IV

Companheiro®

(11)

1964 - claus ivo doering

MATEMÁTICA

- álgebra - geometria - 4º série

Gaus ho Doering

Werner Henning Eberle

Carlos Franke

Horst Alois Kessler

Ijuí, 24 de abril de 1964

J- Problemas aplicando as propriedades das equações:

1. Dividir o número 10 em 2 partes tais que a soma da 1ª com o quadrado da 2ª seja 16.

Cálculo:

1ª parte = x 2ª parte: $(10-x)$

$x + (10-x)^2 = 16$ $x + (10-x)(10-x) = 16$

$x + 100 - 20x + x^2 = 16$ $x + 100 - 20x + x^2 - 16 = 0$

$x^2 + 100 - 16 - 20x + x = 0$ $x^2 + 84 - 19x = 0$

$$x^2 - 19x + 84 = 0$$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 336}}{2}$

$x = \frac{19 \pm \sqrt{25}}{2}$ $x = \frac{19 \pm 5}{2}$

$x' = \frac{19+5}{2}$ $x' = \frac{24}{2}$ $x' = 12$

$x'' = \frac{19-5}{2}$ $x'' = \frac{14}{2}$ $x'' = 7$

1ª parte = 7 = x

2ª parte = 3 = $(10-x) = 10 - 7$

Resposta: Os segmentos são $\boxed{7 \text{ e } 3}$

Prova:

$7 + 3^2 = 16$? $7 + 3 = 10$?

$7 + 9 = 16$! $10 = 10$!

2. Achar 2 números pares e consecutivos cujo produto seja 120

25.4. Cálculo:

x = 1º número $(x+2)$ = 2º número

$x \times (x+2) = 120$ $x^2 + 2x = 120$

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

$x' = 12$ $x'' = -10$

Resposta: Os números são $\boxed{+12 \text{ e } +10}$ ou $\boxed{-12 \text{ e } -10}$

Prova:

$+12 \times +10 = +120$ $-12 \times -10 = +120$

$(+12) - (+10) = +2$ $(-12) - (-10) = -2$

3. Procurar 2 números ímpares e consecutivos cujo produto seja 323.

Cálculo:

$x =$ 1º número $(x - 2) =$ 2º número

$x \times (x - 2) = 323$ $x^2 - 2x = 323$

$$x^2 - 2x - 323 = 0$$

$x' = 19$ $x'' = -17$

Resposta: Os números são $\boxed{+19 \text{ e } +17}$ ou $\boxed{-19 \text{ e } -17}$

Prova:

$(+19) \times (+17) = +323$ $(-19) \times (-17) = +323$

$(+19) - (+17) = +2$ $(-19) + (-17) = -2$

4. Achar um número positivo tal que o seu quadrado o exceda de 56

Cálculo:

$x^2 - 56 = x$ $x + 56 = x^2 \ (-1)$

$-x - 56 = -x^2$ $x^2 - x - 56 = 0$

$$x^2 - x - 56 = 0$$

$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{56}{1}}$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 + 224}{4}}$ $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{225}$

$x = \frac{1 \pm 15}{2}$ $x'' = \frac{1 - 15}{2}$ $x'' = -7$

$x' = \frac{1 + 15}{2}$ $x' = \frac{16}{2}$ $x' = +8$

Resposta: o número é $\boxed{8}$

Prova: $x + 56 = x^2$?

$8 + 56 = 64$

$64 = 64$!

5. Qual é o número que se deve adicionar a cada fator do produto (5×13) para que êste produto aumente de 175 unidades.

Cálculo:

$5 \times 13 = 65$

$(5 + x) \times (13 + x) = 65 + 175$

$65 + 18x + x^2 = 240$

$x^2 + 18x + 65 - 240 = 0$

$x^2 + 18x - 175 = 0$

$x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$ $x = -9 \pm \sqrt{81 + 175}$

$x = -9 \pm \sqrt{256}$ $x = -9 \pm 16$

$x' = -9 + 16 = +7$ $x'' = -9 - 16 = -25$

Resposta: O número é $\boxed{+7}$ ou $\boxed{-25}$

Prova: $5 + 7 \times 13 + 7 = 65 + 175$!

$12 \times 20 = 240$

$240 = 240$!

$5 + (-25) \times 13 + (-25) = 65 + 175$?

$-20 \times -12 = 240$

$240 = 240$!

6. Se aumentarmos a base de um quadrado de 6 metros e diminuirmos a altura de 4 m., obteremos um retângulo de 30 ares. Calcular o lado do quadrado:

29.4.

Cálculo: $1a = 100 \ m^2 = 10 \times 10 \ m$

$(x+6)(x-4) = 3000 \ m^2$

$x^2 + 2x - 24 = 3000$ $\quad$ $x^2 + 2x - 24 - 3000 = 0$

$x^2 + 2x - 3024 = 0$

$x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$ $\quad$ $x = -1 \pm \sqrt{1 + 3024}$

$x = -1 \pm \sqrt{3025}$ $\quad$ $x = -1 \pm 55$

$x' = 54 \ m$ $\quad$ $x'' = -56 m$

Resposta: 54 m de lado.

Prova: $(54+6)(54-4) = 3000 \ m^2$?

$60 \times 50 = 3000$

$3000 = 3000$!

---

7. Qual é o polígono que tem 35 diagonais

Cálculo:

$d = \frac{n(n-3)}{2}$ $\quad$ $35 = \frac{n^2 - 3n}{2}$

$\frac{70}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$ $\quad$ $70 = n^2 - 3n$

$n^2 - 3n - 70 = 0$

$n = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $\quad$ $n = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 70}$

$n = \frac{3}{2} \pm \sqrt{9 + 289}$ $\quad$ $n = \frac{3 \pm 17}{2}$

$n' = +10$ $\quad$ $n'' = -7$

Resposta: o polígono é $\boxed{\text{decágono}}$

Prova: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ $\quad$ $35 = \frac{10(10-3)}{2}$?

$35 = \frac{10(7)}{2}$ $\quad$ $35 = \frac{70}{2}$ $\quad$ $35 = 35$!

---

8. A diferença entre um número e 50 vêzes o seu inverso é 5. Achar o número.

Cálculo: $\frac{x}{1} - 50 \frac{1}{x} = 5$

$\frac{x}{1} - \frac{50}{x} = \frac{5}{1}$ $\quad$ $\frac{x^2}{x} - \frac{50}{x} = \frac{5x}{x}$

$x^2 - 50 - 5x = 0$ $\quad$ $x^2 - 5x - 50 = 0$

$x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ $\quad$ $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 50}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{225}$ $\quad$ $x = \frac{5 \pm 15}{2}$

$x' = 10$ $\quad$ $x'' = -5$

Resposta: o número é $\boxed{10}$ ou $\boxed{-5}$

Prova: $10 - \frac{50}{10} = 5$? $\quad$ $10 - 5 = 5$ $\quad$ $5 = 5$!

$-5 - \frac{50}{5} = 5$? $\quad$ $-5 + 10 = 5$ $\quad$ $5 = 5$!

---

9. Achar um número positivo tal que o seu quadrado exceda a sua 3ª parte de 78.

30.4. Cálculo: $\frac{x^2}{1} - \frac{x}{3} = \frac{78}{1}$ $\quad$ $\frac{3x^2}{3} - \frac{x}{3} = \frac{234}{3}$

$3x - x - 234 = 0$

$x' = 9$ $\quad$ $x'' = -8 \ ^2/_3$

Resposta: O número é $\boxed{9}$

Prova:

$\frac{x^2}{1} - \frac{x}{3} = \frac{78}{1}$? $\quad$ $\frac{81}{1} - \frac{9}{3} = \frac{78}{1}$

$243 - 9 = 234$ $\quad$ $234 = 234$!

---

10. A soma de certo número com o seu quadrado é 132. Achar o número.

Cálculo: $x^2 + x = 132$ $\quad$ $x^2 + x - 132 = 0$

$x' = 11$ $x'' = -12$

Resposta: O número é 11 ou -12

Prova: $x + x^2 = 132$? $x + x^2 = 132$?

$11 + 121 = 132$ $-12 + 144 = 132$

$132 = 132$! $132 = 132$!

11\. Procurar 2 números sabendo-se que um dêles excede o outro de 5, e que o produto de ambos é 176.

Cálculo: x = 1º número $x+5$ = 2º número

$x \times (x+5) = 176$ $x^2 + 5x = 176$

$x^2 + 5x - 176 = 0$

$x' = \pm 11$ $x'' = \pm 16$

Resposta: Os números são $\boxed{+11 \text{ e } +16}$ ou $\boxed{-11 \text{ e } -16}$

Prova: $(+11) + (+5) = +16$? $(+16) \times (+11) = +176$?

$16 = 16$! $176 = 176$!

$(-11) + (+5) = -16$? $(-11) \times (-16) = 176$?

$-16 = -16$! $176 = 176$!

12\. A diferença de 2 números é 3 e o produto 70.

Cálculo: x = 1º número $x - 3$ = 2º número

$x \times (x-3) = 70$ $x^2 - 3x = 70$

$x^2 - 3x - 70 = 0$

$x' = \pm 10$ $x'' = \pm 7$

Resposta: +10 e +7 ou -10 e -7 são os números.

Prova: $(+10) - (+7) = +3$? $(10) \times (+7) = 70$?

$3 = 3$! $70 = 70$!

$(-10) - (-7) = -3$? $(-10) \times (-7) = 70$?

$-3 = -3$! $70 = 70$!

13\. Dividir um segmento de 13 cm em duas partes, de modo que tomando-as como dimensões de um retângulo, êste tenha 36 cm^2 de área:

Cálculo:

$x + y = 13$ $x \times y = 36$

$y = 13 - x$

$x \times (13 - x) = 36$ $13x - x^2 = 36$

$13x - x^2 - 36 = 0$ $-x^2 + 13x - 36 = 0$ (-1)

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$x' = 9$ $x'' = 4$

Resposta: As partes do segmento são de $\boxed{9 \text{ cm}}$ e $\boxed{4 \text{ cm}}$

Prova: $9 + 4 = 13$? $9 \times 4 = 36$?

$13 = 13$! $36 = 36$!

14\. Decompor 5 em 2 fatôres, cuja soma dos quadrados seja 13:

Cálculo:

$x + y = 5$ $x^2 + y^2 = 13$

$y = 5 - x$

$x^2 + (y)^2 = 13$ $x^2 + (5 - x)^2 = 13$

$x^2 + 25 - 10x + x^2 = 13$ $x^2 + 25 - 13 - 10x + x^2 = 0$

$x^2 + x^2 - 10x + 25 - 13 = 0$ $2x^2 - 10x + 12 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x' = 2$ $x'' = 3$

Resposta: os fatôres são $\boxed{2 \text{ e } 3}$

Prova: $2 + 3 = 5$? $2^2 + 3^2 = 13$?

$5 = 5$! $4 + 9 = 13$ $13 = 13$!

15\. O perímetro de um retângulo é 34 m e a área, 60 m^2. Achar os lados:

6.5. Cálculo: x = base y = altura

$2x + 2y = 34$ $x \times y = 60$

$2y = 34 - 2x$

$y = 17 - x$ $x \times (17 - x) = 60$

$17x - x^2 = 60 \qquad 17x - x^2 - 60 = 0$

$-x^2 + 17x - 60 = 0 \qquad -x^2 + 17x - 60 = 0 \quad (-1)$

$$x^2 + 17x + 60 = 0$$

$x' = 12 \qquad x'' = 5$

Resposta: Os lados medem 12 m e 5 m

Prova: $2x + 2y = 34$?
$2(12) + 2(5) = 34$
$24 + 10 = 34$
$34 = 34$!

$x \times y = 60$?
$12 \times 5 = 60$
$60 = 60$!

16. Quais os múltiplos consecutivos de 3 cujo produto seja 180?

Cálculo: x = 1º múltiplo $\qquad (x + 3)$ = 2º mult.

$x \times (x + 3) = 180 \qquad x^2 + 3x = 180$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$x' = \pm 12 \qquad x'' = \pm 15$

Resposta: Os múltiplos são 12 e 15 ou −12 e −15

Prova: $15 - 12 = 3$?
$3 = 3$!

$15 \times 12 = 180$?
$180 = 180$!

$(-15) - (-12) = -3$?
$-3 = -3$!

$(-15) \times (-12) = 180$?
$180 = 180$!

17.
8.5. Quais os múltiplos consecutivos de 3 cujo produto seja 180.

Cálculo: x = 1º múltiplo $\qquad (x + 3)$ = 2º mult.

$x \times (x + 3) = 180 \qquad x^2 + 3x = 180$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$x' = \pm 12 \qquad x'' = \pm 15$

Resposta: Os múltiplos são −15 e −12 ou +12 e +15.

Prova: $(-15) - (-12) = -3$?
$-3 = -3$!

$(+15) - (+12) = +3$?
$+3 = +3$

$(-15) \times (-12) = 180$?
$180 = 180$!

$(+15) \times (+12) = 180$?
$180 = 180$

18. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é igual ao de lados:

9.5. Cálculo: diagonais = $\frac{n(n-3)}{2}$ $\qquad$ lados = n

$n = \frac{n(n-3)}{2} \qquad 2n = n^2 - 3n \qquad n^2 - 3n - 2n = 0$

$n^2 - 5n = 0 \qquad n' = 0 \qquad n'' = 5$

Resposta: o polígono é pentágono (5 lados)

Prova: $5 = \frac{5(5-3)}{2}$? $\qquad 10 = 5(2) \qquad 10 = 10$!

19. Qual o polígono convexo cujo número de lados é a metade do de diagonais?

Cálculo: diagonais = $\frac{n(n-3)}{2}$ $\qquad$ lados = n

$n = \frac{d}{2} \qquad 2n = d \qquad 2n = \frac{n(n-3)}{2} \qquad 4n = n(n-3)$

$4n = n^2 - 3n \qquad n^2 - 3n - 4n = 0 \qquad n^2 - 7n = 0$

$n(n-7) = 0 \qquad n' = 0 \qquad n - 7 = 0 \qquad n'' = 7$

Resposta: o polígono é um heptágono

Prova: $2n = \frac{n(n-3)}{2}$? $\qquad 2(7) = \frac{7(7-3)}{2} \qquad 14 = \frac{49 - 21}{2}$

$28 = 49 - 21 \qquad 28 = 28$!

20. Qual o polígono cujo número de diagonais excede o de lados de 18 unidades?

Cálculo: diagonais = $\frac{n(n-3)}{2}$ $\qquad$ lados = n

$n + 18 = d \qquad n + 18 = \frac{n(n-3)}{2} \qquad 2n + 36 = n^2 - 3n$

$-n^2 + 3n + 2n + 36 = 0 \qquad n^2 - 5n - 36 = 0$

$n' = 9 \qquad n'' = -4$

Resposta: o polígono é eneágono

Prova: $n + 18 = \frac{n(n-3)}{2}$? $\quad 9 + 18 = \frac{81 - 27}{2} \quad 54 = 54$!

21. Quais os 2 números cuja soma é $6\,^2/_3$ e o produto 4 ?

Cálculo: $6\,^2/_3 = {}^{20}/_3 \qquad x = 1$ num. $\qquad y = 2^o$ num.

$$x + y = {}^{20}/_3 \qquad y = \frac{20}{3} - x$$

$$x \times y = 4 \qquad x\left(\frac{20}{3} - x\right) = 4 \qquad \frac{20x}{3} - x^2 = 4$$

$$\frac{20x}{3} - \frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3} \qquad -3x^2 + 20x - 12 = 0$$

$$3x^2 - 20x + 12 = 0$$

$$x' = 6 \qquad x'' = {}^2/_3$$

Resposta: Os números são 6 e $^2/_3$

Prova: $x + y = \frac{20}{3}$? $\qquad x \times y = 4$?

$$6 + {}^2/_3 = \frac{20}{3} \qquad 6 \times {}^2/_3 = 4$$

$$^{18}/_3 + {}^2/_3 = \frac{20}{3} \qquad ^{12}/_3 = 4$$

$$^{20}/_3 = {}^{20}/_3\ ! \qquad 4 = 4\ !$$

L- Divisão em Média e Extrema Razão

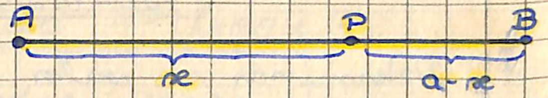
Segmento Áureo

Dizemos que num segmento AB existe uma divisão áurea ou uma divisão em média e extrema razão quando o segmento fôr dividido por um ponto P em duas partes tais que a maior seja média proporcional entre a menor e o segmento todo.

Assim, se o ponto P da figura dividir o segmento AB de tal modo que

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB} \quad \text{ou} \quad AP^2 = BP \cdot AB \qquad (1)$$

teremos que AP é o segmento áureo de AB.



Se designarmos

$$AP = x \quad e \quad AB = a$$

teremos que

$$BP = a - x$$

Substituindo êsses valôres em (1), vem:

$$x^2 = a(a - x)$$

ou

$$\boxed{x^2 + ax - a^2 = 0} \qquad \begin{array}{l} a = 1 \\ b = a \\ c = -a^2 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} \qquad x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} \qquad x = \frac{a(-1 \pm 1\sqrt{5})}{2}$$

$$x = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2} \qquad x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

13.5. $x' = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5}) \qquad x' = \frac{a}{2}(-1 + 2{,}236)$

$$x' = \frac{a}{2} \times 1{,}236 \qquad x' = \frac{1{,}236\,a}{2}$$

$$x' = 0{,}618\,a$$

$$x'' = \frac{a}{2}(-1 - \sqrt{5}) \qquad x'' = \frac{a}{2}(-1 - 2{,}236)$$

$$x'' = \frac{a}{2}(-3{,}236) \qquad x'' = \frac{-3{,}236\,a}{2}$$

$$x'' = -1{,}618\,a$$

Segmento Áureo equivale sempre ao tamanho de "a" multiplicado por 0,618.

Seg. áureo $\boxed{0{,}618\,a}$

Problemas acêrca do Seg. Áureo

1\. 14.5. Determinar o valor do segmento áureo de um segmento de 12 m.

Cálculo: 0,618 a 0,618 x 12 7,416

Resposta: O segmento áureo é de $\boxed{7,416 \text{ m.}}$

2\. Calcular a área de um retângulo cuja base tem 4 dm. e a altura é o seg. áureo da base.

Cálculo: base : 4 dm altura = 0,618 x b

0,618 x 4 = 2,472 b = 4,000 dm

A = b x h A = 4 x 2,472 h = 2,472 dm

Resposta: A área do retângulo é de 9,888 dm²

3\. Calcular a área de um triângulo cuja altura é 5 cm. e a base é o segmento áureo da altura.

Cálculo: 0,618 x 5 = 3,09

$S = \frac{b \times h}{2}$ $S = \frac{3,09 \times 5}{2}$ 3,090 cm = b

5,000 cm = h

S = 15,450/2 S = 7,725 cm²

Resposta: A área do triângulo mede 7,725 cm²

4\. Calcular a área de um retângulo cuja altura é o segmento áureo da base e a soma das duas

15.5. dimensões é 8,09 m.

Cálculo:

a + 0,618 a = 8,09 m

1,618 a = 8,09

$a = \frac{8,09}{1,618}$ a = 5 m

b = 5 m

h = 0,618 x 5 = 3,09 m

S = b x h S = 5 x 3,09 S = 15,45

Resposta: A área do retângulo é de

15,45 m²

M- Equações do 4º Grau -

14.5. ### Equações biquadradas incompletas

Equação do 4º grau completa:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Equação do 4º Grau incompleta:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

substituindo "x^4" por "y^2" e "x^2" por "y", temos:

$$ay^2 + by + c = 0$$

que é chamada "Equação resolvente", pois, pela fórmula de resolução das equações de 2º grau, podemos resolvê-la.

Substituindo, então, os valores de y', temos x_1 e x_2, e substituindo os de y'', temos x_3 e x_4.

Podemos resolver a equação também pela fórmula:

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

da qual deduzimos:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Cálculos sôbre as equações de 4º Grau

1\. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ $x^4 = y^2$ $-5x^2 = -5y$

$y^2 - 5y - 36 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -5$, $c = -36$

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2}$ $\quad y = \dfrac{5 \pm \sqrt{169}}{2}$

$y = \dfrac{5 \pm 13}{2}$ $\quad y' = 9$ $\quad x'' = -4$ (não há raiz)

$y = x^2$ $\quad x^2 = y$ $\quad x = \pm\sqrt{y}$

$x = \pm\sqrt{9}$ $\quad \boxed{x_1 = +3}$ R = $\boxed{x_2 = -3}$

2\. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ $\quad a = 1$, $b = -29$, $c = +100$

15.5.

$x = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2}}$ $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{29 \pm \sqrt{441}}{2}}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{29 \pm 21}{2}}$ $\quad x_1 = +\sqrt{\dfrac{50}{2}}$ $\quad x_1 = +\sqrt{25}$ $\quad x_1 = +5$

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{29 + 21}{2}}$ $\quad x_2 = -\sqrt{\dfrac{50}{2}}$ $\quad x_2 = -5$

$x_3 = +\sqrt{\dfrac{29 - 21}{2}}$ $\quad x_3 = +\sqrt{\dfrac{8}{2}}$ $\quad x_3 = +2$

$x_4 = -\sqrt{\dfrac{29 - 21}{2}}$ $\quad x_4 = -\sqrt{\dfrac{8}{2}}$ $\quad x_4 = -2$

Resposta: ± 5 e ± 2

3\. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$ $\quad a = +36$, $b = -13$, $c = +1$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{72}}$ $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{13 \pm 5}{72}}$

$x_1 = +\sqrt{\dfrac{13 + 5}{72}}$ $\quad x_1 = +\sqrt{\dfrac{18}{72}}$ $\quad x_1 = +\dfrac{1}{2}$

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{13 + 5}{72}}$ $\quad x_2 = -\sqrt{\dfrac{18}{72}}$ $\quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

$x_3 = +\sqrt{\dfrac{13 - 5}{72}}$ $\quad x_3 = +\sqrt{\dfrac{8}{72}}$ $\quad x_3 = +\dfrac{1}{3}$

$x_4 = -\sqrt{\dfrac{13 - 5}{72}}$ $\quad x_4 = -\sqrt{\dfrac{8}{72}}$ $\quad x_4 = -\dfrac{1}{3}$

Resposta: $\pm 1/2$ e $\pm 1/3$

4\. $2x^2(x^2 - 2) = 3 - 2x^4$

$2x^4 - 4x^2 = 3 - 2x^4$ $\quad 2x^4 - 4x^2 - 3 + 2x^4 = 0$

$4x^4 - 4x^2 - 3 = 0$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}}$ $\quad x = \pm\sqrt{\dfrac{4 \pm 8}{8}}$

$x_1 = +\sqrt{\dfrac{4 + 8}{8}}$ $\quad x_1 = +\sqrt{12/8}$ $\quad x_1 = +\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{4 + 8}{8}}$ $\quad x_2 = -\sqrt{12/8}$ $\quad x_2 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$x_3 = +\sqrt{\dfrac{4 - 8}{8}}$ $\quad x_3 = +\sqrt{\dfrac{-4}{8}}$ $\quad x_3 =$ não há

$x_4 = -\sqrt{\dfrac{4 - 8}{8}}$ $\quad x_4 = -\sqrt{\dfrac{-4}{8}}$ $\quad x_4 =$ não há

Resposta: $\pm\sqrt{3/2}$

N- TRIN~~...~~ÔMIOS DO 4º GRAU —

Trinômios biquadráticos - decomposição

$ax^4 + bx^2 + c = ay^2 + by + c$

$ay^2 + by + c = a(y - y')(y - y'')$

$$ay^2 + by + c = a(x^2 - y')(x^2 - y'')$$

$$ay^2 + by + c = a(x - \sqrt{y'})(x + \sqrt{y'})(x - \sqrt{y''})(x + \sqrt{y''})$$

$$ay^2 + by + c = a(x - x')(x + x')(x - x'')(x + x'')$$

$$ay^2 + by + c = ax^4 + bx^2 + c = \boxed{a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}$$

Compôr trinômios biquadrados conhecidas as suas raízes:

1. ± 5 e ± 3

16.5. $x_1 = +5 \quad x_2 = -5$

$x_3 = +3 \quad x_4 = -3$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - 25)(x^2 - 9)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^4 - 34x^2 + 225)$$

Resposta: $x^4 - 34x^2 + 225$

---

2. ± 2 e $\pm 1/2$

$x_1 = +2 \quad x_2 = -2$

$x_3 = +1/2 \quad x_4 = -1/2$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - 2)(x + 2)(x - 1/2)(x + 1/2)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - 4)(x^2 - 1/4)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x^2 - 4)(4x^2 - 1)$$

$$ax^4 + bx^2 + c = a(4x^4 - 17x^2 + 4)$$

Resposta: $4x^4 - 17x^2 + 4$

O- Equações Irracionais; Conceito:

$$x + \sqrt{x+5} = 7$$

termos racionais

termo irracional

Termos racionais são os termos sem efeito de uma raiz.

Termos irracionais são os sob o efeito da raiz.

P- Como transformar uma equação irracional em racional:

$$\boxed{x + \sqrt{x+5} = 7}$$

$\sqrt{x+5} = 7 - x$ ou $7 - x$ $\qquad (\sqrt{x+5})^2 = (7 - x)^2$

$x + 5 = 49 - 14x + x^2 \qquad x + 5 - 49 + 14x - x^2 = 0$

$-x^2 + 14x + x - 49 + 5 = 0 \qquad -x^2 + 15x - 44 = 0$

$\boxed{x^2 - 15x + 44 = 0}$ é a equação resolvente. Extraindo as raízes, temos:

$x' = 11 \qquad x'' = 4$. Procedendo à verificação, vemos:

1) $x + \sqrt{x+5} = 7$

$11 + \sqrt{11+5} = 7$

$11 + \sqrt{16} = 7$

$11 + 4 \neq 7$

2) $x + \sqrt{x+5} = 7$

$4 + \sqrt{4+5} = 7$

$4 + \sqrt{9} = 7$

$4 + 3 = 7$

$\boxed{7 = 7}$

Portanto, o valor da incógnita é $\boxed{4}$

Q- "Racionalize os têrmos das seguintes equações irracionais e determine os valôres dos incógnitas:

20.5.

I

1. $3+\sqrt{x-1}=x$

$\sqrt{x-1}=x-3$ $\qquad (\sqrt{x-1})^2=(x-3)^2$

$x-1=x^2-6x+9$ $\qquad -x^2+6x+x-9-1=0$

$-x^2+7x-10=0$ $\qquad \boxed{x^2-7x+10=0}$

R.: $\boxed{x'=5}$ $\qquad x''=2$

$3+\sqrt{x-1}=x$ $\qquad 3+\sqrt{x-1}=x$

$3+\sqrt{5-1}=5$ $\qquad 3+\sqrt{x-1}=2$

$3+\sqrt{4}=5$ $\qquad 3+\sqrt{1}=2$

$3+2=5$ $\qquad 3+1=2$

$5=5$ $\qquad 4\neq 2$

2. $x-\sqrt{2}=2$

$-\sqrt{2}=2-x$ $\qquad \sqrt{2}=x-2$

$(\sqrt{2})^2=(x-2)^2$ $\qquad 2=x^2-4x+4$

$-x^2+4x-4+2=0$ $\qquad -x^2+4x-2=0$

$\boxed{x^2-4x+2=0}$

R: $\boxed{x'=3{,}414}$ $\qquad x''=0{,}586$

$x-\sqrt{2}=2$ $\qquad x-\sqrt{2}=2$

$3{,}414-\sqrt{2}=2$ $\qquad 0{,}586-\sqrt{2}=2$

$3{,}414-1{,}414=2$ $\qquad 0{,}561-1{,}414\neq 2$

$2=2$

3. $\sqrt{2x-5}=3$

$(\sqrt{2x-5})^2=3^2$ $\qquad 2x-5=9$

$\boxed{2x=9+5}$ $\qquad 2x=14$

R.: $\boxed{x=7}$

$\sqrt{2x-5}=3$

$\sqrt{2(7)-5}=3$

$\sqrt{14-5}=3$

$3=3$

21.5. II

4. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{3}=2$

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{3}=\dfrac{6}{3}$ $\qquad \sqrt{x+1}=6$

$(\sqrt{x+1})^2=6^2$ $\qquad \boxed{x+1=36}$

$x=36-1$ $\qquad$ R: $\boxed{x=35}$

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{3}=2$ $\qquad \dfrac{\sqrt{35+1}}{3}=2$ $\qquad \dfrac{6}{3}=2$

5. $\dfrac{\sqrt{2x+9}}{5}=1$

$\dfrac{\sqrt{2x+9}}{5}=\dfrac{5}{5}$ $\qquad \sqrt{2x+9}=5$ $\qquad (\sqrt{2x+9})^2=5^2$

$\boxed{2x+9=25}$ $\qquad 2x=25-9$ $\qquad 2x=16$ $\qquad$ R.: $\boxed{x=8}$

$\dfrac{\sqrt{2x+9}}{5}=1$ $\qquad \dfrac{\sqrt{16+9}}{5}=1$ $\qquad \dfrac{\sqrt{25}}{5}=1$ $\qquad 1=1$

III

6. $\sqrt{x^2+11}=2x-4$

$(\sqrt{x^2+11})^2 = (2x-4)^2$ $\quad x^2+11 = 4x^2-16x+16$

$x^2-4x^2+16x-16+11=0$ $\quad -3x^2+16x-5=0$

$$\boxed{3x^2-16x+5=0}$$

R.: $\boxed{x'=5}$ $\quad x''=1/3$

$\sqrt{x^2+11} = 2x-4$
$\sqrt{25+11} = 10-4$
$\sqrt{36} = 6$
$6 = 6$

$\sqrt{11+x^2} = 2x-4$
$\sqrt{11+1/9} = 2/3-4$
$\sqrt{100/9} = -3\,1/3$
$10/9 \neq -10/9$

7. $\sqrt{x-2} = x-2$

$(\sqrt{x-2})^2 = (x-2)^2$ $\quad x-2 = x^2-4x+4$

$x-2-x^2+4x-4=0$ $\quad -x^2+4x+x-4-2=0$

$$\boxed{x^2-5x+6=0}$$

R.: $\boxed{x'=3}$ $\quad$ R.: $\boxed{x''=2}$

$\sqrt{x-2} = x-2$
$\sqrt{3-2} = 3-2$
$\sqrt{1} = 1$
$1 = 1$

$\sqrt{x-2} = x-2$
$\sqrt{2-2} = 2-2$
$\sqrt{0} = 0$
$0 = 0$

IV

8. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+5}$

$(\sqrt{2x+1})^2 = (\sqrt{x+5})^2$ $\quad \boxed{2x+1 = x+5}$

$2x-x+1-5=0$ $\quad x-4=0$ $\quad$ R.: $\boxed{x=4}$

$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+5}$ $\quad \sqrt{8+1} = \sqrt{4+5}$

$\sqrt{9} = \sqrt{9}$ $\quad 3 = 3$

9. $\sqrt{3x-7} = \sqrt{2x+5}$

22.5. $(\sqrt{3x-7})^2 = (\sqrt{2x+5})^2$ $\quad \boxed{3x-7 = 2x+5}$

$3x-7-2x-5=0$ $\quad 3x-2x-7-5=0$

R.: $\boxed{x=12}$

$\sqrt{3x-7} = \sqrt{2x+5}$ $\quad \sqrt{36-7} = \sqrt{24+5}$

$\sqrt{29} = \sqrt{29}$ $\quad (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{29})^2$ $\quad 29 = 29$

V

10. $7\sqrt{3x+1} = 3x+11$

23.5. $(7\sqrt{3x-1})^2 = (3x+11)^2$ $\quad 49(3x-1) = 9x^2+66x+121$

$147x+49-9x^2-66x-121=0$

$-9x^2-66x+147x-121+49=0$

$$\boxed{9x^2+81x+72=0}$$

R.: $\boxed{x'=8}$ $\quad$ R.: $\boxed{x''=1}$

$7\sqrt{3x+1} = 3x+11$
$7\sqrt{24+1} = 24+11$
$7\sqrt{25} = 35$
$7(5) = 35$
$35 = 35$

$7\sqrt{3x+1} = 3x+11$
$7\sqrt{3+1} = 3+11$
$7\sqrt{4} = 14$
$7(2) = 14$
$14 = 14$

11. $4\sqrt{x+5} = x+8$

$(4\sqrt{x+5})^2 = (x+8)^2$ $\quad 16(x+5) = x^2+16x+64$

$\boxed{16x+80 = x^2+16x+64}$ $\quad 16x+80-x^2-16x-64=0$

$-x^2-16x+16x+80-64=0$ $\quad -x^2+16=0$

$x^2-16=0$ $\quad x^2=16$ $\quad x=\pm\sqrt{16}$

R.: $\boxed{x'=+4}$ $\quad$ R.: $\boxed{x''=-4}$

$$4\sqrt{x+5} = x+8 \qquad 4\sqrt{x+5} = x+8$$
$$4\sqrt{-4+5} = -4+8 \qquad 4\sqrt{4+5} = 4+8$$
$$4\sqrt{1} = 4 \qquad 4\sqrt{9} = 12$$
$$4(1) = 4 \qquad 4(3) = 12$$
$$4 = 4 \qquad 12 = 12$$

VI

12. $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x+6} = 7$

27.5. $\sqrt{x+4} = 7 - \sqrt{2x+6} \qquad (\sqrt{x+4})^2 = (7-\sqrt{2x+6})^2$

$$x+4 = 49 - 14\sqrt{2x+6} + 2x + 6$$
$$x+4-49+14\sqrt{2x+6} - 2x - 6 = 0$$
$$x-2x+4-49-6+14\sqrt{2x+6} = 0$$
$$-x-51+14\sqrt{2x+6} = 0$$
$$x+51 = 14\sqrt{2x+6} \qquad (x+51)^2 = (14\sqrt{2x+6})^2$$
$$x^2+102x+2601 = 196(2x+6)$$
$$x^2+102x+2601 = 392x+1176$$
$$x^2+102x+2601-392x-1176 = 0$$
$$x^2+102x-392x+2601-1176 = 0$$
$$\boxed{x^2-290x+1425 = 0}$$
$$x' = 285 \qquad R.: \boxed{x'' = 5}$$

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6} = 7 \qquad \sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6} = 7$$
$$\sqrt{285+4}+\sqrt{570+6} = 7 \qquad \sqrt{5+4}+\sqrt{10+6} = 7$$
$$\sqrt{289}+\sqrt{576} = 7 \qquad \sqrt{9}+\sqrt{16} = 7$$
$$17+24 = 7 \qquad 3+4 = 7$$
$$41 \neq 7 \qquad 7 = 7$$

13. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+1} = 1$

29.5 $\sqrt{x+6} = 1+\sqrt{x+1} \qquad (\sqrt{x+6})^2 = (1+\sqrt{x+1})^2$

$$x+6 = 1+2\sqrt{x+1}+x+1$$
$$x+6-1-2\sqrt{x+1}-x-1 = 0$$
$$x-x+6-1-1-2\sqrt{x+1} = 0$$
$$0+4 = 2\sqrt{x+1}$$
$$4 = 2\sqrt{x+1} \qquad 4^2 = (2\sqrt{x+1})^2$$
$$\boxed{16 = 4(x+1)} \qquad 16 = 4x+4$$
$$16-4 = 4x \qquad 12 = 4x$$
$$4x = 12 \qquad x = \frac{12}{4}$$
$$\boxed{x = 3}\ R.$$

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} = 1$$
$$\sqrt{3+6}-\sqrt{3+1} = 1$$
$$\sqrt{9}-\sqrt{4} = 1 \qquad 1 = 1$$
$$3-2 = 1$$

VII

14. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-6}-\sqrt{3x-5} = 0$

30.5. $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5}-\sqrt{x-6}$

$$(\sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-6})^2$$
$$x+2 = 3x-5-2\sqrt{(3x-5)(x-6)}+x-6$$
$$x+2-3x+5 = -2\sqrt{(3x-5)(x-6)}+x-6$$
$$x-3x-x+2+5+6 = -2\sqrt{(3x-5)(x-6)}$$
$$-3x+13 = -2\sqrt{3x^2-23x+30}$$
$$3x-13 = 2\sqrt{3x^2-23x+30}$$

$(3x-13)^2 = \left(2\sqrt{3x^2-23x+30}\right)^2$

$9x^2 - 78x + 169 = 4(3x^2 - 23x + 30)$

$9x^2 - 78x + 169 = 12x^2 - 92x + 120$

$9x^2 - 78x + 169 - 12x^2 + 92x - 120 = 0$

$9x^2 - 78x - 12x^2 + 92x + 169 - 120 = 0$

$9x^2 - 12x^2 - 78x + 92x + 169 - 120 = 0$

$-3x^2 + 14x + 49 = 0$

$\boxed{3x^2 - 14x - 49 = 0}$

R: $\boxed{x' = 7}$ $\qquad x'' = -7/3$

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-6} - \sqrt{3x-5} = 0$

$\sqrt{7+2} + \sqrt{7-6} - \sqrt{3(7)-5} = 0$

$\sqrt{9} + \sqrt{1} - \sqrt{16} = 0$

$3 + 1 - 4 = 0$

$4 - 4 = 0$

$0 = 0$

$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-6} - \sqrt{3x-5} = 0$

$\sqrt{-7/3+2} + \sqrt{-7/3-6} - \sqrt{3(-7/3)-5} = 0$

$\sqrt{-1/3} + \sqrt{-8\,1/3} - \sqrt{-12} = 0$

não há raízes.

15. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+16} = 0$

3.6. $\sqrt{x+1} = \sqrt{x+16} - \sqrt{x+9}$

$(\sqrt{x+1})^2 = (\sqrt{x+16} - \sqrt{x+9})^2$

$x + 1 = x + 16 - 2\sqrt{(x+16)(x+9)} + x + 9$

$x + 1 - x - 16 - x - 9 = -2\sqrt{(x+16)(x+9)}$

$-x - 24 = -2\sqrt{x^2 + 25x + 144}$

$x + 24 = 2\sqrt{x^2 + 25x + 144}$

$(x+24)^2 = \left(2\sqrt{x^2+25x+144}\right)^2$

$x^2 + 48x + 576 = 4(x^2 + 25x + 144)$

$x^2 + 48x + 576 = 4x^2 + 100x + 576$

$x^2 - 4x^2 + 48x - 100x + 576 - 576 = 0$

$\boxed{-3x^2 - 52x = 0}$ $\qquad 3x^2 + 52x = 0$

$x(3x + 52) = 0$ $\qquad \boxed{x' = 0}$

$3x + 52 = 0$ $\qquad 3x = -52$ $\qquad x'' = -\frac{52}{3}$

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+16} = 0$

$\sqrt{1} + \sqrt{9} - \sqrt{16} = 0$

$1 + 3 - 4 = 0$

$4 - 4 = 0$ $\qquad 0 = 0$

$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} - \sqrt{x+16} = 0$

$\sqrt{-\frac{52}{3}+1} + \sqrt{-\frac{52}{3}+9} - \sqrt{-\frac{52}{3}+16} = 0$

$\sqrt{-16\,1/3} + \sqrt{-8\,1/3} - \sqrt{-1\,1/3} = 0$

não há raízes

Resposta: $x = 0$

VIII

16. $\sqrt{7 + \sqrt{x+1}} = 3$

4.6. $\left(\sqrt{7+\sqrt{x+1}}\right)^2 = 3^2$ $\qquad 7 + \sqrt{x+1} = 9$

$\sqrt{x+1} = 9 - 7$ $\qquad (\sqrt{x+1})^2 = 2^2$

$\boxed{x + 1 = 4}$ $\qquad x = 4 - 1$ $\qquad \boxed{x = 3}$

$\sqrt{7 + \sqrt{x+1}} = 3$ $\qquad \sqrt{7 + \sqrt{3+1}} = 3$

$\sqrt{7 + \sqrt{4}} = 3$ $\qquad \sqrt{7 + 2} = 3$

$\sqrt{9} = 3$ $\qquad 3 = 3$

Resposta: $x = 3$

17. $\sqrt{x + \sqrt{x+4}} = 4$

5.6. $\left(\sqrt{x + \sqrt{x+4}}\right)^2 = 4^2$ $\qquad x + \sqrt{x+4} = 16$

$\sqrt{x+4} = 16 - x$ $\qquad (\sqrt{x+4})^2 = (16-x)^2$

$x + 4 = 256 - 32x + x^2$

$x + 4 - 256 + 32x - x^2 = 0$

$-x^2 + x + 32x - 256 + 4 = 0$

$-x^2 + 33x - 252 = 0$ $\qquad \boxed{x^2 - 33x + 252 = 0}$

$x' = 21$ $\qquad \boxed{x'' = 12}$

$$\begin{array}{lcl|lcl}
\sqrt{x + \sqrt{x+4}} & = & 4 & \sqrt{x + \sqrt{x+4}} & = & 4 \\
\sqrt{21 + \sqrt{21+4}} & = & 4 & \sqrt{12 + \sqrt{12+4}} & = & 4 \\
\sqrt{21 + \sqrt{25}} & = & 4 & \sqrt{12 + \sqrt{16}} & = & 4 \\
\sqrt{21 + 5} & = & 4 & \sqrt{12 + 4} & = & 4 \\
\sqrt{26} & = & 4 & \sqrt{16} & = & 4 \\
(\sqrt{26})^2 & = & 4^2 & 4 & = & 4 \\
26 & \neq & 16 & & &
\end{array}$$

Resposta: $x = 12$

GEOMETRIA

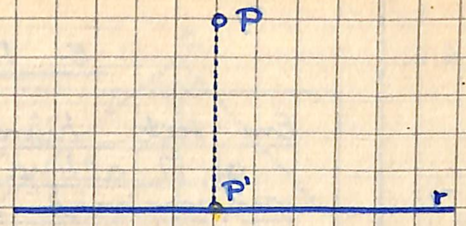
Capítulo I:

Relações Métricas no Triângulo Retângulo —

I — Projeção Ortogonal —

1- de um ponto sôbre a reta

Dados um ponto P e uma reta r, chamamos projeção ortogonal ou, simplesmente, projeção, de P sôbre r, ao pé P' da perpendicular traçada de P à reta r.



2- de um segmento

Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma reta r, chamamos projeção de AB sôbre r ao segmento A'B' de r, obtido projetando os extremos de A B. Na

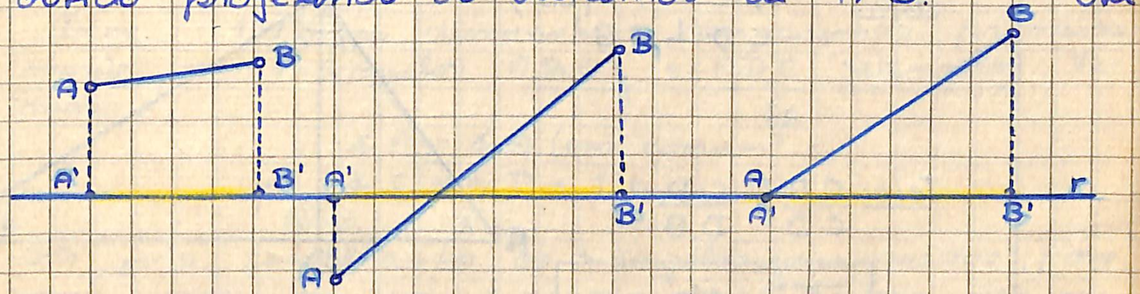


figura acima, A'B' é a projeção de AB para três diferentes posições no referido segmento.

3- observações

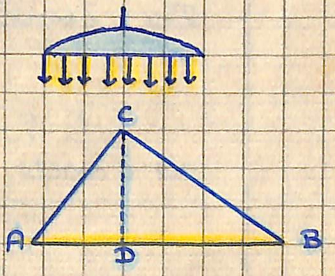
1º) Quando AB ∥ r, A'B' projeta-se em verdadeira grandeza.

2º) Quando AB ⊥ r, a sua projeção se reduz a um ponto.

II — Relações Métricas nos Triângulos Retângulos:

4- ponto

A hipotenusa é igual à soma das projeções dos catetos sôbre ela.



Proj. cat. AC = AD
Proj. cat. CB = BD
hip. AB = AD + BD
hipotenusa AB = Proj. + Proj.

6.6.

5- Teorema

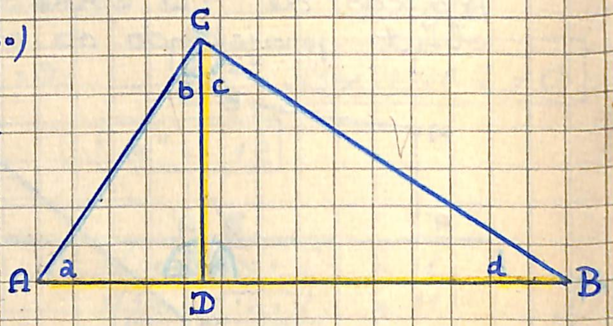
Em todo triângulo retângulo:

1) a) A altura relativa à hipotenusa é média proporcional entre os segmentos que sôbre ela determina.-

2) b) Cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sôbre ela.-

Seja ABC o triângulo considerado retâng.:

Hip.: $\sphericalangle C = 1\,r\ (90°)$
$CD \perp AB$



a)

Tese: $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{DB}$

$$\boxed{\overline{CD}^2 = AD.DB}$$

Dem.: Nos triângulos retângulos ACD e BCD temos:

$$\sphericalangle a = 1r - \sphericalangle b$$
e
$$\sphericalangle c = 1r - \sphericalangle b.$$

Estas igualdades permitem-nos concluir que

$$\sphericalangle a = \sphericalangle c.$$

Por outro lado, sabemos que, quando 2 Δs retângulos têm um $\sphericalangle$ agudo igual, são semelhantes. Portanto:

$$\Delta ACD \sim \Delta BCD.$$

Da semelhança dêsses Δs deduz-se

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB},$$

de onde tiramos:

$$\boxed{\overline{CD}^2 = AD.DB}$$

c.q.d.

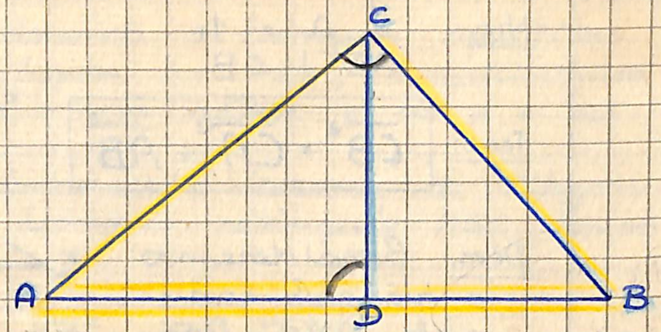
b)

12.6. Teses: $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$

1º $\boxed{\overline{AC}^2 = AD \cdot AB}$

$\dfrac{DB}{CB} = \dfrac{CB}{AB}$

2º $\boxed{\overline{BC}^2 = DB \cdot AB}$



Dem.: 1º) Para demonstrar, comparemos, primeiramente os triângulos ABC e ADC, retângulos. Temos:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A \text{ (em comum)}$$
e
$$\sphericalangle C = \sphericalangle D = 1\ r.$$

São, pois, semelhantes os triângulos considerados, pois, como vimos, têm um $\sphericalangle$ agudo igual. Logo, são proporcionais os seus lados:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD},$$ de onde se deduz:

$$\boxed{\overline{AC}^2 = AB \cdot AD}$$

2º) Comparemos, depois, os triângulos retângulos ABC e BCD. Do mesmo modo chega-se a que são semelhantes. - Assim:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD},$$ e então:

$$\boxed{\overline{CB}^2 = BD \cdot AB}$$

c.q.d.

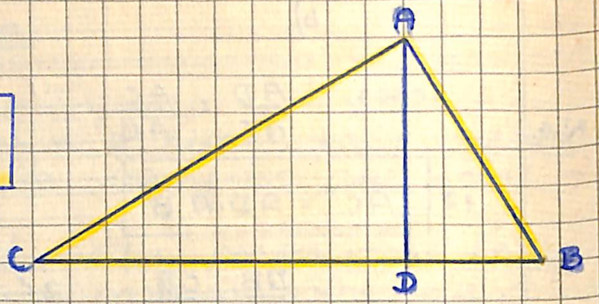
13.6. 3)

6- Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.-

Hip.: $\measuredangle A = 1r$
$AD \perp CB$

Tese: $\boxed{\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2}$



Dem.: Consideremos o triângulo retângulo ABC, figura ao lado. Traçando AD, a altura relativa a hipotenusa CB, temos, de acordo com a seguinte proposição: "Em todo triângulo retângulo cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela" (cap. I, II parte, 5 item).:

$$\cancel{\overline{AB}^2 = BC.BD}$$
$$\overline{AB}^2 = CB.BD$$
$$\overline{CA}^2 = CB.CD.$$

Somando agora, ordenadamente as igualdades acima, temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = CB.BD + CB.CD$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = CB(BD + CD).$$

Mas, notando que

$$BD + CD = CB,$$

segue-se que:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = CB \cdot CB$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CB}^2,$$

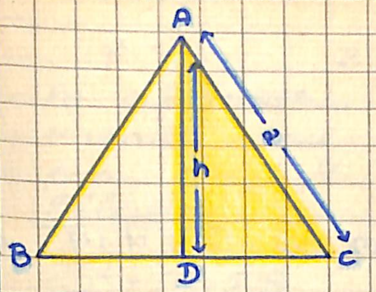
e então: $\boxed{\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2}$

c.q.d.

17.6.

III — Aplicações do Teorema de Pitágoras:

7 - Altura de um triângulo eqüilátero.



Considerando o triângulo eqüilátero ABC, figura ao lado, denominemos de h a sua altura e de a o seu lado.
Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ADC, temos:

$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ e $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$. Como AD é a altura e AC o lado, temos:

$$h^2 = a^2 - \overline{CD}^2$$

Mas:

$DC = \frac{BC}{2}$; $DC = \frac{AC}{2}$ e $DC = \frac{a}{2}$. Então:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Igualando os denominadores e eliminando os termos em comum

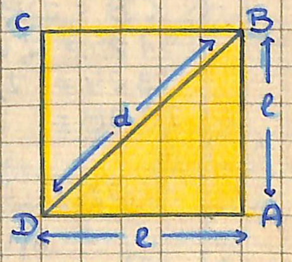
$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$ $h^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$ $h^2 = \frac{3a^2}{4}$ e:

$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ $\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ Considerando ....

$\sqrt{3} = 1,732$, temos:

$$\boxed{h = \frac{1,732\,a}{2}}$$

8 - Diagonal do Quadrado



Consideremos um quadrado ABCD, figura ao lado. Designemos por ℓ o seu lado e d a sua diagonal.
Aplicando-se ao triângulo retângulo ABD o teorema de Pitágoras, vem

$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2$, ou:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2$ e então

$$d^2 = 2\ell^2$$

Extraindo a raiz quadrada, resulta:

$$\boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Adotando para $\sqrt{2}$ o valor de 1,414, temos:

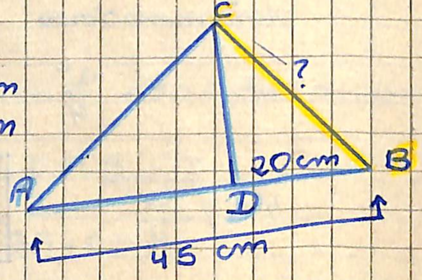
$$\boxed{d = 1{,}414\,\ell}$$

IV — Exercícios: Resolvidos

13.6. 1 - Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 45 cm e a projeção de um dos catetos sobre ela mede 20 cm. Calcular o cateto:

Cálculo:

$DB = 20$ cm
$AB = 45$ cm



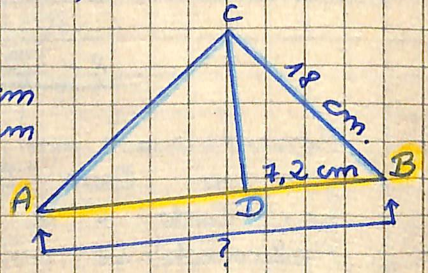
$$\overline{CB}^2 = DB \cdot AB$$
$$\overline{CB}^2 = 20 \cdot 45$$
$$\overline{CB}^2 = 900$$
$$CB = \sqrt{900}$$
$$CB = 30$$

Resposta: O cateto mede 30 cm.

2 - Um dos catetos de um triângulo retângulo mede 18 cm e a sua projeção sôbre a hipotenusa mede 7,2 cm. Calcular a hipotenusa:

Cálculo:

$CB = 18$ cm
$DB = 7{,}2$ cm



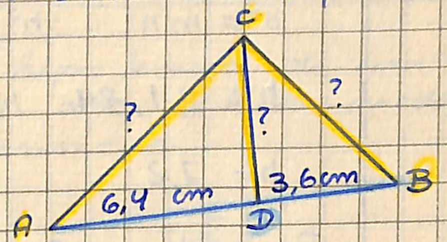
$$\overline{CB}^2 = DB \cdot AB$$
$$18^2 = 7{,}2 \cdot AB$$
$$324 = 7{,}2\,AB$$
$$7{,}2\,AB = 324$$
$$AB = \frac{324}{7{,}2} \qquad AB = 45 \text{ cm}$$

Resposta: A hipotenusa mede 45 cm.

3 - A altura de um triângulo retângulo determina sôbre a hipotenusa dois segmentos que medem respectivamente 3,6 cm e 6,4 cm; calcular a altura e os catetos.

Cálculo:

$AD = 6{,}4$ cm
$DB = 3{,}6$ cm
$AB = 10$ cm



$$\overline{CD}^2 = AD \cdot DB$$
$$\overline{CD}^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$$
$$\overline{CD}^2 = 23{,}04$$
$$CD = \sqrt{23{,}04}$$
$$CD = 4{,}8 \text{ cm}$$

$$\overline{AC}^2 = AD \cdot AB \qquad \overline{CB}^2 = DB \cdot AB$$
$$\overline{AC}^2 = 6{,}4 \cdot 10 \qquad \overline{CB}^2 = 3{,}6 \cdot 10$$
$$\overline{AC}^2 = 64 \qquad \overline{CB}^2 = 36$$
$$\overline{AC} = \sqrt{64} \qquad \overline{CB} = \sqrt{36}$$
$$AC = 8 \text{ cm} \qquad CB = 6 \text{ cm}$$

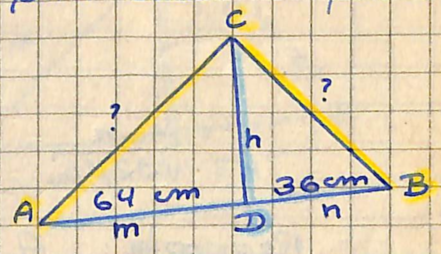
Resposta: Os catetos medem 8 cm e 6 cm e a altura, 4,8 cm

17.6 4 - A altura de um triângulo retângulo determina sobre a hipotenusa os segmentos de $m = 36$ cm e $n = 64$ cm. Quais os catetos:

Cálculo:

$AD = 64$ cm
$DB = 36$ cm
$AB = 100$ cm

Como no problema anterior, achamos para



$AC = 80$ cm e para $CB = 60$ cm

Resposta: Os catetos medem 80 cm e 60 cm

18.6 5 - Em um triângulo retângulo, a hipotenusa mede 15 m e um dos catetos, 12 m. Calcular a altura relativa à hipotenusa:

Cálculo:

$a = 15$ m $\qquad b^2 = an \qquad 144 = 15n$
$b = 12$ m $\qquad 12^2 = 15n \qquad n = 9{,}6$ m

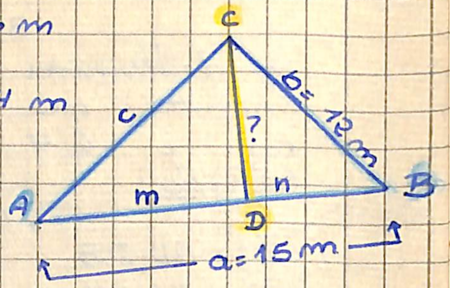
$a = 15\,m \qquad b = 12\,m \qquad n = 9{,}6\,m$

$m = a - n \qquad n = 15 - 9{,}6 \qquad m = 5{,}4\,m$

$h^2 = m\,n \qquad h^2 = 5{,}4 \cdot 9{,}6$

$h^2 = 51{,}84 \qquad h^2 = \sqrt{51{,}84}$

$h = 7{,}2$



Resposta: A altura mede = 7,2 m

---

6 - Os catetos de um triângulo retângulo são $b = 12$ cm.; $c = 16$ cm; calcular a altura relativa à hipotenusa:

Cálculo:

$b = 12$ cm

$c = 16$ cm

$a^2 = c^2 + b^2$

$a^2 = 16^2 + 12^2$

$a^2 = 256 + 144$

$a^2 = 400$

$a = \sqrt{400}$

$a = 20$ cm

$b^2 = a\,n$

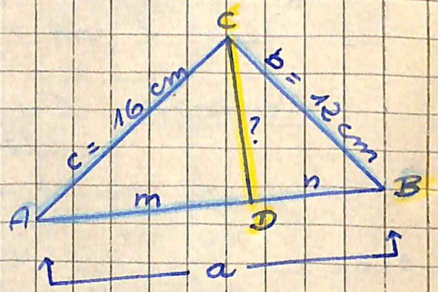
$12^2 = 20\,n$

$20\,n = 144$

$n = 7{,}2$ cm

$m = 20 - 7{,}2 \quad (a - n)$

$m = 12{,}8$ cm



$h^2 = m \cdot n \qquad h^2 = 12{,}8 \cdot 7{,}2 \qquad h^2 = 92{,}16$

$h = \sqrt{92{,}16} \qquad h = 9{,}6$

Resposta: A altura mede 9,6

17.6. 7 - A hipotenusa de um Δ retângulo mede 53 cm e um dos catetos, 45 cm. Calcular o outro cateto.

Cálculo:

$a^2 = c^2 + b^2$

$-b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = a^2 - c^2$

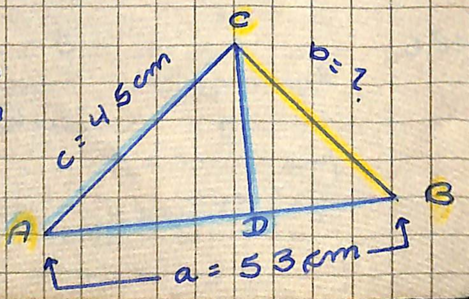
$b^2 = 53^2 - 45^2$

$b^2 = 2809 - 2025$

$b^2 = 784$

$a = 53$ cm

$c = 45$ cm



$b = \sqrt{784}$

$b = 28$

Resposta: O outro cateto mede 28 cm.

24.6. 8 - Calcular a hipotenusa de um Δ retângulo em que um dos catetos mede 20 cm. e o outro $\frac{3}{4}$ do primeiro.

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = 15^2 + 20^2$

$a^2 = 225 + 400$

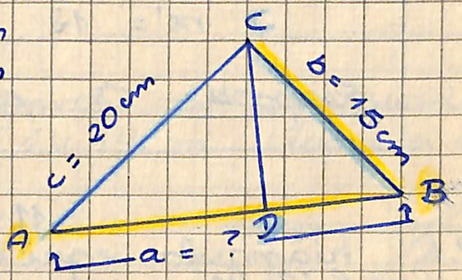
$a^2 = 625$

$a = \sqrt{625}$

$a = 25$

$b = 15$ cm

$c = 20$ cm



Resposta: A hipotenusa mede 25 cm.

---

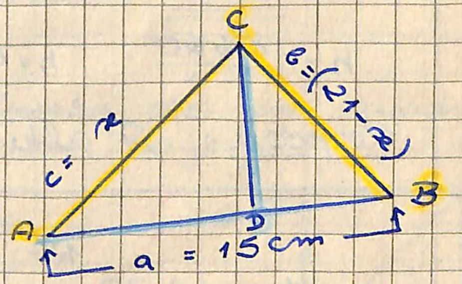
9 - A soma dos catetos de um Δ retângulo vale 21 cm e a hipotenusa tem 15 cm. Calcular os catetos.

Cálculo:

$a = 15$ cm

$b = (21 - x)$

$c = x$



$a^2 = b^2 + c^2$

$15^2 = (21 - x)^2 + x^2$

$225 = 441 - 42x + x^2 + x^2$

$0 = x^2 + x^2 - 42x + 441 - 225$

$2x^2 - 42x + 216 = 0$

$x' = 12 \qquad x'' = 9$

Resposta: Os catetos medem 12 cm e 9 cm.

27.6. 10 - O perímetro de um Δ retângulo tem 30 cm e a hipotenusa 13 cm. Calcular os catetos.

Cálculo:

$a = 13$

$b + c = 17$

$a + b + c = 30$ cm

$b + c = 30 - 13$

$a^2 = b^2 + c^2$ $\qquad a = 13$ cm

$13^2 = (17 - x)^2 + x^2$ $\qquad b = (17 - x)$

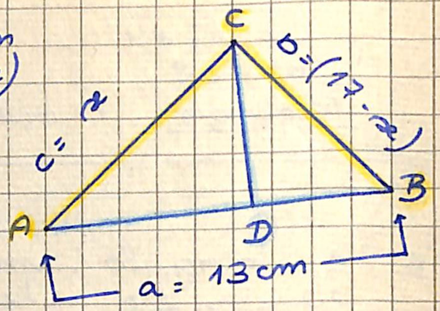
$169 = 289 - 34x + x^2 + x^2$ $\qquad c = x$

$169 - 289 + 34x - x^2 - x^2 = 0$

$-2x^2 + 34x - 120 = 0$

$2x^2 - 34x + 120 = 0$

$x' = 12 \qquad x'' = 5$



Resposta: Os catetos medem 12 cm e 5cm.

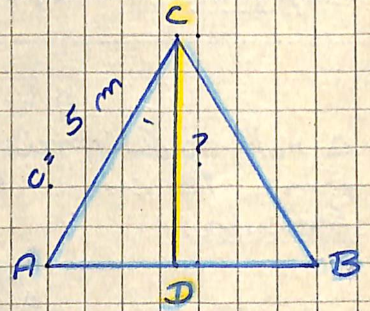
18.6. 11- Calcular a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 5 m.

Cálculo:

Fórmula: $h = \dfrac{a \times 1,732}{2}$

$h = \dfrac{5 \times 1,732}{2}$

$h = \dfrac{8,660}{2} \qquad h = 4,330$



Resposta: A altura mede 4,33 m.

20.6. 12- A altura de um Δ equilátero mede 17,32 m. Qual o comprimento do l.?

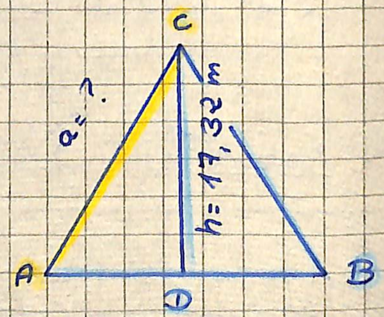
Cálculo:

Fórmula: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$2h = a\sqrt{3} \qquad a\sqrt{3} = 2h$

$a = \dfrac{2h}{\sqrt{3}} \qquad a = \dfrac{2 \cdot 17,32}{1,732}$

$a = 2 \cdot 10 \qquad a = 20$



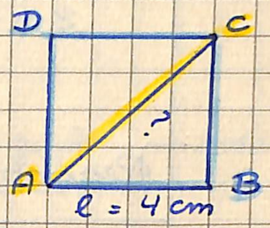
Resposta: O lado mede 20 m

19.6. 13- O lado de um quadrado mede 4 cm. Qual o comprimento da diagonal.

Cálculo:

Fórmula: $d = l\sqrt{2}$

$d = 4 \cdot 1,414 \qquad d = 5,656$



Resposta: A diagonal mede 5,656 cm.

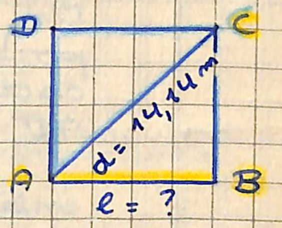
14- A diagonal de um quadrado tem por medida 14,14 m. Quanto mede o lado?

Cálculo:

Fórmula: $d = l\sqrt{2}$

$l\sqrt{2} = d \qquad l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

$l = \dfrac{14,14}{1,414} \qquad l = 10$



Resposta: O lado mede 10 m.

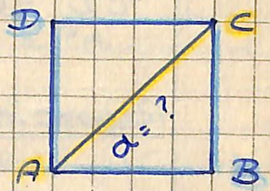
25.6. 15- O perímetro de um quadrado mede 16 m. Calcular a diagonal.

Cálculo:

$AB + BC + CD + DA = 16$

$AB + AB + AB + AB = 16$

$AB = 16 : 4 \qquad AB = 4$



Fórmula: $d = l\sqrt{2}$

$d = 4 \cdot 1,414 \qquad d = 5,656$

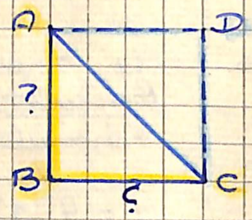
Resposta: A diagonal mede 5,656 m.

27.6. 16- Qual é a medida de cada cateto de um Δ retângulo isósceles, cujo perímetro é 13,656 cm.

Cálculo:

$AB + BC + CA = 13,656$ cm

$\ell + \ell + \ell\sqrt{2} = 13,656$
$2\ell + \ell \cdot 1,414 = 13,656$
$2\ell + 1,414\,\ell = 13,656$
$3,414\,\ell = 13,656$
$\ell = \frac{13,656}{3,414} = 4$



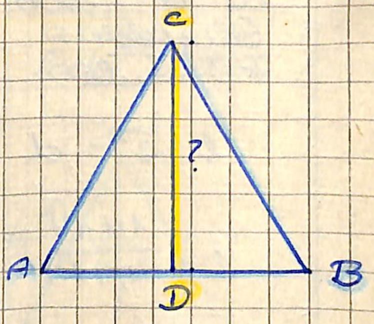
Resposta: Cada cateto mede 4 cm.

20.6. 17 - O perímetro de um Δ isósceles mede 32 m e a base tem 12 m. Calcular a altura dêsse triângulo.

Cálculo:

Os lados são iguais; portanto, mede 10 m cada; e:) $AD = \frac{AB}{2}$;

então: → $AB = 12$ m
$AC = 10$ m
$CB = 10$ m
$AD = 6$ m
$DB = 6$ m



c = 12 m

No Δ ret. CBD temos:

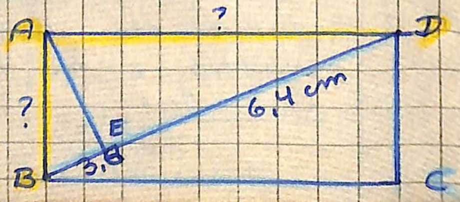
$\overline{CB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2$
$-\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{CB}^2$
$\overline{CD}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{DB}^2$
$h^2 = 10^2 - 6^2$
$h^2 = 100 - 36$
$h^2 = 64$
$h = \sqrt{64}$
$h = 8$

Resposta: A altura mede 8 m.

25.6. 18 - Num retângulo ABCD traça-se a diagonal BD e baixa-se sôbre ela a perpendicular traçada do vértice A. A perpendicular divide a diagonal de 6,4 cm e 3,6 cm. Calcular os lados do retângulo

Cálculo:

$BD = BE + ED$
$BD = 3,6 + 6,4$
$BD = 10$ cm



$\overline{AB}^2 = BE \cdot BD$ | $\overline{AD}^2 = DE \cdot DB$
$\overline{AB}^2 = 3,6 \cdot 10$ | $\overline{AD}^2 = 6,4 \cdot 10$
$\overline{AB}^2 = 36$ | $\overline{AD}^2 = 64$
$AB = \sqrt{36}$ | $AD = \sqrt{64}$
$AB = 6$ | $AD = 8$

Resposta: Os lados dêsse retângulo medem 6 cm e 8 cm.

CAPÍTULO II:

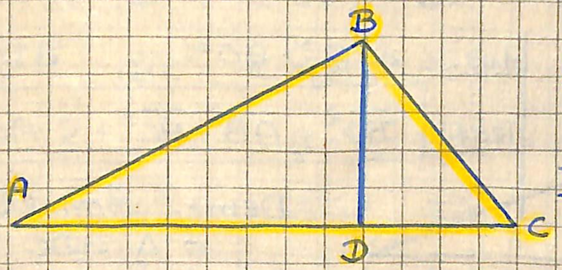
5.8. 5)

Relações Métricas num Triângulo Qualquer —

I — PROPRIEDADES DOS LADOS DE UM TRIÂNGULO QUALQUER:

1. Teorema — 1a Propriedade.

> O quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o duplo produto de um dêsses lados pela projeção do outro sôbre êle. —



Hip.: $\measuredangle A < 90°$
$BD \perp AC$

Tese: $\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AC} \cdot \overline{AD}}$

Dem.: Considerando o Δ retângulo BCD, fornece-se-nos a relação:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

Substituindo na relação acima $\overline{DC}$ por $(\overline{AC} - \overline{AD})$, resulta:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + (AC - AD)^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AD + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AD$$

Por outro lado, como $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ é igual a $\overline{AB}^2$, por ser retângulo o triângulo ABD, vem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AD}$$

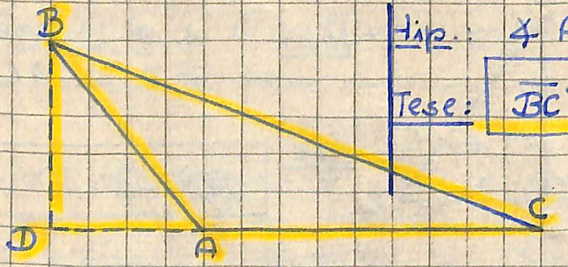
e

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AD}}$$

c.q.d.

6. 8. 2. Teorema. - 2a Propriedade.

Em todo Δ obtusângulo o quadrado do lado oposto ao $\measuredangle$ obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados mais o duplo produto de um destes lados pela projeção do outro sôbre êle. -



Hip.: $\measuredangle A > 90°$ $\quad BD \perp DAC$

Tese: $\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC.AD}$

Dem.: Consideremos o Δ BDC. Êsse Δ fornece-nos a relação:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

Substituindo na relação acima DC por AC + AD, resulta:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + (AC + AD)^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC.AD + \overline{AD}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC.AD$$

Por outro lado, como $\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$ é igual a $\overline{AB}^2$, por ser retângulo o triângulo ABD, vem:

$$\boxed{\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}.\overline{AD}}$$

c.q.d.

7. 8. 3. Determinação da natureza de um triângulo.

Conhecendo-se as medidas dos lados de um triângulo é possível determinar se o mesmo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

De fato, em virtude do teorema de Pitágoras (c.f. Cap. I, II parte, item 6) e dos teoremas dos itens 1 e 2 dêste capítulo, poderemos escrever as seguintes relações:

— se $\measuredangle A = 90°$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ (1)

— se $\measuredangle A < 90°$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AC}.\overline{AD}$, $\therefore$

$\overline{BC}^2 < \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ (2)

— se $\measuredangle A > 90°$, $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC}.\overline{AD}$, $\therefore$

$\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ (3)

Portanto, se designarmos por $\overline{BC}$ o maior lado de um triângulo, teremos o seguinte:

— 1º) se ocorrer a relação (1) o triângulo será retângulo.

— 2º) se ocorrer a (2), o Δ será acutângulo

– 3º) se ocorrer a relação (3) o triângulo será obtusângulo.

Assim, para determinar a natureza de um Δ é suficiente verificar em qual das relações anteriores se enquadra o maior dos lados.

II — Propriedades das Linhas Notáveis no Triângulo

13.8

1. Propriedades das Linhas Notáveis – conceito

As linhas notáveis no triângulo são:
altura (h)
mediana (m)
e Bissetriz (β).

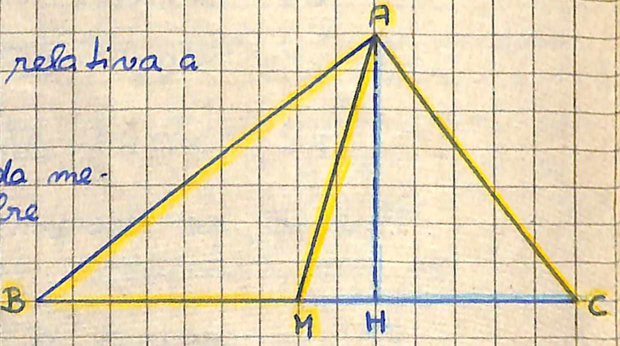
Estas linhas notáveis têm a denominação específica de *cevianas*.

2. Propriedade da mediana

> Em todo Δ, a soma dos quadrados de 2 lados, é igual ao dôbro do quadrado da mediana correspondente ao terceiro lado, mais o dôbro da metade dêste lado. –

Hip.: AM = mediana relativa a BC

MH = projeção da mediana sôbre BC



Tese: $\boxed{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2}$

14.8 Dem.: Seja ABC um triângulo qualquer, e AM a mediana correspondente ao lado BC, figura anterior. Tracemos $AH \perp BC$, admitindo que o ponto esteja situado entre M e C.

Nos triângulos AMB (obtusângulo) e AMC (acutângulo), temos, respectivamente:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot\overline{MH}$$

e

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 - 2\,\overline{CM}\cdot\overline{MH}.$$

Somando, ordenadamente, estas igualdades, vem:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot MH - 2\,\overline{CM}\cdot\overline{MH}$$

Por outro lado, de acôrdo com a definição de mediana, notamos que BM = CM.
Substituindo, na igualdade acima, CM por BM, temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\,\overline{BM}\cdot MH - 2\,\overline{BM}\cdot\overline{MH}$$

Reduzindo os termos semelhantes, finalmente, obtemos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BM}^2$$

e, então:

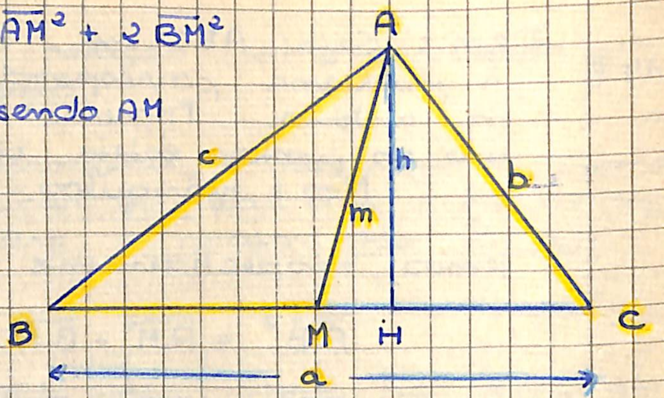
$$\boxed{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2}$$

c.q.d.

3. Cálculo das medianas. – Fórmula

15.8 Seja o Δ ABC (figura seguinte); tracemos a mediana AM e seja $AD \perp BC$. Designemos por m a mediana AM.
Aplicando ao Δ ABC o teorema do item 2 dêste capítulo, teremos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$$



Verificando que; sendo AM mediana, temos:

$AB = c$
$AC = b$
$AM = m$
$BM = MC = \frac{a}{2}$

e então:

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AM}^2 + 2\,\overline{BM}^2$ fica:

$c^2 + b^2 = 2m^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Eliminando o parênteses e simplificando, vem:

$$c^2 + b^2 = 2m^2 + 2\frac{a^2}{4}$$

$$c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{2a^2}{4}$$

$c^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$. Isolando $2m^2$, verificamos:

$-2m^2 = \frac{a^2}{2} - c^2 - b^2$ e

$2m^2 = c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}$ ou

$2m^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{2}$. Então:

$m^2 = \frac{\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{2}}{2}$ ∴

$$m^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$$

Extraindo a raiz quadrada e designando essa mediana por m_a, por ser relativa ao lado a, teremos:

$$m = \sqrt{\frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}}$$

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}$$

fórmula que nos permite determinar a medida da mediana, conhecidas as medidas dos lados do Δ.

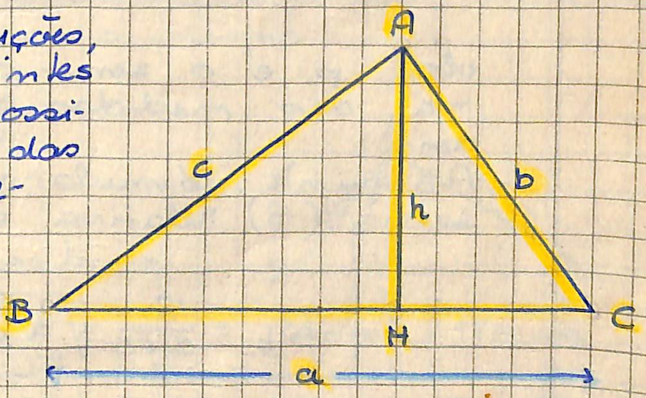
Procedendo de maneira análoga, obteremos as fórmulas das medianas relativas aos lados b e c:

$$\boxed{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}}$$

$$\boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}$$

não

19.8. 4. Cálculo das alturas - Fórmula



Após várias evoluções, obtemos as seguintes fórmulas, que possibilitam o cálculo das alturas, quer relativas ao lado a, b ou c:

A altura relativa ao lado a, obtém-se com:

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

a relativa ao lado b:

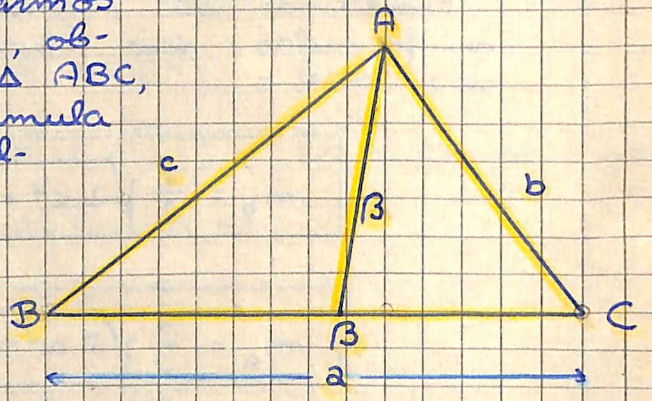
$$\boxed{h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

e a relativa ao lado c com:

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

5. Cálculo das bissetrizes - Fórmula

Depois de efetuarmos várias operações, obtemos, para o Δ ABC, qualquer, a fórmula que permite calcular a bissetriz relativa ao lado a:



$$\boxed{\beta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}$$

obs.: p é o semi-perímetro, isto é, a soma das medidas dos lados dividido por dois.
A seguinte fórmula permite calcular a bissetriz (β) relativa ao lado b:

$$\boxed{\beta_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}}$$

e esta, a relativa ao lado c:

$$\boxed{\beta_c = \frac{2}{b+a}\sqrt{abp(p-c)}}$$

III — Exercícios Resolvidos

6.8. 1. Os lados de um Δ são BC = 50 m AC = 48 m e AB = 14 m. Verificar se o mesmo é acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

Cálculo:

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ $\quad 50^2 = 48^2 + 14^2$

$2500 = 2304 + 196$ $\quad 2500 = 2500$

Resposta: o Δ é retângulo e pitagórico

2. No Δ ABC são dados AB = 25 cm; BC = 20 cm e AC = 7 cm. Verificar o tipo do Δ.

Cálculo:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ $\quad 25^2 = 7^2 + 20^2$

$625 = 49 + 400$ $\quad 625 > 449$

Resposta: o Δ é obtusângulo

8.8. 3. Os lados de um Δ são AB = 10 cm; AC = 15 cm e BC = 18 cm. Calcular os segmentos que a altura relativa ao maior lado determina sôbre o mesmo

Cálculo:

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$

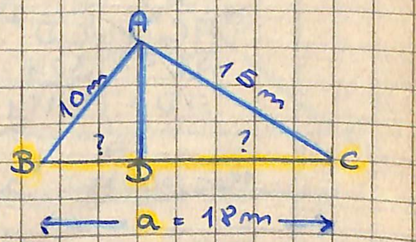
$18^2 = 15^2 + 10^2$

$324 = 225 + 100$

$324 = 325$

$324 < 325$, portanto

o Δ é acutângulo



$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{BC}.\overline{BD}$

$15^2 = 10^2 + 18^2 - 2.18.\ BD$

$225 = 100 + 324 - 36\ BD$

$36\ BD = 100 + 324 - 225$

$36\ BD = -225 + 424$

$36\ BD = 199$

$BD = 5,52$

$BC = BD - DC$

$DC = BC - BD$

$DC = 18 - 5,52$

$DC = 12,48$

Resposta: os segmentos medem, respectivamente, 5,52 cm e 12,48 cm

4. No Δ ABC são dados: $b = 25$ cm

12.8. e $c = 20$ cm. Calcular o lado A, sabendo-se que a projeção de b s/ c, mede 15 cm

Cálculo:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.20.15$

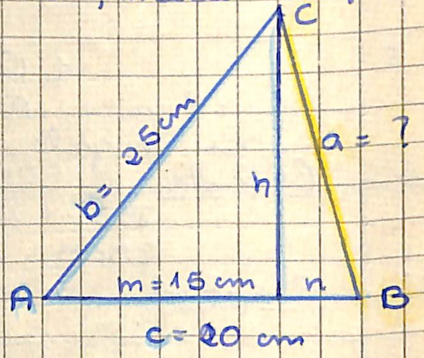
$a^2 = 25^2 + 20^2 - 20.30$

$a^2 = 625 + 400 - 600$

$a^2 = 425$

$a = \sqrt{425}$

$a = 20,6$



Resposta: o lado a mede 20,6 cm

5. Os lados de um Δ são: $a = 25$ cm; $b = 18$ cm e $c = 15$ cm. Calcular a altura relativa ao lado a

Cálculo:

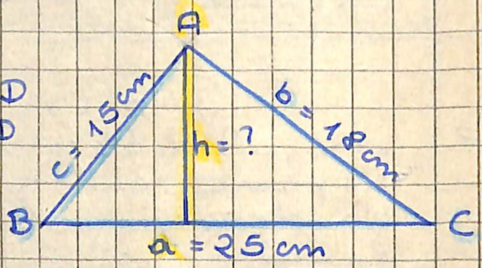
$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC.CD$

$225 = 324 + 625 - 2.25.CD$

$225 = 949 - 50CD$

$50CD = 724$

$CD = 14,48$



$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$ $\quad \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$

$\overline{AD}^2 = 324 - 209,6704$ $\quad AD = 114,3296$

$AD = \sqrt{114,3296}$ $\quad AD = 10,69$

Resposta: a altura mede 10,69 cm.

6. No Δ ABC são dados: $a = 6$ cm

15.8. $b = 8$ cm e $c = 10$ cm. Calcular a mediana que parte do vértice C.

Cálculo:

$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{CM}^2 + 2\overline{BM}^2$

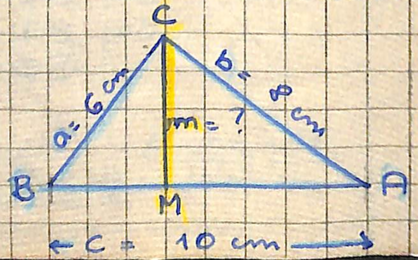
$8^2 + 6^2 = 2\overline{CM}^2 + 2.5^2$

$64 + 36 = 2\overline{CM}^2 + 50$

$2\overline{CM}^2 = 64 + 36 - 50$

$2\overline{CM}^2 = 50$

$\overline{CM}^2 = 25$



$CM = \sqrt{25}$ $\quad CM = 5$

Resposta: a mediana mede 5 cm

7. Calcular a mediana relativa ao

19.8. lado a de um Δ cujo perímetro mede 39 m e cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 6.

Cálculo:

$\frac{c}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a}{6}$ $\quad \frac{c+b+a}{3+4+6}$ $\quad \frac{39}{13} = \frac{c}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a}{6}$

$c = \frac{39 \times 3}{13}$ $\quad c = \frac{117}{13}$ $\quad c = 9$ m

$b = \frac{39 \times 4}{13}$ $\quad b = \frac{156}{13}$ $\quad b = 12$ m

$a = \frac{39 \times 6}{13}$ $\quad a = \frac{234}{13}$ $\quad a = 18$ m

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

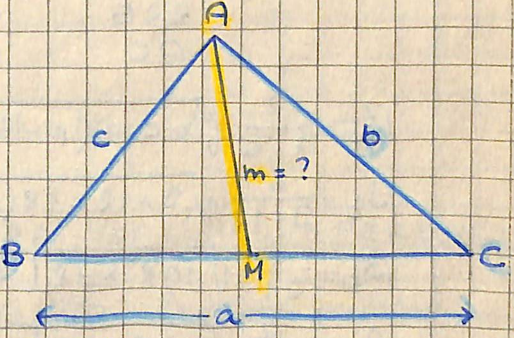
$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2.12^2 + 2.9^2 - 18^2}$

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{288 + 162 - 324}$

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{126}$

$m_a = \frac{1}{2}\, 11,22$

$m_a = \frac{11,22}{2}$ $\quad m_a = 5,61$



Resposta: a mediana mede 5,61 m

8. Calcular a bissetriz relativa ao

20.8. lado b em um Δ ABC cujos lados são $a = 15$ m; $b = 10$ m e $c = 6$ m

Cálculo:

$B_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $\quad a = 15$, $b = 10$, $c = 6$, $p = 15,5$

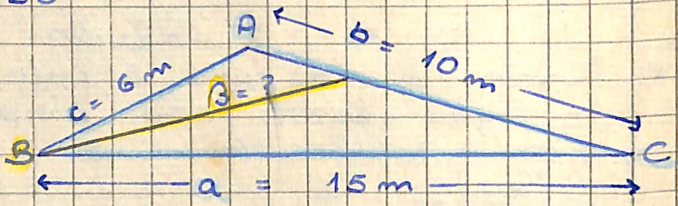
$B_b = \frac{2}{15+6}\sqrt{15.6.15,5(15,5-10)}$

$B_b = \frac{2}{21}\sqrt{90 \cdot 15,5(5,5)}$

$B_b = \frac{2}{21}\sqrt{90 \cdot 85,25}$

$B_b = \frac{2}{21}\sqrt{7672,50}$

$B_b = \frac{2}{21}\, 87,5$



$B_b = \frac{2 \cdot 87,5}{21}$

$B_b = \frac{175}{21}$ $\qquad B_b = 8,333$

Resposta: a bissetriz mede 8,333 m

9. Calcular a bissetriz interna traçada sôbre a hipotenusa de um Δ retângulo cujos catetos medem 12 e 9 m

Cálculo: pelo pitágoras escrevemos:

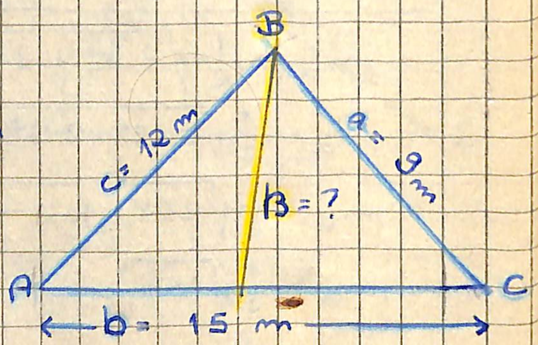
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

$12^2 + 9^2 = \overline{AC}^2$

$144 + 81 = \overline{AC}^2$

$225 = \overline{AC}^2$

$AC = 15\,m$



$B_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{a c p (p-b)}$

$B_b = \frac{2}{9+12}\sqrt{9 \times 12 \times 18(18-15)}$

$B_b = \frac{2}{21}\sqrt{108 \times 18(3)}$

$B_b = \frac{2}{21}\sqrt{108 \times 54}$ $\qquad B_b = 7,26$

Resposta: a bissetriz mede 7,26 m.

22.8. 10. Os lados de um Δ ABC são 10 m = a; b = 7 m e c = 5 m. Calcular os segmentos que a altura relativa ao lado a determina sobre o mesmo.

Cálculo: primeiramente calculamos a altura.

$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

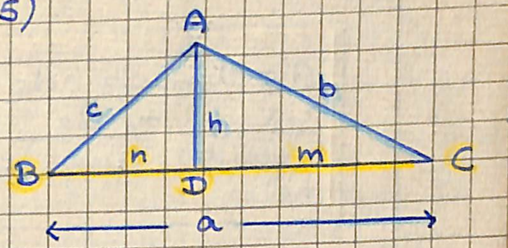
$h_a = \frac{2}{10}\sqrt{11(11-10)(11-7)(11-5)}$

$h_a = \frac{2}{10}\sqrt{11(1)(4)(6)}$

$h_a = \frac{2}{10}\sqrt{11(24)}$

$h_a = \frac{2}{10}\sqrt{264}$

$h_a = \frac{2}{10}\, 16,2$ $\qquad h_a = \frac{2 \times 16,2}{10}$ $\qquad h_a = 3,24$



Pelo pitágoras temos:

$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$

$25 = 10,4976 + \overline{BD}^2$

$\overline{BD}^2 = 14,5024$

$BD = 3,87$

$5^2 = 3,24^2 + \overline{BD}^2$

$\overline{BD}^2 = 25 - 10,4976$

$BD = \sqrt{14,5024}$

$10 - 3,87 = 6,13 = DC$

Resposta: os segmentos medem 3,87 e 6,13 m

Capítulo III: 7)

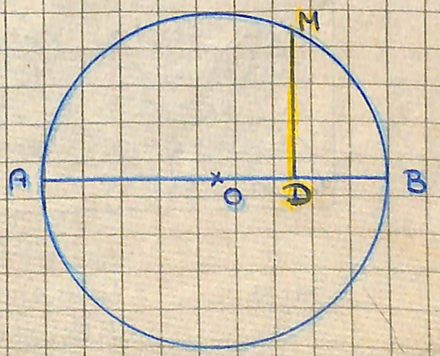
Relações Métricas no Círculo —

I — Relações Métricas na Circunferência:

1. Ordenada da Circunferência.

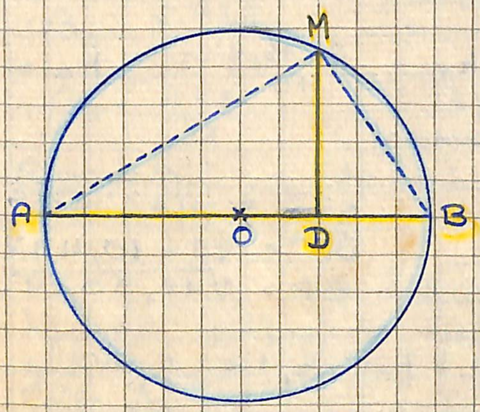
Ordenada da circunferência é a reta perpendicular traçada de um ponto desta circunferência à um diâmetro.

No esquema ao lado, a ordenada da circunferência, é a reta MD.



2. 1a Propriedade - Teorema

A ordenada de um ponto da circunferência é média proporcional entre os segmentos que determina sôbre o diâmetro.-



Hip.: $MD \perp AB$

Tese: $\boxed{\overline{MD}^2 = AD \cdot DB}$

Dem.: Seja AB o diâmetro do círculo de centro O e MD a ordenada. Liguemos M com os extremos A e B, formando, assim, o $\Delta\, AMB$, que é retângulo em M, pois é inscrito numa semi-circumferência. Neste triângulo, a hipotenusa é o diâmetro, a ordenada MD a altura relativa à hipotenusa e, por conseguinte, pelo teorema do item 5, parte a, capítulo I, parte II, temos

$$\boxed{\overline{MD}^2 = AD \cdot DB}$$

c. q. d.

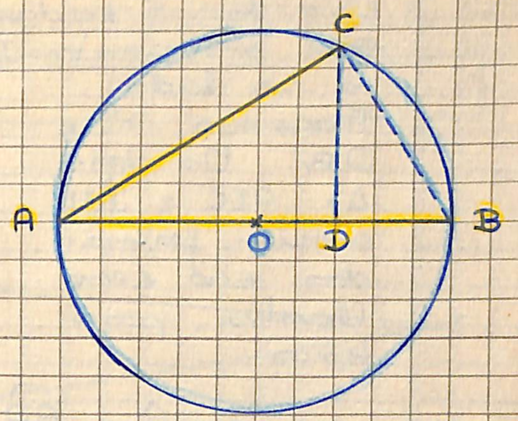
28. 8.

3. 2a Propriedade - Teorema

Em todo círculo, onde uma corda e um diâmetro têm uma extremidade comum, a corda é média proporcional entre o diâmetro inteiro e a sua projeção sôbre êle.-

Hip.: AC: corda, AB: diâmetro, A: extremidade comum

Tese: $\boxed{\overline{AC}^2 = AB \cdot AD}$



Dem.: Consideremos o círculo de centro O; AC a corda e AB o diâmetro de extremidade comum A.

Ligando-se o extremo C da corda com com o extremo B do diâmetro, teremos o triângulo retângulo ACB cujo ângulo C é reto por estar inscrito numa semi circunferência.

O lado AC é um cateto, o diâmetro AB a hipotenusa e o segmento AD é a projeção do cateto AC s/ a hipotenusa, logo pelo teorema do item 5, parte b, capítulo I, IIa parte, temos

$$\boxed{\overline{AC}^2 = AB \cdot AD}$$

c. q. d.

2. 9.

4. 3a Propriedade - Teorema

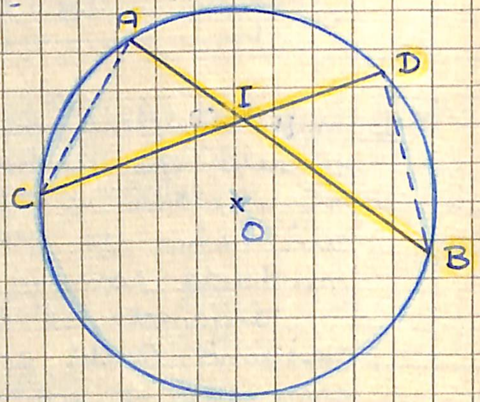
Se duas cordas se cortam no mesmo ponto, o produto dos dois segmentos de cada uma é constante.-

Hip.: AB e CD são cordas do círculo de centro O que se cortam em I

Tese: $\boxed{AI \times IB = CI \times ID}$

Dem.: Consideremos o círculo de centro O

e as duas cordas CD e AB que se cortem no ponto I (figura ao lado).



Tracemos AC e DB. Os dois Δs AIC e BID assim formados são semelhantes, pois temos:

$$\hat{C} = \hat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

ou seja, êsses dois ∢s são inscritos e possuem a mesma medida, que é a metade do arco DA ou AD.

Do mesmo modo temos

$$\hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{CB}}{2}$$

e os dois Δs, possuindo 2 ∢s iguais, são semelhantes (1º caso de semelhança de Δs; c.f. ano 3ª)

Da semelhança dos triângulos decorre a proporcionalidade dos lados, ou seja:

$$\frac{BI}{CI} = \frac{DI}{AI}$$

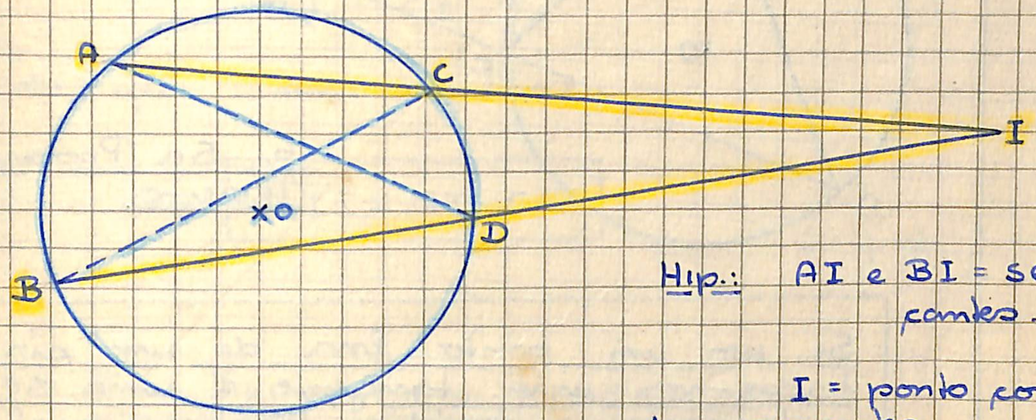
e, por conseguinte, a tese:

$$\boxed{AI \cdot IB = CI \cdot ID}$$

c.q.d.

17.9. 5. 4a Propriedade - Teorema

Quando duas secantes têm um ponto comum fora do círculo, o produto da primeira pela sua parte externa é igual ao produto da 2a pela sua parte externa.-



Hip.: AI e BI = secantes.

I = ponto comum das secantes.

Tese: $\boxed{AI \cdot CI = BI \cdot DI}$

Dem.: Para demonstrar, liguemos A com D e B com C, obtendo assim os Δs quaisquer AID e BIC, que são semelhantes porque:

∢ I = ∢ I (em comum)

∢ B = ∢ A (têm por medida ambos $\frac{\widehat{CD}}{2}$)

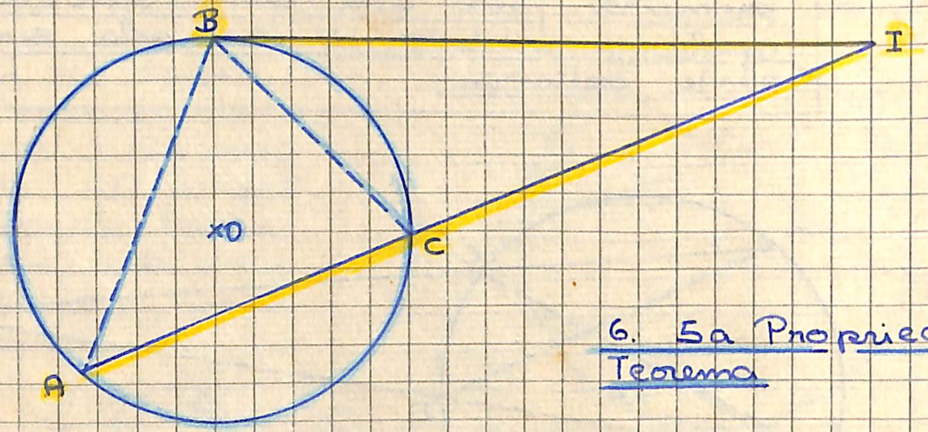
Sendo semelhantes os Δs considerados, os seus lados são proporcionais:

$$\frac{AI}{BI} = \frac{DI}{CI} \quad \therefore$$

$$\boxed{AI \cdot CI = BI \cdot DI}$$

c.q.d.

18.9.



6. 5a Propriedade - Teorema

> Se, por um ponto fora de um círculo, traçarmos uma tangente e uma secante, a tangente é média proporcional entre essa secante e a sua parte externa.

Hip.: BI = tangente   AI = secante

I = ponto comum   CI = parte externa da sec.

Tese: $\boxed{\overline{BI}^2 = AI \cdot CI}$

Dem.: Consideremos o círculo de centro O e supunhamos que BI é uma tangente e AI uma secante, que tem o ponto I em comum. Com efeito, traçemos AB e BC e demonstremos que os Δs BCI e ABI, assim formados, são semelhantes.

De fato, os Δs possuem:

$$\measuredangle I = \measuredangle I \text{ (em comum)}$$

$\measuredangle A = \measuredangle CBI$ (esta igualdade existe em virtude de ser o $\measuredangle A$ inscrito e $\measuredangle CBI$ um $\measuredangle$ de segmento, ambos tendo por medida a metade do arco BC.)

Portanto, tendo dois $\measuredangle$ iguais, os Δs são semelhantes (1º caso).

Da semelhança decorre a proporcionalidade dos lados, ou seja

$$\frac{AI}{BI} = \frac{BI}{CI}$$

do que vem a tese:

$$\boxed{\overline{BI}^2 = AI \cdot CI}$$

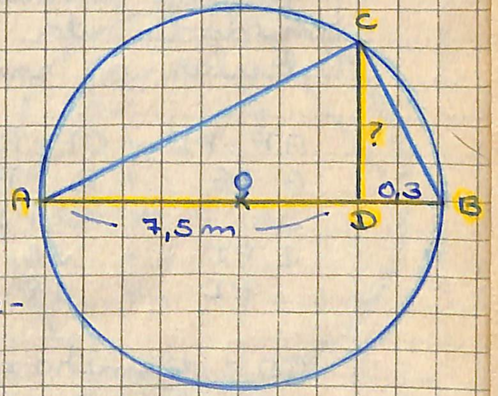
c.q.d.

II - Exercícios Resolvidos

28.8. 1. Calcular a ordenada de um ponto da circunferência, sabendo que a mesma determina no diâmetro 2 segmentos de 0,3 m e 7,5 m

Cálculo:

$$\overline{CD}^2 = AD \cdot DB$$
$$\overline{CD}^2 = 7{,}5 \cdot 0{,}3$$
$$\overline{CD}^2 = 2{,}25$$
$$CD = \sqrt{2{,}25}$$
$$CD = 1{,}5 \text{ m}$$



Resposta: a ordenada mede 1,5 m

5.9. 2. Num círculo, duas cordas se cortam. Os dois segmentos da primeira medem respectivamente 3 cm e 8 cm. Calcular os dois segmentos da 2a corda, sabendo-se que estão entre si como 2 está para 3.

Cálculo:

$$3 : 8 :: 2 : 3$$
$$24 = 6$$
$$24/6 = 4 \qquad \frac{24}{4} = 6$$

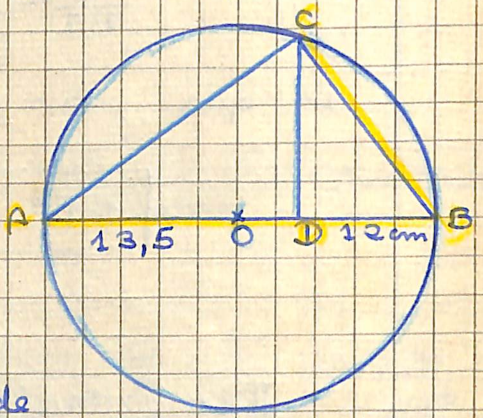
Resposta: medem 4 cm e 6 cm, respectivamente.

3. O raio de um círculo tem ..... 13,5 m. Da estremidade de um diâmetro deste círculo traça-se uma corda cuja projeção s/ o mesmo diâmetro é de 12 m. Calcular o comprimento desta corda.

Cálculo:

diâmetro = AB = 2 x AO
diâmetro = AB = 27 cm

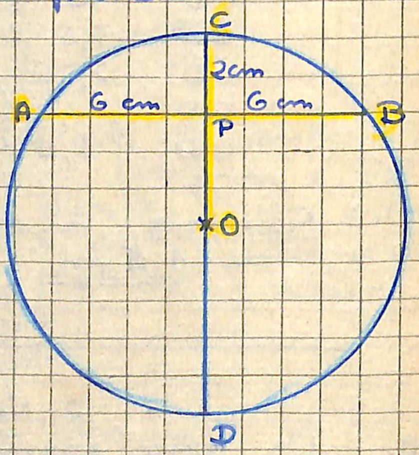
$\overline{CB}^2 = AB \cdot DB$
$\overline{CB}^2 = 27 \cdot 12$
$\overline{CB}^2 = 324$
$CB = \sqrt{324}$
$CB = 18$



Resposta: a corda BC mede 18 m.

4. Do meio de um segmento AB de 12 cm. eleva-se uma perpendicular de 2 cm, e faz-se passar uma circunferência pelas extremidades da perpendicular e do segmento. Calcular o raio da circunferência.

$AP \cdot PB = CP \cdot PD$
$6 \cdot 6 = 2 \cdot PD$
$36 = 2\,PD$
$2\,PD = 36$
$PD = 18$



CD = diâmetro = CP + PD
CD = 2 + 18 = 20

CO = raio = CD/2
CO = 20/2 = 10

Resposta: O raio meio 10 cm.

16.9. 5. O segmento da perpendicular levantada do meio de uma corda até a circunferência tem tem 12 cm. Calcular o comprimento desta corda, sabendo que o raio do círculo é de 15,6 cm.

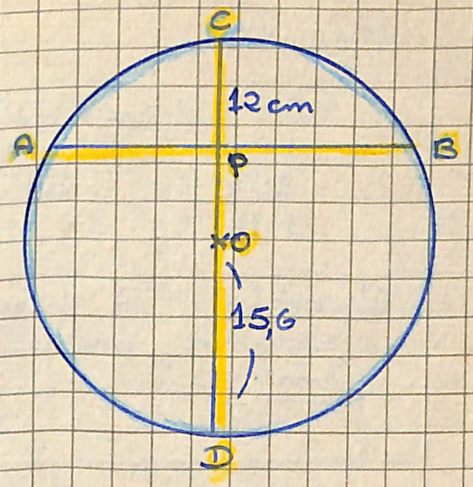
Cálculo:

CD = diâmetro = 2 r
CD = 15,6 x 2 = 31,2 cm

DP = CD - CP
DP = 31,2 - 12
DP = 19,2

AP = PB

$CP \cdot PD = AP \cdot PB$
$12 \cdot 19,2 = AP \times AP$
$230,4 = AP^2$
$AP = \sqrt{230,4}$
AP = 15,17 cm



Resposta: A metade da corda mede 15,17 cm

17.9. 6. Num círculo de 25 cm de raio traçamos a corda AB igual a 30 cm e a corda BC perpendicular ao diâmetro que passa por A. Calcular a corda BC.

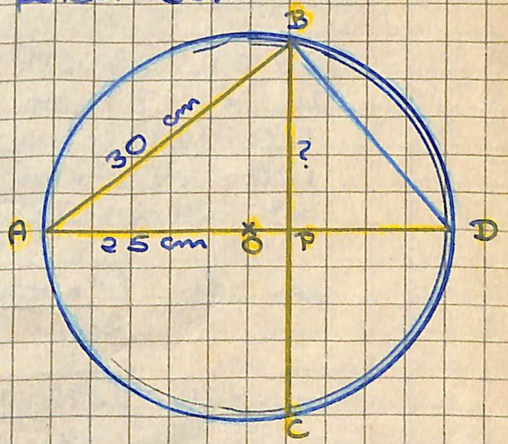
Cálculo:

AD = diâmetro = AO x 2
AD = 25 x 2 = 50

$\overline{AB}^2 = AD \cdot AP$
$30^2 = 50 \cdot AP$
$900 = 50\,AP$
$AP = 18$

PD = AD - AP
PD = 50 - 18
PD = 32

$\overline{BP}^2 = AP \cdot PD$
$\overline{BP}^2 = 18 \cdot 32$
$\overline{BP}^2 = 576$
$BP = 24$



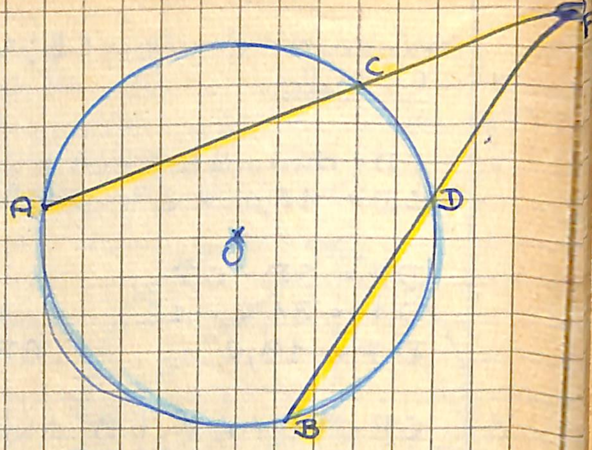
BC = 2 x BP = 2 x 24 = 48

Resposta: A corda BC mede 48 cm

7. Num círculo são traçadas as duas secantes: uma mede 18 cm e a sua parte externa, 6 cm. Calcular a segunda secante, sabendo-se que a sua parte externa mede 9 cm.

Cálculo:

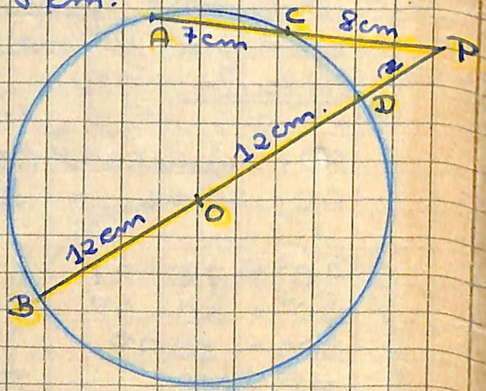
$AP \cdot CP = BP \cdot DP$
$18 \cdot 6 = BP \cdot 9$
$108 = 9\,BP$
$BP = 12$ cm.



Resposta: A segunda secante mede 12 cm.

18.9. 8. Em um círculo foram traçadas duas secantes com um ponto comum, uma das quais foi conduzida pelo centro do círculo que mede 12 cm de raio. Calcular a parte externa da secante traçada pelo centro do círculo, sabendo-se que a outra secante mede 15 cm e a sua parte externa, 8 cm.

Cálculo:



$AP \cdot CP = BP \cdot DP$
$15 \cdot 8 = BP \cdot x$
$120 = (24 + x) \cdot x$
$120 = 24x + x^2$
$x^2 + 24x - 120 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \dfrac{-24 \pm \sqrt{576 - 4 \cdot (-120)}}{2a}$ $\qquad$ $x = \dfrac{-24 \pm \sqrt{1056}}{2}$

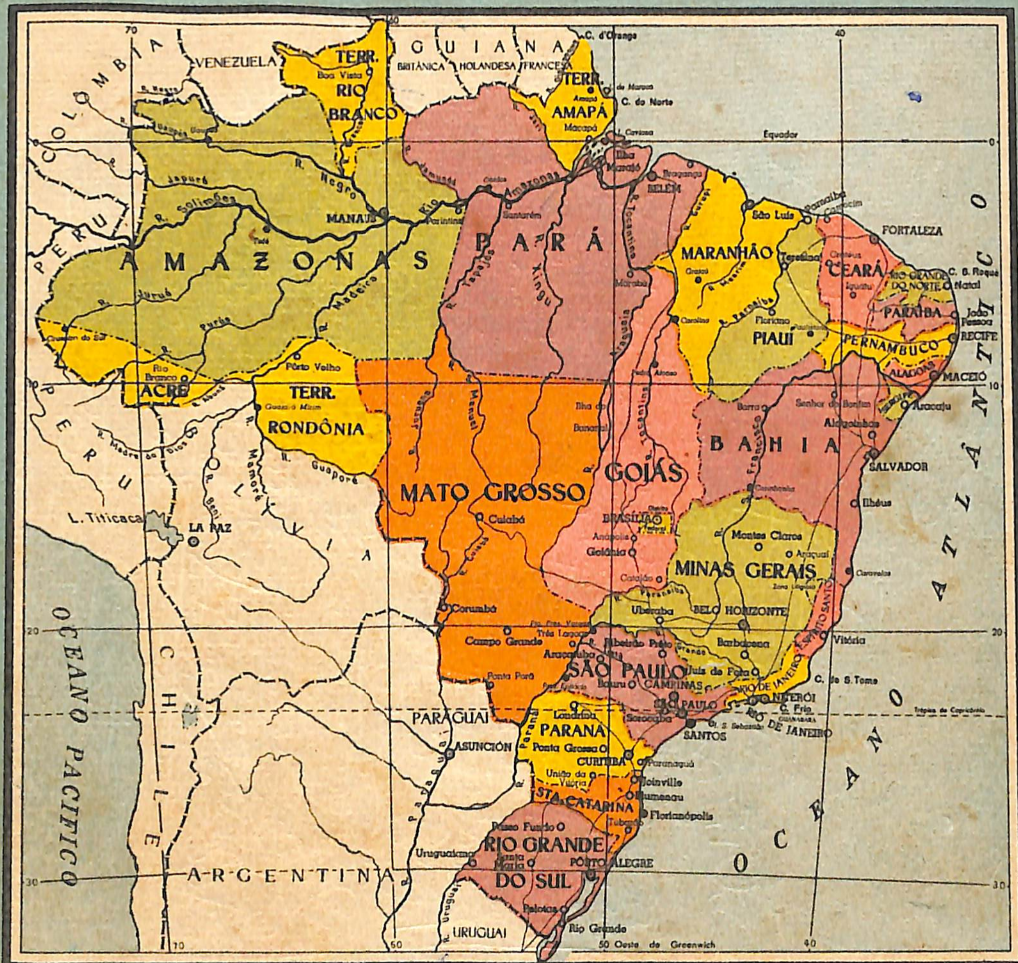
$x = \dfrac{-24 \pm 32{,}5}{2}$ $\qquad$ $x' = \dfrac{-24 + 32{,}5}{2} = \dfrac{8{,}5}{2}$

$x' = 4{,}25$ $\qquad$ $x'' = -28{,}25$

Resposta: a parte externa da secante traçada pelo centro do círculo, mede 4,25 cm

Franzoni

Geraldo V E berle



SUPERFÍCIE 8.513.844 KM²
POPULAÇÃO ESTIMATIVA EM JANEIRO DE 1962, 70.500.000 HABITANTES.