

JOSÉ ARTHUR MARTINS

**INVESTIGAÇÃO DOS OBSTÁCULOS DE APRENDIZAGEM  
NO CONTEXTO DA DINÂMICA DAS ROTAÇÕES**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Educação Científica e Tecnológica.

Orientador: Prof. Dr. José de Pinho Alves Filho

Florianópolis  
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária  
da UFSC.

Martins, José Arthur

INVESTIGAÇÃO DOS OBSTÁCULOS DE APRENDIZAGEM NO  
CONTEXTO DA DINÂMICA DAS ROTAÇÕES / José Arthur  
Martins ; orientador, José de Pinho Alves filho,  
2018.

175 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e  
Tecnológica, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Ensino de  
Física. 3. Obstáculos de Aprendizagem. 4. Dinâmica  
das Rotações. I. de Pinho Alves filho, José . II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III.  
Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

**“Investigação dos obstáculos de aprendizagem no contexto da  
dinâmica das rotações”**

Tese submetida ao Colegiado do Curso de  
Doutorado em Educação Científica e  
Tecnológica em cumprimento parcial para  
a obtenção do título de Doutor em  
Educação Científica e Tecnológica

APROVADA PELA COMISSÃO EXAMINADORA EM 27 DE MARÇO DE 2018

Dr. José de Pinho Alves Filho (Orientador - CFMU/FSC):

Dr. Francisco Catelli (Examinador - Dpto de Física/UCS):

Dr. Lucio Sartori Farenzena (Examinador - CFMU/FSC):

Dr. Paulo José Sena dos Santos (Examinador - CFMU/FSC):

Dra. Tatiana da Silva (Examinadora Suplente - CFMU/FSC):

  
Prof. Dr. José Francisco Custódio Filho  
Coordenador do PPGECT

  
José Arthur Martins  
Florianópolis, Santa Catarina, 2018



À “dona” Terezinha e ao “seu” Romeu  
(in memoriam)

Meus pais, por ensinarem-me a trilhar  
o caminho da honestidade, da sabedoria  
e do amor.

À Fernanda Miotto por todos os  
momentos que passamos e passaremos  
juntos, pelo carinho, pela compreensão,  
pelo amor...em especial nos últimos  
meses de elaboração desse trabalho,  
sem o teu apoio certamente seria tudo  
mais difícil. Por significar o alicerce da  
minha existência.



## AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho encontrei o apoio de várias pessoas, em diversos espaços e momentos. Algumas contribuíram compartilhando suas experiências e conhecimentos e outras, não menos importantes, com o seu carinho e compreensão. Portanto, todas elas, cada uma do seu jeito, possibilitaram e acompanharam a realização deste estudo.

Agradeço:

Ao professor e amigo José do Pinho Alves Filho, orientador, pela dedicação, empenho, compreensão, amizade, competência e profissionalismo demonstrados nesta caminhada, contribuindo em muito para meu aperfeiçoamento.

Aos colegas, professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, pelo agradável e produtivo convívio durante esse período.

Às minhas queridas tias: Helena, Margarida, Verônica e Bernadethe e a minha irmã Ana, que nos momentos mais difíceis desta jornada sempre estiveram presentes dando o apoio silencioso, muito obrigado.

A minha “segunda família”, Sergio e Ofélia, que mesmo distantes sempre fizeram o possível para dar todo o apoio necessário. Obrigada por me aceitarem nesta família.

A Universidade de Caxias do Sul e em especial aos colegas da Física, pelo apoio e incentivo nos momentos difíceis desta trajetória. Obrigado a todos.

Aos “irmãos” que a vida me deu, Valquíria e Odilon, obrigado.

Ao “decano” da área da Física pelos valiosos ensinamentos nesta caminhada: Francisco Catelli. Meu muito obrigado.



“Ninguém pode construir em teu lugar as pontes que precisarás passar, para atravessar o rio da vida. Ninguém, exceto tu, só tu. Existem, por certo, atalhos sem números, e pontes, e semideuses que se oferecerão para levar-te além do rio; mas isso te custaria a tua própria pessoa; tu te hipotecarias e te perderias. Existe no mundo um único caminho por onde só tu podes passar. Onde leva? Não perguntes, segue-o!”

(Friedrich Nietzsche, 1883)



## RESUMO

No campo da pesquisa em Ensino de Física, a Mecânica tem sido uma das áreas mais investigadas. As investigações concentram-se no ensino dos conceitos básicos de Cinemática e Dinâmica do ponto material e do conceito de Energia. Por outro lado, encontramos um pequeno número de artigos que investigam as dificuldades associadas com a aprendizagem e ao ensino da Dinâmica das Rotações, onde a maioria deles identifica o problema, mas não aponta a origem destas dificuldades. No intuito de melhor identificar onde se concentram as dificuldades de aprendizagem da Dinâmica das Rotações, esta proposta utiliza uma pesquisa inspirada no referencial teórico da epistemologia de Bachelard e Brousseau, isto é, o conceito de obstáculo e suas manifestações para evidenciar as origens de tais dificuldades. Utilizamos entrevistas e questionários aplicados aos alunos dos cursos de engenharia, e entrevistas com professores, para identificar as principais origens dessas dificuldades (obstáculos). Os resultados apontam que as dificuldades de aprendizagem podem ter origem na construção histórica dos conceitos de Momento Angular e Torque e de como eles foram transferidos aos livros didáticos. É perceptível que a organização dos conteúdos proposta pelos livros didáticos de Física Básica, também atuam como um obstáculo didático na aprendizagem desses conceitos. Em relação ao ensino, observamos que os professores apontam as dificuldades de aprendizagem dos alunos, porém não relatam as suas dificuldades em ensinar, remetendo-nos ao estudo dos obstáculos didáticos.

**Palavras Chave:** Obstáculos Epistemológicos. Obstáculos Didáticos. Ensino de Física



## ABSTRACT

In the field of research in Physics Teaching, Mechanics has been one of the most investigated areas. These investigations focus on teaching the basic concepts of Kinematics and Dynamics of the material point and the concept of Energy. On the other hand, we find a small number of articles that investigate the difficulties associated with learning and teaching Rotation Dynamics, where most of them identify the problem but do not point out the origin of these difficulties. In order to better identify where the learning difficulties of the Rotation Dynamics are concentrated, this proposal uses a research inspired by the theoretical reference of the epistemology of Bachelard and Brousseau, that is, the concept of obstacle and its manifestations to show the origins of such difficulty. Using questionnaires and interviews applied to the students of the engineering courses and interviews with teachers, the main sources of these difficulties (obstacles) were identified. The results indicate that the learning difficulties can originate in the historical construction of the Angular Moment and Torque concepts and how it was transferred to textbooks. It is noticeable that the organization of the contents proposed by the textbooks of Basic Physics also act as a didactic obstacle in the learning of these concepts. Regarding teaching, we observed that the teachers point out the students' learning difficulties, but they do not report their difficulties in teaching, referring to the study of didactic obstacles.

**Keywords:** Epistemological obstacles. Didactic obstacles. Physics teaching



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de alavancas apresentadas aos alunos .....	26
Figura 2 – Força aplicada em um disco sobre uma mesa.....	28
Figura 3 – Representação do problema apresentado aos alunos e professores participantes do estudo .....	30
Figura 4 – Bola colidindo com uma barra.....	33
Figura 5 – Esfera colidindo com uma haste .....	36
Figura 6 – Força constante aplicada ao bloco em três pontos diferentes .....	38
Figura 7 – Imagem na parede de um túmulo egípcio do século v ac representando um torno mecânico .....	42
Figura 8 – Forças, m e n representadas como lados de um paralelogramo, cuja diagonal representa a força resultante.....	44
Figura 9 – Bola deslizando dentro de um tubo em rotação. ....	45
Figura 10 – Equações de euler para o movimento de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa.....	47
Figura 11 – Representação de os ângulos de euler. ....	48
Figura 12 – Enunciado geral demonstrado por euler para os princípios do momento linear e para o momento da quantidade de movimento. ....	49
Figura 13 – Solução de euler para o problema da distância entre duas linhas retas perpendiculares em coordenadas cartesianas retangulares.....	52
Figura 14 - Apresentação do problema por euler na comunicação "methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi." .	55
Figura 15 - Fragmento do livro de james maccullagh. ....	60
Figura 16 – Fragmento do manuscrito em que aparece pela primeira vez a expressão para o momento angular usada nos livros didáticos de física.....	63
Figura 17 - Capa do livro “la physique reeduite en tableaux raisonnees” escrito por etienne barruel em 1798.....	67
Figura 18 – imagem da pagina 23 de “la physique reduite en tableaux raisonnees.” Reproduzido de sampaio (2004).....	69
Figura 19 – Capa do livro “tratado elementar de fisica” de f. J. Haüy (1810).	73
Figura 20 – Imagem da página 415 do “tratado elementar de fisica.” .....	74
Figura 21 – Capa do livro traité de mécanique élémentaire et théorique de l.b francouer (1800). Versão em espanhol publicada em 1803. ....	75
Figura 22 – Introdução do conceito de conservação das áreas.....	77
Figura 23 – Definição de momento angular por william rankine.....	79
Figura 24 – Apresentação da conservação do momento angular no livro fisica geral e experimental de eligio peruca. ....	82
Figura 25 – Definição de momento angular em diferentes livros de física básica .....	83

Figura 26 – Definição da lei das áreas a partir do conceito de momento angular  
.....83

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Demonstrações apresentadas aos participantes da pesquisa .....	34
Quadro 2 – Quadro curricular das disciplinas ensinadas nas escolas militares. Reproduzido de (ALMEIDA 2000).....	71
Quadro. Matriz 3– Entrevista com os professores .....	103
Quadro 4 – Primeira etapa da investigação.....	104
Quadro 5 – Segunda etapa da investigação.....	106
Quadro 6. Matriz–Questionário com os alunos.....	107
Quadro 7 – Representação do percurso realizado para definirmos as categorias de análise.....	110
Quadro 8 – Manifestação dos professores - categoria cálculo vetorial.....	113
Quadro 9 – Manifestação dos professores - conceitos matemáticos estruturantes .....	114
Quadro 10 – Manifestação dos professores: categoria conceitos estruturantes.....	115
Quadro 11 – Manifestação dos professores – categoria analogia entre variáveis de translação e rotação.....	115
Quadro 12. Manifestação dos professores – categoria influência mútua dos movimentos.....	116
Quadro 13 – Relação entre dimensões, categorias e questões.....	118
Quadro 14 – Questão 9 .....	119
Quadro 15 – Questão 5 .....	121
Quadro 16 – Questão 10.....	123
Quadro 17 – Questão 11.....	126
Quadro 18 – Questão 3.....	128
Quadro 19 – Questão 8.....	130
Quadro 20 – Questão 4.....	132
Quadro 21 – Questão 6.....	133
Quadro 22 – Questão 7.....	135
Quadro 23 - Questão 1.....	137
Quadro 24 – Questão 2.....	139



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>21</b>
<b>PERCURSO PARA A INQUIETAÇÃO .....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO 1: UMA VISITA ÀS ORIGENS DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM DINÂMICA DAS ROTAÇÕES. ....</b>	<b>25</b>
1.1 PERCURSO METODOLÓGICO .....	25
1.2 O QUE DIZEM AS PESQUISAS ACERCA DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DA DINÂMICA DAS ROTAÇÕES .....	25
<b>CAPÍTULO 2: A HISTÓRIA DOS CONCEITOS DE MOMENTO ANGULAR E TORQUE: SUA EVOLUÇÃO E CONTROVÉRSIAS .....</b>	<b>41</b>
2.1 INÍCIO DO PERCURSO.....	41
2.2 LEONARD EULER E A ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS....	46
2.3 LOUIS POINSON E O CONCEITO DE BINÁRIO .....	57
2.4 A TEORIA DOS BINÁRIOS E O CONCEITO DE MOMENTO ANGULAR .....	59
<b>CAPÍTULO 3: A TRAJETÓRIA DO CONCEITO DE MOMENTO ANGULAR E TORQUE NO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA BÁSICA. ....</b>	<b>65</b>
3.1 INTRODUÇÃO .....	65
3.2 OS PRIMÓRDIOS DO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA NO BRASIL .....	66
3.3 SÉCULO XX: AVANÇOS E RETROCESSOS DO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA.....	80
<b>CAPÍTULO 4: NOÇÃO DE OBSTÁCULO NO PROCESSO DE ENSINO – APRENDIZAGEM .....</b>	<b>85</b>
4.1 A NOÇÃO DE OBSTÁCULOS EM BACHELARD .....	85
4.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULOS EM BROUSSEAU .....	94
4.3 O CONCEITO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA.....	96
<b>CAPÍTULO 5: DELIMITANDO A PESQUISA.....</b>	<b>99</b>
5.1 INTRODUÇÃO .....	99
5.2 ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA .....	100
5.3 AS ENTREVISTAS SEMIESTRUTURADAS E OS QUESTIONÁRIOS .....	101

5.4 PRIMEIRO MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO: ENTREVISTA COM OS PROFESSORES .....	102
5.5 SEGUNDO MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO: QUESTIONÁRIO COM OS ALUNOS.....	104
5.6 A TÉCNICA DE ANÁLISE DOS DADOS .....	107
5.7 CONSTRUÇÃO DAS CATEGORIAS .....	108
<b>CAPÍTULO 6: ANÁLISE E INTERPRETAÇÕES .....</b>	<b>113</b>
6.1 ENTREVISTA COM PROFESSORES .....	113
<b>6.1.1 Matemática .....</b>	<b>113</b>
<b>6.1.2 Grandezas Físicas.....</b>	<b>114</b>
6.2 QUESTIONÁRIO COM ALUNOS .....	117
<b>6.2.1 Matemática .....</b>	<b>118</b>
<b>6.2.2 Grandezas Físicas.....</b>	<b>124</b>
<b>6.2.3 Geometria do corpo.....</b>	<b>134</b>
6.3 ENTREVISTA COM OS ALUNOS.....	140
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>147</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>153</b>
<b>APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO .....</b>	<b>165</b>
<b>APÊNDICE B – PROTOCOLO: ENTREVISTA COM OS PROFESSORES.....</b>	<b>167</b>
<b>APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO - ESTUDANTES.....</b>	<b>169</b>
<b>APÊNDICE D – PROTOCOLO: ENTREVISTA COM OS ALUNOS .....</b>	<b>175</b>

## INTRODUÇÃO

### PERCURSO PARA A INQUIETAÇÃO

O interesse em estudar as dificuldades de aprendizagem na Física surgiu a partir da prática pedagógica, como professor e em conversas informais com outros professores da Universidade de Caxias do Sul. Observamos que os alunos, quando chegam ao ensino superior, apresentam um entendimento parcial e às vezes equivocado sobre vários conceitos da Física.

Segundo Miras (2010), os alunos estão longe de parecerem “lousas limpas”; ao contrário, ao aprender qualquer um dos conteúdos escolares conferem um sentido e estabelecem os significados implicados em tal conteúdo. Portanto, o aluno elabora pessoalmente um significado com base naqueles que pôde construir previamente, estabelecendo a relação entre o novo conteúdo e o conteúdo prévio fazendo com que os significados sejam construídos de forma significativa, funcional e estável. Caso isso não seja feito, a aprendizagem é apenas mecânica, caracterizada por uma organização de informações com pouca ou nenhuma interação entre conceitos relevantes existentes no pensamento do aluno, implicando, apenas, em uma armazenagem do novo conhecimento por memorização e fácil esquecimento.

Já para Pietrocola et al. (2008), os alunos parecem não perceber a existência de uma relação entre os conteúdos que aprendem nas aulas de Física e os problemas formulados fora dela. O conteúdo escolar lhes parece adaptado na resolução de exercícios-padrão e na realização de provas, isto é, para satisfazer as expectativas dos professores na sala de aula.

Muitos desses estudos sobre representações alternativas (ZAMBON; TERRAZZAN, 2013; MCCLOSKEY; CARAMAZZA; GREEN, 1980; ROTH; LUCAS; MCROBBIE 2001; ZYLBERSZTAJN, 1983), destacam que o fator preponderante, que dificulta a aprendizagem dos conceitos científicos, reside nas representações que os alunos possuem antes da instrução formal. Estas representações são muito resistentes às mudanças considerando-se as estratégias habituais de ensino utilizadas pelos professores (ASTOLFI; DEVELAY, 1990; TALIM, 1999; ARRUDA; VILLANI, 1994).

Bachelard<sup>1</sup> (1996), já alertava para a seriedade dessas representações, mesmo que não utilizasse esta denominação. Ele afirmava que, tanto para o desenvolvimento da Ciência como para o aprendizado do sujeito, as ideias anteriores poderiam ser consideradas como obstáculos epistemológicos à aceitação ou ao aprendizado do novo. Para ele “o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos [...]” (BACHELARD, 1996, p.17). Portanto, defendeu que seria imprescindível uma catarse intelectual e afetiva das ideias anteriores, para então haver possibilidade de aprendizado do novo.

Em conversas informais com os professores de Física da Universidade de Caxias do Sul, dentre os conteúdos da Física que apresentam um grau maior de dificuldade de aprendizagem, quando comparado com os demais, estão os conceitos da Dinâmica das Rotações, mais especificamente os conceitos de Momento Angular e Torque.

Os professores, de modo geral, declaram que os estudantes evidenciam dificuldades na aprendizagem dos fenômenos, leis e conceitos que estão relacionados com a Dinâmica das Rotações.

Dessa forma, as considerações acima levam-nos a questionar: Onde se originam as dificuldades de ensino-aprendizagem da Dinâmica das Rotações? Essa problemática reflete-se nas situações que encontramos, também, em nossa prática pedagógica. Isso justifica a importância de identificar as eventuais dificuldades envolvidas no ensino-aprendizagem da Dinâmica das Rotações na formação de profissionais universitários. A partir desse foco principal, podem-se definir alguns objetivos específicos:

- a) Investigar a gênese da construção dos conceitos de Momento Angular e Torque;
- b) Analisar a Transposição Didática dos conceitos de Momento Angular e Torque e as didatizações em relação ao saber de referência;

---

<sup>1</sup> Esta referência bibliográfica é a tradução da obra “*La Formation de l’esprit scientifique: contribution à une psychanalyse de la connaissance*” escrita por Gaston Bachelard 1938. Traduzido por Esteia dos Santos Abreu.

c) Diagnosticar e Identificar os obstáculos de ensino-aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque na ótica Bachelardiana.

Com o objetivo de encontrarmos respostas para questionamentos acima, apresentamos a sequência metodológica que propomos para este trabalho.

Dividimos a tese em seis capítulos; no primeiro capítulo, fizemos uma revisão da literatura da área para situarmos o problema de investigação perante o ensino da Física.

No intuito de responder os questionamentos propostos, no capítulo 2, faremos uma “visita” na história da Ciência, para entendermos a gênese do conceito de Momento Angular e Torque. Para isso, usaremos os textos originais de Leonard Euler, Joseph-Louis Lagrange, Louis Poincaré, entre outros.

A didatização dos conceitos de Momento Angular e Torque será discutida no capítulo 3 à luz da transposição didática de Chevallard.

O aporte teórico necessário para responder as questões de pesquisa será apresentado no capítulo 4 no qual discutiremos mais profundamente as ideias de Bachelard, Brousseau e de Chevallard, em termos de dificuldade de aprendizagem.

Trataremos da Metodologia e dos Instrumentos de análise no quinto capítulo. Abordaremos a construção das categorias de análise através do questionário aplicado aos alunos e da entrevista com professores e alunos.

No capítulo 6, são exibidos os resultados da análise e interpretações dos questionários e das entrevistas, a partir do referencial teórico adotado nessa pesquisa.

Nas considerações finais apresentamos algumas reflexões dos resultados obtidos na análise das entrevistas, dos questionários e do referencial teórico, levantado durante a construção da tese. Os instrumentos de pesquisa são trazidos nos apêndices.



## **CAPÍTULO 1: UMA VISITA ÀS ORIGENS DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM EM DINÂMICA DAS ROTAÇÕES.**

### **1.1 PERCURSO METODOLÓGICO**

No campo da pesquisa em Ensino de Ciências, a Mecânica Newtoniana (mais especificamente os conceitos básicos de Cinemática e Dinâmica do ponto material e Energia), tem sido a área em que se concentra o maior número de investigações sobre dificuldades de aprendizagem (CLEMENT, 1982; ZYLBERSZTAJN, 1983; CARRASCOSA; GIL PÉREZ, 1992).

Por outro lado, as investigações sobre as dificuldades associadas com a aprendizagem e ao ensino da Dinâmica das Rotações, mais especificamente os conceitos de Momento Angular e Torque são pouco explorados. Adianta-se que a grande maioria das investigações (BAROWY; LOCHHED, 1980; MENIGAUX, 1994; PROFFITT; GILDEN, 1989; CLOSE; HERON, 2011) identifica o problema, mas não aponta a origem dessas dificuldades.

Sabendo dessa pequena quantidade de trabalhos publicados, referentes ao tema, buscou-se fazer uma revisão bibliográfica do objeto de pesquisa, a partir de buscas realizadas em portais especializados da área e do Google acadêmico. Os artigos foram selecionados, inicialmente, pela presença de palavras-chave no título, seguido da verificação no resumo. As palavras-chave utilizadas nessa busca foram combinações das palavras “Momento Angular”, “Torque” e “Dinâmica de Rotações” com aprendizagem, dificuldade de aprendizagem, ensino. É possível que alguns artigos abordando o tema de pesquisa desta revisão tenham ficado de fora com o uso desses critérios.

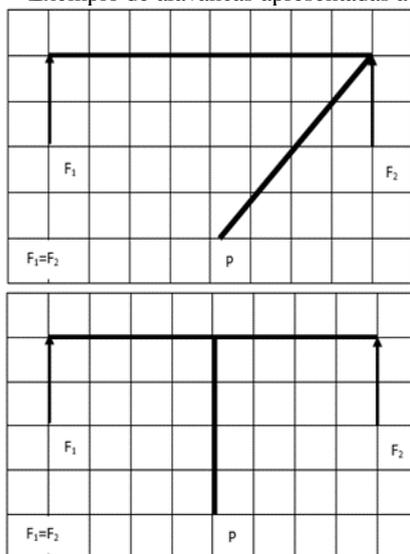
### **1.2 O QUE DIZEM AS PESQUISAS ACERCA DAS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM DA DINÂMICA DAS ROTAÇÕES**

Um dos primeiros estudos a relatar as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos em Dinâmica das Rotações foi

realizado por Barowy e Lochhed (1980)<sup>2</sup> na Universidade de Massachusetts.

Os autores selecionaram um grupo de vinte e seis alunos que haviam estudado a Dinâmica das Rotações na disciplina de Física Básica. A atividade proposta pelos pesquisadores consistia em um conjunto de 10 questões sobre Torque envolvendo diferentes tipos de alavancas (figura 1). Em todas elas foi solicitado aos alunos que determinassem se o braço da alavanca iria girar no sentido horário, anti-horário, ou em nenhum dos dois.

Figura 1 – Exemplo de alavancas apresentadas aos alunos



Fonte: Barowy e Lochhed, 1980.

Após, foram escolhidos, aleatoriamente, dentro do grupo, seis alunos para participarem de entrevistas e explicarem o seu raciocínio na escolha das soluções para cada questão. A pontuação média de acertos do

---

<sup>2</sup> Relatório preliminar de pesquisa apresentado no Programa de Pesquisa em processos cognitivos e estrutura do conhecimento em Ciência e Matemática. Departamento de Física e Astronomia. Universidade de Massachusetts, 1980.

teste foi de 47%; a pontuação média de acertos do teste para o sub-grupo de entrevistados foi de 63%.

Abaixo, temos duas respostas que representam o pensamento dos alunos entrevistados, quando questionados sobre a figura 1:

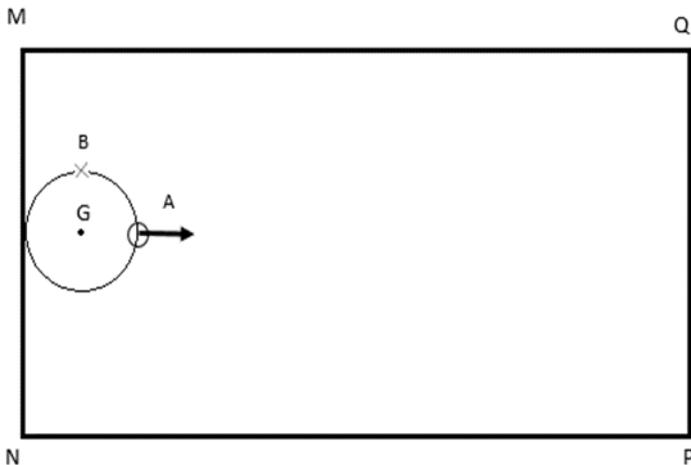
O que recorde da fórmula para o Torque é a força vezes a distância do ponto de apoio vezes o seno do ângulo.... Embora as duas forças sejam iguais, haverá uma rotação resultante para fora da página devido ao fato de que as distâncias entre os ângulos e entre os pontos de articulação sejam diferentes (BAROWY; LOCHHED, 1980, p. 6, tradução nossa).

[...] a rotação resultante seria causada pela força 1 ao invés da força 2. É isso que faz com que ele gire no sentido horário. (BAROWY; LOCHHED, 1980, p. 7, tradução nossa).

Para os autores, as respostas acima mostram que os alunos têm um entendimento superficial sobre o conceito de Torque, e o principal motivo para isso é que as disciplinas de Física são baseadas em fórmulas e não existe um interesse na estrutura conceitual.

Em 1994, um estudo realizado pela professora Jacqueline Menigaux (MENIGAUX, 1994) com estudantes franceses dos dois últimos anos do ensino médio e alunos ingressantes no ensino superior (ciclo básico) buscou investigar como os estudantes compreendem o movimento de um corpo rígido nos aspectos da translação e da rotação, bem como sua possível simultaneidade. Para isso, ela propôs a seguinte experiência: Um disco de raio  $R$ , inicialmente em repouso em uma mesa horizontal, sem atrito, move-se sob a ação de uma força horizontal constante, aplicada em A (marcado com um ponto) ou em B (marcado com um  $x$ ), conforme figura 2.

Figura 2 – Força aplicada em um disco sobre uma mesa



Fonte: Menigaux, 1994.

Os estudantes foram convidados a responder se o disco iria demorar mais tempo, menos tempo ou o mesmo tempo para chegar na borda oposta, quando aplicada uma força no ponto A, comparada com uma força aplicada no ponto B<sup>3</sup>.

Para mais de 60% da totalidade dos alunos, a situação B vai demorar mais tempo para chegar à borda oposta da mesa. Dentre os alunos que assinalaram essa resposta, mais de 60% dos alunos de ensino médio e 20% dos estudantes universitários, justificaram da seguinte forma: “O disco, antes de iniciar o seu movimento de translação, sofre uma rotação de 90° e só então o disco descreve um movimento de translação idêntico à situação A.”

Isso fica evidenciado nas respostas dadas pelos estudantes:

---

<sup>3</sup> O problema é analisado usando como referencial o centro de massa do disco. A aceleração de translação de um corpo rígido pode ser determinada pela segunda lei de Newton aplicada a um ponto material de mesma massa onde a força total está agindo. A este nível de análise, não é necessário saber exatamente os pontos em que as forças são exercidas sobre o corpo. Mas o estudo da rotação de um corpo rígido neste mesmo referencial requer sabermos exatamente os pontos em que todas as forças estão atuando. Então é possível usar o teorema de Momento Angular para responder o questionamento proposto pela autora.

Em um primeiro momento, antes de se deslocar, o disco vai sofrer uma rotação de um quarto de volta, de modo que B vai chegar ao A; em seguida, se realizará o movimento retilíneo uniforme (MENIGAUX, 1994, p. 243, tradução nossa).

O sólido, em primeiro lugar, será submetido a uma rotação de  $90^\circ$ , e em seguida começará a se mover, portanto, o tempo total = tempo de rotação mais tempo de translação. (MENIGAUX, 1994, p. 246, tradução nossa).

De acordo com estes argumentos, a rotação ocorrerá antes da translação até o disco chegar a uma “posição adequada” para ser submetido à translação. Portanto, os dois movimentos que ocorrem simultaneamente, na realidade, estão dissociados pelos alunos. Para Menigaux, este resultado evidenciou a tendência dos alunos de considerar como sucessivos os movimentos de translação e rotação que, de fato, ocorrem simultaneamente.

O aluno, enquanto estuda a translação de um objeto, ‘congela’ a sua rotação. Quando se estuda a rotação de um objeto, cancela-se qualquer possibilidade de translação. (MENIGAUX, 1994, p. 243, tradução nossa).

Menigaux ainda conclui que os alunos atribuem um papel significativo para o ponto exato da aplicação das forças nos corpos extensos, mesmo quando isto não é relevante para a questão colocada. Na opinião dos respondentes, o tempo levado pelo disco para bater na borda oposta da tabela é maior quando a força é aplicada em B, do que quando ela é aplicada em A.

A tendência de tratar movimentos simultâneos, rotação e translação, como sucessivos, não pode ser modificada por uma ação isolada, pois tanto no ensino médio, como no universitário, a segunda lei de Newton é demonstrada e aplicada para um ponto material. Isso, de certa forma, reforça a ideia de que quando se lida com a translação, não há necessidade de localizar as forças com precisão sobre o corpo considerado. No entanto, na maioria das vezes, essa relação é frequentemente usada para um corpo extenso no movimento de translação. Essa escolha, quase que exclusiva, pode, involuntariamente,

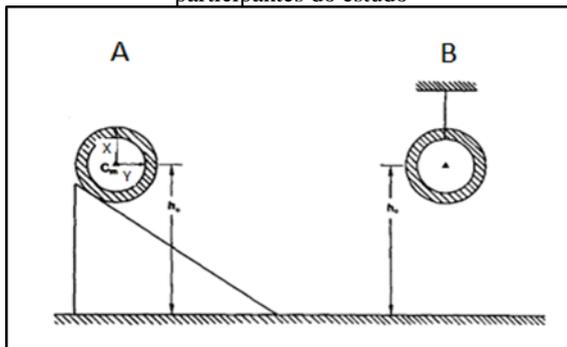
restringir o entendimento dos alunos para o movimento de corpos extensos.

Os resultados apresentados pela autora apontam para um ensino de Mecânica nas escolas e universidades francesas, que enfatiza o estudo do “ponto material” em detrimento ao dos “corpos extensos”.

Segundo a autora, essa forma de pensar dos alunos também foi detectada por outros pesquisadores (FAUCONNET, 1981; CLOSSET, 1989; ROZIER; VIENOOT, 1991) em outras áreas do ensino de Física.

Já em Proffitt e Gilden (1989), temos um estudo<sup>4</sup> sobre a complexidade do movimento de corpos extensos, através de questões teóricas, realizado com alunos universitários dos anos iniciais e professores de ensino médio, a partir do movimento de um aro em duas situações: (A) descendo um plano inclinado e (B) em queda livre (figura 3).

Figura 3 – Representação do problema apresentado aos alunos e professores participantes do estudo



Fonte: Proffitt e Gilden, 1989.

Os autores ressaltam que existem duas maneiras de analisarmos o comportamento do aro na situação (A). A forma mais simples é levarmos em consideração somente a posição do centro de massa do aro no seu deslocamento sobre o plano inclinado (a roda é tratada como ponto material). A outra maneira é admitir que existem variáveis adicionais, como o Momento de Inércia (distribuição de massa), que afeta seu movimento de rotação, e que são relevantes na análise do comportamento de corpos rígidos. Nessa situação, a distribuição de massa, determinada

<sup>4</sup> Estudo realizado na Universidade de Virginia, EUA.

pela relação  $Y/X$  (raios internos e externos), influência na velocidade com que o aro roda. A massa e o diâmetro do aro não são relevantes. Na situação (B), o aro pode ser formalmente tratado como ponto material.

Na análise de Proffitt e Gilden (1989), os resultados apresentados pelos participantes da pesquisa mostram que as respostas são relativamente precisas quando o problema é reduzido para corpos pontuais (todos os pontos do corpo rígido seguem a mesma trajetória). No entanto, quando o problema é tratado como corpo extenso ou quando os corpos pontuais são tratados como sendo corpos extensos, aparecem respostas equivocadas.

Para os autores, esta análise equivocada pode estar associada à organização dos conteúdos proposta pelos livros didáticos americanos de Física. O estudo da Mecânica nas disciplinas de Física básica tem, na maioria dos livros didáticos de ensino médio e universitário, a seguinte ordenação: inicia-se com o conceito de medição, continua com a Cinemática e as leis de Newton para o ponto material, e com este cenário são introduzidas a Cinemática e a Dinâmica das Rotações.

Ao trabalhar nessa sequência, os alunos começam a apresentar dificuldades na compreensão da Dinâmica das Rotações. Os autores sinalizam que uma possível justificativa para tais dificuldades é o fato de que os conteúdos de Física que antecedem o estudo da Dinâmica das Rotações estão ligados a grandezas dispostas linearmente ou no plano.

No estudo da Cinemática e da Dinâmica das Rotações, alguns conceitos podem ser explorados de modo bidimensional, como a Velocidade Angular e a Aceleração Centrípeta. Outros, necessariamente, só adquirem sentido no espaço tridimensional, tais como Momento Angular e Torque. Esta imposição espacial das variáveis e suas respectivas interações fogem dos esquemas anteriores utilizados nos conteúdos já estudados.

Junto à necessidade do domínio espacial das variáveis, tem-se na Matemática outro indicativo de dificuldade no sentido do entendimento do conceito de vetor, bem como suas formas de operação. Um tratamento somente algébrico pode estar reforçando uma tendência dos estudantes de se ater a uma leitura numérica de grandezas, que em sua natureza são vetoriais. Cabe ressaltar que esta mesma ordenação é encontrada nos livros didáticos de Física, no Brasil, tais como: Física para cientistas e engenheiros (TIPLER; MOSCA, 2011), Fundamentos de Física (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012), Física Básica (NUSSENZVEIG, 2013).

Em 2005, Peñalba e Rio realizaram um estudo com estudantes do segundo ano do curso de Engenharia da Universidade do País Basco<sup>5</sup>, no intuito de identificar a concepção desses alunos em relação ao conceito de Momento Angular. Foi apresentado aos alunos um conjunto de perguntas que tinham a pretensão de que respondessem os seguintes questionamentos:

- 1 – Qual o significado que os estudantes atribuem para a grandeza do Momento Angular?
- 2 - Como os alunos analisam a variação ou conservação do Momento Angular?

Para responder o primeiro questionamento uma das perguntas apresentadas foi a seguinte: “Podemos definir o momento angular de um corpo extenso se deslocando em movimento retilíneo uniforme?”

Cerca de metade das respostas deste primeiro questionamento expressa a crença equivocada de que o Momento Angular está ligado somente a um movimento de rotação. Um exemplo de resposta dada nesta categoria: “Não, porque se é retilíneo nenhuma grandeza será angular.”

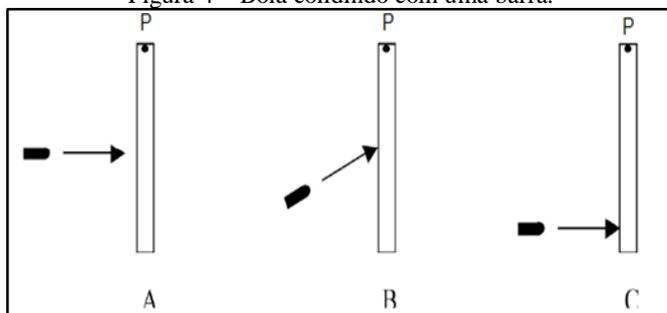
Para o segundo questionamento, foi apresentada a seguinte situação:

Uma bola se desloca com velocidade constante e colide com uma barra de madeira suspensa em um ponto P em três situações distintas (figura 4); após a colisão elas permanecem unidas (bola+barra). Ordene o Momento Angular após o impacto do menor para o maior.

---

<sup>5</sup> <http://www.ehu.eus/>

Figura 4 – Bola colidindo com uma barra.



Fonte: Peñalba e Rio, 2005.

Cerca de 30% dos respondentes usaram o conceito de Momento Angular para justificar a resposta, mas não fizeram uso da conservação do Momento Angular para tal justificativa. Um exemplo de resposta dada nessa categoria é: “ como  $r_A$  é menor que  $r_C$ ,  $L_C > L_A$ .”

Na análise de Peñalba e Rio (2005), a justificativa mais utilizada pelos respondentes é que o impacto da bola é idêntico nos três casos. Segundo os autores, esta justificativa indica que os alunos associam a velocidade da bola com a força de impacto, e explicitam esta resposta em termos do Momento da Força em relação ao eixo de giro. Os autores argumentam que para este tipo de raciocínio não é necessário o conceito de Momento Angular.

Este resultado converge com outras perguntas do questionário, em que a grande maioria dos alunos não sabia como explicar adequadamente como um corpo em movimento retilíneo, ao colidir, transfere parte do seu Momento Angular provocando o giro de outro corpo.

Encontramos no trabalho de Rimoldini e Singh (2005) um estudo com alunos universitários<sup>6</sup> sobre a compreensão do Movimento de Rotação, mais especificamente os conceitos de Torque, Momento de Inércia e Energia de Rotação, através de experimentos demonstrativos e questões de múltipla escolha sobre os temas abordados.

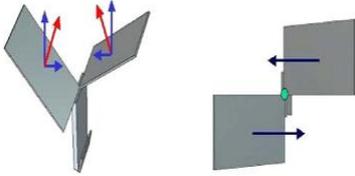
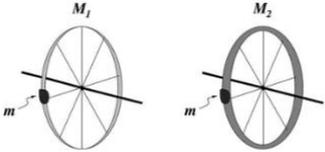
A investigação foi realizada em duas etapas. Na primeira, foram apresentadas, individualmente, algumas demonstrações (quadro 1)

---

<sup>6</sup> A investigação foi realizada na Universidade de Pittsburgh com estudantes calouros que estavam cursando a disciplina de Física básica teórica e com estudantes em um ciclo mais avançado que cursaram a disciplina de Mecânica Básica.

relacionadas aos conceitos investigados. Os alunos foram convidados a responder várias perguntas sobre as mesmas. Assim que os alunos fizeram suas previsões iniciais, eles foram solicitados a realizar a demonstração e conciliar as diferenças entre as previsões iniciais e a observação.

Quadro 1 – Demonstrações apresentadas aos participantes da pesquisa.

 <p>Demonstração 1</p>	<p>Um diagrama esquemático do "helicóptero" ou "rotor" de papel com a força de arraste e dos seus componentes, nos sentidos vertical e horizontal. A perspectiva de cima (do lado direito) mostra apenas a componente de força que produz o torque para fazer a rotação. Solicitou-se aos alunos que respondessem à seguinte questão: "Você pode explicar por que ele vai começar a rodar quando deixar cair?"</p>
 <p>Demonstração 2</p>	<p>Dois aros com o mesmo raio, mas diferentes massas uniformemente distribuídas. Um pequeno pedaço de massa <math>m</math> está ligado à borda de cada aro. Foi solicitado aos respondentes para comparar o Período <math>T</math> e a Velocidade Angular máxima <math>\omega_{\text{máx}}</math>.</p>

Fonte: Rimoldini e Singh, 2005.

Após a análise das respostas, os autores apontaram as seguintes dificuldades de compreensão dos conceitos Físicos estudados:

- a) Embora todos os estudantes entrevistados previram que o "helicóptero" de papel começaria a rodar (demonstração 1), apenas alguns (menos de 20%) explicaram por que o helicóptero, que estava inicialmente em repouso, começaria a rodar. A maioria dos alunos não usou o conceito de Torque para explicar o fato de o "helicóptero" rodar quando cai e sim o conceito de Força. Muitos consideraram Torque e Força como conceitos equivalentes;
- b) Apesar de vários estudantes descreverem corretamente a rotação dos aros (demonstração 2), os autores identificaram que houve dificuldades para explicar o porquê de a Velocidade Angular não ser constante. Para os mesmos, esta dificuldade está associada à

incapacidade de aplicar o princípio da Conservação da Energia. Um outro ponto abordado pelos autores, que também diz respeito à Velocidade Angular do aro, é que muitos estudantes responderam que é a diferença de "massa" que afeta a Velocidade Angular dos aros. Para Rimoldini e Singh (2005), isso aponta uma dificuldade de entendimento do conceito de Momento de Inércia. Muitos alunos não sabem que o Momento de Inércia é uma função da distribuição da massa em torno de um eixo e que a Energia Cinética Rotacional depende do Momento de Inércia e não da massa total.

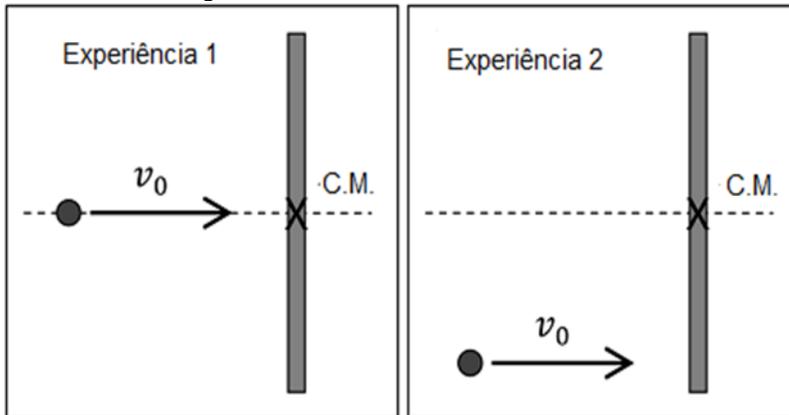
Um resultado surpreendente, segundo os autores, é que não surgiu claramente uma diferença entre o desempenho de alunos calouros e alunos de um ciclo mais avançado. Em geral, ambos os grupos de estudantes tiveram dificuldades semelhantes. Mesmo os alunos de ciclos mais avançados, que possuem maior conhecimento matemático, apresentaram dificuldades semelhantes no entendimento dos conceitos abordados. Os autores concluem que a maioria das disciplinas de Física não discute qualitativamente os fenômenos Físicos. Esta constatação vem corroborar com os resultados apresentados por Barowy e Lochhed (1980), já citados.

Da mesma forma, Close e Heron (2011) relataram uma investigação<sup>7</sup> realizada com estudantes universitários sobre a importância do conceito de Momento Angular nas colisões entre partícula e corpo rígido. O problema teórico, apresentado aos alunos consistia em uma esfera, movendo-se com velocidade constante  $v_0$  sobre uma superfície, sem atrito, na direção de uma haste solta. Foi arguido aos alunos que determinassem a direção do Momento Angular em relação ao centro de massa, antes e após a colisão nas duas situações, conforme ilustrado na figura 5.

---

<sup>7</sup> Investigação realizada com alunos universitários da disciplina de Física básica na Universidade de Washington.

Figura 5 – Esfera colidindo com uma haste



Fonte: Close e Heron, 2011

Os estudantes deveriam usar a regra da mão direita, para mostrar que o Momento Angular inicial do sistema esfera-haste, em relação ao Centro de Massa (CM), é zero no experimento 1, e para fora da página no experimento 2. O Torque resultante é zero, desta forma o vetor Momento Angular inicial e final são os mesmos.

Os estudantes também foram solicitados a comparar as velocidades finais do Centro de Massa do conjunto esfera-haste nos dois experimentos. De acordo com os autores, uma possível resposta para o problema seria: Como ambas as situações têm o mesmo Momento Linear final e a mesma massa, as suas velocidades no Centro de Massa devem ser as mesmas. Close e Heron sinalizam que cerca de 55% dos estudantes afirmaram que o sistema no qual a esfera atinge o CM tem uma velocidade final maior. Essas respostas são consistentes com a ideia de que parte do Momento Linear no experimento 2 é convertido em Momento Angular. Para os autores, isso reflete uma tendência dos alunos de tratarem o Momento Linear e o Momento Angular como sendo conservados em conjunto e não separadamente. Muitos estudantes expressam explicitamente a ideia de que o Momento Linear pode ser convertido em Momento Angular, como nos exemplos a seguir:

No experimento 2, a bola bate longe do centro. Desde que, seja diferente de zero, algum Momento Linear é convertido para o Momento Angular. (CLOSE; HERON, 2011, p. 1068, tradução nossa).

Como não há forças externas, o Momento total é conservado, mas uma parte é transformada em Momento Angular. (CLOSE; HERON, 2011, p. 1070, tradução nossa).

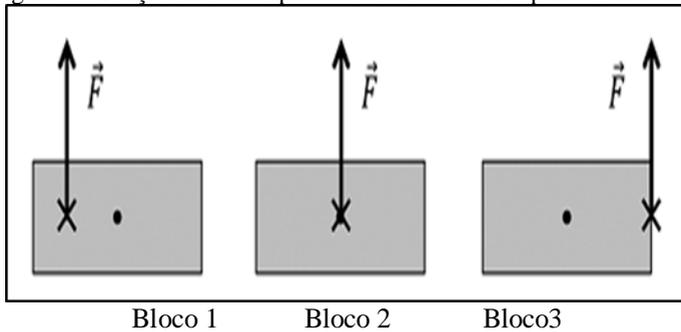
Ao confundir o Momento Angular com a Velocidade Angular ou Momento Linear, os autores sinalizam que muitos alunos assumem que Momento Linear e Angular são conservados conjuntamente, um erro que parece estar ligado à associação com a Conservação de Energia.

Close e Heron (2011) relatam que muitos estudantes, no momento de justificar suas respostas, escreveram as equações da Conservação de Energia incorretas, não levando em consideração que o choque é inelástico e uma fração da energia cinética antes do choque é transformada em calor.

Ao pensar sobre a Dinâmica dos corpos extensos, os alunos tendem a usar alguns procedimentos e linguagens que seriam mais adequadas de se utilizar quando se pensa em Energia (e alguns deles fizeram essa conexão explicitamente). No entanto, o tipo de pensamento representado pelos exemplos de respostas é melhor descrito como uma ideia comum sobre o "movimento" ou "atividade" em geral, ao invés de Momento Linear ou Momento Angular.

Em um trabalho posterior, esta mesma autora e colaboradores (CLOSE; GOMEZ; HERON, 2013) relataram uma pesquisa realizada com alunos que cursavam a disciplina de Física teórica introdutória, na Universidade de Washington, sobre a compreensão da Dinâmica das Rotações. Foi solicitado aos alunos para classificarem as acelerações do Centro de Massa de três objetos idênticos sujeitos a forças de igual magnitude e direção, agindo em diferentes pontos (ver figura 6 como exemplo ilustrativo). Embora a segunda Lei de Newton implique que todos os três objetos tenham a mesma aceleração do Centro de Massa ( $a_{cm}$ ), a maior parte dos alunos *não concordou* com isso. A resposta mais comum dada para o conjunto de blocos da figura abaixo é  $a_{cm2} > a_{cm1} > a_{cm3}$ .

Figura 6 – Força constante aplicada ao bloco em três pontos diferentes



Fonte: Close, Gomez e Heron, 2013.

A maioria dos estudantes que deram essa resposta atribuíram que a aceleração é menor nos blocos 1 e 3 devido ao ponto em que a força é aplicada ou ao fato de os objetos rodarem. Na sequência, foi apresentado um conjunto de atividades práticas e realizadas entrevistas, para compreender como os alunos raciocinam sobre o efeito das forças em corpos rígidos.

Segundo as autoras, a pesquisa mostrou que alguns alunos tendem a interpretar equivocadamente a aceleração do Centro de Massa. Eles associam a aceleração do Centro de Massa com a Aceleração Angular em torno do Centro de Massa, ou, eventualmente, alguma combinação dessas duas acelerações.

Close, Gomez e Heron (2013) também mostraram que há uma tendência generalizada dos consultados a afirmarem que as forças que causam o movimento de rotação têm um efeito reduzido sobre o movimento de translação. Entre os problemas identificados está a forma fragmentada com que são discutidos os movimentos, ou seja, tratando o movimento de translação independente do movimento de rotação e as dificuldades relacionadas em tratar variáveis tridimensionais no plano.

Para as autoras, algumas dificuldades evidenciadas nas atividades propostas estão intimamente ligadas ao uso do livro didático. Elas enfatizam o uso de termos como “*um análogo para a Rotação*” para explicar a segunda lei de Newton nas Rotações. Isto pode implicar para o aluno que a segunda lei de Newton não é apropriada para corpos em rotação. Destacam ainda que a maioria das explicações sobre o movimento de rotação enfatizam as relações de energia, em detrimento da segunda lei de Newton.

Encontramos em Duman, Demirci e Şekercioğlu (2015) um estudo realizado com estudantes<sup>8</sup> do curso de Licenciatura em Matemática, com a intenção de analisar as dificuldades e crenças em Dinâmica das Rotações, mais especificamente nos conceitos de Rolamento e Torque. O estudo consiste em 30 questões de múltipla escolha com a intenção de responder o seguinte questionamento: “Quais são as dificuldades e equívocos dos estudantes universitários sobre Rolamento, Movimento Rotacional e Torque?”

Após a análise das respostas, os autores chegaram às seguintes conclusões:

- a) Muitas vezes, os conceitos de Torque e Força são considerados equivalentes, criando dificuldades para o entendimento dos conceitos de Velocidade Angular, Aceleração Angular e Momento Angular;
- b) Muitos dos respondentes têm dificuldades de entendimento do conceito de Momento de Inércia como uma função da distribuição de massa, e que a Energia Cinética de Rotação depende do Momento de Inércia e não apenas da massa total do sistema. Para os autores, isto mostra a dificuldade que os alunos possuem para determinar a dependência exata da Energia Cinética com o Momento de Inércia e a Velocidade Angular do objeto;
- c) Os alunos apresentaram grande dificuldade para compreender que o valor da velocidade depende do referencial a ser adotado. A maioria dos estudantes não reconheceu que a velocidade no ponto inferior de uma roda fica em repouso em relação ao solo.

Por outro lado, encontramos em revistas da área, tanto internacionais como nacionais, poucos trabalhos que têm como objetivo identificar possíveis dificuldades de aprendizagem da Dinâmica das Rotações no ensino médio (DION, 1992; ROTH; LUCAS; MCROBBIE, 2001; BA, 2011; SILVA, 2012).

O foco desses trabalhos está na identificação das dificuldades de aprendizagem a partir das concepções prévias dos alunos e de entrevistas com professores. Partindo de diferentes abordagens, todos concluem que uma das principais dificuldades apresentadas para a aprendizagem está na tendência dos estudantes de se aterem a uma leitura numérica de

---

<sup>8</sup> A amostra do estudo foi constituída por 100 estudantes formandos em licenciatura em Matemática na Universidade de Balkesir, Turquia no ano letivo de 2013-2014.

grandezas que, em sua natureza são vetoriais, dificultando o entendimento do conceito de vetor, bem como suas formas de operação.

Uma das justificativas para esse pouco interesse dos pesquisadores da área de ensino pode estar associada ao currículo da Física do ensino médio que inclui o estudo da Cinemática das Rotações e da Estática dos corpos rígidos, porém a Dinâmica das Rotações encontra-se ausente (apesar de constar nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002)) como podemos verificar, ao consultar alguns livros didáticos do ensino médio (ALVARENGA; MÁXIMO, 2000; GUIMARÃES; FONTE BOA, 2001; RAMALHO JUNIOR; FERRARO; SOARES, 1999). Uma exceção a este quadro é o livro do Grupo de Reelaboração para o Ensino de Física (GREF, 1999), que faz uma interessante abordagem do Momento Angular e de sua conservação a partir de elementos vivenciais e do cotidiano.

Apesar de os pesquisadores da área identificarem a existências de dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque, nenhum deles aponta a origem dessas dificuldades. Na tentativa de identificar a sua gênese, no próximo capítulo faremos uma visita à história da construção do conceito de Momento Angular e Torque com o objetivo de encontrarmos (caso existam) elementos que possam contribuir na identificação das dificuldades de aprendizagem.

## CAPÍTULO 2: A HISTÓRIA DOS CONCEITOS DE MOMENTO ANGULAR E TORQUE: SUA EVOLUÇÃO E CONTROVÉRSIAS

Em um olhar Bachelardiano, a História da Ciência tem papel fundamental para a identificação dos obstáculos epistemológicos da construção do conhecimento científico. No pensamento de Bachelard, a Ciência avança a partir de cortes e rupturas, alcançando a verdade por aproximações sucessivas. Nessa concepção, quando se analisa a evolução histórica de um conhecimento científico, é importante examinar criticamente os principais aspectos que delineiam esta evolução, com o intuito de termos uma visão não apenas cronológica, mas também filosófica da pesquisa científica de cada época de forma a facilitar a compreensão e o entendimento dos conceitos fundamentais. Podemos afirmar, assim, que a História da Ciência e, em particular, a História do Momento Angular e Torque poderão colaborar para entender e identificar (caso existam) as dificuldades ou obstáculos na construção desse conhecimento.

### 2.1 INÍCIO DO PERCURSO

As rotações têm atraído a atenção de filósofos desde a antiguidade. Platão, em seu livro *A República* (360 AC), descreve um diálogo entre Sócrates e Glauco sobre o conceito de repouso e movimento (RAMOS, 1965):

[...] e se o nosso interlocutor conduzisse adiante a brincadeira, dizendo com sutileza que o pião está completamente imóvel e em movimento quando gira retido no mesmo lugar por sua ponta, ou que acontece o mesmo a qualquer outro objeto movido em círculo em torno de um ponto fixo[...], (RAMOS, 1965, p. 223-224).

A “verticalidade intrigante” de um corpo em rotação aparece também nos livros de escritores italianos do Renascimento. Giambattista Benedetti<sup>9</sup>, por exemplo, argumentando que a razão para o pião

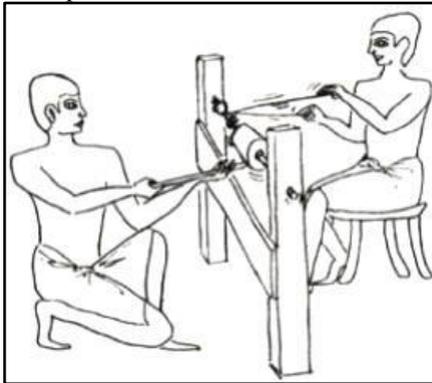
---

<sup>9</sup> Matemático e físico italiano nascido em Veneza, que publicou sobre princípios de queda livre dos corpos e equilíbrio de líquidos em vasos comunicantes,

permanecer durante algum tempo ereto está na tendência natural do “retilíneo” que aumenta com a velocidade de rotação, e diminui a tendência natural de cair. No entanto, essa tendência nunca é completamente esquecida, então, Benedetti argumentou que um corpo se torna mais leve quanto mais rapidamente ele está girando (SPARAVIGNA, 2015)

Embora isso tenha sido, em grande parte, devido às evidentes regularidades e ao notável significado cultural do movimento dos astros (ROSSI, 2001), é preciso não esquecer que a estabilidade de corpos em rotação também pode ser observada a partir da experiência cotidiana e estava na base de ferramentas simples, como a roda do oleiro ou o peão girando, cujo uso é confirmado bem antes do surgimento das representações geométricas ou numéricas do movimento dos astros. A prática do lançamento do disco nas olimpíadas da Grécia antiga, pressupõe um entendimento altamente refinado da rotação de corpos rígidos, e volantes já foram empregados na antiguidade para estabilizar o movimento de máquinas de vários tipos (figura 7).

Figura 7 – Imagem na parede de um túmulo egípcio do século V AC representando um torno mecânico.



Fonte: Andrade, 2002.

Assim, não é surpreendente que o movimento circular tinha o “status” de movimento perfeito. Os modelos geométricos do movimento

refutando a ideia aristotélica de que os corpos *leves* e os *pesado* teriam movimentos distintos.

celeste, com base em círculos, foram o ponto de partida para o desenvolvimento da mecânica moderna e gravitação de Newton, um desenvolvimento que, ironicamente, levou à rejeição da ideia da perfeição nos movimentos de rotação, em favor de uma maior consideração aos movimentos lineares.

Enquanto Nicolau Copérnico tinha aderido à ideia de que os movimentos celestes tinham uma forma circular, Johannes Kepler expressa-os por meio de elipses. No modelo de Kepler, a estabilidade das esferas ptolomaicas encontrou uma nova expressão na afirmação de que as órbitas elípticas dos planetas são fixas, tanto na forma como na orientação espacial.

Além disso, o movimento dos corpos celestes, ao longo do seu caminho, é tal, que as áreas ocupadas por uma linha que liga o planeta ao Sol são proporcionais ao tempo percorrido, apesar do fato de que a distância entre os dois corpos e a velocidade do planeta é constantemente mudada.

O hábito de expressar a constância do movimento de rotação em termos de áreas permaneceu vivo até o século XIX, de modo que o que é hoje mencionado como a Conservação do Momento Angular, naquela época adotava a forma de um princípio de Conservação das Áreas (SPARAVIGNA, 2015).

Atualmente, o Momento Angular de um sistema mecânico clássico é matematicamente representado por um vetor axial no espaço tridimensional, que pode ser manipulado de acordo com as regras da Álgebra Vetorial e é graficamente representado como um segmento orientado no espaço. Mas, segundo Caparrini (2002), a Álgebra Vetorial foi desenvolvida a partir de meados do século XIX, e não desempenhou nenhum papel de destaque no surgimento da Mecânica Clássica, mas a representação e manipulações de algumas grandezas físicas por meio de segmentos orientados já era usada no século XVII.

De acordo com Dugas (1995), a composição de forças com a regra do paralelogramo estava em uso desde o Renascimento e foi reescrita por Isaac Newton<sup>10</sup>.

Um corpo que sofre a ação de duas forças simultâneas descreve a diagonal de um

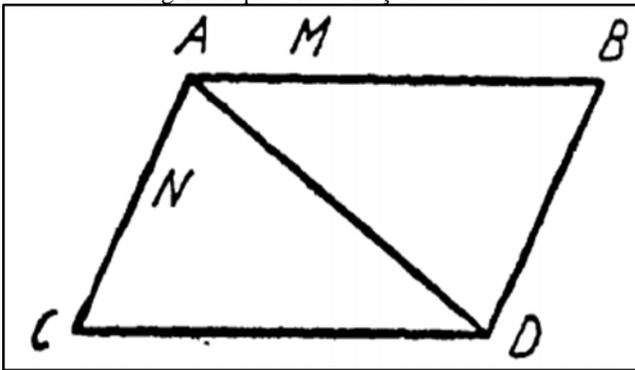
---

<sup>10</sup> Stevin em 1605 e Roberval em 1636, tinham estabelecido a regra da composição de Forças na Estática. Newton chegou às mesmas conclusões por considerações puramente dinâmicas (DUGAS,1955).

paralelogramo no mesmo tempo em que descreveria os lados do paralelogramo por essas forças, separadamente. (NEWTON<sup>11</sup>, p.137,1987, tradução nossa).

Para compor o efeito de duas forças M e N (Figura 8) que atuam sobre o mesmo corpo, elas foram representadas por dois segmentos ( e ), cada um com comprimento e direção que a força transmitia ao corpo, agindo sobre ela durante um determinado tempo.

Figura 8 – Forças, M e N representadas como lados de um paralelogramo, cuja diagonal representa a força resultante.



Fonte: Newton, p. 137, 1987.

Os segmentos foram desenhados como os lados de um paralelogramo cuja diagonal ( ) representa o efeito combinado das duas forças. Nesse procedimento, a força foi representada e manipulada geometricamente, de forma a dar movimento ao corpo. O movimento, por sua vez, foi relacionado à ideia de Força, que Newton tinha assumido da tradição medieval.

Embora Newton empregasse uma representação geométrica de forças e movimentos, ele nunca a utilizou para o Momento Angular, pela

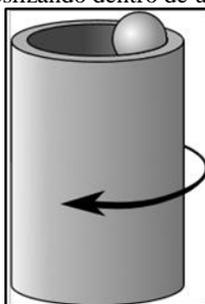
---

<sup>11</sup> Esta referência bibliográfica é a tradução da obra “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*” escrita por Isac Newton 1686. Traduzido para o espanhol por Eloy Rada García.

simples razão de que não existia essa noção em seu trabalho - nem mesmo quando abordou o problema da precessão do eixo da Terra.

De acordo com Clifford Truesdell (TRUESDELL, 1968), o primeiro autor a falar não apenas de um "momento de movimento de rotação", mas também de sua "conservação" foi Daniel Bernoulli em 1744. Bernoulli, discutindo o movimento de uma bola deslizando dentro de um tubo em rotação, mostrou que o valor absoluto do "momento de movimento de rotação" do sistema não pode ser alterado pela interação entre a bola e o tubo (figura 9).

Figura 9 – Bola deslizando dentro de um tubo em rotação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Daniel Bernoulli, ao referir-se a esses resultados como uma conservação de "momento de um movimento de rotação" ("*conservation bem momentii motus rotatorii*"), estava usando a expressão "momento" de uma força, que tinha sido desenvolvida no contexto da teoria da alavanca. Bernoulli considerou o movimento de rotação como uma quantidade escalar e não associou qualquer direção a ele, mesmo sabendo que a manipulação de grandezas físicas por segmentos orientados já existia desde o século XVII.

O efeito de uma Força de intensidade  $F$  atuando numa alavanca é proporcional tanto à  $F$  e à distância  $L$  do seu ponto de aplicação ao fulcro. O "momento" da força que atua na configuração específica é igual ao produto  $FL$  e dá uma medida escalar do efeito da Força. (TRUESDELL, 1968, p. 102).

No final da Renascença, essa noção foi estendida para indicar o efeito de uma Força que atua não só sobre uma alavanca, mas em um

corpo genérico que gira em torno de um ponto fixo (por exemplo um pêndulo). Daniel Bernoulli estendeu-o ainda mais, mas ainda assim considerava o momento do movimento de rotação como uma quantidade escalar e não associou qualquer direção a ele.

No mesmo momento em que Johannes Kepler e Isaac Newton (em locais diferentes) desenvolviam seus trabalhos para corpos pontuais e suas interações, os matemáticos do século XVIII assumiram a tarefa de matematizar os movimentos dos corpos estendidos. Contribuição decisiva para este campo foi dada pelo matemático Leonard Euler, que foi o primeiro a escrever as equações gerais do movimento de um corpo estendido (BORRELI, 2011).

## 2.2 LEONARD EULER E A ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

Em 1752, Leonard Euler escreve o manuscrito *Découverte d'un nouveau Principe de Mécanique* (EULER, 1752), no qual descreve um conjunto de equações para o movimento de um corpo rígido a partir da ideia de que qualquer movimento pode ser dividido em translação e rotação (figura 10).

Para isso, procurou expressar matematicamente o estado de um corpo em rotação, a partir de um sistema inercial fixo e outro a partir de um referencial ligado ao corpo em rotação (fixo com relação a este) através do teorema:

Girando uma esfera arbitrariamente em torno do seu centro, é sempre possível encontrar um diâmetro cuja posição depois da rotação é o mesmo que o inicial. (EULER, 1776, p.202. tradução nossa).

Figura 10 – Equações de Euler para o movimento de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa.



LV. Dans cet état le corps soit sollicité par des forces quelconques, & pour trouver le changement, qui en sera causé dans le mouvement du corps, on n'aura qu'à avoir égard aux momens des ces forces par rapport aux trois axes OA, OB, OC: soit donc le moment qui résulte de ces forces

pour l'axe OA dans le sens BC = Pa.

Le moment pour l'axe OB dans le sens CA = Qa.

Le moment pour l'axe OC dans le sens CO = Ra.

Maintenant égalant ces moments à ceux qui ont été trouvés cy-dessus (§. 49.) nous obtiendrons les trois équations suivantes.

$$I. \frac{Pa}{2M} - \frac{ff d\lambda}{dt} - \frac{nn d\mu}{dt} - \frac{mm dv}{dt} + \lambda v nn - \lambda \mu mm - (\mu \mu - \nu \nu) ll + \mu \nu (hh - gg)$$

$$II. \frac{Qa}{2M} - \frac{gg d\mu}{dt} - \frac{ll dv}{dt} - \frac{nn d\lambda}{dt} + \lambda \mu ll - \mu \nu nn - (\nu \nu - \lambda \lambda) mm + \lambda \nu (ff - hh)$$

$$III. \frac{Ra}{2M} - \frac{hh dv}{dt} - \frac{mm d\lambda}{dt} - \frac{ll d\mu}{dt} + \mu \nu mm - \lambda \nu ll - (\lambda \lambda - \mu \mu) nn + \lambda \mu (gg - ff)$$

d'où on pourra déterminer les changemens infiniment petits  $d\lambda$ ,  $d\mu$  &  $dv$ , qui seront produits dans l'élément du tems  $dt$ .

LVI. Mais, puisque la résolution de ces équations nous conduiroit à des formules trop longues, posons, comme nous avons fait auparavant, que le corps tourne à l'instant présent autour de l'axe OA dans le sens BC avec une vitesse angulaire =  $v$ : & qu'après le tems =  $dt$ , l'axe de rotation change, en sorte qu'il fasse alors avec l'axe OA un angle =  $d\zeta$ , avec l'axe OB un angle =  $90^\circ + d\eta$  & avec l'axe OC un angle =  $90^\circ + d\theta$ ; & que la vitesse angulaire devienne alors =  $v + dv$ : & nous avons vu qu'il est  $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$ . Cela supposé, nous aurons les trois équations suivantes:

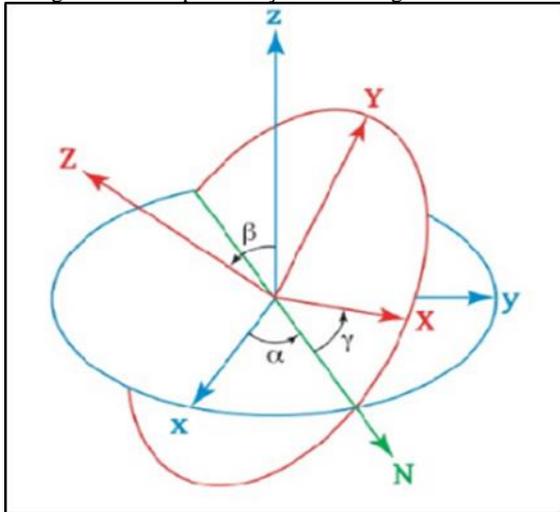
$$I. \frac{Pa}{2M} = \frac{ff dv}{dt} + \frac{nn v d\eta}{dt} + \frac{mm v d\theta}{dt}.$$

Dd 3

II. Qa

Para especificar a orientação do corpo girante em relação ao sistema inercial (fixo), ele utilizou três ângulos independentes (mais tarde denominados de ângulos de Euler) (Figura 11), que tornaram possível a parametrização de qualquer movimento de rotação

Figura 11 – Representação de os ângulos de Euler.

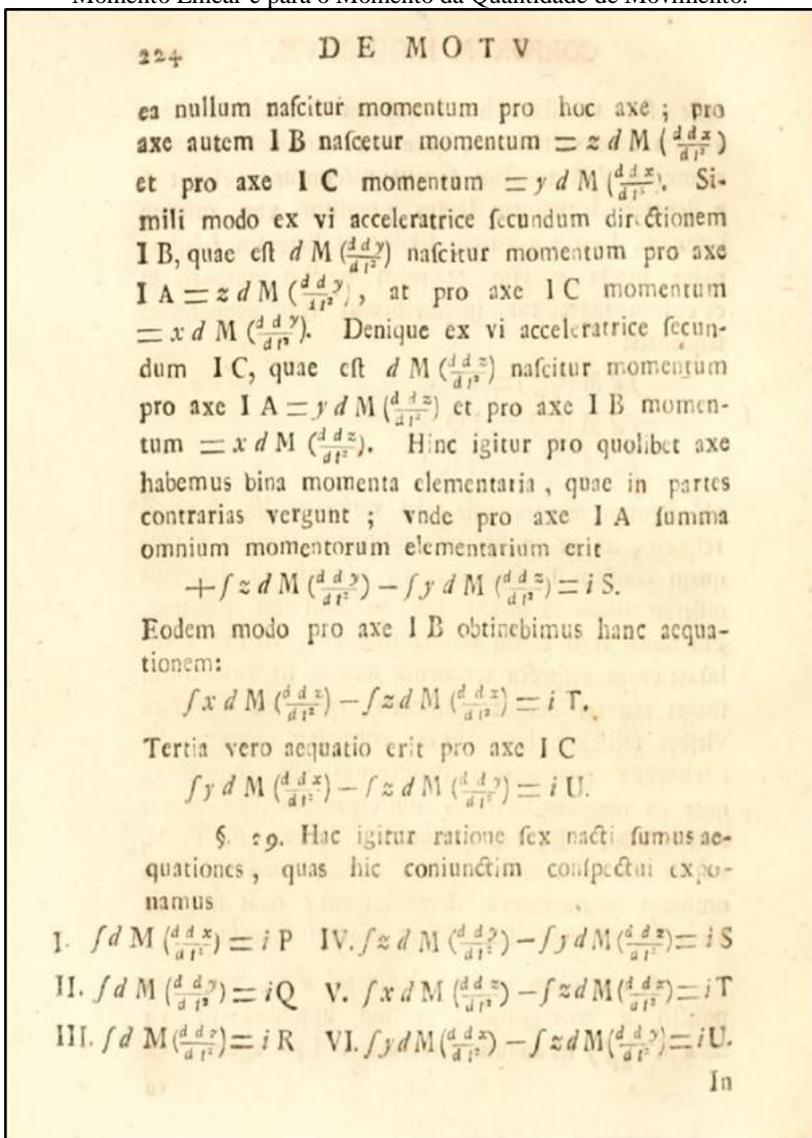


Fonte: Elaborado pelo autor.

Essa nova forma de expressar a orientação de um corpo em rotação, permitiu transformar uma descrição geométrica, em termos dos eixos de rotação para uma análise algébrica baseada em funções trigonométricas. Esse foi um passo muito importante, porque permitiu a Euler e autores posteriores descartar, pelo menos em parte, a linguagem geométrica da rotação.

Nessa caminhada de construção matemática, Euler, em 1776, apresenta um manuscrito intitulado “*Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi*”, no qual apresenta um conjunto de equações que descrevem os princípios do Momento Linear e do Momento da Quantidade de Movimento (figura 12).

Figura 12 – Enunciado geral demonstrado por Euler para os princípios do Momento Linear e para o Momento da Quantidade de Movimento.



De forma a tornar mais claras as equações do manuscrito, reescrevemo-las abaixo:

$$\begin{aligned} \int dM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) &= iP \\ \int dM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) &= iQ \\ \int dM \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) &= iR \\ \int zdM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) - \int ydM \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) &= iS \\ \int x dM \left( \frac{ddz}{dt^2} \right) - \int z dM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) &= iT \\ \int y dM \left( \frac{ddx}{dt^2} \right) - \int x dM \left( \frac{ddy}{dt^2} \right) &= iU \end{aligned}$$

Nas equações  $dM$  representa um elemento de massa infinitesimal do corpo na posição com coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ ;  $\frac{ddx}{dt^2}$ ,  $\frac{ddy}{dt^2}$  e  $\frac{ddz}{dt^2}$  (ou seja,  $\frac{dx^2}{dt^2}$ ,  $\frac{dy^2}{dt^2}$  e  $\frac{dz^2}{dt^2}$ ) são as acelerações correspondentes; P, Q e R são as forças externas resultantes nas direções dos três eixos x, y e z; S, T e U são os "Torques" resultantes das Forças Externas, tomadas nas direções x, y e z. e  $i$  representa  $2g$ , um fator dimensional acrescido às equações conforme alertamos anteriormente.

Euler usou aqui a noção de "Torque", como Daniel Bernoulli tinha feito, isto é, escalar, e assim não considerou S, T e U como componentes de uma única entidade física, mas sim como três Torques distintos, calculados em relação aos três eixos. (DE LA PENHA, 2017)

As primeiras três equações de Euler indicam a relação entre a força, massa e aceleração, enquanto as últimas três expressões correspondem ao que hoje descrevemos como a relação entre o Torque e a derivada do Momento Angular em relação ao tempo (BORRELLI, 2011).

Portanto, a partir de um ponto de vista puramente analítico, pode-se afirmar que Euler escreveu as expressões da dinâmica do Momento Angular de um corpo sólido e de sua conservação. Em uma comunicação posterior, ele discutiu o fato de que os efeitos dos momentos S, T e U poderiam, de fato, ser compostos da mesma forma, como as Forças, ou seja, utilizando a regra do paralelogramo (CAPARRINI, 2002).

Assim, a consideração de que os Momentos da Força são vetores foi feita por Leonhard Euler e pode ser encontrada em duas comunicações apresentados à Academia de São Petersburgo, em 1780 e publicados em páginas consecutivas do mesmo volume, apenas em em 1793<sup>12</sup>. Nestas comunicações, Euler descreve que os Momentos de Forças são vetores (CAPARRINI, 2002).

No primeiro documento, intitulado “Como encontrar os momentos de forças com respeito a qualquer eixo; onde se explicam várias particularidades notáveis acerca de pares de retas não situadas no mesmo plano.”<sup>13</sup> (EULER, 1793a) tenta obter uma expressão para o Momento de uma Força sobre um eixo - um conceito que até então só tinha sido definido por meio de uma descrição geométrica - como o produto da intensidade da Força pelo comprimento, perpendicular ao eixo e a linha de ação da Força.

Dessa forma, ele é levado a resolver um problema de geometria analítica, a saber: encontrar a distância entre duas linhas retas perpendiculares em coordenadas cartesianas retangulares (figura 13).

---

<sup>12</sup> Estas datas estão em um trabalho publicado em dois volumes por PH Fuss, a *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres GEOMETRES du XVIIIème siècle*. Ele continha grande parte da correspondência entre Leonhard Euler, Christian Goldbach, Nicolas Fuss, e vários membros da família Bernoulli (Johann (I), Nicolas, e Daniel). Além de publicar a correspondência, Fuss incluiu uma breve biografia de Euler, e uma lista de todas as obras conhecidas de Euler. Disponível em <http://eulerarchive.maa.org/correspondence/fuss/> acessado em 12/09/2016.

<sup>13</sup> De momentis virium respectu axis cuiuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas, non in eodem plano sitas, explicantur.” (EULER, 1793a)



$$m \sin w = (Gh - Hg)a + (Hf - Fh)b + (Fg - Gf)c$$

onde  $m$  é a distância entre as duas linhas,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são as coordenadas de um ponto na outra linha,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $f$ ,  $g$ ,  $h$  são os cossenos, respectivamente, da primeira e da segunda linha, e  $w$  é o ângulo entre eles<sup>14</sup>.

Por aplicação direta do resultado anterior, Euler obteve a expressão para o momento de uma força sobre um eixo na forma

$$az = fP + gQ + hR,$$

onde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  são, respectivamente, os momentos em torno do eixo  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$ , e  $f$ ,  $g$ ,  $h$  são os cossenos dos ângulos formados pelo eixo de momentos com os eixos de coordenadas.

Corolário 2: Os momentos de força ( $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ) dos três eixos normais podem ser compostos entre si da seguinte forma  $az=fP+gQ+hR$  que agrega uma grande harmonia e é digna de nota, aparece pela primeira vez no universo mecânico e não pode ser negligenciada (EULER, 1793a., p. 204, tradução nossa).<sup>15</sup>

Por aplicação direta do resultado anterior, Euler obteve a expressão para o momento de uma força sobre um eixo na forma

$$az = fP + gQ + hR,$$

<sup>14</sup> A fórmula para a distância entre duas linhas retas perpendiculares é, de um ponto de vista moderno, um produto misto de vetores que pode ser demonstrado por meio de cálculo vetorial; ver, por exemplo, o livro Geometria Analítica de Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987).

<sup>15</sup> COROLLARIUM 2: Momenta igitur virium pro ternis axibus inter se normalibus eodem prorsus modo componi possunt, quo vires simplices componi solent. Si enim puncto a applicatae fuerint vires  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , secundum directiones  $af$ ,  $ag$ ,  $ah$ , ex iis componitur vis secundum directionem  $az = fP + gQ + hR$ , quae egregia harmonia maxima attentione digna est censenda, atque in universam Mechanicam hinc non contemnenda incrementa redundare possunt. (EULER, 1793a, § 35, p. 204)

onde  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  são, respectivamente, os momentos em torno do eixo  $O_x$ ,  $O_y$ ,  $O_z$ , e  $f$ ,  $g$ ,  $h$  são os cossenos dos ângulos formados pelo eixo de momentos com os eixos de coordenadas.

Corolário 2: Os momentos de força ( $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ) dos três eixos normais podem ser compostos entre si da seguinte forma

$az = fP + gQ + hR$  que agrega uma grande harmonia e é digna de nota, aparece pela primeira vez no universo mecânico e não pode ser negligenciada. (EULER, 1793a., p. 204, tradução nossa).<sup>16</sup>

Esse resultado é muito semelhante ao teorema que diz que a componente de uma Força ao longo de uma dada linha pode ser obtida pela adição de suas projeções sobre três eixos ortogonais. Em uma leitura moderna, Euler indica que o momento das Forças pode ser representado por um segmento orientado e pode ser decomposto por meio da regra do paralelogramo.

No segundo documento, intitulado " Método fácil para se determinar os momentos de todas as forças com respeito a qualquer eixo"<sup>17</sup> (EULER, 1793b), que provavelmente foi escrito imediatamente após o primeiro, o objetivo é declarado logo no início (figura 14): estabelecer a fórmula dos momentos usando os primeiros princípios da Estática. Euler substitui um sistema de Forças por uma única Força, tornando o cálculo do momento em torno de um eixo muito mais simples (CAPARRINI, 2002).

---

<sup>16</sup> COROLLARIUM 2: Momenta igitur virium pro ternis axibus inter se normalibus eodem prorsus modo componi possunt, quo vires simplices componi solent. Si enim puncto a applicatae fuerint vires  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , secundum directiones  $af$ ,  $ag$ ,  $ah$ , ex iis componitur vis secundum directionem  $az = fP + gQ + hR$ , quae egregia harmonia maxima attentione digna est censenda, atque in universam Mechanicam hinc non contemnenda incrementa redundare possunt. (EULER, 1793a, § 35, p. 204)

<sup>17</sup> Methodus facilis omnium virium momentos respectu eixo cuius cunque determinandi (EULER, 1793b).

Figura 14 – Apresentação do problema por Euler na comunicação "Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi."

— ( 205 ) —

METHODVS FACILIS  
**OMNIVM VIRIVM MOMENTA**  
 RESPECTV AXIS CVIVSCVNQVE  
 DETERMINANDI.

Auctore  
**L. E V L E R O.**

---

*Conuent. exhib. die 14 Aug. 1780.*

---

**S**olutio Problematis geometrici, quo inter binas rectas non in eodem plano sitas quaerebatur earum distantia minima, deduxit me, per calculos non parum abstrusos, ad insigne Theorema mechanicum, quod ita commodissime enunciari potest: *Propositis viribus quibuscunque, si inuenta fuerint earum momenta respectu trium axium a f, a g, a h, inter se normalium, quae sint P respectu axis a f, Q respectu axis a g et R respectu axis a h; tum ab iisdem viribus, respectu axis cuiusvis obliqui a z, per punctum a transeuntis, oriatur momentum hoc:*

$$P \cos. f a z + Q \cos. g a z + R \cos. h a z,$$

*si quidem tria illa momenta, secundum eundem sensum agant, siue in sensum f g h siue in contrarium f h g. Quae egregia veritas cum ex consideratione geometrica per calculos satis prolixos deriuata sit, nullum est dubium, quin etiam via directa ex principiis staticis deduci queat. Postquam igitur hoc argumentum*

C c 3 sol-

Estes dois manuscritos foram escritos quando Euler já tinha completado 70 anos e estava completamente cego. Eles contêm sua última grande contribuição aos princípios mecânicos, tão importante quanto qualquer um dos anteriores. No entanto, observamos que ele não parece ter feito qualquer aplicação de sua descoberta. Talvez, Euler não considerava sua conjectura suficientemente madura para uma formulação vetorial da Dinâmica de Rotação

Já em 1788, Joseph Louis Lagrange publica o livro "*Mechanique Analytique*", no qual reescreve as equações de Euler de uma forma em que a "perspectiva vetorial" das equações era menos evidente do que na forma original de Euler (TRUESDELL, 1968). No entanto, o novo formalismo proposto por Lagrange permitiu deduzir um certo número de princípios de conservação que até aquele momento tinha sido considerado separadamente:

Uma das vantagens desta formulação é oferecer imediatamente as equações para a conservação de força viva, a conservação do movimento do centro de gravidade, a conservação do momento de rotação ou princípio das áreas e o princípio de mínima ação. (LAGRANGE, 1853, p. 225, tradução nossa).

Lagrange passou a explicar que o princípio da conservação do momento de rotação (ou seja, de áreas) foi derivado de forma independente por Leonard Euler, Daniel Bernoulli e Patrick D'Arcy (LAGRANGE, 1853, p.228).

De acordo com Lagrange, D'Arcy havia formulado um caso especial desse resultado em termos de áreas:

[...] à soma dos produtos da massa de cada corpo pela área que o seu raio vetor descreve ao redor de um centro fixo sobre um mesmo plano de projeção é sempre proporcional ao tempo.<sup>18</sup> (LAGRANGE 1853, p. 228, tradução nossa).

---

<sup>18</sup> "La somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe sur un même plan de projection est toujours proportionnelle au temps." (LAGRANGE, 1853, p. 228)

Lagrange considerou a formulação de D'Arcy como uma “generalização do teorema de Newton”<sup>19</sup>, que por sua vez era uma “generalização da lei das áreas de Kepler” e, ao derivar o resultado com seus próprios métodos, D'Arcy se referiu como "princípio de áreas" (LAGRANGE, 1853, p. 228).

Assim, no final do século XVIII, estava estabelecida uma regra para a conservação do momento de rotação na forma escalar. Foi Pierre Simon Laplace que chamou a atenção para o fato de que o princípio das áreas implicava também na conservação de uma direção preferencial do sistema. D'Arcy expressou esse fato geometricamente em termos de um "plano invariável" de rotação, o que corresponde a um plano perpendicular ao movimento angular (CAPARRINI, 2002).

### 2.3 LOUIS POINSOT E O CONCEITO DE BINÁRIO

Em 1783, o matemático francês Louis Poinsot publicou o livro intitulado "*Elements de Statique*" em que apresenta a mecânica clássica a partir de representações geométricas. Nesse Livro, Poinsot introduziu o conceito de binário ou conjugado, que é um conjunto de duas Forças de mesma intensidade, paralelas e de sentidos contrário, cujo ponto de aplicação não se situa na mesma reta. Poinsot foi levado a considerar esse novo conceito físico ao estudar a aplicação de um conjunto de forças em um corpo.

Desse estudo, concluiu que "qualquer número de Forças aplicado, de qualquer maneira, em um corpo, pode sempre ser reduzido a uma única Força, que passa por qualquer ponto considerado e de um binário simples, cujo plano será, em geral, inclinado em relação à Força".

Depois de demonstrar esse teorema, Poinsot enunciou seu corolário, segundo o qual "um corpo estará em equilíbrio sob a ação de um sistema de Força se a resultante das forças R for nula, e se o conjugado

---

<sup>19</sup> Vê-se que esse princípio é uma generalização do belo teorema de Newton, sobre as áreas descritas em virtude de forças centrípetas quaisquer; e para que a analogia possa ser percebida, ou melhor, a identidade com o de Euler e o de Daniel Bernoulli, basta considerar que a velocidade de circulação é expressa pelo elemento de arco circular dividido pelo elemento de tempo, e que o primeiro desses elementos, multiplicado pela distância ao centro, dá o elemento da área descrita em volta desse centro; daí vê-se que esse último princípio não é outra coisa senão a expressão diferencial daquele de D'Arcy. (LAGRANGE, 1853, p. 228, tradução nossa).

resultante também for nulo ao mesmo tempo”. Hoje, essas duas condições são traduzidas respectivamente como Força e Torque.

O tratado sobre a Estática foi um relato apenas de corpos em equilíbrio, mas em 1806, Poinsot começou a aplicar a sua abordagem à Dinâmica (POINSOT, 1806). Em um memorando apresentado à Academia, ele resumiu sua teoria dos pares, ressaltando que a representação geométrica dos momentos de um par poderia ser usada para representar e manipular os momentos de qualquer Força.

Ele mostrou como seu método permitia reproduzir todos os resultados presentes na Mecânica de Laplace e, finalmente, alegou que, graças ao novo formalismo, "Forças ocultas" haviam surgido (BORRELLI, 2011).

O significado dessa declaração tornou-se, de alguma forma, mais clara na terceira parte do ensaio, no qual a teoria foi aplicada à Dinâmica (POINSOT, 1806). Quando um corpo se move livremente no espaço em uma linha reta, disse Poinsot, a "Força" permanece constante em intensidade e direção, e o mesmo se aplica para a seu momento. Esta “conservação de Forças” e “conservação dos Momentos” era válida para qualquer sistema constituído de dois corpos interagindo entre si.

Poinsot tinha tomado os resultados das investigações analíticas de rotações e os transformou em uma nova forma geométrica, que trouxe à luz uma analogia entre o Movimento Linear e o de Rotação. Ele interpretou esta analogia como a descoberta de uma nova “entidade Física” cuja medida foi dada pelo momento da "Força" em um corpo em rotação (BORRELLI, 2011).

Matemáticos franceses apreciaram a abordagem de Poinsot, mas não o seu formalismo geométrico ou a sua interpretação Física, e tentaram dar formulações analíticas alternativas para seus resultados. Caparrini (CAPARRINI, 2002) deu um relato completo de como, ao estudar a rotação, os estudiosos começaram a desenvolver um formalismo analítico, que em muitos aspectos correspondeu à Álgebra Vetorial. Assim, embora os resultados de Poinsot tenham sido lentamente incorporados ao contexto analítico, a sua ideia de uma nova interpretação dos fenômenos de Rotação teve pouca repercussão entre os matemáticos franceses.

## 2.4 A TEORIA DOS BINÁRIOS E O CONCEITO DE MOMENTO ANGULAR

No mesmo ano em que Poinsot publicou "Nova teoria da rotação dos corpos" (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1834)<sup>20</sup>, uma versão em Inglês do trabalho foi publicada sob o título "Esboços de uma nova teoria do movimento de rotação" (POINSOT, 1834). Na tradução para o Inglês, foi acrescentado um comentário<sup>21</sup> que tratou da conservação de Forças e Momentos pela primeira vez:

Com o objetivo de facilitar o progresso da leitura, mais especialmente na esperança de tornar esta publicação útil para estudantes na Universidade, as demonstrações das proposições fundamentais foram escritas na "forma de notas e um apêndice contendo demonstrações dos princípios fundamentais da conservação dos pares, foi adicionado. (POINSOT, 1834, p. 218, tradução nossa).

Já em 1836, John Henry Pratt escreveu e publicou "Princípios Matemáticos da Filosofia Mecânica" (PRATT, 1836). No entanto, nesse trabalho não existe nenhuma referência sobre as quantidades Físicas que Poinsot tinha afirmado ter encontrado e a que ele se referia como uma "Força Conservada" ou "Momento" associado ao movimento de rotação de um corpo.

Quando James MacCullagh lecionava na Universidade de Dublin, em 1844, sobre a teoria dos binários e também sobre os resultados alcançados por Poinsot, fazendo uso de métodos analíticos, assumiu a

<sup>20</sup> Poinsot apresentou um trabalho com o título "Théorie nouvelle de la rotation des corps", na academia Francesa em 1834, e em seguida, publicou-o como um pequeno artigo em que ele só faz uso de argumentos geométrico. Não há expressões analíticas presentes.

<sup>21</sup> "With a view to facilitate the progress of the Reader, but more especially in the hope of rendering this publication useful to Students in fundamental propositions have been subjoined in the the University, demonstrations of the form of notes, and an Appendix containing demonstrations of the leading principles assumed, viz. the existence of an Instantaneous Axis, and of three Principal Axes, and the Conservation of Couples, has been added." (POINSOT, 1834).

interpretação do movimento rotacional em termos de um binário (MacCULLAGH, 1849) (figura 15).

Figura 15 – Fragmento do livro de James MacCullagh

*Rotation of a Solid Body round a Fixed Point.* 335

from the preceding equation by replacing  $C'$  and  $\tan \phi$  by their values  $\mu P^2$ , and  $\frac{Q}{P}$ ;  $Q$  being the line  $RP$ .

We thus obtain finally the centrifugal couple lying in the plane  $XOZ$ , and expressed by the equation

$$\omega^2 \int xz \, dm = -\mu \omega^2 PQ. \quad (8)$$

It thus appears that the centrifugal couple lies in the plane of radius vector and perpendicular, is proportional to the area of the triangle  $ROP$ , and has a direction opposite to the direction of rotation.

V.—TO FIND THE RELATION BETWEEN THE PLANE OF PRINCIPAL MOMENTS AND THE AXIS OF ROTATION AT ANY INSTANT.

The motion of the body at any instant consists of a rotation of a certain magnitude round a certain axis; this rotation might be produced by an impulsive couple of a determinate magnitude and direction. The statical impulsive couple thus conceived is the couple of principal moments. Let this couple be represented by  $G$ , and act round the axis  $OR$  (fig. 1, p. 334); then the corresponding axis of rotation will be the perpendicular  $OP$ , and the relation between  $G$  and  $\omega$  may be thus found:—Let the axes of co-ordinates be the axes of the ellipsoid (4), the radius vector being determined by the angles  $(\lambda, \mu, \nu)$ , and the axes of rotation by the angles  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . From mechanical considerations we obtain the equations

$$\begin{aligned} G \cos \lambda &= Ap = \mu \omega a^2 \cos \alpha; \\ G \cos \mu &= Bq = \mu \omega b^2 \cos \beta; \\ G \cos \nu &= Cr = \mu \omega c^2 \cos \gamma. \end{aligned}$$

Hence we obtain

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \nu} = \frac{a^2 \cos \alpha}{c^2 \cos \gamma}, \quad \frac{\cos \mu}{\cos \nu} = \frac{b^2 \cos \beta}{c^2 \cos \gamma}, \quad (9)$$

$$\omega = \frac{G}{\mu PR} = \frac{G \cos \phi}{\mu P^2}.$$

Fonte: MacCullagh, 1849.

Entre 1845 e 1848, William Rowan Hamilton (HAMILTON, 1847) apresentou para a Academia Real Irlandesa dois artigos em que ele discutia a aplicação do método de Poinsot e os resultados de MacCullagh para a teoria do binário. Ambos, MacCullagh e Hamilton, fazem uma abordagem analítica do “conceito” geométrico.

O primeiro autor a dar destaque a este novo conceito foi o matemático Robert Baldwin Hayward. De acordo com Borrelli (2011), o termo “Momento Angular” aparece pela primeira vez em 1856, quando Robert Baldwin Hayward, matemático inglês, que estuda a rotação de corpos rígidos a partir do pêndulo de Foucault, mostra a existência de uma grandeza que relacionava o movimento e a sua causa (termos utilizados por Robert para velocidade e força) à qual ele chamou de momento angular. O artigo é dedicado à teoria geral do movimento de corpos rígidos, e está dividido em duas partes.

A primeira parte do trabalho foi puramente matemática, mostrando como manipular quantidades vetoriais (HAYWARD, 1856). No início da segunda parte, o autor escreveu:

Uma vez que cada sistema de forças é redutível a uma única força e a um único par, temos que investigar os efeitos das forças, e os efeitos desse par. Sabemos agora que a força resultante determina o movimento do centro de gravidade do sistema. De modo semelhante o par resultante determina algo relativamente ao movimento do sistema em torno do seu centro de gravidade, o que no caso de um sistema invariável define o seu movimento de rotação em torno desse ponto, mas que, em outros casos, não é geralmente reconhecido como uma grandeza Física, e, portanto, não recebeu nome. Este defeito será sanado através da adoção do termo momento como o termo intermediário entre força e velocidade<sup>22</sup> (HAYWARD, 1856, p. 7, tradução nossa).

---

<sup>22</sup> This problem naturally resolves itself into two: for, since every system of forces is reducible to a single force and a single couple, we have to investigate the effects of that force, and the effects of that couple, Now we know that the resultant force determines the motion of the centre of gravity of the system, be the constitution of the system what it may. In like manner the resultant couple determines something relatively to the motion of the system about its centre of gravity, which in the case of an invariable system defines its motion of rotation about that point, but which in other cases is not usually recognised as a definite objective magnitude, and has therefore no received name. This defect will be remedied by adopting momentum as the intermediate term between force and velocity, and by

Dessa forma, ele estabelece uma nova representação do movimento rotacional, que estava de acordo com a ideia do "momentum", ou seja, o "impulso" de um corpo em movimento. Como Poinsot, Hayward deu especial destaque à conservação dos Momentos Linear e Angular e ressaltou a continuidade entre as duas noções, falando de uma "conservação do momento", que poderia ser aplicada tanto ao linear quanto ao angular, correspondendo, respectivamente, à "conservação do movimento do centro de gravidade" e ao "princípio da conservação de áreas" (HAYWARD, 1856, p.9). A fórmula de Hayward é usada para obter a expressão para o "Momento Angular", usado nos livros didáticos de Física Básica (figura 16).

---

regarding as distinct steps the passage from force to momentum and that from momentum to velocity.

Figura 16 – Fragmento do Manuscrito em que aparece pela primeira vez a expressão para o Momento Angular usada nos livros didáticos de Física.

VELOCITIES, &c. WITH RESPECT TO AXES MOVEABLE IN SPACE. 17

also, since  $p', \theta'$  are involved in precisely the same manner as  $p, \theta$ , it follows that

$$p'^2 = p'^2(1 + a'\beta'\gamma'\cot^2\theta');$$

where  $a', \beta', \gamma'$  are what  $a, \beta, \gamma$  become, when  $p'$  is put for  $p$ .

From these equations we obtain

$$\cot^2\theta' = -\frac{a\beta\gamma}{a'\beta'\gamma'} \frac{\cot^2\theta}{1 + a\beta\gamma\cot^2\theta};$$

but

$$a' = 1 - \frac{1}{Ap'^2} = 1 - \frac{1}{Ap^2} \cdot \frac{1}{1 + a\beta\gamma\cot^2\theta} = a \frac{1 + \beta\gamma\cot^2\theta}{1 + a\beta\gamma\cot^2\theta};$$

whence, with the corresponding expressions for  $\beta', \gamma'$ ,

$$\cot^2\theta' = -\cot^2\theta \cdot \frac{(1 + a\beta\gamma\cot^2\theta)^2}{(1 + \beta\gamma\cot^2\theta)(1 + \gamma\alpha\cot^2\theta)(1 + a\beta\cot^2\theta)},$$

hence  $p', \theta'$  are known in terms of  $p, \theta$ .

32. Substituting now for  $p', \theta'$  in terms of  $p, \theta$ , we obtain from equation (8)

$$\frac{d(\cot\theta)}{dt} = hp'^2 \frac{\cot\theta}{\cot\theta'}$$

$$= \pm hp^2 \left\{ - (1 + \beta\gamma\cot^2\theta)(1 + \gamma\alpha\cot^2\theta)(1 + a\beta\cot^2\theta) \right\}^{-1}, \dots \dots (10)$$

and from equation (9)

$$\Omega = hp^2 (1 + a\beta\gamma\cot^2\theta).$$

If  $h$  be known by means of (7), these two equations determine completely the motion of  $OI$  the axis of angular velocity in altitude and azimuth, since  $p$ , and therefore  $a, \beta, \gamma$ , are constants.

If  $\phi$  denote the azimuth at any instant,  $\frac{d\phi}{dt} = \Omega$ , and dividing the last equation by the preceding, we obtain a relation involving  $\phi$  and  $\theta$  only, which will therefore be the differential equation to the conical path of  $OI$  in space; and it is worth notice that, this relation being independent of  $h$ , the path of  $OI$  is the same whether the body be acted on by a couple whose axis coincides with  $OH$ , or whether it be acted on by no forces. The effect of the couple in this case is in fact only to alter the velocities of the different lines, not the paths which they describe.

Also equation (1) gives  $\omega = hp^2 \sec\theta$ , from which  $\omega$  is known when  $\theta$  is known by means of equation (10), and thus the velocity about  $OI$  is known completely as well as its position at any time.

33. If there be no forces acting, i. e. if  $G = 0$ ,  $h$  is constant, as is also  $\omega \cos\theta$ , the resolved angular velocity of the body about  $OH$ . Also the *vis viva* of the body

$$= I\omega^2 = \frac{\omega^2}{r^2} = \frac{h^2 p^4}{r^2 \cos^2\theta} = h^2 p^2,$$

and is therefore constant; and hence  $\frac{\omega}{r}$  is constant, or  $\omega \propto r$ ; both well known results. It may

VOL. X. PART I. 3



## **CAPÍTULO 3: A TRAJETÓRIA DO CONCEITO DE MOMENTO ANGULAR E TORQUE NO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA BÁSICA.**

### **3.1 INTRODUÇÃO**

A história dos livros didáticos é interessante e complexa. Ela se situa no cruzamento de três histórias habitualmente separadas: a história das ciências, a história do ensino e a história do livro. Os livros didáticos são objetos materiais, constituindo os traços escritos e duráveis das práticas didáticas e seus conteúdos. Eles podem nos dar uma visão dos programas oficiais num determinado contexto social e histórico. (SAMPAIO; SANTOS, 2007).

Chevallard (2005) nos mostra que o livro didático traz proposições e intencionalidades sobre um saber a ensinar, traz também o resultado de uma história, das transformações e movimentos internos que ocorrem e ocorreram dentro de uma disciplina. Nessa perspectiva, Souza e Porto (2009) atribuem ao livro didático a exposição de um consenso disciplinar e um rico objeto de investigação para analisar tendências da área de ensino no país, concepções de ciências, e processo através do qual a Ciência é elaborada.

Já para Pinho Alves, Pinheiro e Pietrocola (2001, p. 77) os elementos contidos nos livros didáticos são os norteadores das aulas dos professores; eles afirmam que “quando prepara as suas aulas, geralmente o professor se referencia em livros didáticos dirigidos ao respectivo grau de ensino que leciona”.

O objetivo deste capítulo é analisar como os conceitos de Momento Angular e Torque são apresentados nos livros didáticos de Física básica para o ensino superior, a partir de uma perspectiva histórica.

Escolhemos o período compreendido que vai do final do século XVIII até o início da década de 1960. Essa escolha se deu porque foi no início desse período que o ensino brasileiro começou a se estruturar como um sistema educacional institucional mais organizado, e foi quando se adotaram os primeiros livros didáticos. Por outro lado, finalizamos na década de 1960, porque o ensino de Física já ocupava um papel expressivo no ensino superior, assim como os livros didáticos brasileiros já possuíam um perfil que iria prevalecer nas décadas seguintes (NICIOLI; MATTOS 2006).

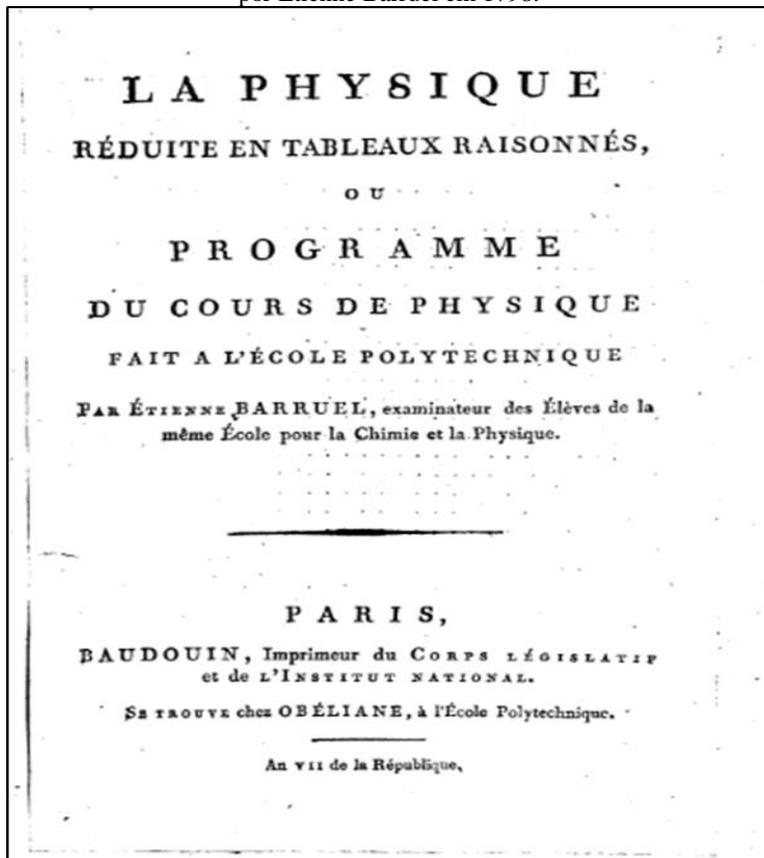
### 3.2 OS PRIMÓRDIOS DO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA NO BRASIL

No início das descrições dos fenômenos da natureza, as explicações sempre estiveram apoiadas na Filosofia, predominava a visão aristotélica que tinha como base uma explicação divina, ou seja, relacionada com o poder religioso. É a partir dos séculos XVI e XVII que novas descrições sobre os fenômenos naturais produzem um contraste entre o pensamento medieval e o pensamento moderno (WUO, 2000).

Os conceitos estavam ligados à Filosofia Natural quando se referiam à natureza como um todo, e à Filosofia Experimental, quando se referiam aos aspectos experimentais da Ciência. Nesse período, de acordo com Lorenz (2008), a grande maioria dos livros utilizados eram traduções de originais franceses, que, elaborados sob uma concepção humanista, acabaram por influenciar o modo de pensar a educação brasileira. Essa influência permaneceu durante boa parte das primeiras décadas do século XX, deixou de ser predominante a partir da segunda metade daquele século, cedendo lugar à influência norte-americana.

Um dos primeiros livros utilizado no Brasil foi “*La physique rééditée en tableaux raisonnés ou programme du cours de physique fait à l'École Polytechnique*” (figura 17) escrito por Etienne Barruel e publicado em 1798.

Figura 17 – Capa do livro “La physique rééduite en tableaux raisonnés” escrito por Etienne Barruel em 1798.



Fonte: Barruel, 1798.

O livro, que foi traduzido pelo Cônego Francisco Vieira Goulard tratava somente dos conceitos de Física, sem nenhuma aplicabilidade real ou relação com experimentação. Segundo Sampaio (2004, p. 45)

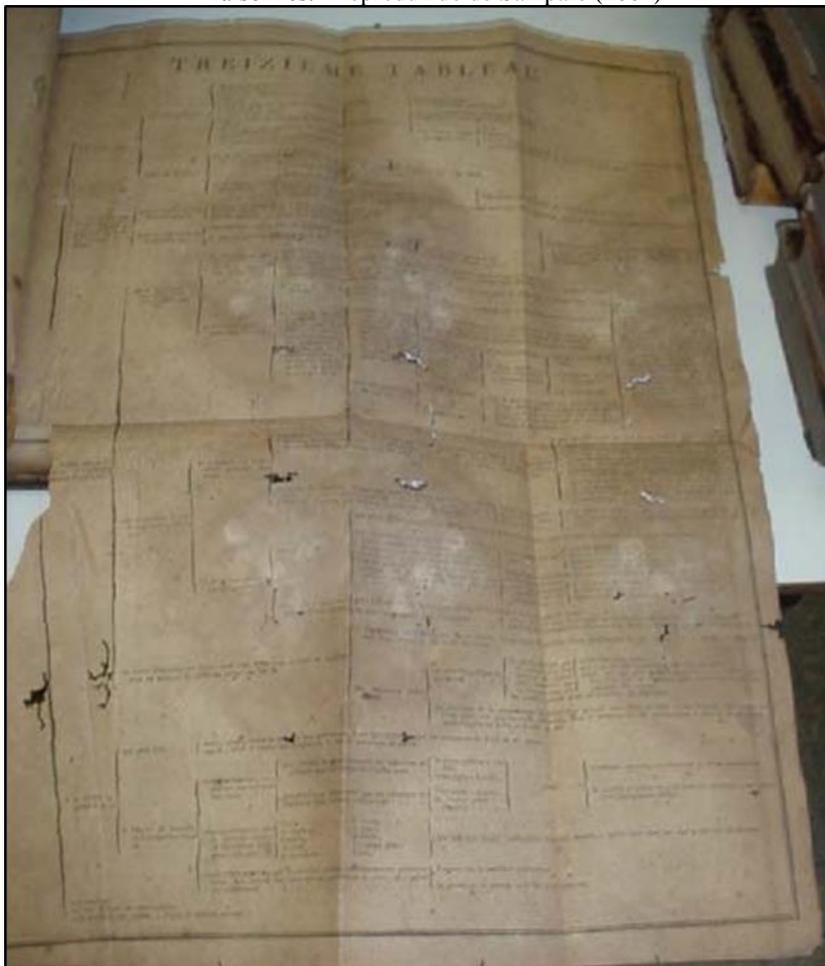
[...]a obra de Barruel é composta de quarenta e três páginas, sendo as cinco primeiras de apresentação do livro e as trinta oito restantes compostas de quadros cuja apresentação, devido ao tamanho, é feita por uma outra folha dobrada em quatro partes colada na folha do volume” (figura 18).

Na apresentação da obra, o autor faz algumas considerações:

Estas tabelas racionais oferecem um corpo completo da doutrina relativamente ao estado atual de nossos conhecimentos. Dentro da ordem metódica que adotei, creio que uma Ciência que, em geral, tem por objeto as propriedades dos corpos, não pode comportar outra divisão que a das mesmas propriedades. Por isso fui obrigado a criar alguns nomes que não existem dentro da Ciência [...] (SAMPAIO; SANTOS, 2007, p. 6).

Ao analisarmos o livro, observamos os conteúdos definidos sinteticamente. Os conceitos são expostos do geral para o específico. Nessa obra, os assuntos são apresentados por um conjunto de definições e não há nenhuma fórmula ou gráfico. Na primeira tabela, intitulada “Tabela Geral da Física”, o autor lista 21 propriedades físicas fundamentais, divididas em dois grupos maiores; o primeiro grupo compreende as propriedades que “afetam os corpos de maneira constante” (extensão, impenetrabilidade, mobilidade, inércia, gravidade), e o segundo é constituído das propriedades “que afetam os corpos de maneira variável” (porosidade, sonoridade, afinidade, calorimetria, eletricidade, elasticidade, solidez, liquidez, gasometria, capilaridade, higrometria, meteorologia, cristalinidade, claridade, magnetismo, galvanismo).

Figura 18 – Imagem da página 23 de “La physique réduite en tableaux raisonnés.” Reproduzido de Sampaio (2004)



Fonte: Nicioli e Mattos, 2008b.

Uma característica importante dos livros didáticos de Física, da primeira metade do século XIX, é que apresentam um enfoque descritivo dos conceitos de Física, baseados em exemplos hipotéticos, sem vínculos com o cotidiano. Não existe nenhuma referência aos conteúdos de Momento Angular e Torque, visto que os livros de Física Básica não discutiam a Dinâmica das Rotações, na primeira metade do século XIX,

este assunto era tratado em livros de Mecânica Analítica ou em cursos de Matemática, como veremos adiante.

Em 04 de dezembro de 1810, o Príncipe Regente, D. João e o Ministro da Guerra, Conde de Linhares, fundaram, no Rio de Janeiro, a Academia Real Militar, que mais tarde vai dar origem aos primeiros cursos de Engenharia do Brasil. Até o quarto ano predominavam, na grade curricular, as disciplinas de Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria) e Física (Mecânica, Ótica, Astronomia, Geodésia e Física Experimental), as quais serviam de preparação para as disciplinas de caráter militar, que eram ministradas a partir do quinto ano (ALMEIDA, 2000). Com esse enfoque, o ensino militar acabou sendo a base para outra formação, a dos Engenheiros. Os conteúdos de Física estavam contemplados no 3º ano, como nos coloca Costa e Piva (2011):

Estudavam a Mecânica e sua aplicação nas máquinas. Ordenava a Carta Régia que o lente tivesse como fonte de consulta a obra de Louis Benjamin F. Francoeur devendo consultar os últimos tratados sobre o assunto, em especial as dos autores: Gaspard Clair François M. Prony (1707-1751), Abade Charles Bossut (1730-1814), Jean Antoine Fabre (1749-1834) e Olinthus Gilbert Gregory (1774-1841). Além destes, os lentes também deveriam consultar sobre o movimento dos projéteis, Étienne Bézout (1700-1783) Benjamin Robins (1707-1751) e Memórias de Leonhard Paul Euler.

Continuando, Costa e Piva (2011) relatam que, em 1839, a Academia Militar foi então reorganizada e passou a se chamar Escola Militar. Era composta de dois cursos designados como: Primeiro Curso (1º e 2º anos) e Segundo Curso (3º e 4º anos). O estudo da Física passou a ser ministrado no 3º e 4º anos, com a seguinte formatação: “[...] **4º ano** - *Cadeira de Mecânica, compreendendo o estudo da Mecânica racional e o estudo de Cálculo das probabilidades.*”

No dia 09 de março de 1842 o regulamento da Escola sofreu outra alteração e passou a ser feito com a seguinte grade curricular:

**1º ano** – Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria e Trigonometria Plana.

**2º ano** – Álgebra Superior, Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral.

**3º ano** – Mecânica Racional e aplicada às máquinas.

**4º ano** – Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia.

Abaixo apresentamos o quadro curricular (quadro 2) das disciplinas ensinadas nas escolas militares até o quarto ano, pois nos anos seguintes as disciplinas são específicas do meio militar (ALMEIDA, 2000):

Quadro 2 – Quadro curricular das disciplinas ensinadas nas escolas militares.  
Reproduzido de (ALMEIDA 2000)

	1º Ano	2º Ano	3º Ano	4º Ano
1832	Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho.	Trigonometria, Cálculo diferencial e integral, Geometria Descritiva e Desenho.	Arquitetura, Física e Química, Mineralogia e Pirotécnica.	Esférica, Ótica, Astronomia, Geodésia, Topografia e Navegação.
1833	Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho.	Álgebra, Cálculo diferencial e integral, Geometria Descritiva, Mecânica e Desenho.	Tática, Estratégia, Castramentação, Fortificação de Campanha, Artilharia, Física, Química, Mineralogia e Desenho.	Trigonometria Esférica, Ótica, Astronomia, Geodésia e Desenho.
1839	Matemática Elementar, Operações topográficas, Instrumentação prática de infantaria e cavalaria e desenho topográfico.	Tática, Fortificação passageira, Castramentação, História Militar, Instrução prática e Desenho Militar	Análise finita e infinitesimal, Geometria Descritiva e Analítica e Física experimental	Mecânica Racional, Cálculo das probabilidades, Química-Botânica, Desenho das Máquinas, Instrução Prática de Artilharia, Engenharia e Estado-Maior.
1842	Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho.	Álgebra superior, Geometria Analítica, Cálculo diferencial e integral, Desenho.	Mecânica Racional e Aplicada, Física Experimental, Desenho	Trigonometria Esférica, Astronomia, Geodésia, Química- mineralogia e Desenho.
1845	Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Desenho.	Álgebra superior, Cálculo diferencial e integral, Geometria Descritiva, Geometria Analítica e Desenho.	Mecânica Racional e Aplicada, Física Experimental, Desenho	Trigonometria Esférica, Astronomia, Geodésia, Química- mineralogia e Desenho.

Fonte: Nicoli e Mattos, 2007.

Os livros de Física, utilizados no ensino militar, eram de origem francesa, pois não havia livros brasileiros. Uma exceção é o livro de Física “Tratado Elementar de Física” de René Just Haüy, o Abade Haüy (figura 19), que foi traduzido para o português em 1810. No livro de Haüy, todo o conteúdo de Física é tratado com uma abordagem qualitativa, as poucas figuras apresentadas estão no final do livro, sendo todo o corpo do texto descritivo, apresentando, em alguns momentos, exemplos numéricos.

Essas características ficam evidentes na introdução, quando ele destaca que

[...] a observação e a theoria concorrem igualmente para a certeza e desenvolvimento dos nossos conhecimentos, cada hum tem na mão seu luzeiro; o da observação dirige os seus raios sobre cada facto em particular, de modo que seja totalmente conhecido, claramente determinada, e exposta na sua verdadeira forma; o da theoria aclara a reunião de factos, antecedentemente dispersos, o que parecião não ter nada de comum entre si, todos eles se reúnem; tomando hum ar de família e parecendo não ser mais do que as differentes faces de hum facto único (HAÜY, 1810, p. IX).

As ilustrações apresentadas no livro são figuras geométricas, as quais o autor utiliza para fazer as descrições, apesar de o livro apresentar inúmeros conceitos que envolvem a Física e também os tópicos do currículo do ensino militar, o autor não faz nenhuma menção aos conceitos de Momento angular e Torque, como podemos ver no índice do livro (figura 20). Sua adoção se estendeu por várias décadas, sendo substituído pelo livro de Adolph Ganot, em 1860 (MOTTA, 1976).

Figura 19 – Capa do livro “Tratado Elementar de Física” de F. J. Haüy (1810).

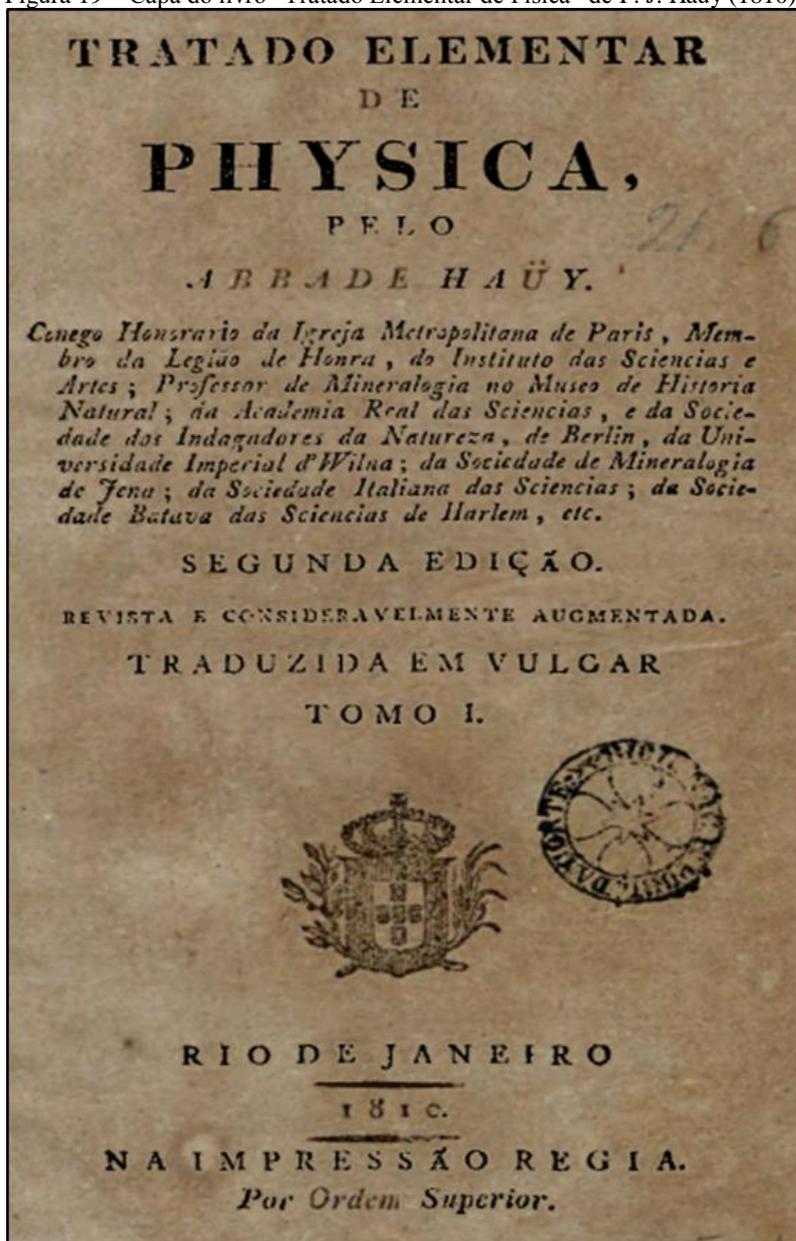


Figura 20 – Imagem da página 415 do “Tratado Elementar de Física”

415

## T A B O A

### DOS PRINCIPAES ARTIGOS

#### CONTIDOS NESTE VOLUME.

<b>I</b>	INTRODUCCÃO.	pag. III.
<b>II.</b>	DAS PROPRIEDADES MAIS GERAES DOS CORPOS.	27
	1. <i>Da Extensão</i>	27
	2. <i>Da Mobilidade.</i>	31
	3. <i>Da Impenetrabilidade.</i>	35
	4. <i>Da Divizibilidade.</i>	36
<b>II.</b>	DA ATTRACCÃO.	39
	1. <i>Do Pezo absoluto, ou da Gravitação.</i>	40
	2. <i>Da Affinidade, ou da Attractão molecular.</i>	60
<b>III.</b>	DO CALORICO.	95
	1. <i>Dos Principios sobre que he fundada a Theoria do Calorico.</i>	97
	2. <i>Applicação da Theoria precedente a diversos Phenomenos.</i>	108
	3. <i>Do Calorico Especifico.</i>	127
	4. <i>Dos Effeitos do Calorico em mudar o estado dos Corpos.</i>	131
	5. <i>Dos Effeitos da Compressão e da Dilatação sobre o Calorico contido nos Corpos.</i>	143
	6. <i>Da Lei que seguem os fluidos Elasticos na variação de seu volume e de sua força elastica, por effeito do Calorico.</i>	151
	7. <i>Das Dilatações e Contractões de diversos Corpos solidos, pelas variações da Temperatura.</i>	159
	8. <i>Do Thermometro.</i>	163
	9. <i>Dos Vapores, e de sua Mistura com os Gazes.</i>	174
	10. <i>Da Combustão.</i>	195
<b>IV.</b>	DA AGOA.	196
	1. <i>Da Ahoa em estado Liquido.</i>	196
	2. <i>Da Ahoa em estado de Gelo.</i>	211
	3. <i>Da Ahoa em estado de Vapor.</i>	256
<b>V.</b>	DO AR.	253
	1. <i>Do Pezo Elasticidade do Ar.</i>	264
	2. <i>Das differentes Modificações de que a Atmosphera he susceptivel.</i>	292

Já o livro sugerido no programa da escola militar para o estudo da Mecânica Racional foi “*Traité de Mécanique élémentaire et théorique*” (figura 21) do matemático Francês Louis-Benjamin Francoeur, publicado em 1803.

No prologo do livro, o autor descreve sobre a dificuldade que é o ensino da Mecânica Analítica:

Figura 21 – Capa do livro *Traité de Mécanique élémentaire et théorique* de L.B Francoeur (1800). Versão em Espanhol publicada em 1803.



Fonte: Francoeur, 1803.

Infelizmente a Mecânica Analítica, Celeste e Filosófica não são tratados elementares: só os sábios a entendem. É perturbador que estas obras sublimes estão fora do alcance de muitos amigos da ciência (FRANCOUER, 1803, p. VI, tradução nossa).

Francoeur divide sua obra em quatro partes: Estática, Dinâmica, Hidrostática e Hidrodinâmica. No capítulo “*Movimento de um ponto em uma trajetória curva*”, o autor introduz o “Princípio da conservação da velocidade das áreas” (figura 22).

Francoeur usa o princípio de conservação das áreas para expressar a constância do movimento de rotação. Como vimos no capítulo anterior, o hábito de expressar a constância do movimento de rotação, em termos de áreas, permaneceu vivo até o século XIX, de modo que o que é hoje mencionado como a Conservação do Momento Angular, naquela época, adotava a forma de um princípio de Conservação das Áreas.



Somente em 1803, Louis Poinsoot apresenta uma formulação para o Momento Angular semelhante ao que estamos usando hoje, como um produto cruzado de vetores. Segundo Sparavigna (2015), foi em 1858, no Manual de Mecânica Aplicada, de William Rankine (figura 23), que encontramos o momento angular definido no sentido moderno, pela primeira vez<sup>23</sup>.

Na edição 1872, do mesmo livro, Rankine afirmou que o termo "Momento Angular" foi introduzido por R. B. Hayward. Rankine estava provavelmente se referindo ao artigo de Hayward: "Sobre um método direto de estimar velocidades, acelerações e todas as quantidades semelhantes em relação a eixos móveis de qualquer maneira no espaço com aplicações". O artigo de Hayward, como mencionamos anteriormente, foi o primeiro a usar o termo "Momento Angular"; Anteriormente, o Momento Angular era tipicamente referido como "Momento de Rotação".

A partir da segunda metade do século XIX, o enfoque dos livros didáticos aponta para uma nova metodologia na abordagem da Ciência. Essa modificação fica evidente nos livros portugueses e franceses, que eram os escolhidos para fazerem parte do ensino no Brasil (NICCIOLI JUNIOR; MATTOS, 2008a). Observamos nesses livros que a Física até então descritiva, agora contém fórmulas, figuras de aparelhos e aparatos físicos. Os livros estavam se adequando à nova visão positivista da Ciência e assim, conforme (WUO, 2003).

[...] o conteúdo deixa de oferecer os elementos filosóficos e históricos que traduzem os embates em torno dos conceitos e teorias, e passa a analisar equipamentos fotográficos, fonógrafos, telégrafos, telefones, microfones, instrumentos de meteorologia e climatologia, bombas hidráulicas, motores, geradores etc (WUO, 2003).

---

<sup>23</sup> “Uma linha cujo comprimento é proporcional à magnitude do Momento Angular e cuja a direção é perpendicular ao plano de movimento do corpo e do ponto fixo e tal que, quando o movimento do corpo é visto a partir da extremidade do momento Linha, o raio-vetor do corpo parece ter a mão direita rotação”. (Rankine, pag.505.1872. Tradução nossa)

Figura 23 – Definição de Momento Angular por William Rankine.

SECTION 4.—*Varied Translation of a System of Bodies.*

558. **Conservation of Momentum.**—THEOREM. *The mutual actions of a system of bodies cannot change their resultant momentum.* (Resultant momentum has been defined in Article 524.) Every force is a pair of equal and opposite actions between a pair of bodies; in any given interval of time it constitutes a pair of equal and opposite impulses on those bodies, and produces equal and opposite momenta. Therefore the momenta produced in a system of bodies by their mutual actions neutralize each other, and have no resultant, and cannot change the resultant momentum of the system.

559. **Motion of Centre of Gravity.**—COROLLARY. *The variations of the motion of the centre of gravity of a system of bodies are wholly produced by forces exerted by bodies external to the system; for the motion of the centre of gravity is that which, being multiplied by the total mass of the system, gives the resultant momentum, and this can be varied by external forces only.*

It follows that in all dynamical questions in which the mutual actions of a certain system of bodies are alone considered, the centre of gravity of that system of bodies may be correctly treated as a point whose motion is none or uniform; because its motion cannot be changed by the forces under consideration.

560. The **Angular Momentum**, relatively to a fixed point, of a body having a motion of translation, is the product of the momentum of the body into the perpendicular distance of the fixed point from the line of direction of the motion of the body's centre of gravity at the instant in question; and is obviously equal to the product of the mass of the body into double the area swept by the radius vector drawn from the given point to its centre of gravity in an unit of time. Let  $m$  be the mass of the body,  $v$  its velocity,  $l$  the length of the before-mentioned perpendicular; then

$$m v l = \frac{W v l}{g}$$

is the angular momentum relatively to the given point.

Angular momenta are compounded and resolved like forces, each angular momentum being represented by a line whose length is proportional to the magnitude of the angular momentum, and whose direction is perpendicular to the plane of the motion of the body and of the fixed point, and such, that when the motion of the body is viewed from the extremity of the line, the radius vector of the body seems to have right-handed rotation. The direction of such a line is called the *axis* of the angular momentum which it represents. The *resultant angular momentum* of a system of bodies is the resultant of all their angular momenta relatively to their

Nesse enfoque, o livro de Adolph Ganot, *Traité élémentaire de Physique*, teve um papel destacado no ensino de Física. Em seu livro encontramos, por meio de ilustrações de aparelhos do cotidiano e de aparatos físicos, as inúmeras inovações ocorridas na segunda metade do século XIX. As explicações dos conceitos ocorrem a partir de exemplos hipotéticos ou de aparelhos do cotidiano, deslocando-se da exclusiva descrição aritmética para a descrição por meio de experimentos ou aparelhos.

Seu primeiro livro foi “publicado em 1851, e três anos mais tarde foi ampliado, passando a incluir conceitos de meteorologia. O novo texto agora intitulado ‘*Traité élémentaire de Physique expérimentale et appliquée et de météorologie*’ (1851) teve dezoito reedições até o final do século e foi utilizado em inúmeros programas, desde o ensino secundário (Colégio Pedro II) até o ensino superior (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo) (LORENTZ, 1984).

Ganot foi um dos idealizadores dessa nova abordagem experimental. Seus livros foram referência no Brasil e em diversos países como Uruguai, Espanha, México, Alemanha, Espanha, entre outros (GONZÁLES, 2000; PARELLA, 2005).

Nesse período, o ensino, da mecânica nos livros de Física básica restringiam-se ao estudo dos movimentos, máquinas simples e compostas, trabalho e rendimento, hidrostática e aplicações da Mecânica. O estudo da Dinâmica das Rotações era apresentado em livros de Mecânica Analítica.

### 3.3 SÉCULO XX: AVANÇOS E RETROCESSOS DO LIVRO DIDÁTICO DE FÍSICA

O Conceito de Momento Angular começa a ser referenciado nos livros de Física Básica universitários no Brasil a partir da primeira metade do século XX, com ênfase na aplicação dos fenômenos (giroscópios e pêndulos), estes livros eram traduções ou adaptações de livros Europeus.

Nos livros brasileiros das décadas seguintes, percebemos um outro tipo de abordagem do conteúdo. Por exemplo, alguns autores brasileiros da década de 1920 exibiam um conteúdo mais algebrizado, com uma abordagem mais próxima dos livros estrangeiros e com menos descrições de aparelhos e aparatos físicos. Esses autores foram sugeridos nos programas curriculares da Escola Politécnica e se referem as disciplinas introdutórias nos cursos de engenharia. A referência francesa praticamente desaparece, sendo citados livros de origens diversas, como ingleses (WATSON, 1932), alemães (MAHLER, 1926), italianos

(MURANI, 1901) e espanhóis (MAÑAS; BONVI, 1927; NICCIOLI JUNIOR; MATTOS, 2009).

A abordagem da Mecânica nesses livros tem como foco principal a dedução das equações a partir de exemplos hipotéticos, mas sem a descrição de aparelhos ou aparatos físicos. Em nenhum momento são citados ou apresentados os aparelhos que até agora eram o centro das explicações dos fenômenos. No prefácio do livro “Curso de Física” de W. Watson (WATSON, 1932) o autor comenta sobre a não inclusão das figuras de aparelhos e aparatos físicos:

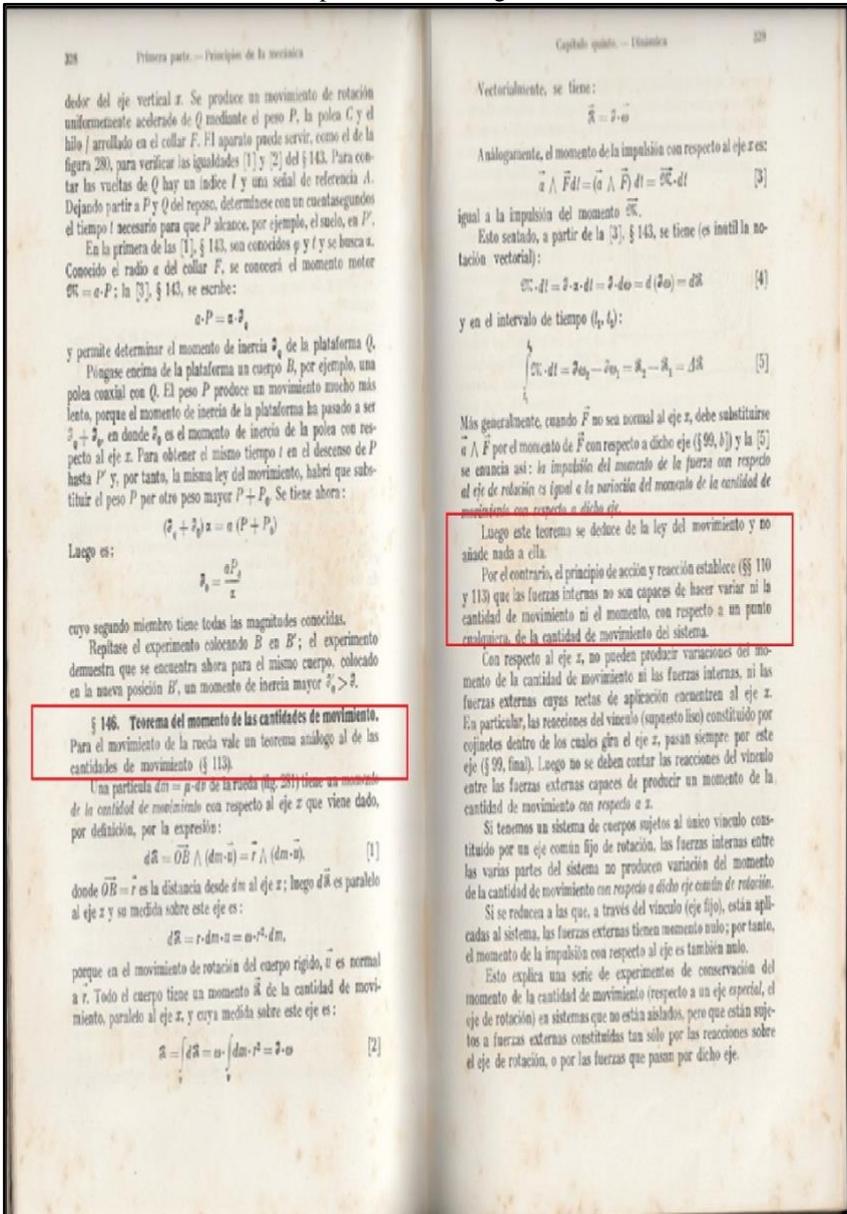
Como nenhum livro de texto pode substituir as lições explicadas com experimentos e a dos trabalhos práticos no laboratório, não se tentou descrever ilustrações experimentais dos diversos fenômenos. Pela mesma razão, as figuras oferecem um caráter totalmente diagramático e não se pretende ser uma exibição de instrumentos experimentais; o objetivo dos desenhos, neste caso, é tornar claro o texto e não substituir os aparatos atuais (WATSON, 1932, p. 2).

Dessa forma esses novos autores lançam uma nova metodologia de ensino de Física, por meio da descrição de figuras geométricas e exemplos hipotéticos, utilizando-se da álgebra para o desenvolvimento dos conceitos.

Um dos primeiros livros de Física Básica a fazer referência ao conceito de Momento Angular e o Toque foi “Física Geral e Experimental”, de Eligio Peruca (PERUCA, 1943).

O Momento Angular, no livro, é chamado como “Momento das Quantidades de Movimento” e apresentado como análogo à “Quantidade de Movimento” ou Momento Linear; já o conceito de Torque é denominado como Momento da Força e está vinculado à Conservação do Momento Angular (figura 24).

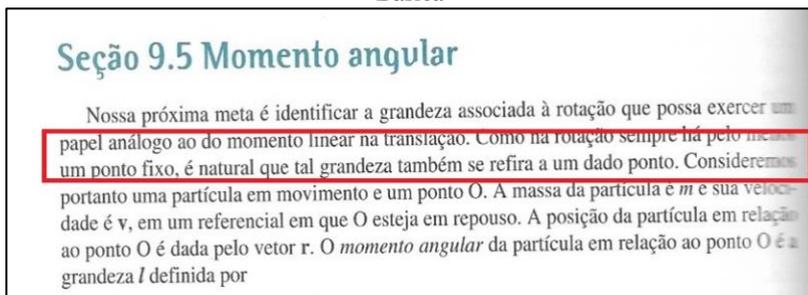
Figura 24 – Apresentação da conservação do Momento Angular no livro Física Geral e Experimental de Eligio Peruca.



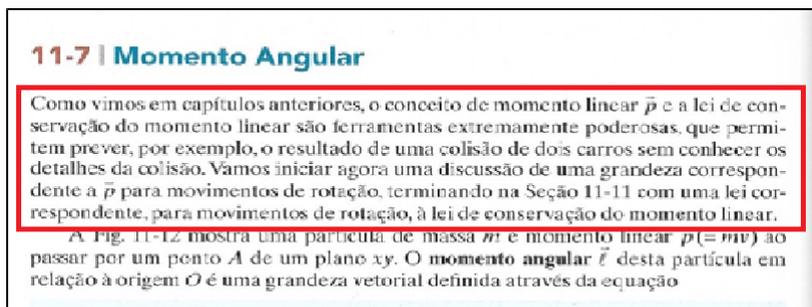
Atualmente, os livros de Física Básica universitários, na sua maioria, são traduções de edições americanas, e mostram uma abordagem algébrica do fenômeno, em que perspectiva vetorial está relegada ao segundo plano.

Esses livros, quase na sua totalidade, utilizam a analogia com o Momento linear e Força para definir o Momento Angular e o Torque (figura 25).

Figura 25 – Definição de Momento Angular em diferentes livros de Física Básica

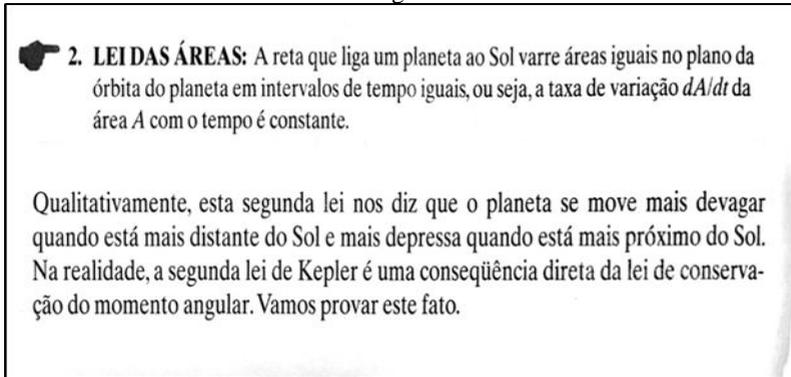


Fonte: Física, volume 1. Mecânica. (CHAVES, 2007)



Fonte: Física, volume 1. Mecânica. (HALLIDAY, 2012)

Figura 26 – Definição da Lei das áreas a partir do conceito de Momento Angular



Fonte: Física, volume 2. Mecânica. (HALLIDAY, 2012)

A ideia de expressar a constância do movimento de rotação em termos de áreas, que prevaleceu até o início do século XX, nos livros de Mecânica Analítica, para definir o conceito de Momento Angular e Torque é agora apresentada, no capítulo de Gravitação, em que o conceito de Momento Angular é usado para definir a 2ª Lei de Kepler (figura 26).

Essa sequência didática proposta nos livros diferente da forma como o conceito de Momento Angular foi construído historicamente, leva-nos a refletir sobre a possibilidade de as dificuldades de aprendizagem, serem obstáculos didáticos de origem epistemológica, originado na necessidade de adaptação do saber sábio para ensinável, com isso causando distorções conceituais no objeto ensinado. Astolfi (1990) aponta que, dependendo da Transposição Didática realizada, pode ocorrer o surgimento de obstáculos de aprendizagem de conceitos, cuja origem são saberes e estratégias de ensino adotados, que no contexto da sala de aula dificilmente podem ser ajustados. O tratamento matemático dado à Dinâmica Rotações por Euler, Poinot e Lagrange são, atualmente, apresentados e discutidos somente em livros de Mecânica Analítica e discutidos nas disciplinas avançadas, nos cursos de Engenharia e Física.

## CAPÍTULO 4: NOÇÃO DE OBSTÁCULO NO PROCESSO DE ENSINO – APRENDIZAGEM

### 4.1 A NOÇÃO DE OBSTÁCULOS EM BACHELARD

Compreendemos que o pensamento científico e o pensamento do senso comum têm respostas distintas para um mesmo fenômeno, por exemplo: pessoas leigas dizem que para um pião ficar em “pé” girando, é necessário aplicar mais velocidade. Pelo lado da Ciência, a Física usaria os conceitos de Torque e Momento Angular para explicar esse fenômeno. Para melhor compreender por que essas duas interpretações podem surgir, buscamos ajuda em Bachelard.

A epistemologia de Gaston Bachelard representa uma ruptura com o pensamento epistemológico francês do século XX, marcado fortemente, até então, pelo olhar positivista de Augusto Comte<sup>24</sup>. Na perspectiva positivista, a Ciência progride de forma contínua e linear através do acúmulo de conhecimentos.

Paraizo (2004) destaca que um dos principais pontos que levaram Bachelard a se afastar da concepção científica do positivismo foi a importância da História da Ciência, pois esta é vista como um ramo do saber na construção de uma Filosofia da Ciência.

Para os positivistas, a História da Ciência tem uma função puramente descritiva dos processos evolutivos. Porém, essa História vai assumir uma importância maior, na medida em que permite mostrar, a partir do presente, os valores científicos do passado.

Bachelard (1996) nos orienta que é preciso que se veja no passado não a História das verdades da Ciência e da inércia de seus conceitos, mas a História da transitoriedade de suas definições e da importância de seus erros, porque é pela correção desses erros que o pensamento científico evolui. De acordo com o autor:

---

<sup>24</sup> “O positivismo afirma a unidade do método científico e sua superioridade como instrumento de construção do conhecimento. Em linhas gerais, o movimento é caracterizado pela confiança acrítica na estabilidade e crescimento sem obstáculos da ciência, e pela valorização da racionalidade humana, combatendo as concepções idealistas e espiritualistas da realidade. Augusto Comte (1798-1857) é o iniciador do positivismo francês, e, em certos aspectos, o expoente mais representativo da orientação positivista do pensamento.” (REALE; ANTISERI, 1991)

A história humana bem pode, em suas paixões, em seus preconceitos, em tudo que releva dos impulsos imediatos, ser um eterno recomeço; mas há pensamentos que não recomeçam; são os pensamentos que foram retificados, alargados, completados. Eles não voltam a sua área restrita ou cambaleante. Ora, o espírito científico é essencialmente uma retificação do saber, um alargamento dos quadros do conhecimento. Julga seu passado histórico, condenando-o. Sua estrutura é a consciência de suas faltas históricas. Cientificamente, pensa-se o verdadeiro como retificação histórica de um longo erro, pensa-se a experiência como retificação da ilusão comum e primeira (BACHELARD, 1996, p.176).

Sob esse ponto de vista, a compreensão do passado como um processo de busca de erros e correções é visto pelo autor positivamente, como uma ferramenta metodológica fundamental de análise histórica da construção de conhecimento e, inclusive, como importante recurso pedagógico. Ao olhar para aquilo que se avalia conhecido, e buscando nesse conhecimento o que não está mais correto, é possível problematizar e encontrar nesses erros o caminho para arquitetar um novo conhecimento.

A possibilidade de construção de novas formas de conhecimento só pode acontecer se a postura de vigilância constante com o pensamento e com a experiência for a essência da metodologia de estudo. A superação dos obstáculos que existem ao conhecimento só pode ocorrer se forem rebatidos em nome da retificação do erro.

Da mesma forma, Andrade e Smolka (2009) afirmam que a vigilância precisa ser também histórica e o passado das produções deve ser sempre avaliado à luz das reflexões atuais e de forma crítica e retificadora.

Os obstáculos epistemológicos, eixo central da Epistemologia Bachelardiana, confrontam-se com a ideia de evolução linear e cumulativa do conhecimento (presente no pensamento positivista), contribuindo, dessa maneira, para a construção de uma concepção de Ciência enquanto processo descontínuo e cheio de rupturas.

Bachelard (1996) afirma que:

Quando se procuram as condições do progresso da ciência, logo se chega à convicção de que é em

termos de obstáculos epistemológicos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado... O conhecimento do real é luz que sempre projeta algumas sombras. Nunca é imediato e pleno... No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo a espiritualização... Quando o espírito se apresenta à cultura científica, nunca é jovem. Aliás, é bem velho, porque tem a idade de seus preconceitos. Acender à Ciência é rejuvenescer espiritualmente, é aceitar uma brusca contração que contradiz o passado (BACHELARD, 1996, p.17-18).

Os obstáculos epistemológicos são respostas a uma pergunta que advém da experiência cotidiana, mas é aceita porque reflete a necessidade de conhecimentos. Como a observação/experimentação cotidiana faz parte da natureza humana, estes conhecimentos estão, muitas vezes, estabelecidos nos diferentes grupos sociais através daquilo que conhecemos como “senso comum”. Entretanto, para a formação de um novo espírito científico, é necessário combatê-lo.

Essa indicação leva-nos a entender que os obstáculos podem ser percebidos como resíduos de ideias anteriores, que impedem a mudança de conceitos (que no passado foram importantes) para novos conhecimentos.

Corroborando com o nosso pensamento, Martins (2004) destaca que não se trata de privilegiar dificuldades oriundas da complexidade dos fenômenos, como poderia parecer à primeira vista. Esses obstáculos surgem inevitavelmente na relação dos sujeitos com os objetos do conhecimento, aparecem no “âmago do próprio ato de conhecer”. Embora inerentes ao ato de conhecer, é a sua superação que permite o avanço do conhecimento, tanto no nível do sujeito individual como no nível do sujeito coletivo da Ciência.

Para compreender os obstáculos epistemológicos, é importante conhecer os três períodos do desenvolvimento científico propostos por Bachelard: concreto, concreto- abstrato e abstrato.

No estado concreto, o espírito científico se satisfaz com as imagens primeiras de um fenômeno, como se o conhecimento real estivesse inscrito nos fatos, respalda-se “[...] numa literatura filosófica que exalta a Natureza, louvando curiosamente ao mesmo tempo a

unidade do mundo e sua rica diversidade.” (BACHELARD, 1996, p. 11).

No estado concreto-abstrato,

[...] o espírito acrescenta à experiência física esquemas geométricos e se apóia numa filosofia da simplicidade. O espírito ainda está numa situação paradoxal: sente-se tanto mais seguro de sua abstração, quanto mais claramente essa abstração for representada por uma intuição sensível (BACHELARD, 1996, p. 11).

Nesse período, o espírito científico usa esquemas geométricos que ficam na aparência do objeto, tomando-o como um objeto real, pois a representação geométrica está “[...] *fundada num realismo ingênuo das propriedades espaciais [...]*” (BACHELARD, 1996, p. 7). Assim sendo, a abstração encontra-se representada por uma intuição sensível, fundada na experiência primeira.

No estado abstrato,

[...] o espírito adota informações voluntariamente subtraídas à intuição do espaço real, voluntariamente desligadas da experiência imediata e até em polêmica declarada com a realidade primeira, sempre impura, sempre informe (BACHELARD, 1996, p.11-12).

Dessa forma, o espírito científico não se satisfaz mais com a representação geométrica do espaço, com a quantidade representada, “[...] é preciso passar primeiro da imagem para a forma geométrica e, depois, da forma geométrica para a forma abstrata, ou seja, seguir a via psicológica normal do pensamento científico” (BACHELARD, 1996, p.11).

Com isso, a formação do espírito científico vive na prática esses três estados, sendo que, podemos identificar em cada momento histórico o enaltecimento de um ou outro estado na construção do conhecimento.

Por conseguinte, podemos associar os estados com os ciclos em que há uma maior manifestação da experiência e/ou da razão na construção do conhecimento. Se “olharmos” o estado concreto como o ‘espaço de experimentação’, e admitirmos o estado concreto-abstrato como sendo o ‘espaço da verificação’, teremos no espaço abstrato o momento de união e de retroação desses espaços. Podemos afirmar então,

que os três períodos históricos podem ser determinados por tais espaços e resultam em formas de produção do conhecimento. Portanto, ao estudar um determinado fenômeno sempre estaríamos examinando-os sob os aspectos da experiência e/ou da razão.

Em sua obra, *A Formação do Espírito Científico*, Bachelard busca averiguar exaustivamente a origem desses obstáculos epistemológicos, tomando exemplos, principalmente, da História da Ciência do século XVIII. Listaremos abaixo, brevemente, os obstáculos epistemológicos, com o intuito de ampliar o entendimento desse importante conceito.

Um primeiro obstáculo, e talvez o mais difícil de ser removido, é a “*Experiência Primeira*”, instantânea, que deseja compreender o real a partir de um “dado” claro e nítido. Podemos considerar como um “empirismo puro”, que coloca os “fatos” antes das “razões”, que não reflete para experimentar.

Por exemplo, a ebulição de um líquido pode ser interpretada como o “desaparecimento” do líquido. Ou seja, essa conclusão está baseada apenas na observação do fenômeno. Aqui se procura explicar o real a partir da experimentação cotidiana, não é necessária a compreensão do fato.

Bachelard cita, como exemplo desse obstáculo, as experiências de Eletricidade do século XVIII, transformadas em divertimento de salão<sup>25</sup>, desviando a atenção dos cientistas das características fundamentais do fenômeno. Assim, para a formação do espírito científico deve-se questionar a Natureza do fato, ou seja, devemos ir contra o “encantamento” natural.

Por isso, diz Bachelard:

Ao espetáculo dos fenômenos mais interessantes, mais espantosos, o homem vai naturalmente com todos os seus desejos, com toda a alma, não é pois de admirar que o primeiro conhecimento objetivo seja um primeiro erro (BACHELARD, 1996, p.68).

---

<sup>25</sup> Em seu livro *A formação do Espírito científico* Bachelard relata encontros realizados por cientistas da época onde eram demonstradas as “proezas” da eletricidade, por exemplo: “A experiência de gala” do abbé Nollet usando a garrafa de Leyden (pag. 39), o “jantar elétrico de Franklin” (pag.41).

Um segundo obstáculo epistemológico é o "**Conhecimento Geral**", em que a universalização é capaz de paralisar o pensamento. Por trás de uma lei ou conceito geral, o espírito pré-científico ambiciona, muitas vezes, explicar tudo, acabando por não explicar nada, tornando um conhecimento extremamente vago.

Os questionamentos são respondidos com respostas genéricas, vagas, adaptando o geral ao específico, a essência do fenômeno não é observada, é esquecida. Esse obstáculo ocorre quando uma ideia é transferida para o campo da Ciência sem as devidas cautelas metodológicas da pesquisa.

A busca apressada da universalização leva muitas vezes a generalidades mal colocadas. Um exemplo, no domínio da Física, refere-se a uma experiência realizada no vácuo, com a ajuda do tubo de Newton, no qual a partir dela se infere que, "*no vácuo, todos os corpos caem à mesma velocidade*". Esse exemplo revela, para Bachelard, um entrave ao pensamento, no seguinte sentido:

Com satisfação do pensamento generalizante, a experiência perdeu o estímulo. [...] mesmo seguindo um ciclo de ideias exatas, percebe-se que a generalidade imobiliza o pensamento, que as variáveis referentes ao aspecto geral ofuscam as variáveis matemáticas essenciais. No exemplo, a noção de velocidade esconde a noção de aceleração. É, no entanto, a noção de aceleração que corresponde a realidade dominante. Assim a própria matemática dos fenômenos é hierarquizada, e nem sequer a primeira forma matemática está certa, nem sempre a primeira forma é de fato formativa (BACHELARD, 1996, p.71).

Muito próximo do anterior, temos o "**Obstáculo Verbal**", que aparece quando são utilizados termos do senso comum, do cotidiano, metáforas ou analogias, para tentar facilitar a compreensão de um fenômeno. O autor, em sua obra, faz referência ao fato de Benjamin Franklin usar a imagem de uma esponja para explicar os fenômenos elétricos.

Apesar das críticas de Bachelard acerca da utilização de analogias e metáforas na Ciência, no livro "L'activité rationaliste de la physique contemporaine" de 1951, Bachelard ressalta que

[...] as imagens [...] são, ao mesmo tempo, boas e más, indispensáveis e prejudiciais, é preciso usá-las com medida enquanto são boas e desembaraçar-se imediatamente delas quando se tornam prejudiciais. [...] há que desqualificar o uso figurativo de analogias, imagens imediatas e metáforas se constituírem uma ameaça à restauração do continuísmo, se derem primado ao realismo, se não forem psicanalisadas, se tenderem a transformar conceitos abstratos em elementos observáveis – em coisas; há que desqualificar o uso figurativo de analogias e metáforas quando pretendem ser imagens-reflexo, mais ou menos exatas, de uma realidade oferecida à investigação, ou seja, quando pretendem passar por cópias fiéis dessa realidade; há que as desqualificar quando se transformam em esquemas gerais que permanecem (obstáculos epistemológicos) em vez de assumirem um papel transitório (BACHELARD, 1951, p. 32 apud SANTOS, 1991).

Desse modo, endendemos que Bachelard não é contra toda e qualquer utilização de analogias e metáforas, mas sim, contra as que podem reforçar concepções da observação empírica, do senso comum, ou quando elas se tornam cópias fiéis da realidade, impedindo a compreensão do que se pretende ensinar, tornando-se ou reforçando obstáculos epistemológicos e pedagógicos.

Os conhecimentos "unitário" e "pragmático" também são obstáculos. O primeiro crítica a formulação de "princípios gerais da natureza" que pode pôr fim às experiências, levando a valorizações excessivas que acabam por camuflar as incoerências dessa mesma experiência. A crença em uma "unidade harmônica do mundo", por exemplo, leva sobre determinações características do espírito pré-científico, a analogias amplas e indevidas (astros e metais, metais e partes do corpo).

Além das generalizações unitárias, esse obstáculo também é assinalado pelas generalizações utilitárias. O obstáculo do conhecimento pragmático ocorre quando o sujeito justifica sua explicação sobre um dado fenômeno, remetendo-a à sua possível utilidade para o homem. A utilidade é a característica observável e fundamental do fenômeno, que fornece à explicação uma pretensa unidade explicativa:

Encontrar uma utilidade é encontrar uma razão [...]. Procura-se atribuir a todas as minúcias de um fenômeno uma utilidade característica. Se uma utilidade não caracteriza um traço particular, parece que este aspecto não fica explicado (BACHELARD, 1996, p.115).

Outro obstáculo epistemológico é o "obstáculo substancialista", em que são atribuídas a uma mesma substância qualidades diversas e até opostas, povoando-a de forças, poderes, etc. Por outro lado, e de forma complementar, nota-se a existência do obstáculo substancialista quando o espírito pré-científico faz corresponder, a toda qualidade, uma substância, ou seja, propriedades são "substantivadas", pensa-se substâncias para realizar contradições que vêm da experiência. Já para a Momento Angular a substância é uma "concretização de ideias teóricas abstratas"

Podemos citar, como exemplo de obstáculo substancialista, a corrente elétrica estudada por Galvani e por seu sobrinho Aldini. Eles acreditavam que a corrente elétrica tinha distintas propriedades quando passavam em diferentes corpos. Isto é, a corrente elétrica se impregnava das substâncias que percorria.

Há também o "obstáculo animista", que se origina da aplicação da "intuição da vida" aos mais diferentes fenômenos. Bachelard chega a mencionar um "fetichismo da vida", que carrega uma marca e um valor muito intenso. O espírito pré-científico associou vida aos fenômenos elétricos, pois "imagens animistas são mais naturais; logo, mais convincentes".

Como exemplo de obstáculo animista, usamos o estudo de Galvani investigando os efeitos das descargas elétricas nos músculos de órgãos de animais vivos ou mortos para comprovar a eletricidade animal.

Por último, temos os obstáculos ao "conhecimento quantitativo". O conhecimento genuinamente qualitativo, por si, já conteria um erro a ser corrigido. Isso não significa que qualquer "quantificação" seja automaticamente objetiva. A importância encontra-se no método de medir, mais do que no objeto da mensuração. Este define-se e torna-se claro em função daquele. Como exemplo, cita a grande variedade dos primeiros termômetros, em comparação com a padronização quase imediata dos instrumentos atuais de medida. As grandezas devem ser pensadas relativamente aos métodos de medida.

Por fim, Bachelard faz uma incursão nas questões educacionais, introduzindo a conceituação do obstáculo pedagógico, que constitui um obstáculo à apropriação do conhecimento do aluno, obstáculos que os

professores enfrentam no cotidiano da sua prática profissional, sendo manifestados por conflitos e barreiras que dificultam o processo de ensinar e aprender.

A forma como os professores ensinam Ciências e a relação entre os atores desse processo (professor, aluno e conhecimento), foi discutida por Bachelard.

[...] Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já construídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana.

[...] Toda cultura científica deve começar por uma catarse intelectual e afetiva. Resta, então a tarefa mais difícil: colocar a cultura científica em estado de mobilização permanente, substituir o saber fechado e estático por um conhecimento aberto e dinâmico, dialetizar todas as variáveis experimentais, oferecer enfim à razão razões para evoluir (BACHELARD, 1996, p.23).

Ao afirmar que aprendemos sempre contra um conhecimento anterior, Bachelard aceita a existência e a legitimidade das concepções prévias que o aluno traz enraizadas, muitas vezes, contrárias e resistentes à acomodação de novas ideias que estão sendo construídas. Para o professor, esse processo se origina através de um questionamento constante, de correção dos erros das experiências trazidas pelo aluno, para a superação dos obstáculos existentes.

Brousseau (1983) resgata a fala de Bachelard, que sinaliza o obstáculo pedagógico, propondo em sua pesquisa o obstáculo didático que se estabelece quando o professor coloca em trânsito uma opção didática equivocada.

## 4.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULOS EM BROUSSEAU

No entendimento de Brousseau (1983), obstáculo é um conjunto de dificuldades relacionadas a um conhecimento, que foi adaptado adequadamente, mas para um caso específico ou sob condições especiais. Ao surgir uma nova situação e, com ela, a necessidade de rupturas e novas acomodações, esse conhecimento torna-se obstáculo, pois o indivíduo resiste às novidades em defesa do conhecimento já estabelecido, seja do senso comum ou formal.

Nessa perspectiva, entendemos os obstáculos didáticos como saberes empregados no processo de ensino-aprendizagem, que fornecem respostas simplificadas aos problemas e que, muitas vezes, produzem erros em diversas outras dificuldades, produzindo resistências à modificação ou mesmo à transformação.

Reforçando essa ideia, Pais (2002) afirma que os obstáculos didáticos são conhecimentos parcialmente consolidados no plano intelectual do aluno e que podem obstaculizar a evolução da aprendizagem do saber escolar.

O obstáculo, na sala de aula, pode ser entendido como uma dificuldade no processo de ensinar; acontece quando o professor não consegue conduzir uma situação de ensino de forma a colaborar para a aprendizagem do aluno.

De acordo com Brousseau (1983), para ocorrer a aprendizagem, parte-se do ensino do saber, passando por processos de reorganização didática e de possíveis erros e contradições para se chegar à destruição dos conhecimentos precedentes. Porém, isso não indica que o obstáculo é apenas manifestado por meio dos erros, “mas também pela impossibilidade de enfrentar certos problemas ou de resolvê-los de maneira satisfatória” (GOMES, 2006, p.80).

A constatação, por parte do professor, de erros e impossibilidades recorrentes entre as diversas turmas, ou recorrentes em um mesmo sujeito, pode ser um forte indício de obstáculo. A teoria dos obstáculos constitui-se uma das ferramentas que pode ajudá-lo a interpretar o fenômeno para, então, buscar soluções.

O significado dos obstáculos está associado a algumas características, preconizadas por Brousseau (1983), que encontramos descritas Perrin Glorian (1995, p. 84) na seguinte forma:

- a) O obstáculo é um conhecimento, uma concepção e não, como muitos pensam, uma dificuldade ou falta de conhecimento;
- b) Esse conhecimento é capaz de produzir respostas adaptadas a certos problemas;

- c) Esse conhecimento produz respostas falsas em outros tipos de problemas;
- d) Ele é um tipo de conhecimento que resiste às contradições com as quais é defrontado, bem como ao estabelecimento de um conhecimento melhor, isto é, apresenta resistência a toda modificação caracterizando-se por manifestar-se de forma recorrente;
- e) A rejeição desse conhecimento e a conseqüente superação do obstáculo levarão a um novo saber (conhecimento).

Assim, cada conhecimento é suscetível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. A manifestação dos obstáculos está intimamente relacionada ao aparecimento dos erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos alunos, na construção de um novo conhecimento. Sendo assim, o erro é visto como algo necessário, sendo parte constituinte do processo ensino/aprendizagem.

A superação do obstáculo didático representa uma quebra de continuidade no conhecimento superficial. Para que ocorra essa ruptura, é necessário o uso de estratégias didáticas, que irão auxiliar na formação de um novo conhecimento.

Brousseau (1983, p. 44) indica que “fundamentalmente cognitivos, os obstáculos parecem estar extenuados entre ontogênicos, epistemológicos, didáticos e até mesmo culturais”. No artigo “Os obstáculos epistemológicos e os problemas em Matemática” (1983), Brousseau comenta sobre esses obstáculos, caracterizando-os como obstáculos didáticos, da seguinte maneira:

Obstáculo didático de origem epistemológica – inerentes ao conhecimento, decorrentes das verdadeiras dificuldades conceituais.

Obstáculo didático de origem didática – ligam-se às condições nas quais o conhecimento é abordado em sala de aula. Astolfi (1990) aponta que, dependendo da Transposição Didática realizada, pode ocorrer o surgimento de obstáculos de aprendizagem de conceitos, cuja origem são saberes e estratégias de ensino adotados, que no contexto da sala de aula dificilmente podem ser ajustados.

Obstáculos didáticos de origem ontogênica – Surgem das limitações de cada sujeito (neurofisiológica entre outras) em um momento do seu desenvolvimento.

Obstáculo didático de origem cultural – Apresentam-se a partir de episódios nas quais o professor reage a situações de ensino, fazendo uso de suas crenças, de respostas do senso comum, simplistas, baseadas em experiências não científicas.

Salientamos ainda que, em alguns momentos, o próprio professor, ao ser indagado pelos alunos, pode fazer uso de um discurso de utilitarismo para se esquivar do problema levantado e da discussão conceitual, podendo reforçar o que Bachelard (1996) chamou de obstáculo *unitário e pragmático*, já citados acima. A origem de um obstáculo didático pode estar associada a escolhas de estratégias de ensino equivocadas que poderão desencadear conhecimentos incompletos, tornando-se obstáculos para o desenvolvimento de um conceito.

#### 4.3 O CONCEITO DE TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para ensinar uma noção científica, é necessário torná-la acessível aos alunos, portanto, precisa ser transformada a partir de um saber de referência. Nesse sentido, Transposição Didática - a arte de transformar o conhecimento científico produzido pelos cientistas em um conhecimento acessível a um público mais amplo tem um papel fundamental na tentativa da superação dos obstáculos à aprendizagem.

A Transposição Didática foi concebida por Ives Chevallard (CHEVALLARD, 2005) como um processo em que o saber produzido e referendado pelos cientistas – **o saber sábio** - perante a necessidade de ser inserido no sistema de ensino, sofre importantes transformações que o tornam um saber ensinável, potencialmente compreensível e utilizável na educação científica – **o saber a ensinar**. No interior da escola este saber, através do trabalho didático do professor, transforma-se em um saber efetivamente ensinado ao aluno - **o saber ensinado** (CHEVALLARD, 2005).

Historicamente, o livro didático de ensino foi a solução encontrada para transmitir, ao estudante, as ideias fundamentais de um certo conhecimento científico, sobre o qual já havia consenso em uma dada época. Os livros didáticos atuais sugerem uma visão cumulativa da ciência, isto é, as teorias científicas do passado se mostram bem sucedidas e contribuíram de forma direta com o conhecimento.

A reconstrução dos conhecimentos científicos, focada na funcionalidade didática, apresenta a Ciência com uma coerência interna, que segundo os seus organizadores, indica um entendimento mais rápido, pelos estudantes, dos conceitos científicos já estabelecidos.

Na textualização do conhecimento científico, ocorre a atuação de três processos: a despersonalização, a descontextualização e a dessincronização, que, juntos, tornarão o conhecimento científico livre de algumas características originais na sua produção.

O trabalho de transformação do saber sábio em saber a ensinar é caracterizado por Chevallard (2005) como “Transposição Didática externa”.

Entre os elementos dessa esfera estão os autores de livros didáticos ou os especialistas da disciplina, os professores, autoridades governamentais e as sociedades científicas e intelectuais, que mesmo não atuando diretamente, estabelecem tensões que ecoam no processo de transformação do saber.

Por essa ótica, é ilusório pensar que a transposição do saber sábio para o saber a ensinar reduz-se a uma simplificação dos objetos do saber sábio. Pinho Alves chama a atenção para o equívoco de uma interpretação superficial deste processo:

À primeira vista somos levados a interpretar que o saber a ensinar é apenas uma mera “simplificação ou trivialização formal” dos objetos complexos que compõem o repertório do saber sábio. Esta interpretação é equivocada e geradora de interpretações ambíguas nas relações escolares, pois revela o desconhecimento de um processo complexo de transformação do saber (PINHO ALVES, 2000, p. 225).

Durante esta trajetória há uma alteração da natureza do saber sábio, quando transformado em objeto de ensino. Assim, temos os processos de descontextualização do saber que se constitui no distanciamento dos problemas que lhe deram sentido. Isso pode ocorrer em função do interesse do pesquisador em conferir à sua descoberta um caráter de universalidade, o que daria ao produto de sua pesquisa um grau maior de aceitação.

A despersonalização ocorre quando o saber se torna impessoal, desvinculado do produtor original do conhecimento, e a desincretização ocorre quando o saber sofre rupturas e os conceitos se tornam mais distantes e isolados, sendo publicados em partes. Dessa forma, conforme Pinho Alves (2000), obtém-se um saber a ensinar que se apresenta sob uma estrutura fechada, a histórica, dogmática, com uma sequência progressiva e cumulativa.

O saber a ensinar se manifesta através de uma linguagem nova. Nesta, surgem novos termos e situações que não estavam presentes no saber sábio, mas que são necessárias para o processo de racionalização das sequências didáticas. Há a criação de objetos didáticos

(CHEVALLARD, 2005). Por exemplo, a regra da mão direita para explicar Torque e Momento Angular e o uso da “cadeira giratória” para explicar a conservação do Momento Angular.

A transformação do saber a ensinar em saber ensinado, aquele que o professor acha que deve ensinar, é denominado por Chevallard como Transposição Didática interna, pois ocorre no interior da sala de aula (CHEVALLARD, 2005). O saber a ensinar se apresenta na educação formal, quase que unicamente, por meio dos livros didáticos. É através deles que o estudante universitário tem sua iniciação às teorias, ferramentas matemáticas e aos métodos experimentais aprovados pela comunidade científica e denominados como saber a ensinar.

Os livros didáticos atuais não “conversam” diretamente com o saber sábio, produzido pelos cientistas, mas usam como referência os manuais científicos mais antigos que executaram a transposição direta do saber produzido pelos cientistas, para o saber a ensinar, empregado pelo professor no espaço universitário, especialmente nas disciplinas básicas.

Portanto, a Transposição Didática nos fornece elementos que vão nos possibilitar entender os detalhes do processo de elaboração do saber a ensinar. Ao tomar consciência da Transposição Didática, o professor ganha uma importante ferramenta de análise, que lhe permite identificar as transformações que os conceitos científicos sofrem ao se transferirem para o saber a ensinar, exercitando o chamado “princípio de vigilância epistemológica” (CHEVALLARD, 2005, p. 51).

É preciso entender como ocorre a reorganização dos conhecimentos científicos para que estes entrem em conformidade com os já existentes, sendo que é nesses momentos que os obstáculos se manifestam. O conhecimento desses obstáculos e sua extensão permitirão reorganizar a sequência do conteúdo da dinâmica das rotações, construindo novas situações didáticas que venham a favorecer o aprendizado.

## CAPÍTULO 5: DELIMITANDO A PESQUISA

### 5.1 INTRODUÇÃO

Considerando que a aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque representa uma grande barreira para a maioria dos estudantes, como vimos no primeiro capítulo, este trabalho tem como objetivo investigar a origem dessas dificuldades. Assim, nosso problema consiste em identificar os obstáculos epistemológicos e didáticos no ensino do Momento Angular e Torque.

Não podemos perder de vista o fato de que a metodologia escolhida reflete uma atitude epistemológica e delimita os métodos pelos quais ela nos ajudará a responder o problema de pesquisa. Para tanto, devemos buscar características dessa investigação que justifiquem essa opção.

Assim, a presente investigação se organizou a partir de duas etapas relativamente distintas. Na primeira etapa, buscamos nos apropriar de elementos que dessem pistas das dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque no ensino superior, através da leitura de relatos nacionais e internacionais, contemplados no primeiro capítulo. Nesses documentos, identificamos dificuldades que são enfrentadas pelos alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem, tais como:

- a) A tendência de tratar movimentos simultâneos, rotação e translação, como sucessivos;
- b) A organização dos conteúdos proposta pelos livros didáticos de Física;
- c) A dificuldade de entendimento do conceito de Momento de Inércia como uma função da distribuição da massa em torno de um eixo;
- d) A tendência a simplificação dos movimentos, tratando corpos extensos como corpos pontuais.

Finalizada a análise dos relatos, levantamos as seguintes hipóteses para responder ao problema:

- a) Os obstáculos na aprendizagem podem ter origem na Transposição Didática dos conceitos de Momento Angular e Torque e as didatizações em relação ao saber de referência;
- b) Os professores geram, sem intenção, obstáculos que podem ser identificados como obstáculos epistemológicos, definidos por Bachelard ou obstáculos didáticos, definidos por Brousseau.

Na segunda parte, com o intuito de confirmar as hipóteses propostas, foram realizadas entrevistas com os professores da

Universidade de Caxias do Sul, que atuam na disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas, nos cursos de engenharia. Somado a isso, aplicou-se um questionário aos alunos dos cursos de Engenharia que já cursaram a disciplina de Rotação, Oscilação e Ondas, e realizaram-se entrevista com os grupos de alunos que responderam o questionário.

## 5.2 ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

No que diz respeito ao tipo de pesquisa, o trabalho realizado consiste em uma pesquisa exploratória. De acordo com Gil (2010), a pesquisa exploratória proporciona maior familiaridade com um determinado problema (explicitá-lo). Tem como objetivo investigar um assunto ainda pouco conhecido, pouco explorado. Pode envolver levantamento bibliográfico e entrevistas com pessoas experientes no problema pesquisado. Geralmente, assume a forma de pesquisa bibliográfica e estudo de caso.

Por sua vez, quanto ao método e forma de abordar o problema, entendemos como uma pesquisa qualitativa. Para tanto, adotamos procedimentos metodológicos, que segundo (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18): “[...]se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada [...]”.

Uma das características da pesquisa qualitativa é que seu foco é direcionado para as diferentes possibilidades de interpretação das informações coletadas. Assim, é necessário estabelecer relações entre as informações coletadas com as proposições da literatura específica da área referente ao objeto de pesquisa para aprofundar o que se pretende discutir. Desse modo, é importante que o pesquisador dê atenção ao “maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 12).

Portanto, parte do princípio de que o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente. Assim sendo, o pesquisador estará sempre buscando novas respostas e novas indagações no desenvolvimento do seu trabalho.

Turra (2003) ressalta que é importante ter em mente que o pesquisador está sempre diante de uma versão dos fatos, parcial e provisória, posto que os relatórios de pesquisa expressam não a realidade observada, mas uma construção do real, a partir de suas observações, de seus pressupostos teórico-metodológicos e do recorte que faz em uma

realidade multifacetada. Nenhum método de pesquisa dá conta de captar o problema em todas as suas dimensões. Desse modo, é importante esclarecer que a pesquisa apresenta uma parte quantitativa (questionário), porém sua abordagem e análise é qualitativa em relação aos objetivos propostos.

Quanto aos procedimentos adotados, este trabalho consiste em um estudo de caso. De acordo com Gil (2010), um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o como e o porquê de uma determinada situação que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico.

### 5.3 AS ENTREVISTAS SEMIESTRUTURADAS E OS QUESTIONÁRIOS

Conforme Richardson (2008, p. 161), o termo “entrevista” refere-se ao ato de perceber realizado entre duas pessoas. A entrevista possibilita um apoderamento imediato das informações, pois há uma interação e uma relação de influências entre os indivíduos de modo que “a entrevista ganha vida ao iniciar o diálogo entre o entrevistador e o entrevistado” (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

Entrevistas, em geral, realizam-se de maneira exclusiva com indivíduos ou grupos de indivíduos, possibilitando ao pesquisador correções, adaptações e esclarecimentos imediatos, facilitando a obtenção das informações desejadas.

A opção por entrevista semiestruturada na pesquisa aqui relatada se deve ao fato de que a presença do pesquisador é valorizada, ao mesmo tempo em que oferece um certo grau de liberdade ao entrevistado. Nesse sentido, através de questionamentos básicos e com fundamentação teórica, a entrevista semiestruturada possibilita uma extensa gama de questões a partir das respostas dadas pelo entrevistado, que descreve suas experiências dentro do que foi colocado pelo pesquisador.

Complementando as entrevistas semiestruturadas como instrumento de coleta de dados, a aplicação de questionários também foi realizada. O questionário, segundo Gil (2010, p. 128) pode ser definido:

[...] como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por

objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, vivências, etc.

O questionário pode conter perguntas que podem ser classificadas em abertas e fechadas. As primeiras permitem liberdade ilimitada de respostas do informante, e a linguagem utilizada poderá ser a própria do respondente. Já as perguntas fechadas trarão alternativas específicas para que o informante escolha uma delas.

#### 5.4 PRIMEIRO MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO: ENTREVISTA COM OS PROFESSORES.

A opção pela utilização de entrevistas semiestruturadas se deve, principalmente, à importância dada ao sujeito nessa estratégia, o que possibilita uma compreensão mais ampla dos processos e produtos de interesse do investigador qualitativo (TRIVIÑOS, 1987).

Foi preparado um protocolo de aplicação com um roteiro pré-definido de seis perguntas que foram seguidas pelo pesquisador (Apêndice 2, p. 138). O objetivo deste instrumento de coleta foi investigar, junto aos professores, informações sobre as dificuldades de ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque, e quais as dificuldades de aprendizado dos alunos dos conceitos citados acima. Para a construção do protocolo da entrevista, definiu-se uma matriz (quadro 3) dividida em três etapas.

Para cada etapa, foram identificados os objetivos e as questões a serem contempladas.

O conteúdo das entrevistas foi gravado, e depois transcrito para posterior análise. Foram entrevistados 14 professores. O período de entrevistas variou entre 27 a 45 minutos. Todas as entrevistas foram realizadas nas salas dos respectivos professores, a gravação foi autorizada (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) por todos os professores que se mostraram interessados em participar da pesquisa. Outras observações foram também enviadas por, escrito via e-mail, a posteriori, a fim de responder indagações que surgiram quando da etapa da transcrição textual das falas dos sujeitos.

Com o intuito de orientar a leitura, faz-se a apresentação da sequência metodológica. O quadro 4 apresenta a primeira etapa da investigação.

Quadro Matriz 3– Entrevista com os professores

<b>Etapa</b>	<b>Objetivo</b>	<b>Número da Questão</b>
Identificação do entrevistado	Identificar o sujeito da pesquisa quanto a sua formação.	Questão 1
A percepção dos professores em relação as dificuldades de ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque.	Investigar a existência de dificuldades ou entraves, que o professor sente para ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque ou até ausência de material adequado.	Questões 2 e 3
A percepção dos professores em relação às dificuldades de aprendizagem dos alunos em relação aos conceitos de Momento Angular e Torque	Investigar as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque.	Questões 4,5 ,6 e 7

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 4 – Primeira etapa da investigação.

Hipótese: Os obstáculos de ensino-aprendizagem são de origem didática.			
Objetivo: identificar os possíveis obstáculos de ensino-aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque na visão dos professores.			
<b>Técnica de Pesquisa</b>	<b>Corpus de Análise</b>	<b>Questões de Pesquisa</b>	<b>Técnica de Análise</b>
Entrevista	Transcrição das entrevistas	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Quais as dificuldades encontradas pelos professores para ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque.</li> <li>- Que estratégias são usadas pelos professores para superar as dificuldades de aprendizagem dos alunos.</li> </ul> <p>Que conteúdos são considerados estruturadores ou fundamentais, no âmbito da Física e Matemática, para o ensino dos conceitos de Momento Angular e Torque.</p>	Análise de Conteúdo categorial

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5.5 SEGUNDO MOMENTO DE INVESTIGAÇÃO: QUESTIONÁRIO COM OS ALUNOS.

A opção por fazer, junto com a entrevista dos professores, um questionário com os alunos está nas informações que este grupo pode oferecer para buscarmos a origem das dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque. Trata-se de relato dos próprios envolvidos, uma forma de corroborar com as informações obtidas nas entrevistas com os professores. Portanto,

[...] o uso de múltiplas fontes de evidência permite o desenvolvimento da investigação em várias frentes -investigar vários aspectos em relação ao mesmo fenômeno. As conclusões e descobertas ficam mais convincentes e apuradas já que advêm

de um conjunto de corroborações. Além disso, os potenciais problemas de validade de constructo são atendidos, pois os achados, nestas condições, são validados através de diferentes fontes de evidência [...] (YIN, 2001, p. 23).

O questionário (apêndice 3) foi construído com questões fechadas, que buscam obter dados satisfatórios aos objetivos propostos na investigação. O questionário contém onze questões de múltipla escolha, e foi aplicado a 176 alunos<sup>26</sup> dos cursos de Engenharia, da Universidade de Caxias do Sul, que estavam cursando a disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas. Em três destas questões, foi solicitado que o aluno justificasse a resposta escolhida. O uso dos resultados foi autorizado por todos os alunos (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido). A aplicação dos questionários foi acompanhada integralmente pelo pesquisador, em tempo e local previamente marcados, no intuito de sanar qualquer tipo de dúvida referente à interpretação das perguntas.

Quanto ao processo de validação do questionário, foram desenvolvidos os procedimentos necessários para tornar um instrumento de medida confiável. Segundo Gressler (2004, p.196) a validade é “a indicação da representatividade de um comportamento ou de tópicos de um conhecimento a serem medidos em um instrumento”, divide-se em dois aspectos: validade de apresentação e validade de amostragem. A primeira refere-se ao aspecto externo do teste, pois, este deve ter uma boa apresentação. A validade de amostragem indica se o instrumento se baseia em uma amostra adequada de um universo de itens - no caso do presente trabalho, as dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque. Para efeito de validação, o questionário foi previamente submetido à apreciação crítica de um grupo de 10 sujeitos. Dentre estes, quatro eram estudantes que já havia cursado a disciplina de Rotações, oscilações e ondas, seis eram alunos que estavam cursando a disciplina. Em linhas gerais, os estudantes assinalaram eventuais erros de digitação e sugestões no sentido conferir maior clareza as questões; foram observadas também a representatividade das questões propostas em relação aos conteúdos abordados e a sintonia entre as questões e as categorias de análise que pretendiam contemplar. Estas sugestões não

---

<sup>26</sup> Este número representa 80% dos alunos cursantes na disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas no segundo semestre de 2016.

modificaram a essência do conteúdo das questões originais, mas permitiram ao pesquisador refinar a versão inicial do questionário, conferindo a este uma maior clareza e validade.

O quadro 5 apresenta o objetivo, a técnica de pesquisa, o corpus da análise, questões de pesquisa e a técnica de análise proposta na segunda etapa da investigação.

Quadro 5 – Segunda etapa da investigação

Hipótese: Os obstáculos de aprendizagem são de origem didática e epistemológica.			
Objetivo: identificar os possíveis obstáculos de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque a partir das respostas dos alunos.			
<b>Técnica de Pesquisa</b>	<b>Corpus de Análise</b>	<b>Questão de Pesquisa</b>	<b>Técnica de Análise</b>
Questionário	Respostas dos Alunos	Qual a origem das dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque.	Análise de Conteúdo categorial

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a construção do questionário, foi elaborado um quadro matriz (quadro 6). Para cada momento, foram identificados os objetivos e as questões a serem contempladas. As perguntas do questionário foram elaboradas a partir dos objetivos propostos na investigação.

Quadro 6. Matriz – Questionário com os alunos.

Etapa	Objetivo	Número de Questões
Translação e Rotação de um corpo rígido	a) Analisar as causas que levam os estudantes a tratar o movimento de translação separado do movimento de rotação; b) Investigar as razões dos alunos em associar o conceito de Momento Angular somente a corpos em Rotação; c) Investigar o uso de analogias pelos estudantes entre as variáveis de translação e rotação	4
Operação com Vetores	a) Investigar as razões que levam os alunos a tratar grandezas vetoriais como grandezas escalares; b) Identificar as dificuldades associadas a operações com vetores, mais especificamente, o produto vetorial.	3
Aspectos associados à geometria do corpo.	a) Investigar onde se concentra a dificuldade de entendimento do conceito de Momento de Inércia e centro de massa; b) Investigar as causas que levam os alunos a simplificar os movimentos, isto é, tratar corpos extensos como corpos pontuais.	4

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5.6 A TÉCNICA DE ANÁLISE DOS DADOS

Na análise e interpretação dos registros, faremos uso da análise categorial. Segundo Bardin (1977), essa técnica vai nos auxiliares a condensar os dados, categorizando e uniformizando-os de forma a tornar mais acessível a análise das respostas e suas interpretações. Essa mesma autora nos mostra que a análise categorial passa por três momentos, o primeiro de pré-análise, em que o material que constitui o corpus da pesquisa será organizado.

Após esse primeiro momento, segue a exploração do material. Identificam-se então os elementos comuns aos vários discursos e os elementos que aparecem isoladamente. Os elementos recorrentes são as unidades temáticas, que podem ser identificadas como unidades de codificação ou de contexto. A partir desse momento, começa o processo de categorização dos elementos existentes no discurso, as mensagens provenientes das entrevistas podem ser agrupadas, tendo em conta diferentes categorias, assim, “em análise de conteúdo, a mensagem pode

ser submetida a uma ou várias dimensões de análise” (BARDIN, 1977, p.118).

Na terceira fase, a fase de inferência, o pesquisador procura explicitar os significados contidos nos enunciados classificados nas diferentes categorias identificadas. As categorias foram construídas no desenrolar da pesquisa.

## 5.7 CONSTRUÇÃO DAS CATEGORIAS

No momento inicial da pesquisa (M0), a preocupação estava relacionada à compreender a razão de os alunos terem tantas dificuldades no entendimento dos conceitos de Momento Angular e Torque. Essa inquietação estava presente nas ações deste pesquisador, junto ao Núcleo de Apoio ao Ensino de Física (NAEF), do qual era coordenador. Além disso, em conversas informais com colegas, professores de Física, e coordenadores das Engenharias, da Universidade de Caxias do Sul, relatou-se que os alunos apresentavam grandes dificuldades em conteúdos relacionados aos conceitos da Dinâmica de Rotações, mais especificamente os conceitos de Momento Angular e Torque (M1).

No momento seguinte (M2), iniciamos uma revisão bibliográfica em periódicos internacionais e nacionais da área de Ensino de Física, que remetem a experiências e resultados sobre as dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque, referenciadas no capítulo 1. Essas leituras apontaram que, tanto a nível nacional como internacional, as dificuldades se caracterizam pelo enfrentamento com questões como: leitura numérica de grandezas vetoriais, tratamento dos movimentos de translação e rotação como sucessivos e não como simultâneos, redução da dimensionalidade dos corpos, isto é, tratar corpos extensos como corpos pontuais, transposição do domínio linear (translação) para o domínio angular (rotação) desprezando o caráter vetorial das grandezas. Assim, lançamos novos questionamentos sobre a origem das dificuldades registradas na revisão bibliográfica.

As dificuldades, identificadas em M2, a partir da revisão bibliográfica, possibilita-nos levantar hipóteses sobre suas origens (M3), na forma de obstáculos epistemológicos e/ou obstáculos didáticos usando como referencial teórico a epistemologia de Bachelard e das definições propostas por Brousseau para os obstáculos de origem didática.

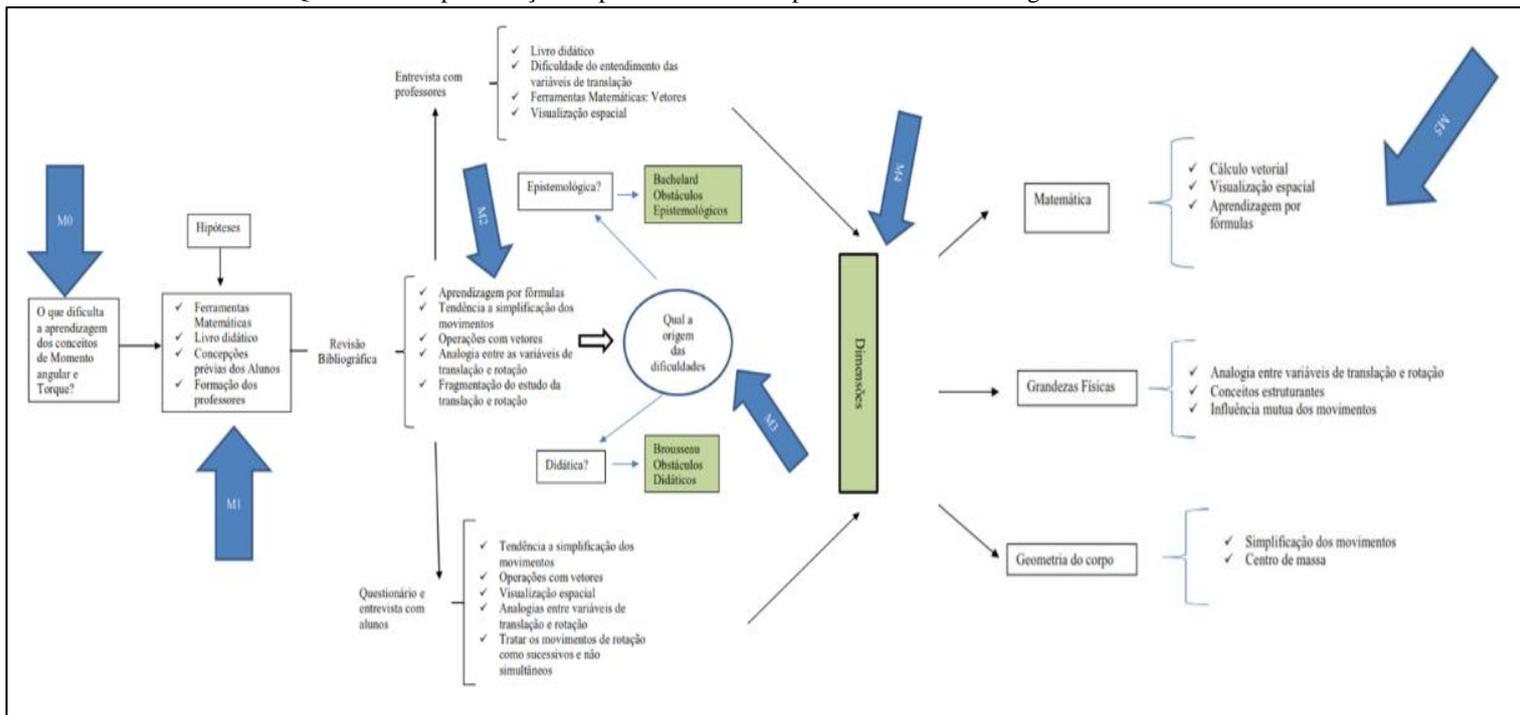
Através das análises dos registros coletados, entrevista com os professores e questionário e entrevista com os alunos, foram construídas

as seguintes dimensões (M4) e suas respectivas categorias de análise (M5):

- a) Matemática: Dificuldades encontradas para compreender as operações vetoriais relacionadas às grandezas físicas de Momento Angular e Torque. Nessa dimensão, listam-se as categorias: cálculo vetorial, visualização espacial e aprendizagem por fórmulas;
- b) Grandezas Físicas: Referem-se às dificuldades em relação aos conceitos que deveriam ter sido apreendidos na disciplina de Mecânica Newtoniana. A carência de compreensão desses conceitos, pode originar dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Torque, Momento Angular e sua conservação. Dentro dessa dimensão, listam-se as categorias: analogias entre variáveis de translação e rotação; influência mútua dos movimentos e conceitos estruturantes;
- c) Geometria do corpo: Redução das dimensionalidades do corpo extenso que, acaba sendo tratado como corpo pontual. Nessa dimensão, listam-se as categorias: simplificação dos movimentos e centro de massa.

No sentido de facilitar o entendimento do percurso escolhido para chegarmos às dimensões e categorias de análise, construímos o quadro abaixo (quadro 7), representando os momentos deste percurso.

Quadro 7 – Representação do percurso realizado para definirmos as categorias de análise.



Fonte: Elaborado pelo autor

As dimensões de análise propostas permitiram a flexibilidade necessária para a promoção de diferentes visões sobre os registros. No próximo capítulo, serão apresentados os resultados e interpretações, deduzidas pelo pesquisador, a partir da interpretação dos registros das entrevistas com professores, questionário e entrevista com alunos.



## CAPÍTULO 6: ANÁLISE E INTERPRETAÇÕES

### 6.1 ENTREVISTA COM PROFESSORES

Nessa etapa da pesquisa, a investigação foi realizada junto aos professores de Física, da disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas e objetiva responder as perguntas apresentadas no Apêndice 2. As entrevistas foram registradas em áudio e transcritas na íntegra. Após a transcrição, fizemos a seleção dos trechos mais significativos. Para a análise dos registros coletados, as categorias foram propostas a partir das dimensões apresentadas no capítulo 5

As manifestações dos professores serão apresentadas em quadros, conforme cada uma das dimensões apresentadas no quadro 7. Para a manutenção do sigilo, os professores serão identificados por números (P1,P2,...Pn).

#### 6.1.1 Matemática

A dimensão matemática contém as categorias cálculo vetorial, visualização espacial e aprendizagem por fórmulas.

Durante a entrevista, os professores quando questionados sobre quais seriam as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque (quadro 8), apontaram a Álgebra Vetorial como um fator preponderante.

Quadro 8 – Manifestação dos professores - categoria cálculo vetorial

P1	P4	P6
As dificuldades de aprendizagem do torque surgem quando se define o Torque como o resultado de um <b>produto vetorial</b> entre a Força e o braço de alavanca. [...]. As dificuldades de aprendizagem aumentam quando é necessário utilizar essas grandezas na sua <b>forma vetorial</b> .	Se os alunos não entendem <b>produto vetorial, não conseguem enxergar Torque nem Momento Angular [...]</b> .	Maior dificuldade é a <b>matemática, Álgebra Vetorial [...]</b> .

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma justificativa para o apontamento dessa dificuldade é que os conteúdos de Física, que antecedem ao estudo da Dinâmica das Rotações, estão ligados a grandezas dispostas linearmente ou no plano

(CLEMENTE; PINHO ALVES, 2005). No estudo da Cinemática e da Dinâmica das Rotações, alguns conceitos podem ser explorados de modo bidimensional, como a Velocidade Angular e a Aceleração Centrípeta. Outros, necessariamente, só adquirem sentido no espaço tridimensional, tais como Momento Angular e Torque.

Esta imposição espacial das variáveis e suas respectivas interações fogem dos esquemas anteriores, utilizados nos conteúdos já estudados. Essa dificuldade foi relatada por Proffitt e Gilden (1989), quando realizaram um estudo sobre a complexidade do movimento de corpos extensos, com alunos universitários dos anos iniciais e professores de ensino médio.

Reforçando os resultados acima, os professores, quando foram questionados sobre quais são os conceitos matemáticos (quadro 9) que são estruturantes para o aprendizado de Momento Angular e Torque, apontaram a Álgebra Vetorial.

Quadro 9 – Manifestação dos professores - conceitos matemáticos estruturantes

P1	P4	P6
Os principais conceitos matemáticos para o ensino do movimento de rotação são: operações com vetores (produto escalar e vetorial). Esses conceitos são diretamente usados na definição matemática das grandezas do movimento rotacional	Vetores e produto vetorial. Para saber como representar as grandezas físicas e o significado Físico dessas grandezas [...]	Vetores em três dimensões e produto vetorial. Quando os alunos começam o estudo de rotações, já trabalharam com vetores nos conteúdos anteriores (quase exclusivamente em duas dimensões), mas produto vetorial não é usado antes disso.

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.1.2 Grandezas Físicas

Os professores, quando indagados sobre quais os conceitos da Mecânica Newtoniana são fundamentais para o ensino do Momento

Angular e Torque, apontaram os conceitos de Força e Momento Linear como fundamentais.

Quadro 10 – Manifestação dos professores: categoria conceitos estruturantes.

P4	P 5	P6
<b>Força e Momento linear.</b> Para uma sequência no entendimento físico de ambos os conceitos.	Conceito de <b>inércia, massa, cinemática vetorial, leis de Newton, 2ª lei de Newton</b>	<b>Leis de Newton. Momento Linear</b>

Fonte: Elaborado pelo autor

A razão pela qual os professores consideram esses conceitos como estruturantes está no uso da transposição do domínio linear para o angular como estratégia pedagógica para o ensino da Dinâmica das Rotações.

No mesmo questionamento, alguns professores apontaram o uso de analogias como um fator estruturante para o aprendizado de Momento Angular e Torque, indicando a categoria analogia entre variáveis de translação e rotação.

Quadro 11 – Manifestação dos professores – categoria analogia entre variáveis de translação e rotação.

P1	P2
[...] <b>a analogia entre movimento de translação, e o movimento de rotação</b> [...].	Não penso aqui em alguns conceitos, mas na estrutura geral da Mecânica Newtoniana (MN). Essa estrutura pode ser transposta quase que em sua integralidade para o universo das rotações (R). Dá até para organizar com os alunos – gradualmente – uma espécie de dicionário. Por exemplo: na <b>MN há a posição X; na R há a posição angular.</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

No que diz respeito ao uso de analogias em Ciências ou no Ensino de Ciências, Bachelard alerta-nos que a utilização dessa forma de linguagem, fortemente ligada às concepções prévias dos alunos, pode induzir a formação ou ao reforço de obstáculos como, por exemplo, o substancialismo e o animismo. Nesse sentido, afirma:

[...]uma Ciência que aceita as imagens é, mais que qualquer outra, vítima das metáforas. Por isso, o

espírito científico deve lutar sempre contra as imagens, contra as analogias, contra as metáforas (BACHELARD, 1996, p. 48).

Em virtude de uma compreensão inadequada desses mecanismos explicativos, o pensamento científico tem a tendência de contemplar as analogias, metáforas e imagens como uma afirmação dogmática da realidade, elas não devem assumir o papel de “ponte”, indicando uma espécie de continuidade entre o conhecimento científico e o conhecimento comum, pois poderiam mascarar a ruptura necessária entre esses dois domínios de saberes (MELO, 2005).

Questionamos os professores sobre quais seriam as dificuldades, entraves ou até ausência de material adequado, que eles sentem para ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque.

Quadro 12 – Manifestação dos professores – categoria influência mútua dos movimentos

P1	P2	P3
O uso demasiado do <b>livro didático e a resolução de problemas descontextualizados</b> podem contribuir para um ambiente de dificuldades para ensinar Torque e Momento Angular.	Minha dificuldade maior consiste em <b>criar condições propícias</b> para que a necessidade de determinados recursos matemáticos apareça.	<b>Ter exemplos práticos</b> para diferenciar o conceito de massa, o conceito de inércia tem que estar bem definido. Teria dificuldade no Momento Angular, <b>não consigo ver um experimento</b> no qual posso medir Momento Angular.

Fonte: Elaborado pelo autor.

O intuito dessa questão é identificar as dificuldades de ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque, enfrentadas pelos professores. Como podemos observar, os professores apontam suas dificuldades à utilização de recursos pedagógicos, e também à falta desses materiais, como elemento limitador de sua prática pedagógica. Percebe-se indício da tendência empírico-ativista, que por sua vez teve seu foco direcionado para os materiais (FIORENTINI, 1995). Constituindo assim um mito sobre a utilização desses recursos e das potencialidades dos mesmos em

diminuir os problemas em relação ao ensino (SCHLIEMANN, SANTOS; COSTA, 2001).

As categorias visualização espacial, aprendizagem por fórmulas, influência mútua dos movimentos, centro de massa e simplificação dos movimentos não se enquadram nos relatos dos professores, pois foram dificuldades reportadas unicamente pelos alunos.

As manifestações dos professores, através das entrevistas, apresentam-nos indícios sobre onde se concentram as dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque: material didático insuficiente, uso excessivo de analogias entre os movimentos de translação e rotação e a matematização dos conceitos do Momento Angular e Torque. Mas esses indícios são insuficientes para identificar a origem dessas dificuldades, para termos mais subsídios é necessário analisarmos as respostas dos alunos frente a dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque.

## 6.2 QUESTIONÁRIO COM ALUNOS

A investigação foi realizada junto aos alunos da disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas, com o objetivo de responder o questionário apresentado no apêndice 3. Para a análise dos registros coletados, as categorias foram propostas a partir das dimensões apresentadas no capítulo 5. O quadro 13 mostra as relações entre dimensões e categorias do questionário aplicado aos alunos.

Quadro 13 – Relação entre dimensões, categorias e questões

<b>Dimensões</b>	<b>Categorias</b>	<b>Nº da Questão</b>
Matemática	Cálculo Vetorial	9
	Visualização Espacial	5
	Aprendizagem por Fórmulas	10
Grandezas Físicas	Analogias entre variáveis de Translação e Rotação	11
	Influência Mútua dos Movimentos	3,8
	Conceitos Estruturantes	4,6
Geometria do corpo	Simplificação dos Movimentos	7
	Centro de Massa	2,1

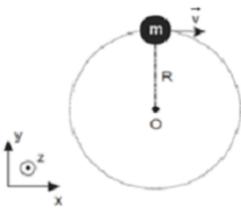
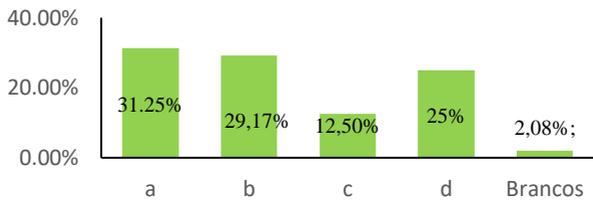
Fonte: Elaborado pelo autor

A seguir, apresentamos os resultados do questionário que podem nos indicar quais os obstáculos apresentados pelos alunos no entendimento do conceito de Momento Angular e Torque.

### 6.2.1 Matemática

A dimensão matemática contém as categorias cálculo vetorial, visualização espacial e aprendizagem por fórmulas. Os quadros a seguir (quadro 14 e 15) mostram as respostas dos alunos quando questionados sobre a relação matemática entre Torque e Momento Angular.

## Quadro 14 – Questão 9

QUESTÃO 9													
<b>Conceitos abordados</b>	Torque, Momento Angular e Vetores												
<b>Enunciado</b>	<p>No fim de uma aula de Física o professor lança um desafio para a turma: Suponha uma esfera executando um movimento circular uniforme, conforme a figura abaixo. Considere os eixos x e y no plano da folha e o eixo z apontando para você. O que você pode afirmar sobre os vetores Torque e Momento Angular da esfera?</p> 												
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>												
a) $\vec{\tau} = 0, \vec{L}_0 = mRv\hat{z}$	<b>Resposta Certa.</b>												
b) $\vec{\tau} = \tau_0\hat{x}, \vec{L}_0 = L_0\hat{z}$	Como o Momento Angular é o produto vetorial entre o momento e a posição, ele é constante, e seu módulo vale $mRv$ na direção positiva do eixo z. Como o Momento Angular é constante, o Torque é zero o que também pode ser concluído conceitualmente, pois a Força resultante sobre o corpo é radial e, portanto, forma um ângulo zero com o vetor posição, então o Torque é nulo.												
c) $\vec{\tau} = 0, \vec{L}_0 = 0$													
d) $\vec{\tau} = \tau_0\hat{x}, \vec{L}_0 = L_0\hat{z}$													
 <table border="1"> <caption>Distribuição das Respostas</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>31,25%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>29,17%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>12,50%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>25%</td> </tr> <tr> <td>Brancos</td> <td>2,08%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	31,25%	b	29,17%	c	12,50%	d	25%	Brancos	2,08%
Alternativa	Porcentagem												
a	31,25%												
b	29,17%												
c	12,50%												
d	25%												
Brancos	2,08%												

Fonte: Elaborado pelo autor.

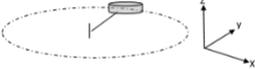
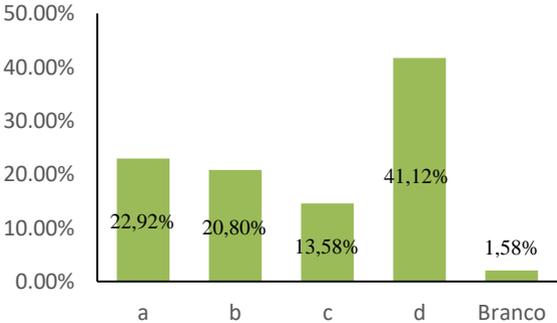
Para responder corretamente essa questão, os alunos deveriam ter o conhecimento do conceito de Torque como variação do Momento Angular e, do Momento Angular, como o produto vetorial entre os vetores

posição e Momento Linear. Dos alunos respondentes, 66,67% demonstraram não ter essa percepção.

Corroborando com o resultado acima, os alunos, quando questionados (quadro 15) sobre a utilização da regra da mão direita para determinar a direção do vetor, apresentaram dificuldade de visualização das grandezas vetoriais que têm suas representações no eixo Z. O quadro abaixo apresenta os resultados desse questionamento.

## Quadro 15 – Questão 5

## QUESTÃO 5

Conceitos abordados	Vetores												
<p><b>Enunciado</b></p> <p>Você está girando um objeto com velocidade uniforme como mostrado na figura abaixo. Existe uma direção particular que pode ser associada com o vetor velocidade angular?</p>													
<p><b>Alternativas de respostas</b></p>	<p><b>Justificativas</b></p>												
<p>a) Sim, <math>\pm x</math></p>													
<p>b) Sim, <math>\pm Y</math></p>	<p>Idem à argumentação da letra d</p>												
<p>c) Sim, <math>\pm Z</math></p>	<p><b>Resposta Certa</b></p>												
<p>d) Não, a escolha é realmente arbitrária.</p>	<p>Não há conhecimento da regra da mão direita para determinar a direção do vetor. Não reconhece a velocidade angular como grandeza vetorial</p>												
 <table border="1"> <caption>Distribuição das Respostas</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a) Sim, <math>\pm x</math></td> <td>22,92%</td> </tr> <tr> <td>b) Sim, <math>\pm Y</math></td> <td>20,80%</td> </tr> <tr> <td>c) Sim, <math>\pm Z</math></td> <td>13,58%</td> </tr> <tr> <td>d) Não, a escolha é realmente arbitrária.</td> <td>41,12%</td> </tr> <tr> <td>Branco</td> <td>1,58%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a) Sim, $\pm x$	22,92%	b) Sim, $\pm Y$	20,80%	c) Sim, $\pm Z$	13,58%	d) Não, a escolha é realmente arbitrária.	41,12%	Branco	1,58%
Alternativa	Porcentagem												
a) Sim, $\pm x$	22,92%												
b) Sim, $\pm Y$	20,80%												
c) Sim, $\pm Z$	13,58%												
d) Não, a escolha é realmente arbitrária.	41,12%												
Branco	1,58%												

Fonte: Elaborado pelo autor.

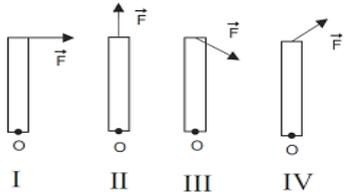
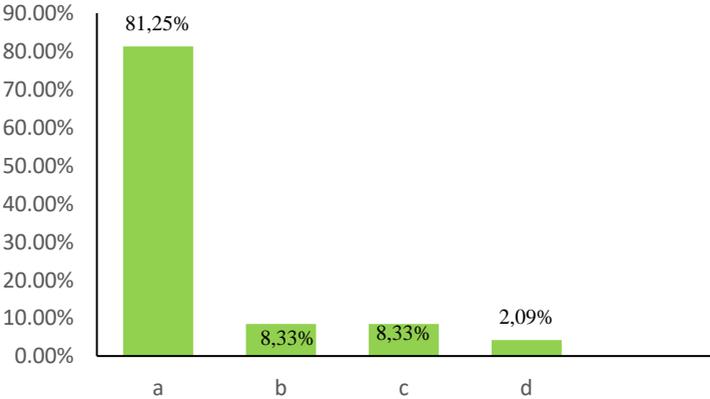
Dos alunos respondentes, 84,84 % demonstraram não utilizar a regra da mão direita para determinar a direção do vetor. Esse resultado mostra-nos a dificuldade que o aluno apresenta na compreensão de variáveis que necessitam da representação espacial, sendo um indicativo de obstáculo no sentido do entendimento do conceito de vetor, bem como das suas formas de operação. Isto está associado a um tratamento somente algébrico dessas grandezas, reforçando uma tendência dos estudantes de se aterem a uma leitura numérica, que em sua natureza são vetoriais, tendência está observada por Proffitt e Gildea (1989) e Rimoldini e Singh (2005) e que indica-nos a existência do obstáculo epistemológico realismo. Esse obstáculo está associado ao conhecimento comum ou a noção do real que dificulta a abstração. O obstáculo realista traduz o real imediato em certeza absoluta, impedindo a abstração e a consequente racionalização do que se observa.

De acordo com Bachelard, as dificuldades de abstração a partir dos fenômenos concretos entravam o pensamento científico. Segundo ele, os obstáculos vindos da experiência com a realidade fenomenológica levam o “pensamento científico para construções mais metafóricas que reais” e podem se tornar uma barreira, impedindo o pensamento abstrato, necessário para seguir a via psicológica normal do pensamento científico (ANDRADE; ZYLBERSZTAJN; FERRARI, 2002).

A próxima questão (questão 10), dentro da dimensão Matemática, trata da categoria “aprendizagem por fórmulas”. Para responder corretamente, os alunos deveriam observar que a distância entre o ponto de aplicação da Força e o ponto de fixação é a mesma em todas as alternativas. Desse modo o Torque será maior no caso em que o ângulo entre a Força e a barra for de  $90^\circ$ . Mesmo que a grande maioria dos alunos, 81,25%, tenham respondido corretamente, alguns alunos, 18,75%, demonstraram ter dificuldade de interpretar as três variáveis (posição, força e ângulo). Isso pode estar associado a dificuldade que os alunos, muitas vezes, têm de identificar o Torque como um produto vetorial cruzado do vetor posição (em relação a uma origem) e o vetor Força, dando indícios da existência do obstáculo epistemológico verbal.

Ao descrever o obstáculo verbal, Gaston Bachelard mostra que um espírito pré-científico consegue associar uma teoria abstrata a uma palavra concreta, bastando apenas esta para explicar a teoria, pois, ao longo dos tempos, teorias foram sendo construídas e vinculadas a palavras que se tornaram auto-explicativas e passaram a ser suficientes para explicar as teorias.

## Quadro 16 – Questão 10.

QUESTÃO 10											
<b>Conceitos abordados</b>	Torque de uma Força.										
<b>Enunciado</b>	<p>Sobre a extremidade de uma barra é aplicada uma Força de módulo <math>F</math> de diversas maneiras como mostram as figuras. Na sua opinião em qual das situações o torque produzido pela Força tem maior valor?</p> 										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) I	<b>Resposta Certa.</b> Ângulo de $90^\circ$ , o que significa que o Torque é máximo.										
b) II	Torque zero.										
c) III	Torque menor que o máximo, pois o ângulo é menor que $90^\circ$ .										
d) IV	Torque menor que o máximo, pois o ângulo é maior que $90^\circ$ e menor que $270^\circ$ .										
 <table border="1"> <caption>Gráfico de Barras: Porcentagem de Respostas</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>81,25%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>8,33%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>8,33%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>2,09%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	81,25%	b	8,33%	c	8,33%	d	2,09%
Alternativa	Porcentagem										
a	81,25%										
b	8,33%										
c	8,33%										
d	2,09%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.2.2 Grandezas Físicas

A representação desta dimensão é dada pelas categorias: analogias entre variáveis de translação e rotação, influência mútua dos movimentos e conceitos estruturantes. Suas representações no questionário aplicado aos estudantes foram através das questões 3, 4, 6, 8 e 11.

O quadro a seguir (quadro 17), apresenta os resultados da questão 11, associada a categoria “**analogia entre as variáveis de translação e rotação**”. As respostas do questionário revelaram-nos uma tendência generalizada de relacionar Torque e Força. Por exemplo, em alguns casos em que duas Forças não colineares produzem uma Força resultante igual a zero, muitos estudantes concluíram que o Torque resultante também seria zero. Essa tendência pode estar associada ao uso equivocado da analogia entre Força e Torque, duas grandezas vetoriais de representações diferentes, o Torque é um vetor axial e a Força um vetor polar. Tanto um vetor polar quanto um axial tem três componentes, e o mesmo símbolo é usado para representar ambos, mas eles são dois objetos completamente diferentes (SILVA; MARTINS, 2002).

De acordo com Gomes e Oliveira (2007), o uso de analogias, ainda que utilizadas com a intenção de facilitar o entendimento de um determinado assunto, na realidade não contribuem verdadeiramente, salvo em casos específicos muito bem trabalhados. Ao contrário, esses subterfúgios pedagógicos fazem com que sejam substituídas linhas de raciocínio por resultados e esquemas, o que se por um lado suscita atrativos e interesse, por outro se cristaliza intuições. Assim, práticas como essas podem ser prejudiciais à aprendizagem. A apropriação de noções inadequadas, sejam elas originárias dos conhecimentos empíricos que o educando vivência em seu cotidiano ou adquiridas durante o processo de ensino-aprendizagem, resultam na constituição de obstáculos epistemológicos substancialista e realista (BACHELARD, 1996).

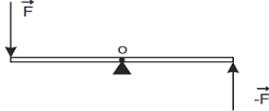
Na tentativa de facilitar a compreensão dos fenômenos o espírito pré-científico busca concretizar o abstrato fazendo uso de analogias que esvaziam todo o conteúdo científico, isto é, são geradas imagens concretas de fenômenos abstratos pelo indivíduo que bloqueiam a ruptura epistemológica do senso comum para a compreensão dos aspectos abstratos e matemáticos dos fenômenos.

O obstáculo realista tal como diz o nome trata-se de uma descrição do real que tende a supor metáforas para descrever os objetos que buscam uma investigação científica dentro do concreto, ignorando o abstrato. Esse obstáculo trata apenas do concreto e impede que o conceito seja

ultrapassado, não se preocupa com a abstração, apenas apresenta imagens e analogias para descrever o real.

Já a substancialização permite uma explicação breve e definitiva, ou seja, a convicção substancialista é tão forte que se satisfaz com pouco (a imagem primeira) que chega a cegar o espírito pré-científico, inviabiliza a variação da experiência e impede o desenvolvimento do espírito científico. Logo, o espírito científico não pode satisfazer-se apenas com ligar os elementos descritivos de um fenômeno à respectiva substância, sem uma compreensão, determinação precisa e detalhada das relações com outros objetos.

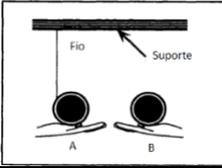
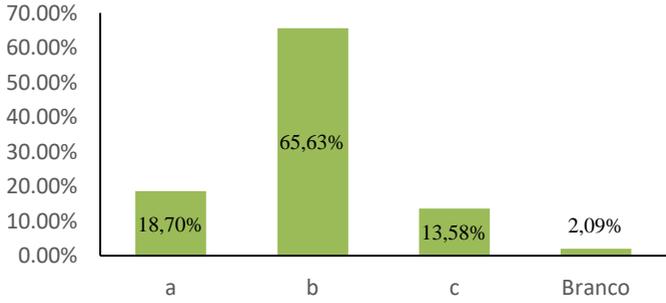
Quadro 17 – Questão 11

QUESTÃO 11													
<b>Conceitos abordados</b>	Torque de várias Forças. Aceleração angular. Rotação de um corpo rígido.												
<b>Enunciado</b>	<p>Se você aplicar duas Forças iguais e de sentidos opostos em uma gangorra, de acordo com a figura abaixo, que conclusão você chegaria ?</p> 												
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>												
a) A resultante dos Torques em relação ao ponto O das forças é não nula, e, portanto, a barra gira com aceleração angular constante.	<b>Resposta Certa.</b> O Torque produzido por um binário não é zero. Se o Torque não é zero temos uma Aceleração Angular constante diferente de zero.												
b) A resultante dos Torques em relação ao ponto O das Forças é nula, e, portanto, a barra gira com Velocidade Angular constante.	Confusão entre os conceitos de Aceleração e Velocidade Angulares.												
c) A resultante dos Torques em relação ao ponto O das Forças é nula e, portanto, a barra não gira	Confusão entre os conceitos de Torque e Força												
d) A resultante das Forças sobre a barra é nula e, portanto, a barra não gira.	Força resultante nula não significa que não há rotação.												
 <table border="1"> <caption>Distribuição das Respostas</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>29,17%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>16,65%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>29,17%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>23%</td> </tr> <tr> <td>Branco</td> <td>2%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	29,17%	b	16,65%	c	29,17%	d	23%	Branco	2%
Alternativa	Porcentagem												
a	29,17%												
b	16,65%												
c	29,17%												
d	23%												
Branco	2%												

Fonte: Elaborado pelo autor.

A categoria “influência mútua dos movimentos” é representada pelas questões 3 e 8. A questão 3 (quadro 18), trata do entendimento do conceito da Energia cinética, composta por dois termos, translação ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) e rotação ( $\frac{1}{2}I\omega^2$ ). A grande maioria dos respondentes, 65,63% acertou a questão.

Quadro 18 – Questão 3  
QUESTÃO 3

<b>Conceitos abordados</b>	Velocidade de translação e rotação, Conservação da Energia Mecânica e Torque										
<b>Enunciado</b>	<p>O Professor de Física propõe para você o seguinte desafio: Suponha dois carretéis dispostos conforme a figura abaixo. Ambos os carretéis são liberados do repouso ao mesmo instante. Qual carretel atingira o chão primeiro?</p> 										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) Carretel A	Como o carretel A terá uma Energia Cinética maior (translação + rotação) devido ao torque gerado pelo fio, o tempo para chegar ao solo será maior										
b) Carretel B	<b>Resposta Correta</b>										
c) Ambos chegam ao mesmo tempo	Idem à argumentação da letra a										
 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>18,70%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>65,63%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>13,58%</td> </tr> <tr> <td>Branco</td> <td>2,09%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	18,70%	b	65,63%	c	13,58%	Branco	2,09%
Alternativa	Porcentagem										
a	18,70%										
b	65,63%										
c	13,58%										
Branco	2,09%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

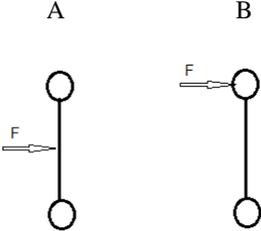
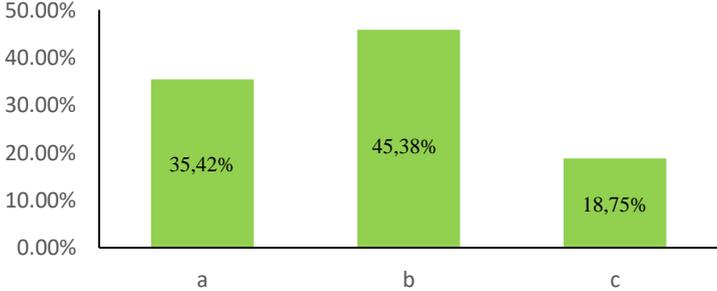
Contrariamente ao resultado da questão 3, os alunos, quando inquiridos (quadro 19) sobre o conceito de Energia Mecânica, uma parcela significativa, 54,17%, associa este conceito somente a corpos de translação, não conseguindo identificar no corpo B a existência de Energia Cinética de Translação e Rotação. Esta simplificação do movimento está associada ao obstáculo epistemológico Conhecimento Geral.

De acordo com Bachelard (BACHELARD, 1996), a possibilidade de alcançar o geral, ou universal, atua com o método do raciocínio indutivo, pelo qual, por meio de uma série de fatos particulares, chega-se a generalizações precipitadas (incomprovadas, indefinidas), a definições prévias, a conclusões utilitárias do conhecimento imediato. Trata-se do processo mais usado pelo senso comum ou espírito pré-científico, que dos fatos observados tira leis gerais aplicáveis a outros fatos semelhantes.

Conforme nos alerta Andrade, Zylbersztajn e Ferrari (2002):

Em pedagogia, o problema agrava-se, pois, a ideia do geral aparece imediatamente adaptada à ideia comum. Fornece a mesma resposta para todas as questões, desqualifica experiências de detalhe. Estas ideias gerais se tornam certezas, que imobilizam a razão, privando-os de uma motivação real para se questionarem sobre os aspectos particulares dos mesmos fenômenos (ANDRADE; ZYLBERSZTAJN; FERRARI, 2002).

Quadro 19 – Questão 8  
QUESTÃO 8

<b>Conceitos abordados</b>	Energia Mecânica, Torque								
<b>Enunciado</b>	<p>Se você aplicar uma força <math>F</math> a um haltere durante um mesmo intervalo de tempo. Em qual das situações abaixo ele vai adquirir maior Energia Mecânica.</p> <div style="text-align: center;">  </div>								
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>								
a) A	Não leva em consideração a Energia Cinética de Rotação								
b) B	<b>Resposta Certa.</b>								
c) As duas adquirem a mesma energia	Idem a argumentação A								
 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>35,42%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>45,38%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>18,75%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	35,42%	b	45,38%	c	18,75%
Alternativa	Porcentagem								
a	35,42%								
b	45,38%								
c	18,75%								

Fonte: Elaborado pelo autor.

A categoria “conceitos estruturantes” é representada pelas questões 4 e 6. Mesmo que um grande número de alunos tenha respondido corretamente à questão 4 (quadro 20), a justificativa apresentada, por alguns alunos, para a resposta foi equivocada. Para responder adequadamente esta questão, os alunos deveriam fazer uso da relação entre Torque e Momento Angular, isto é, o Torque como à taxa de variação do Momento Angular. Uma possível justificativa para isso é uma confusão conceitual entre os conceitos de Torque e Momento Angular. Provavelmente, o aluno não levou em consideração a Conservação do Momento Angular.

As respostas dos alunos corroboram com isto.

O momento será maior em C, devido a distância do raio (braço) até o ponto P. Com um raio maior, maior será o momento (Estudante 4).

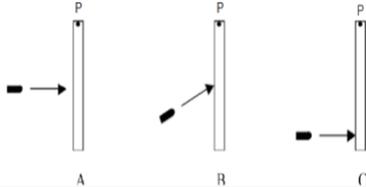
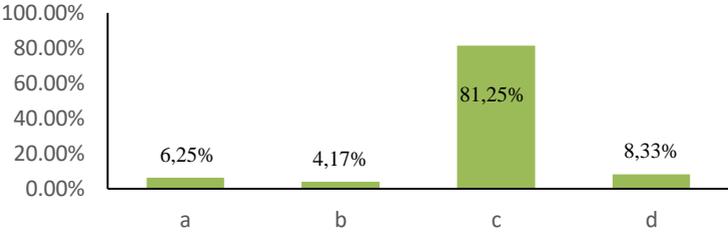
Pois tem maior distância do ponto P. Pela fórmula  $M=F.d$ , força e distância são grandezas diretas que impactam no momento (Estudante 15).

Como o momento é diretamente proporcional ao braço, o pêndulo C terá maior braço de alavanca de que A e B (Estudante 21).

Esse resultado é respaldado, quando questionamos os alunos sobre a relação entre Torque e Força. Aproximadamente 70% dos alunos responderam corretamente a questão 6 (quadro 21).

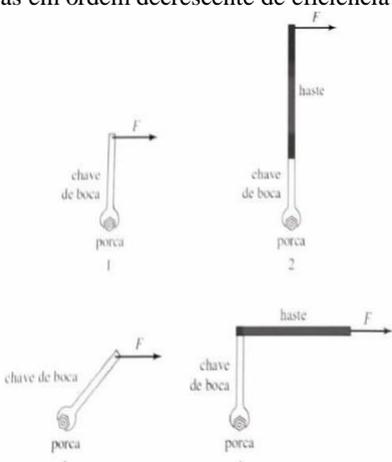
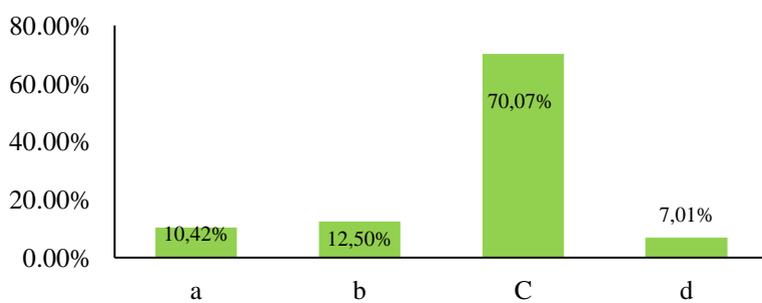
## Quadro 20 – Questão 4

## QUESTÃO 4

Conceitos abordados	Torque e conservação do Momento Angular										
<b>Enunciado</b>	<p>Você foi convidado pelo seu professor para assistir a uma demonstração em que um pêndulo Físico, será impactado por uma bala lançada por um artefato qualquer. O responsável em realizar o procedimento propôs três situações que são representadas na figura abaixo. Após a realização da demonstração, o professor faz a seguinte pergunta: Observando que depois do impacto a bala e a haste permaneceram unidas, em qual das situações o Momento Angular é maior ?</p> 										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativa</b>										
a) A	Há uma compreensão de que o Momento Angular é uma grandeza Física somente de movimentos que envolvem Rotação, uma outra possibilidade para justificar esta resposta é que há uma confusão conceitual entre Torque e Momento Angular. Possivelmente o aluno não levou em consideração a Conservação do Momento Angular										
b) B	Idem à argumentação da letra a										
c) C	<b>Resposta Certa</b>										
d) O Momento angular é o mesmo em todas as situações	Idem à argumentação da letra a										
 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>6,25%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>4,17%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>81,25%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>8,33%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	6,25%	b	4,17%	c	81,25%	d	8,33%
Alternativa	Porcentagem										
a	6,25%										
b	4,17%										
c	81,25%										
d	8,33%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

## Quadro 21 – Questão 6.

QUESTÃO 6											
Conceitos abordados	Torque										
<b>Enunciado</b>	<p>Quando você usa uma chave de boca para tentar soltar uma porca enferrujada qual das situações abaixo é a mais efetiva para afrouxar a porca? Liste-as em ordem decrescente de eficiência:</p> 										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) 1,2,3,4	<p>Para aumentar o Torque, você poderá aumentar a Força ou o braço da alavanca. Como aqui a força é a mesma em todas as quatro situações, a questão se resume em comparar os braços das alavancas.</p> <p><b>Resposta certa.</b></p> <p>Idem à argumentação da letra a</p>										
b) 4,3,2,1											
c) 2,1,4,3											
d) 3,4,1,2											
 <table border="1"> <caption>Gráfico de barras mostrando a porcentagem de respostas corretas para cada alternativa.</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>10,42%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>12,50%</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>70,07%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>7,01%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	10,42%	b	12,50%	C	70,07%	d	7,01%
Alternativa	Porcentagem										
a	10,42%										
b	12,50%										
C	70,07%										
d	7,01%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.2.3 Geometria do corpo

Essa dimensão está representada pelas categorias: simplificação dos movimentos e centro de massa. Suas representações no questionário aplicado aos estudantes foram através das questões 1, 2 e 7. O gráfico abaixo mostra a resposta dos alunos sobre a questão 1.

O quadro a seguir (quadro 22), apresenta os resultados da questão 7, que indica a categoria “simplificação do movimento”. Para responder corretamente essa questão, os alunos deveriam ter o entendimento do Momento Angular como o produto vetorial entre o vetor posição e Momento Linear. Dos alunos respondentes, 79,21% demonstraram não ter esse entendimento.

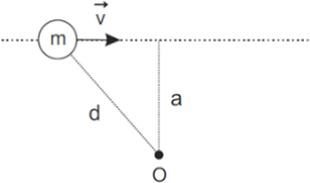
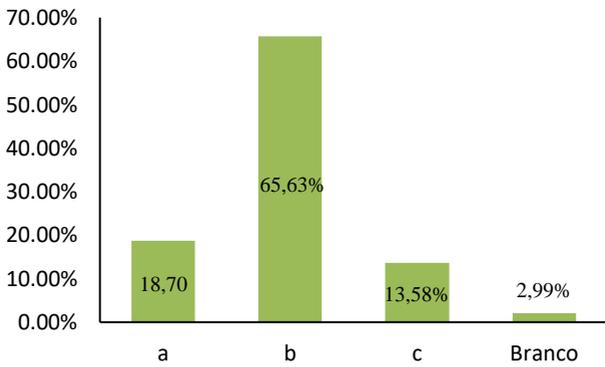
O grande número de respostas incorretas pode estar associado a generalização do fenômeno, em que todo o objeto que se desloca em linha reta com velocidade constante é um Movimento Retilíneo Uniforme, e que o Momento Angular é um conceito associado somente a corpos em rotação. Isso fica evidenciado nas respostas dadas pelos estudantes:

Não, pois o corpo está movimentando-se em linha reta e com velocidade constante (estudante, 10).

Não pois não esta em rotação (estudante, 15).

Não, pois para ter Momento Angular a trajetória não pode ser retilínea (estudante 18).

## Quadro 22 – Questão 7

QUESTÃO 7											
<b>Conceitos abordados</b>	Momento Angular										
<b>Enunciado</b>	<p>Você está estudando para a prova de Física e se depara com a seguinte pergunta: Um corpo movendo-se em linha reta com velocidade constante (MRU), conforme a figura abaixo, possui Momento Angular em relação ao ponto O?</p> 										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) Sim,	<b>Resposta certa.</b> O módulo do Momento Angular será igual a $m \cdot v \cdot d \cdot \sin\theta$ , em que $\theta$ é o ângulo entre os vetores velocidade e posição.										
b) Não	Associa o conceito de Momento Angular somente com corpos em Rotação										
c) Impossível de determinar											
 <table border="1"> <caption>Distribuição das Respostas</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>18,70%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>65,63%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>13,58%</td> </tr> <tr> <td>Branco</td> <td>2,99%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	18,70%	b	65,63%	c	13,58%	Branco	2,99%
Alternativa	Porcentagem										
a	18,70%										
b	65,63%										
c	13,58%										
Branco	2,99%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

A generalização excessiva de um fenômeno indica um obstáculo epistemológico do tipo Conhecimento Geral. Segundo Bachelard (1996),

a necessidade da explicação generalizada de um fenômeno abandona critérios de entendimento de análise, pensamento e discussão da fenomenologia do experimento. Essas dificuldades são intensificadas por uma metodologia de ensino ineficaz na apresentação do fenômeno, pois paralisa o pensamento.

Nessa questão, o Momento Angular precisa ser estudado com mais cuidado, podendo-se perceber que ideias exatas (movendo-se em linha reta e velocidade constante) ofuscam as variáveis essenciais, como, por exemplo, o referencial de análise da questão. Isso sugere que há uma hierarquização matemática dos conceitos, onde se observa que nem sempre a primeira descrição está correta, evidenciando que a generalidade não tem êxito nesse caso.

Na dimensão Geometria do Corpo, a categoria “centro de massa” é representada pelas questões 1 e 2. A questão 1 (quadro 23), trata da dependência da velocidade e da aceleração de um corpo, descendo um plano inclinado, com o seu Momento de Inércia. Para responder de modo correto, os alunos devem ter a compreensão de que quanto menor o Momento de Inércia do corpo maiores serão sua velocidade e aceleração e, portanto, menor o tempo de descida.

Aproximadamente 33,65 % dos alunos acreditam que se largarmos da parte superior de um plano inclinado um cilindro e um aro, a condição necessária para o aro chegar primeiro na base é que os dois tenham a mesma massa e o mesmo raio. Os respondentes não levam em consideração a distribuição de massa. Isso fica evidenciado nas respostas dadas pelos estudantes:

Se eles tiverem raio e massa iguais, a energia cinética do aro é maior (Estudante 1).

Ao possuir menos atrito, o aro deve ter a mesma massa e raios iguais para chegar antes (Estudante 2).

Se tiverem a mesma massa do cilindro a aceleração é a mesma (estudante 4).

Quadro 23 – Questão 1

QUESTÃO 1											
<b>Conceitos abordados</b>	Rotação de um corpo rígido. Momento de Inércia.										
<b>Enunciado</b>	Você está na parte superior de um plano inclinado e larga um cilindro sólido e um aro simultaneamente, qual é a condição para o aro chegar primeiro na base do plano?										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) A massa do aro deve ser igual à massa do cilindro	O aluno não entende que o tempo de descida não depende nem do raio nem da massa. Dificuldade de entendimento do conceito de Momento de Inércia.										
b) O raio do aro deve ser igual ao raio do cilindro											
c) A massa do aro deve ser igual à massa do cilindro e o raio do aro deve ser igual ao raio do cilindro											
d) O aro sempre é mais lento independente dos valores da massa e do raio.	<b>Resposta Certa.</b> Quanto menor o momento de inércia do corpo maior serão sua velocidade e aceleração e, portanto, menor o tempo de descida. Momento de inércia maior significa que é mais difícil de girar o corpo, portanto ele leva um tempo maior para descer.										
<table border="1"> <caption>Dados do Gráfico de Barras</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>22,44%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>22,44%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>33,65%</td> </tr> <tr> <td>d</td> <td>21,47%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	22,44%	b	22,44%	c	33,65%	d	21,47%
Alternativa	Porcentagem										
a	22,44%										
b	22,44%										
c	33,65%										
d	21,47%										

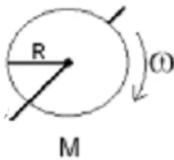
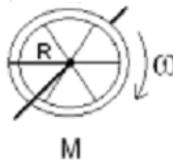
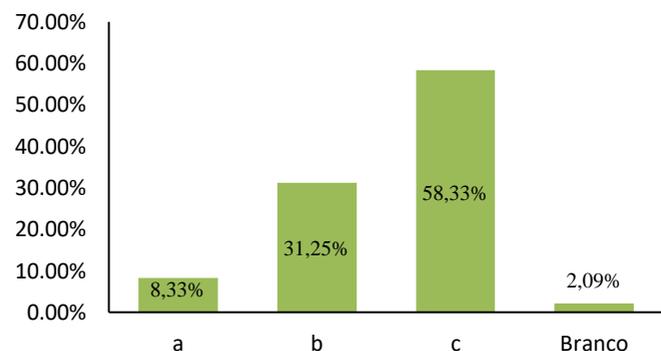
Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse resultado é respaldado quando questionamos os alunos sobre a Energia Cinética Rotacional na questão 2. O problema envolve o conceito de energia cinética de rotação ( $1/2 I\omega^2$ ), o conceito de Momento

de Inércia de uma roda ( $I = mr^2$ ) e o Momento de Inércia do disco ( $I = \frac{1}{2} mr^2$ ). Como o Momento de Inércia da roda é maior que o do disco, a roda terá maior Energia Cinética Rotacional.

O resultado sobre esse questionamento é mostrado no quadro abaixo (quadro 24).

## Quadro 24 – Questão 2.

QUESTÃO 2											
<b>Conceitos abordados</b>	Momento de Inércia, Energia Cinética Rotacional										
<b>Enunciado</b>	<p>Quando você chega ao laboratório de Física, pela manhã, você depara com o seguinte experimento: Uma roda de Ferro e um disco de Alumínio de mesma massa e raio girando com a mesma Velocidade Angular, como mostra a figura abaixo. Qual deles terá maior Energia Cinética Rotacional?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>Disco de Alumínio</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>Roda de Ferro</p>  </div> </div>										
<b>Alternativas de respostas</b>	<b>Justificativas</b>										
a) O disco de Alumínio	O aluno não compreende que a Energia Cinética de rotação diferentemente da Energia Cinética de translação não depende da massa e sim da distribuição de massa (Momento de Inércia). Como o Momento de Inércia da roda é maior que o do disco, a roda terá maior Energia Cinética Rotacional										
b) A roda de Ferro	<b>Resposta certa</b>										
c) As energias são iguais	Idem à argumentação da letra a										
 <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <caption>Dados do Gráfico de Barras</caption> <thead> <tr> <th>Alternativa</th> <th>Porcentagem</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>8,33%</td> </tr> <tr> <td>b</td> <td>31,25%</td> </tr> <tr> <td>c</td> <td>58,33%</td> </tr> <tr> <td>Branco</td> <td>2,09%</td> </tr> </tbody> </table>		Alternativa	Porcentagem	a	8,33%	b	31,25%	c	58,33%	Branco	2,09%
Alternativa	Porcentagem										
a	8,33%										
b	31,25%										
c	58,33%										
Branco	2,09%										

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observamos que 66,66 % dos alunos responderam que a Energia Cinética do disco é maior ou igual que a da roda. Isso aponta para uma dificuldade de compressão de que a Energia Cinética de Rotação, diferentemente da Energia Cinética de Translação, não depende da massa e sim da distribuição de massa (Momento de Inércia). Essa compreensão equivocada pode ser justificada pelo uso da analogia entre o conceito de massa e Momento de Inércia, indicando a possibilidade da existência de obstáculo epistemológico do tipo verbal. Essa mesma compreensão equivocada foi encontrada por Rimoldini e Singh (2005).

O resultado do questionário, sinalizou a existência de diferentes obstáculos epistemológicos: Verbal, substancialista, realista e conhecimento geral. Porém esses não são indícios suficientes para concluirmos quais são somente esses os obstáculos que dificultam a aprendizagem do conceito de Momento Angular e Torque.

### 6.3 ENTREVISTA COM OS ALUNOS

De forma a contribuir para a compreensão das respostas apresentadas no questionário, foi realizada uma entrevista com um grupo de dez alunos participantes da amostra, divididos em dois grupos de cinco alunos. A escolha pela entrevista, a partir de um grupo (grupo focal), deve-se pelo pouco tempo para realizá-la e também pela disponibilidade dos alunos em participar desta etapa da pesquisa.

Morgan (1997) define grupos focais como uma técnica de pesquisa qualitativa, derivada das entrevistas grupais, que coleta informações por meio das interações grupais. Para Kitzinger (2000), o grupo focal é uma forma de entrevistas com grupos, baseada na comunicação e na interação. Seu principal objetivo é reunir informações detalhadas sobre um tópico específico (sugerido por um pesquisador, coordenador ou moderador do grupo), a partir de um grupo de participantes selecionados. Ele busca colher informações que possam proporcionar a compreensão de percepções, crenças e atitudes sobre um tema, produto ou serviços.

O grupo focal difere da entrevista individual por basear-se na interação entre as pessoas para obter os dados necessários à pesquisa. Sua formação obedece a critérios previamente determinados pelo pesquisador, de acordo com os objetivos da investigação, cabendo a este a criação de um ambiente favorável à discussão, que propicie aos participantes manifestar suas percepções e pontos de vista (PATTON; 1990; MINAYO, 2000).

De acordo com Flick (2002, p. 128), os grupos focais podem ser vistos também como um "protótipo da entrevista semiestruturada" e os resultados obtidos por meio desse tipo de entrevista.

O critério de escolha dos alunos foi feito de acordo com o número de acertos no questionário: cinco alunos com maior número de acertos, e cinco alunos com menor número de acertos e a disponibilidade de participar da entrevista. Para preservar a identidade dos participantes do grupo focal, a citação não será feita por seus nomes, sendo os entrevistados chamados de estudante 1 até estudante 5 para o grupo de maior número de acertos e de estudante 6 até estudante 10 para o grupo de menor número de acertos.

A entrevista (apêndice 5) foi agendada previamente por meio de contatos pessoais, ou através do correio eletrônico, e teve a duração máxima de uma hora; foi gravada e posteriormente transcrita para a análise.

A análise de conteúdo (BARDIN, 1977) do discurso dos alunos contribuiu para identificar os fatores que dificultam o processo de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque. As entrevistas foram do tipo semiestruturada, em função de um conjunto de informações previamente definido como relevante para a pesquisa, a partir das quais elaborou-se um roteiro básico e flexível (apêndice 5). As questões foram organizadas de forma a fazer com que os alunos apontassem espontaneamente essas dificuldades.

Segundo os entrevistados, o aspecto matemático (formal) da Física é, em geral, por demais enfatizado e não conseguem entender o sentido desse formalismo nem relacionar teoria a experimentos. Segue abaixo a manifestação de três alunos que cursaram a disciplina com professores diferentes.

[...] o professor perde duas horas fazendo lista de exercícios sem nenhuma aplicabilidade não relaciona com o laboratório, deveria planejar melhor as aulas [...] (Estudante 5).

[...] o professor não planeja as aulas fica fazendo deduções de equações no quadro e se enrola todo [...] (Estudante 6).

[...] é um conteúdo muito difícil, não entendo as equações, não vejo nenhuma relação entre teoria e prática [...] (Estudante 7).

Outro aspecto que dificulta a compreensão dos conceitos de Momento Angular e Torque, evidenciado na entrevista, é a busca pela

simples aplicação das fórmulas, sem que compreendam os princípios físicos subjacentes a estas fórmulas. Uma parcela significativa dos alunos entrevistados demonstrou ter dificuldades na interpretação dos problemas apresentados pelos professores, e procuram apelar para as “receitas” prontas (simples aplicação de “fórmulas”), isso quando conseguem identificar o tipo de problema com o qual se defrontam. Porém, mesmo o uso de “receitas” mostra-se ineficaz, pois muitas vezes falta o domínio de conhecimentos matemáticos para resolverem adequadamente os problemas.

Corroborando com isso, quando os entrevistados foram questionados sobre quais os conteúdos que colaboram para uma maior dificuldade de entendimento dos conceitos de Momento Angular e Torque. Para uma parcela significativa a “Matemática”, mais explicitamente exercícios envolvendo álgebra vetorial, apresentam maior dificuldade. Os relatos a seguir, revelam essa percepção, de que o que importa na resolução dos problemas são as “fórmulas”:

[...] acho os exercícios que têm vetores muito abstratos e não vejo nenhuma aplicação (estudante 4).

[...] minha maior dificuldade é que não consigo interpretar os problemas, não sei que fórmula usar [...]. Vetores não entendo nada. (estudante 1).

Essas constatações, nos dão um indicativo da existência de obstáculos epistemológicos do Conhecimento Quantitativo, onde o entendimento do fenômeno se esgota na precisão numérica.

O discurso dos alunos remete-nos a necessidade do professor repensar a sua forma de planejar as aulas de Física. A excessiva matematização, já apontada por Proffitt e Gilden (1989), e a descontextualização do conteúdo podem gerar concepções alternativas que, muitas vezes, permanecem arraigadas na estrutura cognitiva do estudante.

De acordo com Batista (2004, p. 463)

A redução da Física à pura técnica, em certos casos; à técnica experimental e, em outros, à técnica matemática para a dedução lógica de consequências dos axiomas da teoria, evita questionamentos conceituais no seu ensino e gera uma formação limitada, estreita e acrítica.

Por outro lado, de acordo com Brousseau (1983), a escolha de estratégias de ensino mal elaboradas e/ou incompletas, resultado de uma Transposição Didática inadequada, pode criar obstáculos didáticos de origem didática, resultando em conhecimentos incompletos ou equivocados, o que pode levar o aluno a ter dificuldades de aprendizagem. De acordo com Pietrocola (2002)

[...] uma das competências fundamentais do professor, com relação a esta questão é entender que não é somente saber matemática para poder operar as teorias Físicas que representam a realidade, mas de saber aprender teoricamente o real através de uma estruturação matemática (PIETROCOLA, 2002. p. 106).

Mesmo considerando que o livro didático é um importante instrumento de apoio, alguns estudantes relataram que o livro utilizado pelos professores dificulta o entendimento dos conceitos de Momento Angular e Torque, o mesmo foi considerado de difícil entendimento e com poucos exemplos práticos.

Alguns entrevistados, relataram suas impressões sobre o uso do livro didático pelo professor:

[...] não gosto do livro, acho que ele é muito direto e dificulta o aprendizado [...] (estudante 6).

[...] o professor não utiliza o livro didático, usa apresentação e dá uma lista de exercícios[...] (estudante 4).

Ao observar os livros didáticos atuais, percebe-se que as imagens estão cada vez mais presentes e correspondem a uma exigência sociocultural de valorização dos aspectos de natureza visual. Os recursos visuais podem contribuir no processo de ensino-aprendizagem, desde que não substituam ou obstaculizem o pensamento abstrato.

Segundo Leite, Silveira e Dias (2006), o uso inapropriado de imagens e figuras gera “distorções conceituais que acompanham o aprendiz ao longo de sua formação, o que gera concepções errôneas acerca de teorias e conceitos científicos”. Porém, as comparações, analogias e metáforas completam o quadro de ferramentas utilizadas pelos autores como recurso didático e acabam, muitas vezes, obstruindo a passagem do aluno de um conhecimento geral para um conhecimento científico.

No livro didático, usado como referência básica,<sup>27</sup> os autores apresentam o conceito de Momento Angular através de uma analogia com Momento Linear, aplicam a segunda lei de Newton nos dois tipos de movimento e fazem um paralelo entre as grandezas lineares e as rotacionais.

Na explicação da conservação do Momento Angular, por exemplo, existe a necessidade do tratamento vetorial. Não tendo como evitar a tridimensionalidade apesar de estarem presos a um meio bidimensional - o livro-os autores usam a regra da mão direita. Os detalhamentos são seguidos de figuras em perspectiva, que buscam dar ao estudante a ideia da distribuição espacial dessas grandezas físicas. Essa tentativa de descrever um mundo tridimensional num meio bidimensional pareceu fracassar, conforme o testemunho dos alunos. Desse modo, conjectura-se que, possivelmente, há existência de obstáculos verbais e realistas.

Os depoimentos dos alunos, na entrevista, sobre as aulas revelam uma ambiguidade na maneira como perceberam o seu aprendizado. De um modo geral, os estudantes consideraram-se satisfeitos com as aulas, relatando que conseguiram realizar associações dos conteúdos com suas experiências cotidianas. Por outro lado, quando indagados sobre aspectos negativos das aulas, a dificuldade em estabelecer relações entre os conceitos abstratos e a realidade (problemas) emergiu em suas respostas.

Neste trabalho, destacamos três aspectos, interdependentes, que se revelaram fatores que dificultam o aprendizado. São eles: 1) a percepção dos conceitos de Momento Angular e Torque como abstratos e difíceis, e até mesmo desvinculada de suas experiências cotidianas; 2) a deficiência no desenvolvimento de algumas habilidades e competências relacionadas a conhecimentos básicos, como interpretação de texto e resolução de problemas matemáticos; e 3) a autoculpabilização pela deficiência ou ausência de aprendizagem gerando sentimentos de ineficácia e desmotivação, e por sua vez, uma atitude negativa frente aos conteúdos abordados, fazendo com o que o aluno não apreenda os mesmos. Alguns depoimentos sugerem que os próprios alunos já internalizaram a responsabilidade pela não aprendizagem, e apontam que eles se julgam os únicos responsáveis, sem considerar outros determinantes para tais fenômenos.

---

<sup>27</sup> Fundamentos da Física, volume 1 Mecânica. David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker; tradução de Ronaldo Sergio de Biasi. 10. Ed. Rio de Janeiro: LTC 2016.

Após a aplicação do questionário e da entrevista com os estudantes, percebemos que alguns obstáculos epistemológicos ficaram mais evidentes, tais como: Conhecimento Geral, Realista, Verbal e Conhecimento Quantitativo. Constatamos isso devido: a dificuldade apresentada pelos alunos em visualizar grandezas tridimensionais; ao uso de analogias entre as grandezas físicas; a simplificação do Momento de Rotação e a aplicação de fórmulas prontas. Dentre estas representações dos alunos que os levam a prováveis obstáculos epistemológicos, identificou-se também obstáculos didáticos originados na escolha didática do professor, conforme cita Astolfi, (1996, p. 65),

A análise dos obstáculos nem sempre se apoia tão claramente em elementos históricos; ela pode também muito bem resultar de observações ligadas à prática pedagógica ou de pesquisas didáticas empíricas.



## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo de apresentar as conclusões desta tese exige a retomada da pergunta que orientou todo o empenho em sua construção e implementação: onde se originam as dificuldades de ensino-aprendizagem na Dinâmica das Rotações?

Inicialmente, é preciso destacar que este trabalho corrobora com uma parcela significativa das pesquisas na área de ensino de ciência, que vem assinalando, já há algum tempo, as seguintes dificuldades de aprendizagem em Dinâmica das Rotações, mais especificamente os conceitos de Momento Angular e Torque:

- a) As disciplinas de Física são baseadas em fórmulas e não existe um interesse na estrutura conceitual (BAROWY; LOCHHED, 1980);
- b) A tendência dos alunos de considerar como sucessivo os movimentos de translação e rotação, que de fato ocorrem simultaneamente (MENIGAUX, 1994);
- c) a sequência didática apresentada nos livros de Física básica (PROFFITT; GILDEN, 1989);
- d) a tendência dos estudantes de se ater a uma leitura numérica de grandezas, que em sua natureza são vetoriais (RIMOLDINI; SINGH, 2005);
- e) o uso excessivo de analogias entre as variáveis translacionais e rotacionais (CLOSE; GOMEZ; HERON, 2013).

O que ficou evidenciado, nesta revisão bibliográfica, é que os pesquisadores da área identificam a existência de dificuldades na aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque, mas não conseguem identificar a origem dessas dificuldades.

Nesse sentido, achamos necessário fazer uma “visita” na história da construção do conceito de Momento Angular, na tentativa de identificar a gênese dessas dificuldades.

Aparentemente, foi Leonard Euler que escreveu as expressões para Momento Angular de um corpo sólido e sua conservação a partir de uma perspectiva escalar, à qual denominou “*Momento do movimento de Rotação*”. O fato de que Leonard Euler só se torna consciente de seus estudos (i.e., que o Momento da Força é um vetor) tardiamente é a melhor evidência de que tais mudanças não foram triviais, o que mostra como as noções físico-matemáticas emergem e são constantemente sustentadas pelas interações e conflitos não resolvidos entre diferentes representações de fenômenos, de estruturas matemáticas e de ideias filosóficas.

Combinando a análise matemática do movimento com a representação geométrica de grandezas da Dinâmica das Rotações e com a noção newtoniana de "Força", Louis Poinot desenvolveu o conceito físico-matemático de um "Momento Conservado", usado para explorar ainda mais a Dinâmica da Rotação. Embora os resultados da Poinot tenham sido lentamente incorporados no contexto analítico, a sua ideia de uma nova interpretação dos fenômenos de Rotação teve pouca repercussão entre os matemáticos franceses. No entanto, a nova teoria do movimento rotacional foi apreciada por engenheiros e ganhou elogios especiais de Léon Foucault. Dois dos dispositivos de Foucault - o pêndulo e o giroscópio - desempenham um papel importante na história do Momento Angular. Por volta de 1850, essa ideia mostrou-se capaz de preencher a lacuna entre a Mecânica Analítica e os dispositivos mecânicos que representam as propriedades do movimento rotacional.

No contexto da Filosofia Natural Britânica e especialmente escocesa da era vitoriana, em que o raciocínio geométrico e os modelos mecânicos passaram a ser considerados como tendo um valor epistemológico particularmente elevado, Robert B. Hayward formulou a definição moderna de "Momento Angular", que foi prontamente retomada por James C. Maxwell e William J.M. Rankine e empregado por William Thomson para estabelecer uma conexão entre a estrutura da matéria e suas propriedades eletromagnéticas.

No que diz respeito a didatização do conceito de Momento Angular e Torque vimos que até o fim do século XIX, a Dinâmica de Rotações era referenciada unicamente em livros técnicos de engenharia. Os primeiros livros de Física básica são reflexos das explicações dos fenômenos baseados na Filosofia Natural, que tinha como base a descrição, herança dos séculos XVII e XVIII. Os livros, quando descrevem a Mecânica, fazem-no por meio da escrita e aritmética, sem formulações matemáticas, isso pode justificar a não inclusão dos conceitos de Momento angular e Torque nos livros didáticos de Física da época, visto que as suas definições estão baseadas em conceitos algébricos e geométricos.

Também podemos justificar essa abordagem pelo enfoque educacional da época, uma vez que os estudos baseavam-se na leitura e na composição; acreditava-se que era dessa forma que se educava o espírito do homem, criando barreiras para os desenvolvimentos matemáticos (CHERVEL, 1999).

Na sequência, é possível identificar nos livros didáticos de Física uma mudança de enfoque, a transição da descrição por meio de exemplos hipotéticos para a descrição por meio de aparelhos e aparatos físicos. O conteúdo desses livros deixa de lado as descrições filosóficas,

apresentando como nova metodologia, a descrição de aparelhos fotográficos, telégrafos, telefones, microfones, bombas hidráulicas, motores, geradores etc. O terceiro momento representa o início da algebrização do conteúdo de Física, os livros ainda apresentam figuras de experimentos e aparatos físicos, mas observamos a inclusão dos exercícios, fato que só era observado nos livros estrangeiros, porém no apêndice.

O último momento corresponde à “algebrização do conteúdo” e o “aparecimento” dos conceitos da Dinâmica das Rotações. É caracterizado principalmente pela eliminação dos aparelhos e aparatos físicos do conteúdo, baseando-se em descrições, a partir de gráficos, geometria e exemplos hipotéticos. Nesse momento, estamos no início do século XX, quando o ensino de Física, que exige esse tipo de abordagem, encontra eco nos cursos introdutórios das escolas politécnicas. São nesses cursos que a Física é “moldada” para preparar o aluno para as disciplinas de caráter superior, das engenharias e adquire o formato que vemos hoje no ensino superior (NICIOLI; MATOS, 2006).

A sequência didática proposta nos livros, diferente da forma como o conceito de Momento Angular foi construído historicamente, leva-nos a refletir sobre a possibilidade de as dificuldades de aprendizagem serem obstáculos didáticos de origem epistemológica, originados da necessidade de adaptação do saber sábio para o ensinável, com isso causando distorções conceituais no objeto ensinado. Astolfi (1990), aponta que, dependendo da Transposição Didática realizada, pode ocorrer o surgimento de obstáculos de aprendizagem de conceitos, cuja origem são saberes e estratégias de ensino adotados que, no contexto da sala de aula, dificilmente podem ser ajustados.

Dando sequência ao objetivo de identificar as origens das dificuldades de aprendizagem, entrevistamos 14 professores que ensinam ou ensinaram a Dinâmica das Rotações nas disciplinas de Física Básica, em cursos de Engenharia. Conforme apontado pela grande maioria dos professores, concluímos que a álgebra vetorial é vista como um empecilho, no sentido de que, os alunos não conseguem estabelecer uma relação entre o conceito de Momento Angular e sua representação espacial. A dificuldade apresentada aqui, deve-se ao fato de que o Momento Angular tem sua representação vetorial no espaço tridimensional, enquanto que outras variáveis da Dinâmica das Rotações como: Velocidade Angular e Aceleração Centrípeta podem ser exploradas no modo bidimensional.

Outro ponto relevante, na entrevista com os professores, e que nos forneceram indícios de obstáculos epistemológicos, é que quando

questionados sobre quais seriam os fatores estruturantes na aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque os professores relataram o uso de analogias entre as variáveis de translação e rotação.

No que diz respeito ao uso de analogias em Ciências ou no Ensino de Ciências, Bachelard alerta-nos que a utilização equivocada dessa forma de linguagem pode acentuar as concepções prévias dos alunos, e induzir a formação ou o reforço de obstáculos como, por exemplo, o substancialismo e realismo. As analogias, metáforas e imagens não devem assumir o papel de “ponte”, indicando uma espécie de continuidade entre os conhecimentos científicos, por exemplo, a analogia entre Torque e Força.

Identificamos que um dos fatores dificultantes no entendimento dos conceitos de Momento Angular e Torque deve-se à atitude dos professores em frente ao ato de ensinar. Ou seja, nenhum dos professores assumiu durante as entrevistas que possuem dificuldade em ensinar esses conceitos. Eles transferem todas as dificuldades encontradas no processo ao aluno e à falta de material didático (livro didático e experimentos).

Este trabalho não teria sentido sem a “voz” dos alunos sobre a dificuldade de “aprender” os conceitos de Momento Angular e Torque. O questionário aplicado e as entrevistas realizadas com os alunos da disciplina de Rotações, Oscilações e Ondas deram-nos indicativos de alguns obstáculos de aprendizagem:

- a) Compreensão de variáveis que necessitam da representação espacial aponta para uma dificuldade no entendimento do conceito de vetor e suas operações;
- b) Algebrização do Momento Angular, ou seja, a tendência que os alunos possuem de tratar grandezas vetoriais na forma escalar. Cabe ressaltar que essa dificuldade também foi apontada pelos professores, durante as entrevistas;
- c) Metodologia utilizada pelos professores: uso excessivo de fórmulas, poucos experimentos/demonstrações, exercícios repetitivos e descontextualizados;
- d) Organização didática do livro de Física básica também foi considerada um obstáculo na construção do conceito de Momento Angular e Torque. O livro didático apresenta os conteúdos de uma forma diferente de sua construção histórica, ou seja, como o saber sábio foi transformado em saber a ensinar (transposição didática).

E, finalmente, um ponto importante a ressaltar é que foi identificado que a matemática representa um obstáculo didático para os alunos. Esse fato foi constatado durante a entrevista, a partir das atitudes

dos alunos, que revelaram uma concepção de que em matemática tudo se responde ou constrói por meio de cálculos numéricos ou manipulações algébricas. Segundo Coimbra (2008), essa visão da matemática é alicerçada ao longo do ensino básico, por meio de atividades de ensino que favorecem em demasia as manipulações algébricas e cálculos numéricos. Isso justificaria o fato de os alunos do ensino básico não estarem cognitivamente preparados, ou seja, remetendo à hipótese da existência de obstáculos ontogenéticos.

Esta pesquisa não tem pretensão de esgotar a discussão sobre as dificuldades de aprendizagem em Dinâmica das Rotações, é apenas início de um longo caminho que busca a ampliação dessas discussões.

Uma das possibilidades é o desenvolvimento de um modelo de ensino- aprendizagem, que permita ir além da simples constatação da existência de concepções que diferem da visão científica dos alunos a respeito da Dinâmica das Rotações. As noções bachelardianas estabelecem uma base teórica para pensarmos a conceitualização em termos de um progresso epistemológico. Assim, é possível delinear um "caminho" para a conceitualização do Momento Angular e Torque, no qual o conhecimento dos obstáculos desempenha um papel essencial.

O cenário que se apresenta para o ensino da Dinâmica das Rotações, seguramente, em função do conjunto de conhecimentos apresentados neste trabalho, poderá auxiliar na reestruturação das atividades didáticas. A necessidade de impor um ambiente que privilegie elementos concretos é de extrema importância para potencializar a compreensão do caráter vetorial do Momento Angular e Torque facilitando o entendimento destes conceitos no livro didático.

O caminho que sugerimos é da elaboração de uma sequência didática experimental com atividades reais e virtuais, usando como ferramenta as tecnologias digitais (Realidade Aumentada) que nos possibilitam a modelagem de ambientes tridimensionais virtuais, que simulam as grandezas físicas envolvidas.

As representações virtuais são interação com o modelo mental, destinadas a conduzir as atividades experimentais virtuais simuladas e a recolher as informações pertinentes. Assim, a Realidade Aumentada aparece como uma dimensão do real, não voltada simplesmente a substituí-lo, mas aliada ao recurso da atividade experimental real.

De acordo com Paz (2007), a visualização dos fenômenos físicos não permite aos alunos compreenderem ou descobrirem o que os provoca, mas os predispõe e, às vezes, até os desafia a entender o que acontece. Essa predisposição para o entendimento cria uma troca de informações

por meio das quais o professor pode apresentar, os modelos teóricos necessários para a compreensão da Dinâmica das Rotações.

A definição de um modelo alternativo para a Dinâmica das Rotações, que atinja um bom desenvolvimento do processo cognitivo no aluno, de uma forma que se faça uma interação dele com o meio, é um processo lento, que exige muito estudo, cautela e persistência. A proposta de construção de uma sequência didática não deve ser entendida como uma simples mudança na ordem de apresentação dos tópicos da Dinâmica das Rotações, mas sim com base em uma Transposição Didática com uma abordagem sequencial, auxiliada pela reconstrução histórica dos conceitos envolvidos, em que se privilegia a visualização espacial nas atividades experimentais, fortalecida por atividades simuladas complementares à sequência experimental, contemplando as aplicações tecnológicas e as relações cotidianas vivenciais dos alunos.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Ricardo Pires de. **Instrução pública no Brasil (1500-1889)**. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2000. (Edição crítica Maria do Carmo Guedes). Tradução de. Antonio Chizzoti.

ALVARENGA, Beatriz; MÁXIMO, Antônio. **Curso de Física**. 3 v. São Paulo: Scipione, 2000.

ANDRADE, Beatrice L. de; ZYLBERSZTAJN, Arden; FERRARI, Nadir. As analogias e metáforas no ensino de ciências à luz da epistemologia de Gaston Bachelard. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 02, n. 2, p.1-11, dez. 2002. Disponível em [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1983-21172000000200182](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1983-21172000000200182). Acesso em: 31 de janeiro 2018.

ANDRADE, Fernando Albo. **El desarrollo de la tecnología: la aportación de la física**. 3 ed. México: Fondo de Cultura Económica, 2002.

ANDRADE, Joana de Jesus de; SMOLKA, Ana Luiza Bustamante. A construção do conhecimento em diferentes perspectivas: contribuições de um diálogo entre Bachelard e Vigotski. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 15, n. 2, p.245-268, 2009.

ARRUDA, Sergio de Mello; VILLANI, Alberto. Mudança conceitual no ensino de ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 2, n. 11, p.88-99, 1994.

ASTOLFI, Jean Pierre; DEVELAY, Michel. **A Didática das Ciências**. 5. ed. Campinas: Papirus, 1990.

BA, Cissé. Vecteurs au lycée: difficile articulation entre mathématiques et physique. **Nouveaux cahiers de la recherche en éducation**, v. 14, n. 1, p.71-83, 2011.

BACHELARD, Gaston. **A formação do Espírito Científico: Contribuição para uma psicanálise do conhecimento**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. Tradução de Estela dos Santos Abreu.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.

- BAROWY, William; LOCHHEAD, Jack. Abstract Reasoning in Rotational Physics. **Science Education Research: National Science Foundation**, Washington, p.2-11, 1980.
- BARRUEL, Etienne. **La Pysique réduite en tableaux raisonnés au programme du cours de physique fait à l'École Polytechnique**. Paris, 1798.
- BATISTA, I. L. O ensino de teorias físicas mediante uma estrutura histórico- filosófica. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 10, n. 3, p. 461-476, 2004.
- BORRELLI, Adriana. **Angular momentum between physics and mathematics**. Mathematics Meets Physics, Frankfurt, p.395-440, 2011.
- BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Física**, Brasília, DF, 2002.
- BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques**. 1983. Disponível em: <<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516581/fr>>. Acesso em: 21 dezembro. 2015.
- BROUSSEAU, Guy. **Obstacles épistemologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique**. 1986. Disponível em: <<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516586/fr>>. Acesso em: 06 janeiro. 2016.
- CAPARRINI, Silvio. The discovery of the vector representation of moments and angular velocity. **Archive for history of exact sciences**. v. 56, p.151-181, 2002.
- CARRASCOSA, Javier; GIL PÉREZ, Daniel. Concepciones alternativas en mecánica. **Enseñanza de Las Ciencias**, Barcelona, v. 3, n. 10, p.314-328, 1992.
- CHAVES, Alaor. **Física Básica**, v. 1, LTC, Rio de Janeiro, 2007.
- CHERVEL, André. As humanidades no ensino. **Educação e Pesquisa**, v.2, p.149-170, 1999

CHEVALLARD, Yves. **La Transposición Didáctica: Del Saber Sábido Al Saber Enseñado**. 3. ed. Buenos Aires: Aique grupo Editor, 2005.

CLEMENTE, Alécio; PINHO-ALVES, José. Obstáculos na Aprendizagem de Rotações. **Ata Eletrônica do XVI SNEF**. Rio de Janeiro, 2005.

CLEMENT, John Students' preconceptions in introductory mechanics. **American Journal Physics**, v. 50, n. 1, p.66-71, 1982.

CLOSE, Hunter G; HERON, Paula R. L. Student understanding of the angular momentum of classical particles. **American Journal of Physics**. v.79, n. 10, p.1068-1078, 2011.

CLOSE, Hunter G; GOMES, Luanna S.; HERON, Paula R. L Student understanding of the application of Newton's second law to rotating rigid bodies. **American Journal of Physics**. v.81, n. 6, p.458-470, 2013.

CLOSSET, Jean-Louise. Les obstacles à l'apprentissage de l'électrocinétique, **Bulletin de l'Union des Physiciens**, n. 716, 931-950, 1989.

COIMBRA, Jarbas Lima. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear**. 2008. 78f. Dissertação (Mestrado em educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

COSTA, Nelson Lage; PIVA, Tereza Cristina de Carvalho. **A História da Matemática no Brasil – O desenvolvimento das noções do Cálculo, da Geometria e da Mecânica no século XIX**. Livro de anais do Congresso Scientiarum Historia IV, Rio de Janeiro, Brasil 2011.

DE LA PENHA, Guilherme Marcos. Sobre as histórias da história da Mecânica do século XVIII. **Revista do Serviço Público**, v. 39, n. 2, p. 137-154, 2017.

DION, Sonia Maria. **Vetor velocidade angular**: um estudo de aspectos tridimensionais envolvidos em sua conceituação. 1992. 122f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física e Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1992.

DUGAS, R. **A history of Mechanics**, Editions du Griffon, Neuchatel – Switzerland, 1955.

DUMAN, İsmail, DEMIRCI, Neset; ŞEKERCİOĞLU, Ayse Gül. University students ‘difficulties and misconceptions on rolling, rotational motion and torque concepts. **International Journal on New Trends in Education & their Implications** (IJONTE), v. 6, n.1, 2015.

EULER, Leonard. De momentis virium respectu axis cuiuscunque inveniendis; ubi plura insignia symptomata circa binas rectas, non in eodem plano sitas, explicantur, **Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 7, p. 191–204 1793a,. Disponível em: < <https://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E658.pdf> > Acesso em: 21 de dezembro de 2015.

\_\_\_\_\_. Methodus facilis omnium virium momenta respectu axis cuiuscunque determinandi, **Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 7, p. 205–214, 1793b. Disponível em: < <https://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E659.pdf> > acessado em 12 de janeiro de 2016.

\_\_\_\_\_. Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi. **Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae**, São Petesburgo, v. 20, p.208-238, 1776.

\_\_\_\_\_. Découverte d’un nouveau Principe de Mécanique. **Mémoires de L’académie Des Sciences de Berlin**, Berlin, v. 6, p.185-177, 1752.

FAUCONNET, Serge. **Étude de résolution de problèmes. Quelques problèmes de même structure en physique**. 1981. 120f. Tese (Doutorado) - Curso de Enseignement de La Physique, Université Paris Diderot, Paris, 1981.

FIORRENTINI Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil. **Revista Zetetikê**, Ano 3, n. 4, p.1-35, 1995.

FLICK, Uwe. Entrevista episódica. In: GASKEL, G.; BAUER, M. W. (Org.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. Petrópolis: Vozes, 2002.

FRANCOUER, Louis Benjamin. **Tratado de mecânica elemental, para los discípulos de la Escuela Politécnica de Paris, ordenado según los métodos de R. Prony.** Madri: Imprenta Real, 1803.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOMES, M. G. **Obstáculos na aprendizagem matemática:** identificação e busca de superação nos cursos de formação de professores das séries iniciais. 2006, 161f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

GOMES, Henrique José Polato; OLIVEIRA, Odisséa Boaventura de. Obstáculos epistemológicos no ensino de ciências: um estudo sobre suas influências nas concepções de átomo. **Ciências & Cognição**, Rio de Janeiro, v. 12, nov., 2007. Disponível em: <<http://www.cienciasecognicao.org/pdf/v12/m347194.pdf>>. Acesso em: 07 fevereiro de 2018.

GRAF (GRUPO DE REELABORAÇÃO DO ENSINO DE FÍSICA). **Física 1: Mecânica** /GRAF. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1999.

GRESSLER, Lori Alice. **Introdução à pesquisa: projetos e relatórios.** 2 ed. rev. atual. São Paulo: Loyola, 2004, p. 295.

GONZÁLES, A.M.. La Física em los manuales escolares: um médio resistente a la renovación (1845-1900). **História de la Educación: Revista interuniversitaria**, v.19, p.31-93.2000.

GUIMARÃES, Luís Alberto; FONTE BOA, Marcelo. **Física: Mecânica.** Niteroi: Futura, 2001.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física.** 4 v. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2012.

HAMILTON, William Rowan. Additional Applications of the Theory of Algebraic Quaternions. **Proceedings Of The Royal Irish Academy**, Dublin, v. 3, p.51-60, 1847.

HAYWARD, Robert Baldwin. On a direct method of estimating velocities, accelerations, and all similar quantities with respect to axes moveable in any manner in space, with applications. in: **Transactions of the Cambridge Philosophical Society** v. 10, 1856. Disponível em: <https://archive.org/stream/transactionsofca10camb#page/n13/mode/2up> Acesso em: 21 de dezembro de 2015.

HAÛY, René Just. **Tratado Elementar de Physica**. Brasil: Impressão Régia. 1810.

KITZINGER, Jenny. Focus groups with users and providers of health care. **Qualitative research in health care**, v. 2, p. 20-9, 2000.

LAGRANGE, Joseph-Louis. **Méchanique Analytique**. 3. ed. 1853. Disponível em: < <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k862625> > Acesso em: 21 de dezembro de 2015.

LEITE, Vanessa Mendes; SILVEIRA, Hélder Eterno da; DIAS, Silvano Severino. Obstáculos epistemológicos em livros didáticos: um estudo das imagens de átomos. **Candombá**. Revista Virtual, v. 2, n. 2, p. 72-79, jul/dez 2006.

LORENZ, K. M. Os livros didáticos e o ensino de ciências na escola secundária brasileira no século XIX. **Ciência e Cultura**. São Paulo, v. 3, n. 38, p. 426-435, 1984.

\_\_\_\_\_. Ação de instituições estrangeiras e nacionais no desenvolvimento de materiais didáticos de ciências no Brasil: 1960-1980. **Revista Educação em Questão**, UFRN/Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Natal, RN, v.31, n. 17, p. 7-23.2008.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MacCULLAGH, James. **On the rotation of a solid body round a fixed point being an account of the late professor MacCullagh's lectures on that subject, compiled by the rev. Samuel Haughton**. Dublin: (Hodges, Figgies & Co, Dublin and Longmans, Green & Co; London, 1849.) Reprint in Mac Cullagh, J., Collected works, 1880.

MARTINS, André Ferrer Pinto. **Concepções de estudantes acerca do conceito de tempo: uma análise à luz da epistemologia de Gaston Bachelard.** 2004. 217f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

MENIGAUX, Jacqueline. Students' reasonings in solid mechanics. **Physics Education**, v. 29, n. 4, p.242-246, 1994.

MELO, Ana Carolina. Staub. **Contribuições da epistemologia histórica de Bachelard no estudo da evolução dos conceitos da óptica.** 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde.** 7. ed. São Paulo: Hucitec, 2000.

MIRAS, Mariana. Um ponto de partida para aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In: COLL, C. et al. **O construtivismo em sala de aula.** São Paulo: Editora Ática, 2010.

MOTTA, Jehovah. **Formação do Oficial do Exército. Rio de Janeiro:** Companhia brasileira de artes gráficas, 1976.

MORGAN, David. L. **Focus group as qualitative research.** London: Sage, 1997.

McCLOSKEY, M.; CARAMAZZA, A.; GREEN, B. Curvilinear Motion in the Absence of External Forces: Naive Beliefs About the Motion of Objects. **Science**, v. 210, n. 4474, p.1139-114, 1980.

NEWTON, Isaac. **Princípios matemáticos de la filosofía natural:** Libro I. Madri: Alianza Editorial, 1987.

NICIOLI JUNIOR, Roberto. B.; MATTOS, Cristiano. R. de. As diferentes abordagens do conteúdo de Cinemática nos livros didáticos do ensino de Ciências brasileiro (1810-1930). **Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias**, v. 2, n. 7, 2008a.

NICIOLI JUNIOR Roberto. B; MATTOS Cristiano. R A disciplina e o conteúdo de cinemática nos livros didáticos de física do Brasil (1801 a

1930). **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 13, n. 3, p. 275-298, 2008b

NICOLI JUNIOR, Roberto. B. ; MATTOS Cristiano R. A disciplina Física no ensino secundário entre os anos de 1810 e 1930. En: **Anais VI Encontro Nacional de Pesquisa em Ciência e Educação**. Florianópolis: ENPEC. 2007.

\_\_\_\_\_. Uma análise de livros didáticos de Física das décadas de 50 e 60. In: **Encontro de Pesquisa em Ensino de Física**, 2006. Caderno de resumos. Londrina. SBF: São Paulo, 2006.

NUSSENZVEIG, Moysés Herch. **Curso de física básica**. 4 v. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa**. 2. ed. Tendências em Educação Matemática 3. Autêntica, 2002.

PARAIZO, Paulo Lopes Brandão. **A Construção do Conhecimento nas Ciências geológicas**: Contribuições do pensamento de Gaston Bachelard. 2004. 120f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Filosofia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

PARELLA, Alexandro. **Huellas uruguayas em la enseñanza de la Física**: Educación en Física, v.3, p. 3-33. 2005

PATTON, Michael Quinn. **Qualitative evaluation and research methods**. SAGE Publications, inc, 1990.

PAZ, Alfredo. Müllen da. **Atividades Experimentais e Informatizadas: Contribuições para o Ensino de Eletromagnetismo**. 2007. 228f. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

PERRIN GLORIAN, Marie Jeanne. Utilização da noção de obstáculo na didática da matemática. Tradução de Vincenzo Bongiovanni e Saddo Ag Almouloud. **Caderno de Educação Matemática**. v. 2. PUC-SP, 1995.

PEÑALBA, Miriam; RIO, Teresa del. ¿Qué comprenden los estudiantes universitarios cuando enseñamos el Momento Angular? **Enseñanza de Las Ciencias-num.extra**, Barcelona, p.1-5, 2005.

PERUCA, Eligio. **Física General y Experimental**. Barcelona.Editorial Labor S.A.1943

PIETROCOLA, Maurício. et al. As ilhas de racionalidade e o saber significativo: o ensino de ciências através de projetos. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 2, n. 1, 2008.

PIETROCOLA, Maurício. A matemática como estruturante do conhecimento físico. **Caderno brasileiro de ensino de física**, v. 19, n. 1, p. 93-114, 2002.

PINHO-ALVES, José. **Atividades experimentais: do método à prática construtivista**. 2000, 302f. Tese (Doutorado) – Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

PINHO-ALVES, José; PINHEIRO, Terezinha de Fátima; PIETROCOLA, Maurício. A eletrostática como exemplo de transposição didática. In: PIETROCOLA, Maurício. (Org.). **Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia em uma concepção integradora**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

POINSON, Louis. Mémoire sur la composition des moments et des aires, **Journal de l'École Polytechnique** 6, cahiers 13, p. 182-205,1806.

\_\_\_\_\_. **Outlines of a new theory of rotatory motion**. Londres: Pitt Press, Cambridge, 1834.

PRATT, John Henry. **The mathematical principles of mechanical philosophy**. Cambridge: J & J.J Deighton, 1836. Disponível em: <[https://books.google.ch/books?id=OitgCKfoloIC&printsec=frontcover&hl=de&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ch/books?id=OitgCKfoloIC&printsec=frontcover&hl=de&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)>. Acesso em: 10 out. 2016.

PROFFITT, Dennis R.; GILDEN, David L. Understanding natural dynamics. **Journal Of Experimental Psychology: Human Perception and Performance**, v. 15, n. 2, p.384-393, 1989. American Psychological Association (APA).

RANKINE, William John Macquorn. **A manual of applied mechanics**. London: R. Griffin.1872

RAMALHO JUNIOR, Francisco; FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Toletto. **Os fundamentos da Física**. v. 1. 7 ed. São Paulo: Moderna, 1999.

RAMOS, Vitor (Org.). **Clássicos Garnier: Platão, A República**. Tradução de J.Guinsburg. v. 1. São Paulo: Difusão Europeia do Livro, 1965.

REALE, Giovanni; ANTISERI, Dario. **História da filosofia: Do humanismo a Descartes**. Tradução de Ivo Storniolo. v. 3. São Paulo: Paulus, 1991.

RICHARDSON, Roberto Jarry. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. 1. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

RIMOLDINI, Lorenzo G.; SINGH, Chandralekha. Student understanding of rotational and rolling motion concepts. **Physical Review Special Topics - Physics Education Research**. v. 1, n. 1, p.0101021-0101029, 2005.

ROSSI, Paolo. **O nascimento da Ciência moderna na Europa**. Tradução de Antônio Angonese. Bauru: Edusc, 2001.

ROTH, Wolff-Michael; LUCAS, Keith. B; McROBBIE, Campbell. J. Students talk about rotational motion within and across contexts, and implications for future learning. **International Journal of Science Education**, v. 23, n. 2, 2001.

ROZIER, S.; VIENNOT, Laurence. Students' reasonings in thermodynamics. **International Journal Of Science Education**, v. 13, n. 2, p.159-170, 1991.

SAMPAIO, Gladis Maria D'Elia. **A História do Ensino de Física no Colégio Pedro II de 1838 até 1925**. 2004. 164p.Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SAMPAIO, Gladis Maria D'Elia; SANTOS, Nadja Paraense dos. Os Livros Didáticos de Física de Química nos primeiros dezoito anos do

Colégio de Pedro II (1838-1856). **Atas do VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências. 2007**. Florianópolis. Recuperado de <http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/vienpec/CR2/p42.pdf>.

SANTOS, Maria E. V. M dos. As concepções alternativas dos alunos à luz da epistemologia bachelardiana. In: **Mudança conceitual em sala de aula, um desafio pedagógico**. Lisboa/POR: Livros Horizonte, 1991.

SCHLIEMANN, Ana Lúcia; SANTOS, Clara Melo dos; COSTA, Solange Canuto da. Da compreensão do sistema decimal à construção de algoritmos. In: ALENCAR, E. (Org.). **Novas contribuições da psicologia aos processos de ensino e aprendizagem**. 4.ed. São Paulo: Cortez, 2001.

SILVA, Laurielza Christinne Barros da. **O discurso dos professores de física de Maringá e região sobre a abordagem do Momento Angular e do Torque no ensino médio**. 2012. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2012.

SILVA, Cibele. Celestino; MARTINS, Roberto. Andrade. **A história da ciência ajudando a desvendar algumas dificuldades conceituais no ensino de produto vetorial**. Atas do VIII Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, CD-ROM, Águas de Lindóia/SP, 2002.

SOUZA, Karina Aparecida de Freitas Dias; PORTO, Paulo Alves. **Educação Superior em Química entre texto e imagem: tendências de ensino a partir de livros didáticos de 1900 a 1939**. In: VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – VII ENPEC. Florianópolis: UFSC, p. 1-13, 2009

SPARAVIGNA, Amelia Carolina. A Historical Discussion of Angular Momentum and its Euler Equation. **International Journal of Sciences**, v. 4, n. 7 p.34-38, 2015.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Makron Books, 1987.

TALIM, Sergio Luiz. Dificuldades de aprendizagem na terceira lei de Newton. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 16, n. 2, p. 143-153, 1999.

TIPLER, Paul Allen; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 3 v. 6. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2011.

TRIVIÑOS, Augusto N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987.

TRUESDELL, Clifford Ambrose. **Ensayos de Historia de la Mecánica**. Madri: Editorial Tecnos S. A, 1968.

TURA, Maria de Lourdes Rangel. A observação do cotidiano escolar. In: ZAGO, Nadir; CARVALHO, Marília Pinto de; TEIXEIRA, Rita Amélia (Org.). **Itinerários de pesquisa: perspectivas qualitativas em sociologia da educação**. 1. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

ZAMBON, Luciana Bagolin; TERRAZZAN, Eduardo Adolfo. Analogias produzidas por alunos do ensino médio em aulas de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n.1, 2013.

ZYLBERSZTAJN, Arden. Concepções espontâneas em Física: exemplos em dinâmica e implicações para o ensino. **Revista de Ensino de Física**, São Paulo, v. 2, n. 5, p.3-16, 1983.

WATSON, William. **Curso de Física**. 2ª ed. Barcelona: Editora Labor, S. A. 1932

WUO, Wagner.. **A física e os livros: uma análise do saber físico nos livros didáticos adotados para o ensino médio**. v.1. São Paulo: EDUC – FAPESP, 2000.

YIN, Robert. K. **Estudo de caso – planejamento e métodos**. 2 ed. Porto Alegre: Bookman. 2001.

## APÊNDICE A – Termo de consentimento livre e esclarecido

### ***Termo de consentimento Livre Esclarecido***

*Você está sendo convidado, como voluntário, a participar de uma pesquisa (questionário) que investiga em quais conceitos, presentes no estudo da Dinâmica das Rotações (p. ex. Torque, Momento Angular), que os acadêmicos universitários sentem maior dificuldade de aprendizado. Solicitamos por gentileza que leia este documento e esclareça dúvidas antes de consentir em participar.*

*Objetivo do estudo:* *Identificar as dificuldades de aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque.*

*Procedimentos:* *Ao participante será solicitado responder um questionário sobre a Dinâmica das Rotações. O tempo destinado a responder ao questionário é estimado em 30 minutos.*

*Riscos e benefícios do estudo:* *A participação no estudo não oferece riscos adicionais à sua saúde, além dos que você está submetido, quando responde a um questionário por escrito, ou quando usa o seu computador pessoal. Não há benefício direto na participação do estudo, mas a participação contribuirá para o êxito desta pesquisa.*

*Confidencialidade:* *Ficará resguardado ao pesquisador responsável, e protegido de revelação não autorizada, o uso das informações recolhidas.*

*Voluntariedade:* *A recusa do indivíduo em participar do estudo será respeitada, podendo a coleta ser interrompida a qualquer momento, a critério do indivíduo participante.*

*Novas informações:* *A qualquer momento, o participante poderá requisitar informações sobre o estudo, através de contato com o pesquisador*

### CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO

Eu, \_\_\_\_\_, RG: \_\_\_\_\_, fui informado (a) dos objetivos da pesquisa acima, de maneira clara e detalhada, e esclareci minhas dúvidas. Sei que, em qualquer momento, poderei solicitar novas informações e mudar minha decisão se assim o desejar. O orientador José de Pinho Alves Filho e o Doutorando José Arthur Martins certificaram-me de que todos os dados dessa pesquisa serão confidenciais, dentro do que preconiza na Resolução CNS 466/12, 12/09/2012 e complementares. Em caso de dúvidas poderei chamar a estudante orientador(a) ao telefone (54) 3218-2100, ramal:2757, email: jamartin@ucs.br, ou no endereço R. Francisco Getúlio Vargas, 1130; Bloco G, sala 202A CEP 95070-560 - Caxias do Sul. Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma via

*deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.*

*Caxias do Sul, 07 de março de 2017*

---

*Assinatura do participante*

## **APÊNDICE B – Protocolo: entrevista com os professores**

### **Parte 1: “QUEBRA GELO”**

- 1) a) Há quanto tempo você é professor de FÍSICA?
- b) Você já trabalhou com o de conteúdo de Física Básica? Quantos semestres?

### **Parte 2: dificuldades de ensinar**

- 2) A maioria dos professores apontam a existência na dificuldade de ensinar a Dinâmica das Rotações. Na sua opinião, quais seriam as dificuldades, ou entraves, que você sente para ensinar os conceitos de Momento Angular e Torque?
- 3) Quais as estratégias de ensino que você utiliza para lecionar o Momento Angular e Torque?. Esta proposta tem funcionado? Por que você acha adequada?

### **Parte 3: dificuldades de aprendizagem**

- 4) Do seu ponto de vista, quais seriam as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem dos conceitos de Momento Angular e Torque?
- 5) Os alunos entendem a fenomenologia envolvida na dinâmica das rotações?
- 6) Quais os conceitos da Mecânica Newtoniana são fundamentais para o ensino do Momento Angular e Torque? Por quê?
- 7) Quais os conceitos matemáticos são fundamentais para o ensino do Momento Angular e Torque? Por quê?



## APÊNDICE C – Questionário - estudantes

*Caros Acadêmicos!*

*Esta atividade faz parte de uma pesquisa para avaliar as dificuldades de entendimento dos conceitos de Momento Angular e Torque. Por isso, gostaria de pedir que respondam o questionário com a maior seriedade possível sem consultar os livros e os colegas.*

*Desde já agradeço sua participação e colaboração.*

*Prof. Jose Arthur Martins*

### **ORIENTAÇÕES:**

*Marque um “x” na resposta que, no seu entendimento, está correta. Caso seja necessário, para as justificativas, use o verso da folha. Indique o número da questão.*

1) Você está na parte superior de um plano inclinado e larga um cilindro sólido e um aro simultaneamente, qual é a condição para o aro chegar primeiro na base do plano?

- a) A massa do aro deve ser igual à massa do cilindro
- b) O raio do aro deve ser igual ao raio do cilindro
- c) A massa do aro deve ser igual à massa do cilindro e o raio do aro deve ser igual ao raio do cilindro
- d) O aro sempre é mais lento independente dos valores da massa e do raio.

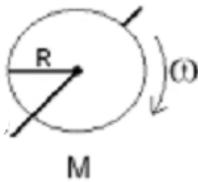
**Qual justificativa você daria para a sua escolha?**

2- Quando você chega ao laboratório de Física, pela manhã, você depara com o seguinte experimento: Uma roda de Ferro e um disco de Alumínio de mesma massa e raio girando com a mesma velocidade angular, como mostra a figura abaixo. Qual deles terá maior Energia Cinética Rotacional?

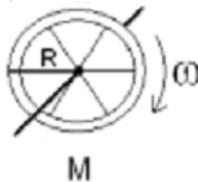
- a) O disco de Alumínio
- b) A roda de Ferro

c) As energias são iguais

Disco de Alumínio



Roda de Ferro

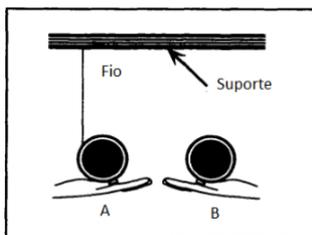


3) O Professor de Física propõe para você o seguinte desafio: Suponha dois carretéis dispostos, conforme a figura abaixo. Ambos os carretéis são liberados do repouso ao mesmo instante. Qual carretel atingirá o chão primeiro?

a) O carretel A

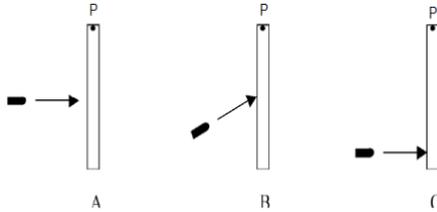
b) O carretel B

c) Ambos os carretéis chegaram ao mesmo tempo.



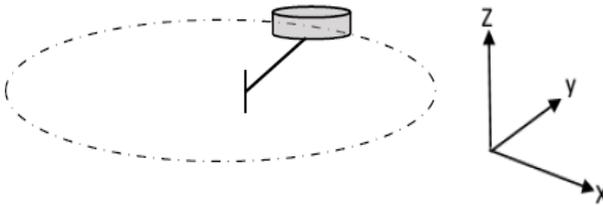
**Qual justificativa você daria para a sua escolha?**

4) Você foi convidado, pelo seu professor, para assistir a uma demonstração, em que se usa um pêndulo Físico, o qual será impactado por uma bala lançada por um artefato qualquer. O responsável em realizar o procedimento propôs três situações que são representadas na figura abaixo. Após a realização da demonstração, o professor faz a seguinte pergunta: Observando que depois do impacto a bala e a haste permaneceram unidas, em qual das situações o Momento Angular é maior ?



- a) A  
 b) B  
 c) C  
 d) O Momento Angular é o mesmo em todas as situações

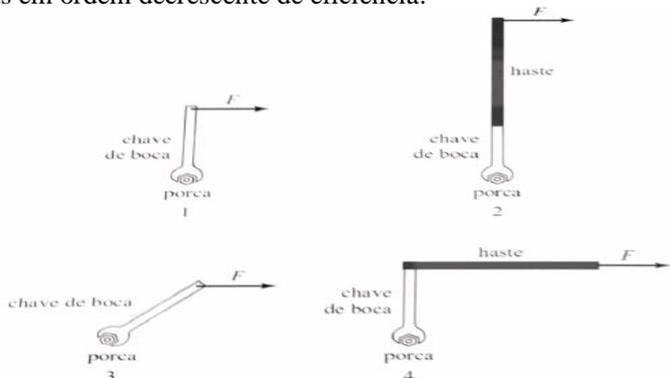
5) Você está girando um objeto com velocidade uniforme, como mostrado na figura abaixo. Existe uma direção particular que pode ser associada com o vetor velocidade angular?



- a) Sim,  $\pm x$   
 b) Sim,  $\pm Y$   
 c) Sim,  $\pm z$   
 d) Não, a escolha é realmente arbitrária.

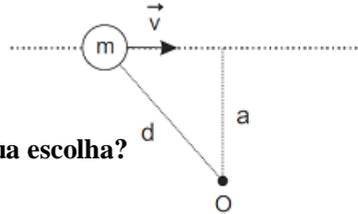
6) Quando você usa uma chave de boca para tentar soltar uma porca enferrujada, qual das situações abaixo é a mais efetiva para afrouxar a porca? Liste-as em ordem decrescente de eficiência:

- a) 1,2,3,4  
 b) 4,3,2,1  
 c) 2,1,4,3  
 d) 3,4,1,2



7) Você está estudando para a prova de Física e se depara com a seguinte pergunta: Um corpo movendo-se em linha reta com velocidade constante (MRU), conforme a figura abaixo, possui Momento Angular em relação ao ponto O?

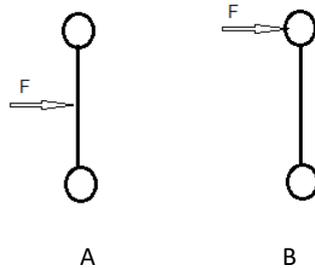
- a) Sim
- b) Não
- c) Impossível de determinar



**Qual justificativa você daria para a sua escolha?**

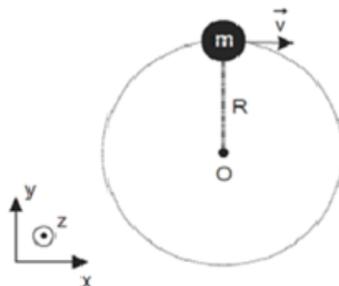
8) Se você aplicar uma força  $F$  a um haltere durante um mesmo intervalo de tempo. Em qual das situações abaixo ele vai adquirir maior Energia Mecânica.

- a) A
- b) B
- c) As duas adquirem a mesma energia



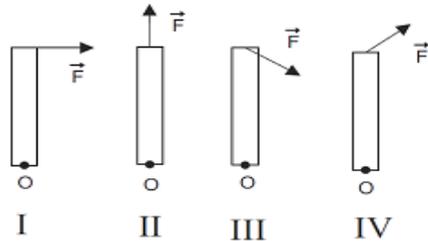
9) No fim de uma aula de Física, o professor lança um desafio para a turma: Suponha uma esfera executando um movimento circular uniforme, conforme a figura abaixo. Considere os eixos  $x$  e  $y$  no plano da folha e o eixo  $z$  apontando para você. O que você pode afirmar sobre os vetores Torque e Momento Angular da esfera?

- a)
- b)
- c)
- d)

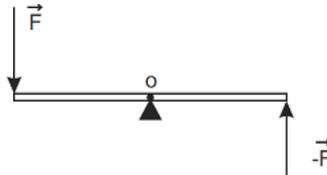


10) Sobre a extremidade de uma barra é aplicada uma Força de módulo  $F$  de diversas maneiras, como mostram as figuras. Na sua opinião, em qual das situações o torque produzido pela Força tem maior valor?

- a) I  
b) II  
c) III  
d) IV



11) Se você aplicar duas Forças iguais e de sentidos opostos em uma gangorra, de acordo com a figura abaixo, a que conclusão você chegaria?



- a) A resultante dos torques em relação ao ponto O das forças é não nula e, portanto, a barra gira com aceleração angular constante.  
b) A resultante dos torques em relação ao ponto O das forças é nula e, portanto, a barra gira com velocidade angular constante.  
c) A resultante dos torques em relação ao ponto O das forças é nula e, portanto, a barra não gira.  
d) A resultante das forças sobre a barra é nula e, portanto, a barra não gira.



## **APÊNDICE D – Protocolo: entrevista com os alunos**

### **Parte 1: “QUEBRA GELO”**

- 1) a) Qual o curso de Engenharia que você faz?
- b) Você frequenta o núcleo de apoio ao ensino de Física?

### **Parte 2: dificuldades de aprendizagem**

- 2) Como são as aulas de Rotações, Oscilações e Ondas?
- 3) Quais as maiores dificuldades para o entendimento do Conceito de Momento Angular e Torque?
- 4) Você utiliza o livro didático sugerido na bibliografia básica para estudar?
- 5) No seu ponto de vista, quais conceitos da Mecânica Newtoniana são fundamentais para o ensino do Momento Angular e Torque? Por quê?