

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
FÁBIO ANDRÉ KANNENBERG

TEOREMA DA ESFERA CABELUDA

Blumenau

2019

Fábio André Kannenberg

TEOREMA DA ESFERA CABELUDA

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva

Blumenau

2019

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária da Universidade Federal de Santa Catarina.

Arquivo compilado às 10:37h do dia 11 de julho de 2019.

Kannenberg, Fábio André

Teorema da esfera cabeluda : / Fábio André Kannenberg; Orientador, Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva; - Blumenau, 10:37, 27 de junho de 2019.

78 p.

Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Blumenau, Curso de Licenciatura em Matemática.

Inclui referências

1. Superfícies regulares. 2. Campos de vetores. 3. Singularidades de campos de vetores. I. Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva II. Curso de Licenciatura em Matemática III. Título.

Fábio André Kannenberg

TEOREMA DA ESFERA CABELUDA

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de Licenciado em Matemática, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina.

Blumenau, 27 de junho de 2019.

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Coordenador do Curso de Licenciatura em
Matemática

Banca Examinadora:

Prof. Dr. André Vanderlinde da Silva
Orientador
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Jorge Luiz Deolindo Silva
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Prof. Dr. Rafael dos Reis Abreu
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, o professor André Vanderlinde, por todas as conversas. Seu apoio, disponibilidade e paciência, desde o início do curso, foram fundamentais.

Aos meus pais, Edemir e Leonida, por todo o suporte e incentivo.

Aos meus amigos, em especial à Diana e ao Gustavo, meus colegas de turma, pelo companheirismo e por terem enriquecido de muitas maneiras esta trajetória.

À todo o corpo docente do curso de Licenciatura em Matemática da UFSC de Blumenau, por, além das ótimas aulas, serem sempre tão acessíveis e preocupados conosco. Foi um prazer tê-los como professores.

“C’est par la logique qu’on démontre, c’est par l’intuition qu’on invente.”

Henri Poincaré

RESUMO

É apresentada uma demonstração do Teorema da Esfera Cabeluda sob um ponto de vista analítico. Para tanto, foi necessário realizar um estudo sobre superfícies e campos de vetores sobre superfícies. Dessa maneira, foram inicialmente discutidos resultados e exemplos relacionados a estes objetos. Além disso, são investigadas duas aplicações do Teorema: uma de natureza essencialmente matemática, e outra da Física, no campo da óptica geométrica.

Palavras-chaves: Superfícies regulares. Campos de vetores. Singularidades de campos de vetores.

ABSTRACT

A proof of the Hairy Ball Theorem under an analytical viewpoint is presented. To reach that objective, it was necessary to study surfaces and vector fields over surfaces. Hence, results and examples related to these objects were initially discussed. Two applications of the Theorem were also investigated: the first's nature is essentially mathematical, while the second is an application from physics, in the geometric optics field.

Keywords: Regular surfaces. Vector fields. Singularities of vector fields.

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 2 | SUPERFÍCIES REGULARES | 17 |
| 3 | CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES | 35 |
| 3.1 | PLANOS TANGENTES | 35 |
| 3.2 | CAMPOS DE VETORES | 39 |
| 4 | TEOREMA DA ESFERA CABELUDA | 45 |
| 4.1 | APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA | 45 |
| 4.2 | RESULTADOS AUXILIARES | 45 |
| 4.3 | O TEOREMA DA ESFERA CABELUDA | 51 |
| 5 | APLICAÇÕES | 55 |
| 5.1 | TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER | 55 |
| 5.2 | APLICAÇÃO NA FÍSICA | 60 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 63 |
| | REFERÊNCIAS | 65 |
| | APÊNDICE A – PRÉ-REQUISITOS DE ANÁLISE NO R^n | 69 |
| A.1 | NOÇÕES PRELIMINARES | 69 |
| A.2 | CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS | 70 |
| A.3 | CONTINUIDADE | 71 |
| A.4 | COMPACIDADE E CONEXIDADE | 72 |
| A.5 | DIFERENCIABILIDADE | 74 |
| A.5.1 | Teorema da Aproximação de Weierstrass | 77 |
| A.5.2 | Teorema da Função Inversa | 77 |

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é, de certo modo, o resultado de muitas conversas sobre variados temas e áreas da Matemática que tive com o professor André Vanderlinde ao longo da graduação, em especial a partir de 2016. Posteriormente, na metade de 2017, formalizamos um projeto de iniciação científica voluntário, cujos trabalhos tiveram continuidade nesta monografia.

No início, as discussões tinham caráter essencialmente intuitivo, e proporcionaram um contato com as áreas da matemática de uma maneira distinta das experiências que tive nas disciplinas da grade curricular. Pela liberdade de não estarmos presos a uma ementa, pudemos explorar campos da Matemática guiados pela curiosidade, às vezes nos deparando com temas complexos, como quando discutimos brevemente sobre grupos de homotopia, sobretudo o grupo fundamental. Devido a essas investigações, fascinei-me com a forma que os conceitos e objetos matemáticos de diferentes áreas podem ser entrelaçados para compor novos resultados e teorias.

Com o passar do tempo, interessei-me principalmente pela Topologia e Geometria, e as conversas começaram a tomar um rumo mais definido e melhor fundamentado. Por meio de leituras como *Intuitive Topology* ([12]), de Prasolov, e *The Shape of Space* ([13]), de Jeffrey Weeks, estudei com mais calma os conceitos de deformações, homeomorfismos e variedades de duas e três dimensões, ainda que de forma principalmente intuitiva. O desenvolvimento dessa intuição foi fundamental para quando começamos a fundamentar os conceitos com mais rigor, no ano de 2018.

O tema deste Trabalho de Conclusão de Curso (estudar uma demonstração do Teorema da Esfera Cabeluda) foi uma sugestão do professor André. Segundo tal Teorema, não é possível construir sobre a esfera um campo de vetores contínuo, tangente e sem singularidades. Foi proposto originalmente por Henri Poincaré, que o deduziu de sua versão ainda bidimensional do Teorema de Poincaré-Hopf. Uma demonstração para o caso mais geral, que contempla

esferas de dimensão par, foi elaborada posteriormente por Brouwer ([3], p. 572).

Escolhemos o tema por acreditarmos esse que assunto se alinhava com o que havíamos discutido até então, além de que sua exploração envolve estudos e o uso de ferramentas de diferentes áreas, como a Álgebra Linear, a Geometria, a Análise e a Topologia. Levando isto em conta, para a leitura do texto ser proveitosa, sugerimos que o leitor já tenha familiaridade com conceitos geralmente discutidos em disciplinas como Cálculo III, Álgebra Linear II e Análise Real.

Os Capítulos 2 e 3 discutem os conceitos de superfície e campos de vetores sobre superfícies, essenciais para estudar a demonstração desse Teorema. Para escrevê-los, utilizamos como referências [2], [7] e [11]. No Capítulo 4, realizamos uma prova para o Teorema da Esfera Cabeluda baseados em uma demonstração feita por John Milnor em seu artigo “*Analytic Proofs of the ‘Hairy Ball Theorem’ and the Brouwer Fixed Point Theorem*” ([9]). No último capítulo, são apresentadas duas aplicações do Teorema da Esfera Cabeluda. Há também um apêndice sobre pré-requisitos de Análise no \mathbb{R}^n , no qual incluímos resultados e definições que utilizamos ao longo de todos os capítulos, mas que julgamos que uma discussão mais aprofundada fugiria do escopo do trabalho. Para compô-lo, baseamo-nos em [6] e [8].

Com relação às figuras, a maioria foi feita com uma versão de testes do software *Mathematica*. Algumas poucas, contudo, por serem mais elaboradas, foram retiradas das referências.

2 SUPERFÍCIES REGULARES

O conceito de superfícies regulares fundamentará toda a discussão. A esfera, o objeto geométrico sobre o qual desejamos estudar propriedades no Capítulo 4, é uma superfície, como veremos ainda neste capítulo. Assim como curvas são consideradas generalizações da reta, uma superfície é uma generalização do plano, isto é, é um objeto bidimensional que pode apresentar curvatura — diferente do plano que, de certo modo, é “não curvo”. Vejamos, então, como podemos caracterizar matematicamente uma superfície. Alguns dos conceitos utilizados nas definições e exemplos a seguir são apresentados no Apêndice A.

Definição 2.1 (SUPERFÍCIE REGULAR). Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existir uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^3$ e uma parametrização $\sigma : U \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ para $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tais que:

(i) σ é diferenciável, isto é, se tivermos

$$\sigma(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)), (u_1, u_2) \in U,$$

as funções $x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)$ possuem derivadas parciais de todas as ordens contínuas em U ;

(ii) σ é um homeomorfismo;

(iii) Para todo $q \in U$, $d\sigma(q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

Além de *parametrização*, a aplicação σ introduzida na Definição 2.1 pode também ser chamada de *carta* ou *mapa*. Chamamos de *atlas* a coleção de parametrizações σ que, juntas, são suficientes para cobrir uma superfície regular S . Por simplicidade, denominaremos superfície regular apenas por *superfície*.

A seguir, discutiremos alguns exemplos de superfícies.

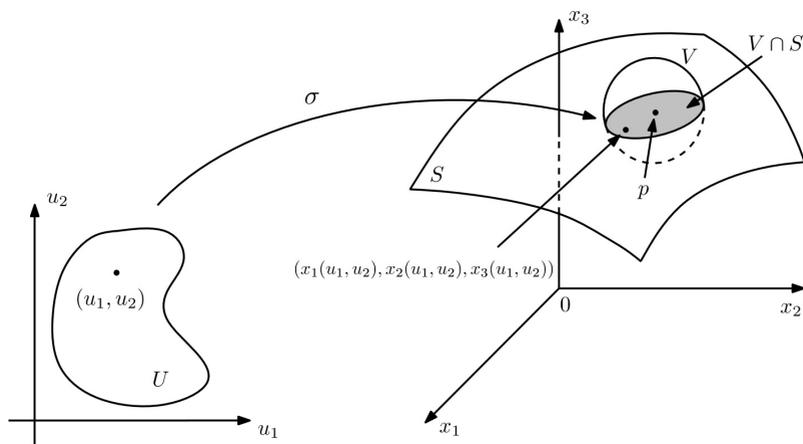


Figura 2.1 – Ilustração da definição de superfície regular.

Exemplo 2.1 (PLANO). O plano Π determinado pelos pontos de \mathbb{R}^3 que satisfazem a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ é uma superfície. De fato, defina $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ dada por

$$(u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, 2 - u_1 - u_2).$$

O Teorema A.11 garante que σ é diferenciável e, em particular,

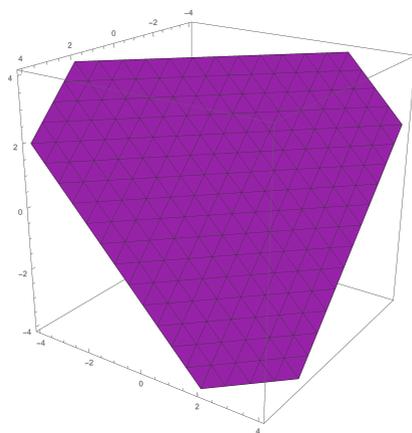


Figura 2.2 – Plano.

contínua. Além disso, note que um ponto qualquer de Π é da forma $(u_1, u_2, 2 - u_1 - u_2)$. Logo, tomando $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, temos $\sigma(u_1, u_2) = (u_1, u_2, 2 - u_1 - u_2) \in \sigma(\mathbb{R}^2)$, isto é, σ é sobrejetiva. Observe ainda que, para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2) \implies (x_1, x_2, 2 - x_1 - x_2) = (y_1, y_2, 2 - y_1 - y_2),$$

ou seja, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Assim, σ é também injetiva e, portanto, bijetiva. Considere agora $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2)$. Segue que: $\sigma \circ \tilde{\sigma}|_{\Pi}(u_1, u_2, 2 - u_1 - u_2) = (u_1, u_2, 2 - u_1 - u_2)$ e $\tilde{\sigma}|_{\Pi} \circ \sigma(u_1, u_2) = (u_1, u_2)$, isto é, $\sigma^{-1} = \tilde{\sigma}|_{\Pi}$. Como σ^{-1} também é contínua (Teoremas A.3 e A.4), temos que σ é um homeomorfismo. Por fim, sendo $d\sigma(u_1, u_2)$ a jacobiana de σ e $v = (v_1, v_2)$ um vetor qualquer de \mathbb{R}^2 , segue que

$$d\sigma(u_1, u_2) \cdot v = 0 \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, devemos ter $v = (0, 0)$ para que a igualdade seja satisfeita. Dito de outra maneira, o Núcleo($d\sigma(u_1, u_2)$) = $\{(0, 0)\}$, o que implica que $d\sigma(u_1, u_2)$ é injetiva. Portanto, segundo os termos da Definição 2.1, o plano Π é uma superfície.

No exemplo acima, foi suficiente utilizar uma única parametrização σ para mostrar que o plano Π é uma superfície. Em casos assim, dizemos que σ é uma *parametrização global*. Vejamos outro exemplo.

Exemplo 2.2 (PARABOLOIDE DE REVOLUÇÃO). O conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$$

é denominado *parabolóide de revolução*. Provaremos que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ também é uma superfície. De fato, defina a aplicação $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ dada por $(u_1, u_2) \mapsto (u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2)$. Assim como no exemplo anterior, σ é diferenciável pelo Teorema A.11. Além disso, observe que σ é injetiva, pois para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2) \implies (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2) = (y_1, y_2, y_1^2 + y_2^2),$$

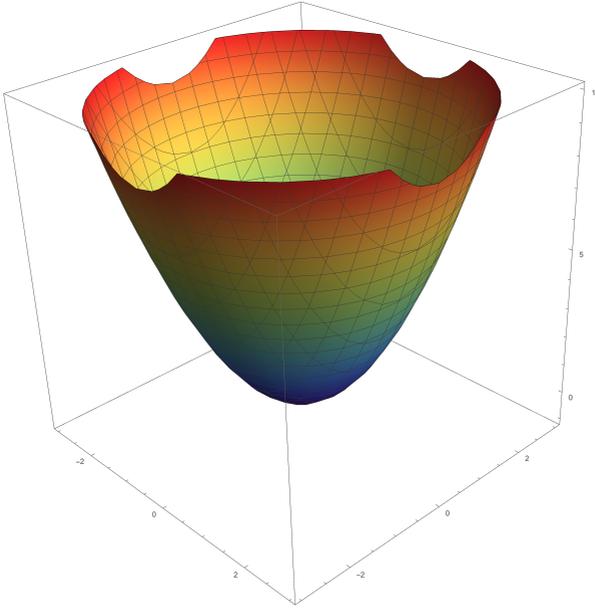


Figura 2.3 – Parabolóide de Revolução.

e, logo, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$; e também sobrejetiva, pois tomando arbitrariamente $(u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2) \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, basta aplicar σ à $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ e temos que $\sigma(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2) \in \sigma(\mathbb{R}^2)$. Para que σ seja um homeomorfismo, resta-nos mostrar que sua inversa é contínua. Considere $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_2).$$

Note que $\sigma \circ \tilde{\sigma}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}(u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2) = \sigma(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2)$ e que $\tilde{\sigma}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \circ \sigma(u_1, u_2) = \tilde{\sigma}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}(u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2) = (u_1, u_2)$. Portanto, $\sigma^{-1} = \tilde{\sigma}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}$ é a inversa de σ , e sua continuidade é garantida pelo Teorema A.4. Finalmente, sejam $d\sigma(u_1, u_2)$ a jacobiana de σ e $v = (v_1, v_2)$ um vetor de \mathbb{R}^2 . Então,

$$d\sigma(u_1, u_2) \cdot v = 0 \iff \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 2u_1v_1 + 2u_2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é, devemos ter $v = (0, 0)$. Segue que $\text{Nuc}(d\sigma(u_1, u_2)) = \{(0, 0)\}$

e, desse modo, $d\sigma(u_1, u_2)$ é injetiva. Portanto, segundo a Definição 2.1, o parabolóide de revolução $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é outro exemplo de superfície.

Tanto o plano Π do Exemplo 2.1 quanto o parabolóide $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ do Exemplo 2.2 são gráficos de funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Mais precisamente, dizemos que o gráfico de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, em que U é um aberto, é o conjunto

$$G_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(x_1, x_2) \text{ e } (x_1, x_2) \in U\}.$$

Vimos apenas dois exemplos desta natureza, mas é interessante estudar se este comportamento se mantém ao analisarmos outros gráficos de funções desse tipo. De fato, é disso que o Teorema 2.1 a seguir trata.

Teorema 2.1. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, em que U é um aberto, uma função suave¹. Então G_f é uma superfície.*

Demonstração. Seja a função $\sigma : U \rightarrow G_f$ dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

Mostraremos que σ é uma parametrização global de G_f . Note que é injetora: dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in U$ segue que

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) = \sigma(y_1, y_2) &\iff (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = (y_1, y_2, f(y_1, y_2)) \iff \\ x_1 = y_1 \text{ e } x_2 = y_2 &\iff (x_1, x_2) = (y_1, y_2). \end{aligned}$$

Também é sobrejetiva: dado $(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in G_f$, basta tomar $\sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$. Portanto, satisfaz a bijetividade. Além disso, como f é uma função suave, σ é contínua pelo Teorema A.4.

Considere agora a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2). \end{aligned}$$

¹ Isto é, é uma função de classe C^∞ .

Seja $\pi = \varphi|_{G_f}$. Logo,

$$\sigma \circ \pi(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

Logo, $\sigma \circ \pi = id_{G_f}$. Por outro lado,

$$\pi \circ \sigma(x_1, x_2) = \pi(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = (x_1, x_2).$$

Assim, $\pi \circ \sigma = id_U$ e, portanto, $\pi = \sigma^{-1}$. Além disso, note que π é contínua, pois sendo (a_1, a_2, a_3) um elemento qualquer fixado do domínio de π , dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon$ e temos que

$$\begin{aligned} & \| (x_1, x_2, x_3) - (a_1, a_2, a_3) \| < \delta \\ \implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < \delta \\ \implies & \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta = \epsilon \\ \implies & \| (x_1, x_2) - (a_1, a_2) \| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, σ é um homeomorfismo. Pelo Teorema A.10, por f ser suave concluímos que σ é suave. Por fim, resta-nos mostrar que σ é uma parametrização regular, isto é, que a matriz $d\sigma(x)$, para todo $x \in U$, é injetiva. De fato,

$$d\sigma(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix}$$

é injetiva, pois suas colunas são linearmente independentes. ■

Exemplo 2.3 (PARABOLOIDE HIPERBÓLICO). Chamamos o conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 = x_3\}$$

de *paraboloide hiperbólico*. Note que $\mathcal{P}_{\mathcal{H}} = G_f$, em que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Como f é suave e \mathbb{R}^2 é aberto, segue pelo Teorema 2.1 que $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ é uma superfície.

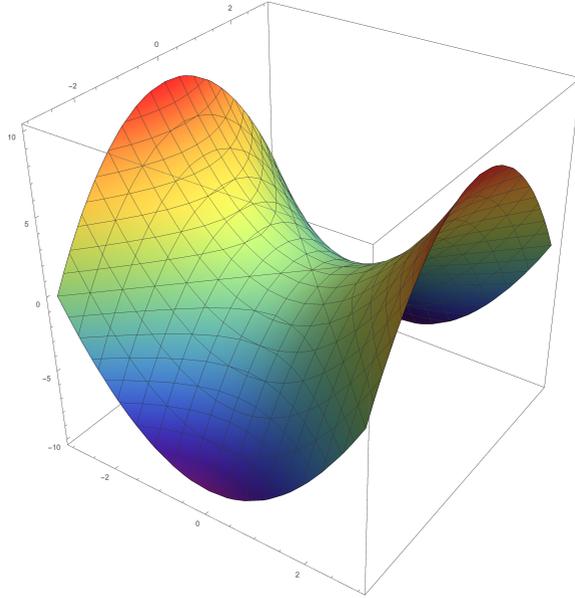


Figura 2.4 – Paraboloide Hiperbólico.

Por meio do Teorema 2.1, aprendemos a determinar uma gama de superfícies. Entretanto, gráficos de funções não são as únicas superfícies existentes. A esfera, por exemplo, não atende as hipóteses do Teorema 2.1 e é uma superfície, como veremos a seguir.

Exemplo 2.4 (ESFERA). A *esfera* de raio $r > 0$ é o conjunto

$$S_r^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}. \quad (2.1)$$

Mostraremos que S_r^2 é uma superfície² apresentando dois atlas distintos.

(i) (COORDENADAS CARTESIANAS) Um primeiro atlas para a esfera é o composto pelas parametrizações:

$$\phi_+^{x_1}, \phi_-^{x_1}, \phi_+^{x_2}, \phi_-^{x_2}, \phi_+^{x_3}, \phi_-^{x_3} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

² Por simplicidade, denotamos $S^2 := S_1^2$.

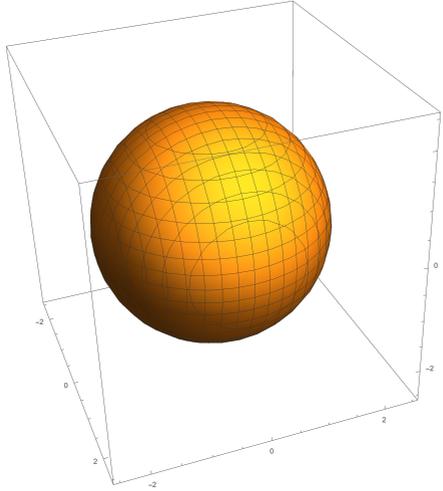


Figura 2.5 – Esfera.

definidas no aberto $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$, em que

$$\begin{aligned}\phi_{\pm}^{x_1}(x_1, x_2) &= \left(\pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, x_1, x_2 \right), \\ \phi_{\pm}^{x_2}(x_1, x_2) &= \left(x_1, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, x_2 \right), \\ \phi_{\pm}^{x_3}(x_1, x_2) &= \left(x_1, x_2, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right).\end{aligned}$$

Como ilustrado pela Figura 2.6, cada uma das parametrizações corresponde a um hemisfério da esfera. É importante ressaltar que, por exemplo, $\phi_+^{x_3}(U) \cup \phi_-^{x_3}(U) = S_r^2 \setminus C$, em que $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = r^2 \text{ e } x_3 = 0\}$, isto é, a esfera não é inteiramente coberta apenas por $\phi_{\pm}^{x_3}$.

As inversas de cada parametrização são imediatas. Por exemplo, se considerarmos

$$\phi_+^{x_3}(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

sua inversa é $(\phi_+^{x_3})^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

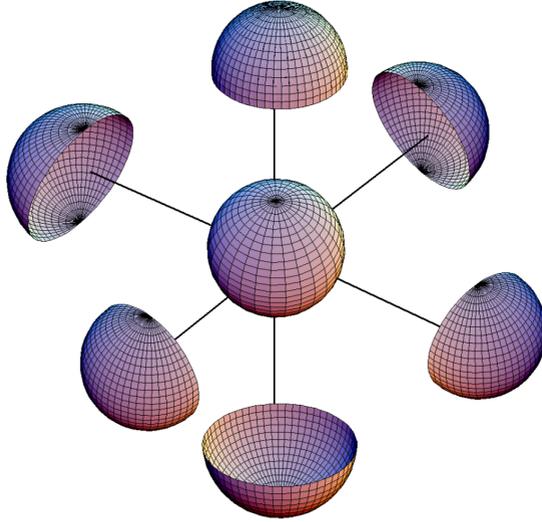


Figura 2.6 – Ilustração retirada de ([11], p. 78).

(ii) (PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA) Podemos construir um segundo atlas para a esfera de raio $r > 0$ através da projeção estereográfica. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, consideramos o respectivo ponto $P = (x_1, x_2, 0)$ no plano X_1OX_2 e a reta definida pelo ponto P e pelo polo norte $N = (0, 0, r)$. Essa reta intersecta a esfera num ponto Q .

Afirmção: o ponto Q é dado por

$$Q = \left(\frac{2x_1r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{2x_2r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{r(x_1^2 + x_2^2 - r^2)}{x_1^2 + x_2^2 + r^2} \right).$$

Demonstração. Assim, dado $P = (x_1, x_2, 0)$, desejamos descobrir o ponto Q pertencente à esfera S_r^2 . Seja $v = \overrightarrow{NP}$ a reta que passa pelos pontos N e P . Como $N = (0, 0, r)$ e $P = (x_1, x_2, 0)$, então devemos ter $v = \overrightarrow{NP} = (x_1, x_2, -r)$. É possível parametrizar v . Chamemos de t tal parametrização. Então,

$$\begin{aligned} r(t) &= N + tv = (0, 0, r) + (x_1t, x_2t, -rt) \\ &= (x_1t, x_2t, r(1 - t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Note que \overleftrightarrow{NP} intersecta a esfera, e que os pontos da esfera obedecem a relação $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$. Dessa forma, isolando t na equação $(x_1t)^2 + (x_2t)^2 + (r(1-t))^2 = r^2$, encontramos os pontos que pertencem à reta e à esfera simultaneamente. Isto é, poderemos determinar o ponto Q que nos interessa. Assim,

$$\begin{aligned}(x_1t)^2 + (x_2t)^2 + (r(1-t))^2 &= r^2 \\ (x_1t)^2 + (x_2t)^2 + r^2 - 2tr^2 + r^2t^2 &= r^2 \\ t^2(x_1^2 + x_2^2 + r^2) - 2tr^2 &= 0 \\ t(x_1^2 + x_2^2 + r^2) &= 2r^2.\end{aligned}$$

Logo, $t = \frac{2r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}Q &= (x_1t, x_2t, r(1-t)) \\ &= \left(\frac{2x_1r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{2x_2r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{r(x_1^2 + x_2^2 - r^2)}{x_1^2 + x_2^2 + r^2} \right),\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Qualquer ponto Q da esfera, com exceção do polo norte N , surge como esse ponto de interseção. A função

$$\begin{aligned}\sigma_N : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S_r^2 \setminus \{N\} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{2x_1r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{2x_2r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{r(x_1^2 + x_2^2 - r^2)}{x_1^2 + x_2^2 + r^2} \right)\end{aligned}$$

é uma parametrização da esfera toda, menos o polo norte. Para cobrir o polo norte, basta considerar a parametrização

$$\begin{aligned}\sigma_S : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S_r^2 \setminus \{S\} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{2x_1r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, \frac{2x_2r^2}{x_1^2 + x_2^2 + r^2}, -\frac{r(x_1^2 + x_2^2 - r^2)}{x_1^2 + x_2^2 + r^2} \right)\end{aligned}$$

definida analogamente à σ_N , mas agora a partir do polo sul $S = (0, 0, -r)$. As inversas destas duas parametrizações são $\sigma_N^{-1} : S_r^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{rx_1}{r - x_3}, \frac{rx_2}{r - x_3} \right),$$

e $\sigma_S^{-1} : S_r^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{rx_1}{r+x_3}, \frac{rx_2}{r+x_3} \right).$$

Note que a esfera é uma superfície no sentido da Definição 2.1 e também uma superfície de nível, isto é, conjuntos $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = a\}$ definidos através de equações da forma $f(x_1, x_2, x_3) = a$ em que $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é suave. Resta saber se toda superfície de nível é uma superfície no sentido dado pela Definição 2.1. A Definição 2.2 e o Teorema 2.2 esclarecem essa questão.

Definição 2.2 (VALOR REGULAR). Dizemos que um número real $a \in f(U)$ é *valor regular* de $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $x \in f^{-1}(a)$, o gradiente

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial f}{\partial x_3}(x) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Teorema 2.2. *Seja $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $a \in f(U)$ é um valor regular de f então $S = f^{-1}(a)$ é uma superfície.*

Demonstração. Veja a Proposição 2 de ([2], p. 61). ■

Aplicaremos, nos exemplos a seguir, o Teorema 2.2 para determinar novas superfícies.

Exemplo 2.5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, o conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}$$

é denominado *elipsoide*.

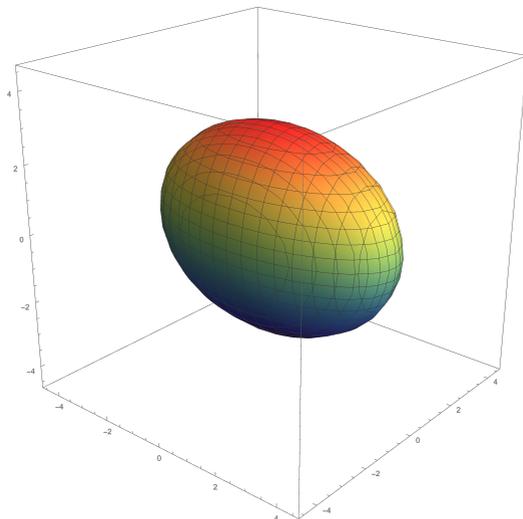


Figura 2.7 – Elipsoide.

Vamos provar que \mathcal{E} é uma superfície. De fato, $\mathcal{E} = f^{-1}(1)$, em que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}.$$

Note que 1 é valor regular de f , pois

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2x_2}{b^2}, \frac{2x_3}{c^2} \right)$$

só se anula em $(0, 0, 0) \notin \mathcal{E}$. Assim, decorre do Teorema 2.2 que \mathcal{E} é uma superfície.

Exemplo 2.6. Os conjuntos

$$\mathcal{H}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

e

$$\mathcal{H}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$$

são chamados, respectivamente, de *hiperboloide de uma folha* e *hiperboloide de duas folhas*.

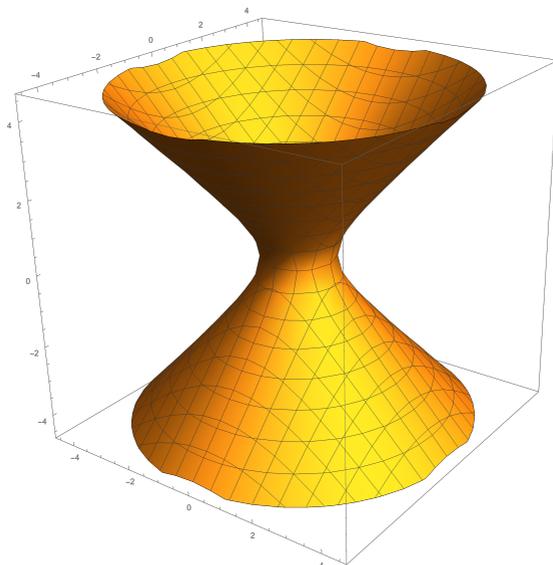


Figura 2.8 – Hiperboloide de uma folha.

Por uma argumentação similar ao exemplo anterior, podemos verificar que estes conjuntos também são superfícies. Observe que $\mathcal{H}_1 = f^{-1}(1)$ e $\mathcal{H}_2 = f^{-1}(-1)$, em que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

Temos que 1 e -1 são valores regulares de f , visto que

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$$

anula-se somente em $(0, 0, 0)$, que não pertence ao conjunto \mathcal{H}_1 e nem ao \mathcal{H}_2 . Portanto, pelo Teorema 2.2, \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 são superfícies.

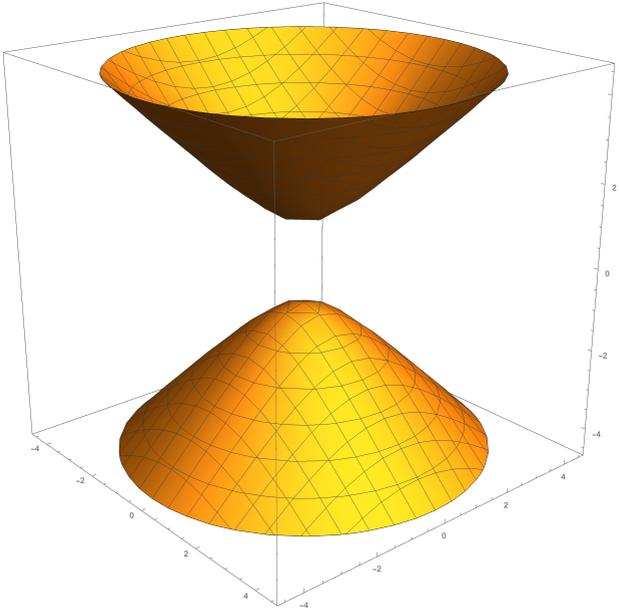


Figura 2.9 – Hiperboloide de duas folhas.

Exemplo 2.7. Considere o plano X_1OX_3 em \mathbb{R}^3 e a circunferência C de raio r no eixo OX_1 cujo centro está a uma distância $a > r$ do eixo OX_3 . Se rotacionarmos a circunferência C em torno do eixo OX_3 , obtemos um conjunto de pontos \mathbb{T}^2 que chamamos de *toro*. Neste exemplo, encontraremos uma equação para o toro e provaremos que ele é uma superfície.

Note que podemos representar a circunferência C pela função $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$u \mapsto (r \cos u + a, 0, r \sin u)$$

em que u é a medida do ângulo entre um raio de C e o eixo OX_1 . Como dito de maneira intuitiva inicialmente, gostaríamos de rotacionar C em torno de OX_3 a fim de construir o toro.

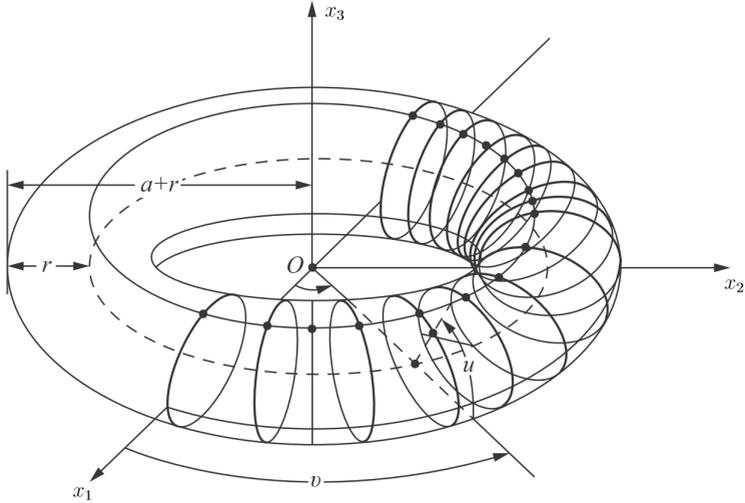


Figura 2.10 – Ilustração retirada de ([2], p. 64).

Para tanto, considere a matriz

$$R(v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\text{sen } v & 0 \\ \text{sen } v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que rotaciona os pontos de \mathbb{R}^3 em torno de OX_3 por um ângulo v , mantendo a coordenada x_3 dos pontos invariante. Podemos obter a rotação desejada multiplicando a matriz $R(v)$ por β . Logo,

$$\begin{aligned} R(v) \cdot \beta(u) &= \begin{bmatrix} \cos v & -\text{sen } v & 0 \\ \text{sen } v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \cos u + a \\ 0 \\ r \cos u \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (r \cos u + a) \cos v \\ (r \cos u + a) \text{sen } v \\ r \text{sen } u \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto é, o toro é descrito por $R(\cdot) \circ \beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\begin{aligned} (u, v) &\mapsto \\ R(v)(\beta(u)) &= ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \text{sen } v, r \text{sen } u). \end{aligned}$$

Note que a restrição de $R(\cdot) \circ \beta$ ao aberto $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ é uma possível carta para o toro. Utilizaremos a aplicação acima para determinar uma equação para o toro:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (a + r \cos u)^2 \cos^2 v + (a + r \cos u)^2 \sin^2 v + r^2 \sin^2 u \\ &= (a + r \cos u)^2 + r^2 \sin^2 u \\ &= a^2 + 2ar \cos u + r^2 \cos^2 u + r^2 \sin^2 u \\ &= a^2 + r^2 + 2ar \cos u. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 + a^2)^2 &= (2a^2 + 2ar \cos u)^2 \\ &= 4a^2(a + r \cos u)^2 \\ &= 4a^2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Portanto, o toro é dado pela equação

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 + a^2)^2 = 4a^2(x_1^2 + x_2^2). \quad (2.2)$$

Provemos, agora, que o toro é uma superfície. De (2.2), segue que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 + a^2 = 2a\sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

isto é, $x_3^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2 = r^2$. Considere a função $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2.$$

Como f não é diferenciável sobre o eixo OX_3 , vamos considerar a restrição de f ao conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, x_3)\}$, para todo $x_3 \in \mathbb{R}$. Note que o conjunto

$$\mathbb{T}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3^2 + \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a\right)^2 = r^2 \right\} = f^{-1}(r^2)$$

corresponde ao toro. Perceba que r^2 é valor regular de f , pois

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \left(2 - \frac{2a}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right), x_2 \left(2 - \frac{2a}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right), 2x_3 \right)$$

nunca é igual a $(0, 0, 0)$, visto que devemos sempre ter x_1 e x_2 não simultaneamente nulos. Portanto, pelo Teorema 2.2, o toro é uma superfície.

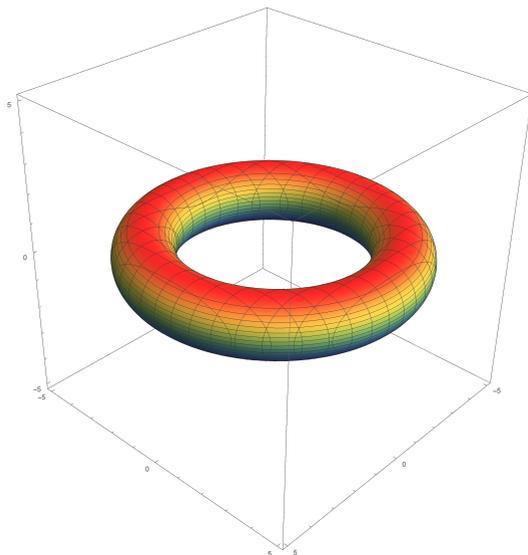


Figura 2.11 – Toro.

3 CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES

Na primeira seção deste capítulo, discutiremos sobre o que são vetores e planos tangentes a uma superfície, definindo estes conceitos e apresentando alguns resultados relevantes. Na segunda seção, trataremos de definir campos de vetores, um conceito essencial para o estudo do Teorema da Esfera Cabeluda. Apresentaremos, ainda, campos de vetores sobre algumas superfícies estudadas no Capítulo 2.

3.1 PLANOS TANGENTES

Definição 3.1 (VETOR TANGENTE). Um *vetor tangente* à superfície S , no ponto $p \in S$, é o vetor tangente $v = \gamma'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável¹ $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$.

Exemplo 3.1. Determinaremos os vetores tangentes à esfera. Considere $\mathbb{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$. Seja $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow S_r^2$ uma carta local de S_r^2 dada por

$$\sigma(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right).$$

Escolha uma curva $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{D} \\ t &\mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}$$

Note que $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_r^2$ dada por

$$t \mapsto \gamma(t) := \sigma \circ \tilde{\gamma}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)} \right)$$

¹ Para uma introdução à teoria de curvas parametrizadas, consulte [2], [7] ou [11].

está bem definida e $v = \gamma'(0)$ é um vetor tangente a S_r^2 . Então,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \left(x_1'(t), x_2'(t), -\frac{x_1(t)x_1'(t) + x_2(t)x_2'(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \right) \\ &= x_1'(t) \left(1, 0, -\frac{x_1(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \right) + \\ &\quad + x_2'(t) \left(0, 1, -\frac{x_2(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \right)\end{aligned}$$

isto é,

$$\gamma(t) = x_1'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) + x_2'(t) \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)), \quad (3.1)$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, em que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) &= \left(1, 0, -\frac{x_1(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \right), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x_1(t), x_2(t)) &= \left(0, 1, -\frac{x_2(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \right).\end{aligned}$$

Em particular, para $t = 0$,

$$v = \gamma'(0) = x_1'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(q) + x_2'(0) \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(q),$$

em que $q = \tilde{\gamma}(0) = (x_1(0), x_2(0))$ e $p = \sigma(q)$.

O mesmo argumento vale para todas as cartas de S_r^2 . Portanto, os vetores tangentes a um ponto da esfera S_r^2 são combinações lineares das derivadas parciais desse ponto.

Teorema 3.1. *Sejam S uma superfície regular, $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$ uma carta para S e $p = \sigma(q) \in S$, $q \in U$. O conjunto dos vetores tangentes à superfície S em $p = \sigma(q)$ coincide com o subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 gerado pelos vetores*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(q) \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(q).$$

Demonstração. Veja Proposição 4.1, em [11]. ■

O subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 descrito no Teorema 3.1 é denominado *Plano Tangente*, e utilizamos a notação $T_p S$. O plano tangente é completamente determinado por um vetor unitário perpendicular a ele. Utilizamos tais vetores para construir campos de vetores em superfícies.

Exemplo 3.2. Calcularemos $T_p S^2$, isto é, o conjunto dos planos tangentes à esfera. Seja $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow S^2$ dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_1, x_2) = \left(x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right).$$

Dado $p = (x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}) \in S^2$, considere

$$\vec{o\hat{p}} = \left(x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right), \text{ em que } o = (0, 0, 0).$$

Note que

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{o\hat{p}}, \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(p) \right\rangle &= \left\langle \left(x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right), \left(1, 0, \frac{-x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right) \right\rangle \\ &= x_1 + 0 - x_1 = 0, \end{aligned}$$

isto é, $\vec{o\hat{p}}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(p)$ são ortogonais. Analogamente, $\vec{o\hat{p}}$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(p)$ também são. Pelo Teorema 3.1, $\vec{o\hat{p}}$ é ortogonal a v , para todo $v \in T_p S^2$. Logo,

$$T_p S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{o\hat{p}}, v \rangle = 0\}.$$

Exemplo 3.3. Segue da Equação (3.1) que:

$$\gamma'(t) = d\sigma(x_1(t), x_2(t)) \cdot \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

em que

$$d\sigma(x_1(t), x_2(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} & -\frac{x_2(t)}{\sqrt{r^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)}} \end{bmatrix}.$$

Note que $d\sigma(x_1(t), x_2(t)) = (d\sigma \circ \gamma)(t)$, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, em que

$$\begin{aligned} d\sigma(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial \sigma}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que $d\sigma(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear que, para todo $p = (x_1, x_2) \in \mathbb{D}^2$, leva \mathbb{R}^2 em $T_{\sigma(p)}S^2$.

Isto é uma propriedade garantida pelo Teorema 3.2, enunciado a seguir.

Teorema 3.2. *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma carta. Então*

$$T_{\sigma(p)}S = d\sigma(p)(\mathbb{R}^2), \text{ para } p \in U,$$

em que $d\sigma(p) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é o jacobiano de σ .

Demonstração. Veja Proposição 2.4.1, em [2]. ■

Exemplo 3.4. Considere a projeção estereográfica vista no Exemplo 2.4, item (ii), considerando $r = 1$, isto é, a parametrização $\sigma_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right).$$

Sua jacobiana é a matriz

$$d\sigma_N(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 2(x_2^2 - x_1^2 + 1) & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) \\ 4x_1 & 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Seja $v = (v_1, v_2)$ um vetor arbitrário de \mathbb{R}^2 . Logo, aplicando a jacobiana $d\sigma_N(x_1, x_2)$ em v , obtemos:

$$d\sigma_N(x_1, x_2)(v) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 2v_1(x_2^2 - x_1^2 + 1) - 4v_2x_1x_2 \\ -4v_1x_1x_2 + 2v_2(x_1^2 - x_2^2 + 1) \\ 4v_1x_1 + 4v_2x_2 \end{bmatrix}.$$

Note que, dado $p \in S^2$, as componentes de $\vec{\sigma}_p$ podem ser dadas pelas coordenadas de $\sigma_N(x_1, x_2)$. Então:

$$\begin{aligned}
 & \langle d\sigma_N(x_1, x_2)(v), \sigma_N(x_1, x_2) \rangle = \\
 &= \frac{2v_1(x_2^2 - x_1^2 + 1) - 4v_2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \cdot \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \\
 &+ \frac{-4v_1x_1x_2 + 2v_2(x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \cdot \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} + \\
 &+ \frac{4v_1x_1 + 4v_2x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \cdot \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} = \\
 &= \frac{4v_1x_1(x_2^2 - x_1^2 + 1) - 8v_2x_1^2x_2 - 8v_1x_1x_2^2 + 4v_2x_2(x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3} + \\
 &+ \frac{4v_1x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 4v_2x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^3} = 0
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Exemplo 3.2, $d\sigma_N(x_1, x_2)(v) \in T_{\sigma_N(x_1, x_2)}S^2$.

3.2 CAMPOS DE VETORES

Campos de vetores, como estudados geralmente em disciplinas de Cálculo, são funções que associam, por exemplo no caso tridimensional, a cada ponto de \mathbb{R}^3 um vetor de \mathbb{R}^3 . O campo de vetores $V_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2x_1) \quad (3.2)$$

é um exemplo de um campo de vetores desse tipo.

No capítulo anterior, exploramos o conceito de superfície e verificamos que o plano, os paraboloides de revolução e hiperbólico, a esfera, o toro, entre outros, são superfícies. Uma pergunta que pode surgir naturalmente é se há uma maneira de definir campos de vetores sobre superfícies. Para explorarmos essa ideia, considerando o campo de vetores V_1 , definido em (3.2), a restrição de V_1 ao parabolóide hiperbólico (veja Exemplo 2.3) é mostrada na Figura 3.1.

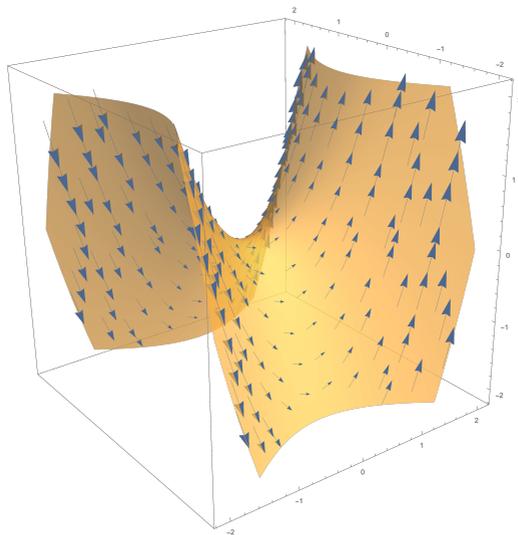


Figura 3.1 – Campo V_1 sobre \mathcal{P}_H .

Similarmente, podemos considerar a esfera S_r^2 . No Exemplo 2.4, vimos alguns atlas para esta superfície. Considerando o atlas composto pelas parametrizações em coordenadas cartesianas, o campo de vetores sobre o hemisfério norte

$$V_2(p) = \left(r, 0, -\frac{x_1 r}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right),$$

em que $p = (x_1, x_2, \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2})$, é tangente à S_r^2 . Logo, V_2 é um campo sobre um conjunto aberto da esfera — e não sobre a esfera inteira. Contudo, isto não é um problema: bastaria replicarmos esta ideia sobre a esfera toda ou, de modo geral, sobre toda a superfície em questão.

Vejam, agora, uma definição formal para campos de vetores sobre superfícies.

Definição 3.2 (CAMPOS DE VETORES). Dada uma superfície regular S , chama-se *campo de vetores tangentes* a S a toda aplicação $W : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $W(p) \in T_p S$, para todo $p \in S$. Se $\|W(p)\| = 1$, para todo $p \in S$, diremos ainda que W é unitário.

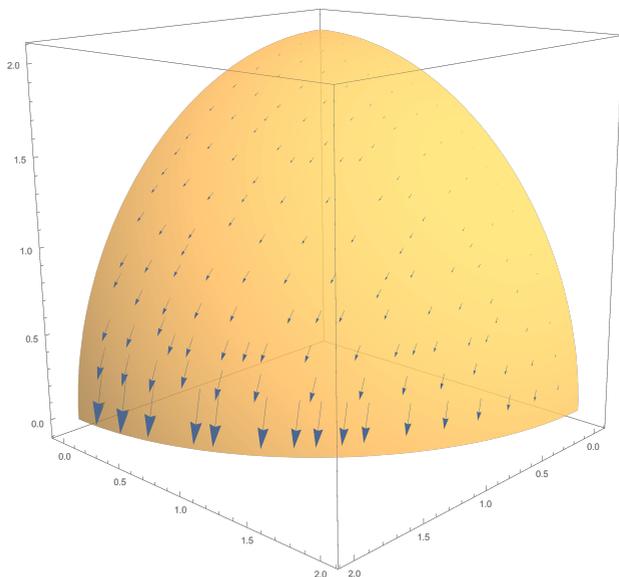


Figura 3.2 – Campo de vetores sobre o hemisfério norte.

Exemplo 3.5. No Exemplo 2.4 vimos também um atlas para S_r^2 composto por parametrizações que utilizavam coordenadas cartesianas. Acima construímos o campo V_2 sobre o hemisfério norte. Considere

$$W^1(p) = x_1 \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \cdot V_2(p),$$

em que $p = \sigma(x_1, x_2)$, ou seja,

$$W^1(p) = \left(rx_1 \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, 0, -rx_1^2 \right).$$

Considere também

$$W^2(p) = \left(0, rx_2 \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, -rx_2^2 \right)$$

e seja

$$\begin{aligned} W_N(p) &= W^1(p) + W^2(p) \\ &= \left(rx_1 \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, rx_2 \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, -r(x_1^2 + x_2^2) \right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow r^2} W_N(\sigma(x_1, x_2)) = (0, 0, -r^3).$$

Por outro lado, defina campos sobre o hemisfério sul da esfera:

$$W_1(p) = \left(-rx_1\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, 0, -rx_1^2 \right),$$

em que $p = \sigma(x_1, x_2)$, e considere também

$$W_2(p) = \left(0, -rx_2\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, -rx_2^2 \right)$$

e seja

$$\begin{aligned} W_S(p) &= W_1(p) + W_2(p) \\ &= \left(-rx_1\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, -rx_2\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, -r(x_1^2 + x_2^2) \right). \end{aligned}$$

Novamente,

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow r^2} W_S(\sigma(x_1, x_2)) = (0, 0, -r^3).$$

Considerando W_N e W_S e os limites acima, defina um campo de vetores W sobre a esfera tal que: $W = W_N$, no hemisfério norte; $W = W_S$ no hemisfério sul; e $W = (0, 0, -r^3)$ sobre o equador.

Observe que

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow 0} W_N(\sigma(x_1, x_2)) = (0, 0, 0)$$

e

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow 0} W_S(\sigma(x_1, x_2)) = (0, 0, 0).$$

Os limites acima revelam que W se anula nos polos norte e sul da esfera.

Exemplo 3.6. O toro foi construído no Exemplo 2.7 como a rotação da circunferência $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$u \mapsto (r \cos u + a, 0, r \sin u)$$

em que $r < a$. Observe que $\beta'(u) = (-r \operatorname{sen} u, 0, r \operatorname{cos} u)$ é um campo tangente ao traço de β . Intuitivamente, se aplicarmos a rotação

$$R(v) = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} v & -\operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v & \operatorname{cos} v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $v \in [0, 2\pi]$ (note que $R(0) = R(2\pi)$), vamos cobrir o toro com um campo de vetores tangentes e que nunca se anulam.

Exemplo 3.7. Ainda sobre o toro, considerando o campo tangente à circunferência β definido por

$$v(u) = \operatorname{cos} u (-r \operatorname{sen} u, 0, r \operatorname{cos} u),$$

consequentemente, $v\left(\frac{\pi}{2}\right) = v\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 0, 0)$. Intuitivamente, se aplicarmos a rotação $R(v)$, com $v \in [0, 2\pi]$, vamos cobrir o toro com um campo de vetores que se anulam sobre duas circunferências.

Definição 3.3. Sejam S uma superfície regular e $W : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores tangentes. Dizemos que $p \in S$ é uma *singularidade* de W quanto $W(p)$ se anula.

Observe que o campo W definido no Exemplo 3.5 possui singularidades nos polos da esfera. No Exemplo 3.7, as singularidades estão sobre circunferências contidas no toro.

Definição 3.4. Seja S uma superfície regular. Dizemos que um campo de vetores tangentes $W : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^k , com $k \geq 0$, se, $\forall p \in S$, existe uma parametrização

$$\sigma : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset S,$$

tal que $W \circ \sigma : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é de classe C^k . Em particular, se um campo W é de classe C^0 , dizemos que W é *contínuo*.

Exemplo 3.8. O campo de vetores V_1 construído no início desta seção sobre o parabolóide hiperbólico é de classe C^∞ . De fato, como $V_1(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 2x_1)$, então

$$V_1(x_1, x_2, x_1^2 - x_2^2) = V_1 \circ \sigma(x_1, x_2) = (1, 0, 2x_1).$$

Exemplo 3.9. O campo W construído no Exemplo 3.5 é, por construção, contínuo, ou seja, W é de classe C^0 .

4 TEOREMA DA ESFERA CABELUDA

Neste capítulo, faremos uma demonstração do Teorema da Esfera Cabeluda com base no artigo “*Analytic Proofs of the ‘Hairy Ball Theorem’ and the Brouwer Fixed Point Theorem*” ([9]), de John Milnor. No artigo, o Teorema é demonstrado para esferas n -dimensionais, em que n é par. Neste trabalho, faremos a demonstração apenas para a esfera S^2 .

4.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

No capítulo anterior, aprendemos a construir campos de vetores sobre superfícies. Particularmente, nos Exemplos 3.6 e 3.7, vimos dois possíveis campos de vetores tangentes e contínuos sobre o toro, construídos de maneira que um tivesse singularidades, e o outro não se anulasse em ponto algum.

Por outro lado, se quiséssemos construir campos tangentes e contínuos agora sobre a esfera, só teríamos sucesso se tais campos tivessem pelo menos uma singularidade, assim como o estudado no Exemplo 3.5. É isto que nos afirma o Teorema da Esfera Cabeluda: a esfera não admite campos de vetores tangentes, contínuos e sem singularidades. Para prová-lo, discutiremos primeiramente alguns resultados auxiliares para depois, na seção 3 deste capítulo, demonstrar o resultado principal por meio de uma redução ao absurdo.

4.2 RESULTADOS AUXILIARES

Como mencionado, nesta seção serão demonstrados alguns resultados que nos auxiliarão. Os Lemas 4.1 e 4.2 são de caráter técnico, e nos darão condições de provar o Teorema 4.3, que afirma que S^2 não possui campos de vetores unitários continuamente diferenciáveis. A prova do Teorema 4.3 será por absurdo, e utilizaremos os Lemas 4.1 e 4.2 para chegar a uma contradição. Por sua vez, o Teorema 4.3 será fundamental na prova do Teorema 4.4 (da Esfera Cabeluda).

Antes de discutirmos os resultados, é importante que relembremos e definamos alguns elementos que serão utilizados no decorrer do capítulo. Nesse sentido, considere

$$S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Como discutido no Exemplo 3.2, o Espaço Tangente de S^2 é

$$T_x S^2 = \{v(x) \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v(x) \rangle = 0\}.$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $0 < a < 1 < b$, considere o conjunto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : a \leq \|x\| \leq b\}. \quad (4.1)$$

Note que, pelo Exemplo A.6, o conjunto K é um compacto. Seja $\mathcal{N}(K)$ uma vizinhança aberta de K e considere um campo de vetores definidos em $\mathcal{N}(K)$

$$\begin{aligned} v : \mathcal{N}(K) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto v(x), \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que v é de classe C^1 . Ainda, para cada $t \in \mathbb{R}$, defina a função

$$\begin{aligned} f_t : K &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto f_t(x) := x + tv(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

No Lema 4.1, estudaremos algumas propriedades de f_t para quando t é suficientemente pequeno.

Lema 4.1. *Se t é suficientemente pequeno, então f_t é injetiva e transforma a região K em uma região vizinha $f_t(K)$ cujo volume pode ser expresso como uma função polinomial de t .*

Demonstração. Sejam $K \subset \mathbb{R}^3$ tal como em (4.1) e v o campo dado por $x \mapsto v(x)$ de classe C^1 tal como em (4.2). Conforme o Teorema A.12, existe $c > 0$ tal que

$$\|v(x) - v(y)\| \leq c \|x - y\|, \forall x, y \in K.$$

Escolha t tal que $0 < |t| < c^{-1}$. Note que f_t é injetiva, pois se $f_t(x) = f_t(y)$, segue da definição da função f_t que

$$x - y = t(v(x) - v(y)).$$

Logo,

$$\|x - y\| = |t| \|v(x) - v(y)\| \leq |t| \cdot c \|x - y\| < \|x - y\|,$$

Assim, $x = y$ e temos a injetividade de f_t .

Considere $f_t(x) = (x_1 + tv_1(x), x_2 + tv_2(x), x_3 + tv_3(x))$, em que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. A matriz jacobiana de f_t é

$$\begin{aligned} df_t(x) &= \begin{bmatrix} 1 + t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) & t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) & t \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) \\ t \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) & 1 + t \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) & t \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \\ t \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) & t \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) & 1 + t \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x) \end{bmatrix} = \\ &= id + t \cdot \left[\frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq 3}. \end{aligned}$$

Logo, o determinante da matriz jacobiana é

$$\det(df_t(x)) = 1 + t\eta_1(x) + t^2\eta_2(x) + t^3\eta_3(x),$$

em que

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x), \\ \eta_2(x) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x) + \\ &\quad - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x), \\ \eta_3(x) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x) + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) + \\ &\quad + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(x) + \\ &\quad - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x) \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x). \end{aligned}$$

Note que η_i são funções contínuas de x . Como K é compacto, segue η_k é limitado, de modo que para $|t|$ pequeno temos

$$1 > \sum_{k=1}^3 t^k \eta_k(x) \implies \det(df_t(x)) > 0, \forall x \in K. \quad (4.4)$$

Integrando sobre a região K :

$$\begin{aligned} \text{Volume}(f_t(K)) &= \iiint_{f_t(K)} 1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &\stackrel{(1)}{=} \iiint_K \det(df_t(x)) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &= \iiint_K (1 + t\eta_1(x) + t^2\eta_2(x) + t^3\eta_3(x)) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \\ &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3, \end{aligned}$$

em que $a_k = \iiint_K \eta_k(x) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$, para $k = 0, 1, 2, 3$, com $\eta_0(x) = 1$. Note que a segunda igualdade segue do Teorema da Mudança de Variáveis¹. ■

Suponha agora que a restrição $v|_{S^2}$ seja tangente a S^2 e $\|v(x)\| = 1$, para todo $x \in S^2$. Observe que:

$$\begin{aligned} \|x + tv(x)\| &= \sqrt{\langle x + tv(x), x + tv(x) \rangle} \\ &= \sqrt{\|x\|^2 + t \langle x, v(x) \rangle + t \langle v(x), x \rangle + t^2 \|v(x)\|^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 0 + 0 + t^2 \cdot 1} = \sqrt{1 + t^2}. \end{aligned}$$

¹ De acordo com [4], um conjunto X tem conteúdo nulo se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um número finito de paralelepípedos P_1, P_2, \dots, P_n tais que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n P_i \text{ e } \sum_{i=1}^n \text{Área}(P_i) < \epsilon.$$

É possível verificar que a esfera S_r^2 tem conteúdo nulo (veja [4]).

Em [4], encontramos o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (MUDANÇA DE VARIÁVEIS). *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^3$ abertos e*

$$\sigma : U \rightarrow V$$

$$(u_1, u_2, u_3) \mapsto \sigma(u_1, u_2, u_3) := (x_1, x_2, x_3)$$

um difeomorfismo de classe C^1 tal que $\det(d\sigma) \neq 0$, para todo ponto em U . Seja $K \subset U$ um compacto tal que ∂K tem conteúdo nulo. Se $\partial\sigma(K) = \sigma(\partial K)$, $\sigma(\overset{\circ}{K}) = \sigma(\overset{\circ}{K})$ e $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é integrável em $\sigma(K)$, então:

$$\iiint_{\sigma(K)} f(x_1, x_2, x_3) \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \iiint_K f(\sigma(u_1, u_2, u_3)) |\det(d\sigma)| \, du_1 \, du_2 \, du_3.$$

Lema 4.2. *Se t é suficientemente pequeno, então a aplicação*

$$x \mapsto x + tv(x)$$

leva S^2 sobre $S^2_{\sqrt{1+t^2}}$.

Demonstração. Considere K tal como em (4.1). De (4.4), segue que se t é suficientemente pequeno, $df_t(x)$ é não-singular, para todo $x \in K$. Pelo Teorema A.14 (da Função Inversa), f_t é inversível na vizinhança de cada ponto. Assim, para cada $x \in \overset{\circ}{K}$, a função f_t leva abertos contidos em $\overset{\circ}{K}$ em abertos.

Seja $X \subset \overset{\circ}{K}$ um aberto tal que $f_t : X \rightarrow f_t(X)$ é um difeomorfismo. Note que $X \cap S^2$ é relativamente aberto em S^2 . Como f_t é injetiva², temos que

$$f_t(X \cap S^2) = f_t(X) \cap f_t(S^2) = f_t(X) \cap S^2_{\sqrt{1+t^2}}.$$

Logo, $f_t(X \cap S^2)$ é relativamente aberto em $S^2_{\sqrt{1+t^2}}$ e, portanto, a imagem $f_t(S^2)$ é relativamente aberto (ou seja, $f_t(S^2)$ é aberta em $S^2_{\sqrt{1+t^2}}$).

Como f_t é contínua e S^2 é compacta, então a imagem $f_t(S^2)$ é compacta pelo Teorema A.6 e, portanto, fechada. Uma vez que $S^2_{\sqrt{1+t^2}}$ é conexa, o fato de $f_t(S^2)$ ser relativamente aberta e fechada implica que $f_t(S^2) = S^2_{\sqrt{1+t^2}}$ pelo Teorema A.8. ■

Teorema 4.3. *S^2 não possui campos de vetores tangentes e unitários continuamente diferenciáveis.*

² Considere o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Sejam X e Y espaços topológicos, $A, B \subset X$ e $h : X \rightarrow Y$ uma função injetiva. Então:*

$$(i) \quad h(A \cup B) = h(A) \cup h(B);$$

$$(ii) \quad h(A \cap B) = h(A) \cap h(B).$$

Demonstração. Veja Seção 1.3, em [5]. Observe que a hipótese de injetividade é necessária apenas para a prova de (ii). ■

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista um campo de vetores tangentes $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 , tal que $\|v(x)\| = 1$, para todo $x \in S^2$. Considere K tal como em (4.1). Estenda o campo v sobre K da seguinte forma: se $p \in K$, existe $r > 0$ tal que $p = rx$, para algum $x \in S^2$. Assim, podemos ter

$$v(rx) = rv(x), \quad \forall x \in K, \quad a \leq r \leq b.$$

Defina $f_t : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal como em (4.3). Se t é suficientemente pequeno, pelo Lema 4.2 segue que

$$f_t(S_r^2) = S_{r\sqrt{1+t^2}}^2$$

pois

$$f_t(rx) = rx + tv(rx) = r(x + tv(x)) = rf_t(x),$$

isto é, $f_t(rx) = rf_t(x)$, para todo $x \in S^2$. Então,

$$f_t(K) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : a\sqrt{1+t^2} \leq \|y\| \leq b\sqrt{1+t^2} \right\}.$$

Vamos comparar o $\text{Volume}(K)$ e o $\text{Volume}(f_t(K))$. Denote por $B^3[0, r]$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r\}$, considerando $r > 0$. Observe que $\partial B^3[0, r] = S_r^2$. Então,

$$\begin{aligned} \text{Volume}(K) &= \text{Volume}(B^3[0, b]) - \text{Volume}(B^3[0, a]) \\ &= \frac{4}{3}\pi b^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{Volume}(B^3[0, b\sqrt{1+t^2}]) &= \frac{4}{3}\pi (b\sqrt{1+t^2})^3, \\ \text{Volume}(B^3[0, a\sqrt{1+t^2}]) &= \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{1+t^2})^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Volume}(f_t(K)) &= \frac{4}{3}\pi (b\sqrt{1+t^2})^3 - \frac{4}{3}\pi (a\sqrt{1+t^2})^3 \\ &= (\sqrt{1+t^2})^3 \left(\frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3) \right) \\ &= (\sqrt{1+t^2})^3 \cdot \text{Volume}(K). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1,

$$(1 + t^2)^{\frac{3}{2}} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3,$$

em que

$$b_i = \frac{a_i}{\text{Volume}(K)}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Derivando quatro vezes a equação acima, segue que

$$\frac{d^4}{dt^4} \left((1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \right) = 0,$$

o que é uma contradição³. Portanto, S^2 não possui campos de vetores unitários continuamente diferenciáveis. ■

4.3 O TEOREMA DA ESFERA CABELUDA

Apresentaremos a seguir, finalmente, a prova do Teorema da Esfera Cabeluda. Suporemos, por contradição, a existência de um campo sem singularidades $v(x)$ sobre a esfera. Com o suporte de alguns resultados, como a observação 2 que generaliza o Teorema A.13 (de Aproximação de Weierstrass), construiremos, a partir do campo $v(x)$, um outro campo $W : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal como o Teorema 4.3 garante não existir, chegando a uma contradição.

Teorema 4.4 (ESFERA CABELUDA). *S^2 não admite um campo de vetores tangentes contínuo e sem singularidades.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que S^2 possui um campo de vetores contínuo

$$\begin{aligned} v : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto v(x). \end{aligned}$$

tal que $v(x) \in T_x S^2$ e $v(x) \neq 0$, para todo $x \in S^2$. Como S^2 é compacta e a função

$$\begin{aligned} \|v\| : S^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|v(x)\| \end{aligned}$$

³ Pois, $\frac{d^4}{dt^4} \left((1 + t^2)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{9}{(1 + t^2)^{\frac{5}{2}}} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

é contínua, existe $m \neq 0$ tal que $m = \min \|v(x)\|$.

Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass e pela Observação 2, existe uma aplicação polinomial $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\|p(x) - v(x)\| < \frac{m}{2}, \quad \forall x \in S^2.$$

Note que p não se anula. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} &= m - \frac{m}{2} < \|v(x)\| - \|v(x) - p(x)\| \\ &\leq \|v(x) - (v(x) - p(x))\| = \|p(x)\| \end{aligned}$$

isto é, $\|p(x)\| > \frac{m}{2} \neq 0, \forall x \in S^2$.

Note que, para todo $x \in S^2$, x e $p(x)$ não são múltiplos. De fato, suponha que $p(x) = \alpha x$, para algum $x \in S^2$ e algum $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Como x é ortogonal a $v(x)$, segue que $\|p(x)\|, \|v(x)\|$ e $\|v(x) - p(x)\|$ são medidas dos lados de um triângulo retângulo. Logo,

$$\|v(x) - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|v(x)\|^2$$

Disso segue:

$$\frac{m^2}{4} > \|v(x) - p(x)\|^2 = \|\alpha x\|^2 + \|v(x)\|^2 \geq \alpha^2 + m^2.$$

Logo, $\alpha^2 < \frac{-3m^2}{4}$. Essa contradição mostra que $p(x) \neq \alpha x$, para todo $x \in S^2$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observe que $p(x)$ pode não ser tangente a S^2 , para algum $x \in S^2$. Para tentar contornar isso, com o intuito de construir um campo de vetores tal como o Teorema 4.3 garante não existir, defina

$$\begin{aligned} w : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto w(x) := p(x) - \langle p(x), x \rangle x. \end{aligned}$$

Note que $\langle p(x), x \rangle x$ é a projeção ortogonal de $p(x)$ na direção de x . Observe que tanto $p(x)$ quanto $\langle p(x), x \rangle x$ são de classe C^1 , visto que são polinômios. A subtração de funções de classe C^1 também é

de classe C^1 . Assim, w é C^1 e

$$\begin{aligned}\langle w(x), x \rangle &= \langle p(x) - \langle p(x), x \rangle x, x \rangle \\ &= \langle p(x), x \rangle - \langle \langle p(x), x \rangle x, x \rangle \\ &= \langle p(x), x \rangle - \langle p(x), x \rangle \langle x, x \rangle \\ &= \langle p(x), x \rangle - \langle p(x), x \rangle \cdot 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $w(x) \in T_x S^2$, $\forall x \in S^2$. Além disso, para todo $x \in S^2$:

$$\begin{aligned}\|w(x) - p(x)\| &= \|p(x) - \langle p(x), x \rangle x - p(x)\| \\ &= \|-\langle p(x), x \rangle x\| \\ &= |\langle p(x), x \rangle| \|x\| \\ &< \|p(x)\| \|x\|^2 \\ &= \|p(x)\|,\end{aligned}$$

em que a desigualdade segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Disso segue que $0 < \|p(x)\| - \|w(x) - p(x)\|$ e, pela desigualdade triangular reversa, temos

$$0 < \|p(x)\| - \|w(x) - p(x)\| \leq \|w(x)\|,$$

isto é, $w(x) \neq 0$, $\forall x \in S^2$. Como w não se anula, defina agora

$$\begin{aligned}W : S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto W(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|}.\end{aligned}$$

Note que:

- (i) $W(x) \in T_x S^2$, $\forall x \in S^2$;
- (ii) W é de classe C^1 ;
- (iii) $\|W(x)\| = 1$, $\forall x \in S^2$.

Entretanto, pelo Teorema 4.3, tal campo de vetores W não poderia existir. Essa contradição mostra que o campo de vetores v , suposto inicialmente, também não pode existir, e isto conclui a prova do Teorema da Esfera Cabeluda. ■

5 APLICAÇÕES

Neste último capítulo, serão apresentadas duas possíveis aplicações do Teorema da Esfera Cabeluda. A primeira delas tem caráter essencialmente matemático, enquanto a segunda é uma aplicação física, na área de óptica.

5.1 TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

Nesta seção, faremos uso do Teorema da Esfera Cabeluda para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para o caso do disco bidimensional

$$\mathbb{D}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

baseando-nos também no artigo [9] de John Milnor.

Um ponto fixo de uma função $f : X \rightarrow X$ qualquer é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer afirma que funções contínuas do disco para o disco possuem pelo menos um ponto fixo.

A ideia da demonstração que apresentaremos será supor, por absurdo, que dada uma função $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$, f não terá pontos fixos, isto é, $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}^2$. Em seguida, construiremos um campo $W : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ conveniente, e verificaremos que $W(x)$ nunca se anula, para todo x de \mathbb{D}^2 . Faremos uma extensão de W para um outro campo $\tilde{W} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Pela construção, \tilde{W} também não se anulará sobre S^2 . Pelo Teorema 4.4 (da Esfera Cabeluda), sabemos que \tilde{W} não pode existir, chegando assim a uma contradição, que provará que f deverá possuir pelo menos um ponto fixo, como queríamos. Vejamos a demonstração:

Teorema 5.1 (PONTO FIXO DE BROUWER). *Toda função contínua $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ possui pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $f(x) \neq x$, $\forall x \in \mathbb{D}^2$. Defina $V(x) = x - f(x)$, em que x é da forma (x_1, x_2) . Como $x \neq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{D}^2$, segue que $V(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{D}^2$.

Se $x \in \partial\mathbb{D}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, temos que $\|x\| = 1$ e, sendo θ o ângulo entre x e $f(x)$, temos ainda:

$$\begin{aligned}\langle x, V(x) \rangle &= \langle x, x \rangle - \langle x, f(x) \rangle \\ &= \|x\|^2 - \|x\| \|f(x)\| \cos \theta \\ &= 1 - \|f(x)\| \cos \theta.\end{aligned}$$

Note que se $\|f(x)\| = 1$, segue que $\cos \theta \neq 1$ ¹. Logo, $\|f(x)\|$ e $\cos \theta$ não podem valer 1 simultaneamente. Desse modo, concluímos que $\langle x, V(x) \rangle > 0$, $\forall x \in \partial\mathbb{D}^2$.

Considere

$$W(x) = x - f(x) \frac{1 - \langle x, x \rangle}{1 - \langle x, f(x) \rangle}.$$

Então $W(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{D}^2$ pois, supondo $W(x) = 0$, para algum $x \in \mathbb{D}^2$:

- (i) Se x e $f(x)$ são linearmente independentes, então $W(x) \neq 0$, uma vez que $W(x) = x - \alpha f(x) \neq 0$, em que $\alpha = \frac{1 - \langle x, x \rangle}{1 - \langle x, f(x) \rangle}$.
- (ii) Suponha que x e $f(x)$ são linearmente dependentes. Então $f(x) = \beta x$, para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Primeiramente, observe que $x \neq 0$, pois supondo $x = 0$, teríamos $f(0) = \beta \cdot 0 = 0$, o que contradiz a hipótese de que $f(x) \neq x$. Assim, $\|x\| \neq 0$. Agora, note também que temos $f(x) \neq 0$, porque se supormos $f(x) = 0$, resulta-nos que

$$0 = W(x) = x - 0 \cdot \frac{1 - \langle x, x \rangle}{1 - \langle x, f(x) \rangle} = x - 0,$$

ou seja, $x = 0$ e, conseqüentemente, $f(0) = 0$, contradizendo novamente a hipótese de que $f(x) \neq x$. Se $x, f(x) \neq 0$, então $f(x) = \beta x$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Além disso,

$$0 = W(x) = x - f(x) \frac{1 - \langle x, x \rangle}{1 - \langle x, f(x) \rangle}.$$

¹ Pois se $\cos \theta = 1$, temos que $\theta = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Isto implicaria na colinearidade de x e $f(x)$ e, conseqüentemente, teríamos $x = f(x)$, visto que $\|x\| = 1 = \|f(x)\|$.

Logo,

$$\begin{aligned}x(1 - \langle x, f(x) \rangle) &= f(x)(1 - \langle x, x \rangle) \\ \langle x, x \rangle (1 - \langle x, f(x) \rangle) &= \langle x, f(x) \rangle (1 - \langle x, x \rangle) \\ \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle \langle x, f(x) \rangle &= \langle x, f(x) \rangle - \langle x, f(x) \rangle \langle x, x \rangle \\ \langle x, x \rangle &= \langle x, f(x) \rangle\end{aligned}$$

Isto é,

$$\langle x, x - f(x) \rangle = 0,$$

e, portanto,

$$\|x\| \|x - f(x)\| \cos(\hat{\text{ângulo}}(x, x - f(x))) = 0. \quad (5.1)$$

Façamos uma breve análise do lado esquerdo de (5.1). Já sabemos que $\|x\| \neq 0$. Observe que $\|x - f(x)\| \neq 0$. Por fim, como $f(x) = \beta x$ e $x \neq f(x)$, temos $x - f(x) = x - \beta x = (1 - \beta)x$. Além disso,

$$\cos(\hat{\text{ângulo}}(x, x - f(x))) = \cos(\hat{\text{ângulo}}(x, (1 - \beta)x)) \neq 0.$$

Portanto, a Equação 5.1 é uma contradição.

Estenda, agora, $W : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ para um campo $\tilde{W} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- (i) *Extensão para o hemisfério sul de S^2* : Considere a projeção estereográfica $\sigma_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ dada por

$$\sigma_N(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right).$$

Sua jacobiana é

$$d\sigma_N(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 2(x_2^2 - x_1^2 + 1) & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) \\ 4x_1 & 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Como $x \in \mathbb{D}^2$, x é da forma (x_1, x_2) e podemos escrever $W(x)$ como $W(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha f_1(x_1, x_2), x_2 - \alpha f_2(x_1, x_2))$, em que $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ e

$$\alpha := \alpha(x_1, x_2) = \frac{1 - \|x_1^2 + x_2^2\|^2}{1 - x_1 f_1(x_1, x_2) - x_2 f_2(x_1, x_2)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\tilde{W}_S(\sigma_N(x_1, x_2)) &:= d\sigma_N(x_1, x_2) \cdot W(x_1, x_2) \\ &= \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \\ g_3(x_1, x_2) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}g_1(x_1, x_2) &= \frac{-2x_1(x_2^2 + x_1^2 - 1) + 4x_1x_2\alpha f_2(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} + \\ &\quad - \frac{2\alpha f_1(x_1, x_2)(x_2^2 - x_1^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \\ g_2(x_1, x_2) &= \frac{-2x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 4x_1x_2\alpha f_1(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} + \\ &\quad - \frac{2\alpha f_2(x_1, x_2)(x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \\ g_3(x_1, x_2) &= \frac{4(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1\alpha f_1(x_1, x_2) - 4x_2\alpha f_2(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1} \alpha(x_1, x_2) = \lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1} \frac{1 - \|x_1^2 + x_2^2\|^2}{1 - x_1 f_1(x_1, x_2) - x_2 f_2(x_1, x_2)} = 0.$$

e, desse modo,

$$\begin{aligned}\lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1} g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1} g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \lim_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow 1} g_3(x_1, x_2) &= 1.\end{aligned}$$

Portanto, ao $x = (x_1, x_2)$ se aproximar de $\partial\mathbb{D}^2$, temos que $\tilde{W}_S(\sigma_N(x_1, x_2))$ se aproxima de $(0, 0, 1)$.

- (ii) *Extensão para o hemisfério norte de S^2* : Considere a projeção estereográfica $\sigma_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$ dada por

$$\sigma_S(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right).$$

Sua jacobiana é

$$d\sigma_S(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \begin{bmatrix} 2(x_2^2 - x_1^2 + 1) & -4x_1x_2 \\ -4x_1x_2 & 2(x_1^2 - x_2^2 + 1) \\ -4x_1 & -4x_2 \end{bmatrix}.$$

De maneira similar à extensão feita para o hemisfério sul, mas considerando agora

$$-W(x_1, x_2) = (-x_1 + \alpha f_1(x_1, x_2), -x_2 + \alpha f_2(x_1, x_2)),$$

teremos

$$\begin{aligned} \tilde{W}_N(\sigma_S(x_1, x_2)) &:= d\sigma_S(x_1, x_2) \cdot (-W(x_1, x_2)) \\ &= \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2) \\ h_2(x_1, x_2) \\ h_3(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2) &= \frac{2x_1(x_2^2 + x_1^2 - 1) - 4x_1x_2\alpha f_2(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} + \\ &\quad + \frac{2\alpha f_1(x_1, x_2)(x_2^2 - x_1^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \\ h_2(x_1, x_2) &= \frac{2x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - 4x_1x_2\alpha f_1(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} + \\ &\quad + \frac{2\alpha f_2(x_1, x_2)(x_1^2 - x_2^2 + 1)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2} \\ h_3(x_1, x_2) &= \frac{4(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1\alpha f_1(x_1, x_2) - 4x_2\alpha f_2(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Observe novamente que $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow 1} \alpha(x_1, x_2) = 0$ e, dessa maneira,

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow 1} h_1(x_1, x_2) = 0,$$

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow 1} h_2(x_1, x_2) = 0,$$

$$\lim_{x_1^2+x_2^2 \rightarrow 1} h_3(x_1, x_2) = 1.$$

Similarmente ao caso anterior, também concluímos que quando $x = (x_1, x_2)$ se aproxima de $\partial\mathbb{D}^2$, $\tilde{W}_N(\sigma_S(x_1, x_2))$ se aproxima de $(0, 0, 1)$.

(iii) *Extensão sobre o equador de S^2* : sobre o equador, definimos

$$\tilde{W}_E(\sigma_N(x_1, x_2)) = (0, 0, 1), \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\mathbb{D}^2.$$

Portanto, por (i), (ii) e (iii), construímos um campo contínuo de vetores tangentes sem singularidades \tilde{W} definido sobre toda a esfera. Pelo Teorema 4.4 (da Esfera Cabeluda), a existência de um campo de vetores deste tipo é uma contradição. Portanto, toda função $f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ possui pelo menos um ponto fixo. ■

5.2 APLICAÇÃO NA FÍSICA

O artigo *Geometric Optics and the “hairy ball theorem”* ([1]) apresenta uma aplicação do Teorema da Esfera Cabeluda no contexto da óptica geométrica. A óptica geométrica é um ramo da óptica que, fazendo uso da geometria, preocupa-se em descrever a propagação da luz no espaço utilizando a noção de raio de luz. No artigo, utiliza-se o Teorema da Esfera Cabeluda para descrever o comportamento de raios de luz que atingem a superfície de esferas ou objetos topologicamente equivalentes.

Sejam uma fonte de luz e também um objeto refletor topologicamente equivalente à esfera. Os raios de luz que se propagam a partir da fonte são descritos por vetores que, quando tocam a superfície do objeto, são refletidos na direção do vetor unitário n_r , conforme ilustrado pela Figura 5.1. Podemos decompor o vetor n_r em dois vetores n_n e n_t ortogonais entre si e que são, respectivamente, normal e tangente ao objeto refletor.

Considere que o objeto refletor esteja sendo completamente iluminado (se necessário, por múltiplas fontes), no sentido de que cada ponto da superfície receba luz. Nesse contexto, os vetores tangentes n_{ti} , que surgem da decomposição dos vetores n_{ri} , formarão um campo de vetores tangentes sobre toda a superfície do objeto iluminado. Como o objeto é topologicamente equivalente à uma es-

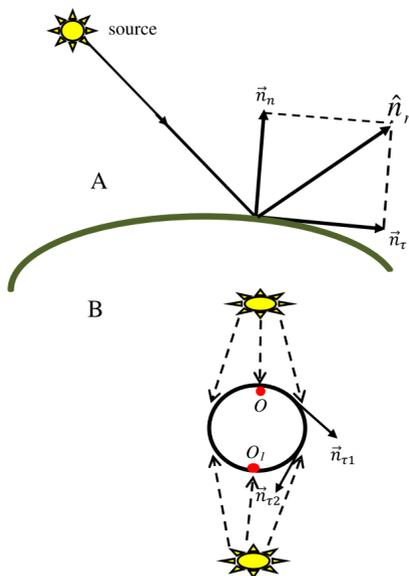


Figura 5.1 – Ilustração retirada de [1].

fera, o Teorema da Esfera Cabeluda garantirá a existência de pelo menos um ponto sobre a superfície tal que o vetor tangente naquele ponto satisfaça $n_{ti} = 0$. Teremos, então,

$$n_{ri} = n_{ni} + n_{ti} \implies n_{ri} = n_{ni} + 0 \implies n_{ri} = n_{ni}.$$

Isto é, o raio de luz refletido naquele ponto será refletido de maneira normal, retornando diretamente para a fonte de luz.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar o Teorema da Esfera Cabeluda demandou que solidificássemos uma base de conhecimentos, que foi constituída a partir dos estudos sobre superfícies e campos de vetores definidos sobre estes objetos. Conceitos aprendidos no decorrer da graduação, como os das disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, ao serem vistos em contextos novos ao longo deste trabalho, foram ressignificados e aprendidos com mais propriedade.

Generalizar o resultado é uma possibilidade para estudos futuros. Pode-se, assim como feito por John W. Milnor em [9], realizar a demonstração do Teorema para S^n , em que n é par. Por outro lado, o Teorema da Esfera Cabeluda também é um caso especial do Teorema de Poincaré-Hopf, que relaciona a característica de Euler de uma superfície S com o índice de singularidades de campos de vetores da superfície. Segundo o Teorema de Poincaré-Hopf, como a característica de Euler de S^2 é 2, o somatório dos índices de singularidades de campos de vetores de S^2 também deve ser igual a 2. Tal índice descreve o comportamento dos vetores próximos a uma singularidade em um campo de vetores, conforme ilustra a Figura 6.1. No toro \mathbb{T}^2 , por exemplo, o somatório do índice deve ser 0, visto que a característica de Euler de \mathbb{T}^2 é 0. Isto explica o porquê de ser possível construir campos de vetores tangentes, contínuos e sem singularidades sobre o toro, mas não sobre a esfera.

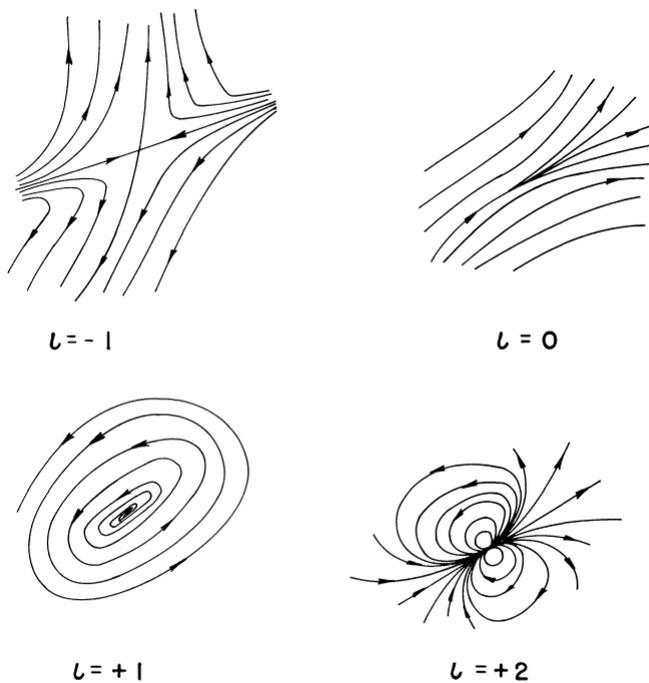


Figura 6.1 – Ilustração retirada de ([10], p. 33).

REFERÊNCIAS

- [1] BORMASHENKO, Edward; KAZACHKOV, Alexander. *Geometric optics and the “hairy ball theorem”*. Results in Physics. v.6, p. 76-77, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.rinp.2015.11.009>>. Acesso em: 08 jun. 2019.
- [2] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Differential Geometry of Curves & Surfaces*. Nova Iorque: Dover Publications, 2016.
- [3] EISENBERG, Murray; GUY, Robert. *A proof of the hairy ball theorem*. The American Mathematical Monthly. Vol 86, No. 7 (Aug. - Sep., 1979), pp. 571-574. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2320587>. Acesso em: 9 jul. 2019.
- [4] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*, vol 3. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 380 p.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 431 p.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 2*. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2000. 557 p.
- [7] LIMA, Ronaldo Freire de. *Introdução à Geometria Diferencial*. Macapá: SBM, 2016. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2016/06/Introduç~ao-a-Geometria-Diferencial_Ronaldo-Freire-Lima.pdf>. Acesso em: 8 jun. 2019.
- [8] LIMA, Ronaldo Freire de. *Topologia e Análise no Espaço \mathbb{R}^n* . Rio de Janeiro: SBM, 2015. 498 p.
- [9] MILNOR, John Williard. *Analytic Proofs of the “Hairy Ball Theorem” and the Brouwer Fixed Point Theorem*. The American Mathematical Monthly. Vol. 85, No. 7 (Aug. - Sep., 1978), pp. 521-524. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2320860>. Acesso em: 20 jul. 2018.
- [10] MILNOR, John Williard. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton: Princeton University Press, 1997.

-
- [11] PICADO, Jorge. *Apontamentos de Geometria Diferencial*. Coimbra, 2006. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/Apontamentos/sebenta.pdf>>. Acesso em: 24 junho 2018.
- [12] PRASOLOV, Viktor Vasil'evich. *Intuitive Topology*. American Mathematical Society, 1998. 95 p.
- [13] WEEKS, Jeffrey. *The Shape of Space*. 2. ed. Nova Iorque: Marcel Dekker, 2002. 382 p.

Apêndices

APÊNDICE A – PRÉ-REQUISITOS DE ANÁLISE NO \mathbb{R}^n

Neste apêndice, estão inclusos resultados e definições de análise no \mathbb{R}^n que são utilizados ao longo de todo o trabalho. São discutidos a norma que usamos durante toda a extensão do texto, o que entendemos por continuidade, diferenciabilidade, conjuntos abertos e conjuntos fechados, por exemplo. Também são enunciados alguns teoremas que fundamentam o desenrolar dos capítulos da monografia. Ao final, discute-se brevemente o Teorema da Aproximação de Weierstrass e o Teorema da Função Inversa, que são importantes principalmente para o Capítulo 4. As referências utilizadas para compor o apêndice foram [6] e [8].

A.1 NOÇÕES PRELIMINARES

Dado um número natural n , o espaço euclidiano n -dimensional, denotado por \mathbb{R}^n , é o produto cartesiano de n cópias de \mathbb{R} , isto é,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}.$$

Um elemento $x \in \mathbb{R}^n$ é dito um *ponto* de \mathbb{R}^n e é, então, denotado por uma n -upla de números reais, isto é, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, em que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i é um número real, dito a i -ésima coordenada de x .

Definição A.1 (PRODUTO INTERNO CANÔNICO). Dados dois vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , o *produto interno* canônico (ou *produto escalar*) é definido por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

A *norma* de um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ será a norma induzida pelo produto interno canônico, isto é,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Teorema A.1 (DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ). *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

valendo a igualdade, se, e somente se, um dos vetores x, y é múltiplo do outro.

Demonstração. Veja o Teorema 2.1, em ([8], p. 21). ■

A.2 CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

Definição A.2 (PONTO INTERIOR). Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in X$ chama-se um *ponto interior* a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X , isto é, quando existe $B^n(a, \delta) \subset X$, em que $B^n(a, \delta) = \{x \in X : |x - a| < \delta\}$ é a *bola aberta*¹ de centro a e raio δ . O *interior* de X é o conjunto $\overset{\circ}{X}$, formado pelos pontos interiores a X .

Definição A.3 (CONJUNTO ABERTO). Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $B^n(x, \delta) \subset X$. Assim, X é aberto se, e somente se, $\overset{\circ}{X} = X$.

Exemplo A.1. A bola aberta $B^n(a, r)$ é um *aberto*. De fato, tome $x \in B^n(a, r)$ qualquer. Assim, $|x - a| < r$ e, logo, o número $\delta = r - |x - a|$ é positivo. Considere agora $B^n(x, \delta)$. Dado $y \in B^n(x, \delta)$ arbitrário, segue que $|y - x| < |y - a| + |x - a| < \delta = r - |x - a|$. Consequentemente, $|y - a| < r$, isto é, $y \in B^n(a, r)$. Logo, $B^n(x, \delta) \subset B^n(a, r)$, para todo x e, portanto, $B^n(a, r)$ é um aberto.

Definição A.4 (CONJUNTO FECHADO). Um conjunto é *fechado* se, e somente se, seu complementar é aberto.

Definição A.5 (RELATIVAMENTE ABERTO). Sejam X um subconjunto de \mathbb{R}^n e $U \subset X$. Diz-se que U é *aberto em X* , ou *aberto relativamente* a X , quando existe um aberto V de \mathbb{R}^n , tal que $U = V \cap X$.

Exemplo A.2. Sejam $X = [0, 2)$ e $U = [0, 1)$. Observe que $\overset{\circ}{U} =$

¹ Por simplicidade, denotamos $B^n(0, \delta) := B_\delta^n$

$(0, 1) \neq U$, isto é, U não é um aberto de \mathbb{R} . Entretanto, tomando o aberto $V = (-1, 1)$ de \mathbb{R} , tem-se $U = V \cap X$, ou seja, U é relativamente aberto em X .

A.3 CONTINUIDADE

Definição A.6 (CONTINUIDADE). Dados conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é *contínua no ponto* $x_0 \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Diz-se que f é *contínua* em X quando é contínua em cada um dos pontos de X .

Teorema A.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \rightarrow Y$ uma função. São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (i) *f é contínua se, e somente se, para todo aberto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ é aberto em X ;*
- (ii) *f é contínua se, e somente se, para todo fechado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ é fechado em X .*

Demonstração. Veja Teorema 4.1 e Observação 4.1, em [8]. ■

Teorema A.3. *Se $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ são contínuas em x_0 e $\lambda \in \mathbb{R}$, então as funções $f \pm g$, fg e λf são contínuas em x_0 .*

Demonstração. Veja Proposição 4.2, em [8]. ■

Teorema A.4. *Seja $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$, então f é função contínua em x_0 se, e somente se, $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em x_0 , para todo $i = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Veja Proposição 4.3, em [8]. ■

Definição A.7 (HOMEOMORFISMO). Uma função $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ é chamada de um *homeomorfismo* se possuir as seguintes propriedades:

- (i) f é bijetora;
- (ii) f é contínua;
- (iii) a função inversa f^{-1} também é contínua.

Exemplo A.3. A função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, é um homeomorfismo. De fato,

- (i) Como cada coordenada de f é uma função linear, segue que f é injetora. Além disso, dado $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, temos que $f(\frac{u_1}{a}, \frac{u_2}{b}, \frac{u_3}{c}) = (u_1, u_2, u_3)$, isto é, f é sobrejetora. Portanto, é bijetora.
- (ii) Note que cada uma das funções coordenada de f são contínuas, pois são lineares. Pelo Teorema A.4, segue que f é contínua.
- (iii) Note que $f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c})$. Também segue do Teorema A.4 que f^{-1} é contínua.

A.4 COMPACIDADE E CONEXIDADE

Definição A.8 (COBERTURA). Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, uma família $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de \mathbb{R}^n é dita uma *cobertura* de X se $X \subset \bigcup A_\lambda$. Uma *subcobertura* de \mathcal{A} é uma subfamília $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_0}$, $\Lambda_0 \subset \Lambda$, tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda$.

Definição A.9 (CONJUNTO COMPACTO). Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* quando toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita.

Teorema A.5 (HEINE-BOREL). $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\iff K$ é fechado e limitado².

Demonstração. Veja o Teorema de Heine-Borel, em ([8], p. 86). ■

Exemplo A.4. Pelo teorema acima, o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é um

² Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado se existe uma bola aberta que o contém, isto é, se existem $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que $X \subset B^n(a, r)$.

exemplo de conjunto compacto. Nesse sentido, também são compactos, os produtos cartesianos $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$, em que $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$.

Exemplo A.5. A esfera S^2 é um compacto. De fato, observe que:

- (i) $S^2 = f^{-1}(1)$, em que $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, é fechado pelo Teorema A.2, visto que $\{1\} \subset \mathbb{R}$ é fechado;
- (ii) $S^2 \subset B_{3/2}^3 \subset \mathbb{R}^3$, isto é, S^2 é limitado.

Portanto, pelo Teorema A.5 (de Heine-Borel), S^2 é compacto.

Exemplo A.6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < 1 < b$ e $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, o conjunto

$$K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq b^2\}$$

é compacto. De fato, K é limitado e $K = f^{-1}([a^2, b^2])$ é fechado pelo Teorema A.2, pois $[a^2, b^2] \subset \mathbb{R}$ é um fechado e f é contínua.

Teorema A.6. A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.

Demonstração. Veja o Teorema 4.3 em ([8], p. 139). ■

Definição A.10 (CISÃO). Uma *cisão* de um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ é uma decomposição do mesmo conjunto em dois conjuntos disjuntos que são ambos abertos em X , isto é, tem-se $U, V \subset X \subset \mathbb{R}^n$, tais que:

- (i) $X = U \cup V$;
- (ii) $U \cap V = \emptyset$;
- (iii) U e V são abertos em X .

Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite uma cisão. Basta fazer $X = X \cup \emptyset$. Esta é chamada de cisão trivial.

Definição A.11 (CONJUNTO CONEXO). Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito *conexo* se a única cisão que ele admite é a trivial. Caso contrário, ele é dito *desconexo*.

Exemplo A.7. A decomposição $\mathbb{R} - 0 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ é uma cisão de $\mathbb{R} - 0$, pois $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ são, ambos, abertos em $\mathbb{R} - 0$ e claramente $(-\infty, 0) \cap (0, \infty) = \emptyset$. Portanto, $\mathbb{R} - 0$ é desconexo.

Teorema A.7. *A imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua é um conjunto conexo.*

Demonstração. Veja o Teorema 4.4, em ([8], p. 142). ■

Teorema A.8. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto conexo. Então os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados de X são \emptyset e o próprio X .*

Demonstração. Veja a Proposição 3.10, em ([8], p. 92). ■

A.5 DIFERENCIABILIDADE

Definição A.12 (DIFERENCIABILIDADE). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* em $x_0 \in U$ se existe uma transformação linear $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que a aplicação resto³, $r = r(h)$, definida pela igualdade

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0) \cdot h + r(h)$$

satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

A aplicação f é dita *diferenciável* em $X \subset U$ quando é diferenciável em cada ponto de X . Diz-se, simplesmente, que f é *diferenciável* em U .

Observação 1. Caso $X \subset \mathbb{R}^n$ não seja aberto, diremos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em X quando existir um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset U$ e f se estende a uma aplicação diferenciável em U .

³ Estamos supondo que $x_0 + h \in U$.

Exemplo A.8. Seja a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Vamos mostrar que f é diferenciável segundo a Definição A.12. De fato, observe que $df(x) = (a, b, c)$. Considerando $h = (h_1, h_2, h_3)$, segue que

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (a(x_1+h_1), b(x_2+h_2), c(x_3+h_3)) + \\ &\quad - f(ax_1, bx_2, cx_3) \\ &= (ah_1, bh_2, ch_3) \\ &= df(x) \cdot h + 0 \end{aligned}$$

isto é, $r(h) = 0$ e temos, portanto, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \frac{0}{\|h\|} = 0$.

Teorema A.9 (DIFERENCIABILIDADE DAS COORDENADAS). *Uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto x_0 do aberto U se, e somente se, cada função-coordenada f_i é diferenciável em x_0 . No caso afirmativo, tem-se*

$$f'_i(x_0) = (f'(x_0))_i, \forall i = 1, \dots, m,$$

isto é, no ponto x_0 , a derivada de cada coordenada de f é a coordenada correspondente da derivada de f .

Demonstração. Veja a Proposição 5.2, em ([8], p. 177). ■

Dado $k \in \mathbb{N}$, diz-se que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^k quando é k vezes diferenciável e suas derivadas de ordem k são contínuas. Diz-se que f é de classe C^∞ , ou suave, quando tem derivadas de todas as ordens, isto é, quando f é de classe C^k , $\forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema A.10. *Uma aplicação $f = (f_1, \dots, f_m) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^k se, e somente se, suas coordenadas f_i , para todo $i = 1, \dots, m$, são de classe C^k .*

Demonstração. Veja a Seção 5.4, em ([8]). ■

Teorema A.11. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações de classe C^k , e $\lambda : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^k . Então, $f \pm g$, $\lambda \cdot f$, $\langle f, g \rangle$ são de classe C^k . Além disso, se $h : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, em que $f(U) \subset V$, é uma aplicação de classe C^k , então $h \circ f$ é de classe C^k*

Demonstração. Veja os Corolários 2 e 5 do Capítulo V, Seção 3, em ([6], p. 259-261). ■

Exemplo A.9. Note que a função-norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é pelo menos de classe C^1 , pois $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Suponha que $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja uma aplicação não nula de classe C^1 (veja Observação 1). Então, a função $\|V\| : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma composição das funções $\|\cdot\|$ e V . Pelo Teorema A.11, segue que $\|V\|$ é de classe C^1 . Segundo o mesmo teorema, a aplicação

$$\frac{1}{\|V\|} V : S^2 \rightarrow S^2$$

é também de classe C^1 . De fato, basta considerarmos, nos termos do teorema, $\lambda = \frac{1}{\|V\|}$ e $f = V$.

Definição A.13 (APLICAÇÕES LIPSCHITZIANAS). Diz-se que uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ é *lipschitziana* quando existe $c > 0$ (dito uma *constante de Lipschitz* de f), tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c \|x - y\|.$$

Teorema A.12. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1 e $K \subset U$ compacto. Então $f|_K$ é lipschitziana.*

Demonstração. Veja a Proposição 6.2, em ([8], p. 227). ■

Definição A.14 (DIFEOMORFISMO). Dados abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, uma bijeção $f : U \rightarrow V$ é dita um *difeomorfismo* — e U é dito, então, *difeomorfo* a V — quando ambas, f e f^{-1} , são diferenciáveis. Quando f e f^{-1} são de classe C^k , diz-se que f é um difeomorfismo de classe C^k .

Exemplo A.10. Considere novamente a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Vimos no exemplo A.8 que f é diferenciável. Pelo exemplo A.3, sabemos que f é bijetiva e que sua inversa é $f^{-1} = \left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}, \frac{x_3}{c}\right)$. Como cada função coordenada de f^{-1} é diferenciável, visto que são funções lineares, f^{-1} é diferenciável segundo o Teorema A.9. Portanto, f é um difeomorfismo.

A.5.1 Teorema da Aproximação de Weierstrass

Demonstrado por Weierstrass já em seus setenta anos ([8], p. 376), o teorema a seguir permite estender para funções contínuas muitas propriedades de funções diferenciáveis, já que o teorema nos ensina a aproximar funções contínuas por polinômios.

Teorema A.13 (APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para todo conjunto compacto $K \subset U$ e todo $\epsilon > 0$, existe um polinômio $p: K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Demonstração. Veja o Teorema de Aproximação de Weierstrass, em ([8], p. 376). ■

Na demonstração do Teorema 4.4 (da Esfera Cabeluda), feita no Capítulo 4, é necessário utilizarmos uma generalização do teorema anterior. A Observação 2 a seguir é uma versão n -dimensional do Teorema A.13.

Observação 2. Seja $f = (f_1, \dots, f_m): U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua definida num aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^n$. Podemos aplicar o Teorema de Aproximação de Weierstrass a cada uma de suas funções-coordenadas f_i , $i = 1, \dots, m$, isto é, dado $\epsilon > 0$, para cada $i = 1, \dots, m$ e todo compacto $K \subset U$, existe um polinômio $p_i: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo as condições da tese do Teorema A.13 para ϵ/m , ou seja,

$$|f_i(x) - p_i(x)| < \frac{\epsilon}{m}, \forall x \in K.$$

Dado um compacto $K \subset U$, defina $p: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $p(x) = (p_1(x), \dots, p_m(x))$, cujas coordenadas são as polinomiais obtidas para cada função-coordenada de f . Note que p satisfaz

$$\|f(x) - p(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

A.5.2 Teorema da Função Inversa

O Teorema da Função Inversa nos diz sob quais circunstâncias uma função é inversível em uma vizinhança de um ponto

de seu domínio: a função deve ser de classe C^1 , isto é, ter derivadas contínuas, e a derivada deve ser não nula no ponto avaliado. O enunciado abaixo é a versão n -dimensional do Teorema da Função Inversa.

Teorema A.14 (FUNÇÃO INVERSA). *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 definida num aberto U de \mathbb{R}^n e $a \in U$. Então se $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ tais que $a \in V$, $f(a) \in W$ e $f|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^1 .*

Demonstração. Veja o Teorema da Função Inversa, em ([8], p. 242). ■

Vale notar que funções em que podemos aplicar o Teorema da Função Inversa levam, localmente, abertos em abertos. É comum chamar essas funções de difeomorfismos locais.