gráfica das equações;
b) observar que uma equação de três variáveis representa um plano no espaço tridimensional;
c) verificar a relação existente entre uma terna ordenado (solução de uma equação de três variáveis) e o plano que representa essa equação;
d) mostrar que uma equação linear de três variáveis possui infinitas soluções.

Visando atingir os objetivos acima descritos, faz-se uma leitura do roteiro de aula, dando assim início a atividade abaixo.

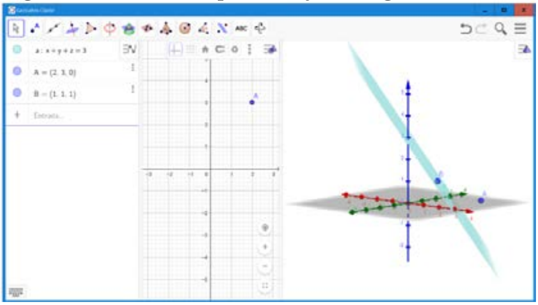
1. Solução de equações com três variáveis.

a) Considere a equação $x + y + z = 3$, verifique se os pontos A: (2;3;0) e B: (1;1;1) pertencem ao plano. Justifique sua resposta. Faça tal verificação por meio da utilização do GeoGebra e por meio de desenvolvimento algébrico.

Resolução

Utilizando o GeoGebra:

Figura 93: Representação gráfica do plano $x + y + z = 3$



Fonte: Os autores.

Ao utilizar o software GeoGebra, o aluno terá a oportunidade de verificar que o ponto A não pertence ao plano e o ponto B pertence ao plano.

Comprovação algébrica:

Basta o aluno substituir as coordenadas indicadas na equação do plano e verificar se é estabelecida uma verdade.

$x + y + z = 3$

$(2) + (3) + (0) = 3$

$5 = 3$ *não é verdade!*

$5 \neq 3$

Portanto, o ponto A:(2,3,0) não pertence ao plano.

$x + y + z = 3$

$(1) + (1) + (1) = 3$

$3 = 3$ *verdade!*

Portanto, o ponto B:(1,1,1) pertence ao plano.

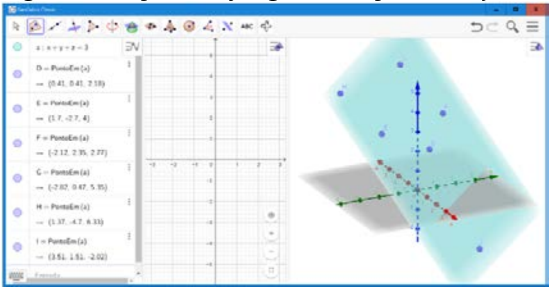
b) Quantos pontos satisfazem a equação $x + y + z = 3$? Liste alguns pontos que satisfazem essa equação. (No mínimo três pontos)

Resolução

Utilizando o GeoGebra:

Ao utilizar o GeoGebra, basta o aluno selecionar a função ponto em objeto e clicar sobre o objeto. Automaticamente, na janela algébrica, surgirão as coordenadas de pontos pertencentes ao plano.

Figura 94: Representação gráfica do plano $x + y + z = 3$ a)



Fonte: Os autores.

Determinação algébrica de pontos pertencentes ao plano: $x + y + z = 3$.

Para tal determinação, basta o aluno determinar aleatoriamente valores para duas das três coordenadas que determinam um ponto.

Exemplo 1:

$$
\begin{aligned}
&x = 0\\
&y = 1\\
&x + y + z = 3\\
&(0) + (1) + z = 3\\
&1 + z = 3\\
&z = 3 - 1\\
&z = 2\\
&P : (0,1,2)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2:

$$
\begin{aligned}
&x = -1\\
&z = -2\\
&x + y + z = 3\\
&(-1) + y + (-2) = 3\\
&-3 + y = 3\\
&y = 3 + 3\\
&y = 6\\
&k : (-1,6,-2)
\end{aligned}
$$

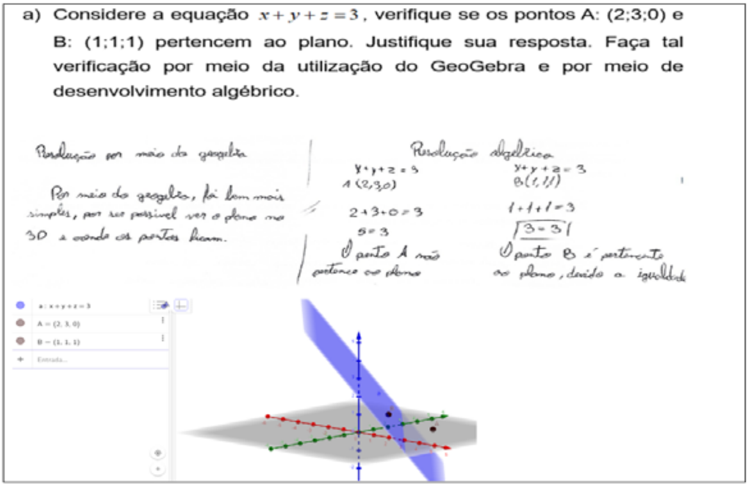
Exemplo 3:

$$
\begin{aligned}
&y = 4\\
&z = -1\\
&x + y + z = 3\\
&x + (4) + (-1) = 3\\
&x + 3 = 3\\
&x = 3 - 3\\
&x = 0\\
&M : (0,4,-1)
\end{aligned}
$$

6.2.5.1.2 Análise a posteriori

Na sequência 5 A, observa-se que as duplas alcançaram o objetivo de verificar se os pontos fornecidos pertenciam ou não ao plano fornecido, tanto pela forma algébrica, assim como realizando a conversão da forma algébrica para a forma geométrica. Observe figura 95.

Figura 95: Resolução do item a), atividade 01, sequência 5A, feita pela dupla D


a) Considere a equação $x+y+z=3$, verifique se os pontos A: (2;3;0) e B: (1;1;1) pertencem ao plano. Justifique sua resposta. Faça tal verificação por meio da utilização do GeoGebra e por meio de desenvolvimento algébrico.

Resolução por meio do geogebra

Por meio do geogebra, foi bem mais simples, por ser possível ver o plano no 3D e onde os pontos ficam.

Resolução algébrica

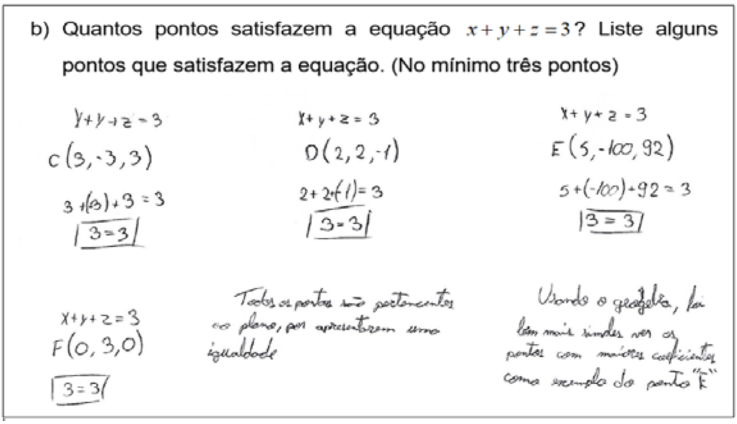
$x+y+z=3$
A(2,3,0)
$2+3+0=3$
$5=3$
O ponto A não pertence ao plano

$x+y+z=3$
B(1,1,1)
$1+1+1=3$
$\boxed{3=3}$
O ponto B é pertencente ao plano, devido a igualdade

Fonte: Arquivo pessoal

Para verificar algebricamente a solução, verifica-se que os alunos não necessitaram fazer mudança de registro. Para o desenvolvimento desse item, os estudantes utilizaram o registro algébrico, efetuando apenas modificações no tratamento dessa escrita, conforme figura 96.

Figura 96: Resolução do item b), atividade 01, sequência 5A, feita pela dupla D


b) Quantos pontos satisfazem a equação $x+y+z=3$? Liste alguns pontos que satisfazem a equação. (No mínimo três pontos)

$x+y+z=3$
C(3,-3,3)
$3+(-3)+3=3$
$\boxed{3=3}$

$x+y+z=3$
D(2,2,-1)
$2+2+(-1)=3$
$\boxed{3=3}$

$x+y+z=3$
E(5,-100,92)
$5+(-100)+92=3$
$\boxed{3=3}$

$x+y+z=3$
F(0,3,0)
$\boxed{3=3}$

Todos os pontos são pertencentes ao plano, por apresentarem uma igualdade

Usando o geogebra, foi bem mais simples ver os pontos com maiores coeficientes como exemplo do ponto "E"

Fonte: Arquivo pessoal

6.2.5.2 Sequência 5B – Determinando soluções de sistemas de equações de três variáveis

6.2.5.2.1 Análise a priori

Dando continuidade à sequência, neste momento conta-se com exercícios que trabalham a resolução de um sistema linear de três equações e três variáveis. Primeiramente, as equações são apresentadas separadamente e, a partir da representação gráfica de cada equação, solicitou-se que determinassem a solução de um sistema formado por essas equações. Ainda, esse exercício busca desafiar os alunos a representar o sistema proposto na forma matricial e, na sequência, resolvê-lo.

Estabeleceu como objetivos para esse momento:

a) usar ferramentas (interseção de duas superfícies e interseção de dois objetos) do GeoGebra para representar planos, retas e pontos no espaço tridimensional;

b) encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis em sua representação gráfica;

c) construir a representação matricial de um sistema linear de três equações e três variáveis;

d) encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis em sua representação matricial;

1. Representação geométrica de equações lineares com três variáveis.

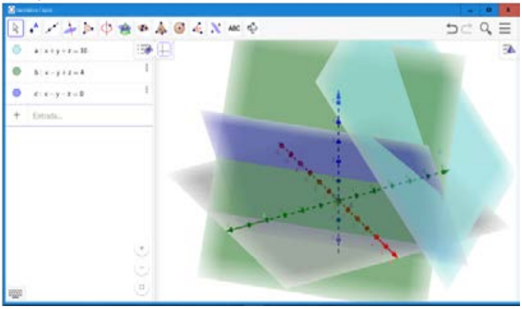
a) Considerando as três equações abaixo, por meio do GeoGebra, construa as representações gráficas de cada uma das equações.

$$x + y + z = 10$$
$$x - y + z = 4$$
$$x - y - z = 0$$

<u>*Resolução*</u>

Representação das equações geometricamente.

Figura 97: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 10$, $x - y + z = 4$ e $x - y - z = 0$.



Fonte: Os autores.

b) Que objeto geométrico, obtém-se na intersecção de dois planos?

Resolução

Na intersecção de dois planos, obtém uma reta.

Teorema da intersecção[5]:

Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a intersecção desses planos é uma única reta que passa por aquele ponto.

c) Em particular neste caso, das equações citadas no item (a), é possível determinar a intersecção comum a estes três planos?

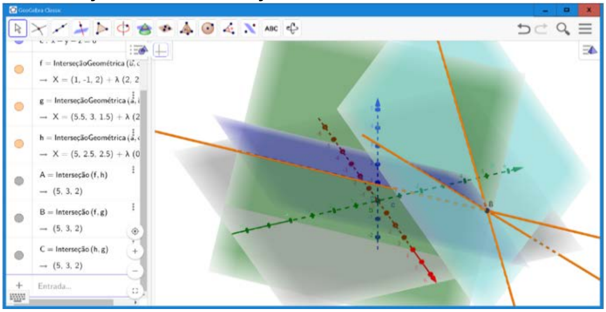
Resolução

Sim. Primeiramente, torna-se necessário gerar a representação gráfica dos três planos simultaneamente e, na sequência, determinar o ponto gerado pela intersecção das retas obtidas pela intersecção dos planos.

Observe figura 98.

[5] A demonstração do teorema, encontra-se disponível em - DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. Fundamentos da Matemática Elementar–Volume 10. p.11,1985.

Figura 98: Representação gráfica do ponto de intersecção dos planos $x + y + z = 10$, $x - y + z = 4$ e $x - y - z = 0$



Fonte: Os autores.

d) Sempre existirá uma intersecção entre três planos?

Resolução

Não, pois os planos podem ser paralelos entre si e sua intersecção seria vazia. Ainda, os planos podem ser secantes dois a dois e as retas de intersecção seriam paralelas entre si. Outra possibilidade é de termos dois planos paralelos e um secante a estes.

e) Substituindo nas equações citadas o ponto encontrado nas interseções dos três planos, o que você pode verificar?

Resolução

O objeto encontrado na intersecção dos três planos foi um ponto de coordenadas (5,3,2). Ao se substituirem as coordenadas do ponto nas equações dos planos, é necessário que se tenha uma verdade.

1°)

$$x + y + z = 10$$
$$(5) + (3) + (2) = 10$$
$$10 = 10 \text{ verdade!}$$

2°)

$$x - y + z = 4$$
$$(5) - (3) + (2) = 4$$
$$4 = 4 \text{ verdade!}$$

3°)

$$x - y - z = 0$$
$$(5) - (3) - (2) = 0$$
$$0 = 0 \text{ verdade!}$$

Como se pode observar, a igualdade foi determinada nas três situações propostas.

f) Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações lineares com três equações e três variáveis e os planos obtidos com cada equação?

Resolução

A solução é um ponto ou um conjunto de pontos que pertence simultaneamente aos três planos obtidos com base nas equações fornecidas.

g) Como se escreve o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ na sua forma matricial?

Resolução

O sistema na forma matricial é:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

h) É possível resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ de uma outra forma que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível desenvolver a resolução. E, se existir mais de um método, apresente-o.

Resolução

1°) Utilizar-se-á o método de Gauss-Jordan ou método do escalonamento:

Primeiramente, deve-se construir uma matriz aumentada composta com os coeficientes das variáveis e com os termos independentes. Na sequência, deve-se realizar operações entre linhas objetivando, triangularizar a matriz. Finaliza-se o método voltando para a forma de sistemas com equações e chave, para assim determinar a solução do sistema.

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow L_3 = L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = \frac{1}{2} L_2 \\ \rightarrow L_3 = -\frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$Sustituindo\ os\ valores\ de\ y = 3\ e\ z = 2\ teremos:$

$$x + 3 + 2 = 10$$
$$x = 10 - 5$$
$$x = 5$$

Solução: (5,3,2)

2°) Utilizar-se-á o método de Cramer:

Primeiramente, deve-se calcular um determinante com os coeficientes das variáveis, que será indicada por D. Na sequência, calculam-se mais três outros determinantes, que seguirão um procedimento análogo; substitui-se a coluna composta pelos coeficientes de uma variável pela coluna composta pelos termos independentes, gerando os determinantes que se indicará por $D_x, D_y\ e\ D_z$. Finalizando, deve-se realizar três operações para determinarmos o valor das variáveis: $x = \frac{D_x}{D};\ y = \frac{D_y}{D};\ z = \frac{D_z}{D}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1-1+1)-(-1-1-1)$$

$$D = (1)-(-3) = 4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (10-4)-(-10-4)$$

$$D_x = (6)-(-14) = 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-4+10)-(4-10)$$

$$D_y = (6)-(-6) = 12$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-10+4)-(-10-4)$$

$$D_z = (-6)-(-14) = 8$$

$$\text{Re}\,alizando\ as\ divisões\ teremos:$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{4} = 5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{12}{4} = 3$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{4} = 2$$

Solução: (5,3,2)

3°) Utilizar-se-á o método da substituição:

Primeiramente, deve-se escolher aleatoriamente uma equação do sistema e na sequência isolar uma das variáveis. Depois, substitui-se a variável isolada nas outras equações do sistema, desta forma obter-se-á um sistema $2x2$, já desenvolvido anteriormente neste trabalho.

$$\begin{cases} x+y+z=10 \rightarrow Equação\,I \\ x-y+z=4 \rightarrow Equação\ II \\ x-y-z=0 \rightarrow Equação\ III \end{cases}$$

$$Isolando\ x\ em\ I\ temos:$$
$$x = 10 - y - z$$
$$Substituindo\ x\ em\ II\ e\ III\ temos:$$
$$\begin{cases} -2y = -6 \rightarrow \div(-2) \\ -2y - 2z = -10 \rightarrow \div(-2) \end{cases}$$
$$Teremos:$$
$$\begin{cases} y = 3 \rightarrow Equação\,IV \\ y + z = 5 \rightarrow Equação\,V \end{cases}$$
$$Substituindo\ IV\ em\,V\ temos:$$
$$3 + z = 5$$
$$z = 5 - 3$$
$$z = 2$$

$$Substituindo\ em\ I\ \ y = 3\ e\ z = 2\ teremos:$$
$$x = 10 - 3 - 2$$
$$x = 5$$

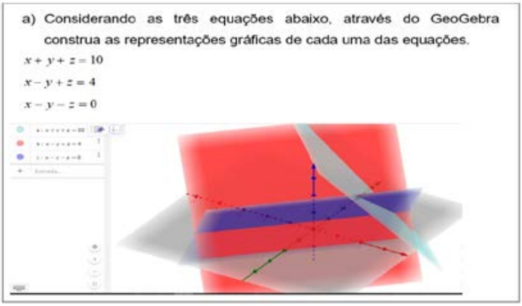
Solução: (5,3,2)

Estas são algumas das formas de se resolver um sistema linear $3x3$. Não significa que são os únicos métodos.

6.2.5.2.2 Análise a posteriori

Na sequência 5B, observa-se que as duplas conseguiram alcançar os objetivos previstos, pois, por meio da conversão de registro da forma algébrica – sistemas com equações e chave – para o registro gráfico, as duplas conseguiram visualizar a relação entre os planos no R^3 e, consequentemente, determinar o conjunto solução do sistema linear proposto, como se observa no recorte presente na figura 99 a seguir:

Figura 99: Resolução do item a), atividade 01, sequência 5B, feita pela dupla B



Fonte: Arquivo pessoal

Destaca-se a resposta fornecida (figura 100) pela dupla A no exercício 1, item (d).

Figura 100: Resolução do item d), atividade 01, sequência 5B, feita pela dupla A.

d) Sempre existirá uma intersecção entre três planos?

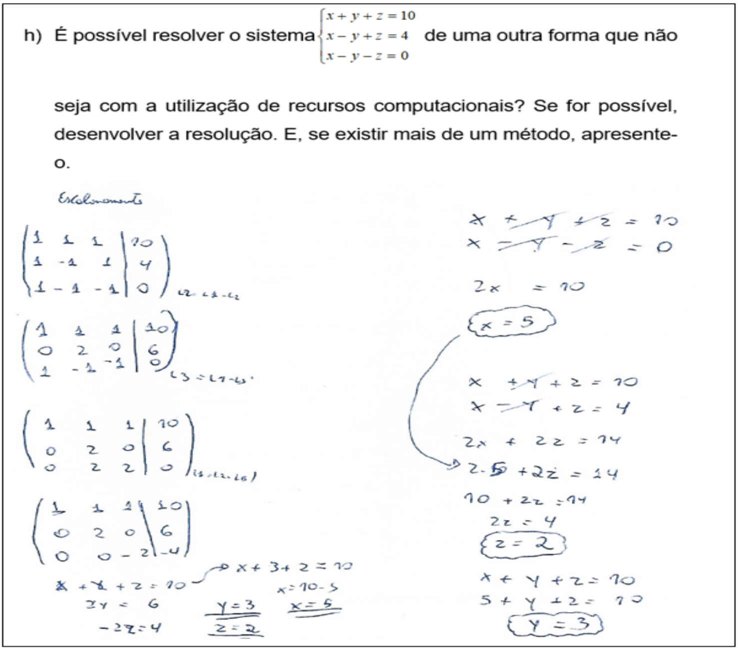
Não, os planos podem ser paralelos.

Fonte: Arquivo pessoal

Cogita-se, com base na afirmação feita pela dupla, que os estudantes basearam-se em situações já discutidas nesse trabalho, as quais se tratavam de posições relativas entre retas. Nesse caso, realizando a variação dos registros de representação das equações lineares (da forma algébrica para a gráfica) poderia oportunizar uma melhor visualização dos planos obtidos com as equações, no espaço tridimensional, e, consequentemente, prever as demais situações.

Os demais itens foram respondidos corretamente por todas as duplas de trabalho, conforme previsto na análise *a priori* já realizada. Destacou-se, porém, que nenhuma resolveu o sistema linear pelo método de Cramer. Recorta-se a figura 101 para ilustrar.

Figura 101:Resolução do item h), atividade 01, sequência 5B, feita pela dupla B.


h) É possível resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ de uma outra forma que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível, desenvolver a resolução. E, se existir mais de um método, apresente-o.

Escalonamento

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$x+y+z=10$, $2y=6$, $-2z=4$; $y=3$, $z=2$; $x+3+2=10$, $x=10-5$, $x=5$

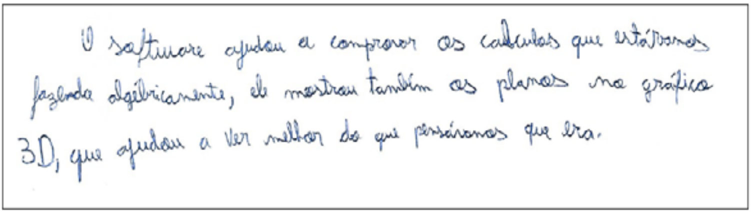
$x+\cancel{y}+\cancel{z}=10$
$x-\cancel{y}-\cancel{z}=0$
$2x=10$
$x=5$

$x+\cancel{y}+z=10$
$x-\cancel{y}+z=4$
$2x+2z=14$
$2\cdot 5+2z=14$
$10+2z=14$
$2z=4$
$z=2$

$x+y+z=10$
$5+y+2=10$
$y=3$

Fonte: Arquivo pessoal

Figura 102:Observação realizada pela dupla B na sequência 5B


O software ajudou a comprovar os cálculos que estávamos fazendo algébricamente, ele mostrou também os planos no gráfico 3D, que ajudou a ver melhor do que pensávamos que era.

Fonte: Arquivo pessoal

Com o recorte (figura 102) obtido, visualizou-se que a interpretação geométrica do sistema linear proposto, auxiliou as duplas na compreensão da solução do sistema linear.

Observou-se que as duplas não tiveram dificuldades em converter o registro do sistema linear da forma tradicional – com equações e chave – para a forma matricial – matriz aumentada. Entende-se que a escolha dos alunos pelo método do escalonamento e o método da adição vem ao encontro das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008), pois estes métodos estão baseados em operações elementares entre linhas.

6.2.6 Sequência 6 – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.6.1 Análise a priori

Neste encontro, trabalhou-se a resolução de sistemas lineares de três equações e três variáveis. Apresentou-se um sistema linear e solicitou-se a solução desse sistema por meio da construção gráfica – usando a ferramenta tecnológica para fazer a conversão de forma rápida e dinâmica – e por método algébrico.

Estabeleceu-se como objetivos para esse momento:

a) usar o software GeoGebra para resolver Sistemas Lineares;

b) encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis por meio de algum método algébrico;

1. Sistema linear $3x3$

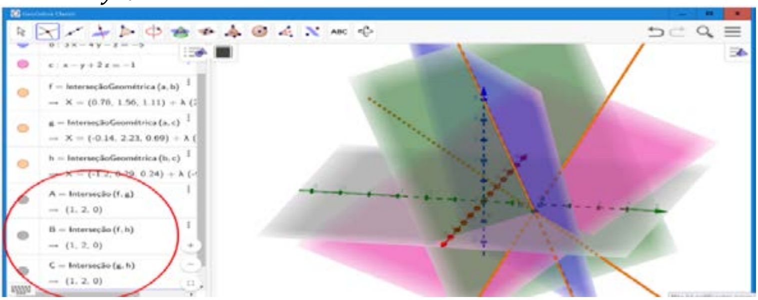
a)Determine, gráfica e algebricamente (escalonamento), a solução do sistema a seguir $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 3x-4y-z=-5 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$

Resolução

Solução gráfica:

Com a utilização do GeoGebra, deve-se gerar os três planos representados no sistema e determinar o ponto de intersecção entre eles.

Figura 103: Representação gráfica dos planos $x+2y+z=5$, $3x-4y-z=-5$ e $x-y+2z=-1$



Fonte: Os autores.

Portanto, como se observa na figura 103, a solução do sistema será a terna ordenada (1,2,0).

<u>Solução Algébrica:</u>

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = -5 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = 3.L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow L_3 = 3.L_1 - 10.L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = \left(\frac{1}{2}\right)L_2 \\ \rightarrow L_3 = \left(\frac{1}{22}\right)L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 5y + 2z = 10 \\ z = 0 \end{cases}$$

$Logo;$
$z = 0$

$5y + 2.(0) = 10$
$y = 2$

$x + 2.(2) + (0) = 5$
$x = 1$

$S : (1,2,0)$

Portanto, a solução do sistema linear é (1,2,0)

a) Relate suas observações sobre a questão apresentada.

<u>Resolução</u>

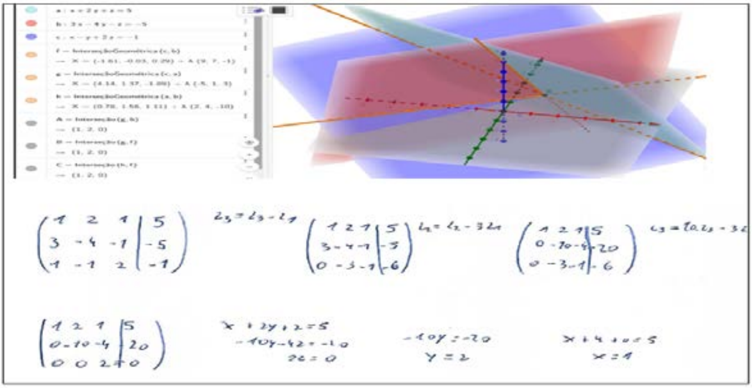
O intuito de se utilizar o GeoGebra é que o aluno escreva as equações do sistema linear na janela algébrica e analise as relações obtidas entre os planos, determinando dessa forma a solução do sistema, caso ela exista.

O objetivo para a solução algébrica é o aluno utilizar a conversão da representação do sistema com equações e chave para a forma matricial (matriz aumentada). Após aplicar o escalonamento, o aluno deve determinar a solução do sistema.

6.2.6.2 Análise a posteriori

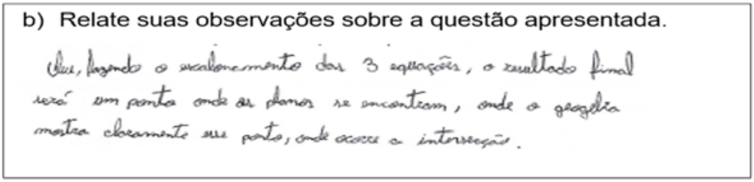
Observa-se, na resolução da sequência seis, que nenhuma dupla apresentou dificuldade em determinar a solução (figura 104) do Sistema Linear proposto. Destaca-se, porém, a observação realizada pela dupla D (figura 105), sinalizando que o registro gráfico ratifica o registro algébrico da solução de um sistema. Mais que isso, entende-se que a variação entre os registros contribui para o aprendizado do aluno.

Figura 104: Resolução do item a), atividade 01, sequência 6, feita pela dupla C.



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 105: Resolução do item b), atividade 01, sequência 6, feita pela dupla D.



Fonte: Arquivo pessoal

6.2.7 Sequência 7 – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

Como já realizado anteriormente nesse trabalho, essa sequência foi dividida em três etapas as quais facilitam a leitura. Para as sequências 7A, 7B e 7C, obtiveram-se os seguintes objetivos:

a) relacionar planos paralelos no espaço tridimensional e sua relação com a quantidade de soluções que pode ser encontrada para um sistema formado pelas equações que determinam esses planos;

b) estabelecer relações entre a forma algébrica de um sistema linear (matriz escalonada) e sua representação geométrica no espaço tridimensional;

Iniciou-se o encontro com a leitura do roteiro de aula e, em seguida, com as atividades.

6.2.7.1 Sequência 7A – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

6.2.7.1.1 Análise a priori

1. Sistema $2x3$:

a) Determine a solução do sistema linear utilizando escalonamento e por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Método Algébrico:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = 2.L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\rangle$$

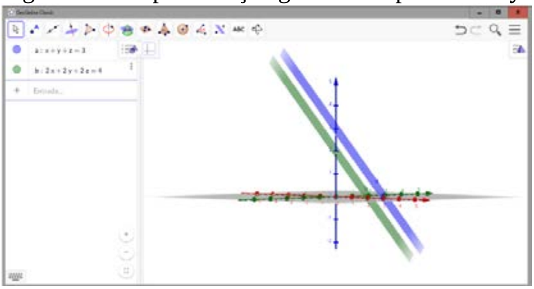
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0.(x + y + z) = 2 \rightarrow 0 \neq 2 \end{cases}$$

Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica dessa matriz é Ca=2. Entretanto, a matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas uma linha com elementos não todos nulos. Logo, a característica desta matriz Cv=1. Portanto, se Ca > Cv, então, este sistema não tem solução.

Graficamente:

Figura 106: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 3$ e $2x + 2y + 2z = 4$



Fonte: Os autores.

Observa-se que os planos obtidos por meio da utilização do GeoGebra são planos paralelos; portanto, a interseção é vazia.

b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Resolução

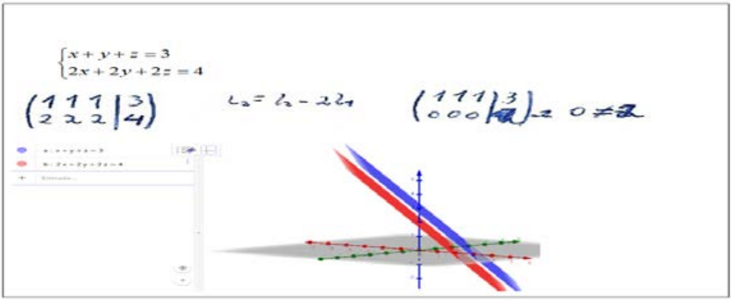
O sistema linear não tem solução, pois não há interseção entre os planos que representam graficamente as equações do sistema. Ou algebricamente, conclui-se que o sistema não tem solução, pois Ca>Cv.

6.2.7.1.2 Análise a posteriori

Na sequência 7A, verifica-se que as duplas não encontraram obstáculos em realizar a conversão do registro da forma tradicional de sistemas lineares – com equações e chave – para a forma gráfica (utilizando do software GeoGebra).

Fazendo a conversão também para a forma de matriz aumentada, todas as duplas realizaram a atividade corretamente. Observe, nas figuras 107 e 108, que mesmo tendo realizado a atividade de maneira correta, os estudantes não formalizaram as respostas que deveriam ser indicadas. Acredita-se que a conversão tenha possibilitado a compreensão da solução do sistema proposto, porém, a não formalização da solução, não satisfez quanto à intensidade dessa compreensão.

Figura 107: Resolução do item a), atividade 01, sequência 7A, feita pela dupla C.



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 108: Resolução do item b), atividade 01, sequência 7A, feita pela dupla C.

b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

As equações demonstram dois planos diferentes e que não possuem pontos comuns.

Fonte: Arquivo pessoal

Tal inquietação levou os pesquisadores a questionar as duplas:

• Pesquisador: *Por que vocês chegaram a esta conclusão após o escalonamento da matriz?*

• Dupla C: *É simples, nenhum número multiplicado por zero pode dar -2 e a gente vê também pelos planos serem paralelos.*

Com base na resposta da dupla, verificou-se que a conclusão está fundamentada na impossibilidade apontada por uma das equações após o escalonamento e que, embora não registrada a solução, a conversão realizada para o registro gráfico contribuiu efetivamente para a compreensão dessa solução.

6.2.7.2 Sequência 7B – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

6.2.7.2.1 Análise a priori

1. Sistema $2x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento e por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

Método Algébrico:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to L_1 \\ \to L_2 = 2L_1 - L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x + y + z = 3$$

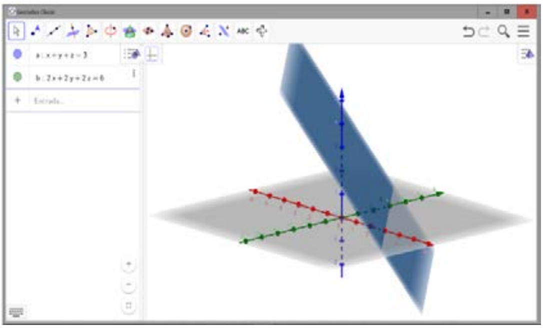
Portanto, a solução do sistema é qualquer terna ordenada que satisfaça a seguinte condição:

$S: (x, y, -x - y + 3)$

Como a matriz aumentada escalonada tem uma linha com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é *Ca=1*. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas uma linha com elementos não todos nulos, a característica desta matriz *Cv=1*. Quando *Ca* = *Cv* = *C*, *C* recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada ou escalonada. Sendo *n* é o número de variáveis do sistema, sendo *n=3*. Se, *C* < *n*, o sistema é compatível e indeterminado.

Graficamente:

Figura 109: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 3$ e $2x + 2y + 2z = 6$



Fonte: Os autores.

Observou-se que os planos obtidos por meio da utilização do GeoGebra são planos coincidentes. Portanto, sua interseção tem infinitos pontos em comum.

b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

<u>*Resolução*</u>

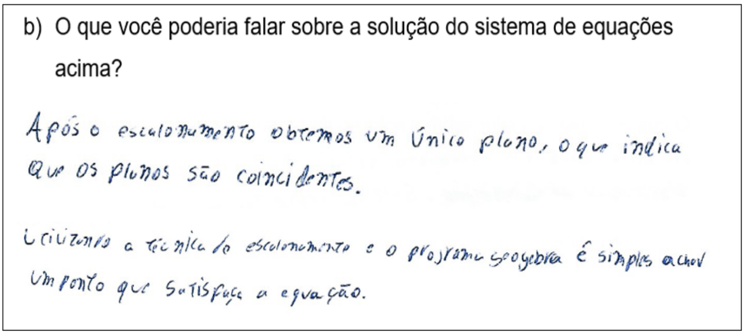
Como há dois planos coincidentes, verificou-se que as duas equações são equivalentes. Portanto, pode-se atribuir quaisquer valores para duas das três variáveis do sistema proposto e determinar o valor da terceira variável. Existem infinitas ternas ordenadas que respeitam a relação indicada na solução a seguir e que, por consequência, representam a solução do sistema.
$S: (x, y, -x - y + 3)$

6.2.7.2.2 Análise a posteriori

Assim como na atividade anterior (7A), nenhuma dupla apresentou dificuldades em resolver o proposto para essa sequência.

Registrou-se mais uma vez que as duplas não formalizaram a resposta solicitada ao problema (determinar a solução). No entanto, vemos no recorte presente na figura 110 e no diálogo estabelecido entre os pesquisadores e a dupla C, que a visualização da solução em dois registros distintos, oportunizou aos estudantes compreenderem a classificação do sistema. Ainda, ressaltou-se que não há elementos que indiquem que os estudantes conseguem determinar o conjunto de solução desse sistema.

Figura 110: Resolução do item b), atividade 01, sequência 7B, feita pela dupla C.


b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Após o escalonamento obtemos um único plano, o que indica que os planos são coincidentes.

Utilizando a técnica do escalonamento e o programa geogebra é simples achar um ponto que satisfaça a equação.

Fonte: Arquivo pessoal

Observe o diálogo estabelecido entre o pesquisador e a dupla C.

• Pesquisador: *Por que vocês chegaram a esta conclusão após o escalonamento da matriz?*

• Dupla C: *É simples, se multiplicarmos toda a equação 1 por 2, as equações ficam iguais logo, tem infinitas soluções.*

Destacou-se, nesse momento, que a conversão do registro para a forma gráfica indica que o sistema apresenta infinitas soluções e, mesmo necessitando trabalhar uma forma de tratamento para indicar a solução, visualizar essa infinidade de soluções indica ao estudante um caminho que ele deve percorrer para indicar formalmente o conjunto solução.

> Uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda tarefa de tratamento parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou uma nova rede conceitual. (DUVAL, 2009, p.99)

6.2.7.3 Sequência 7C – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

6.2.7.3.1 Análise a priori

1. Sistema $2x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Método Algébrico:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle \rightarrow L_2 = 5.L_1 - L_2$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 7y+6z=13 \rightarrow y = \dfrac{13-6z}{7} \end{cases}$$

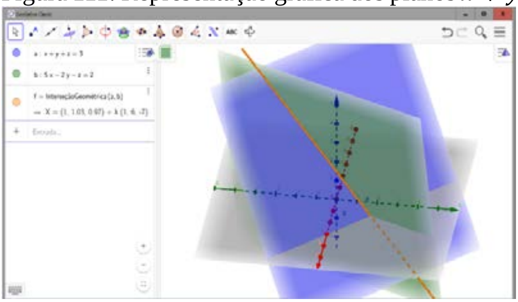
$$Por\tan to;$$
$$x + \frac{13-6z}{7} + z = 3$$
$$x = \frac{8-z}{7}$$

$$S : \left(\frac{8-z}{7}, \frac{13-6z}{7}, z \right)$$

Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=2. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=2. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo n o número de variáveis do sistema, sendo n=3. Se, C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

Graficamente:

Figura 111: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 3$ e $5x - 2y - z = 2$.



Fonte: Os autores.

Verifica-se graficamente que o sistema traz duas equações que representam dois planos não paralelos e não coincidentes. Logo, possui uma interseção. Portanto, há nesta situação dois planos secantes e, em sua interseção, uma reta.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

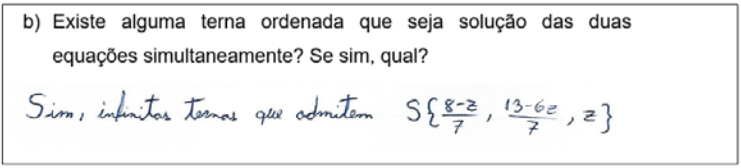
<u>*Resolução*</u>

Observa-se no sistema que na interseção entre os dois planos obteve-se uma reta. Logo, há dois planos secantes. Portanto, os pontos pertencentes a reta que está na interseção dos planos satisfazem a terna ordenada com a característica $\left(\frac{8-z}{7}, \frac{13-6z}{7}, z\right)$ são soluções para sistema linear proposto.

6.2.7.3.2 Análise a posteriori

Destaca-se que todas as duplas realizaram a conversão para a forma gráfica e constataram a infinidade de soluções (ver recorte presente na figura 112).

Figura 112: Resolução do item b), atividade 01, sequência 7C, feita pela dupla D.

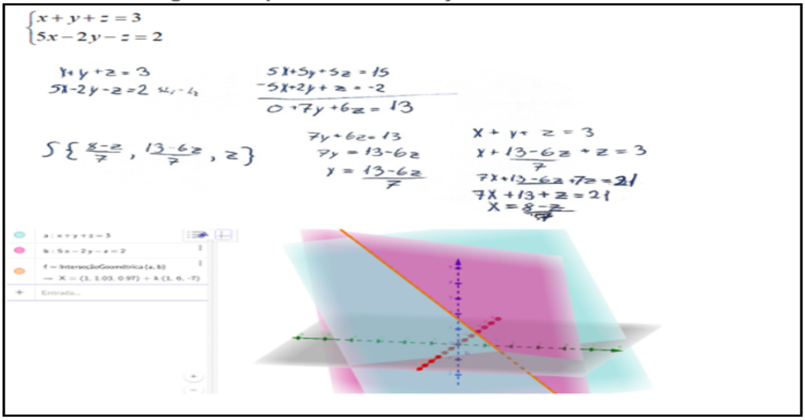

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

Sim, infinitas ternas que admitem $S\left\{\frac{8-z}{7}, \frac{13-6z}{7}, z\right\}$

Fonte: Arquivo pessoal

As duplas A, B e C desenvolveram o sistema por meio do escalonamento e, embora o tenha feito de maneira correta, não formalizaram a solução para esse sistema. Destacou-se, porém, o recorte da dupla D (figura 113), o qual trabalhou o tratamento do sistema na forma com equações e chave e formalizou a solução. Acredita-se que tal fato ocorreu pela similaridade do sistema proposto com sistemas lineares *2x2* e que essa dupla sente-se mais segura em resolver o sistema utilizando tratamentos desse na forma com equações e chave.

Figura 113: Resolução do item a), atividade 01, sequência 7C, feita pela dupla D.



Fonte: Arquivo pessoal

6.3.2.8 Sequência 8 – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

A exemplo da sequência anterior, essa atividade foi dividida em cinco (5) momentos, os quais indicaremos a seguir (8A, 8B, 8C, 8D e 8E). Apresentaremos a sequência e sua análise *a priori* separadamente. Ao final da aplicação, apresentaremos a análise *a posteriori*.

Para o desenvolvimento dessas atividades, tínhamos os seguintes objetivos:

a) Relacionar os planos no espaço tridimensional e sua relação com a quantidade de soluções que podem ser encontradas para um sistema formado pelas equações que determinam esses planos;

b) encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis por meio do método do escalonamento;

c) encontrar a solução de um sistema linear de três equações e três variáveis por meio da utilização do software GeoGebra.

Começou-se a aula com a leitura do roteiro e iniciaram-se as atividades.

6.2.8.1 Sequência 8A – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.8.1.1 Análise a priori

1. Sistema $3x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+3y+z=0 \end{cases}$$

Resolução

Método Algébrico:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ L_2 = -2L_1 + L_2 \\ L_3 = -4L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle L_2 = \left(1/5 \right) L_2$$

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -y+z=0 \rightarrow y=z \end{cases}$$

$$Por\tan to,$$
$$x+2z-z=0$$
$$x=-z$$

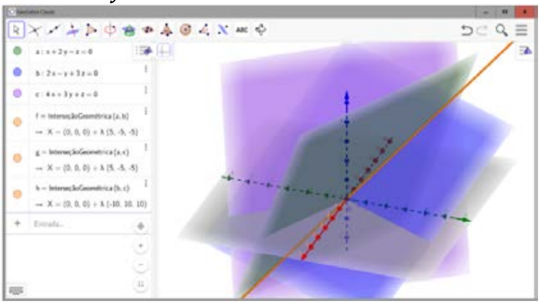
S: (-z, z, z)

Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=2. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=2. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada.

Sendo n o número de variáveis do sistema, sendo n=3. Se, C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

Graficamente:

Figura 114: Representação gráfica dos planos $x + 2y - z = 0$, $2x - y + 3z = 0$ e $4x + 3y + z = 0$.



Fonte: Os autores.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

<u>Resolução</u>

Sim, qualquer terna ordenada que siga o padrão *(-z, z, z)*, será a solução do sistema proposto.

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

<u>Resolução</u>

Observa-se graficamente que o sistema nos traz três equações que representam três planos não paralelos e não coincidentes. Logo, possui uma interseção. Qualquer terna ordenada que siga o padrão (-z, z, z) é um ponto que pertence a essa reta.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

<u>Resolução</u>

Qualquer terna ordenada, que satisfaça a condição estabelecida *(-z, z, z)*, será a solução do sistema proposto. Portanto, ele tem infinitas soluções.

6.2.8.2 Sequência 8B – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.8.2.1 Análise a priori

1. Sistema $3x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Método Algébrico:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \to L_2 = L_1 - L_2 \\ \to L_3 = L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0x+0y+0z=-2 \\ 0x+0y+0z=3 \end{cases}$$

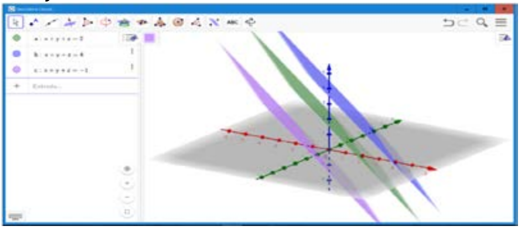
$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0x+0y+0z=-2 \\ 0x+0y+0z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0.(x+y+z)=-2 \to 0 \neq -2 \\ 0.(x+y+z)=3 \to 0 \neq 3 \end{cases}$$

Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=3. Entretanto, a matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem apenas uma linha com elementos não todos nulos. Logo, a característica desta matriz Cv=1. Portanto, se Ca > Cv, então este sistema não tem solução.

Graficamente:

Figura 115: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 2$, $x + y + z = 4$ e $x + y + z = -1$.



Fonte: Os autores.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

Resolução

Não existe nenhuma terna ordenada que satisfaça simultaneamente as três equações, pois

- algebricamente conclui-se que o sistema não tem solução;
- graficamente visualiza-se que os planos são paralelos.

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

Resolução

Observa-se que os planos obtidos por meio da utilização do GeoGebra são planos paralelos. Portanto, sua interseção é vazia.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Resolução

O sistema proposto não tem solução, pois algebricamente mostra-se que Ca > Cv. Então, este sistema não tem solução. E, graficamente, visualiza-se que os planos são paralelos. Logo, não possui solução.

6.2.8.3 Sequência 8C – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.8.3.1 Análise a priori

1. Sistema $3x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 4y + 2z = 12 \\ -x - 2y - z = -6 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 12 \\ -1 & -2 & -1 & -6 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = 2.L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

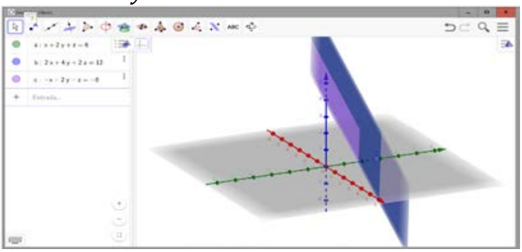
$x + 2y + z = 6$

$S: (x, y, -x - 2y + 6)$

Como a matriz aumentada escalonada tem uma linha com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=1. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem uma linha com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=1. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo n o número de variáveis do sistema, sendo n=3. Se, C < n, o sistema é compatível e indeterminado.

Graficamente:

Figura 116: Representação gráfica dos planos $x + 2y + z = 6$, $2x + 4y + 2z = 12$ e $-x - 2y - z = -6$.



Fonte: Os autores.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

<u>*Resolução*</u>

Sim, existem infinitas ternas ordenadas que satisfazem o sistema proposto, pois como os planos são coincidentes e um plano possui infinitos pontos, haverá infinitas soluções. As ternas ordenadas do tipo $(x, y, -x - 2y + 6)$ são soluções para o sistema dado.

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

<u>*Resolução*</u>

Observa-se que os planos obtidos por meio da utilização do GeoGebra são planos coincidentes. Portanto, sua interseção tem infinitos pontos em comum, sendo estes da forma $(x, y, -x - 2y + 6)$.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

<u>*Resolução*</u>

Como existem infinitos pontos em comum, pode-se admitir que este sistema possui infinitas soluções.

6.2.8.4 Sequência 8D – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.8.4.1 Análise a priori

1. Sistema $3x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento e por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 5x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} L_2 = 2.L_1 - L_2 \\ L_3 = 5.L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \end{array} \right\rangle \rightarrow Trocando\ L_2\ com\ L_3$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

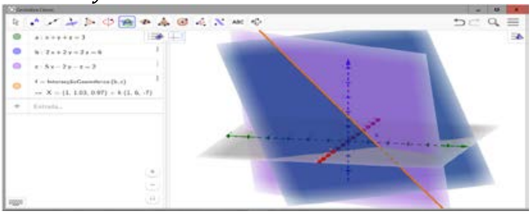
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \rightarrow I \\ 7y + 6z = 13 \rightarrow II \end{cases}$$

$$Em\ II\ vamos\ isolar\ y:$$
$$y = \frac{13 - 6z}{7}$$
$$Em\ I\ vamos\ substituir\ y\ e\ isolarmos\ x:$$
$$x = \frac{8 - z}{7}$$
$$Logo,\ a\ solução\ do\ sistema\ é:$$
$$S: \left(\frac{8 - z}{7}, \frac{13 - 6z}{7}, z \right)$$

Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é *Ca=2*. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz *Cv=2*. Quando *Ca* = *Cv* = *C*, *C* recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo *n* o número de variáveis do sistema. Como *n=3* e, *C* < *n*, o sistema é compatível e indeterminado.

Graficamente:

Figura 117: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 3$, $2x + 2y + 2z = 6$ e $5x - 2y - z = 2$.



Fonte: Os autores.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

Resolução

Sim, existem infinitas ternas ordenadas que satisfazem as três equações simultaneamente. As ternas do tipo $\left(\frac{8-z}{7}, \frac{13-6z}{7}, z\right)$ satisfazem o sistema proposto.

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

Resolução

Observa-se graficamente que o sistema nos traz três equações que representam três planos: sendo dois coincidentes planos “a” e “b” e dois secantes “a” e “c” ou “b” e “c”. Logo, possui uma interseção. Portanto, há nessa situação uma única reta em comum entre os três planos. Logo, qualquer ponto do tipo $\left(\frac{8-z}{7}, \frac{13-6z}{7}, z\right)$ pertencem a essa reta.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Resolução

Como existe uma reta comum aos três planos que compõem o sistema, pode-se afirmar que o sistema possui infinitas soluções. Todos estes pontos pertencem a reta obtida na interseção dos planos.

6.2.8.5 Sequência 8E – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

6.2.8.5.1 Análise a priori

1. Sistema $3x3$:

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

Método Algébrico:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = 2L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = 5L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \end{array}\right\rangle \rightarrow Trocando\ L_2\ com\ L_3$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right\rangle$$

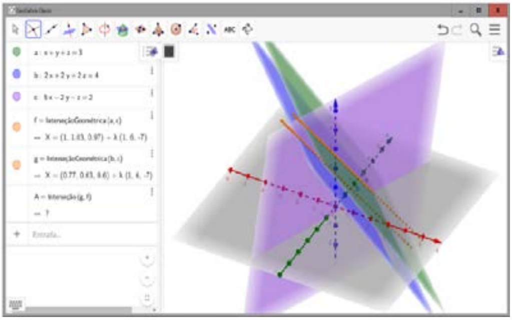
$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 7y+6z=13 \\ 0.(x+y+z)=2 \rightarrow 0 \neq 2 \end{cases}$$

$Sistema\ impossível!$

Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=3. Entretanto, a matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos logo, a característica desta matriz Cv=2. Portanto, se Ca > Cv então, este sistema não tem solução.

Graficamente:

Figura 118: Representação gráfica dos planos $x + y + z = 3$, $2x + 2y + 2z = 4$ e $5x - 2y - z = 2$.



Fonte: Os autores.

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

Resolução

Com base não na solução algébrica e nas observações feitas sobre a representação gráfica do sistema linear, verifica-se que não existem ternas ordenadas que satisfazem simultaneamente todas as equações que compõem o sistema proposto.

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

Resolução

Observa-se graficamente que o sistema nos traz três equações que representam planos: dois paralelos (planos "a" e "b") e um plano secante aos planos "a" e "b" (plano "c"). Pode-se observar que as retas obtidas com as interseções dos planos "a" e "c" e "b" e "c" são retas paralelas; portanto, não possuem pontos em comum. Dessa forma, conclui-se que o sistema não possui solução.

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Resolução

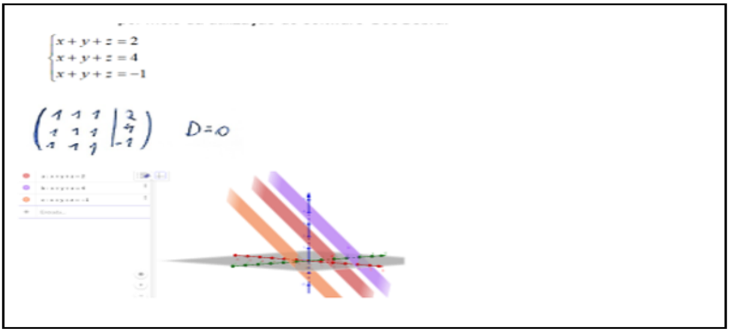
A solução do sistema proposto é um conjunto vazio.

6.2.8.5.2 Análise a posteriori (sequências 8A, 8B, 8C, 8D e 8E)

Considerando a dinamicidade do processo de converter os sistemas dados com equações e chave para a forma gráfica, percebe-se que os alunos apresentaram facilidade em realizar essa conversão e identificar a existência (ou não) de solução para esses sistemas.

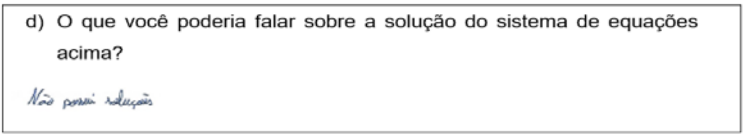
Ainda assim, mesmo tendo visualizado o paralelismo entre os planos e identificado que o sistema da sequência 8B não tem solução, a dupla D, de forma precipitada, utilizando o método de Cramer (não solicitado) afirmou que o sistema não tinha solução (figuras 119 e 120), apresentando apenas o cálculo do determinante formado pelos coeficientes das variáveis (apenas esse cálculo não fornece elementos para tal conclusão). Acredita-se que tal equívoco esteja vinculado ao fato de visualização da forma gráfica permitir que a dupla afirmasse que o sistema não tem solução, mesmo sem precisar realizar qualquer tratamento algébrico.

Figura 119: Resolução do item a), atividade 01, sequência 8B, feita pela dupla D.



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 120: Resolução do item d), atividade 01, sequência 8B, feita pela dupla D.

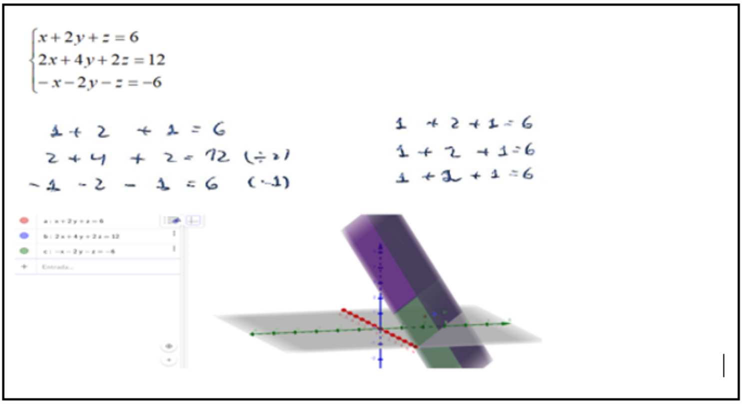

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Não possui soluções

Fonte: Arquivo pessoal

A dupla B, por sua vez, ao analisar a sequência 8C, trabalhou o tratamento algébrico (forma com equações e chave) para concluir, por meio de observações de equações equivalentes, que o sistema dado possuía infinitas soluções Figura 121). Acredita-se que a visualização geométrica contribua significativamente para fundamentar essa busca por equivalência das equações que compõem o sistema.

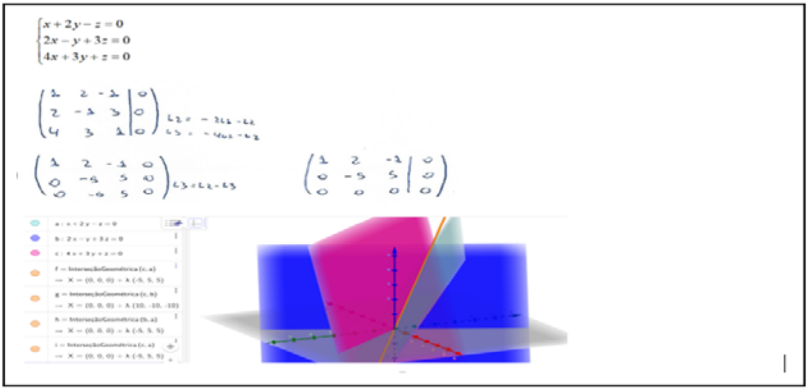
Figura 121: Resolução do item a), atividade 01, sequência 8C, feita pela dupla B.



Fonte: Arquivo pessoal

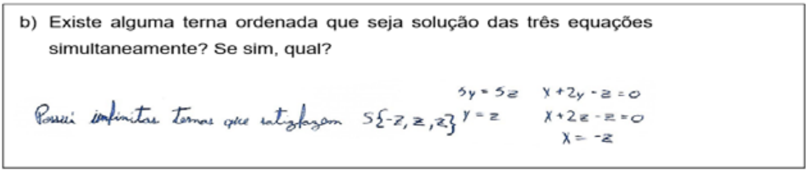
Destacou-se ainda que a Dupla B e a Dupla D, após o escalonamento da matriz, retomaram a forma tradicional de equações para, posteriormente, determinarem o conjunto de solução do sistema proposto (ver figuras 122 e 123). Evidencia-se, dessa forma, que as duplas citadas compreenderam que a conversão pode ocorrer em um duplo sentido, conforme apontado no esquema da figura 1. Mais que isso, entenderam que tais conversões contribuem para a conceitualização da solução do sistema.

Figura 122: Resolução do item a), atividade 01, sequência 8A, feita pela dupla D.



Fonte: Arquivo pessoal

Figura 123: Resolução do item b), atividade 01, sequência 8A, feita pela dupla D.



b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

Possui infinitas ternas que satisfazem $S\{-z, z, z\}$

$5y = 5z$

$y = z$

$x + 2y - z = 0$

$x + 2z - z = 0$

$x = -z$

Fonte: Arquivo pessoal

Salienta-se que as demais atividades foram respondidas corretamente por todas as duplas, conforme previsto em análise *a priori.*

6.2.9 Sequência 9 – Classificando sistemas Lineares 3x3

6.2.9.1 Análise a priori

Iniciou-se o último encontro fazendo o uso da lousa para discutir com os alunos a classificação dos sistemas lineares de três equações e três variáveis quanto ao número de soluções existentes para o sistema.

Para este encontro, havia os objetivos:

a) classificar sistemas de três equações e três variáveis, resolvendo-o algébrica e geometricamente;

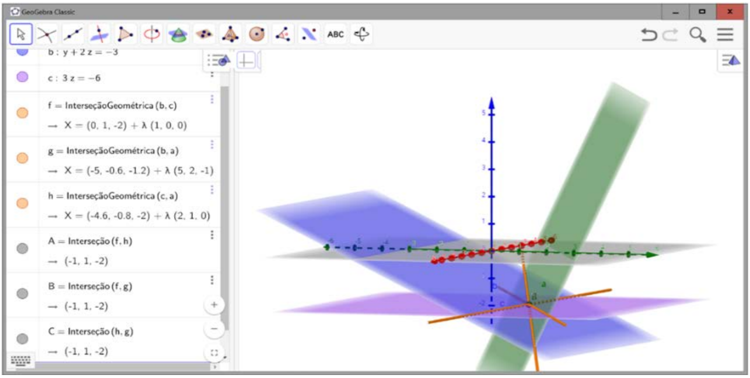
1. Classifique os sistemas usando a ferramenta computacional, justificando a classificação. Na sequência, utilize algum método algébricos para classificar os sistemas.

1. $$\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ y + 2z = -3 \\ 3z = -6 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Graficamente:

Figura 124: Representação gráfica dos planos $x - 2y + z = -5$, $y + 2z = -3$ e $3z = -6$.



Fonte: Os autores.

Este sistema é um sistema compatível determinado, pois apresenta um único ponto em comum, uma única solução.

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right\rangle$$

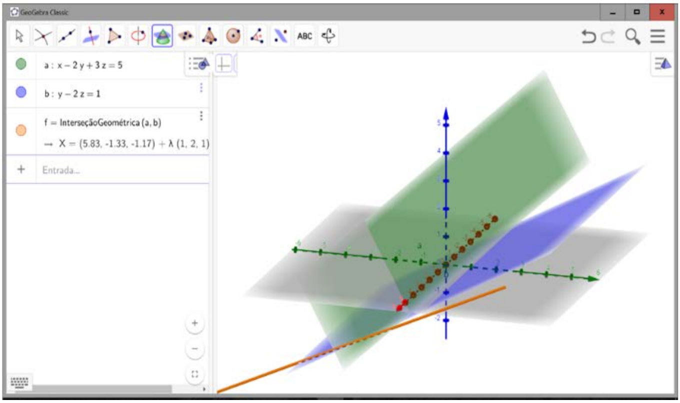
Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é *Ca=3*. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem três linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz *Cv=3*. Quando *Ca* = *Cv* = *C*, *C* recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo *n* o número de variáveis do sistema, sendo *n=3*. Se, *C* = *n*, o sistema é compatível e determinado.

2. $$\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

Graficamente:

Figura 125: Representação gráfica dos planos $x - 2y + 3z = 5 \ e \ y - 2z = 1$



Fonte: Os autores.

Este sistema é um sistema compatível indeterminado, pois apresenta uma reta em comum. Portanto, possui infinitos pontos que servem como solução do sistema.

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right\rangle$$

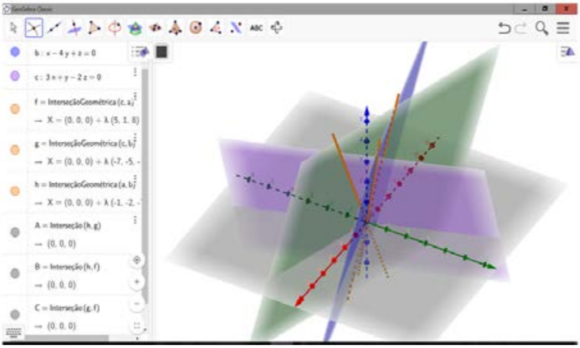
Como a matriz aumentada escalonada tem duas linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é *Ca=2*. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz *Cv=2*. Quando *Ca* = *Cv* = *C*, *C* recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo *n* o número de variáveis do sistema, sendo *n=3*. Se, *C* < *n*, o sistema é compatível e indeterminado.

3. $$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

<u>*Resolução*</u>

Graficamente:

Figura 126: Representação gráfica dos planos $x + 3y - z = 0$, x$-4y + z = 0$ e $3x + y - 2z = 0$.



Fonte: Os autores.

Este sistema é um sistema compatível determinado, pois apresenta um único ponto em comum, uma única solução.

Método Algébrico:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = 3L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 \end{array}\right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow L_3 = 8L_2 - 7L_3 \end{array}$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right\rangle$$

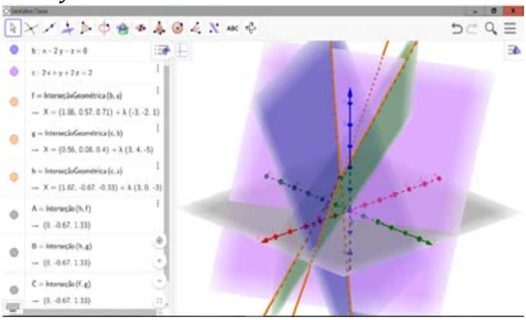
Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=3. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem três linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=3. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo n o número de variáveis do sistema, sendo n=3. Se, C = n, o sistema é compatível e determinado.

4. $$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Resolução

Graficamente:

Figura 127: Representação gráfica dos planos $x - y + z = 2$, $x - 2y - z = 0$ e $2x + y + 2z = 2$.



Fonte: Os autores.

Este sistema é um sistema compatível determinado, pois apresenta um único ponto em comum, uma única solução.

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \rightarrow L_2 = L_1 - L_2 \\ \rightarrow L_3 = 2L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \rightarrow L_3 = 3L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{array} \right\rangle$$

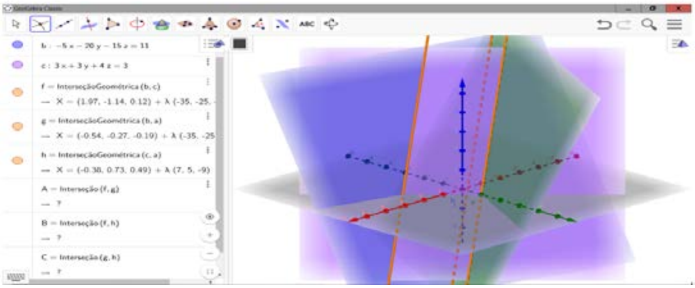
Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=3. A matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem três linhas com elementos não todos nulos, a característica desta matriz Cv=3. Quando Ca = Cv = C, C recebe a denominação de característica da matriz reduzida à forma de escada. Sendo n o número de variáveis do sistema, sendo n=3. Se, C = n, o sistema é compatível e determinado.

5. $$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ -5x - 20y - 15z = 11 \\ 3x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

<u>Resolução</u>

Graficamente:

Figura 128: Representação gráfica dos planos $2x - y + z = -1$, -5$x - 20y - 15z = 11$ e $3x + 3y + 4z = 3$.



Fonte: Os autores.

Método Algébrico:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 20 & -15 & 11 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \to L_2 = 5L_1 + 2L_2 \\ \to L_3 = 3L_1 - 2L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -45 & -25 & 17 \\ 0 & -9 & -5 & -9 \end{array} \right\rangle \begin{array}{l} \\ \\ \to L_3 = -L_2 + 5L_3 \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -45 & -25 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -62 \end{array} \right\rangle$$

Como a matriz aumentada escalonada tem três linhas com elementos não todos nulos, diz-se que a característica desta matriz é Ca=3. Entretanto, a matriz formada apenas pelos coeficientes das variáveis, na forma escalonada, tem duas linhas com elementos não todos nulos logo, a característica desta matriz Cv=2. Portanto, se Ca > Cv então, este sistema é impossível.

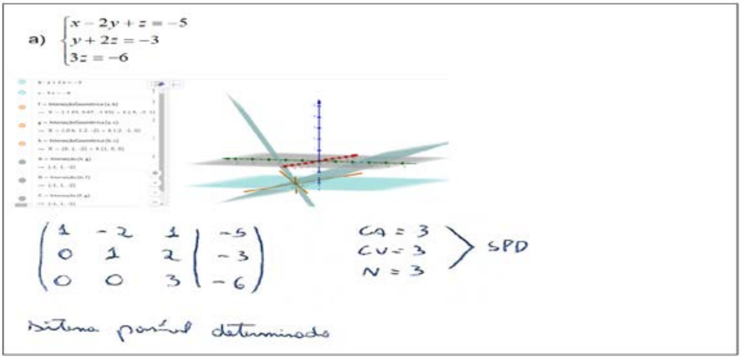
6.2.9.2 Análise a posteriori

Na sequência 9, observou-se que as duplas não encontraram obstáculos em realizar a conversão do registro da forma tradicional de sistemas lineares – com equações e chave – para a forma gráfica.

Da mesma forma, verificou-se que também não apresentaram dificuldades de converter para a forma matricial (matriz aumentada).

Após conversão, todas as duplas utilizaram como forma de tratamento do sistema na sua forma matricial o método do escalonamento. Observe o recorte da produção da dupla B na figura 128.

Figura 129: Resolução do item a), atividade 01, sequência 9, feita pela dupla B



Fonte: Arquivo pessoal

Destaca-se que todas as duplas responderam às atividades corretamente, conforme previsto em análise *a priori*.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar esse trabalho, sugeriu-se uma proposta que objetiva conceitualizar os diversos tipos de soluções dos sistemas lineares em suas possíveis representações, ancorados na Teoria de Representações Semióticas de Duval. Foi apresentada a seguinte questão norteadora para esta pesquisa: **Uma proposta de aprendizagem, construída como uma sequência didática, que contribua para discutir a classificação de sistemas lineares a partir da exploração e conversão entre os registros gráficos, algébricos – conforme representação tradicional com equações e chave – e matriciais (matriz aumentada)? Como essas conversões auxiliam para que os alunos tenham melhor compreensão não apenas para determinar o conjunto de solução de um sistema linear, mas para entender esse conjunto, classificá-lo e discuti-lo, quando necessário?**

Esses momentos em que se viveu como pesquisador para elaboração desse trabalho têm um considerável valor na construção do conhecimento. Colocar em primeiro lugar o olhar de pesquisador e deixar em segundo plano a visão de mestrando. A fim de criar essa metodologia de trabalho, posicionou-se diante do desafio de mergulhar profundamente no estudo dos Sistemas Lineares e se questionar de que forma o aluno aprende e, principalmente, se as ferramentas que estavam disponíveis para ensinar eram suficientes para garantir o aprendizado efetivo dos alunos.

Caminhando em busca de uma resposta para esse questionamento, sugeriu-se a elaboração e a aplicação de uma sequência didática. Baseado nas respostas atribuídas aos exercícios encontrados nas sequências de aula e nas colocações feitas pelas duplas participantes desta pesquisa, validou-se a proposta e sugeriu-se a aplicação dessa para o ensino de Sistemas Lineares. Com a análise dos dados, refletiu-se que a metodologia apresentada auxiliaria positivamente no aprendizado dos alunos. Tal análise mostra que os discentes compreenderam a solução e classificação de um Sistema Linear quando resolvido pelo método gráfico e pelo método algébrico. E, promoveram as conversões entre os registros de representações do Sistema quando solicitados. Respaldados por Duval (1993, p. 51 apud MORETTI 2012, p. 471), entende-se que houve a compreensão do conteúdo, uma vez que para o autor "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação[...]."

No decorrer do desenvolvimento desse trabalho, observou-se que todos os livros analisados, apresentam elementos que permitem que os alunos trabalhem o objeto matemático Sistemas Lineares em ao menos dois registros de representação e, mais que isso, transitem entre eles, proporcionando assim, aprendizado do conteúdo. Contudo, ressalta-se que ainda se verifica uma pouca utilização de recursos computacionais, como ferramentas facilitadoras na conversão de registros.

Durante a produção deste trabalho, obtiveram-se diversos momentos de enriquecimento, destacando-se o estudo do referencial teórico. Em que, respaldados em Duval, a prática docente encontra uma possibilidade de como professores ser revista.

As tecnologias apresentam hoje um papel central no desenvolvimento da sociedade, em particular, da educação. A utilização do software GeoGebra no desenvolvimento desta pesquisa foi essencial para garantir o sucesso de sua aplicação. Pensar nas conversões dos registros de forma imediata e dinâmica seria impossível sem se apossar do software, principalmente quando se trabalha no R^3.

Pensa-se ser importante fazer uma reflexão da prática diária como professor. Além disso, centrar essa visão para o espaço da sala como docentes, significa, muitas vezes, direcionar o trabalho para um ensino voltado ao uso apenas dos livros didáticos e de resumos de aula, que em sua maioria apresentam uma matemática limitada e desconectada da realidade, que não aborda o conteúdo como um todo e não promove as transformações necessárias para garantir a aprendizagem dos alunos. Precisa-se investigar, criar, experimentar novas propostas de trabalho. Sabe-se que a sociedade está em constante transformação e necessita-se promover mudanças significativas no ensino da matemática, de forma que acompanhe a sociedade.

Ressalta-se que este não foi o primeiro momento que os alunos tiveram contato com o tema Sistemas Lineares, e que o trabalho que se desenvolveu esteve voltado para a discussão e classificação por meio das conversões entre a forma tradicional com e equações e chave, a forma matricial (matriz aumentada) e a forma gráfica. Entretanto, a aprendizagem desse objeto matemático não se esgota com este trabalho, é necessário aprofundar as discussões sobre o conteúdo, procurando sempre variar a forma de representação do objeto matemático, tanto nas conversões quanto nos tratamentos.

> *Uma aprendizagem especificamente centrada sobre a conversão de representações e efetuada fora de toda tarefa de tratamento parece, então, necessária ao início de todo ensino que dá acesso a um novo domínio ou a uma nova rede conceitual. (DUVAL, 2009, p. 99)*

Portanto, esta dissertação ressalta o sucesso da proposta e destaca que foi aplicada em um colégio da rede particular de ensino de Florianópolis. Como o software utilizado é gratuito, sugeriu-se a aplicação desse em instituições de ensino públicos e particulares, de forma que se possa fazer uma comparação dos resultados.

Ao encerrar o trabalho, reflete-se sobre as inquietações iniciais ao se perceber que o caminho quando percorrido com determinação, constância e alegria é recompensador e proporciona uma sensação de missão cumprida.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em Pesquisa e Avaliação Educacional.** Brasília: Líber Livro, 2005. (Pesquisa, v. 13).

ALMOULOUD, S. A. **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**, *In*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem em Matemática: Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus, 2003, p. 125-146. (Papirus Educação).

BOEMO, M. S. **Os registros de representação semiótica mobilizados no estudo de sistemas lineares no ensino médio.** 2015. 165 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais do ensino médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Secretária da Educação Média e Tecnológica**. Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Médio – Matemática (PNLD)**. Brasília: MEC, 2005.

BRASIL. Secretária da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática / Secretária de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretária da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretária da Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – **Orientações curriculares para o ensino médio**; vol. 2. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, v. 2, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Documento preliminar. MEC. Brasília, DF, 2017.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: análise de professores polivalentes em relação ao ensino de Geometria. **Revista Vidya**, Santa Maria, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul/dez., 2010.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre a educação e matemática. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 1986.

D'AMBROSIO, U. **A era da consciência:** aula inaugural do primeiro curso de pós graduação em ciências e valores humanos no Brasil. São Paulo: Fundação Peirópolis, 1997.

DIVISÃO SUL AMERICANA DA IGREJA ADVENTISTA DO SÉTIMO DIA. **Pedagogia Adventista.** Tatuí, SP: CPB, 2009.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar, 9**: geometria plana.. São Paulo: Atual, 1995. (v. 9).

DOLCE, O.; IEZZI, G.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**: 8º ano. 6°ed. São Paulo: Atual, 2009.

DUTRA, Alexandre dos Santos; VALENÇO, Ingrid Regina Pellini. Matemática 8. **Tatuí, SP: Casa Publicadora Brasileira**, 2012.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP. vol. 5, p. 37 – 65. 1993

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e o funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática:** registros de representações semióticas. 2. ed. São Paulo: Papirus, 2003, p. 11-33. (Papirus Educação).

DUVAL, R. **Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Universidade del Valle, 2004.

DUVAL, R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 27 set. 2017. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais** (Fascículo I). 1ª Ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FREITAS, I. M., **Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu significado para o Aluno**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

IEZZI, G.; et al. **Matemática**: ciência e aplicações, 2013, p.109 -110. vol 2.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar, 4:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. Atual, 2004.

JORDÃO, A. **Um Estudo sobre a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio**. 2011. 192 f. Diss. Dissertação de Mestrado Profissional (PUC/SP)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 4ª. ed. Campinas: Papirus, 2006.

LOPES, L. M., **Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares através da Metodologia de Resolução de Problemas para o Ensino Médio**. Livro Eletrônico dos Núcleos de Ensino da Unesp, p. 247-263, 2008.

MACHADO, S. D. A. **O Universitário principiante x Significado dos Sistemas de Equações** *in* Anais do IV EPEM – pp. 241- 248. São Paulo: SBEM, 1996. SÃO PAULO. Secretária de Estado da Educação.

MORAN, J. M.; MASETTO, M.; BEHRENS, M. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 3 ed. Campinas: Papirus, 2001.

MOREIRA, A. F. B.; KRAMER, S. Contemporaneidade, educação e tecnologia. **Educ. Soc. Campinas**, v. 28, n. 100, out. 2007, p. 1037-1057.

MORETTI, M. T. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. Itajaí: **Contrapontos**. n. 6. p. 23-37. set/dez 2002.

PANTOJA, L. F. L. **A Conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares**. 2010. 105 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Pará, 2008.

PONTE, J. P. Estudos de caso em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 25, 2006.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta curricular**: uma contribuição para a escola pública do pré-escolar, 1º grau, 2º grau e educação de adultos. Florianópolis: IOSC, 1991.

SANTAELLA, L. **A tecnocultura atual e suas tendências futuras Signo y Pensamiento**, n. 60, enero-junio, 2012, pp. 30-43. Pontificia Universidad Javeriana Bogotá, Colombia.

SANTOS, S. S. **O desenvolvimento de conceitos elementares do bloco tratamento de informação com auxílio do ambiente computacional:** um estudo de caso com uma professora do 1º e 2º ciclo do Ensino Fundamental. 2003. Dissertação (Mestrado) – Programa de pós-graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

SILVA, M. J. **Registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações de 1º grau com duas variáveis usando o software GeoGebra.** Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.. **Geometria analítica**. McGraw-Hill, 1987.

UNIÃO SUL BRASILEIRA DA IASD (USB). **Educação Integral Restauradora Linha Pedagógica Adventista**. Maringá: Sthampa, 1999.

VASCONCELOS, C. S. **Construção do Conhecimento em Sala de Aula.** São Paulo: Libertad, 1993.

WHITE, E. G. **Educação**. Tatuí, SP: CPB, 2008c.

WINTERLE, P.; STEINBRUCH, A. **Álgebra linear**. São Paulo: 2ª ed. McGraw-Hill, 1987.

XAVIER, A. C. Educação, tecnologia e inovação: o desafio da aprendizagem hipertextualizada na escola contemporânea. **Revista (Con) Textos Linguísticos**, v. 7, n. 8.1, 2013.

APÊNDICE A – Autorização da instituição de ensino para a aplicação da sequência didática

Ao Exmo.

Sr. Diretor do Colégio Adventista de Florianópolis – Centro

Prof. Douglas Leal dos Santos

ACEITE PARA DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Declaro para os devidos fins e efeitos legais que tomei conhecimento da pesquisa acadêmica sob responsabilidade de Jefferson Jacques Andrade, mestrando do programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica da UFSC e como responsável legal pela instituição, autorizo a execução de sequências didáticas junto aos alunos para a finalidade acima descrita, declaro que acompanharei o seu desenvolvimento para garantir que será realizada dentro do que preconiza a Resolução CNS 466/12, de 12/09/2012 e complementares.

Prof. P/ Malton de O. Fuckner

Diretor

(escola)

76.726.884/0095-08

INST. ADVENTISTA SUL BRAS. DE EDUCAÇÃO

(Colégio Adventista de Florianópolis-Centro)

Rua Visconde de Ouro Preto, 347

Centro - CEP 88020-040

FLORIANÓPOLIS - SC

APÊNDICE B - Termo de consentimento livre e esclarecido

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa intitulada: “Registro de representação semiótica: construção dos diversos tipos de soluções de sistemas lineares usando o software GeoGebra”

Esta pesquisa faz parte de uma das etapas de uma dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina e tem por objetivo, analisar os diversos tipos de soluções dos sistemas lineares em suas possíveis representações. Propondo uma forma de abordagem para a classificação de sistemas lineares, tomando por base a teoria semiótica de aprendizagem de Duval.

Os procedimentos de coleta de dados ocorrerão da seguinte forma: as atividades serão aplicadas com alguns alunos de uma turma de 3º ano do ensino médio do Colégio Adventista de Florianópolis – Centro, no laboratório de informática, em horário extraclasse. Os alunos participantes, foram voluntários para desenvolver os exercícios propostos na sequência. A sequência será colocada aos alunos por meio de roteiro de aula, em que eles devem, com o auxílio do GeoGebra 6.0.400.0-offline, responder aos exercícios e entregar para o pesquisador no final do período a fim de que sejam feitas as análises. Os arquivos construídos no GeoGebra serão encaminhados por e-mail, nomeados e enumerados, facilitando a análise dos dados. Ressalta-se aqui que a escolha pelo software GeoGebra vincula-se ao fato de ser este é um software livre, intuitivo e por rodar nas principais plataformas de computadores que são: Windows, Mac OS X e Linux. Além das plataformas dos sistemas móveis: Android e IOS. Durante o desenvolvimento da pesquisa, serão feitos registros fotográficos, para caracterizar o ambiente no qual foi desenvolvido o estudo.

No entanto, ressalta-se que você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar e caso venha a se sentir desconfortável com algum questionamento, você poderá retirar sem consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não acarretará em qualquer penalidade.

Os pesquisadores irão tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo – eles serão os únicos a terem acesso aos documentos; no entanto, pode ocorrer uma remota possibilidade da quebra do sigilo, mesmo que involuntário e não intencional, cujas consequências serão tratadas nos termos da lei. Os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados em encontros ou revistas científicas e mostrarão apenas os resultados obtidos como um todo, sem revelar seu nome, instituição ou qualquer informação relacionada à sua privacidade.

O registro de seu consentimento será realizado por meio de sua declaração e concordância. Esse documento ficará disponível para você e para os pesquisadores em formato digital ou para impressão (guarde cuidadosamente a sua via, pois é um documento que traz importantes informações de contato e garante os seus direitos como participante da pesquisa). Ressalta-se que você não terá nenhuma despesa advinda da sua participação na pesquisa.

Além disso, o pesquisador responsável, que assina esse documento, compromete-se a conduzir a pesquisa de acordo com preceitos éticos e da proteção aos participantes da pesquisa.

Você poderá entrar em contato com o pesquisador pelo telefone (48)99135-2503, e-mail jeffersonjacquesandrade@gmail.com

Declaro que li este documento e obtive todas as informações que julguei necessárias para me sentir esclarecido e optar por livre e espontânea vontade participar da pesquisa.

Florianópolis,____ de___________________________ de 2017

Jefferson Jacques Andrade
Pesquisador Responsável

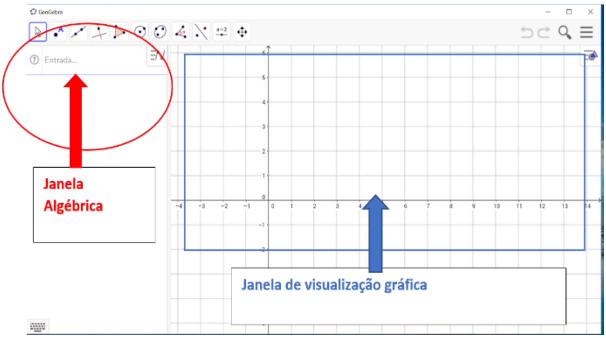
____
Participante da pesquisa e/ou responsável

APÊNDICE C - Sequência didática desenvolvida pelos autores

Sequência 1 – Familiarização com o software GeoGebra e alguns recursos básicos

1. O ponto no plano cartesiano.

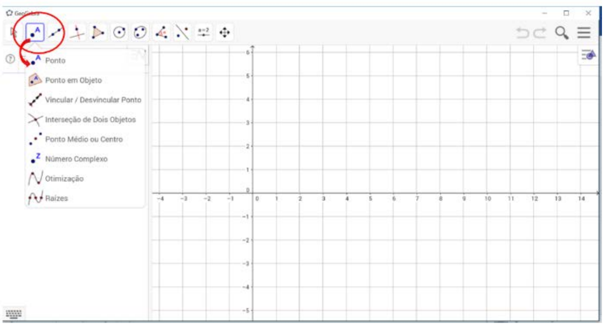
a) Clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho. Você observará o surgimento de duas janelas: **janela algébrica e janela de visualização gráfica.**



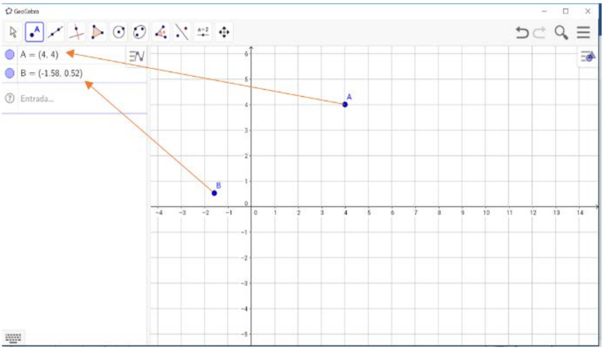
A **janela algébrica** exibe as informações algébricas dos objetos que estão na área de visualização (janela gráfica).

A **janela de visualização gráfica** permite realizar construções geométricas (pontos, retas, planos etc) por meio dos ícones disponíveis na barra de ferramentas ou pela digitação que pode ser realizada na janela de álgebra.

b) Clicar em  e na sequência em .



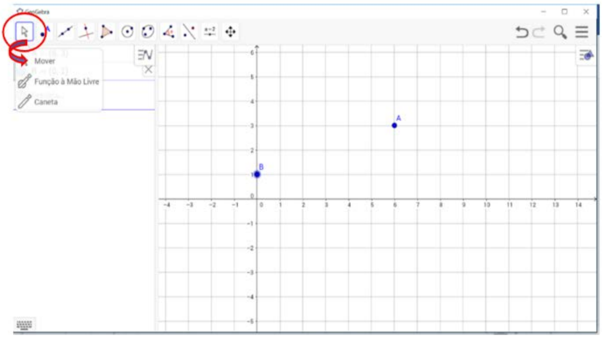
c) Clique dentro da janela de visualização (perceba que cada ponto colocado está sendo registrado na janela algébrica com as coordenadas do tipo $(x\,, y)$.



d) Caso queira deletar algum ponto, basta clicar uma vez sobre as coordenadas desse ponto na janela algébrica e em seguida apertar **delete**.

e) Caso queira movimentar qualquer ponto colocado na janela de visualização, clique em , e na sequência em 

.



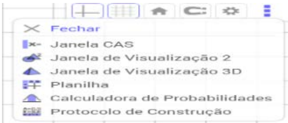
Em seguida, clique com o mouse sobre o ponto e arraste-o para onde desejar.

2. O ponto no espaço.

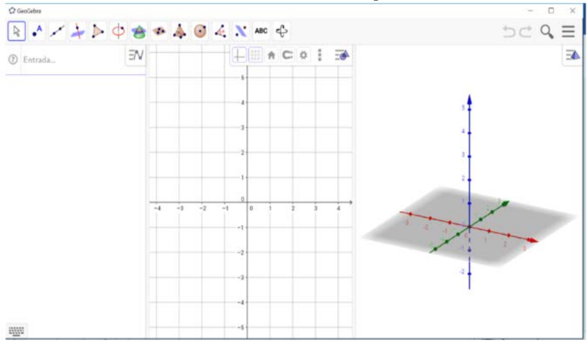
a) Clicar duas vezes sobre o ícone 

na área de trabalho. Aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica.

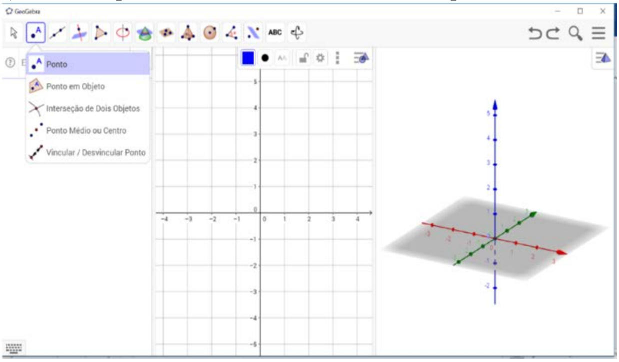
b) Clique no botão *alternar barra de estilos* . Abrirá uma janela . Nesta janela, você irá selecionar .

Abrirá a nova janela 

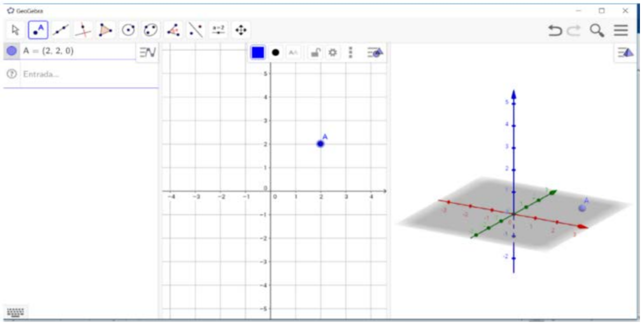
, então você selecionará a *Janela de Visualização 3D.*



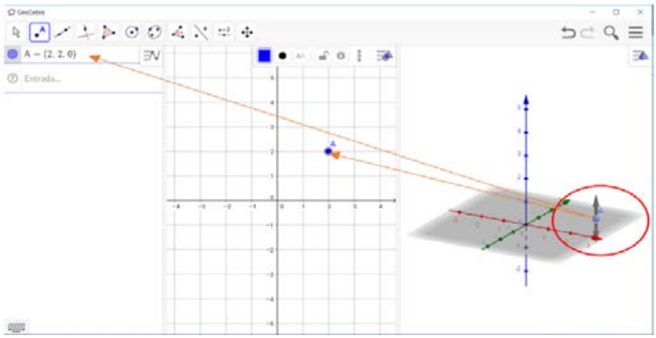
c) Na sequência, clicar em  e na sequência em 



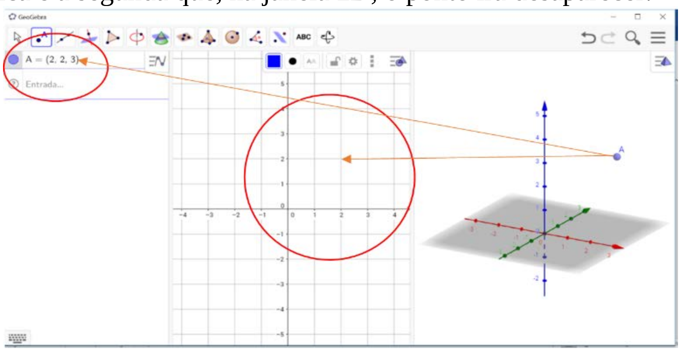
Em seguida, ao levar o cursor sobre o plano que está sombreado na janela 3D, você observará o surgimento de um , sobre o plano sombreado. Posicione-o onde desejar e, na sequência, dê um clique. Você observará o surgimento de um ponto tanto na janela algébrica quanto na janela 2D.



d) Em seguida, posicione o cursor sobre o ponto na janela 3D, você observará o surgimento de duas setas com sentido contrário, indicando que você pode mover o ponto nestes dois sentidos.

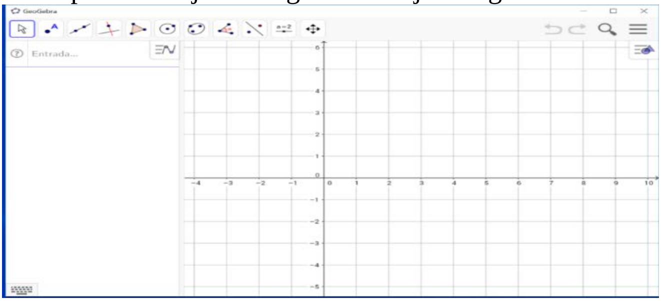


Na sequência, arraste o ponto para onde você desejar. Você observará duas mudanças: a primeira nas coordenadas do ponto na janela algébrica e a segunda que, na janela 2D, o ponto irá desaparecer.

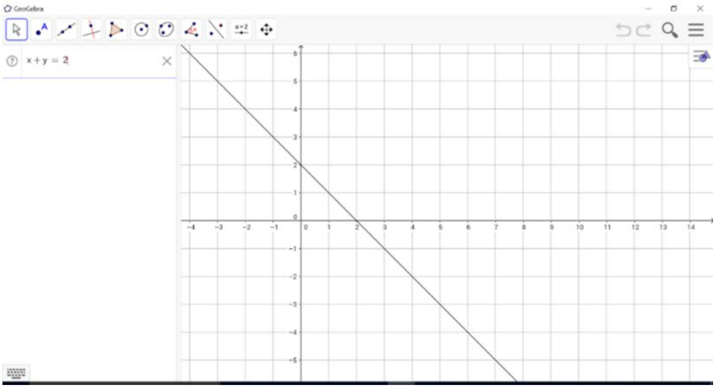


3. A reta no plano cartesiano

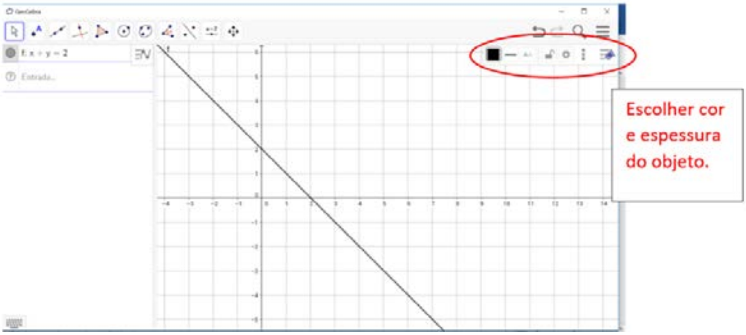
a) Clicar duas vezes sobre o ícone GeoGebra na área de trabalho. Aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica



b) Na janela de entrada, digitar a seguinte equação: $x + y = 2$



Clicando sobre a reta, você terá um menu  que permitirá alterar a cor da linha, assim como a espessura de seu traçado:



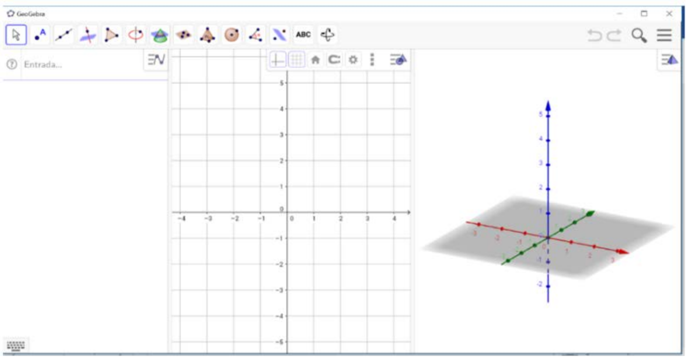
4. O plano no Espaço

1. Clicar duas vezes sobre o ícone  na área de trabalho. Aparecerá a janela algébrica e a janela gráfica.

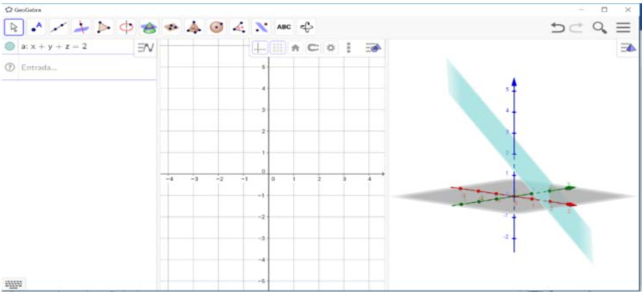
2. clicando no botão *alternar barra de estilos* , abrirá a janela . Nesta janela você selecionará .

Abrirá a nova janela 

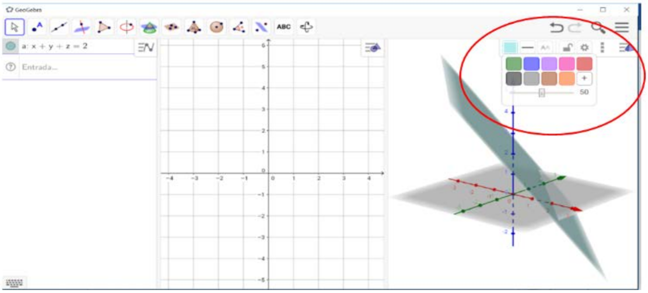
, então você selecionará *Janela de Visualização 3D*, pois trabalharemos com equações que possuem três variáveis e, cada variável corresponde a uma dimensão.



3. Na janela de entrada, digitar a seguinte equação: $x + y + z = 2$



Clicando sobre o plano, você terá um menu  , que permitirá alterar a cor do objeto, bem como a espessura de sua superfície.



Sequência 2 – Verificando soluções de equações de duas variáveis e determinando soluções de sistemas de equações de duas variáveis.

1. **Relação entre ponto e reta**

a) Considerando a equação da reta *r*: $x - y = 4$, verifique se o ponto (1,5) pertence a reta *r*. Justifique sua resposta.

b) Considere a equação da reta s: $x + y = 10$, verifique se o ponto (1,5) pertence a reta s. Justifique sua resposta.

c) O ponto (7,3) pertence a reta r, indicada no exercício 01? O ponto (7,3) pertence a reta s, indicada no exercício 02? Justifique sua resposta.

d) Qual a relação que você estabelece entre o ponto (7;3) e as retas r e s?

e) Olhando apenas a janela gráfica, você consegue identificar mais pontos (diferentes do anterior) que satisfazem as duas equações simultaneamente? Se sim, quais?

f) Baseado no que se verificou, qual outra interpretação pode-se atribuir ao ponto (7;3)?

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

g) O que significa o ponto (7;3) no sistema ?

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

h) Como poderíamos escrever o sistema , na sua forma matricial (matriz aumentada)?

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

i) É possível resolver o sistema de outra forma que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível resolver, desenvolva a resolução. E, se existir mais de um método, apresente-o.

j) Que tipo de relação geométrica, poderíamos estabelecer entre

$$\begin{cases} r: x - y = 4 \\ s: x + y = 10 \end{cases}$$

as retas r e s apresentadas no sistema ?

Sequência 3 – Resolvendo sistemas lineares de duas equações e duas variáveis.

1. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-4y=7 \end{cases}$$

b) Escreva o sistema $\begin{cases} x+2y=9 \\ 3x-4y=7 \end{cases}$ na sua forma matricial (Matriz aumentada).

c) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

d) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

e) Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações do 1º grau com duas equações e duas variáveis e as retas construídas em cada equação?

2. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=8 \end{cases}$$

b) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual? Se não, justifique sua resposta.

c) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, o que determinamos sobre essas retas?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

e) Escreva o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=8 \end{cases}$ na sua forma matricial (matriz aumentada).

f) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

g) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

Sequência 4 – Resolvendo e classificando Sistemas Lineares de duas equações e duas variáveis

1. Sistema linear $2x2$

a) Por meio da utilização do GeoGebra, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$

b) Existe algum par ordenado que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual? Se não, justifique sua resposta.

c) As duas retas se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, o que se determina sobre essas retas?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

e) Escreva o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ na sua forma matricial (Matriz aumentada).

f) Com posse do sistema na sua forma de matriz aumentada, realize o escalonamento da matriz.

g) Com posse da matriz escalonada, retorne para forma de um sistema linear e determine a solução do sistema linear.

h) Qual a relação existente entre a solução do sistema e a representação gráfica deste sistema?

2. Utilizando as discussões realizadas ao longo dessas atividades, classifique os sistemas usando a ferramenta computacional e justifique sua classificação. Na sequência, utilize um método algébrico para classificar os sistemas.

a) $$\begin{cases} x-2y=4 \\ 3x-6y=12 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x+y=6 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Sequência 5 – Determinando e/ou verificando soluções de equações de três variáveis

Para um melhor entendimento do leitor, a próxima sequência está dividida em duas partes: a fim de verificar soluções de equações de três variáveis e determinar soluções para sistemas de equações de três variáveis.

Sequência 5A – Verificando soluções de equações de três variáveis

1. Solução de equações com 3 variáveis.

a) Considere a equação $x+y+z=3$, verifique se os pontos A: (2;3;0) e B: (1;1;1) pertencem ao plano. Justifique sua resposta. Faça tal verificação por meio da utilização do GeoGebra e por meio de desenvolvimento algébrico.

b) Quantos pontos satisfazem a equação $x+y+z=3$? Liste alguns pontos que satisfazem essa equação. (No mínimo três pontos)

Sequência 5B – Determinando soluções de sistemas de equações de três variáveis

1. Representação geométrica de equações lineares com três variáveis.

a) Considerando as três equações abaixo, por meio do GeoGebra construa as representações gráficas de cada uma das equações.

$$x+y+z=10$$
$$x-y+z=4$$
$$x-y-z=0$$

b) Que objeto geométrico se obteve na intersecção de dois planos?

c) Em particular neste caso, das equações citadas no item (a), é possível determinar a intersecção comum a estes três planos?

d) Sempre existirá uma intersecção entre três planos?

e) Substituindo nas equações citadas o ponto encontrado nas interseções dos três planos, o que você pode verificar?

f) Qual a relação existente entre a solução de um sistema de equações lineares com três equações e três variáveis e os planos obtidos com cada equação?

g) Como se pode escrever o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ na sua forma matricial?

h) É possível resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=4 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ de uma outra forma que não seja com a utilização de recursos computacionais? Se for possível, desenvolver a resolução. E, se existir mais de um método, apresente-o.

Sequência 6 – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema linear $3x3$

a) Determine, gráfica e algebricamente (escalonamento), a solução do sistema a seguir $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 3x-4y-z=-5 \\ x-y+2z=-1 \end{cases}$

b) Relate suas observações sobre a questão apresentada.

Sequência 7 – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

Como já realizado anteriormente neste trabalho, essa sequência foi dividida em três etapas que buscam facilitar a leitura. Para as sequências 7A, 7B e 7C, havia os seguintes objetivos:

Sequência 7A – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

1. Sistema *2x3:*

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \end{cases}$$

b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 7B – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

1. Sistema *2x3:*

a) Determine a solução do sistema linear utilizando o escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \end{cases}$$

b) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 7C – Determinando soluções de sistemas lineares com duas equações e três variáveis

1. Sistema *2x3:*

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das duas equações simultaneamente? Se sim, qual?

Sequência 8 – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

A exemplo da sequência anterior, essa atividade foi dividida em cinco (5) momentos, os quais se indicarão a seguir (8A, 8B, 8C, 8D e 8E).

Sequência 8A – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema *3x3:*

a) Determine a solução do sistema linear utilizando escalonamento e por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+3y+z=0 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 8B – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema *3x3:*

a) Determine a solução do sistema linear utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z=-1 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 8C – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema *3x3:*

a) Determine a solução do sistema linear utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+2y+z=6 \\ 2x+4y+2z=12 \\ -x-2y-z=-6 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 8D – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema *3x3:*

a) Determine a solução do sistema linear, utilizando escalonamento por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 8E – Determinando soluções de sistemas lineares com três equações e três variáveis

1. Sistema *3x3:*

a) Determine a solução do sistema linear utilizando escalonamento e por meio do software GeoGebra.

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=4 \\ 5x-2y-z=2 \end{cases}$$

b) Existe alguma terna ordenada que seja solução das três equações simultaneamente? Se sim, qual?

c) Os três planos se cruzam? Se sim, em que ponto? Se não, então como esses planos são classificados?

d) O que você poderia falar sobre a solução do sistema de equações acima?

Sequência 9 – Classificando sistemas Lineares 3x3

1. Classifique os sistemas usando a ferramenta computacional e justificando a classificação. Na sequência, utilize algum método algébricos para classificar os sistemas.

a) $$\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ y+2z=-3 \\ 3z=-6 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ y-2z=1 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-4y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$$

d) $$\begin{cases} x-y+z=2 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ -5x-20y-15z=11 \\ 3x+3y+4z=3 \end{cases}$$