UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS BIOLÓGICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE DOUTORADO EM EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA

Sérgio Florentino da Silva

ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO ENSINO SUPERIOR: UMA ANÁLISE BASEADA NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COM O USO DO GEOGEBRA

Florianópolis

2018

Sérgio Florentino da Silva

ENSINO E APRENDIZAGEM DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NO ENSINO SUPERIOR: UMA ANÁLISE BASEADA NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COM O USO DO GEOGEBRA

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica para a obtenção do Grau de Doutor em Educação Científica e Tecnológica.
Orientador: Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

Florianópolis

2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Da Silva, Sérgio Florentino
Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior : uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do geogebra / Sérgio Florentino Da Silva ; orientador, Méricles Thadeu Moretti, 2018.
555 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, 2018.

Inclui referências.

1. Educação Científica e Tecnológica. 2. Superfícies quádricas. 3. Teoria do registros de representações semióticas. 4. Abordagem de interpretação global de propriedades Figurais. 5. Funções Discursivas da Linguagem. I. Moretti, Méricles Thadeu . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. III. Título.

Sérgio Florentino da Silva

Ensino e aprendizagem das superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do geogebra

Esta Dissertação/Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de "Doutor (a)" e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica

Florianópolis, 11 de julho de 2018.

José Francisco Custódio Filho

Prof. Dr. José Francisco Custódio Filho, Dr.
Coordenador

Banca Examinadora:

Prof. (a) Méricles Thadeu Moretti, Dr.
(Orientador - PPGECT/UFSC)

Prof. (a) Sonia Elena Palomino Castro, Dra. (Examinadora - MTM/CFM/UFSC)

Prof. (a) Lisani Geni Wachholz Coan, Dra.
(Examinadora suplente - IFSC)

Prof. (a) Saddo Ag Almouloud, Dr. (Examinador - PUC/SP)

David Antonio da Costa, Dr.
(Examinador suplente - PPGECT)

Rogério de Aguiar

Prof. (a) Rogerio de Aguiar, Dr. (Examinador - UDESC/DMAT)

Dedico este trabalho aos meus pais (In Memoriam), Oscar Florentino da Silva e Ieda Isolina da Silva, à minha esposa Vanessa Nunes Silva, à minha filhinha linda Samira Florentino Silva e aos meus irmãos Alexandre Florentino da Silva e Anderson Florentino da Silva.

AGRADECIMENTOS

Em minha trajetória educacional tanto nos bancos escolares quanto fora deles contei com a ajuda e o apoio incansável, dedicado e amoroso de muitas pessoas que pretendo agradecer neste espaço. Somente com o acolhimento deles, de um jovem com muitas aflições e incertezas, sinto que me tornei um homem seguro, feliz e realizado. Por isso, abrigado à todos vocês.

Inicialmente, agradeço à Deus por permitir que eu tenha encontrado e seguido o caminho que tenho percorrido. Obrigado por tantas graças e por fazer com que a felicidade se abra para mim.

Aos meus pais Oscar Florentino da Silva e Ieda Isolina da Silva que, mesmo não estando mais fisicamente entre nós, é certo que estão no coração, na mente e no espírito dos seus filhos, familiares e amigos. Vocês construíram marcas que configuraram todo o meu modo de ser e que ainda guiam meus passos. Peço à Deus para que a força dessas marcas também estejam em minha filhinha amada. Pai e mãe, sempre amarei vocês.

A minha querida, amada e linda esposa Vanessa Nunes Silva. Quando te vi pela primeira vez na praia de Palmas, tive a certeza de que você é a mulher da minha vida e que contigo eternamente serei feliz e realizado. Obrigado por estes e pelos infinitos anos de amor, alegria, respeito, dedicação, paciência e honestidade que teremos juntos. Te amo querida.

A minha filhinha linda, Samira Florentino Silva. Com você, minhas angústias perdem sentido, as coisas ruins se esvaziam e sou tomado pelo amor absoluto. Sua presença me levou ao caminho da felicidade completa.

Aos meus queridos irmãos Alexandre Florentino da Silva e Anderson Florentino da Silva. Juntos, resumimos os traços marcados pelos nossos pais e, por isso, sintetizamos o que há de bom em nossa família, respeito muito vocês. Obrigado por todo amor, carinho e apoio que sempre tive e terei em vocês, sei que sempre estaremos juntos. Estendo tais considerações às suas respectivas queridas esposas Rosnaida Menger Ferreira e Lorena Piacente Nazário.

Aos meus parentes queridos. Em especial, aos Godinhos que,

trilhados pelos seus pais que também são meus tios-pais, sempre me trataram como primos-irmãos e, como resultado, sempre fui acolhido como um irmão por eles.

Aos meus sogros Carlos Augusto da Silva e Iara Nunes Silva. Sei que vocês torcem por mim e que sempre estaremos juntos. Que sempre sejamos felizes juntos e obrigado por tudo.

Ao meu grande amigo Kleber dos Santos. Desde nossa infância guardamos uma amizade especial que se fundamenta numa base forte de admiração e respeito mútuo. Amigo, te considero a pessoa mais perseverante e sábia que já conheci.

Aos meus amigos Luiz Alberto Ostroski, Giuliana Mathyas Ferrador Ostroski, Alexandro Carlos Perreira, André de Souza, Luana Cristina Pacheco, Jayson Adjamur Martins, Marcelo Vieira, Marcelo Massaneiro (Pacheco), Kassiano Machado, Roberto de Souza, Rodrigo de Souza Guilherme, Thaise Nunes Silva, César Augusto Latrônico, Felipe Borges, Júlio Cesar Sodre, Marcelo e Maurício Pinheiro e aos demais amigos de Palmas Paraíso pela amizade, admiração, respeito e força em todos os momentos.

Aos mestres Shigeru Sogo, Elias Sebastião Andrade, Anísio Feitosa, Laurimar Roberto Cunha, José Aurélio Coelho, Antônio Carlos Minateli, Flávio César de Jesus, Esmeraldo Manoel de Souza, Anastácio da Silva Júnior, Cleo Lucindo de Amorin (Irajá), Rui Kenji Ota, João Manoel de Castro Júnior, Celso kolesnikovas, Ademar Rulenski e tanto outros que me ensinaram que os fundamentos das artes marciais transcendem o dojo e se entrelaçam com a vida cotidiana.

Ao meu orientador Dr. Méricles Thadeu Moretti que, de forma elegante e equilibrada, sempre respeitou minhas ideias sem, contudo, ser negligente quando as discordou. Entre todos os professores-pesquisadores que tive a honra de conviver, considero que o senhor é o que mais consegue relacionar teoria e prática de maneira objetiva demonstrando, com isso, o real sentido dessa relação dialética. De certo é por isso que foste o melhor professor de matemática que tive e, por isso, me inspiro em suas sábias **ações** tanto na teoria quanto na prática.

As excelentes instituições de ensino que passei como aluno. Inicie meus estudos em nível básico no Colégio Padre Agostinho seguindo no Colégio Feliciano Nunes Silva (Colégio Militar) e no último ano desse ciclo básico no Colégio Geração. No Ensino Superior, toda a minha formação foi na UFSC. Nesses locais, tive acesso não apenas a grandes mestres da didática, mas a grandes seres humanos que me fizeram entender que a educação permite desenvolver o indivíduo e o coletivo e que, particularmente para mim, possibilitou mudar minha

vida.

Ao Instituto Federal de Santa Catarina por efetivamente, e não apenas em discurso, permitir que eu realizasse o doutorado. Sem o apoio dessa instituição que considero modelo eu não realizaria tal grau de formação. Em particular, agradeço a todo apoio incansável dos colegas João Carlos Bez Batti, Rafael Sales Lisboa de Oliveira, Otávio Bocheco, Madeline Odete Silva Corrêa, Silviana Cirino, Antônio Galdino da Costa, Karine Pereira Goss, Fernando Gonçalves Bitencourt, Marcos Antônio Leite, Maria Teresa Collares, Ramon Mayor Martins, Leone Carmo Garcia, Jorge Luiz Martins, Washington L. G. Rabelo, Aristido Freitas, Manuel Sebastian Rebollo Couto, Vidomar Silva Filho e ao grupo da Matemática. Obrigado amigos pelas inúmeras consultorias.

Aos professores Dr. Saddo Ag Almouloud (PUC/SP), Dra. Sonia Palomino Castro (CFM/UFSC), Dra. Lisani Geni Wachholz Coan (IFSC), Dr. David Antonio da Costa (UFSC) e Dr. Rogério de Aguiar (UDESC) pela leitura e análise de minha Tese na qualificação e na defesa.

Aos professores Célia Finck Brandt e Fábio Peres Gonçalves e aos colegas de doutorado Roberta Nara Sodré, Bárbara Cristina Pasa, Daiana Zanelato dos Anjo e Marcos Henrique Santos Martins pelos inúmeros conhecimentos teóricos e práticos compartilhados sem falar na grande amizade.

Nossa inteligência não serve apenas para resolver problemas algébricos, geométricos ou de outras naturezas. Mais do que isso, devemos amar e respeitar uns aos outros.

Sérgio Florentino da Silva

RESUMO

Analisar gráficos de curvas e de superfícies é uma prática recorrente que não é exclusividade de pesquisadores e estudantes da área de Matemática. Do ponto de vista escolar, o estudo de curvas está constantemente presente nos Ensinos Fundamental, Médio e, ainda, em diversos cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Já o estudo de superfícies, geralmente, inicia-se em diversos cursos de graduação e pode sofrer aprofundamentos em cursos de pós-graduações. O entendimento dos gráficos permite compreender diversas situações que são tanto internas quanto externas a Matemática. No Ensino Superior, dentre os tipos de superfícies incluem-se um conjunto que são conhecidas pelo nome genérico de superfícies quádricas ou, por simplicidade, também as chamamos de quádricas. Considerando a citada relevância das quádricas na compreensão de fenômenos e ainda admitindo dificuldades em sua aprendizagem, nesta Tese nos propomos a analisar o ensino e a aprendizagem das superfícies quádricas com especial atenção às quádricas não cilíndricas e não degeneradas (elipsoide; hiperboloide de uma folha; hiperboloide de duas folhas; cone quádrico elíptico; paraboloide elíptico; paraboloide hiperbólico). Teoricamente nos apoiamos na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, sobretudo no que diz respeito a Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento. Do ponto de vista metodológico, recaímos nos pressupostos da Engenharia Didática e, fazendo uso de elementos dessa teoria, encontramos caminhos para conceber, planejar e executar nossa pesquisa. Com tais escolhas, articulando teoria e prática e dando ênfase aos aspectos qualitativos, analisamos as dimensões cognitiva, epistemológica e didática concernentes ao objeto de estudo e, perpassando por essas dimensões, ainda incluímos a dimensão semiótica segundo a teoria de Duval. De maneira mais específica, na análise preliminar, incluindo inicialmente uma Revisão Bibliográfica, analisamos as variáveis visuais, os registros simbólicos e suas unidades significantes simbólicas, os registros em língua natural bem como as articulações entre os diferentes registros das quádricas. Durante esse caminho, mesmo que de forma mais superficial, percebemos a necessidade de analisar tais elementos semióticos para as cônicas não degeneradas (elipse; parábola; hipérbole). Além disso, ainda na análise preliminar, analisamos os registros em língua natural presentes em alguns livros

didáticos clássicos e, como fruto da identificação dos limites e possibilidades desses registros, propomos o uso de novos registros em língua natural. No fim dessa fase prévia, também elaboramos propostas de Sequências de Ensino para as quádricas. Nessas propostas, buscamos que a participação dos alunos estivessem em sintonia com a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e, ainda, adicionamos o uso do *software* Geogebra. Particularmente o uso do Geogebra nessas sequências privilegiou a Abordagem Experimental em Educação Matemática preconizada por Marcelo de Carvalho Borba. Nas fases seguintes de nossa Engenharia Didática, em decorrência da disponibilidade dos alunos que participaram da fase experimental da pesquisa, nos voltamos apenas para os paraboloides elípticos padrão. Mesmo diante desse limite, temos como base que o estudo completo da Engenharia Didática (realização de todas as fases dessa metodologia) para esses paraboloides serve de modelo para o estudo das demais quádricas. Voltando as demais fases da pesquisa, na análise a priori, para cada atividade de ensino proposta, incluímos as seguintes variáveis de comando local: tipo de situação; objetivos; hipóteses. Na experimentação, montamos uma turma com um conjunto de dez alunos e, assim, nos voltamos para a parte empírica da pesquisa. Nas análises a posteriori e validação consideramos que a Sequência de Ensino que propomos e experimentamos foi validada. Ademais, principalmente a partir das Funções Discursivas da Linguagem, avaliamos qualitativamente as produções dos alunos frente às atividades que propomos. Como consequência desse trabalho, também avaliamos o potencial de nossa Sequência de Ensino, a aprendizagem e os processos cognitivos que os alunos mobilizaram. Nossas conclusões são que no decorrer do processo gradualmente as Funções Referencial e Expansão Discursiva necessárias para o progresso do discurso e paralelamente os Tratamentos e as Conversões (em duplo sentido) foram mobilizadas adequadamente pelos alunos. Inclusive, a evocação dos conteúdos presentes nas variáveis visuais, nos registros básicos simbólicos e suas unidades significantes simbólicas e nos registros básicos em língua natural que tomamos em todo o processo foram bem mobilizados pelos alunos e, dessa forma, vemos um bom uso do quadro teórico particularmente do tipo semiótico. Portanto, temos indícios de que diante de nossa Sequência de Ensino os processos cognitivos mobilizados pelos alunos evocaram adequadamente as variáveis cognitivas que tomamos como fundamentais para a aprendizagem. Por isso, certamente os alunos compreenderam os objetos trabalhados e, consequentemente, a Sequência que trabalhamos na experimentação tem um bom potencial de ensino. Porém, mesmo diante do já citado progresso gradual

do discurso, temos clareza, conforme está bem detalhado nas análises a posteriori e validação da Tese, que durante o processo houve alguns problemas. Isso, claro, faz parte da prática pedagógica.
Palavras-chave: Superfícies Quádricas. Teoria do Registros de Representações Semióticas. Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Funções Discursivas da Linguagem. Geogebra.

ABSTRACT

Analyzing graphs with curves and surfaces is a recurring practice that is not exclusive to researchers and students of Mathematics. In a school setting, the study of curves is constantly present in Elementary, Middle and High School, as well as in several undergraduate and graduate courses. On the other hand, the study of surfaces generally starts in undergraduate courses and may be further studied in graduate courses. The understanding of the graphs allows knowing various situations that are both internal and external to Mathematics. In higher education, the types of surfaces include a set that are known by the generic name of quadric surfaces or, simply, quadrics. Considering the cited relevance of quadrics in the understanding of phenomena and still admitting difficulties in its learning, in this thesis, we propose to analyze the teaching and learning of quadric surfaces with special attention to non-cylindrical and non-degenerate quadrants (ellipsoid, hyperboloid of one sheet, hyperboloid of two sheets, quadrilateral elliptical cone, elliptic paraboloid, hyperbolic paraboloid). Theoretically, we rely on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations, especially on the Global Interpretation Approach of Figurative Properties, the Discursive Functions of Language, and the Cognitive Operations of Conversion and Treatment. From the organizational point of view, we fall back on the assumptions of Didactic Engineering and, using elements of this theory, we find ways to conceive, plan and execute our research. With such choices, articulating theory and practice and emphasizing qualitative aspects, we analyze the cognitive, epistemological and didactic dimensions concerning the object of study and, through these proportions, we still include the semiotic dimension according to Duval's theory. More specifically, in the preliminary analysis, initially including a Bibliographic Review, we analyze the visual variables, the symbolic registers and the symbolic units, the natural language registers as well as the articulations between the different quadric registers. During this path, in a more superficial way, we perceive the necessity of analyzing such semiotic elements for the non-degenerate conics (ellipse, parabola, hyperbola). In addition to it, in the preliminary analysis, we analyze the natural language registers present in some standard textbooks and, as a result of the identification of the limits and possibilities of these registers, we propose the use of new records in the natural language. At the end of this preliminary phase, we have also elaborated proposals for

Sequences of Teaching for quadrics. In these proposals, we wanted the participation of the students to be linked to Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations and we also added the use of Geogebra software. In particular, the use of Geogebra in these sequences privileged the Experimental Approach in Mathematical Education advocated by Marcelo de Carvalho Borba. In the following phases of our didactic engineering, due to the availability of the students who took part in the experimental phase of the research, we focused only on the standard elliptical paraboloid. Even with this limit, we have as a base that the complete study of Didactic Engineering (completion of all phases of this methodology) for these paraboloids serves as a model for the study of other quadrics. Going back to the other phases of the research, in the priori analysis, for each proposed teaching activity, we included the following local command variables: type of situation; goals; hypotheses. For the experimentation, we gathered a class with ten students, and so we focused on the empirical part of the research. In the posteriori analysis and validation we considered that the Sequence of Teaching that we proposed and practiced has been validated. Furthermore, mainly from the Discursive Functions of Language, we qualitatively analyzed the productions of the students according to the activities that we proposed. As a consequence of this work, we also evaluated the potential of our Sequence of Teaching, the learning and the cognitive processes that the students experienced. Our conclusions are that during this process the Referential Functions and Discursive Expansion necessary for the progress of the study, and in parallel, the Treatments and Conversions (in a double sense) were adequately practiced by the students. In addition, the suggestion of the topics present in the visual variables, in the basic symbolic registers and their symbolic significant units and in the basic natural language registers that we used throughout the process were well operated by the students and, in this way, we see a good use of the theoretical framework particularly of the semiotic type. Therefore, we believe that according to our Sequence of Teaching the cognitive processes used by the students adequately came across the cognitive variables we take as fundamental for learning. Thus, students have certainly understood the objects worked, and consequently the Sequence we worked with in the experimentation has a good teaching potential. However, even facing the above-mentioned gradual progress of discourse, we are certain, as it is well detailed in the posteriori analysis and validation of the Thesis, that during the process there have been some problems. This, of course, is part of the pedagogical practice.
Keywords: Quadrilateral Surfaces. Theory of Semiotic Representati-

ons. Approach to Global Interpretation of Figurative Properties. Discursive Functions of Language. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEMPEM - Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática
COBENGE - Congressos Brasileiros de Ensino de Engenharia
ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática
GPIMEM - Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática
ICME - Congresso Internacional de Educação Matemática
IFSC - Instituto Federal de Santa Catarina
OM - Objeto matemático
PPGECT - Programa de Pós – Graduação em Educação Científica e Tecnológica
PUC - Pontifícia Universidade Católica
SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
SJ – São José
TRRS – Teoria dos Registros de Representações Semióticas
UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina
UNICSUL - Universidade Cruzeiro do Sul

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É de conhecimento do meio acadêmico a histórica concepção de que significativa parcela dos estudantes não possui um bom rendimento com a disciplina de Matemática. As implicações práticas desse entendimento configuram-se em uma educação escolar com frequentes notas baixas e, em muitos casos, com elevados índices de reprovação. Concomitante a essa questão é a preocupação com o Ensino de Matemática. Nesse sentido, de acordo com D'Ambrosio (2004):

> Embora já se identifiquem na antiguidade preocupações com o ensino de matemática, particularmente na *República VII*, de Platão, é na Idade Média, no Renascimento, e nos primeiros tempos da Idade Moderna que essas preocupações são melhor focalizadas. De especial interesse para o Brasil é o enfoque que Luis Antônio Verney ao ensino de matemática no *Verdadeiro método de estudar*, de 1746. Mas é somente a partir das três grandes revoluções da modernidade – a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789) – que as preocupações com a educação matemática da juventude começam a tomar corpo. (p.71, grifo do autor)[1].

No cenário brasileiro a preocupação com a Educação Matemática, incluindo o seu ensino, motivou diversos grupos constituídos por professores, estudantes e pesquisadores a criarem os Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM). A primeira edição desse evento foi realizada em 1987 na Pontifícia Universidade Católica (PUC), SP, sendo que em 2016 foi realizada, na Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL), SP, a XII edição. O ENEM caracteriza-se pela apresentação de vasta programação científica em que são apresentadas as novas produções da área de Educação Matemática.

Especificamente com relação à disciplina Cálculo Diferencial e Integral, que chamaremos apenas de Cálculo, os elevados índices de

[1] D'Ambrosio (2004) apresenta dados que mostram a histórica preocupação com o Ensino de Matemática. Esse artigo ainda discute o caminhar histórico que consolidou a Educação Matemática como uma área de pesquisa. Nessa trajetória, inclui-se a realização, em 1969, do Primeiro Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME) realizado em Lyons, França.

reprovação se mostram bastante preocupantes[2] principalmente por que essa disciplina está presente em diversos cursos de graduação tais como: Matemática; Física; Engenharias entre outros. Nesses cursos, segundo Barufi (1999, p. 3), "[...] o Cálculo aparece como um curso básico, amplo e integrador, de caráter fundamental, envolvendo, ano após ano, milhares de alunos e várias dezenas de professores." Rezende (2004, p. 22) comenta que "o problema relacionado ao ensino de Cálculo persiste e é, sem dúvida, um dos principais problemas no ensino superior de matemática."

Motivados em melhorar esses índices, várias pesquisas tem sido realizadas. Há uma década, Loiola (2002) indicou algumas delas com os seguintes termos:

> As dificuldades dos alunos em Cálculo, por exemplo, já foram tema de um grupo de trabalho no *International Congresso on Mathematical Education* - ICME - (Tall, 1992). A preocupação com questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo também está presente em algumas dissertações e teses do Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista – UNESP – de Rio Claro, SP, como em Cabral (1992), Franchi (1993), Cassol (1998), Fantinel (1998), Sad (1998), Villareal (1999) e Catapani (2001), assim como em outros programas de pós – graduação como, por exemplo, Biembengut (1997), Cabral (1998), Souza Jr. (2000) e Morelatti (2001), só para citar alguns exemplos. (p.4, grifo do autor).

Ainda com relação a pesquisas que discutem o Ensino de Cálculo, também destacamos as pesquisas de Luiz (2010) e Né (2013) realizadas junto ao Programa de Pós - Graduação em Educação Científica e Tecnológica (PPGECT) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) com a orientação do Dr. Méricles Thadeu Moretti. Nessas dissertações estudou-se o esboço de curvas no Ensino Superior tendo a Teoria dos Registros de Representações Semióticas como referencial teórico principal.

De maneira geral, temos como base que analisar gráficos de curvas e também de superfícies é uma prática recorrente que não é exclusividade de pesquisadores e estudantes da área de Matemática. Do ponto de vista escolar, o estudo de curvas está constantemente presente nos

[2] Barufi (1999) e Luiz (2010) apontam índices nesse sentido. Também há uma série de dados nos Congressos Brasileiros de Educação em Engenharia (COBENGE).

Ensinos Fundamental, Médio e, ainda, em diversos cursos tanto de graduação quanto de pós-graduação. Já o estudo de superfícies geralmente inicia-se em diversos cursos de graduação e segue em pós-graduações. O entendimento dos gráficos permite compreender diversas situações que são tanto internas quanto externas a Matemática. Nesse sentido, Corrêa e Moretti (2014, p. 39) entendem que esboçar um gráfico é "[...] uma ferramenta matemática muito importante nos tempos atuais por tornar possível a representação de diversos fenômenos e situações." Essa ferramenta, em nosso entendimento, pode ser compreensível não apenas pelos matemáticos.

No Ensino Superior, dentre os tipos de superfícies incluem-se um conjunto que são conhecidas pelo nome genérico de *superfícies quádricas* ou, por simplicidade, também as chamamos de *quádricas*.[3] Algebricamente essas superfícies possuem como registro simbólico uma equação do segundo grau em três variáveis.

Considerando as constantes reais A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e as variáveis reais x, y, z, uma equação do segundo grau em três variáveis é uma equação do seguinte tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1.1)$$

com a condição de que pelo menos uma das constantes A, B, C, D, E, F é diferente de zero.

O termo quádricas é agregador e, com isso, inclui várias possibilidades. As quádricas referem-se aos seguintes *objetos matemáticos* (OM's):

1. *Quádricas não degeneradas: elipsoides; hiperboloides de uma folha; hiperboloides de duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos; paraboloides hiperbólicos (selas); cilindros quádricos elípticos; cilindros quádricos hiperbólicos; cilindros quádricos parabólicos.*
2. *Quádricas degeneradas: conjunto vazio; conjunto formado por um só ponto, reta, plano; reunião de dois planos paralelos; reunião de dois planos concorrentes.*[4]

Em conversas informais com nossos alunos graduandos do curso de Engenharia de Telecomunicações do IFSC/SJ (Instituto Federal de

[3] Em todo o nosso estudo só utilizaremos o sistema de coordenadas ortogonais.

[4] A informação a respeito do elenco que constitui as quádricas foi retirada de Camargo e Boulos (2005, p. 428).

Santa Catarina/câmpus São José) tentamos identificar que conteúdos Matemáticos eles tiveram dificuldades de aprendizagem durante a realização desse curso. As respostas recaíram frequentemente nas superfícies quádricas. Nessas conversas, particularmente com aqueles que já tinham feito as cadeiras específicas de Matemática, muitos alunos mencionaram que no decorrer de algumas disciplinas, como os Cálculos, esses objetos apareciam como suporte para aprender outros objetos. Em conversa com outros colegas professores também identificamos a fala de que os alunos têm dificuldades em aprender as superfícies quádricas. Essa, aliás, é a nossa impressão.[5]

A partir de breves e informais impressões minhas, de meus colegas e de meus alunos não queremos fazer generalizações como, por exemplo, de que a culpa do fracasso em Cálculo seja das superfícies quádricas. Além de grosseiro, isso desqualificaria as pesquisas em Educação Matemática. Mesmo assim, pareceu-nos relevante entender melhor as citadas angústias com relação as quádricas.

De qualquer forma, clássicos livros de Cálculo como em Simmons (1988), Leithold (1994), Anton (2002) e Stewart (2010) e os de Geometria Analítica como os de Winterle (2000), Camargo e Boulos (2005) e Lehmann (2007) trazem ao menos um resumo das quádricas.

Admitindo as dificuldades na aprendizagem das superfícies quádricas e concordando com o já citado entendimento de Corrêa e Moretti (2014) de que os gráficos são ferramentas importantes na compreensão de diversos fenômenos, nesta Tese nos motivamos a pesquisar o ensino e a aprendizagem dessas superfícies. Porém, nosso estudo sobre as quádricas é mais específico paras as quádricas não cilíndricas e não degeneradas. No parágrafo a seguir justificaremos tal recorte.

No caso dos cilindros quádrico elíptico, hiperbólico e parabólico além de serem quádricas eles também fazem parte de um conjunto de objetos matemáticos chamados de *superfícies cilíndricas*. O estudo dessas superfícies envolve conteúdos específicos a ela e que não temos como objetivo tratar nesta Tese como, por exemplo, o *Princípio da Extrusão* (ver por exemplo Anton (2002)), questões relacionadas aos planos de simetria e as interseções e a própria definição de *superfície cilíndrica*. Por isso, nossa Tese apenas apresenta e não analisa os três tipos de cilindros quádricos e, dessa forma, vemos a necessidade de estudos mais aprofundados nesse sentido. Nossa pesquisa também não se voltará para as quádricas degeneradas uma vez a pesquisa de Monteiro (2011) já dá bons indicativos nesse sentido (na Revisão Bibliográfica -

[5]Leciono disciplinas básicas de Matemática do curso de Engenharia de Telecomunicações do IFSC/SJ desde 2012. Desde então tenho as citadas impressões.

subseção 4.1 - p. 140 - falaremos brevemente dessa pesquisa).

Dados os devidos recortes, para entender o motivo das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem das quádricas e tentar contribuir para o ensino desses objetos, recorremos a *Teoria dos Registros de Representações Semióticas* (TRRS) do filósofo e psicólogo Raymond Guy Jean Claude Duval.

Esse estudioso da aprendizagem matemática, logo após ter concluído sua Tese com orientação de Pierre Gréco cujo referencial teórico foi a epistemologia genética de Piaget para estudar o desenvolvimento de noções físicas e matemáticas em crianças e adolescentes, tornou-se pesquisador do IREM (Instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques)[6] de Strasbourg em 1970. Nessa época, engajou-se em duas linhas de pesquisas. Apropriando-se das concepções psicológicas e cognitivas piagetianas e atendendo uma das fortes demandas institucionais da Reforma da Matemática "Moderna", a primeira dessas linhas voltou-se para a compreensão das demonstrações por alunos do *Collège*[7] (12-15 anos). A segunda, bastante diferente da primeira, rapidamente se impôs a Duval. Nela, dava-se importância à variedade das formas de linguagem nas atividades matemáticas. De um lado dessa segunda linha, a linguagem natural ocupava o primeiro lugar em geometria para raciocínios que mobilizavam vocabulário técnico principalmente pelo fato de que o uso de figuras geométricas era, então, denunciado e proibido por ser considerado como uma fonte de confusão. Por outro lado, queriam substituir sistematicamente as palavras e a língua natural pelo uso de sinais e símbolos para designar os objetos, as relações e as operações aritméticas, algébricas, lógicas, de conjuntos, etc. Cada uma dessas duas vertentes discursivas da linguagem criou sérias dificuldades de compreensão. As mais intensas eram as passagens entre a língua natural e todas as designações e formulações simbólicas. Por uma série de discordâncias, Duval abandonou as duas linhas de pesquisa (DUVAL, 2013).[8]

Com a elaboração de sua própria teoria, a TRRS, Duval coloca a epistemologia específica da Matemática numa posição central em suas análises e admite que os objetos da matemática jamais sejam acessíveis diretamente pela percepção ou por instrumentos. Diante dessa condição, tem-se como hipótese que há um elemento determinante para acessar os OM's: as representações. Elas pertencem a sistemas *semióticos*

[6] São institutos espalhadas em diversas regiões da França que desenvolvem pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da matemática.

[7] Corresponde aos anos finais do Ensino Fundamental do Brasil.

[8] Os breves fatos históricos que fizemos nesse parágrafo podem ser lidos com mais detalhes em Duval (2013).

comuns, como a língua natural e os diagramas, e sistemas semióticos especializados como, por exemplo, os diferentes sistemas de coordenadas gráficas (cartesianos, polares, esféricas, ...), o sistema de escrituras simbólicas da álgebra, o sistema de numeração decimal (indo-arábico) e o sistema de representação das figuras em diferentes dimensões. Para efeito de simplicidade da comunicação, nesta Tese usaremos os termos *registro cartesiano*, *registro simbólico* e *registro em língua natural*.

Para diferenciar de outros, Duval (2012) chama certos sistemas semióticos de *registros de representações semióticos*. Por vezes diremos apenas registros ou ainda registros de representação com o mesmo sentido de registros de representação semiótica. Esses sistemas possuem regras e convenções que não são as mesmas para sistemas diferentes. Com elas, permite-se que uma representação semiótica possa ser *identificada* num dado sistema semiótico e, ainda, que essa representação possa ser *transformada* tanto internamente (dentro de um dado sistema semiótico) quanto externamente (mudar de sistema semiótico). São essas possibilidades de transformações que permitem que as representações semióticas usadas em matemática tenham a função não apenas de *comunicação* mais, sobretudo, de *tratamento* e de *objetivação*.

Na TRRS, portanto, as análises sobre a compreensão e também a produção em Matemática são feitas sobre o ponto de vista dos registros. De maneira bastante sintética podemos dizer que Duval produziu particularmente para a Matemática um modelo de desenvolvimento cognitivo que enfatiza a *necessidade* dos *registros de representações semióticos* para a aprendizagem. Nesse modelo, não é suficiente conhecer as diversas representações de um OM, pois é necessário compreender as transformações internas e externas das representações. Essas transformações, que não ocorrem de qualquer forma, nem de maneira espontânea ou natural, são do tipo *semiótica* e, por isso, são condicionadas a sistemas específicos que englobam regras próprias de funcionamento.

Conhecendo o modelo proposto por Duval, que se foca na maneira como os alunos aprendem, podemos entender do ponto de vista dos registros o funcionamento cognitivo deles durante a aprendizagem dos objetos da matemática. Assim, os professores podem propor um ensino que vá ao encontro da maneira que os alunos raciocinam matematicamente.

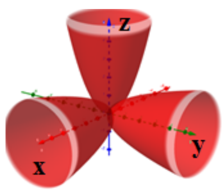
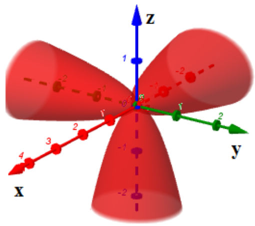
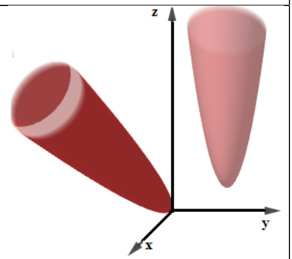
Para Duval (2011b) a *compreensão integral* (ou *integrativa*) dos gráficos só é possível com o que ele definiu como *Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais*. Nesse entendimento, não nos limitamos em apenas "olhar" um desenho no papel ou em um *software* que representa uma equação e nem nos reduzimos a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas que necessitam de uma abordagem que possibilite *interpretar globalmente as propriedades figurais* e que, com isso, permite efeitos duradouros na aprendizagem dos alunos. Para tanto, recorre-se ao *Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas* que permite identificar, via *oposições qualitativas*, as *variáveis visuais* (pertinentes ao registro cartesiano e também chamadas de unidades básicas significantes cartesianas) e as *unidades básicas significantes simbólicas* correspondentes (pertinentes ao registro simbólico).[9] Esses elementos são orientadores e intermediarão as transformações entre registros distintos. Não obstante, não é suficiente conhecê-las sendo necessário *coordená-las* a partir das regras de correspondência semiótica e, sobretudo, realizar as *Conversões* (mudar de sistema de representação) em duplo sentido (registro cartesiano (1) $\leftrightarrow$ registro simbólico (2)). Porém, no caso das quádricas considerando que em geral não é possível dado o registro (1) determinar o registro (2), como realizar conversões em duplo sentido? Diante de tal impossibilidade nesses casos sugerimos que as conversões sejam feitas da seguinte maneira: variáveis visuais $\leftrightarrow$ unidades significantes simbólicas (na página 100 discutiremos melhor essa questão).

Em todo esse processo de análise e identificação, que é central na TRRS, a discriminação das variáveis visuais é particularmente pouco evidente, mas, infelizmente, em geral é negligenciado no ensino. De qualquer maneira, o adequado reconhecimento dessas variáveis permite que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo. Sem ele, não temos como identificar as unidades significantes simbólicas correspondentes e, consequentemente, a compreensão integral em Matemática é comprometida.

Para as quádricas ainda há outras dificuldades específicas na análise e identificação das variáveis cognitivas. Em primeiro lugar, as quádricas incluem vários *casos* (elipsoides; hiperboloides; paraboloides, ...) e, além disso, cada um desses casos pode estar em *posições diferentes no sistema cartesiano* (paraboloide elíptico padrão abrindo em z_+; paraboloide padrão elíptico abrindo em y_-; paraboloide elíptico transladado; paraboloide elíptico rotacionado; ...). O Quadro 1.1 representa, no sistema cartesiano, essas diferentes posições para o caso do paraboloide elíptico.

Quadro 1.1 – Diferentes posições do paraboloide elíptico

[9] Por vezes omitiremos os termos básicas e significantes.

Paraboloide elíptico **abrindo em z_+, em y_+ e em x_+**	Paraboloide elíptico **abrindo em z_-, em y_- e em x_-**	Paraboloide elíptico **transladado e rotacionado**
		

Fonte: O autor

Nas quádricas há várias semelhanças e diferenças visuais e algébricas que estão presentes tanto entre os vários casos quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes. Portanto, há oposições qualitativas entre os vários casos e também específicas de cada quádrica o que, consequentemente, configuram-se em dificuldades de aprendizagem para os alunos.

Há ainda outros complicadores. Em especial, verificamos que à identificação/correlação das variáveis visuais e unidades significantes simbólicas são bem mais difíceis quando esse trabalho é feito com as equações em certas formas como, por exemplo, a forma geral (Equação 1.1 - p. 43). Além disso, quando as quádricas estão em posições rotacionadas, além da dificuldade de visualização dos registros cartesianos, sobretudo no que diz respeito às simetrias e interseções com planos, os cálculos algébricos tornam-se mais extensos e, inclusive, exigem conhecimentos de Álgebra Linear tais como *autovalores, autovetores* e *base* que em geral ainda não são de conhecimento dos alunos no nível de ensino em que se estudam essas superfícies.

Diante dessas dificuldades, como abordar as quádricas (não cilíndricas e não degeneradas) com a TRRS? Para tratar essa questão e estar em *sintonia* com a TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, propomos algumas adaptações que discutiremos nesta pesquisa.

Em primeiro lugar tomamos variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Assim, consideramos as oposições qualitativas que existem entre os vários casos e as que são específicas de cada quádrica. Em especial, adiantamos que entendemos que as *interseções com planos* permitem tal análise/identificação. Essas interseções são desconstruções dimensionais que permitem visualizar dimensões menores do que três e que são fundamentais para a apropriação das citadas oposições. Com elas, os *valores visuais* determinados são as cônicas (elipse; hipérbole; parábola; cônicas degeneradas - o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes).[10] As cônicas, por sua vez, também possuem suas próprias variáveis visuais e que também permitem analisar as variáveis visuais das quádricas. Mais adiante discutiremos melhor essas variáveis e, daí, veremos que nosso enfoque a respeito dessas interseções não é apenas matemático, mas semiótico e cognitivo. Com isso, diferente do que por vezes é a prática pedagógica recorrente, indicaremos explicitamente as articulações semióticas envolvendo os registros em língua natural, cartesiano e simbólico.

Em segundo lugar, para minimizar as dificuldades anteriormente citadas, sobretudo as algébricas, nossa Tese deu *ênfase* as quádricas nas *posições padrão*. Tratam-se de "posições privilegiadas", pois mesmo sem ter que recorrer a Álgebra Linear, permitem o estudo extenso dos registros simbólicos de maneira mais simples do que no caso das outras posições. No fundo, essas são as posições que os livros costumam trabalhar sendo que o que pretendemos é apenas contribuir para o debate de como abordar o ensino das quádricas em sintonia com a TRRS diante das citadas dificuldades visuais e algébricas. Adicionando a isso, claro, o potencial semiótico que nem sempre é explorado intensamente nos livros.

Para as demais posições (transladadas e rotacionadas), sugerimos que seu estudo seja feito a partir das posições padrão. No caso das posições transladadas, propomos uma abordagem análoga a de Moretti (2003); Moretti e Thiel (2012) (na subseção 2.2 - p. 95 - discutiremos essa abordagem). Já para as posições rotacionadas, conforme já demos indicativos, é necessário avançar nos estudos didáticos incluindo tópicos da Álgebra Linear. De qualquer maneira, matematicamente nossa sugestão de abordagem das posições transladadas e rotacionadas a partir das padrão está assegurada por teoremas da Álgebra Linear (veja o *Teorema Espectral*) que garantem que sempre é possível por translações e/ou rotações escolhermos novos eixos coordenados que deixam a quádrica na posição padrão e que, consequentemente, deixam as equações em formas mais simples.

[10] A classificação das cônicas aqui apresentada é a mesma que a dada por Camargo e Boulos (2005).

No que diz respeito às variáveis visuais que tomamos, a primeira, já exemplificada na Figura 1.1, é a posição da quádrica em relação ao sistema cartesiano e ela assume três valores: padrão, transladada e rotacionada.[11] No caso dessa variável, exceto no caso das posições padrão que discutiremos mais adiante, em função das dificuldades algébricas anteriormente citadas não demos ênfase as unidades simbólicas correspondentes. Mesmo assim, incluímos, na subseção 4.3.8.2 (p. 255), algumas questões algébricas que permitem um estudo modesto nesse sentido. No fundo, nossa intenção em incluir tal variável visual é apenas dar uma breve noção das diferentes posições no sistema cartesiano e, a partir daí, privilegiar o estudo de uma dessas posições (a posição padrão). Com isso, mesmo que os aspectos algébricos sejam pouco explorados, podemos analisar que as posições transladadas e rotacionadas se correlacionam com a posição padrão e, nesse sentido, temos uma visão global e articulada das diferentes posições. Além disso, para definirmos os citados valores visuais nos baseamos nas posições dos planos de simetria das quádricas em relação aos planos coordenados escolhidos e também na posição do ponto significativo (centro; vértice; ponto de sela) da superfície em relação à origem do sistema cartesiano (os Quadros 4.18, A.4 e A.1 da página 173 tratam dessas definições). Portanto, no estudo dessa variável visual é necessário reconhecer quem são os planos de simetria dessas superfícies e como definimos esses pontos. Esse reconhecimento, aliás, não é recorrente nem mesmo nos livros didáticos clássicos.

Além da variável visual que acabamos de expor, tomamos outras para as quádricas que estão na posição padrão. Dessas variáveis, adiantamos que na posição padrão determinamos 34 possibilidades de quádricas padrão (para visualizá-las veja a subseção 4.3.1.2 - p. 175). Entre essas variáveis, as *mais importantes* são as interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados.[12] No primeiro caso, elas se dividem em interseção com o plano xy, interseção com o plano xz e interseção com o plano yz. No segundo caso, de forma análoga, elas também se dividem em três. Em todas essas interseções os valores visuais determinados são as cônicas. Mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, consideramos que todos os valores vi-

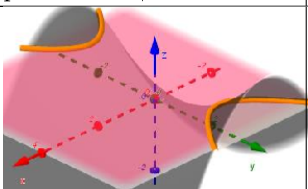
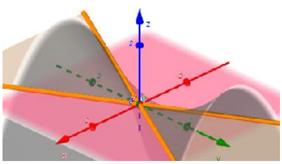
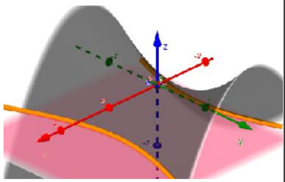
[11] Por uma questão de economia de termos por vezes omitiremos o termo "posição" ao dizer *posição padrão, posição transladada* ou *posição rotacionada.* Assim, por exemplo, diremos apenas *elipsoide padrão* e não *elipsoide na posição padrão.*

[12] Nesta Tese não estudaremos interseções com planos não paralelos aos planos coordenados. Por isso, para simplificar a escrita ao dizermos *interseções com planos* estamos nos referindo apenas as *interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados.*

suais determinados por todos esses casos de interseções (não apenas as curvas de nível - um caso especial de interseção com planos) sejam (re)conhecidos, pois, o desconhecimento dessas desconstruções dimensionais prejudica a visualização da quádrica no sistema cartesiano e, além disso, a identificação e diferenciação tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano.

Além disso, há outra questão relevante no estudo das interseções. Trata-se do fato de que a visualização dos valores visuais determinados (cônicas) pode ser custosa para os alunos devendo, assim, ser trabalhado no ensino. Como exemplo inicial de tal custo, considere as figuras do Quadro a seguir em que estão registrados as interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$. Caso haja interesse, o *cenário* PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (disponível em: https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/index.php/Sérgio_Florentino_da_Silva) representa essas interseções de maneira dinâmica. Mais adiante, na página 64, falaremos o que são cenários. Voltando ao citado exemplo, note que se $k = 0$, então o valor visual determinado nas interseções são retas concorrentes, ou seja, um dos casos de cônicas degeneradas. Para os demais valores reais de k os valores visuais determinados são hipérboles. Porém, a direção que essas hipérboles abrem muda conforme $k > 0$ ou $k < 0$.

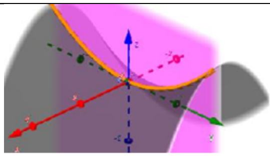
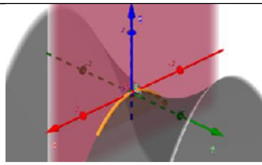
Quadro 1.2 – Interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $z = k; k \in R$

Interseção da sela com o plano $z = k; k > 0$	Interseção da sela com o plano $z = k; k = 0$	Interseção da sela com o plano $z = k; k < 0$
		

Fonte: O autor

Com relação à mesma sela, o Quadro a seguir representa no sistema cartesiano as interseções com os planos $x = k$ e $y = k; k \in R$. Note que em ambos os casos os valores visuais determinados são parábolas. Porém, em $x = k$ essas parábolas estão abrindo no sentido positivo do eixo enquanto que em $y = k$ as parábolas estão abrindo no sentido negativo do eixo.

Quadro 1.3 – Interseções da sela de equação $z = -x^2 + y^2$ com planos de equação $x = k$ e $y = k; k \in R$

Interseção da sela com o plano $x = k$	Interseção da sela com o plano $y = k$
	

Fonte: O autor

Diante do que dissemos, a visualização de tais interseções deve ser considerada no ensino não se limitando, portanto, as curvas de nível. Porém, em função do tempo didático[13], propomos que tal (re)conhecimento seja feito com o auxílio do Geogebra para apenas uma das posições que cada caso de quádrica padrão pode estar no sistema cartesiano. A partir daí, as interseções das quádricas que estão em outras posições padrão podem ser entendidas usando o recurso das *reflexões* (mais adiante explicaremos melhor o potencial do Geogebra e das reflexões).

Ainda com relação a variável visual interseção com planos, as correspondentes unidades significantes simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas (na subseção 4.3.5 da página 208 discutiremos essas unidades). Veremos que para cada quádrica padrão, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, semioticamente é importante (re)conhecermos os elementos que constituem *conjunto das unidades simbólicas* da equação além de como é a *combinação* desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas das diferentes equações das quádricas. Ademais, é desse conjunto/combinação que podemos analisar se haverá ou não os valores visuais elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas nas interseções com planos. Inclusive, podemos "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um desses planos. Nesse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros

[13] O tempo didático é aquele que é determinado nos programas escolares e livros didáticos em cumprimento de exigências legais. Já o tempo de aprendizagem é determinado pela aprendizagem do aluno. Tratam-se de definições provenientes da Transposição Didática de Yves Chevallard sendo que para ter acesso a mais informações nesse sentido acesse Pais (2002, p. 31).

simbólicos e cartesianos (da superfícies quádrica como um todo e das interseções determinadas) se correspondem da maneira como conhecemos. Por isso, algebricamente o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das equações das quádricas são as condições semióticas que possibilitam as correlações entre as equações e as formas geométricas das quádricas.

Como vemos, para que o ensino das superfícies quádricas esteja em sintonia com a Abordagem de Interpretação Global sugerimos *principalmente*[14] o recurso das interseções com planos articulado a compreensão de que os valores visuais determinados (elipses; parábolas; hipérboles; cônicas degeneradas) dependem ou são condicionados ao conjunto/combinação das unidades simbólicas que a equação correspondente possui. Esse (re)conhecimento é fundamental para a diferenciação tanto dos diferentes casos de quádricas quanto de uma quádrica em diferentes posições. Além disso, também propomos que ele seja combinado ao uso do Geogebra e ao recurso das reflexões.

Algebricamente para o estudo da interseção de uma quádrica de equação E com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados costuma-se substituir a equação do plano na correspondente variável de E e, a seguir, fazer simplificações. Feito essa substituição sabemos que a variável da equação da quádrica que foi substituída pela equação do plano se *transformará* numa constante e, consequentemente, determinaremos uma equação com duas variáveis que irá se referir a uma das cônicas. No uso desse procedimento, mesmo que ele seja algébrico, pensamos que é relevante considerar sua interpretação geométrica. Apenas para simplificar a comunicação, chamaremos o referido de procedimento P. Como exemplo, para determinar algebricamente a interseção entre o plano de equação $z = 3$ e a quádrica de equação $z = -x^2 + y^2$, basta substituir a equação desse plano na variável z da equação da quádrica e, assim, ficamos com a equação $3 = -x^2 + y^2 \to -x^2/3 + y^2/3 = 1$. Note que essa última equação é tal que no primeiro membro há dois termos quadráticos com sinais opostos e no segundo membro há apenas o número 1, ou seja, trata-se das unidades significantes simbólicas de uma hipérbole (na subseção 4.2.2 da p. 150 detalharemos essas unidades para o caso das cônicas). Logo, concluímos que na interseção em questão determinamos uma hipérbole contida no plano de equação $z = 3$. A primeira figura do Quadro 1.2 representa no sistema cartesiano essa interseção.

Retomando as questões semióticas mais amplas, no estudo das

[14]A seguir também sugerimos outras variáveis visuais. Também iremos propor o uso dos registros básicos em língua natural.

variáveis visuais interseções com planos consideramos que os tratamentos algébricas bem como sua interpretação geométrica presentes no procedimento P são as operações matemáticas responsáveis pela significação. Ao desprezá-los, ao invés de fazermos conversões nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações. Porém, em decorrência do tempo didático, em geral é impraticável realizar tais procedimentos de forma completa no estudo de todas as quádricas. Por isso, confrontando a citada relevância desses procedimentos com o tempo disponível, sugerimos que eles sejam feitos de forma completa em apenas uma das quádricas. Para as demais, a partir de uma *situação de institucionalização* do conhecimento (veja a tipologia das situações na p. 136), podemos estender o uso de tais procedimentos sem realizá-los de forma completa. Nestes casos, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, optamos em chamar a atenção para o conjunto/combinação das unidades significantes das equações de cada quádrica e, a partir daí, analisar quais são as possibilidades de valores visuais (elipses; parábolas; ...) que podemos determinar nas interseções com planos. Insistimos que semioticamente é importante não se limitar a apenas realizar o procedimento P e, mais do que isso, durante esse procedimento entendemos que se deve deixar explícito aos alunos que os valores visuais determinados são condicionados ou dependem do conjunto/combinação das unidades simbólicas.

Como exemplo de aplicação que evidencia a relevância semiótica do conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das quádricas, considere a sela de equação $z = -x^2 + y^2$ em que já discutimos anteriormente algumas questões a respeito das interseções. A partir das unidades simbólicas dessa quádrica, responda: por que as interseções entre essa quádrica com qualquer um dos planos coordenados ou com qualquer um dos planos paralelos aos planos coordenados não determinam elipses na posição padrão ou transladada? Para responder a essa questão recorrendo aos elementos semióticos, inicialmente note que em $z = -x^2 + y^2$ as unidades significantes simbólicas, que veremos melhor na subseção 4.3.5 (p. 208), são as seguintes: no primeiro membro da equação há um termo linear com coeficiente igual a 1; no segundo termo da equação há dois termos quadráticas tais que os coeficientes tem sinais opostos (um positivo e o outro negativo). Além disso, sabemos que na equação canônica de uma elipse na posição padrão ou transladada devemos ter dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação. Daí, é fácil "prever" que é impossível determinar elipses nas tais interseções. Isso se deve ao fato de que ao realizarmos o procedimento P em qualquer uma das variáveis da equação da quádrica nunca determinaremos dois termos quadráticos com sinais iguais num dos membros da equação o que é o suficiente para provar a citada impossibilidade.

Retornando as variáveis consideradas, também tomamos as interseções com os eixos coordenados como variáveis visuais. Nesse caso, elas se dividem em três: interseção com o eixo x; interseção com o eixo y; interseção com o eixo z. Daí há algumas questões interessantes do ponto de vista semiótico. Entre elas, veremos que as quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm termo independente igual a zero (cones quádricos elípticos padrão e paraboloides padrão) a interseção com os eixos x ou y ou z coincide com a origem do sistema cartesiano. Já quando esse termo é diferente de zero (elipsoides e hiperboloides) não há interseção com a origem. Portanto, para o caso das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas o valor numérico do termo independente é uma unidade significante na identificação da interseção com a origem. Além disso, nas interseções dos elipsoides e hiperboloides padrão com os eixos coordenados as raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos *das equações básicas* (os Quadros 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57 e 4.58 da página 209 apresentam essas equações) são significativas, pois determinam as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção(ões) com esses eixos. Para essas quádricas os sinais dos coeficientes dos termos quadráticos também são significativos sendo que quando eles forem positivos indica que há interseção com o correspondente eixo e quando eles são negativos indica que não há interseção com esse eixo. No caso dessa variável, de forma análoga ao que dissemos para as interseções com planos, também é importante o estudo dos procedimentos algébricos.

Especificamente para os elipsoides padrão, adotamos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos (maior, médio e menor ou do diâmetro) e temos três valores visuais que são os seguintes: os três eixos são diferentes; dois são iguais e um diferente; os eixos são iguais. Para cada um desses casos ainda adotamos outras variáveis visuais. Para o primeiro caso, tomamos a posição dos eixos maior, médio e menor em relação aos eixos coordenados como variável visual. Para o segundo tomamos duas variáveis visuais: a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais (podendo aquele ser maior ou menor que estes iguais); a posição do eixo com medida diferente em relação aos eixos coordenados. Para o terceiro tomamos a medida do raio como variável visual. Em todos esses casos as unidades significantes correspondentes são analisadas a partir dos denominadores dos termos quadráticos das equações.

Mais adiante discutiremos as implicações dessas variáveis visuais. De qualquer forma, os diferentes tipos de elipsoides padrão provenientes dessas variáveis estão representados nos quadros da subseção 4.3.1.2 - p. 175.

Para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides padrão tomamos as diferentes posições padrão[15] como uma variável visual importante que, aliás, é pouco explorado no ensino. Essa variável visual se refere às diferentes posições que essas superfícies podem estar no sistema cartesiano. Como exemplo para o caso dos paraboloides elípticos padrão, veja as duas primeiras colunas do Quadro 1.1 (p. 48). Diferenciaremos e (re)conheceremos as diferentes posições padrão, no caso dos hiperboloides e dos cones quádricos elípticos padrão, tendo como base o eixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares" (trata-se de elipses determinadas nas interseções da quádrica com planos que a seguir retomaremos). Assim, para cada uma dessas quádricas há três valores possíveis no sistema cartesiano xyz que se referem as seguintes quádricas: hiperboloide de uma/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em x, ou em y ou em z. Para os paraboloides elípticos padrão nos basearemos no semieixo coordenado que as elipses com eixos aumentando são perpendiculares e, assim, temos seis valores visuais que se referem as seguintes quádricas: paraboloide elíptico abrindo em z_+, ou em z_-, ou em y_+, ou em y_-, ou em x_+ ou em x_-. No caso dos paraboloides hiperbólicos padrão nos basearemos no semieixo que a "parábola assento" está abrindo bem como o plano coordenado que a contém (trata-se de uma parábola determinada na interseção da quádrica com um dos planos coordenados - a seguir retomaremos essa questão). Dessa forma, temos seis valores visuais que se referem as seguintes quádricas: Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$, ou em z_+ e contido em $x = 0$, ou em y_+ e contido em $z = 0$, ou em y_+ e contido em $x = 0$, ou em x_+ e contido em $z = 0$, ou em x_+ e contido em $y = 0$ (veja esses casos nos quadros da subseção 4.3.1.2 - p. 175). No caso dos elipsoides as variáveis visuais que tomamos para eles também contemplam, mesmo que indiretamente, as diferentes posições padrão.

Além da escolha das variáveis visuais que tomamos, também analisamos os registros em língua natural presentes em livros clássicos (Leithold (1994); Winterle (2000); Anton (2002); Lehmann (2007)) e, com isso, identificamos certos limites e possibilidades. Entre as possibilidades, destacamos as seguintes: os termos que esses autores usam para se referir têm potencial para dizer algo dos objetos sob a forma de

[15] Também se pode pensar em diferentes posições transladadas ou rotacionadas.

uma proposição matemática (Função Apofântica), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (Expansão Discursiva) e realizar conversões. Por isso, na perspectiva da TRRS, pensamos que eles podem trazer contribuições interessantes para a aprendizagem. Entretanto, por vezes nos deparamos com os seguintes problemas: a designação dos objetos não é consistente (Função Referencial) e geralmente não deixam explícitas correlações entre os registros em língua natural com unidades simbólicas e visuais; uso mais enfático apenas dos aspectos intuitivos; recurso de codificações em detrimento de conversões. Dessa forma, os aspectos semióticos e cognitivos podem ser comprometidos ou pouco explorados e, com isso, mesmo diante do citado potencial, podem surgir problemas na identificação dos objetos, além de comprometer os tratamentos, as conversões e as expansões que envolvam os registros em língua natural. De qualquer forma, a partir das conclusões dessas análises propomos registros em língua natural[16] para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Cabe esclarecer que nossa intenção é que cada registro proposto contenha algumas e não todas as variáveis visuais do objeto. Do contrário, os registros seriam tediosos e nada práticos. Para tanto, nos focamos em escolher variáveis visuais que pensamos expor propriedades globais da figura. Além disso, faremos articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas.

No caso dos elipsoides padrão nossas propostas de registros se baseiam nas variáveis visuais específicas a eles que anteriormente discutimos. Daí, chegamos aos seguintes termos: *elipsoide em* α *e* β (quando os três eixos têm medidas distintas); *esferoide*[17] *alongado em* α (quando os dois eixos têm medidas iguais e o terceiro é maior que os outros dois); *esferoide achatado em* α (quando os dois eixos têm medidas iguais e o terceiro é menor que os outros dois); *superfície esférica com* $R = R_0$ (quando os três eixos têm medidas iguais). Para ver esses registros e suas unidades significantes correspondentes, acesse o Quadro 4.63 (p. 218).

No caso dos hiperboloides, dos cones quádricos elípticos e dos paraboloides elípticos na posição padrão, pensamos que visualmente é

[16] Veremos que os registros que propomos são mistos, pois, mesmo que predominantemente sejam em língua natural, também possuem elementos do registro simbólico. A opção em usar os termos "registro em língua natural" se deve apenas pela referida predominância.

[17] O termo esferoide é clássico na literatura não sendo, portanto, nosso. O que fizemos foi apenas potencializar o uso desse termo segundo a TRRS. O comentário análogo vale quando usarmos, mais adiante, os termos *sela* e *assento* nos paraboloides hiperbólicos.

significativo o fato de que as interseções por infinitos planos paralelos a um dos planos coordenados determinem elipses (ou possivelmente cônicas degeneradas) que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que essas interseções se afastam da origem. Chamaremos essas cônicas de "elipses com eixos aumentando" e, com elas, temos a impressão de que essas quádricas estão abrindo (na subseção 4.3.4.6 da p. 201 retomaremos essa definição). Chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e sabemos os centros dessas elipses estão sobre esse eixo. Para os paraboloides elípticos padrão essas elipses são determinadas apenas em um dos sentidos do eixo α (apenas no sentido positivo que chamaremos de α_+ ou apenas no sentido negativo que chamaremos de α_-). A partir da posição das elipses com eixos aumentando em relação aos eixos coordenados já dissemos que podemos diferenciar as diferentes posições padrão, mas além disso, nos inspiramos nessas cônicas para propormos os seguintes registros: *hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em α.* No Quadro 4.64 (p. 223) detalhamos melhor esses registros e conforme já adiantamos, com eles podemos diferenciar e (re)conhecer, no sistema cartesiano, as posições das quádricas em questão partindo da identificação de que eixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares".

Na elaboração dos registros dos paraboloides hiperbólicos padrão tomamos como relevante o fato de que as interseções com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas em sentidos opostos. Chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (semieixo α_+). Assim, adotamos as seguintes convenções:

- *Parábola assento*[18] ou simplesmente *assento* é a que está abrindo em α_+;
- *parábola estribo* ou simplesmente *estribo* é a que está abrindo em α_-.

As definições dessas parábolas estão na subseção 4.3.3.7 da p. 192 De qualquer forma, diante dessas convenções, considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ e note que nesse sistema os eixos coordenados são os

[18]Estamos concebendo que a parábolas assento e a parábola estribo são objetos ideais enquanto que o assento e os estribos (parte da sela do cavalo em que se colocam os pés) são objetos reais. Estes objetos reais são apenas representações daqueles objetos ideais. Nosso entendimento epistemológico está discutido na seção 2.

eixos α, β e γ e que qualquer deles pode ser o eixo x, y ou z sempre, claro, diferentes entre si. Se a parábola assento está abrindo no semieixo α_+ e está contida no plano coordenado de equação $\beta = 0$, então para os paraboloides hiperbólicos padrão usaremos seguinte registro em língua natural: *Sela com assento abrindo em α_+ e contida em $\beta = 0$.* O Quadro 4.65 (p. 228) discute mais detalhadamente esse registro bem como suas unidades significantes correspondentes. Cabe o comentário que como consequência das definições que fizemos a respeito de assento e estribo, se soubermos que a parábola assento está contida no plano coordenado de equação $\beta = 0$ e está abrindo no semieixo α_+, então a parábola estribo estará contida no plano coordenado que é perpendicular ao plano de equação $\beta = 0$ e que contém o semieixo α_-. Dessa forma, conforme também já adiantamos, podemos diferenciar e (re)conhecer a posição dos seis tipos de selas padrão partindo da identificação do semieixo que a parábola assento está abrindo bem como o plano coordenado que a contém.

Conforme já dissemos nas variáveis visuais interseções com planos, em todas essas interseções cada valor visual será uma cônica (elipse; hipérbole; parábola; cônicas degeneradas - o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes).[19] Esses objetos, também possuem variáveis visuais e, por isso, discutiremos *algumas* variáveis visuais das cônicas não degeneradas e as consideraremos nas interseções dos planos com as quádricas. Além disso, também traremos propostas de registros em língua natural para essas curvas. Para tanto, a primeira variável visual que tomamos é a posição no sistema cartesiano (padrão; transladada; rotacionada) e para analisá-las, de forma análoga ao que falamos para as quádricas, recorremos à posição dos eixos de simetria em relação aos eixos coordenados e a posição do centro/vértice em relação à origem desse sistema (os Quadros 4.2, 4.3 e 4.4 da página 148 definem essas questões).

No caso das elipses, tomamos como variável visual a comparação entre o tamanho de seus eixos e vemos que ela assume dois valores visuais que são os seguintes: os dois eixos são diferentes (*chamaremos de elipses alongadas em α*); os dois são iguais (*chamaremos de circunferência com $R = R_0$*). Nesse caso a unidade simbólica correspondente é a igualdade ou não entre os denominadores da equação. Para as *elipses alongadas em α* que estão na posição padrão ainda usaremos a variável visual posição do eixo maior em relação aos eixos coordenados e vemos que ela assume dois valores visuais (no sistema cartesiano xy o eixo

[19] A classificação das cônicas aqui apresentada é a mesma que a dada por Camargo e Boulos (2005).

maior da elipse padrão está em y ou em x). Daí, a unidade simbólica correspondente é o reconhecimento de que variável quadrática tem o maior denominador (no sistema xy o maior denominador está sobre x^2 ou sobre y^2). Já para a *circunferência com* $R = R_0$ consideraremos como variável visual o tamanho do raio e sabemos que ela assume infinitos valores. Nessa variável a unidade simbólica correspondente é o valor numérico da raiz quadrada do denominador do termo quadrático da equação. O Quadro 4.10 (p. 161) resume essas questões.

Para as hipérboles consideraremos a posição do eixo de simetria que intercepta a hipérbole como variável visual e, na posição padrão, há dois valores (no caso do sistema cartesiano xy esse eixo coincide com o eixo x ou com o eixo y). Nesse caso, a unidade simbólica correspondente é a variável quadrática que tem coeficiente positivo e ela assume dois valores ($+x^2$ ou $+y^2$). O Quadro 4.9 (p. 159) resume o que dissemos neste parágrafo.

Para as parábolas, tomaremos como variáveis visuais a posição do eixo simetria da parábola em relação ao eixos coordenados além do semieixo determinado pela projeção ortogonal dos pontos da parábola sobre seu eixo de simetria. No sistema cartesiano xy, a primeira variável visual assume dois valores (o eixo de simetria coincide com o eixo x ou com o eixo y) e a segunda também assume dois valores para as parábolas que se abrem no sentido positivo (semieixo y_+ ou x_+) e dois valores para as parábolas que se abrem no sentido negativo semieixo (y_- ou x_-). Para a primeira variável visual à unidade significante simbólica correspondente é a variável linear e para a segunda é o sinal do coeficiente dessa variável. O Quadro 4.8 (p. 157) resume o que dissemos neste parágrafo.[20]

Contudo, nosso objetivo não é fazer um estudo extenso das cônicas sendo que apenas pretendemos discutir algumas questões semióticas desses objetos que estarão presentes no estudo das quádricas.

Mediante algumas adaptações, tanto para as quádricas quanto as cônicas, estendemos o uso dos registros em língua natural que propomos para as posições padrão para os casos em que há transladação e/ou rotação. Na subseção 4.2.3.4 (p. 162) detalharemos essas questões.

Além das variáveis visuais que tomamos, consideramos que o recurso das reflexões pode contribuir para a *interpretação global de propriedades figurais* na perspectiva da TRRS. Particularmente o recurso das reflexões em torno dos planos de equação $x = 0, y = 0, z =$

[20] Se preferirmos a segunda unidade significante simbólica correspondente pode ser verificar se os sinais dos coeficientes dos termos linear e quadrático são os mesmos ou não.

$0, x = y, x = z$ ou $y = z$ permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica e, assim, temos uma visão global dessas posições. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma das quádricas não cilíndricas e não degeneradas podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as análises que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Como exemplo, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos. Dessa forma, pode-se otimizar o tempo didático e certamente o tempo de aprendizagem. Por isso, elencamos algumas propriedades algébricas que permitem o estudo das reflexões na perspectiva da TRRS.

Também elencamos algumas propriedades algébricas para o estudo das simetrias sendo que com elas podemos fazer algumas análises semióticas do ponto de vista das unidades significantes simbólicas. Pontuando melhor, para as quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm como variáveis apenas três termos quadráticos veremos que elas são totalmente simétricos (elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos). No caso das que têm como variáveis apenas dois termos quadráticos e um termo linear (paraboloides) veremos que há simetria em relação a dois planos coordenados e a um eixo coordenado. Esse eixo será o eixo correspondente a variável linear e os planos são os que contêm esse eixo ou, em outros termos, são os que determinam, por interseção, esse eixo. Na subseção 4.3.8 (p. 253) estão as referidas propriedades de reflexão e de simetria.

Com relação à Metodologia de Pesquisa, buscamos uma que abrisse as seguintes possibilidades em nosso estudo: articular teoria e prática no ensino e na aprendizagem das quádricas; analisar as dimensões cognitiva, epistemológica e didática subjacentes as quádricas e perpassado por elas a dimensão semiótica; voltar-se aos aspectos qualitativos das *produções dos alunos*[21] elaborados frente à realização de uma Sequência de Ensino sem a necessidade de validações externas em que se recorre, por exemplo, a grupos de controle ou a Métodos Estatísticos. Diante desses anseios, recaímos na *Engenharia Didática*. Com ela, orientados teoricamente pela TRRS, encontramos caminhos para conceber, planejar e executar nossa Tese. Destacamos que apenas nos

[21] Na subseção 3.3 (p. 128) apresentamos quais as produções que consideramos na Tese.

apropriamos de elementos dessa metodologia.

Na fase experimental de nossa pesquisa, que envolve a aplicação de uma proposta de Sequência de Ensino, montamos uma turma com um conjunto de dez alunos graduandos do curso de Engenharia de Telecomunicações do IFSC/SJ (instituição que somos docente, mas que na época da experimentação estávamos em licença capacitação para o doutorado). A escolha e caracterização desses graduandos estão na subseção 3.1 (p. 125). Essa turma foi separada da turma regular e em horário oposto, pois, dessa forma, entendemos que há mais possibilidades de que a coleta e a análise dos dados empíricos seja qualitativamente mais consistente pelo fato de que podemos dar mais atenção ao experimento como um todo e em particular para as produções dos alunos. Assim, claro, necessitamos da disponibilidade de tempo e do interesse dos alunos. Com essa escolha, pareceu-nos impraticável fazermos uma Engenharia Didática *completa* para todas as quádricas. Diante dessas possibilidades e limites, optamos em fazer uma Engenharia Didática completa (todas as fases da metodologia) apenas para o caso do estudo dos paraboloides elípticos padrão. De maneira mais específica, na fase de análise preliminar nos voltamos para todas quádricas não cilíndricas e não degeneradas e superficialmente para as cônicas, porém, nas demais fases análise a priori; experimentação; análise a posteriori de nossa Engenharia Didática ficaram restritas aos paraboloides elípticos. Entendemos que com essas escolhas o estudo completo da Engenharia Didática para os paraboloides elípticos padrão serve de base para o estudo das demais quádricas. Como fruto desse estudo elaboramos duas Sequências de Ensino, sendo que uma está na análise a priori (261) e a outra no **Apêndice A**. A Sequência de Ensino do **Apêndice A** trata das superfícies quádricas e se divide em duas partes. Na primeira o objetivo é proporcionar uma visão global de todos os tipos de quádricas incluindo as diferentes posições no sistema cartesiano, as simetrias e os pontos significativos. Nessa parte recorreremos principalmente aos aspectos visuais e experimentais proporcionados pelo *software* Geogebra. A segunda parte se refere às quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas *posições padrão* e, nesse caso, iniciaremos com o aprofundamento dos registros cartesianos (principalmente as interseções) e linguísticos e, aos poucos, as equações serão inseridas e correlacionadas de maneira mais profunda com os outros registros. A Sequência de Ensino apresentada na análise a priori (261), que foi a que usamos na experimentação, trata apenas dos paraboloides elípticos padrão. Não obstante, apesar de que os paraboloides elípticos fazem parte das duas Sequências, a forma de apresentação da Sequência que usamos na experimentação foi um pouco diferente para, com isso, ser possível melhor evidenciar a aprendizagem e os processos cognitivos utilizados pelos alunos durante as atividades. Assim, os dados coletados na fase de experimentação tiveram mais substância.

Justificamos que privilegiamos os paraboloides elípticos padrão em nossa escolha pelo fato de que esse objeto é o mais recorrente dentro dos Cálculos e, além disso, é uma boa representação de uma antena parabólica objeto que, conforme sabemos, é de interesse particular dos graduandos do curso de Engenharia de Telecomunicações (curso dos alunos colaboradores da pesquisa).

No que diz respeito à forma como planejamos e executamos nossas propostas de Sequências de Ensino buscamos que a *participação* dos alunos e do professor-pesquisador estivesse em *sintonia* com alguns elementos da *Teoria das Situações Didáticas* de Brousseau. Discutiremos brevemente esses elementos dentro da subseção 3.6 (p. 130). Particularmente com relação as mídias, incluindo as digitais, elas foram usadas nessas propostas de forma a privilegiar a *Abordagem Experimental em Educação Matemática*.[22]

Nas fases de nossa Engenharia Didática consideramos que o uso de *softwares* abre possibilidades interessantes. Em primeiro lugar, para o pesquisador e para os alunos essas mídias contribuem de forma dinâmica e interativa para a identificação das variáveis visuais e das unidades significantes correspondentes e também para a articulação/correlação entre os diferentes registros envolvidos. Dessa forma, podemos dar mais ênfase aos aspectos qualitativos e cognitivos. Logo, abrem-se possibilidades para potencializarmos um trabalho em sintonia com a TRRS, mas com o diferencial da forma dinâmica e interativa que tal mídia digital proporciona. Além disso, os *softwares* podem contribuir para a instalação de um contexto de investigação em sala de aula no qual os alunos ocuparam espaço relevante. Daí há maior possibilidade de participação efetiva e autônoma deles no processo de ensino e de aprendizagem. Entre os diversos *softwares* disponíveis identificamos que o Geogebra 3-D contempla os anseios aqui discutidos e, por isso, ele perpassou toda a nossa pesquisa.[23] Com ele entendemos que nossa forma de trabalho didático realizado na fase experimental da Tese esteve em sintonia com elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e, ao mesmo tempo, com a Abordagem Experimental em

[22] Trata-se de uma teorização de Borba (2010). Discutiremos essa abordagem na subseção 2.3 (p. 106).

[23] O Geogebra está disponível em: www.geogebra.org.br. Para ver outros *softwares* entre em http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/softwares-index.php ou em http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/.

Educação Matemática de Borba (2010). Além disso, com relação ao tempo o *software* Geogebra otimizou o tempo do pesquisador, o tempo didático e certamente o tempo de aprendizagem dos alunos. Em especial destacamos que com ele podemos visualizar todas as interseções com planos e todas as posições padrão de cada quádrica de maneira muito rápida.

Nas atividades das Sequências de Ensino criamos *cenários* no Geogebra. Já dissemos que os cenários estão disponíveis em: https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/index.php/Sérgio_Florentino_da_Silva. Esses cenários são apenas arquivos desse *software* em que previamente já criamos representações de alguns objetos. No cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, por exemplo, estão previamente registrados os registros simbólicos e cartesianos dos seis paraboloides elípticos padrão, dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados. Conforme o interesse, os próprios alunos podem modificar qualquer um dos cenários.[24]

Em todas as fases de nossa Engenharia Didática consideramos as *Funções Discursivas da Linguagem* da TRRS. Particularmente na fase de *análise a posteriori* usamos essas funções como Metodologia de Análise das produções dos alunos. Dessa forma, paralelamente também foi possível analisarmos as operações cognitivas de Tratamento e Conversão. A concepção teórica dessas funções está na subseção 2.4 (p. 116) e os aspectos práticos da forma como as usamos nessas análises estão na 3.4 (p. 128).

Nas análises a posteriori e validação consideramos que a realização da Sequência de Ensino que propomos e experimentamos foi validada. Além disso, obtivemos *indícios* positivos com relação ao potencial de nossa proposta de Sequência de Ensino, a aprendizagem e aos processos cognitivos que os alunos mobilizaram frente a essa Sequência.

Com intuito de delimitar e direcionar nossa pesquisa, a seguir apresentamos nossa pergunta norteadora e nossos objetivos de pesquisa.

1.1 PERGUNTA NORTEADORA

Admitindo a relevância das superfícies quádricas e a dificuldade em ensinar e aprender esses objetos, formulamos, com intuito de delimitar e direcionar nossa pesquisa, a seguinte Pergunta Norteadora: No Ensino Superior, com o uso do Geogebra e em *sintonia* com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, principalmente no que diz

[24] Para acessar esses cenários entre em: www.sj.ifsc.edu.br.

respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento, como abordar as superfícies quádricas?

1.2 OBJETIVOS

Para responder a Pergunta Norteadora, faz-se necessário o seguinte Objetivo Geral: Na perspectiva da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento, analisar as superfícies quádricas sobre o ponto de vista das dimensões epistemológica, cognitiva, didática e, perpassando por todas elas a dimensão semiótica.

E os seguintes Objetivos Específicos:

- identificar nos registros cartesiano, linguístico e simbólico das superfícies quádricas as correspondentes unidades básicas significantes e, então, criar quadros ou textos que correlacionam essas unidades;
- pesquisar propriedades que contribuam para a interpretação global das superfícies quádricas (propriedades de simetria e reflexão);
- no banco de Teses/Dissertações da capes e nos principais periódicos da área, analisar, na ótica da TRRS, as pesquisas que tratam das superfícies quádricas;
- analisar, na ótica da TRRS, os registros em língua natural das superfícies quádricas presentes nos principais livros de Ensino Superior e, a partir daí, propor registros;
- para as quádricas em geral, dando ênfase as não cilíndricas e não degeneradas na posição padrão, fazer uma análise preliminar (fase 1 da Engenharia Didática) e elaborar uma proposta de Sequência de Ensino;
- para os paraboloides elípticos padrão realizar todas as fases da Engenharia Didática incluindo, claro, a elaboração e aplicação de uma proposta de Sequência de Ensino.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA TESE

No que diz respeito à estrutura desta Tese, na **Introdução** fizemos uma breve apresentação e contextualização do conteúdo presente no corpo do trabalho incluindo a motivação pessoal, justificativa, *breve discussão* do Referencial Teórico, *apresentação* da Metodologia de Pesquisa, Pergunta Norteadora da pesquisa, Objetivos e organização da Tese. Com isso, almejamos perpassar as seguintes perguntas: por que, para que, para quem, o que e como realizamos a pesquisa?

O **capítulo 2** está dividido em cinco subseções sendo que nele discutimos o **Referencial Teórico** usado na Tese. Na subseção 2.1 discutimos as ideias básicas da TRRS e, com isso, traremos nossas compreensões filosóficas, epistemológicas e cognitivas adotadas nesta Tese. Daí, recorrendo há vários exemplos históricos, discutimos a *necessidade* dos registros de representações semióticas na produção e compreensão do conhecimento matemático bem como a *forma diferenciada* de acesso aos objetos dessa Ciência. Ainda nessa subseção falaremos que a matemática possui especificidades que permitem diferenciá-las de outras áreas do conhecimento. Na subseção 2.1.1 refletiremos as implicações de tal diferenciação na prática pedagógica e em especial discutiremos que mesmo que a matemática tenha uma condição específica de acesso e particularidades em suas representações, a produção e compreensão nessa Ciência podem incluir elementos não necessariamente específicos a ela, ou seja, não é necessariamente fechada em si mesmo e dessa forma, não se autoisola. Na subseção 2.2 trataremos da parte da TRSS que trata especificamente do estudo dos gráficos e que é fundamental para nossa Tese: A Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Na subseção 2.3 discutiremos nosso Referencial Teórico a respeito da utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática sendo que assim explicaremos, principalmente de forma teórica, de que maneira e por qual motivo usamos as mídias lápis-papel e o *software* Geogebra nas Sequências de Ensino que propomos. Essa subseção também explicita a Abordagem Experimental em Educação Matemática (BORBA, 2010). Na subseção 2.4 discutiremos de *maneira teórica e geral* as Funções Discursivas da TRRS que são as funções que perpassaram todas as fases nossa Engenharia Didática e, em especial, são as que foram tomadas como Metodologia de Análise das produções dos alunos durante a fase de *análise a posteriori*.

A **Metodologia de Pesquisa** está discutida no **capítulo 3**. Para facilitar a leitura e organização desse capítulo dividimos nossa apresentação nas seguintes subseções: escolha e caracterização dos sujeitos de pesquisa (subseção 3.1); o Geogebra: aspectos técnicos, limites e possibilidades (subseção 3.2); fonte de dados da fase experimental (subseção 3.3); Metodologia de Análise: o uso prático das Funções Discursivas (subseção 3.4); classificação geral da pesquisa (subseção 3.5); Engenharia Didática (subseção 3.6) (aqui incluímos brevemente a Teoria das Situações Didáticas). Note que as Funções Discursivas são discutidas teoricamente na subseção 2.4 sendo que a forma como as usamos na prática, como Metodologia de Análise das produções dos alunos, está na subseção 3.4.

Na prática, as fases da Engenharia Didática de nossa Tese estão nos seguintes capítulos: **capítulo 4** (**Análises Preliminares**); **capítulo 5** (**Análises a Priori -** aqui se inclui a Sequência de Ensino usada na experimentação); **capítulo 6** (**Experimentação**); **capítulo 7** (**Análises a Posteriori e Validação**).

Nas **Considerações Finais** estão as sínteses dos resultados de pesquisa. Nelas, também indicamos limites e possibilidades para pesquisas futuras.

O **Apêndice A** contém a Sequência de Ensino que elaboramos para as superfícies quádricas em geral dando ênfase as não cilíndricas e não degeneradas na posição padrão.

Nos **Anexos** estão as produções dos alunos realizadas na mídia lápis-papel, mas que, por vezes, também se apoiaram no Geogebra. Elas foram elaboradas na fase de Experimentação de nossa Engenharia Didática.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O **capítulo 2** está dividido em cinco subseções sendo que nele discutimos o **Referencial Teórico** usado na Tese. Na subseção 2.1 discutimos as ideias básicas da TRRS e, com isso, traremos nossas compreensões filosóficas, epistemológicas e cognitivas adotadas nesta Tese. Daí, recorrendo há vários exemplos históricos, discutimos a *necessidade* dos registros de representações semióticas na produção e compreensão do conhecimento matemático bem como a *forma diferenciada* de acesso aos objetos dessa Ciência. Ainda nessa subseção falaremos que a matemática possui especificidades que permitem diferenciá-las de outras áreas do conhecimento.

Na subseção 2.1.1 refletiremos as implicações de tal diferenciação na prática pedagógica e em especial discutiremos que mesmo que a matemática tenha uma condição específica de acesso e particularidades em suas representações, a produção e compreensão nessa Ciência podem incluir elementos não necessariamente específicos a ela, ou seja, não é necessariamente fechada em si mesmo e dessa forma, não se autoisola.

Na subseção 2.2 trataremos da parte da TRSS que trata especificamente do estudo dos gráficos e que é fundamental para nossa Tese: A Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais.

Na subseção 2.3 discutiremos nosso Referencial Teórico a respeito da utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática sendo que assim explicaremos, principalmente de forma teórica, de que maneira e por qual motivo usamos as mídias lápis-papel e o *software* Geogebra nas Sequências de Ensino que propomos. Essa subseção também explicita a Abordagem Experimental em Educação Matemática (BORBA, 2010).

Na subseção 2.4 discutiremos de *maneira teórica e geral* as Funções Discursivas da TRRS que são as funções que perpassaram todas as fases nossa Engenharia Didática e, em especial, são as que foram tomadas como Metodologia de Análise das produções dos alunos durante a fase de *análise a posteriori*.

2.1 A NECESSIDADE DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA PRODUÇÃO E COMPREENSÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Nesta subseção discutiremos a *necessidade* dos registros de representações semióticas na produção e compreensão do conhecimento matemático. Para contemplar tal objetivo faz-se obrigatório explicitarmos as ideias básicas da TRRS que, conforme veremos, colocam a epistemologia específica da Matemática numa posição central em suas análises.

De início, cabe dizer que para a TRRS os objetos da matemática jamais são acessíveis diretamente pela percepção ou por instrumentos. Diante dessa condição, tem-se como base que há um elemento determinante para acessar os OM's: as representações. No caso da matemática, elas são, conforme explicitaremos, bastante especiais e possuem transformações internas e externas que, diferentes de outras representações, cumprem não apenas a função de *comunicação*, mas também de *tratamento* e objetivação. Na TRRS, portanto, as análises sobre a produção e compreensão em Matemática são feitas sobre o ponto de vista das representações. Conforme detalharemos nesta subseção, Duval (2009; 2012) explica como essas questões são feitas de forma *integrativa*.

Para iniciar as explicações podemos notar que em se tratando de uma zebra, por exemplo, podemos vê-la ou tocá-la em um zoológico. Um vírus, mesmo não podendo ser observado a olho nu, é visualizável com um microscópio. Certos corpos celestes, na impossibilidade de serem vistos a olho nu da Terra, podem ser visualizados com um telescópio. Todos esses objetos possuem existência real independentes da consciência e, assim, estão disponíveis independentes do pensar. Para eles existem várias representações tais como, por exemplo, maquetes, desenhos, fotos e representações escritas. Nesses casos, as representações cumprem basicamente a função de estarem no lugar do objeto sem, com isso, o serem, elas evocam o que está ausente e, geralmente de maneira fácil, não as confundimos com os próprios objetos. Aqui, a relação entre a representação e o objeto é de causalidade. Essas representações, claro, podem ter a função de comunicar os objetos aos quais se referem.

Dizemos, na TRRS, que existem objetos que são acessíveis pela percepção. Esse acesso pode ser direto e multissensorial para tudo o que é relativo ao meio ambiente, mas pode ser igualmente indireto e monossensorial com o uso de instrumentos como telescópio, microscópio e aparelhos de medida (DUVAL, 2011a).

Já o número um, por exemplo, possui diversas representações tais como **1** (indo-arábico), **I** (romano), **O** (guarani), **um** (língua natural). No entanto, nenhuma delas é o objeto matemático em si. No caso da matemática, muitas pessoas confundem os objetos com suas representações, no entanto, qualquer objeto, seja ele matemático ou não, jamais é sua representação. Especificamente para no caso da Matemática, a ocorrência dessa confusão, segundo com Duval (2009, p.14), acarreta, "[...] com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem [...]". Outra questão importante é que o número, como todo OM, não é um objeto que está no mundo físico.

No caso da Matemática, seus objetos não são acessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente e sua apreensão não pode ser mais do que conceitual. Para esses objetos, não podemos primeiro ter uma experiência sensível e depois representá-los. As experiências sensíveis só são possíveis com as representações dos OM's e não com eles próprios. Assim sendo, segundo a TRRS, o acesso aos OMs *exige* que se recorram *necessariamente* às representações (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, ...). Para Duval (2003, p. 21) "[...] isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversidade de registros de representação". Essas, além de cumprirem o papel de estarem no lugar dos OM e de evocá-los sem com isso o serem, são a única forma de acessá-los. Aqui, a relação entre a representação e o objeto não é de causalidade, mas de *referência*.

Há, portanto, um grupo de representações que não são produções feitas naturalmente apenas pela percepção: as *representações semióticas*. Essas pressupõem pertencerem a *sistemas semióticos* que, por sua vez, são "[...] um conjunto de signos que possui convenções e regras próprias de formação". (CORRÊA; MORETTI, 2014, p. 41). Para Duval (2011a), há uma linha divisória entre as representações semióticas e as não semióticas.

> A primeira é produzida intencionalmente pela mobilização de um sistema semiótico de representação, a língua natural sendo o primeiro sistema semiótico. A segunda é produzida automaticamente, e de maneira não intencional, quando não se trata de instrumentos. Ela é o efeito mais ou menos direto do objeto agindo sobre os sistemas receptores. (p. 38)

Em Matemática recorrem-se as representações semióticas e, assim, os sistemas usados possuem regras e convenções, que não são as mesmas para sistemas diferentes, e que são tais que permitem que uma representação semiótica possa ser identificada num dado sistema semiótico e, ainda, possibilita que essa possa ser *transformada* tanto internamente, dentro de um dado sistema semiótico, quanto externamente, ou seja, mudar de sistema semiótico. Diferentes dos sistemas geralmente usados em Matemática, os códigos, como o código morse ou o de placas de transito brasileiro, por exemplo, não têm grandes possibilidades de transformações e, além do mais, cumprem com mais importância a função de *comunicação* que é aquilo que, segundo Duval (2011a, p. 71), "[...] permitem transmitir as informações, ou mudar o suporte físico de comunicação como, por exemplo, os alfabetos que permitem passar da fala à escrita."

Para Duval (2011a, grifo nosso, p. 68), "o que é matematicamente essencial em uma representação semiótica são as *transformações* que se podem fazer, e não a própria representação." Consequentemente, "em matemática uma representação só é interessante à medida que ele pode se transformar em outra representação." (DUVAL, 2011a, p. 88). São essas possibilidades de transformações que permitem que as representações semióticas usadas em matemática exerçam a função não apenas de comunicação, mas, sobretudo, de tratamento e de objetivação.

Em matemática usamos sistemas semióticos comuns, como a língua natural e os diagramas, e sistemas semióticos especializados como, por exemplo, os diferentes sistemas de coordenadas gráficas (cartesianos, polares, esféricas), o sistema de escrituras simbólicas da álgebra, o sistema de numeração decimal (indo-arábico) e o sistema de representação das figuras em diferentes dimensões.

Para diferenciar de outros, Duval (2012) chama certos sistemas semióticos de *registros de representação semiótica.* De acordo com a definição desse pesquisador para que um sistema semiótico possa ser chamado de registros de representação semiótico ele dever permitir as seguintes operações (ou gestos) cognitivas específicas: *formação de uma representação identificável; tratamentos; conversões.*

1. A formação de uma representação identificável é uma função que é comparada a uma descrição e deve ser tal que, segundo Duval (2009, grifo do autor, p. 36), toda representação deva ter "[...] um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa* em um sistema determinado." Dessa maneira, "[...] implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos representar." (DUVAL,

2009, p.53). Para tanto, exige-se um conjunto de regras próprias a cada sistema que garantam a identificação e o reconhecimento de uma representação. "Os atos mais elementares de formação são, conforme os registros, a designação nominal de objetos, a reprodução de seu contorno percebido, a codificação de relações ou de certas propriedades de um movimento." (DUVAL, 2009, p. 55). A maneira como as regras de formação são definidas devem permitir, dentro de um mesmo sistema, transformar uma representação em outra equivalente.
2. tratamentos são *transformações internas* a um registro de representação em que, a partir de regras próprias e conforme a conveniência, permite-se transformar uma representação inicial em outra sem, com isso, mudar de registro, mas obrigatoriamente referindo-se ao mesmo objeto. Como exemplo, "[...] efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de sistema." (DUVAL, 2003, p.16).
3. as conversões são fundamentais na base da TRRS e devem estar no centro do processo de aprendizagem em matemática. Trata-se de *transformações externas* a um registro de representação que fazem com que uma representação inicial em um registro será transformada em outra representação em outro registro. Nessa transformação, da mesma maneira que na anterior, devemos manter a *referência* ao mesmo objeto. Na definição de Duval (2009, p. 100), é importante observarmos que "[...] toda a atividade de conversão pressupõe a discriminação das *unidades básicas significantes*[1] a serem postas em correspondência nos registros de partida e de chegada." Essas unidades são os elementos orientadores que intermediarão as conversões tanto em um sentido (registro 1 $\rightarrow$ registro 2) quanto em outro (registro 1 $\leftarrow$ registro 2) e que, subjacentemente, permitirão que as representações semióticas de um OM sejam *coordenadas*.

Como exemplo de conversão, Duval (2003, p.16) cita "[...] passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica." Porém, para realizar a conversão no sentido restrito de Duval não basta trocar de registros sendo necessário, conforme já dissemos, recorrer as unidades significantes em questão. Assim, por exemplo, para a função polinomial do primeiro grau a clássica estratégia de passar do registro algébrico para o registro gráfico recorrendo *apenas* a uma tabela de

[1] Para simplificar a escrita, escreveremos apenas unidades significantes. Convencionaremos ainda que as unidades significantes dos registros da língua natural, simbólico e gráfico serão respectivamente chamados apenas de unidades na língua natural, unidades simbólicas e variáveis visuais.

pontos não caracteriza a conversão de Duval pelo fato de que pontos quaisquer desse tipo de função não são unidades significantes.[2] Além do mais, a referida estratégia não permite uma apreensão global e qualitativa conforme discutiremos com mais detalhamento na seção seguinte.

Em diversos experimentos práticos Duval verifica que os alunos têm dificuldades nas conversões pelo fato que essas operações por vezes não são simples. Além do que, segundo esse pesquisador, "[...] a dificuldade própria à atividade de conversão reside essencialmente nessa discriminação [de unidades significantes]." (DUVAL, 2009, p. 100).

Em função de sua importância e complexidade, a Educação Escolar não deve negligenciar situações de ensino que possibilitem à identificação e correlação das unidades significantes subjacentes a transformação por conversão. A esses momentos de identificação/correlação Duval (2011) chama de *alfabetização matemática*.

Metodologicamente na identificação das unidades significantes Duval (2009) esclarece que

> concretamente, é necessário possibilitar a exploração de todas as variações possíveis de uma representação num registro fazendo prever, ou observar, as variações concomitantes de representação em outro registro. (grifo do autor, p. 101)

Essa forma metodológica de analisar, em que se exploram as variações sistemáticas ocorridas em um registro e se observa as variações concomitantes em outro registro, de acordo com Duval (2011a), pode ser usado como Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas. Para Duval (2003, p. 26), "esse método permite discriminar, entre todas as variações estruturais possíveis em um dado registro, aquelas que são cognitivamente importantes." Para tanto, de forma análoga ao que é feito nas Ciências Experimentais em que o interesse é dissociar os diferentes fatores que intervêm na produção de um fenômeno, faz-se variar cada fator mantendo todos os outros constantes.

Na utilização desse Método, de acordo com Duval (2003; 2009; 2011a), a distinção das unidades significantes de um sistema semiótico é feito recorrendo ao clássico princípio de oposição utilizado pelos linguistas a partir de Ferdinand de Saussure. Nesse princípio, os signos são entendidos não de forma isolada e sim em sua forma relacional opositiva, pois, como esclarece Duval (2011a, p. 30), "os signos só podem ser reconhecidos como signos por meio das relações de oposição que eles têm com os outros signos no interior de um sistema." Portanto, para o

[2] Para ver as unidades significantes desse objeto ler Duval (2011b).

princípio de oposição, *o valor* de um signo é constituído pela diferença em relação a outros signos que constituem um sistema.

De maneira sistêmica, para a aplicação do supracitado Método, de acordo com Duval (2003, p. 25), "dar-se a representação a mais elementar possível R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R_1' em um registro de chegada B." A seguir, gera-se "[...] *todas* as variações possíveis de $R_1 ... R_n$, que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R_1' no registro de chegada B [...]". (DUVAL, 2003, grifo nosso, p. 25). Nesse processo ordenado, duas situações podem ocorrer: as variações de R do registro A não mudam R' no registro B; as variações R do registro A mudam R' no registro B. As primeiras variações são cognitivamente neutras já as segundas são cognitivamente importantes e discriminarão as unidades significantes que são cognitivamente importantes.

Para Duval (2011a, p.112), essas "[...] variações devem ser feitas em relação ao que caracteriza as unidades de sentido [significantes] próprias a um registro [...] e não em função dos objetos matemáticos representados." Nesse sentido, por exemplo, na identificação das unidades significante gráficas de uma reta o que importa são as oposições qualitativas figurais e pouco importa se elas são funções lineares, afins ou se nem representam funções.

A importância que Duval dá em analisar os registros em suas possibilidades e particularidades se justificam pelo fato de que, para a TRRS, as atividades de produção e de compreensão da Matemática sempre está relacionada a eles, ou, como diz esse pesquisador de maneira mais delimitada, essas atividades envolvem *noesis* e *semiose*.[3] A semiose relaciona-se com a produção e apreensão do registro de representação semiótica e a noesis é a apreensão conceitual de um objeto. É importante saber que em matemática não há noesis sem semiose e, além disso, a semiose determina as condições de possibilidade e exercício da noesis. O curioso e lamentável é que na Educação Escolar, por vezes, o ensino da semiose é tratado como uma operação desprezível fato que lamentamos, pois trata-se de uma aprendizagem difícil e que os alunos não elaboram naturalmente.

Para qualquer OM, desde os simples números naturais às integrais, a coordenação dos registros, quando feita de acordo com as premissas da TRRS, possibilita o que Duval define como *compreensão integrativa* (ou *integral*). Essa coordenação, que é semiótica e, assim,

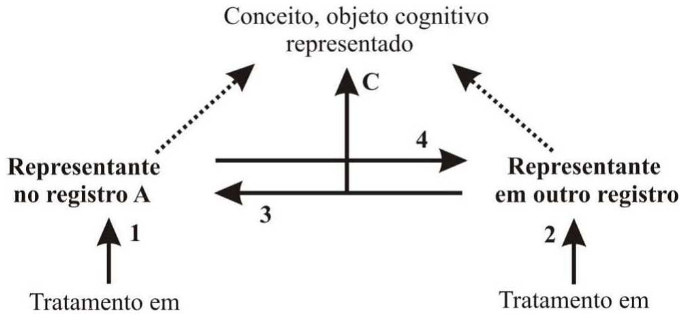
[3] Os termos *noésis* e *sémiosis* foram usados por Aristóteles e retomados por Husserl. Ver Duval (2011a, p. 100).

é feita a partir de um conjunto de signos que possuem regras próprias de identificação e de transformações, é a condição para que a compreensão integral ocorra. Esse processo, que não é nada simples, exige que se oportunizem diversas situações de ensino em que seja possível o desenvolvimento de aprendizagens que permitam tal coordenação. Essas questões demarcam o que Duval (2012) define como *Hipótese Fundamental de Aprendizagem*. De acordo com essa hipótese,

> a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a *coordenação* de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. (p.282, grifo nosso)

Para explicar essa hipótese Duval (2012) elaborou um esquema, que expomos a seguir na Figura 1, e que explica como se estrutura o funcionamento cognitivo durante o processo de aprendizagem em Matemática.

Figura 1 – Hipótese de Aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização



Fonte: Duval (2012, p. 282)

Nesse esquema, em que está retratado o caso da coordenação entre dois registros de representações[4], as flechas 1 e 2 indicam transformações internas a um registro de representação, os *tratamentos*. Já as flechas 3 e 4 indicam transformações externas, as *conversões*. As flechas pontilhadas marcam a distinção clássica entre representante e representado. A flecha C corresponde à compreensão integral de uma

[4]Esse esquema encara o caso mais simples de coordenação entre dois registros. No entanto, há situações em que há mais de dois registros envolvidos.

representação sendo que para que ele ocorra, é necessária a coordenação de registros (DUVAL, 2012). Todo esse processo, porém, não deve ser entendido de maneira simplista e, assim, ele não se limita a fazer algumas mudanças pontuais de registros, pois mais do que isso é necessário discriminar as unidades significantes exigidas nas conversões e, assim, gerar *todas* as variações possíveis nos registros para, dessa forma, realizar as necessárias coordenações. Como vemos, para a TRRS, os tratamentos não são suficientes para a aprendizagem sendo completamente necessárias as conversões.

Como exemplo de aprendizagem integrativa, que exige conversões, Duval (2011b) discute o caso dos gráficos de retas.[5] Nessa análise, são identificados todas as variáveis visuais e seus valores (relativos ao registro gráfico), às unidades significantes simbólicas correspondentes (relativas ao registro simbólico), as correlações entre esses elementos e, claro, as conversões possíveis. Assim, a partir da articulação entre as variáveis visuais, as unidades significantes simbólicas e ainda usando o registro em língua natural, Duval (2011b) elabora a Figura 3. Mais do que apenas codificá-las, sem se limitar aos tratamentos e acima de tudo fazendo as conversões, é necessário explorar todas as transformações possíveis presentes nessa seguir.

Assumindo as bases da Hipótese Fundamental de Aprendizagem e após numerosas observações em sala de aula, Duval concebe que apenas a compreensão integrativa produz efeitos duradouros no que tange a aprendizagem dos objetos da Matemática ao longo da educação dos alunos. Com ela, dá-se a possibilidade de que aquilo que foi aprendido possa ser transferido ou usado em situações após longo prazo. As consequências da compreensão integrativa, para Duval (2009, p. 63), são tais que ela "[...] produz [para os alunos] efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão."

Diante desse entendimento, do ponto de vista do ensino, a importância que a TRRS atribui as representações não deve se limitar a busca por uma melhor representação que garante de maneira isolada e suficiente a aprendizagem Matemática. Nesse sentido, Moretti (2002, p.344) faz a seguinte pergunta: "para um determinado conceito em matemática, existe uma boa representação que leve de forma suficiente a sua representação? A resposta para essa questão é não." Assim, insistir em apenas um registro de representação, impedindo que a compreensão integral em Matemática seja obtida, implica no que Duval chama de

---

[5] Discutiremos mais detalhadamente esse exemplo na subseção que trata da Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. (Ver a página 97.) Lá também discutiremos outros casos incluindo o caso dos elipsoides padrão.

enclausuramento ou *isolamento* de registros de representação. Mesmo nesses casos, Duval (2012) comenta que

> naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do "sentido" daquilo que é feito. (p. 283)

O enclausuramento, além dos problemas já citados, impede que a diferenciação fundamental entre a representação e o objeto de referência seja possível. Cabe lembrar que a condição de que os OM só podem apreendidos conceitualmente e que seu acesso só ocorre pelas representações semióticas coloca um problema: como não confundir os OM com sua representação? Responderemos essa questão com os termos de DUVAL (2012),

> [...]**o recurso a muitos registros [de representação semióticas] parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.** (grifo do autor, p. 270)

Junto à relevância que a TRRS dá ao transito e a coordenação entre diferentes registros, está à noção de *congruência semântica* que, no entendimento dessa teoria, é responsável por um grau maior ou menor de sucesso nas conversões e, consequentemente, da própria aprendizagem matemática. Essa noção "[...] surgiu após experiências realizadas com alunos, quando Duval (1988)[6] observou que estes encontram dificuldades quando se trata de mudar de registros [...]". (FLORES; MORETTI, 2008, p.30). Para Moretti (2002), nos casos de não congruência semântica há um custo cognitivo maior para a aprendizagem Matemática. Para que exista congruência semântica entre dois registros de representação diferentes, após discriminar as unidades sig-

[6]DUVAL, R. Écarts sémantiques et cohérence mathématique. In: Annales de didactiqueet de Sciences Cognitives, vol. 1, p. 7-25. Irem de Strasbourg, 1988.

nificantes próprias a cada registro, devemos considerar três critérios[7]:

> - a possibilidade de uma correspondência "semântica" de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
> - A univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
> - A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão.
> Estes três critérios permitem determinar o caráter congruente ou não congruente da conversão a ser efetuada entre duas representações semióticas diferentes, e que representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo.
> Permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. (DUVAL, 2012, p.283)

Na Hipótese de Aprendizagem deve-se ainda notar que as diferentes representações de um mesmo OM, apesar de terem como referência o mesmo objeto, possuem conteúdos e *tratamentos* diferentes que dependem mais do sistema de representação do que do objeto que foi produzido. Como exemplo, sabemos que $(1/2 + 1/4)$ ou $(0,5 + 0,25)$, por estarem em sistemas diferentes, o primeiro no registro fracionário e o segundo no registro decimal, possuem regras de identificação e de tratamentos diferentes e, por isso, dizemos que possuem conteúdos diferentes mesmo que se refiram ao mesmo objeto. Esses conteúdos exigem aprendizagens diferentes. Nesse sentido, Duval (2011a) esclarece que:

> Os procedimentos para cumprir uma tarefa, os encaminhamentos de resolução de um problema mudam completamente segundo o tipo de representação na qual eles são concluídos. Enfim, a

[7]Para ler bons exemplos relativos ao conceito de congruência semântica acesse Moretti (2002), Brandt (2005), Brandt; Moretti (2005) e Burak; Brandt (2010).

> distância cognitiva entre os conteúdos das duas representações de um objeto, mas que são de dois tipos diferentes [de sistemas] (por exemplo, uma configuração de marcas de unidades e sua descrição numérica), varia de maneira considerável. (p. 68).

Consequentemente, dizemos que um registro não oferece as mesmas possibilidades do que o outro e devemos considerar, de acordo com Duval (2009, grifo do autor, p. 91), que "[...] *toda representação é cognitivamente parcial quanto ao que ela representa e que representações de registros diferentes não apresentam os mesmo aspectos de um mesmo conteúdo conceitual.*" Dito de outro modo, para Duval (2003, grifo do autor, p. 22), "[...] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar o modo de tratamento, é também explicitar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto."

Em síntese, por que, em Matemática, a necessidade de muitos registros para representar um mesmo OM? Duval define três respostas: *economia de tratamento; complementaridade dos registros; conceitualização implica a coordenação de registros de representação.*

A economia de tratamento é a possibilidade, conforme a conveniência requerida no problema ou situação a resolver, de transitar de um registro para outro permitindo fazer com que algo que seja custoso para um registro possa ser feito com mais tranquilidade em outro. Como exemplo, recorremos ao problema enunciado por Moretti (2002, p. 346), que foi adaptado de trabalhos de Duval, em que o objetivo é determinar o denominador ausente na expressão a seguir:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{?}$$

Conforme sabemos, a solução desse problema, se for feito com os números em sua forma decimal, tornas-se simples. Assim, a expressão ficará da seguinte forma:

$$0,5 = 0,250 + 0,125 + 0,100 + 0,20 + ?$$

Nessa forma de representar concluímos facilmente que o termo em questão é $0,005$, ou se preferirmos retornar para o registro fracionário, $1/200$. Temos, portanto, uma economia de tratamento.

A complementaridade de registros, como nos alerta Duval (2012), assume que cada registro que é usado para representar um OM é limitado em suas potencialidades e que cada um possui possibilidades que os outros não possuem. No entanto, ao invés de serem excludentes, há uma complementaridade entre eles. Basta pensarmos, por exemplo, que

> uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que **toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa**, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados. (grifo do autor, p. 280)

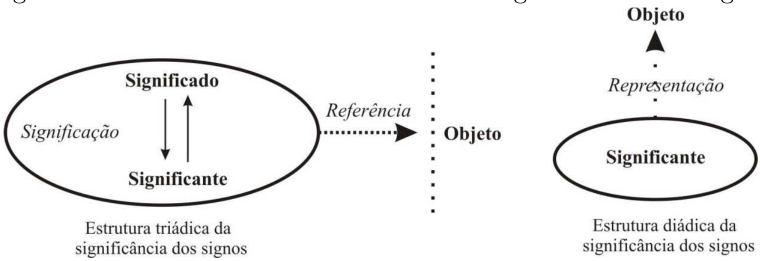
É curioso que até mesmo Descartes já aparentava compartilhar desse entendimento e, inclusive, seu método analítico parecia propor o transito entre registros. De acordo com Boyer (2012),

> já no *Discourse*, do qual a *Geometria* era um apêndice, Descartes tinha discutido os méritos relativos da álgebra e da geometria, sem mostrar parcialidade por nenhuma delas. Acusava a segunda de usar, de modo pesado demais, diagramas que fatigam a imaginação desnecessariamente, e a primeira de ser uma arte confusa e obscura que embaraça a mente. O objetivo de seu método, portanto, era duplo: (1) por processo e algébricos, libertar a geometria de diagramas e (2) dar significado às operações da álgebra por meio de interpretações geométricas. (grifo do autor, p. 240)

A compreensão integrativa de um conceito que se desenvolve de acordo com a Hipótese Fundamental de Aprendizagem ocorre mediante a atividade de elaboração de uma rede conceitual ampla que está presente em cada registro do OM e que, ao mesmo tempo, se correlacionam mediante a coordenação dos registros. A essa atividade, que é semiótica, Duval chama de *conceitualização*.

Duval (2009; 2012) destaca que os signos usados em Matemática podem ter, conforme sugere a Figura 2, uma estrutura *diádica* ou *triádica*.

Figura 2 – Estrutura triádica e diádica das significâncias dos signos



Fonte: Duval (2012, p. 281)

Os signos que são da estrutura diádica, como as notações matemáticas, constituem-se de um significante que não possuem significação sendo que sua relação com o objeto designado ou representado é apenas uma relação de referência instituída.

Os signos da estrutura triádica constituem-se de um significante e de uma significação que dará, com isso, um significado ao signo. A significação elabora uma relação entre significante e significado de forma a constituir um signo. Vemos, nesse caso, que a relação de referência que o signo estabelece com o objeto é subordinada a relação de significação entre o significante e o significado. Tomemos como exemplo o significante *razão*[8]. Para um matemático, de acordo com uma significação específica da Matemática que pode ser um quociente entre duas grandezas de mesma natureza, há certo significado. Portanto, significante e significado se relacionam a certa significação constituindo, assim, um signo que, por sua vez, possui uma relação de referência a um OM. O mesmo significante *razão* pode ter outro significado de acordo com outra significação. É o caso, por exemplo, de quando o associamos a ideia de *estar correto*. Assim, significante e significado se relacionam por outra significação constituindo outro signo que, nesse caso, refere-se a um objeto que não é mesmo que inicialmente citamos.

Como explicamos a relação de referência que os signos da estrutura triádica estabelecem com os objetos não é instituída sendo, portanto, subordinada a significação. Essa é uma das duas características presentes na relação entre signo e objeto dessa estrutura e a outra, que não exclui a primeira, diz que essa relação "[...] é uma possibilidade que é assegurada apenas no plano do discurso e que não é constitutiva da significância do signo." (DUVAL, 2009, p. 85). No que tange a possibilidade do discurso Burak e Brandt (2010) esclarecem que

[8]Adaptamos esse exemplo de Burak e Brandt (2010).

> para Duval (1995)[9], um sistema semiótico precisa cumprir funções discursivas, para que se torne possível o discurso[10]. Essas funções são: função referencial (que designa objetos), função apofântica (expressão de enunciados completos), função de expansão discursiva (um enunciado completo) e função de reflexividade discursiva. Duval (1995) também aponta que um discurso cumpre funções e mobiliza operações e que seu sentido não pode ser analisado somente por critérios linguísticos, pois as formas de expressão são resultantes de operações discursivas mobilizadas que não são, necessariamente, expressas por meio de sinais linguísticos. As unidades de um discurso, que não se baseiam exclusivamente em critérios linguísticos, revelam uma intenção e, por essa razão, o autor afirma que há outro tipo de unidade de sentido intencionada, que está aquém ou além da frase e é dependente do uso funcional desse discurso, ou seja, depende de como e onde ele será usado. (p. 74-75)

A significação, portanto, tem um papel fundamental na determinação dos objetos que podem ser remarcados por um sujeito. Ela é importante na passagem daquilo que, para um sujeito, ele não supunha. Ao processo que permite a passagem do não consciente ao consciente é chamado, na TRRS, de *objetivação*. De maneira mais bem delimitada, conforme dito por Duval (2009, p. 41), "a objetivação corresponde à passagem pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não suponha, mesmo se outros lhe houvessem explicado." Nessa passagem, "significação e estatuto de 'objeto suscetível de ser visto ou apreendido por alguém' são dois aspectos recíprocos de toda a representação consciente. A significação é a condição necessária de objetivação para o sujeito [...]". (DUVAL, 2009, p. 41). Em todo esse processo, as possibilidades de transformações, particularmente as conversões entre registros, dá as representações semióticas à função de objetivação e, assim, elas não servem apenas para comunicar. Portanto, elas não se limitam a apenas exteriorizar as *representações mentais*. Para fins de esclarecimento e delimitação, recorremos à definição de Duval (2009) concernente as representações mentais que diz que essas

[9] DUVAL, R. **Sémiósis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse, Bern: Peter Lang, 1995.

[10] As funções do discurso segundo Duval são esclarecidas em: Dionísio e Brandt (2013; 2014), Dionísio; Brandt e Moretti (2014) e Brandt; Moretti e Bassoi (2014).

> [...] são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às "imagens mentais" como entidades psicológicas tendo uma relação com a percepção. Mas as representações mentais recobrem um domínio mais amplo que o das imagens. É preciso reatar a elas não somente os conceitos, as noções, as "idéias", mas também as crenças e os fantasmas, isto é, todas as projeções mais difusas e mais globais que refletem os conhecimentos e os valores que um indivíduo reparte com seu meio, ou com um grupo particular, ou as refletem seus próprios desejos. (p. 45)

Na TRRS as representações mentais e as semióticas não são equivalentes e, dessa forma, possuem diferenças que permitem demarcá-las. Nesse sentido, Duval (2012) esclarece que

> as representações **mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. (p. 269)

A diferenciação que ora expomos entre as representações semióticas e as mentais não deve ser confundida com total independência nem como a subordinação da primeira em relação segunda. Ao invés disso, essas representações se relacionam de tal forma que se concebe, na TRRS, que o desenvolvimento das representações mentais depende de uma aquisição e interiorização das representações semióticas, a começar pelo da linguagem ordinária (DUVAL, 2012).

Outra diferenciação deve-se ao fato de que as representações semióticas podem ser aprendidas unicamente sobre o aspecto do representante ou unicamente sobre o aspecto do que ela representa. O sujeito cognitivo pode passar de um aspecto a outro. Já as representações mentais prestam-se apenas ao que é representado. Como consequência, as representações mentais não se prestam a tratamentos a não ser por meio da "prática mental" da mobilização de uma representação semiótica. Ademais, isso ocorre mesmo com números naturais pequenos ou com figuras geométricas básicas. Ver Duval (2011a).

Como vemos, as representações semióticas tem participação fundamental não apenas para a função de comunicação, mas, sobretudo, são indispensáveis para tratamentos e objetivação. Assim, dizemos que as representações semióticas estão no centro de todo o processo de pensamento em matemática.

No que tange o progresso da produção em Matemática os registros de representações semióticas foram essenciais. Historicamente houve uma série de noções que só alcançaram certo nível de desenvolvimento a partir da criação de um sistema de representação adequado (MORETTI, 2002).

Particularmente com relação à linguagem simbólica, Gottfried Wilhelm Leibniz foi o pioneiro a vislumbrar a importância desse registro. Em sua análise histórica, Eves (2011) entende que

> considera-se que Leibniz tenha sido o primeiro a cogitar seriamente dos benefícios de uma lógica simbólica. Num de seus primeiros trabalhos, *De arte combinatória*, publicado em 1666, ele manifestou sua crença na possibilidade de uma linguagem cientifica universal, expressa num simbolismo reduzido e prático que guiaria o processo do raciocínio. (p. 669)

Notavelmente foi em Leibniz e sua concepção a respeito da abstração dos OM's que se passou a conceber que tendo uma linguagem simbólica munida de regras de cálculos pode-se fazer qualquer cálculo sem, com isso, ser necessário refletir o sentido das operações realizadas. Esse entendimento toma corpo junto à criação do sistema de representação simbólico. Durante a Antiguidade e Idade Média, antes da criação deste sistema, a Matemática era escrita praticamente de maneira retórica, ou seja, em língua comum as coisas eram ditas e se faziam cálculos com palavras. Se havia o uso de símbolos eles estavam misturados à escrita e tinham uso momentâneo para a elaboração de um texto ou resolução de um problema e, assim, não eram o foco da atividade matemática, pois serviam apenas como auxiliares (para ler um exemplo veja Júnior (2006). Nesse período, a resolução de problemas apoiava-se fortemente em procedimentos geométricos, no entanto, François Viète, no fim do século XVI, cria um sistema de símbolos em que as vogais representavam incógnitas e as consoantes representavam constantes. Esse sistema, porém, apesar de revolucionário, ainda oscilava entre a retórica e a simbologia. Foi em René Descartes que ocorre uma verdadeira função da representação simbólica e, desta forma, a letra "a", por exemplo, deixa de ser apenas uma grandeza particular, para se tornar o signo que representa a grandeza. Não obstante, nesse período o único movimento do pensamento que era considerado como válido era o que se dava no sentido dos objetos do conhecimento aos conteúdos das representações do sujeito. Coube a Leibniz dar um salto maior e definitivamente dar uma real abstração aos objetos. De maneira mecânica como uma máquina de calcular, pode-se, por exemplo, fazer adições pelo dispositivo de símbolos, sem, com isso, termos a necessidade de refletir o sentido das operações efetuadas. Essa forma de pensar permitiu a Leibniz criar método de cálculo infinitesimal e as operações de integração e derivação (FLORES, 2006). Os símbolos, então, passam a ser manipuláveis e são as representações de objetos de tal forma que o símbolo e o objeto não precisam estar mais colocados um ao outro.

Além das citadas contribuições relativas à produção do conhecimento matemático, o desenvolvimento de sistemas de representações simbólicos apropriados também influenciaram na produção de outro sistema de representação importante, o sistema gráfico. O grande salto atribuído a forma de representar graficamente foi dado pela articulação, via conversões, com o registro simbólico. Sem a presença desse último, o registro gráfico não alcançaria a potência que teve. Nesse sentido, Eves (2011) concebe que

> [...] a essência real desse campo da matemática [a geometria analítica] reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a geometria analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. (p. 383)

Entre as vantagens do sistema de representação gráfico para a produção do conhecimento matemático está à possibilidade de conversão entre esse registro com o simbólico fato que, entre outras questões que já discutimos, permitem a economia de tratamentos. Nesse sentido de acordo com Eves (2011),

> A essência da idéia quando aplicada ao plano, lembre-se, consiste em estabelecer uma correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, viabilizando assim uma correspondência entre curvas do plano e equações em duas variáveis, de maneira tal que para cada curva do plano esta associada uma equação bem definida $f(x, y) = 0$ e para cada equação dessas está associada uma curva (ou conjunto

> de pontos) bem definida do plano. Estabelece-se, além disso, uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas da equação $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada. Transfere-se assim, de maneira inteligente, a tarefa de provar um teorema em geometria para a de provar um teorema correspondente em álgebra e analise. (p. 382)

Particularmente os notáveis esforços dos gregos na produção do conhecimento em geometria, por exemplo, esbarraram na falta de sistemas de representações adequados. Nesse sentido, para Boyer (1974, p. 70) "foram as deficiências das notações algébricas que mais fortemente operaram para impedir que os gregos construíssem uma verdadeira geometria de coordenadas." Mais de dois mil anos depois, com a criação do sistema de representação gráfico de Descartes, a geometria potencializa sua produção. "Assim, as representações gráficas permitiram criar novos tipos de curvas algébricas como o *folium*(1638)." (DUVAL, grifo do autor, 2011a, p. 72).

Com relação a contagens ou controle e registros de quantidades, as primeiras técnicas não compreenderam registros – no sentido de Duval -, mas sim a correspondência um a um. Mesmo assim, algumas delas permitiam que se estabelecesse comparação entre dois conjuntos de tal forma que era possível decidir, entre os dois, se um conjunto tem mais elementos que o outro, sem se ater a quantos, ou, ainda, quantos elementos a mais ou a menos um tem em relação ao outro (BRANDT, 2005). As civilizações, porém, não se limitaram apenas a esses aspectos. De acordo com Brandt (2005),

> A abstração do número nos seus aspectos ordinal e cardinal associada a procedimentos de contagem e medida que exigiram os agrupamentos e trocas, permitiu que o homem aprendesse a estimar, avaliar e medir grandezas e a conceber números maiores. Com o advento da escrita, a humanidade experimentou diversas soluções para o problema da representação e manipulação dos números antes de se deter naquela que seria a mais perfeita e mais eficaz possível. (p. 37)

Os diversos sistemas de representação numéricos criados esbarravam em várias dificuldades como, por exemplo, não serem posicionais, excesso de símbolos, grande necessidade do uso da memória, multiplicidades de bases e, ainda, dificuldades em seu funcionamento.

Assim, mesmo que vários outros já existissem, como o romano, foi apenas a partir do sistema indo-arábico que se teve um salto importante na produção do conhecimento matemático. A partir de então, fazer operações básicas e registrar números maiores deixa de ser impraticável (MORETTI, 2002).

As notórias vantagens da estrutura do sistema de numeração indo-arábico podem ser analisadas sobre o ponto de vista da TRRS. Com essa base teórica, podemos dizer que as regras de funcionamento desse registro são vantajosas tanto no que diz respeito à formação de uma representação identificável quanto para realizar tratamentos. Assim, com poucos signos e conhecendo as regras de formação, abrem-se grandes possibilidades para registrar e para fazer as operações básicas com números pequenos e também grandes (BRANDT, 2005).

Do ponto de vista operacional, a criação de um sistema adequado, como o dos logaritmos permitiu simplificar cálculos e, com isso, potencializar a produção do conhecimento, isso por que "como sabemos hoje, o poder dos logaritmos como instrumentos de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração." (EVES, 2011, p. 342). De acordo com Eves (2011),

> a maravilha invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda a Europa. Na Astronomia, em particular, já estava passando da hora para esta descoberta; pois, como afirmou Laplace, a invenção dos logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos". (p. 346)

Conforme estamos discutindo, sob a ótica dos registros de representações semióticas a riqueza da produção do conhecimento Matemático está relacionada às potencialidades de transformações subjacentes aos registros coisa que os códigos, conforme já adiantamos, não permite. Para Duval (2011a),

> [...] do ponto de vista cognitivo, a diferença entre registros e códigos não está na maior ou menor complexidade dos sistemas semióticos e seu tipo de produção. Ela está no fato de que os registros abrem possibilidades de transformações do conteúdo das representações produzidas, o que os códigos não permitem. [...] Assim, na matemática, o conhecimento não começa com as representações semióticas dos conceitos ou dos objetos, mas com suas transformações. (p. 73)

Diante das possibilidades que os registros podem gerar em Matemática, abrem-se possibilidades tais que Duval (2011a, p. 72) considera que "os registros são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores de representações sempre novas. E a produção de novas representações permite descobrir novos objetos."

Frente ao que expomos, inferimos que o progresso na produção do conhecimento matemático está relacionado à necessidade da criação de sistemas de representação apropriados. Nesse sentido, Duval (2011a) explica que

> a Matemática é o único domínio em que o progresso dos conhecimentos está estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos. Seu desenvolvimento deu acesso a novos objetos matemáticos: o sistema decimal e suas extensões para acesso aos números naturais, relativos e racionais, a escrita algébrica e as representações gráficas para o acesso as funções, a representação em perspectiva para a geometria projetiva e as transformações (por exemplo, a simetria) etc. (p. 84)

Portanto, como vimos, na TRRS os OMs não são acessíveis diretamente pela percepção ou por instrumentos sendo que para acessá-los é *necessário* um elemento específico: "os registros de representações". Com esse elemento, que possui uma série de particularidades, a matemática possui uma *forma diferenciada* de produção e de compreensão do conhecimento. Considerando que as concepções que os docentes possuem influem na prática pedagógica, faz-se necessário, portanto, refletir as implicações de tal necessidade e diferenciação na prática pedagógica. Na seção seguinte faremos a referida reflexão e em especial discutiremos que mesmo que a Matemática tenha uma condição específica de acesso e particularidades em suas representações, a produção e compreensão nessa Ciência podem incluir elementos não necessariamente específicos a ela, ou seja, não é necessariamente fechada em si mesmo e dessa forma, não se autoisola.

2.1.1 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICOS: IMPLICAÇÕES NO ENSINO E APRENDIZAGEM

Conforme discutimos na subseção anterior, na TRRS os OM's não são acessíveis diretamente pela percepção ou por instrumentos sendo que para acessá-los é necessário um elemento específico: “os registros”. Esses sistemas, para o caso da Matemática, entre outras questões, possuem as seguintes particularidades: *são fundamentais e necessárias para acessar os OM’s e consequentemente, para a produção e compreensão em Matemática; mesmo que não sejam os OM’s eles podem ser confundidas com os próprios objetos; não se limitam a função de estarem no lugar dos OM e de evocá-los, sem com isso o serem; não são produções feitas naturalmente apenas pela percepção e pertencem a sistemas semióticos; possuem operações cognitivas essências e específicas (formação de uma representação identificável; tratamentos; conversões) que, inclusive, desencadeiam a questão da (não) congruência semântica.*

Tomando as representações como critério de análise, em particular a *necessidade* dos registros bem como a *forma diferenciada* de acesso aos OM’s temos, portanto, elementos que diferenciam a produção e compreensão em matemática de outras áreas.

Essa diferenciação permite que se produza matemática mediante as possibilidades que os registros oferecem e, assim, os registros dão a Matemática certo grau de independência que faz, por exemplo, com que os OM’s sejam criados independentes de outras Ciências ou do mundo empírico. Porém, essa independência não significa completo autoisolamento ou que a produção do conhecimento Matemático seja necessariamente fechada em si mesmo de forma absoluta. Pensamos que mesmo diante dessa questão de independência e do fato de que as ideias e conceitos da Matemática não sejam os próprios objetos do mundo empírico, elas permitem dar boas explicações a questões desse mundo sem, com isso, assumir uma postura simplista de que o mundo concreto seja enquadrado às ideias anteriormente prontas e absolutas da Matemática.

Como exemplo que contraria a ideia de verdade absoluta em Matemática, recorremos a Eves (2011, p. 545) ao dizer que “a criação das geometrias não euclidianas, puncionando uma crença tradicional e rompendo com um hábito de pensamento secular, desferiu um golpe no ponto de vista de verdade absoluta em matemática.” O resultado de Kurt Gödel, ao contrariar grandes matemáticos como Hilbert e mostrar que existe um limite no método axiomático que impede a formalização de modo consistente e completo para toda à Aritmética, é outro exemplo que mostra que a Matemática não é absoluta. No artigo de Silva *et al* (2016) discutimos mais detalhadamente os exemplos desse parágrafo.

Além disso, por vezes, como foi o caso da Lógica não Reflexiva que foi motivada pela Física Quântica, a motivação para criar, ou modificar conhecimentos Matemáticos é feita por questões externas.

Conforme resume o lógico americano Alonzo Church (apud Eves, 2011) ao referir-se a produção do conhecimento,

> não se atribui nenhum caráter de unicidade ou de verdade absoluta a qualquer sistema lógico particular. Os entes da lógica formal são abstrações criadas com o fito de descrever ou sistematizar fatos da experiência ou observação, e suas propriedades, delineadas aproximadamente pelo uso em vista, dependem do inventor para adquirir um caráter exato. (p. 671)

Em nossa compreensão, a produção de um novo registro pode ser motivada ou definida para atender a demandas externas a Matemática como aconteceu com a Geometria dos Fractais que surge para modelar formas no mundo empírico. A todo tempo, a não apropriação das explicações provenientes da Matemática as questões externas a ela *podem* fazer com que se repense o que se está produzindo em Matemática e, inclusive, se reflita sobre as possibilidades que um registro permite. Não se trata, portanto, de se autoisolar em Matemática de forma pronta e absoluta. Em contrapartida, também não se trata de ignorar um grau de independência que os registros dão na produção em Matemática.

Do ponto de vista de ensino de matemática, mesmo assumindo as já citadas diferenças que existem entre a matemática e outras áreas, também pensamos que não se trata de autoisolamento. Dito de outra forma, a prática docente em sintonia com a TRRS *pode* incluir elementos não específicos da Matemática: problemas a realidade; brincadeiras infantis; objetos como árvores ou borboletas; entre outros. Insistimos que, em nosso entendimento, essa é uma possibilidade e não de uma obrigatoriedade a ser perseguida a todo custo.

Alguns pesquisadores ao criarem propostas pedagógicas em sintonia com a TRRS por vezes incluem elementos que não são específicos a Matemática e, assim, propõem ensinar matemática sem o autoisolamento. Nesse sentido, no ensino de álgebra do Ensino Fundamental, por exemplo, Burak e Brandt (2010) sugerem propostas de ensino e analisam e refletem a possibilidade de contemplar a aprendizagem a partir de temas da realidade dos alunos fazendo uso de uma teoria de registros de representações. O tema escolhido nessa proposta foi comércio alimentício e pretendeu-se, entre outros objetivos, que os alunos entendam as operações cognitivas específicas ao registro algébrico e, por consequência, a aprendizagem do pensamento algébrico. Com relação aos objetivos do ensino de álgebra no Ensino Fundamental, Duval (2011a) fala que:

> [...] a razão para a introdução da álgebra no ensino fundamental é tomar consciência das operações cognitivas específicas requeridas para trabalhar matematicamente com as equações e para poder utilizá-las na resolução de problemas encontrados na realidade. (p.10)

Ainda com relação ao ensino de álgebra no Ensino Fundamental, Duval (2011) propõe cinco ideias: operações discursivas de designação dos objetos feita por meio da língua natural ou formal; fabricação de problemas; resolução do problema com recurso a uma representação auxiliar condicional; resolução de problemas reais com fórmulas; ocorrência das letras. Essas ideias são propostas com problemas que podem ser não fechados a matemática.[11]

No ensino de geometria, Moretti (2013) propõe que os olhares icônicos e não icônicos, elementos da TRRS que são produzidos com operações cognitivas específicas aos registros subjacentes a geometria e que fazem parte da construção do pensamento geométrico, sejam ensinados com o uso da atividade não específica a Matemática chamada popularmente no Brasil de "amarelinha". Ao fazer essa aproximação, Moretti (2013) entende que

> o desenvolvimento do pensamento geométrico no indivíduo transcende a geometria como uma disciplina escolar, permite maior religação às demais disciplinas curriculares e na relação com o ambiente cultural e social. A atividade da "amarelinha", discutida anteriormente, põe em contato o estudante com atividades tradicionais, aproxima-se daquilo que Edgar Morin (2002, p.79)[12] chama "ecologizar uma disciplina", pois procura articular o conhecimento de forma mais global, abrangente e integral sem perder o foco no desenvolvimento do pensamento geométrico. (p. 301)

Ao referir-se ao ensino de geometria, particularmente a simetria axial, Duval (2014, p.16), buscando oportunizar uma aprendizagem que vá além apenas do reconhecimento perceptivo das figuras e permita conhecer a maneira Matemática de olhar para as figuras, concebe que

[11] Para ler mais detalhes, ler Brandt *et al* (2013).

[12] MORIN, E. Articular os saberes. In ALVES, N. (Org.). **O sentido da escola**. Rio de Janeiro: DPA, 2002.

se “utilize outras figuras diferentes das figuras geométricas canônicas, como, por exemplo, árvore, asas de borboletas, bola de tênis, etc.” Assim, inclui-se no ensino elementos que não são específicos a Matemática.

Conforme já dissemos, não se trata, porém, de tentar fazer ou até mesmo forçar com que todos os conteúdos matemáticos ensinados na escola devam, obrigatoriamente, serem ensinados com a inclusão de elementos não Matemáticos. Por vezes, inclusive, essa tentativa pode causar problemas ou limites na aprendizagem como é caso, segundo Moretti (2012), do ensino da regra usual dos sinais para a multiplicação de números reais. Para chegar a essas conclusões esse pesquisador busca importantes documentos como os PCN (1998a; 1998b) para o ensino fundamental e NCTM (2008) e verifica que neles há diversas indicações para a compreensão dos números negativos (por dívida em dinheiro; prolongamento da reta real; temperaturas negativas; ...) que se restringem, mais especificamente, à sua compreensão para o campo aditivo. Contudo, esses documentos pouco refletem especificamente a regra usual dos sinais para a multiplicação de números e se limitam, no caso dos PCNs, a sugerir seu ensino nas últimas séries do ensino fundamental via padrão de sequências em certas tabelas. Diante dessa problemática, Moretti (2012) ainda analisa alguns dos principais modelos, por exemplo presentes em livros didáticos clássicos, para explicar a regra usual dos sinais para a multiplicação de números reais: geométricos, prolongamento da reta dos naturais e modelos baseados na ideia de ganho/perda. Nesses modelos, surge por vezes de forma sutil, a exposição por convenção de parte da regra de sinais. Além do que, nesses modelos, os problemas de congruência semântica se mostram duradouros para os alunos. Diante dessas questões, Moretti (2012) retoma os estudos de Michelot (1966)[13] que procurou longamente demonstrar que a noção de número relativo só pode ser atingida ao nível do pensamento formal. Particularmente para a regra de sinais, Moretti (2012, p. 703) concebe que “a regra do sinal para a multiplicação é artificial, pura invenção da mente humana.” Afinal, o que fazer? Frente ao exposto, esse pesquisador dá indicações de que o ensino da citada regra seja feito atendo-se aos elementos internos a Matemática, particularmente aos da aritmética.

Insistimos, portanto, que o reconhecimento da diferenciação do conhecimento matemático em relação a outros não implica, necessariamente, num corpo de conhecimento que se autoisola completamente de maneira absoluta. Consequentemente, a produção e compreensão em matemática não são necessariamente fechados em si mesmos. Essas

[13]MICHELOT, A. **La notion de zéro**. Paris: Vrin, 1966.

compreensões têm implicações na maneira como se concebe o que é um bom Ensino de Matemática.

Pedagogicamente, para Fiorentini (1995), o conceito de qualidade no ensino de Matemática modifica-se historicamente. Nesse processo, estão incluídas concepções epistemológicas, axiológico-teleológicas e didático-metodológicas que têm implicações na prática pedagógica. Assim, por exemplo, o professor que concebe a Matemática como uma ciência logicamente organizada e não histórica e ainda pronta e acabada, possivelmente terá uma prática pedagógica diferente daquele que concebe a Matemática como uma construção humana dinâmica que se constitui atendendo a interesses e necessidades sociais. Já o professor que entende que a Matemática é aprendida pela repetição e memorização de fatos, regras ou princípios transmitidos do professor para o aluno, certamente terá uma prática pedagógica diferente daquele que entende que se aprende Matemática a partir de ações reflexivas sobre materiais e atividades, ou a partir de situações-problemas e problematizações do conhecimento Matemático.

Fiorentini (1995) descreve historicamente alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil chegando ao que ele definiu como seis tendências: a formalista clássica; a empírico-ativista; a formalista moderna; a tecnicista e suas variações; a construtivista e a socioetnoculturalista. Para tanto, usa as seguintes categorias descritivas: a concepção de Matemática; a concepção do modo como se processa a obtenção/produção do conhecimento matemático; os fins e os valores atribuídos ao ensino de Matemática; as concepções de ensino e de aprendizagem; a cosmologia subjacente; a relação professor-aluno e a perspectiva de estudo/pesquisa visando à melhora do ensino da Matemática.[14]

Pensamos que mesmo sem ter clareza ou até mesmo negando, todos os professores possuem concepções epistemológicas e didático-pedagógicas subjacente aos objetos que ensinam. Essas concepções influenciam o processo de ensino e aprendizagem e, portanto, é necessário que todos os docentes participem de discussões dessa natureza. Nesse sentido, as pesquisas devem se voltar a tais temáticas. Porém, é claro que as referidas discussões não garantem a melhora na qualidade do ensino e aprendizagem, pois existem outras questões envolvidas, que não temos como objetivo tratar neste trabalho como, entre outras, as

[14] Em suas considerações, Fiorentini (1995) destaca que as referidas tendências explicitam e descrevem *alguns* modos historicamente produzidos no Brasil de ver e conceber a melhoria do ensino de Matemática. No entanto, não se pretendeu classificar de maneira fechada e estática cada professor numa tendência A ou B.

condições de trabalho.

Não obstante, nossa intenção com este debate foi apenas expor algumas de nossas reflexões epistemológicas e pedagógicas provenientes das relevantes especificidades que assumimos com relação à Matemática. Com isso, almejamos contribuir para o debate filosófico e didático e, claro, expomos algumas concepções que assumimos nesta Tese.

2.2 ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

Nesta subseção trataremos da parte da TRSS que trata especificamente do estudo dos gráficos e que é fundamental para nossa Tese: A Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais.

Primeiramente lembramos que de forma geral a TRRS se interessa pela compreensão integral dos OM's e, por consequência, a aprendizagem dos gráficos tanto de curvas quanto de superfícies não se limita em apenas fazer um desenho ou imagem visual que representa uma equação e nem se reduz a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, na concepção dessa teoria, a potencialidade da aprendizagem (integral) têm exigências mais amplas e específicas, que não são naturais e espontâneas, e que necessitam de uma abordagem que permita a *interpretação global de propriedades figurais*. Essa abordagem, conforme discutiremos, é semiótica e, dessa forma, a razão profunda das dificuldades de aprendizagem está na falta de conhecimento das regras de correspondência. Além disso, nessa forma de proceder é completamente necessário que conversões sejam feitas.

No ensino de gráficos, Duval (2011b) categoriza três maneiras clássicas de abordar, sendo elas as seguintes: *Abordagem Ponto a Ponto (1); Abordagem de Extensão do Traçado Efetuado (2); Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais (3).* Essas abordagens não levam em conta os mesmos dados visuais do gráfico e não são guiadas pelo mesmo tipo de questão.

A Abordagem (1) é aquela em se recorre a uma tabela de pontos para passar do registro simbólico para o registro gráfico. Nela, a preocupação é apenas a referida passagem sem, com isso, se preocupar em identificar ou usar as unidades significantes e, além do mais, não é dado ênfase a todas as transformações possíveis, pois se limita a alguns pontos particulares. Dessa forma, não se explora as conversões possíveis que, para a TRRS, são essenciais para a compreensão integrativa. É a abordagem mais frequente nos livros didáticos de Ensino Fundamental e Médio (MORETTI, 2003; SILVA, 2008). Essa abordagem, segundo Moretti (2003, p. 150), "impossibilita que se perceba que modificações na equação são responsáveis por modificações no gráfico e vice-versa." Além disso,

> [...] não há uma ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente. [...] se há congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente. (MORETTI, 2003, p.151)

No fundo, essa abordagem sugere um estudo discreto (através de pontos e pares ordenados) de algo que é contínuo (as curvas e as representações analíticas de funções reais). Apesar de bastante usada, essa abordagem impede que os alunos tenham plena compreensão dos conceitos estudados (NÉ, 2013).

A Abordagem (2), segundo Duval (2011b, p. 98), "[...] corresponde às atividades de interpolação e extrapolação."[15] Na compreensão de Silva (2008),

> esta via não se apóia sobre o conjunto finito de pontos marcados como no caso do procedimento (1) [Abordagem Ponto a Ponto], mas sim sobre o conjunto infinito dos pontos potenciais, ou seja, sobre os intervalos entre os pontos marcados, pois, no caso da interpolação, por exemplo, uma das necessidades de seu uso se dá quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para alguns pontos, mas há necessidade de se calcular o valor numérico de um ponto não conhecido, o qual poderá ser determinado de forma aproximada através da função interpoladora. (p. 31)

Assim como na anterior, nessa abordagem levam-se em conta os dados do traçado e não as *variáveis visuais*. Com ela, buscam-se valores particulares sem se preocupar com a expressão algébrica (DUVAL, 2011b). Obviamente, nas Ciências experimentais a análise de pontos

[15] Interpolar uma função $f(x)$, de acordo com Ruggiero e Lopes (1996 apud SILVA, 2008, p. 31), "[...] consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x), escolhida entre uma classe de funções definida a priori e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é então usada em substituição à função $f(x)$."

particulares pode ter importância, mas do ponto de vista da aprendizagem integrativa isso não é o suficiente.

A Abordagem (3) leva em consideração as propriedades globais da curva ou da superfície e "[...] possibilita a sua visualização como um todo, reforçando a relação entre o esboço e sua expressão algébrica e não entre a curva e alguns pontos." (CORRÊA; MORETTI, 2014, p.62). Ela é feita com a discriminação e correspondência explícita das unidades significantes próprias a cada registro de representação. No caso do registro gráfico, as unidades significantes, que chamamos de variáveis visuais, são figurais e indicam o que é visualmente diferente de modo significativo. Para Duval (2009, p. 109), recorrendo ao clássico princípio de oposição de Ferdinand de Saussure, elas são "[...] puramente visuais e devem corresponder às oposições qualitativas no reconhecimento visual da forma do gráfico [...]".

Metodologicamente, para a identificação das unidades significantes fazem-se todas as modificações possíveis num dos registros de representação e observam-se quais delas geram modificações no outro registro. Deve-se variar, dentro de um mesmo registro, uma unidade significante e manter todas as outras constantes e ver o que se passa no outro registro.

Na Abordagem (3), essas unidades são as que norteiam as conversões e que, consequentemente, permitem que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica (MORETTI, 2003; MORETTI e LUIZ, 2010). Nessa forma de proceder, de acordo com Duval (2011b, p.99, grifo do autor), "o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica."

Guiados teoricamente pela Abordagem (3) da TRRS, há na literatura algumas pesquisas que se voltam para o estudo de curvas importantes para o Ensino de Matemática. Faremos um breve histórico desses principais estudos.

O primeiro deles é o notório trabalho do próprio Duval (2011b)[16] a respeito das retas. Em função de sua relevância, mesmo que já bastante citado, resumiremos esse estudo. Nele, foram identificadas três variáveis visuais: sentido da inclinação; ângulo com os eixos; posição sobre o eixo. A primeira assume dois valores (ascendente ou descendente), a segunda três valores (partição simétrica do quadrante percorrido, o

[16]Esse artigo foi uma tradução feita pelo Dr. Méricles Thadeu Moretti (UFSC) do seguinte artigo: DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. *Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives.* v.1. Strasbourg: ULP – IREM, 1988.

ângulo formado com o eixo horizontal **é menor que** o ângulo formado com o eixo vertical e o ângulo formado com o eixo horizontal **é maior que** o ângulo formado com o eixo vertical) e a terceira assume três valores (o traçado passa **abaixo** da origem, o traçado passa **acima** da origem, o traçado passa **pela origem**).[17] São, portanto, oito valores das variáveis visuais que, por sua vez, se correlacionam com as unidades significantes simbólicas do registro $y = ax + b(a{\neq}0)$, conforme o Quadro a seguir:

Quadro 2.1 – Valores e variáveis visuais para $y = ax + b$ no plano cartesiano

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

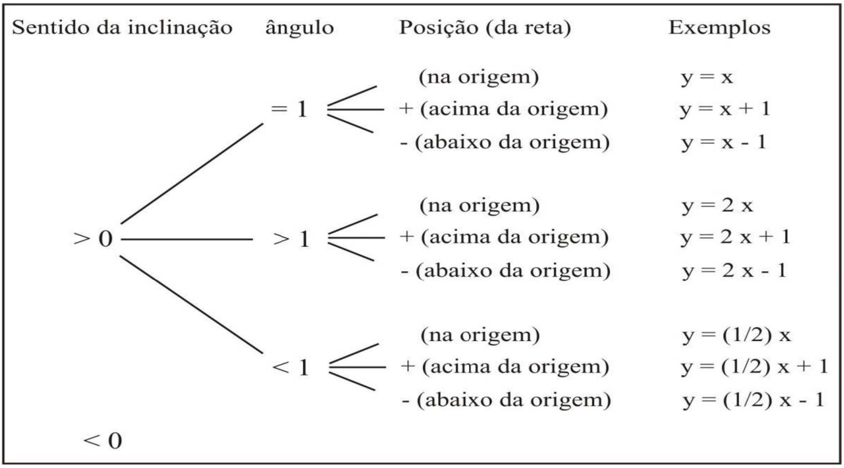
Fonte: Duval (2011b, p. 101)

Conforme vemos, o coeficiente a está relacionado a duas variáveis visuais (sentido de inclinação e ao ângulo com os eixos). Na primeira variável visual, o fato de a ser positivo ou negativo definirá, respectivamente os valores visuais ascendente ou descendente. Não há, aqui, congruência semântica, pois cada um dos dois valores visuais em questão se correlaciona a infinitos valores de a. Na segunda variável visual, o fato de a ser igual, menor ou maior que 1 definirá, respectivamente, os valores visuais partição simétrica, ângulo menor ou ângulo maior. Não há, mais uma vez, congruência semântica, pois cada um dos três valores visuais em questão se correlaciona a infinitos valores de a. A de se notar que a é usado para fazer duas análises sendo que a primeira tendo como referência o zero e a segunda o 1. A não congruência semântica em relação ao que se correlaciona ao b é feita de maneira análoga.

Duval (2011b) ainda propõe a integração de todos os elementos do Quadro anterior. Assim, chega a Figura a seguir:

[17] Nesse estudo não inclui o caso das retas verticais ou horizontais.

Figura 3 – Identificação e integração, com exemplos, de 18 representações de variações visuais



Fonte: Duval (2011b, p. 102)

A figura anterior mostra que "[...] há 18 representações gráficas que são visualmente diferentes de modo significativo." (DUVAL, 2011b, p. 102). A compreensão integral, consequentemente, não está em poucas passagens do registro simbólico para o gráfico e nem se limita aos tratamentos. Ela manifesta-se em todas as dezoito possibilidades de conversões que não podem ser aprendidas apenas com a abordagem ponto a ponto. É necessário, portanto, conhecer as regras de correspondência semiótica. Como nos alerta Duval (2011b, p. 111), "a significação dos gráficos cartesianos e por consequência a sua leitura, depende da percepção desta articulação." Assim, a base da TRRS afirma que a compreensão integrativa em matemática, que necessita de conversões, produz resultados duradouros que poderão ser usados no entendimento de situações futuras como, por exemplo, em fenômenos físicos, econômicos e biológicos ou, ainda, mesmo em situações puramente matemáticas, pois, todas elas pressupõem a apreensão do funcionamento semiótico.

Há uma questão especifica para o registro simbólico deve ser trabalhada no ensino. Trata-se de esclarecer que há convenções que omitem certos símbolos como, por exemplo, os coeficientes um, zero e ainda os sinais de mais. Desse modo, é habito escrever $y = x$ e não $y = +1x + 0$. Essa omissão deve ser discutida no processo de ensino, pois mesmo omitidos, pelo menos para caso das funções polinomiais do primeiro grau, eles são unidades significantes que, conforme já discutimos se relacionam a variáveis visuais.

Dando sequência ao histórico, vamos aos estudos de Moretti (2003). Nele, o autor comenta que para o caso do gráfico de outras funções, mesmo as polinomiais, a Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais pode não ser tão evidente e, inclusive, pode exigir noções como limite e derivada. Buscando se aproximar dessa forma de abordar o autor sugere o uso de uma noção bastante simples: as translações. Com esse recurso, Moretti (2003) analisa mais detalhadamente o caso dos gráficos das funções quadráticas e sugere que esse estudo seja feito também para outras funções como, por exemplo, as trigonométricas.

Na sequência, apropriando-se da sugestão das translações, Silva (2008)[18] analisou o uso da Abordagem (3) no ensino dos gráficos das funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas incluindo, ainda, suas respectivas composições. Para as funções trigonométricas ainda foi sugerido o uso das propriedades relativas aos conceitos de paridade, período e amplitude. Já para as funções exponenciais, acrescentaram-se as propriedades de variação de crescimento. No caso das funções logarítmicas Silva (2008) inclui às propriedades presentes nas funções inversas.

Seguindo com o histórico, as pesquisas de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) concebem que para o caso do esboço de gráfico de curvas do Ensino Superior, ao menos para a maioria, as unidades significantes do registro simbólico não podem ser obtidas imediatamente dos coeficientes da equação. Esses autores também têm como base que

> no ensino universitário a possibilidade de procedimento de conversão que permite acompanhar as modificações simultâneas entre os registros de representação simbólica e gráfica é praticamente inexistente dada à variedade e complexidade das funções que são estudadas. (p. 100)

Para piorar, dada a representação no registro gráfico em geral é impraticável obter a representação simbólica correspondente. Até mesmo a maioria dos livros de Cálculo que tratam de esboço de curvas, segundo Luiz (2010), dá conta de apenas um sentido da conversão - representação simbólica para a gráfica. Nesses livros, as conversões são feitas por tratamentos provenientes do Cálculo ou com procedimentos informáticos.

Diante dessas dificuldades, o esboço de curvas no Ensino Superior utilizando a Abordagem (3) é impossível? Para esse tipo de

[18] Uma síntese desta análise é feita em Corrêa e Moretti (2014).

curvas, como elaborar um procedimento que está em sintonia ou que se aproxima da abordagem proposta por Duval? Para responder essas questões, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) tomam como base elementos que já são utilizados no Cálculo tais como conceitos de limite e derivada, as variações (intervalos de crescimento e decrescimento da função) e concavidade das funções, os extremos relativos, os pontos de inflexão, as retas assintóticas e a continuidade para propor às unidades significantes linguísticas, simbólicas e gráficas[19] dos gráficos de curvas do Ensino Superior. A partir dessa identificação, são elaborados 24 quadros em que estão correlacionadas as citadas unidades significantes e que orientarão as conversões. O quadro seguinte mostra uma dessas produções.

Quadro 2.2 – Correlação entre uma das unidades básicas gráfica, linguística e simbólica de curvas do Ensino Superior

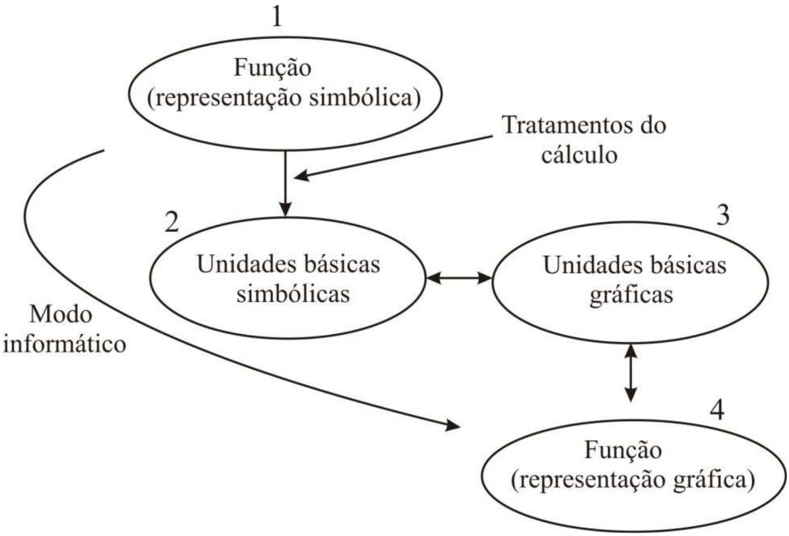
Unidade básica gráfica	Unidade básica lingüística	Unidade básica simbólica
x = a 	Assíntota vertical.	$\lim_{x \to a^-} y(x) = -\infty$ x = a

Fonte: Moretti; Ferraz; Ferreira (2008, p. 543)

Para entender como foram propostas as conversões em duplo sentido, veja a figura a seguir:

[19]Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) ao invés de utilizar o termo *variável visual* por vezes utilizam o termo *unidade básica gráfica* ou simplesmente *unidade gráfica.* Também são tomadas como equivalente às expressões unidade básica simbólica (ou algébrica) e *unidade simbólica* (ou algébrica) (NÉ, 2013).

Figura 4 – Esquema de conversão entre representações algébricas e gráficas



Fonte: Moretti; Luiz (2010, p. 531)[20]

Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) não têm como ideia a conversão direta de $4 \rightarrow 1$ e, ao invés disso, em função da complexidade das curvas, outro caminho é sugerido. A proposta, também utilizada por Luiz (2010) e por Moretti e Luiz (2010, 2014), é utilizar os citados 24 quadros com o uso da informática e fazer as operações $1 \rightarrow 4$ e $4 \rightarrow 3 \leftrightarrow 2 \leftarrow 1$. Em resumo, Moretti e Luiz (2014) esclarecem essa abordagem da seguinte forma:

> $1 \rightarrow 4$: a conversão direta da representação simbólica (1) para a gráfica (4) da função por meio da informática;
> $4 \rightarrow 3$: tratamentos na curva (visuais inicialmente) em sua representação gráfica (4) para reconhecer e destacar as unidades básicas gráficas (3);
> $2 \leftarrow 1$: tratamentos de cálculo na função em sua forma simbólica (1) para determinar as unidades básicas simbólicas (2) relacionadas às unidades básicas gráficas (3);

[20] Originalmente esse esquema foi proposto por Moretti, Ferraz e Ferreira (2008). Moretti e Luiz (2010) apenas fizeram algumas adaptações da proposta inicial.

> $3 \leftrightarrow 2$: conversão que confirma as correspondência entre as unidades básicas gráficas (3) e as unidades básicas simbólicas (2). (p. 79)

Diferente da forma que onde usa-se um *software* no ensino de matemática, dessa forma não se limita a apenas digitar uma equação num *software* e, a seguir, *plotar* o gráfico. Também não se reduz a analisar elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. Mais do que isso, depois de feito a *plotagem*, já com o auxílio dos quadros, propõe-se a articulação entre as unidades significantes dos quadros. Assim, sugere-se que a operação de conversão seja feita com o uso de softwares e os referidas quadros. A esse procedimento, que Duval não faz referência específica, Moretti e Luiz, (2010; 2014) chamam de Procedimento Informático de Interpretação Global. Ele, porém, não é um quarto tipo de abordagem posterior às três categorias já indicadas por Duval (2003). Trata-se apenas de uma sugestão que almeja estar em sintonia ou se aproximar da Abordagem (3) de Duval (MORETTI; LUIZ, 2010; 2014).

Há ainda a Tese de Lucia Menoncini que se voltou para a abordagem das funções modulares lineares. Nesse caso, a pesquisadora sugere que as articulações entre as representações cartesiana e algébrica sejam feitas partindo da visualização do traçado da curva, para então apresentar a expressão algébrica (no ensino, geralmente segue-se o sentido inverso). Nesse caminho, deve-se trabalhar as seguintes questões visuais: o sentido do traçado; os ângulos do traçado com os eixos; a posição do traçado em relação à origem do eixo horizontal; a posição do traçado em relação à origem do eixo vertical.

Dando sequência ao que já foi produzido historicamente com a Abordagem (3), nossa Tese trata das superfícies quádricas. Conforme dissemos na **Introdução**, o ensino das quádricas nessa perspectiva possui complicadores visuais e algébricos e, por isso, pretendemos apenas estar em *sintonia* com essa abordagem e, para tanto, fizemos algumas adaptações que já foram discutidas também na **Introdução**. Além disso, considerando que no casos das quádricas em geral não é possível dado o registro cartesiano determinar o registro simbólico, como realizar conversões em duplo sentido? Diante de tal impossibilidade nesses casos sugerimos que as conversões sejam feitas da seguinte maneira: variáveis visuais $\leftrightarrow$ unidades significantes simbólicas. Conforme o entendimento também pode-se usar o Procedimento Informático de Interpretação Global de Moretti e Luiz (2010).

As subseções 4.2 (p. 146) até 4.3.6.5 contêm nosso estudo que identifica e articula/correlaciona detalhadamente as variáveis visuais e as unidades simbólicas das cônicas não degeneradas e das quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Por ora, em função do grande volume de casos e de páginas, nos limitaremos a discutir sucintamente o caso dos elipsoides padrão. Para isso, veja o quadro a seguir em que estamos supondo que a equação está na seguinte forma $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$ e que os eixos α, β e γ são os eixos coordenados do sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$.

Quadro 2.3 – Articulações entre unidades significantes dos registros dos elipsoides padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Elipsoide em α e β	- Os três eixos (maior, menor e médio) têm medidas diferentes; - o eixo maior está contido no eixo α, o eixo médio está contido no eixo β e obviamente o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2, o médio está sobre β^2 e o menor está sobre a outra variável quadrática.
Superfície esférica com $R = R_0$	- Os eixos têm medidas iguais; - medida do raio R é R_0. **Comentário:** Os eixos são chamados de diâmetro e os semieixos são chamados de raio	- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.
Esferoide alongado em α.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo α.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.

Esferoide achatado em α.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.

Fonte: O autor

No quadro anterior, que está mais bem detalhado na subseção 4.3.1.3 (p. 183) e que possui os correspondentes registros cartesianos nos Quadros 4.21, 4.22, 4.23 e 4.24 (p. 176), adotamos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos (maior, médio e menor ou do diâmetro) e temos três valores visuais que são os seguintes: os três eixos são diferentes; dois são iguais e um diferente; os eixos são iguais. Chamaremos respectivamente esses casos de *elipsoide em α e β, esferoide* e *superfície esférica com $R = R_0$*.

Para cada um desses casos ainda adotamos outras variáveis visuais. Para o primeiro caso, tomamos a posição dos eixos maior, médio e menor como variável visual. Para o segundo tomamos duas variáveis visuais: a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais (podendo aquele ser maior ou menor que estes iguais); a posição do eixo com medida diferente no sistema cartesiano. Para o terceiro tomamos a medida do raio como variável visual.

Quando o tamanho dos eixos possui duas medidas iguais e uma diferente nos apropriamos do termo de esferoide. Nesse caso, já dissemos que tomamos como variável visual a comparação entre tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais. Se a medida diferente for maior que as outras duas diremos *esferoide alongado em α* e se a medida diferente for menor que as outras duas, diremos *esferoide achatado em α*. Temos, assim, dois valores visuais associados à citada variável. No primeiro caso *em α* quer dizer que o eixo maior está contido no eixo α e no segundo quer dizer que o eixo menor está contido no eixo α. Portanto, para os esferoides na posição padrão também tomamos a posição do eixo com medida diferente como uma variável visual que assume três valores (eixo maior ou menor no eixo x, y ou z).

Logo, temos seis tipos de "elipsoides em α e β", três tipos de "esferoides alongado em α", três tipos de "esferoides achatados α" além da superfície esférica com $R = R_0$. Com isso, são 13 tipos de elipsoides padrão.

De maneira geral, entendemos que o ensino dos gráficos segundo a Abordagem (3) seja feito usando as mídias lápis-papel e um *software* que esboce gráficos. A maneira e por que motivo usamos tais mídias especificamente em nossa Tese será discutido na subseção seguinte.

2.3 TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Nesta subseção discutiremos nosso Referencial Teórico a respeito da utilização das TIC's no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Com isso, entre tantas formas e motivos possíveis, justificamos principalmente de maneira teórica de que maneira e por qual motivo usamos as mídias lápis-papel e o *software* Geogebra nas Sequências de Ensino que propomos nesta Tese.[21] Adiantamos que nossas justificativas não utilizarão frases feitas ou modismos provenientes do senso comum e, ao invés disso, timidamente faremos uma discussão histórico-filosófica, cognitiva e didática do uso das TIC's no ensino de matemática. Pensamos que essa discussão é importante pelo fato de que assim deixamos claro que caminhos seguimos no uso das TIC's. Essas compreensões, inclusive, estarão presentes em nossas **Considerações Finais**.

Para o início da reflexão lembramos que ao longo da evolução da humanidade os conhecimentos matemáticos e tecnológicos se desenvolveram em íntima associação de tal forma que a matemática tanto foi incorporada quanto foi incorporando a tecnologia dominante. Uma análise histórica, portanto, evidencia que a geração do conhecimento matemático não pode estar dissociada da tecnologia disponível (D'AMBROSIO, 2015).

Essas ideias são delimitadas pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) da UNESP de Rio Claro. Esse grupo, que foi criado em 1993 e que tem como coordenadores os doutores Marcelo de Carvalho Borba e Marcus Vinícius Maltempi, "[...] vem desenvolvendo pesquisa sobre o papel das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) nos processos de ensino e

[21] Na subseção 3.2 (p. 126) apresentamos alguns aspectos técnicos do Geogebra bem como limites e possibilidades. Os detalhes práticos sobre o uso das mídias escolhidas na Tese, particularmente o Geogebra, estão expostos nas fases de análise a priori, experimentação e análise a posteriori/validação de nossa Engenharia Didática.

aprendizagem de matemática." (BORBA, 2010, p. 1). Recorrendo as ideias de Pierre de Lévy (1993[22]; 1999[23]) e obviamente de outros trabalhos, o grupo compartilha a ideia de que o conhecimento é produzido por coletivos formados por humanos e não humanos e que, nessa produção, a mídia, entendida não apenas como artefato tecnológico ou a própria informática, podendo ser, por exemplo, a oralidade ou a escrita, tem papel de destaque (BORBA; CHIARI, 2014).

Uma das produções do GPIMEM, elaborada particularmente por Borba (1999), define um construto teórico chamado de seres-humanos-com-mídias (S-H-C-M). A respeito desse conceito, Souto e Borba (2013), entendem que

> [...] a presença ou a ausência de uma mídia influencia o tipo de conhecimento produzido, e mais, o uso ou o surgimento de uma determinada mídia, não invalida ou extingue outra. Nessa perspectiva a produção de conhecimento não deve ser considerada atributo de um agente único, e sim, do produto de relações mútuas entre as estruturas do pensamento, as ferramentas do intelecto fornecido pela cultura e as mídias. (p. 05).

De acordo com o citado construto, nas interações entre seres humanos com as mídias estas dão *feedbacks* que reorganizam o pensamento daqueles. O sentido oposto dessa reorganização também ocorre, basta pensarmos, por exemplo, que por vezes o estudante, ao usar um *software*, o faz de uma maneira que aquele que criou essa mídia não tinha pensado. Assim, a equipe que desenvolveu essa mídia reorganiza um *design* que leva em consideração a utilização por parte do estudante. Todo esse processo, para o autor desse construto, gera uma moldagem recíproca (SOUTO; BORBA, 2013).

Dito de outra forma, as diferentes mídias produzidas historicamente tanto modificaram o raciocínio dos seres humanos quanto foram transformadas por eles. Nesse sentido, não há uma simples substituição ou complementação de um pelo outro e, ao invés disso, humanos e mídias são atores na produção coletiva do conhecimento. Assim, apenas para efeito de exemplo, de acordo com Borba e Penteado (2007, p. 49), "[...] chamamos calculadoras gráficas e computadores munidos de *softwares* de atores e estamos sempre pensando como mudanças,

[22] LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

[23] ——. **A Inteligência Coletiva:** por uma antropologia do ciberespaço. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 1999.

nos seres humanos e também nas tecnologias, modificam esse coletivo pensante seres-humanos-com-mídias."

Tendo o construto S-H-C-M como referência, Borba e Penteado (2007) concebem que aquilo que é um problema numa dada mídia pode ser uma mera questão em outra. Particularmente para a matemática, citamos como exemplo o caso em que devemos "traçar um gráfico de uma função como $y = 2^x$ pode ser um problema que engaje alguém em um coletivo no qual não haja mídias informáticas, mas não o será onde houver um software que permite o traçado de gráficos." (BORBA, PENTEADO, 2007, p. 49).

Compactuando com Borba e Penteado (2007, p. 49), também "não acreditamos que a informática irá terminar com escrita ou com a oralidade, nem que a simulação acabará com a demonstração. É bem provável que haverá reorganizações." Na prática pedagógica, essa reorganização exige que se repense como e quais problemas ou atividades devem ser tratados se dispomos de mídias informatizadas. Nesse sentido, apenas digitalizar o que já está pronto no papel é não explorar adequadamente as possibilidades das mídias digitais. Para Borba (2002), mais do que isso,

> O desafio que as novas tecnologias põem para os educadores e educandos é o de encontrar problemas que sejam adequados a novos sistemas, e não pensar no que se perdeu quando os computadores não estavam presentes e tínhamos que estudar questões que hoje estão facilmente acessíveis em bancos de dados eletrônicos (Internet, Intranet etc.). (p. 158).

Isso não significa, em nosso entendimento, que o gráfico de uma função como $y = 2^x$ não deva ser estudado. Porém, se dispomos de um *software* pode-se dar mais atenção a determinados aspectos qualitativos e cognitivos do gráfico que seriam difíceis de serem abordados sem as mídias digitais.

Discordamos, contudo, daquela ideia simplista de que os computadores irão substituir tudo, incluindo o professor, e que o que foi produzido historicamente será jogado fora.

Também não entendemos que a informática irá resolver todos os problemas da Educação Escolar. Pensamos apenas que as tecnologias digitais abrem possibilidades que são difíceis de serem pensadas apenas com a mídia lápis e papel. Além disso, essas questões devem fazer parte de uma discussão atual sobre currículo. Conforme fala Valente (2013),

> as atividades curriculares, para praticamente to-

> das as disciplinas do Ensino Básico ao Ensino Superior, foram desenvolvidas para a tecnologia do lápis e papel. No entanto, as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) criam novas possibilidades de expressão e comunicação, gerando novas possibilidades pedagógicas. (p. 01).

De maneira genérica, sem se referir a uma tecnologia específica, D'Ambrosio (2015) entende que "embora não garanta uma boa educação, sem a tecnologia uma educação de qualidade não poderá se dar. Particularmente, as tecnologias de informação e comunicação." O fascínio que muitos têm por tecnologias "antigas", entre os quais nos incluímos nesse grupo, não deve ser motivo para se limitar a elas e negar todas as tecnologias disponíveis. Nesse sentido, D'Ambrosio (2015) se expõe da seguinte forma:

> sem dúvida, o matemático do presente tem como instrumento de trabalho toda a tecnologia disponível. É muito possível que continue o fascínio por obter resultados com o mínimo de tecnologia disponível. Resolução de problemas geométricos com utilização apenas de régua e compasso continuarão a atrair interesse de alguns matemáticos, como aconteceu desde a antigüidade. Mas o grande desenvolvimento da matemática se dará, como foi em outros tempos, quando incorporando toda a tecnologia disponível, isto é, inserida no contexto cultural.

Entre os equívocos cometidos pela Educação atual D'Ambrosio (2011) destaca a não aceitação e incorporação da tecnologia no processo educacional. Para esse pesquisador,

> com a disponibilidade das calculadoras e dos computadores, o ensino de ciências e de matemática deve mudar radicalmente de orientação. Uma vez aceita a calculadora sem restrições, estaria desfeito o nó górdio da educação de hoje. Isto porque a calculadora sintetiza as grandes transformações de nossa era e a entrada de uma nova tecnologia em todos os setores da sociedade. A incorporação de toda a tecnologia disponível no mundo de hoje é essencial para tornar a Matemática uma ciência de hoje. (D'AMBROSIO, 2011).

O referido uso sem restrições, em nossa compreensão, não deve ser entendido como usar de qualquer forma ou de maneira livre sem intervenção do professor. O uso de qualquer tecnologia na Educação Matemática, incluindo as calculadoras, deve ser mediado pelo professor que não deve se silenciar no processo de ensino. No caso do docente ter como base a TRRS, é necessário propor atividades que privilegiem não só tratamentos, mas as conversões.

Do ponto de vista de eventos de Educação Matemática a discussão a respeito da possibilidade de usar a informática nas aulas de Matemática não é recente já sendo debatida no I ENEM, em 1987. Nesse evento, há dois minicursos nesse sentido. Um deles, ministrado por Chavez (1987, p. 80), faz uma "discussão das possibilidades de utilização do computador na educação." No outro, Lins (1987, p. 75) discute "[...] algumas abordagens do microcomputador em sala de aula, analisando pontos positivos e negativos e alguns pontos importantes ainda não explorados [...]".

> - o uso de novas tecnologias no ensino superior não é garantia de que os alunos compreendem os conceitos. É preciso que o professor saiba explorar esse recurso;
> - o tempo gasto com o ensino de cálculos e técnicas de integração pode ser diminuído com o auxílio do computador. Esse tempo economizado pode ser direcionado para a resolução de problemas mais interessantes; [...] (NASSER, 2004, p.3).

No II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)[24], em 2003, grande parte dos trabalhos submetidos tratavam do Ensino e Aprendizagem de Cálculo com o uso de *softwares* como ferramenta. Nesse evento, o uso da geometria dinâmica também teve destaque (NASSER, 2004).

Recentemente, no XI ENEM, Valente (2013) faz alguns comentários sobre a presença das novas tecnologias – incluindo especialmente os computadores - na Educação Matemática. Em sua palestra, esse pesquisador comenta que:

> As TDIC [Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação] têm características importantes,

[24] É realizado pela SBEM e reúne pesquisadores brasileiros e estrangeiros. Tem como finalidade promover o intercâmbio entre os grupos que, em diferentes países, se dedicam a pesquisas na área da Educação Matemática. Assim, possibilita o avanço das pesquisas em Educação Matemática em nosso país.

> como a capacidade de animar objetos na tela, recurso essencial para complementar ou mesmo substituir muitas atividades desenvolvidas para o lápis e papel. Em Matemática, por exemplo, a animação pode ser importante para a elaboração de gráficos dinâmicos. (VALENTE, 2013, p. 1).

Tendo como fonte de dados grandes periódicos de Educação Matemática do Brasil (Bolema, Educação Matemática Pesquisa, Zetetiké, Educação Matemática em Revista), Oliveira *et al.* (2010) conclui que

> O número de artigos que trataram do tema [TIC], distribui-se de forma diferenciada de revista a revista, sendo comum o aumento desse número. [...] a maioria dos artigos aponta resultados favoráveis do uso das TIC na aprendizagem da Matemática, porém há ainda muitos desafios a serem vencidos, segundo vários pesquisadores. (p. 08).

Em nosso entendimento, as contribuições do uso da informática na Educação Matemática são muitas. Algumas delas são sintetizadas da seguinte forma por Borba e Villareal (2005 apud BORBA, 2010):

> - Visualização constitui um meio alternativo de acesso ao conhecimento matemático.
> - A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e representações visuais podem transformar o entendimento deles.
> - Visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
> - Tecnologias com poderosas interfaces visuais estão presentes nas escolas, e a sua utilização para o ensino e aprendizagem da matemática exige a compreensão dos processos visuais.
> - Se o conteúdo de matemática pode mudar devido aos computadores, [...] é claro neste ponto que a matemática nas escolas passarão por pelo menos algum tipo de mudança [...]. (p.4).[25]

O uso de *softwares*, mesmo não sendo um novo registro, dá possibilidades de se explorar uma *Abordagem Experimental em Educação*

[25] Alguns termos usados por aqueles autores, como acesso ao conhecimento matemático, representações e visualização são os mesmo que os usados por Duval. Porém, não identificamos discussões deles com as bases teóricas de Duval.

Matemática (BORBA, 2010). Dentro desse conceito, abrem-se possibilidades de que os alunos possam formular conjecturas e, além disso, por indução[26] de vários casos, é possível que eles possam testar, validar ou refutar suas conjecturas. Conforme sabemos, essa forma de proceder não é aceita tradicionalmente como uma demonstração formal em Matemática. No entanto, ela é parte fundamental de abordagens investigativas da atividade matemática e, por isso, pensamos que ela deva fazer parte de um processo de ensino e aprendizagem que se interesse por aspectos qualitativos presentes nas investigações matemáticas. Além do mais, essa abordagem não impede a possibilidade, conforme os objetivos de aprendizagem, de se fazer demonstrações formais. A Abordagem Experimental em Educação Matemática, para Borba (2010),

> [...] significa fazer uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que possibilitem a criação de conjecturas, a descoberta de resultados matemáticos desconhecidos, a possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados e a chance de proporcionar novos experimentos. (p. 04).

Nessa abordagem, porém, deve-se estar atento a eventuais erros provenientes tanto do *software* quanto do "olhar" dos alunos.[27] Na prática docente há situações em que isso fica bastante evidente. Como exemplo, a partir de um *software* que conste as equações $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ e $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ e seus respectivos registros cartesianos é comum os alunos cometerem o erro de dizer que um é a reflexão do outro em relação ao plano de equação $y = z$. Outro exemplo ocorre no estudo das interseções das quádricas com planos em casos que a mídia digital dá corretamente como solução uma hipérbole, mas, os alunos se referem equivocadamente a elas como duas parábolas. Nessas situações os registros simbólicos elaborados na mídia lápis-papel se mostram como um recurso fundamental para refutar hipóteses e, nesse contexto, as diferentes mídias se complementam.

Em todo caso, numa perspectiva que está em sintonia com a Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais de Duval, como é caso da nossa, deve-se ter claro que a aprendizagem não se limita a apenas digitar uma equação num *software* e, a seguir, *plotar* o gráfico.

---

[26] O termo indução aqui usado não se refere ao método de indução finita usado para fazer demonstrações em Matemática. Trata-se de apenas fazer inferências se limitando a análise de vários casos.

[27] Na subseção 3.2 (p. 126) comentamos alguns desses erros particularmente no Geogebra.

Não estamos, de forma alguma, condenando o uso dos *softwares* ou das calculadoras gráficas. Queremos apenas alertar que a objetivação dos gráficos em matemática não se limita em apenas analisar isoladamente os aspectos visuais ou se reduz ao estudo de elementos pontuais ou particulares presentes num gráfico. É necessária toda uma aprendizagem integrativa que, conforme temos insistido, não é natural, é semiótica e, além disso, é completamente dependente das conversões e não apenas dos tratamentos.

Admitimos, inclusive, que essas mídias informatizadas abrem possibilidades que podem potencializar ou contribuir com o ensino e a aprendizagem em sintonia com a referida abordagem de Duval, sobretudo no uso do Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas da TRRS. De maneira mais específica para a aprendizagem de curvas e de superfícies algumas das novas mídias, como certos *softwares*, permitem que se identifiquem, via oposições qualitativas, as variáveis visuais e as unidades significantes simbólicas e ainda auxilia nas conversões. Dessa forma, segundo Moretti, Ferraz e Ferreira (2008),

> [...] ao estudante cabe o papel de crítico das curvas produzidas pelo computador e esta crítica pode ser feita por meio do reconhecimento das unidades básicas gráficas associadas às unidades básicas simbólicas pertinentes. (p. 114)

Com os *softwares*, conforme a escolha proposta em sala de aula, pode-se primeiro analisar apenas as variáveis visuais, sem se ater as unidades significantes simbólicas e as conversões e, num momento seguinte, retomar necessariamente as conversões, ou fazê-los simultaneamente ou, ainda, quase simultaneamente. Todo esse processo, que é central na TRRS, com o auxílio de certos *softwares pode* ser feito de maneira mais dinâmica e, ainda, com a *possibilidade* de participação efetiva e autônoma dos alunos. Nesse contexto, buscam-se os aspectos qualitativos e cognitivos dos gráficos. Porém, ele não se limita a fazermos codificações entre diferentes registros de representações de um mesmo objeto sendo necessário explorar todas as transformações que uma representação pode ter.

No que diz respeito aos *software* que pesquisamos identificamos que o Geogebra permite propor Sequências de Ensino acerca das superfícies quádricas que estejam na perspectiva da TRRS, principalmente no diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais e que, além disso, permite uma Abordagem Experimental. Isso se deve ao fato de que o Geogebra permite visualizar ao mesmo tempo os registros gráficos, simbólicos e em língua natural das quádricas. Não obstante, com o uso de comandos e ícones simples ou diretamente com o mouse (ou com o toque), podemos, por exemplo, analisar o que acontece com os registros cartesianos ou figurais ao modificarmos os coeficientes do correspondente registro simbólico. Da mesma forma também podemos movimentar, ampliar, reduzir, modificar as cores, ... dos eixos e dos registros cartesianos ou figurais das quádricas. Tudo isso, pode ser feito de forma dinâmica, interativa e experimental e, portanto, pensamos que podem contribuir para o reconhecimento das variáveis visuais e das unidades significantes simbólicas das quádricas. Do ponto de vista algébrico, um facilitador, que não é possível em qualquer *software*, é que o Geogebra não exige que se usem as equações das quádricas em sua forma paramétrica e, inclusive, pode-se usar as equações implícitas. No Geogebra, diferente de outros *softwares*, as equações podem ser digitadas diretamente sem a necessidade de um comando ou sintaxe específica. Também nos agradou o fato de que o Geogebra é gratuito e, dessa forma, permite-se que a população em geral possa se privilegiar dos benefícios do *software* independente de sua condição financeira. Outro ponto positivo é que há uma grande quantidade de materiais pedagógicos gratuitos e disponíveis na internet que tomam o Geogebra como *software*. Entre eles, destacamos o Geogebra tube que está disponível em: tube.Geogebra.org. Por tudo isso em nossa Tese escolhemos o Geogebra como *software* para o Ensino das quádricas.

O Geogebra permite criar *cenários*. Esses cenários são apenas arquivos desse *software* em que previamente já criamos representações de alguns objetos. Em nossa Tese, inclusive, criamos alguns que estão disponíveis em: https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/index.php/Sérgio_Florentino_da_Silva. No cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, por exemplo, estão previamente registrados os registros simbólicos e cartesianos dos seis paraboloides elípticos padrão, dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados. Conforme o interesse, os próprios alunos podem modificar qualquer um dos cenários.

Não obstante, o uso de novas mídias não descarta as clássicas como, por exemplo, a lápis-papel. Conforme a conveniência pode-se articulá-las de maneira a explorar relações entre diferentes registros de representações de um mesmo objeto tais como o simbólico, o cartesiano e, ainda, em língua natural. Essa articulação, aliás, foi feita em nossa Tese.

Não discutiremos em nossa Tese a questão da relação entre motivação e o uso do computador. A respeito desse tema, que confessamos não termos subsídios teóricos consistentes e apenas possuímos dados empíricos fruto de nossa prática, nos limitaremos a concordar com Borba e Penteado (2007) ao dizer que:

> Muitos advogam o uso do computador devido à motivação que ele traria à sala de aula. Devido às cores, ao dinamismo e à importância dada aos computadores do ponto de vista social, o seu uso na educação poderia ser a solução para a falta de motivação dos alunos. Quem já trabalhou de forma mais constante com a informática educativa sabe que, de modo geral, é verdade que os alunos ou professores que participam de cursos ganham novo ímpeto com o uso da informática, caso possíveis medos ainda possam ser superados. Não temos em nosso grupo de pesquisa [GPIMEM] dados sobre o tema e não conhecemos também trabalhos de outros pesquisadores sobre isso. Há indícios superficiais, entretanto, de que, "tal motivação" é passageira. Assim, um dado *software* utilizado em sala pode, depois de algum tempo, se tornar enfadonho da mesma forma que para muitos uma aula com intensivo uso de giz, ou outra baseada em discussão de texto, pode também não motivar. (grifo do autor, p. 16).

Finalizamos a discussão a respeito do uso dos *softwares* no ensino de matemática dizendo que em nosso entendimento o uso dessas mídias deve ser feito de maneira prudente. Conforme nos alerta Duval (2011a)

> [...] os *softwares* abrem possibilidades consideráveis de criação e exploração visuais. Mas, sua utilização é suficiente para desenvolver nos alunos a capacidades de *antecipar as diferentes transformações possíveis de uma dada figura em outras que não se assemelham*? Ela ensina *a ver as correspondências respectivas* entre os valores visuais dos gráficos e os termos das equações para os quais eles são as representações? (grifo do autor, p. 8)

2.4 FUNÇÕES DISCURSIVAS DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Nesta subseção discutiremos de *maneira teórica* as Funções Discursivas da TRRS[28] que foram as que usamos em todas as fase de nossa Engenharia Didática. Particularmente na fase de análise a posteriori elas foram usadas como Metodologia de Análise das produções dos alunos.[29]

Para Duval (2004, p. 86), "[...] o discurso é o emprego de uma língua para 'dizer alguma coisa', a saber, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente as potencialidades significantes de uma língua."

Na TRRS para que um sistema semiótico seja considerado uma língua ele deve cumprir as Funções Metadiscursivas (Comunicação; Tratamento; Objetivação), que são comuns a todos os sistemas de representação, e as Funções Discursivas (Referencial de Designação de Objetos; Apofântica de Expressão de Enunciados Completos; Expansão Discursiva de Enunciados Completos; Reflexividade). Com isso, o emprego de uma língua permite que seja possível tanto haver um discurso quanto a sua variedade em certo entorno cultural. No que diz respeito às Funções Discursivas, elas devem possibilitar: designar objetos (Função Referencial); dizer alguma coisa a respeito dos objetos que designam em forma de uma proposição (Função Apofântica); vincular, ou religar a proposição enunciada à(s) outra(s) em um todo coerente (Função Expansão Discursiva); determinar o valor, o modo ou o estatuto de uma expressão (Função Reflexividade).

O esquema da figura[30] seguinte sintetiza as Funções Metadiscursivas e Discursivas de Duval (2004).

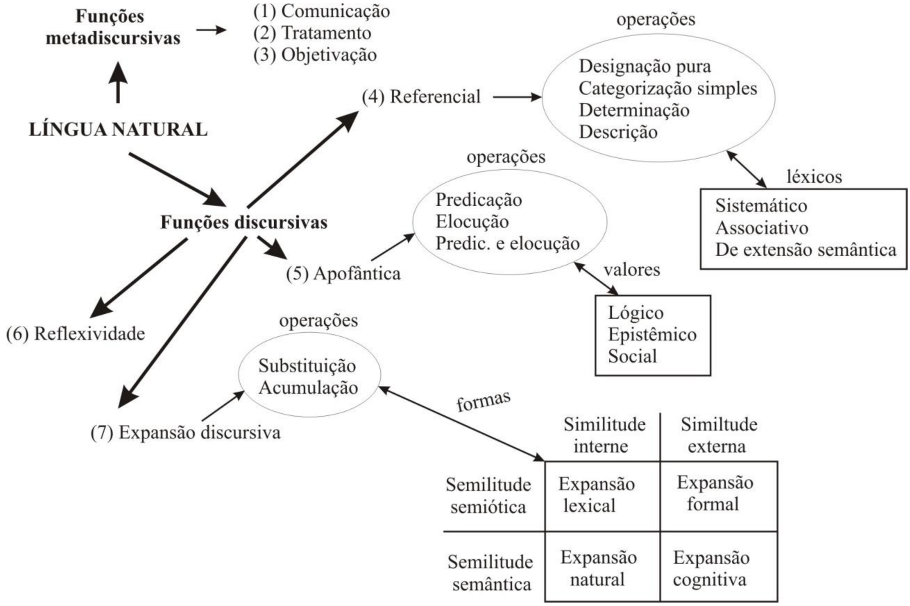
---

[28]Essa seção tem como base os escritos de Duval (2004), Brandt; Moretti e Bassoi (2014), Dionízio; Brandt e Moretti (2014) e Dionízio; Brandt (2014). Nesses trabalhos há uma série de exemplos práticos.

[29]Os detalhes práticos a respeito da forma que usamos as Funções Discursivas nessas análises estão contidas na Metodologia de Pesquisa (subseção 3.4 – p. 128).

[30]Trata-se de uma tradução e ampliação elaborada pelos autores a partir de Duval (1995, p. 87 - 136). Nessa figura o termo *elocução* equivale ao *ato ilocutório* que discutiremos mais adiante.

Figura 5 – Funções Metadiscursivas e Discursivas no uso da língua



Fonte: Brandt; Moretti; Bassoi (2014, p. 480)

Conforme ilustra o esquema da figura anterior, em cada Função Discursiva pode ocorrer diferentes Operações Discursivas.

2.4.1 FUNÇÃO REFERENCIAL

No caso da Função Referencial, as Operações Discursivas são as seguintes: Designação Pura; Categorização Simples; Determinação; Descrição.

A operação de Designação Pura permite a identificação de um objeto por um gesto, por uma marca particular ou por uma combinação de signos. De acordo com Brandt; Moretti e Bassoi (2014, p. 481) é caso, "por exemplo, de P e r na frase seguinte: Seja **P** um ponto qualquer da reta **r**...."

Na Categorização Simples a identificação de um objeto é feita a partir de uma de suas qualidades e com o emprego de substantivos, verbos e adjetivos que qualificam o objeto. Como exemplo, Brandt; Moretti e Bassoi (2014, p. 481) falam em "determinar o **MMC** dos números 3, 4 e 9." Porém, a Operação de Categorização Simples nunca é suficiente para identificar um objeto sendo necessária a combinação com a Operação de Determinação.

A Operação de Determinação possibilita precisar o campo de aplicação da Categorização Simples. Alguns exemplos são o uso de artigos e preposições. No exemplo anterior, trata-se do uso do artigo definido "o".

A Operação de Descrição é a que se identifica um objeto cruzando os resultados de várias Operações de Categorização. No exemplo anterior, "MMC designa o Mínimo Múltiplo Comum, e os algarismos 3, 4 e 9 designam os números. Essas duas designações são interligadas pela preposição de: 'Determinar o MMC **dos** (de + os) números 3, 4 e 9'." (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 482).

Na designação dos objetos recorrem-se aos léxicos. De acordo com Duval (2004, p. 96), "um léxico é um conjunto de elementos (signos, palavras ou símbolos) que permite marcar explicitamente a realização de cada uma dessas quatro operações discursivas da função referencial." Especificamente para a Função de Designação Pura, distinguem-se os *léxicos sistêmicos, associativos e de extensão semânticos.*

Um léxico é sistêmico quando dados um conjunto de objetos elementares e suas designações por meio de símbolos arbitrários, os objetos complexos são designados pela composição desses símbolos. Como exemplo, é o caso do sistema posicional de numeração. Nesse sistema, dados um conjunto de signos iniciais, as combinações entre eles e as regras de funcionamento próprias do sistema qualquer número natural pode ser designado (DUVAL, 2004). Ao referir-se a esse exemplo (sistema de numeração), Dionísio; Brandt e Moretti (2014, p. 6) comentam que "esses numerais são caracterizados como léxicos sistemáticos que falam por si só - essa designação não precisa ser combinada com outras operações cognitivas de designação." De qualquer forma, um léxico desse tipo permite apenas a operação de Designação Pura (DUVAL, 2004).

Segundo a definição de Duval (1995 apud Brandt; Moretti; Bassoi, 2004, p. 482), "um léxico é associativo quando o léxico de partida não remete mais a um conjunto de elementos elementares, mas a uma diversidade de objetos e fenômenos do meio físico e do ambiente sociocultural." Um exemplo é o dado por Brandt; Moretti; Bassoi (2004, p. 482). Segundo eles, o uso das letras "A" e "B" para designar um segmento de reta ou o lado de um triângulo depende da associação com outros léxicos, pois, essas letras "não falam por si só". Assim, em ... seja AB o segmento de reta .... e em ... seja AB o lado do triângulo

ABC ... o léxico AB é associado, respectivamente, ao segmento de reta e ao lado triângulo.

Um léxico é de extensão semântica quando "[...] permite que novos objetos sejam criados por metonímia, metáfora, sinédoque etc." (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2004, p. 482). Como exemplo, tomaremos o citado por Dionízio; Brandt e Moretti (2014). Segundo eles, entre os léxicos usados na trigonometria temos a palavra *lado* que, de acordo com a vivência sociocultural dos alunos, pode ser associado a *lado de dentro, lado de fora*, etc. Por isso, é necessário delimitar o que entendemos por lado no caso do estudo em trigonometria. Dessa forma, o léxico em questão passa por uma extensão semântica. Outro exemplo é o uso da palavra *vértice* que pode ser expressa pelos alunos como *canto, quina*, etc.

2.4.2 FUNÇÃO APOFÂNTICA

Na TRRS, uma língua não se limita a apenas designar objetos e permite que se possa dizer alguma coisa sobre os objetos que designa. Essa possibilidade pode ser feita recorrendo a Função Apofântica com as *expressões de enunciados completos.* No que diz respeito à diferença entre essas expressões e as *expressões referenciais*, assim se expõe Duval (2004):

> Um enunciado tem um "sentido completo" porque o ato de expressão que o produz é completo. Um ato de expressão é um ato completo do discurso quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo, representacional ou relacional dos interlocutores. Dito de outra maneira, a especificidade do sentido de um "enunciado completo" em relação com uma expressão referencial, deve buscar-se em seu valor (DUVAL, 2004, p.105).

Como vemos a referida diferença é caracterizada pelo seu valor. Esse valor pode ser *lógico* (de verdade ou falsidade), *epistêmico* (de certeza, de necessidade, de verossimilidade, de possibilidade, absurdo, ...) e *social* (de pergunta que exige uma resposta, de ordem para se executar, de desejo, de promessa, etc.). Um enunciado completo pode ter apenas um valor social (exemplo: venha rápido; chame mais tarde), um valor epistêmico e um valor social (exemplo: quando se faz uma promessa cuja realização parece pouco verossímil ou absurda) ou um valor epistêmico e um valor lógico se o ato do discurso se situa em um contexto teórico (por exemplo: a soma dos ângulos de um triângulo é maior que 180^o).

A Função Discursiva Apofântica possui duas operações discursivas: *predicação; ato ilocutório.* A operação de predicação equivale a vincular a expressão de uma propriedade de uma relação ou de uma ação com uma expressão que designe os objetos. Em determinado contexto e com certas condições ao realizarmos o ato de pronunciarmos um enunciado certificamos certas ações e intenções (aquilo que quero dizer) e, com isso, produzimos um ato ilocutório[31]. Como exemplo, suponha que um professor dentro de uma sala de aula fale "está frio aqui dentro". Com essa fala, talvez a intenção (ato ilocutório) do professor (o falante), ou seja, o que ele quer dizer seja que alguém aumente a temperatura do ar condicionado ou que esse aparelho possa ser desligado. Nesse contexto de fala, temos um ato ilocutório.

2.4.3 FUNÇÃO EXPANSÃO DISCURSIVA

Entre as quatro Funções Discursivas a Expansão é mais importante. Isso se deve ao fato de que com ela é possível articular vários enunciados completos em uma unidade coerente de uma narração, de uma explicação ou de um raciocinamento. Com isso, sem cair em redundância, podemos vincular diferentes enunciados de um mesmo tema de forma a explicar melhor o assunto (DIONÍZIO; BRANDT, 2014).

O modo de progressão do discurso pode ser *lógico* ou *natural* (é mais espontâneo). Como exemplo, tomaremos o dado por Brandt; Moretti e Bassoi (2014, p. 483). Segundo esses pesquisadores, caracterizamos uma Expansão Discursiva da forma lógica se dizermos o seguinte: "se ΔABC é isósceles com $\widehat{A} = \widehat{B}$, ΔDEF é isósceles com $\widehat{E} = \widehat{F}$ e se $\widehat{A}=\widehat{E}$, então os triângulos ΔABC e ΔDEF são semelhantes." Já ao dizermos "a soma de dois números ímpares é um número par" caracterizamos uma Expansão Discursiva da forma Natural. Devemos partir da diferença entre esses modos para determinar as operações da Expansão Discursiva.

No modo de progressão do discurso também devemos observar se ele se dá por *substituição* ou por *acumulação.* No primeiro caso, o discurso se limita a produzir inferências. Como se fosse um cálculo, "as inferências possibilitadas a partir da progressão das proposições podem ser realizadas pela substituição do resultado das novas inferências

[31] Trata-se de um dos Atos da Fala da Teoria dos Atos de Linguagem de John Langshaw Austin.

sobre as que foram feitas nas proposições anteriores." (BRANDT; MORETTI; BASSOI, 2014, p. 483). Nessas inferências, deve-se notar cada vez mais a aplicação das regras utilizadas. Estas regras podem estar explicitas ou implícitas.

No caso da acumulação na progressão do discurso as frases se unem por meio de conectores e, assim, o percurso do discurso é transformado ou enriquecido e há uma apreensão sinóptica. É o que ocorre na progressão de uma *narração*, *descrição* ou *explicação*.

Duval (2004) categoriza quatro formas fundamentais de Expansão Discursiva: *expansão formal; expansão cognitiva; expansão lexical; expansão natural*. Elas se embasam na *similaridade* de unidades apofânticas. As similaridades são determinadas por duas dimensões: presença ou ausência de significantes comum às duas unidades; mediação ou não por meio de uma terceira unidade apofântica. Assim, temos uma *similaridade semiótica* quando há repetição dos mesmos signos ou das mesmas palavras nos enunciados, mas com invariância referencial e uma *similaridade semântica* quando os enunciados têm por referência o mesmo objeto, sem apresentarem significantes comuns. A *similaridade direta* ocorre quando a passagem de um enunciado para outro acontece de forma direta, sem a necessidade de um terceiro enunciado e a *similaridade indireta* é caracterizada pela necessidade, implícita ou explicita, da mediação de um terceiro enunciado. Com a articulação dessas dimensões, temos as citadas formas fundamentais: com presença de significante comum nas duas unidades apofânticas e com mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão formal); com ausência de significante comum nas duas unidades apofânticas e mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão cognitiva); com presença de significante comum nas duas unidades apofânticas e não mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão lexical); com ausência de significante comum nas duas unidades apofânticas e não mediação por meio de uma terceira unidade apofântica (expansão natural) (DIONÍSIO; BRANDT; MORETTI, 2014). O quadro[32] a seguir sintetiza essas quatro formas.

[32] A tradução do Quadro 2.4 foi elaborada por Dionísio; Brandt e Moretti (2014, p. 8).

Quadro 2.4 – As quatro formas de Expansão Discursiva de uma expressão

Mecanismos de expansão	***Similaridade interna*** (continuidade sem terceiro enunciado)	***Similaridade externa*** (continuidade com um terceiro enunciado)
Similaridade semiótica (são recuperados alguns significantes)	**Expansão LEXICAL** (recuperação do sentido de uma mesma unidade do vocabulário sob um modo fonético-auditivo ou gráfico-visual) ***Associações verbais, ocorrências,*** "Linguagem do inconsciente"	**Expansão FORMAL** (recurso exclusivo aos símbolos: notações, escrita algébrica etc) ***Raciocinamento dedutivo*** (proposições de estrutura funcional) ***Cálculo proposicional, cálculos de predicados etc***
Similaridade semântica Lei de Frege: Significantes diferentes e mesmo objeto. (Invariância referencial estrita ou global)	**Expansão NATURAL** (É suficiente com os conhecimentos da língua corrente) ***Descrição, Narração*** ***Argumentação retórica*** Silogismo aristotélico (proposição de estrutura temática predicativa) ***Raciocinamento pelo absurdo***	**Expansão COGNITIVA** (Exige o conhecimento de definições, regras e leis para um domínio de objetos) ***Explicação*** ***Raciocinamento dedutivo*** (proposição de estrutura temática condicional) ***Raciocinamento pelo absurdo***

Fonte: Duval (2004, p. 111)

Referindo-se a base teórica de Duval (2004), Dionízio; Brandt e Moretti (2014, p. 521) esclarecem que as diferentes formas associadas à Função Expansão "[...] permitem entender como uma unidade apofântica pode ser produzida em continuidade discursiva com outra unidade apofântica [...]".

Cada unidade apofântica produzida pode ser considerada em relação ao seu conteúdo ou estatuto. Naquele caso, corresponde aos diferentes aspectos sob os quais pode ser identificada a unidade apofântica: a materialidade dos signos que permitem a sua distinção em relação à outra unidade apofântica, a significação de suas expressões referenciais e predicativas assim como as associações permitidas pela rede semântica do qual provém, ou seu eventual valor lógico de verdade. Neste caso, corresponde ao papel que cumpre frente a outro enunciado da organização global de um discurso (premissa; regra; conclusão; ...). Este estatuto geralmente estabelece um valor epistêmico da unidade apofantica que, dependendo do contexto que se situa, pode ter um quadro teórico (definições; axioma; teoremas; ....) ou um quadro social (normas; crenças; opiniões; ...) (DUVAL, 2004).

Ao referir-se a Expansão Discursiva por substituição, Brandt; Moretti e Bassoi (2014) esclarecem que essa forma de expansão

> [...] depende do estatuto dos respectivos enunciados, que podem estar prévia e explicitamente fixados desde o começo, de acordo com o marco teórico e com as hipóteses que fundamentam o enunciado; ou apenas no momento em que ele aparece, durante o discurso. Assim, esse estatuto faz parte do sentido do enunciado. (p. 484).

Especificamente no caso em que o progresso do discurso ocorre por acumulação Brandt; Moretti e Bassoi (2014, grifo dos autores, p. 484) destacam que “[...] a evolução do enunciado depende do conteúdo expresso. O *estatuto* é quase sempre esquecido, pois se imagina que as informações expressadas têm o mesmo **valor epistêmico** e estão relacionadas ao mesmo assunto."

Ao analisarmos a produção de um sujeito frente a uma atividade também podemos considerar se a solução apresentada é *pragmática* ou *intelectual.* Seu tipo de argumentação matemática pode ser *válida* ou não.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Nesta seção discutiremos os elementos metodológicos que conduziram nossa Tese em concordância com nossos objetivos de pesquisa e referenciais teóricos. Dessa forma, traremos aspectos teóricos e práticos que circundam a concepção, o planejamento e a execução de nossa pesquisa científica. Para facilitar a leitura e organização dividimos nossa apresentação nas seguintes subseções: escolha e caracterização dos sujeitos de pesquisa; aspectos técnicos, limites e possibilidades do Geogebra; Metodologia de Análise; classificação geral da pesquisa; Engenharia Didática (incluindo a Teoria das Situações Didáticas).

Devido a sua extensão, as fases de nossa Engenharia Didática (análise preliminar; análise a priori; experimentação; análise a posteriori; validação) estão em capítulos à parte (veja essas seções a partir do sumário).

3.1 ESCOLHA E CARACTERIZAÇÃO DOS SUJEITOS DE PESQUISA

Como nosso estudo trata das superfícies quádricas, buscamos alunos que tivessem esse conteúdo em sua grade curricular.

Por ser professor do IFSC/SJ (na época da experimentação estávamos em licença capacitação para o doutorado) optamos que nossos sujeitos de pesquisa fossem desse instituto. Justificamos essa escolha apenas por simplicidade logística e também para tentar contribuir com a aprendizagem em Matemática (forte demanda local) de alunos de meu local de trabalho.

Com isso, nossos sujeitos de pesquisa, ao menos na época da aplicação da Sequência de Ensino, eram graduandos do curso de Engenharia de Telecomunicações do IFSC/SJ (os únicos desse instituto que têm as quádricas no currículo). Entre diversos alunos desse curso recaímos naqueles que tinham disponibilidades de tempo e interesse e, sobretudo, de compromisso com o experimento independente de terem ou não um bom histórico escolar em Matemática. Porém, durante a experimentação observamos que o nível de conhecimento matemático dos alunos era bastante variado, ou seja, alguns tinham dificuldades e outros nem tanto. Trata-se, contudo, de uma simples impressão.

Dados esses critérios, os sujeitos de pesquisa configuram-se em um conjunto de dez alunos. Por uma questão ética, preservaremos os seus nomes e, por isso, no lugar dos nomes usaremos os códigos A_i; i pertence aos naturais e $1 \leq i \leq 10$.

Além disso, apesar de que a pesquisa contou com pessoas dos gêneros masculino e feminino, usaremos apenas o termo "aluno(s)" (sem flexão de gênero) em nossa escrita. Justificamos essa escolha apenas para evitar que uma eventual identificação deles possa ser feita.

3.2 O GEOGEBRA: ASPECTOS TÉCNICOS, LIMITES E POSSIBILIDADES

Em nossa Engenharia Didática usamos as mídias lápis-papel e o Geogebra. Nosso entendimento teórico sobre a maneira e por qual motivo utilizamos essas mídias está discutido na subseção 2.3 (p. 106) sendo que os detalhes práticos sobre o uso delas estão detalhados nas fases de análise a priori, experimentação e análise a posteriori/validação de nossa Engenharia Didática. Nesta subseção apresentaremos alguns aspectos técnicos, limites e possibilidades do Geogebra.

Do ponto de vista técnico o Geogebra, criado por Markus Hohenwarter, é escrito em *JAVA* e tem a vantagem de ser uma multiplataforma e, com isso, pode ser instalado em computadores com *Windows*, *Linux* ou *Mac OS X*. Também se pode instalar o Geogebra em *tablets* e *smartfones*. Além disso, possui versões em varias línguas - incluindo o português.

Com relação as possibilidades, o Geogebra permite propor Sequências de Ensino acerca das superfícies quádricas que estejam na perspectiva da TRRS, principalmente no diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento e que, além disso, permitem uma Abordagem Experimental (BORBA, 2010) e em sintonia com elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brosseau. Isso se deve ao fato de que o Geogebra permite visualizar ao mesmo tempo os registros cartesianos, simbólicos e em língua natural das quádricas. Não obstante, com o uso de comandos e ícones simples ou diretamente com o mouse (ou com o toque), podemos, por exemplo, analisar o que acontece com os registros cartesianos ou figurais ao modificarmos os coeficientes do correspondente registro simbólico. Da mesma forma também podemos movimentar, ampliar, reduzir, modificar as cores, ... dos eixos e dos registros cartesianos ou figurais das quádricas. Tudo isso pode ser feito de forma dinâmica, interativa e experimental e, portanto, pensamos que podem contribuir para o reconhecimento das variáveis visuais e das unidades significantes simbólicas das quádricas.

Do ponto de vista algébrico, um facilitador, que não é possível em qualquer *software*, é que o Geogebra não exige que se usem as equações das quádricas em sua forma paramétrica e, inclusive, pode-se usar as equações implícitas. No Geogebra, diferente de outros *softwares*, as equações podem ser digitadas diretamente sem a necessidade de um comando ou sintaxe específica. Também nos agradou o fato de que o Geogebra é gratuito e, dessa forma, permite-se que a população em geral possa se privilegiar dos benefícios do *software* independente de sua condição financeira. Outro ponto positivo é que há uma grande quantidade de materiais pedagógicos gratuitos e disponíveis na internet que tomam o Geogebra como *software*. Entre eles, destacamos o Geogebra tube (disponível em: tube.Geogebra.org).

Outra possibilidade interessante, que usamos em nossa Tese, é que o Geogebra permite criar *cenários*. Esses cenários são apenas arquivos desse *software* em que previamente já criamos representações de alguns objetos. No cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, por exemplo, estão previamente registrados os registros simbólicos e cartesianos dos seis paraboloides elípticos padrão, dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados. Conforme o interesse, os próprios alunos podem modificar qualquer um dos cenários. Em nossa Tese criamos vários cenários e para acessá-los basta entrar em: www.sj.ifsc.edu.br.

Quanto aos limites, deve-se estar atento ao fato de que o Geogebra pode cometer falhas ao medir ângulos ou até mesmo ao esboçar gráficos. Nesse sentido veja, por exemplo, que o registro cartesiano de $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x-2)}; x \neq 2$ dado em algumas versões do Geogebra é uma reta que inclui de maneira equivocada o ponto de coordenadas $(2, 4)$.

Outro limite importante no uso do Geogebra é que ele não é capaz de plotar gráficos de superfícies mais sofisticadas. Porém, estudos no sentido de sanar esses problemas e outros que possam surgir têm sido feitos constantemente. Para acompanhar o desenvolvimento desses estudos há vários fóruns que, por exemplo, podem ser encontrados em www.Geogebra.org.

Destacamos ainda que a *ênfase* do Geogebra é com o Ensino de Matemática e não com a produção de conhecimentos Matemáticos.[1] Por isso, até momento de nossa pesquisa, ele não disponibiliza ferramen-

[1] Estamos entendendo por *softwares* de Ensino de Matemática os que têm como objetivo principal contribuir com o processo de ensino de aprendizagem de Matemática.

tas sofisticadas, sobretudo em R^3, para efetuar cálculos matemáticos. Nesse sentido, destacamos que Métodos Numéricos, muito usados nas Engenharias, não são explorados de maneira intensa no Geogebra.

3.3 FONTE DE DADOS DA FASE EXPERIMENTAL

A fonte de dados da fase experimental de nossa pesquisa são as produções dos alunos. De maneira mais específica, elas se resumem ao seguinte: produções escritas na mídia lápis-papel (1); produções verbais (2); produções elaboradas no Geogebra (3). As produções (1) estão nos Anexos e as produções (2) e (3) estão em nosso Diário de Campo. Entre elas, a fonte principal são as produções (1).

3.4 METODOLOGIA DE ANÁLISE: O USO PRÁTICO DAS FUNÇÕES DISCURSIVAS

Em todas as fases de nossa Engenharia Didática consideramos as *Funções Discursivas da Linguagem* da TRRS - principalmente a função Referencial e a Expansão Discursiva. Na subseção 2.4 já discutimos de maneira teórica e geral essas funções sendo que aqui trataremos dos aspectos práticos do uso que fizemos delas particularmente na fase de *análise a posteriori* em que usamos essas funções como Metodologia de Análise das produções dos alunos.

Em primeiro lugar cabe dizer que com a escolha de tal Metodologia de Análise não poderíamos nos limitar ao estudo das respostas finais dos alunos ou, ainda, a simples verificação se essas respostas estão ou não certas. Se assim fosse, pensamos que pouco contribuiríamos para a avaliação tanto da aprendizagem dos alunos quanto do potencial de ensino de nossa Sequência de Ensino. Diferente disso, durante o processo de aplicação de nossa Sequência tentamos de forma consistente avaliar as produções deles frente às atividades que propomos e recorremos as questões semióticas e cognitivas. Como fruto dessas avaliações, podemos analisar o potencial da Sequência de Ensino, inclusive propondo modificações ou incluindo explicações durante a experimentação[2] e também avaliar a aprendizagem e os processos cognitivos dos alunos diante da aplicação dessa sequência. De maneira mais específica, no processo avaliativo analisamos gradualmente o uso das Funções Refe-

[2] A modificação se limitou a acrescentar a atividade 9 na Sequência de Ensino prevista na análise a priori. Discutiremos esse acréscimo na seção 6.

rencial e Expansão Discursiva necessárias para o progresso do discurso e paralelamente os Tratamentos e as Conversões (em duplo sentido) mobilizadas pelos alunos. Nesse caminho, analisamos nas produções dos alunos a evocação dos conteúdos presentes nas variáveis visuais, nos registros básicos simbólicos e suas unidades significantes simbólicas e nos registros básicos em língua natural que tomamos em todo o processo.

Portanto, nossas análises se focam no potencial da Sequência de Ensino, na aprendizagem e nos processos cognitivos que os alunos mobilizam.

3.5 CLASSIFICAÇÃO GERAL DA PESQUISA

Neste espaço trataremos da classificação geral metodológica de nossa pesquisa segundo a literatura especializada. De maneira mais específica, discutiremos os seguintes pontos: *natureza; forma; objetivos; procedimentos técnicos*. Para elaborá-los, nos apoiamos principalmente nas sínteses de Silva e Menezes (2005) que, por sua vez, baseiam-se nas classificações de Minayo (1993); Demo (1996) e Gil (1991).

Com relação à *natureza*, nossa Pesquisa é Aplicada, pois temos como objetivo gerar conhecimentos que contribuam para a prática de ensino e aprendizagem especificamente das superfícies.

Do ponto de vista do ensino e da aprendizagem na perspectiva da TRRS, o que queremos é que as relações entre os alunos, os professores e o conteúdo quádricas sejam compreendidos de forma qualitativa. Logo, com relação à forma de abordar, nos focaremos nos aspectos Qualitativos.

Quanto aos *objetivos*, trata-se de uma Pesquisa Exploratória. Por isso, almejamos contribuir para a maior familiaridade com relação ao ensino e aprendizagem das superfícies. Pretendemos tornar essa temática mais explícita e, ainda, construir hipóteses.

Com relação aos *procedimentos técnicos*, fizemos uma Pesquisa Bibliográfica em bases de dados e em bibliotecas. Assim, investigamos alguns livros de Ensino Superior, o banco de Teses e Dissertações da CAPES e artigos de pesquisa em periódicos da área da Educação Matemática (incluindo artigos do tipo metapesquisa). Discutiremos com mais detalhamento essa pesquisa na subseção 4.1(*revisão da bibliografia*) sendo que ela, conforme veremos, é parte de nossas das *análises preliminares* de nossa Engenharia Didática.

Além da classificação geral que agora fizemos, também nos apropriamos de elementos da Engenharia Didática.

3.6 ENGENHARIA DIDÁTICA

Entre as diversas contribuições da Didática da Matemática (francesa), para nossa pesquisa nos apropriaremos de elementos da Metodologia de Pesquisa conhecida como Engenharia Didática. Em suas sínteses a respeito da evolução e diversidade dessa metodologia, Almouloud (2012) esclarece que ela emergiu em 1982 com Yves Chevallard e Guy Brousseau e em 1989 com Michèle Artigue. Conceitualmente, trata-se de uma forma de organizar os procedimentos metodológicos de uma pesquisa em Didática da Matemática que contempla aspectos teóricos e práticos. Nela, de forma análoga ao trabalho de um engenheiro, é necessário conceber, planejar a executar um "projeto". Nesse sentido, segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática surge

> [...]com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático: aquele que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projecto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controlo [sic] de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objectos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de encarregar. (p. 193)

Artigue (1996, p. 196) destaca algumas características gerais da Engenharia Didática. Segunda essa pesquisadora, essa metodologia "[...] caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino." Além disso, há dois níveis a serem diferenciados: *microengenharia*; *macroengenharia*. Aquelas, segundo Machado (2002),

> têm por objetivo o estudo de um determinado assunto: elas são localizadas e levam em conta principalmente a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Por outro lado, as pesquisas de macroengenharia são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com os fenômenos ligados à duração

> nas relações ensino/aprendizagem. Esses tipos de pesquisas se complementam [...] (p. 199)

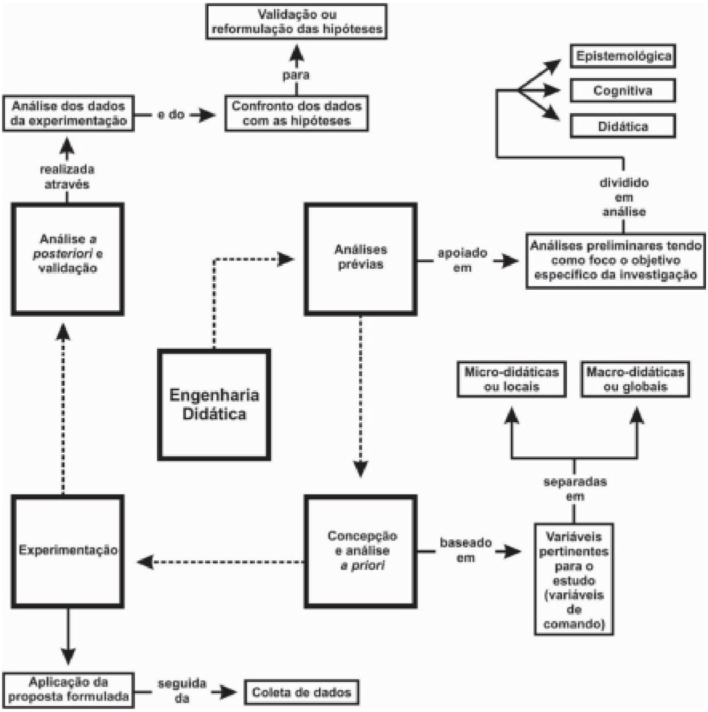
Diante do exposto entendemos o uso da Engenharia Didática que fizemos especificamente para os paraboloides elípticos padrão é do tipo microengenharia, pois, nos focaremos no ensino e aprendizagem desse objeto.

Outra característica singular da Engenharia Didática é que, diferente de outras metodologias experimentais, nela têm-se como base que a *validação* (uma das fases da Engenharia Didática) é *interna* pelo fato de que é fundada no confronto entre os registros presentes na análise *a priori* e na análise *a posteriori* (fases da metodologia). Não há validações externas como as que são feitas recorrendo aos grupos de controle com grupos experimentais ou como as que se baseiam em Métodos Estatísticos comparativos.

A título de diferenciação, Machado (2002) esclarece que numa Pesquisa Etnográfica não se faz uma análise *a priori* mesmo que nesse caso, assim como na Engenharia Didática, o pesquisador se insira em *locus.*

Outro aspecto fundamental da Engenharia Didática, já parcialmente apresentado nos parágrafos anteriores, são as suas quatro fases ou etapas: (1) *análises preliminares* (ou *prévias*); (2) *concepção* e *análise a priori das situações didáticas*; (3) *experimentação*; (4) *análise a posteriori* e *validação.* Na figura a seguir apresentamos um diagrama que resume essas fases.

Figura 6 – Diagrama de ideias destacando os princípios da Engenharia Didática



Fonte: Lutz (2012, p. 48)

Na fase das análises preliminares (1), considerando os objetivos específicos da pesquisa, o estudo apoia-se num quadro teórico didático geral e em conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão para, com isso, propor uma análise sobre o ponto de vista das *dimensões didática*, *epistemológica* e *cognitiva*. Em outros termos, na maior parte dos casos se apoia na análise epistemológica dos conteúdos em questão, na análise atual do ensino bem como de seus efeitos, na análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos deles, na análise das restrições e exigências que vai se situar a efetiva realização didática (ARTIGUE, 1996). Para Pais (2011), pode-se apoiar em outras dimensões. Em nossa pesquisa, o citado quadro teórico é, sobretudo o da TRRS de Raymond Duval.

Em nossa pesquisa, nossas análises preliminares se voltaram às dimensões epistemológica, cognitiva, didática e, perpassando por elas, a dimensão semiótica segundo a TRRS. Na seção 4 discutiremos detalhadamente essas análises.

Orientado pela fase (1), fundamental para a elaboração de uma Sequência de Ensino, dá-se início a fase concepção e análise a priori das situações didáticas (2). Antes de discutirmos teoricamente essa fase, antecipamos a análise a priori propriamente dita de nossa Engenharia está na seção 5. Para elaborá-la, segundo os pressupostos dessa metodologia, faz-se necessário planejar o *Contrato Didático* e definir as *variáveis de comando* que fariam parte do estudo. Essas variáveis são as que se supõem serem as que são pertinentes ou as que interferem para o estudo em particular. Nessas definições há dois tipos de variáveis: *variáveis macrodidáticas* ou *globais; variáveis microdidáticas* ou *locais.* Aquelas são mais gerais e dizem respeito a organização global da Engenharia e estas dizem respeito a organização local da Engenharia, ou seja, a organização de uma fase ou sessão da Engenharia. Nessa fase, segundo Artigue (1996) devem-se considerar os seguintes pontos:

> - descrevem-se as escolhas efectuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação a-didática que delas decorrem,
> - analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de acção, de escolha, de decisão, de controlo e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,
> - preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efectuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultam claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem. (p. 205)[3]

A citação anterior dá indícios de que a análise a priori comporta uma parte de descrição e outra de previsão. Com isso, pretende-se que a Engenharia permita "controlar" os comportamentos dos alunos bem como o sentido desses comportamentos. Cabe lembrar que uma das características fundamentais da Engenharia Didática é o confronto entre as análises a priori e a posteriori o que, conforme já dissemos, caracteriza a validação interna. Por isso, o citado controle é necessário. Em nossa investigação o fato de termos experiência em lecionar o conteúdo

[3]Trataremos alguns conceitos desta citação ainda nesta subseção.

quádricas contribuiu particularmente para a identificação das variáveis de comando e, com isso, facilitou o citado controle.

A fase de experimentação (3) é o momento da investigação em que efetivamente o professo-pesquisador e a população de alunos entram em contato. Nessa fase de nossa pesquisa, que está especificada na seção 6, discutimos com os alunos o Contrato Didático e aplicamos a Sequência de Ensino que trata dos paraboloides elípticos (essa sequência está na análise a priori - 261).

Nas análises a posteriori e validação (4) nos apoiamos nos dados obtidos na fase de experimentação e os confrontamos com as análises a priori. Daí, fizemos um processo de validação/refutação da hipótese formuladas. Esta parte está na seção 7. De maneira geral, considerando a validação interna, as hipóteses que elaboramos em nossa investigação foram confirmadas.

Em nossa Engenharia as atividades foram propostas com o uso do Geogebra e com o uso de material impresso de apoio. A forma como usamos essas mídias está de acordo com o que discutimos na subseção 2.3.

No que diz respeito à forma como planejamos e executamos nossas propostas de Sequência de Ensino buscamos que a participação dos alunos e do professor-pesquisador estivesse em *sintonia* com alguns elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.[4] Para tanto, demos atenção à estrutura das *situações didáticas*. De maneira ampla, segundo Brousseau (2008, p. 21) "a situação didática é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional." Freitas (2002 apud Artigue, 1988), esclarece que

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...] (p. 67)

Nesse caminho, para Brousseau (2008), é necessário pensarmos no *Contrato Didático* que é um conjunto de regras e convenções que funcionam como cláusulas de um contrato e que estão na base das relações entre aluno-professor-saber. Essas cláusulas, que geralmente

---

[4]Particularmente no uso das mídias usadas na Tese, incluindo as digitais, a forma de nossas propostas de trabalho didático deu ênfase a *Abordagem Experimental* (BORBA, 2010). Essa abordagem está discutida na subseção 2.3 (p. 106).

estão implícitas, se revelam quando são transgredidas. Nesses casos, por vezes é comum e necessário *renegociar as rupturas do contrato.*

Além disso, como característica da Teoria das Situações Didáticas não nos limitamos a apenas comunicar um conhecimento, pois, mais do que isso, tentamos anunciar as atividades e transferir a responsabilidade aos alunos. O uso do termo transferir refere-se a tentativa de compartilhar responsabilidades e não tem o sentido de que o professor seja negligente no cumprimento do Contrato Didático. Nesse processo, o professor procede de tal forma que os alunos aceitem a atividade como um desafio seu a ser resolvido. Enfim, trata-se do que na Teoria das Situações Didáticas ficou conhecido como *devolução* de uma situação para os alunos.

No Contrato Didático, aspiramos que surgissem momentos em que os alunos trabalhassem de forma independente ou, em outros termos, sem o "controle direto" do professor-pesquisador. Para tanto, é claro que o nível das atividades que elaboramos é tal que os alunos possam, ao menos em parte, realizá-las. Essa ideia almeja o que Brousseau (2008) chamou como *situações a-didáticas.* Com elas,

> as concepções de ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. (BROUSSEAU, 2008, p. 35)

As situações didáticas, segundo Brousseau (1986[5] apud Freitas, 2002),

> [...] o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está

[5]BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques: Recherches en didactiques de mathématiques. v.7, 2. ed.: Grenoble, 1986.

> construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer indicação intencional. (p.69)

Além do exposto, nosso Contrato Didático considerou os seguintes tipos de situações didáticas: *situações de ação; situações de formulação; situações de validação; situações de institucionalização.*

Nas situações de ação os alunos buscam resolver as atividades realizando ações mais imediatas e operacionais não sendo essencial explicitar uma argumentação mais teórica. Nesse sentido, de acordo com Freitas (2002),

> [...] há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento. Este é o caso, por exemplo, quando na solução de um problema de construção geométrica o aluno se contenta com a solução apresentada exclusivamente através da realização de um desenho utilizando régua e compasso. (p. 78)

Nas situações de formulação as soluções apresentadas pelos alunos aos problemas já apresentam explicitamente alguns modelos ou esquemas teóricos. Para isso, os alunos tentam modificar sua linguagem habitual em uma linguagem formal mesmo que para isso possa ocorrer "[...] ambigüidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retro-ações contínuas." (POMMER, 2008, p. 7). Nessa fase, mesmo que possa ocorrer por parte dos alunos a intenção de validação do que foi produzido bem como de seus porquês, isso não é exigido no Contrato Didático.

Nas situações de validação, diferentes da anterior, são caracterizadas pela utilização de mecanismos de prova. Nesse momento, rejeita-se ou confirma-se as conjecturas das fases anteriores e há, portanto, uma preocupação com a veracidade do conhecimento. Aqui, segundo Brousseau (2008),

> os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teoria - na qualidade de conjuntos de enunciados de referência - e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à produção, à soberba, a intimidações etc. As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possam aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas,

> debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar a opinião ou apresentar uma demonstração. (p. 27)

Segundo Pais (2011), Balacheff (1988)[6] classifica as situações de validação como *explicação, prova ou demonstração.* Em síntese, de acordo com Pais (2011),

> a *explicação* da validade de uma proposição está condicionada ao plano individual; enquanto uma *prova* se caracteriza como um procedimento de validação que se estende ao nível de um contexto social limitado, como é o caso da sala de aula. Finalmente, a *demonstração* é uma validação do conhecimento, cujas regras passam pelo crivo mais amplo da comunidade científica. (grifo nosso, p. 73)

Nas situações de institucionalização o professor fará sínteses que permitem garantir o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento. De acordo com Freitas (2002, p. 83), "faz-se necessário igualmente estabelecer as devidas correlações com outros saberes; essas sínteses são necessárias para que possam ser reinventadas em outras situações."

Os diferentes tipos de situações didáticas que acabamos de discutir são uma classificação que permite distinguir os principais tipos de atividades de acordo com sua funcionalidade bem como analisar seus aspectos fundamentais. Porém, é importante ter claro que essas categorias se entrelaçam intensamente não havendo, portanto, uma separação nítida entre elas (FREITAS, 2002). De qualquer forma, destacamos que o que buscamos foi estar em sintonia com alguns elementos da Teoria das Situações Didáticas sem, com isso, se prender ao seu sentido mais amplo e restrito. No fundo, o que fizemos com relação a essa teoria foi apenas nos apropriar de alguns elementos que seriam possíveis de serem utilizados de acordo com nossa realidade e objetivos de nossa Engenharia Didática.

Na fase experimental de nossa pesquisa montamos uma turma de alunos separada da turma regular e em horário oposto, pois, dessa forma, entendemos que há mais possibilidades de que a coleta e a análise dos dados empíricos seja qualitativamente mais consistente pelo

---

[6] BALACHEFF, N. Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de college. 1988. Tese (Doutorado), Universidade J. Fourier, Grenoble, 1988.

fato de que podemos dar mais atenção ao experimento como um todo e em particular para as produções dos alunos. Assim, claro, necessitamos da disponibilidade de tempo e do interesse dos alunos. Com essa escolha, nos pareceu impraticável fazermos uma Engenharia Didática completa para todas as quádricas. Diante dessas possibilidades e limites, optamos em fazer uma Engenharia Didática completa (todas as fases da metodologia) apenas para o caso do estudo dos paraboloides elípticos padrão. De maneira mais específica, na fase de análise preliminar nos voltamos para todas quádricas não cilíndricas e não degeneradas e superficialmente para as cônicas, porém, para as demais fases de nossa Engenharia Didática ficaram restritas aos paraboloides elípticos. Entendemos que com essas escolhas o estudo completo da Engenharia Didática para os paraboloides elípticos padrão serve de base para o estudo das demais quádricas. Como fruto desse estudo elaboramos duas Sequências Didáticas sendo uma mais ampla e que trata de todas aquelas quádricas (Apêndice A) e outra mais específica e que trata destes paraboloides (261). Na fase de experimentação usamos esta Sequência.

Justificamos que privilegiamos os paraboloides elípticos padrão em nossa escolha pelo fato de que esse objeto é o mais recorrente dentro dos Cálculos e, além disso, é uma boa representação de uma antena parabólica objeto que, conforme sabemos, é de interesse particular dos graduandos do curso de Engenharia de Telecomunicações (curso dos alunos colaboradores da pesquisa).

4 ANÁLISES PRELIMINARES

Nesta seção trataremos das análises preliminares sendo que elas se voltaram às dimensões epistemológica, cognitiva, didática e, perpassando por elas, a dimensão semiótica segundo a TRRS. A sua organização foi feita da seguinte forma:[1]

- Revisão da bibliografia (subseção 4.1) em que abordamos a dimensão didática;
- análise/discussão das *cônicas* não degeneradas baseada na TRRS (subseção 4.2). Essa subseção está dividida em quatro partes: (1) variáveis visuais (subseção 4.2.1); (2) registros simbólicos e suas unidades significantes correspondentes (subseção 4.2.2); (3) registros em língua natural (subseção 4.2.3); (4) articulações/correlações entre registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural (subseção 4.2.4). Em (1), (2), (3) e (4) abordamos a dimensões epistemológicas e cognitivas e em (3) ainda abordamos a dimensão didática;
- análise/discussão das *quádricas não cilíndricas e não degeneradas* baseada na TRRS (subseção 4.3). Essa subseção está dividida em quatro partes: (1) variáveis visuais (subseção 4.3.1 até 4.3.4.9); (2) registros simbólicos e suas unidades significantes correspondentes (subseção 4.3.5); (3) registros em língua natural e *algumas* articulações/correlações entre registros (subseção 4.3.6); (4) articulações/correlações (*estudo mais aprofundado*) entre registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural (subseção 4.3.7). Em (1), (2), (3) e (4) abordamos a dimensões epistemológicas e cognitivas e em (3) ainda abordamos a dimensão didática.

Depois de realizado as análises preliminares, segundo o quadro teórico que adotamos, concebemos que o ensino e a aprendizagem das quádricas necessita da abordagem dos registros cartesianos, simbólicos e em língua natural e, com isso, consideramos as dimensões epistemológica, cognitiva e semiótica subjacentes aos objetos em estudo. Além disso, especificamente para nossos objetos em estudo, nos pareceu que a dimensão didática presentes nos livros e Teses e Dissertações exige

[1] Conforme dissemos e justificamos na p. 137, na fase de análise preliminar nos voltamos para todas quádricas não cilíndricas e não degeneradas e superficialmente para as cônicas. Já as demais fases de nossa Engenharia Didática ficaram restritas aos paraboloides elípticos.

maior atenção a esses aspectos.

4.1 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

Como parte necessária de nossa Pesquisa Científica, fizemos uma Revisão da Bibliografia com o objetivo de verificar se as superfícies quádricas já tinham sido pesquisadas segundo a TRRS principalmente no diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Do ponto de vista da dimensão didática, essa revisão é parte das análises preliminares de nossa Engenharia Didática.

Para contemplar tal objetivo, nossas fontes de dados, que especificaremos detalhadamente nessa seção, foram três estudos do tipo *estado da arte*, o banco de Teses e Dissertações da CAPES, o ENEM de 2010 e de 2013 e, ainda, os principais periódicos da área. Com isso, nossa pesquisa abrangeu o período de 1990 até julho de 2015.

Os estados da arte que encontramos e que apontam as pesquisas brasileiras que trabalham com a TRRS foram os seguintes: Colombo, Flores e Moretti (2008)[2], Brandt e Moretti (2014) e Ferreira, Santos e Curi (2013).

Em Colombo, Flores e Moretti (2008) são analisadas Teses e Dissertações realizadas no Brasil no período de 1990 a 2005 em que a TRRS é o principal fundamento em suas investigações. Os dados coletados são provenientes de pesquisas on-line em que se buscou o banco de Teses e Dissertações da CAPES e o banco de Teses EduMat do Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática (CEMPEM) da Unicamp. Algumas pesquisas, dos quais os autores desse estado da arte tinham conhecimento, não constavam nos citados bancos de Teses e Dissertações e, por isso, também se pesquisou diretamente alguns programas de pós-graduações. Chegou-se, então, nas seguintes instituições pesquisadas: PUC/SP; UFSC; UNICAMP; UFMS; FEUSP; Universidade do Vale do Itajaí; UEL; UNB. Os dados, que se encontram nos anexos do artigo dos citados pesquisadores, foram organizados em forma de quadro que possui os seguintes elementos: ano de publicação; nível de pós-graduação (mestrado ou doutorado); autor; temática/objetivos; título; instituição/programa de origem; orientador. Como resultado, chegou-se ao total de 30 trabalhos sendo 6 na década de 90 e, na década seguinte, 24 trabalhos. Frente à análise dos dados, Colombo, Flores e Moretti (2008) concluem que, no período analisado, houve

[2] Trata-se de parte das reflexões presentes em Colombo (2008).

> [...] um interesse crescente na utilização da noção dos registros de representação semiótica como forma de investigar os problemas de aprendizagem da matemática, apontando alternativas concretas para o ensino. Isso porque a maioria das investigações tinha como temática principal o processo de ensino-aprendizagem de conteúdos voltados seja para o Ensino Fundamental, seja para o Ensino Médio ou, ainda, para cursos de formação de professores. (p. 49).

Em Brandt e Moretti (2014) investigaram-se as pesquisas existentes no Brasil que foram produzidas entre 2006 a 2009 no campo da Educação Matemática que se valeram da TRRS para responder suas problemáticas. Para tanto, recorreram aos trabalhos disponibilizados *on-line* tais como Teses e Dissertações presentes no banco de Teses e Dissertações da CAPES e em programas de pós-graduação, comunicações científicas apresentados em eventos e, ainda, artigos publicados em periódicos. Nesse estudo, foram analisados 56 trabalhos sendo 25 dissertações, 4 teses, 20 comunicações orais e 7 artigos.[3] Para efeitos de síntese, organizamos o Quadro 4.1 seguir em que constam os eventos, periódicos e programas de pós-graduações procurados por Brandt e Moretti (2014).

Quadro 4.1 – Fonte de dados de Brandt e Moretti (2014)

Eventos	EBRAPEM, ENEM , Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação (PUC/RS), ANPED Jornada de Iniciação Científica e Tecnológica (UNIBAM/SP), Encontro Gaúcho de Educação Matemática (Ijuí/RS), Seminário de Avaliação da Pesquisa da Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (UFPA), Encontro Paraense de Educação Matemática (UFPA), Congresso Iberoamericano de Educación Matemática (UFPA), Encontro Paranaense de Educação Matemática (UNICENTRO/PR)

[3]Os títulos desses 56 trabalhos estão no fim do próprio artigo de Brandt e Moretti (2014).

Periódicos	Synergismus scyentifica - Revista do Ensino, Pesquisa e Extensão (UTFPR/Pato Branco), Revemat - Revista Eletrônica de Educação Matemática (UFSC), Site do Centro de Educação da UFSC, Revista Científica Diálogos e Saberes – Fundação de Filosofia, Ciências e Letras de Madaguari (FAFIMAN), Inter Science Place – Revista Científica internacional, BOLEMA – (UNESP/Rio Claro), Zetetiké (Cempem/FE/UNICAMP)
Programas de Pós-Graduação	Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica (UFSC), Programa de Pós-Graduação em Educação (UFPR), Programa de Pós-Graduação em Educação (FE/UNICAMP), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA), Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática (PUC/SP), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL/PR)

Fonte: Brandt; Moretti (2014)

Diante dessa pesquisa, Brandt e Moretti (2014) entendem que

> os resultados parciais encontrados nos revelam um crescimento significativo de pesquisas que buscam essa teoria como fonte de interpretação e análise dos mais diversos problemas relacionados às preocupações em educação da matemática. (p. 23)

Ainda destacamos o trabalho de Ferreira, Santos e Curi (2013) que expõem um levantamento/mapeamento de Teses e Dissertações presentes no portal da CAPES e que foram produzidas durante o período de 2002 a 2012. Nesse levantamento, em que foi usado como parâmetro (descritor) de busca o referencial teórico Raymond Duval, foram encontrados 80 trabalhos. Como fruto dessa pesquisa foi organizado uma planilha em que constavam, para cada uma das 80 Teses/Dissertações, os seguintes dados: autor; título; ano de publicação; resumo; instituição/programa de origem; nível de pós-graduação da pesquisa (mestrado, mestrado profissional ou doutorado); orientador; foco temático; linha de pesquisa (sugeridas pelos autores); objetivos;

referencial teórico; metodologia; resultados; contribuições.[4]

Nos três estudos do tipo estado da arte que citamos nessa seção, em que foram pesquisados trabalhos até 2012, não consta nenhum trabalho que trata das superfícies quádricas no enfoque que pretendemos em nossa tese.

Com o objetivo de investigar pesquisas ainda mais recentes, demos sequência a nossa revisão bibliográfica e, dessa forma, analisamos os títulos, os resumos e as palavras-chaves de pesquisas de doutorado e mestrado presentes no banco de Teses e Dissertações da CAPES. O período selecionado para essa busca foi de 2010 a 1 de julho de 2015 e a opção de busca foi “pesquisa básica". Inicialmente digitamos no campo “assunto"a expressão *gráfico de superfícies*[5] e encontramos 12 registros sendo que apenas o de Rodrigues (2012) tratou do ensino de um tipo particular de superfície, as esféricas.

Ao digitarmos no campo “assunto"a expressão *teoria dos registros de representações semióticas* encontramos 14 registros sendo que apenas o já citado trabalho de Rodrigues (2012) estudou as superfícies.

Na busca em que digitamos a expressão *gráficos em* R^3 encontramos 3 registros sendo que apenas o de Monteiro (2011) tratava do ensino desses gráficos.

Quando escolhemos como “assunto"a expressão *superfícies quádricas* encontramos 2 registros. Entre eles, apenas o de Mineiro (2011) voltou-se para o ensino das superfícies quádricas.

A opção pela expressão *Raymond Duval* nos levou a 28 registros e, dentre eles, apenas, novamente, o de Mineiro (2011) trata do ensino das superfícies quádricas. Por fim, ainda digitamos *esboço de superfícies* e, a seguir, *gráficos tridimensionais.* No primeiro caso foram encontras 3 registros e, no segundo, 10 registros. Nenhum desses registros foi ao encontro dos propósitos de pesquisa de nossa Tese ou seja, o ensino das superfícies quádricas com a TRRS.

Em síntese, na citada busca que fizemos junto ao banco de Teses e Dissertações da CAPES encontramos os trabalhos de Rodrigues (2012), Monteiro (2011) e Mineiro (2011) que nos chamaram a atenção. Porém,

[4]A primeira autora da citada pesquisa gentilmente nos enviou essa planilha por *e-mail.* Nessa planilha estão organizados de forma detalhada os dados pesquisados. No artigo, possivelmente em função dos recortes necessários, não há tanto detalhamento e os dados são expostos de maneira mais objetiva. Na ocasião o *e-mail* usado por essa pesquisadora foi fernanda.aparecida.f@gmail.com.

[5]Na época dessa pesquisa ao digitarmos no campo assunto a expressão *gráfico de superfícies* o site pesquisava tanto a expressão *gráfico* quanto *superfícies.* Se digitássemos a expressão *gráfico-de-superfícies* (com hífen) o site buscaria a sentença inteira.

entendemos que nenhum desses trabalhos inviabiliza nossa pesquisa e, inclusive, eles podem contribuir com nossos estudos.

Analisando a pesquisa de Rodrigues (2012), vemos que sua pesquisa não estudou todas as superfícies quádricas que pretendemos trabalhar tendo se focado nas superfícies esféricas. Mesmo diante das interessantes contribuições desse trabalho, nossa proposta almeja ser um estudo mais global que possibilite discutir as semelhanças e diferenças entre os diferentes tipos de quádricas no que tange aos registros cartesianos, em língua natural e simbólicos.

Já os estudos de Monteiro (2011) se voltaram ao estudo das retas e planos que são objetos que não estudaremos em nossa Tese.

Mineiro (2011) recorreu a um "modelo de representação tridimensional". Para obter esse modelo, usou-se como estratégia imprimir algumas curvas de nível da superfície e, a seguir, elas são dispostas por hastes de forma a representar o objeto tridimensionalmente. Mesmo que a teoria de Duval tenha sido citada como referencial desse trabalho, entendemos que a abordagem proposta não privilegiou a Interpretação Global de Propriedades Figurais. Não pretendemos aqui analisar os limites e possibilidades de tal modelo e nos limitaremos a dizer que do ponto de vista da abordagem que nos propomos a trabalhar, pensamos que a sequência didática proposta em Mineiro (2011) se focou nos registros figurais com o uso do modelo de representação tridimensional e não tanto nas transformações internas e, sobretudo, externas aos diferentes registros. Por isso, pensamos que essa pesquisa não impede a nossa.

Dando sequência a pesquisa bibliográfica, analisamos o ENEM de 2010 e de 2013. No primeiro evento, foram analisadas todas as palestras, mesas redondas, conferências e, ainda, as comunicações científicas dos eixos temáticos "educação matemática no ensino superior"e "processos cognitivos e linguísticos". No ENEM de 2013, foram analisados todas as palestras, mesas redondas, comunicações e relatos de experiência. Em toda essa busca lemos os títulos dos trabalhos e, por vezes, abrimos os trabalhos e lemos o resumo sendo que nenhuma das pesquisas tratou de superfícies.

Por fim, na data de 7 de julho de 2015 pesquisamos os seguintes periódicos: BOLEMA (UNESP/Rio Claro); ZETETIKÉ (CEMPEM/FE/UNICAMP); REVEMAT (UFSC); Alexandria (PPGECT/UFSC); Educação Matemática Pesquisa (PUC/SP); Acta Scientiae (PPGECIM/ULBRA); Praxis Educativa (PPGE/UEPG); Revista Paranaense de Educação Matemática (GPEMCAM/GEMTIC/UEL); Contra pontos (UNIVALI); Perspectivas da Educação Matemática (PPGEduMat/UFMS). Recorremos à função eletrônica de busca disponibilizada pelos periódicos em que se podem pesquisar os artigos por conteúdos e, dessa forma, digitamos no campo “pesquisa"os seguintes termos: gráficos; superfícies; superfícies quádricas; esboço; Teoria dos Registros de Representações Semióticas; Raymond Duval. Particularmente com relação ao periódico Perspectivas da Educação Matemática o sistema de busca eletrônica por conteúdos não pesquisa as edições antes de 2014. Nesses casos, lemos todas as edições. Já o periódico Revista Paranaense de Educação Matemática não possui o referido sistema de busca eletrônica para nenhuma edição e, por isso, lemos todas as edições. Em toda a pesquisa examinamos os títulos dos trabalhos e, quando julgamos conveniente, lemos o resumo.

Nesses periódicos encontramos o artigo de Goulart e Dias (2013) que analisam a forma como alunos e professor de uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana/BA concebem, em aulas de Geometria Analítica, aspectos relativos à aquisição, à construção e à interpretação dos sentidos ou significados ali produzidos ou expostos. Isso é feito, porém, sem o enfoque da TRRS de Duval. Também encontramos o artigo de Lemke e Karrer (2012) que trata de retas e planos no R^3 na perspectiva da TRRS. Esse artigo indicava ter sido produzido a partir da dissertação de Lemke (2011) e, por isso, buscamos esse trabalho. Porém, a Dissertação também tratou especificamente de retas e planos e, por isso, esses trabalhos não inviabilizam o nosso. Ainda encontramos Mota e Laudares (2013) que, privilegiando o tratamento gráfico, tratam de planos, cilindros e superfícies quádricas tendo como referencial teórico o modelo de Van Hiele. Como vemos esse trabalho não teve como referencial a TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, pois segunda esse teoria a aprendizagem é integrativa e, dessa forma, não privilegia o tratamento gráfico nem outro qualquer.

Em nosso caso, buscamos estar em sintonia com a TRRS principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Além disso, em nossas análises usamos as operações cognitivas de tratamento e conversão articuladas as consistentes e bastante categorizadas Funções Discursivas propostas por Duval para analisar a *aprendizagem* dos alunos e, consequentemente, o potencial de nossa Sequência de Ensino.

Outro ponto que diferencia nossa pesquisa das que aqui tratamos é que com o nosso referencial teórico buscamos identificar e delimitar as oposições qualitativas presentes nas representações semióticas das superfícies em questão e, ainda, fazer as correlações possíveis entre as unidades significantes simbólicas com as variáveis visuais. Assim, é feito a coordenação entre as unidades significantes e são realizadas as conversões. Outro diferencial é que durante o processo de ensino e aprendizagem pretendemos que os alunos entendam essa coordenação de forma global e não apenas restrita a apenas uma das superfícies. No diz respeito à parte informatizada, cabe ainda dizer que Mota e Laudares (2013) usaram o *software winplot*[6] enquanto nós escolhemos o Geogebra por entender que este *software* tem potencial para que se trabalhe em sintonia com os pressupostos da TRRS (na página 126 detalharemos esse potencial).

Levando em consideração a pesquisa bibliográfica que fizemos não encontramos impedimento para a nossa pelo fato de que buscamos fazer uma pesquisa que trate das superfícies quádricas na perspectiva da TRRS principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. Abordagem essa não presente nos trabalhos que aqui tratamos. Por isso, pretendendo contribuir para o debate, realizamos esta pesquisa.

4.2 ANÁLISE DAS CÔNICAS BASEADA NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Sabemos que a interseção de uma quádrica com um plano define uma cônica (elipse; hipérbole; parábola; cônicas degeneradas - o conjunto vazio; um ponto; uma única reta; um par de retas paralelas; um par de retas concorrentes). Por isso, para discutirmos as interseções das superfícies quádricas é necessário ao menos um breve estudo das cônicas não degeneradas (elipses; hipérboles; parábolas) tendo como referencial teórico a TRRS. Neste estudo, feito nesta subseção, trataremos apenas das cônicas mais importantes que, conforme sabemos, são as do tipo não degeneradas. Com isso, ao dizermos o termo cônicas nesta seção estão nos referindo apenas as não degeneradas. Com essa convenção, simplificaremos a comunicação da Tese.

Contudo, nosso objetivo não é fazer um estudo extenso das cônicas. O que pretendemos é apenas analisar/discutir algumas questões semióticas desses objetos que, mais a frente, estarão presentes no estudo das quádricas. Adiantamos que nos apropriamos das discussões

[6] A versão do Geogebra 3-D não estava disponível no momento da pesquisa de Mota e Laudares (2013).

de Moretti (2003).

Inicialmente trataremos de maneira mais isolada os seguintes registros: cartesianos; simbólicos; em língua natural. Depois, trataremos as correlações/articulações entre entre esses registros. Assim, esta subseção está organizada da seguinte maneira:

- Análise/discussão de *algumas* variáveis visuais (subseção 4.2.1);
- análise/discussão dos registros simbólicos e suas unidades simbólicas correspondentes (subseção 4.2.2);
- análise/discussão e propostas de registros em língua natural e *apresentação* das correspondentes unidades significantes simbólicas e variáveis visuais (subseção 4.2.3);
- análise/discussão das articulação/correlações (estudo mais aprofundado) entre os registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural (subseção 4.2.4).

Inicialmente sugerimos que os Quadros da subseção 4.2.4 (p. 164) sejam vistos. Neles, estão os correspondentes registros cartesianos, simbólicos e em língua natural das cônicas.

4.2.1 VARIÁVEIS VISUAIS DAS CÔNICAS

Nesta subseção analisaremos/discutiremos *algumas* variáveis visuais das cônicas.

Inicialmente consideraremos que a posição desses objetos em relação ao sistema cartesiano é uma variável visual que assume três valores: padrão, transladada e rotacionada. Diferenciamos esses valores a partir da posição dos *eixos de simetria* em relação aos eixos coordenados e da posição do centro/vértice em relação à origem do sistema cartesiano.

É necessário, portanto, lembrar algumas questões figurais provenientes da simetria. Em primeiro lugar, no que tange quantidade de eixos de simetria, as parábolas têm um eixo de simetria, as hipérboles e as *elipses alongadas* (eixos com medidas diferentes[7]) têm dois e as elipses do tipo circunferências têm infinitos eixos de simetria que são todas as retas do *feixe de retas* que contêm centro da circunferência.[8]

[7] Os eixos da elipse (maior e menor) são segmentos de reta e os eixos de simetria da elipse são retas.

[8] Usaremos o termo *feixe de retas e feixe de planos.* Trata-se do conjunto de todos os objetos (retas ou planos) que possuem uma propriedade comum. Para ter mais detalhes ler Camargo e Boulos (2005, p. 199).

O centro das elipses (alongadas ou do tipo circunferência) e das hipérboles é determinado pela interseção entre seus eixos de simetria. No caso das parábolas, a interseção dessa curva com o seu eixo de simetria determina o vértice. Feito essa breve revisão, os quadros a seguir diferenciam as posições padrão, transladadas e rotacionadas.

Quadro 4.2 – Cônicas: posições padrão

Tipo de cônica	**Posição padrão**
Elipses alongadas *padrão*	- Os eixos de simetria coincidem com os eixos coordenados.
Circunferências *padrão*	- O centro coincide com a origem.
Hipérboles *padrão*	- Os eixos de simetria coincidem com os eixos coordenados.[9]
Parábolas *padrão*	- O eixo de simetria coincide com um dois eixos coordenados; - o vértice coincide com a origem com sistema cartesiano.

Fonte: O autor

Quadro 4.3 – Cônicas: posições transladadas

Tipo de cônica	**Posição transladada**
Elipses alongadas *transladadas*	- Os eixos de simetria são paralelos (coincidentes ou distintos)[10] com os eixos coordenados;[11] - o centro não coincide com a origem.
Circunferências *transladadas*	- O centro não coincide com a origem.

[9]No Quadro 4.2, que trata das posições padrão, há as seguintes consequências imediatas: o centro das elipses alongadas ($a \neq b$) e das hipérboles na posição padrão coincidem com a origem; dois dos infinitos eixos de simetria da circunferência coincidem com os eixos coordenados.

[10]No que diz respeito a paralelismo de retas seguiremos a definição de Dolce e Pompeo (2005). Para eles, retas paralelas podem ser coincidentes ou distintas. Logo, ao dizermos apenas retas paralelas estamos incluindo essas duas possibilidades. Se quisermos nos referir a uma delas diremos *retas paralelas distintas* ou *retas paralelas coincidentes*.

[11]Paras as elipses, circunferências e hipérboles nas posições transladadas não pode ocorrer o caso em que os dois eixos de simetria sejam ao mesmo tempo paralelos coincidentes com os dois eixos coordenados. Se isso acontecer teremos a posição padrão.

Hipérboles *transladadas*	- Os eixos de simetria são paralelos (coincidentes ou distintos) com os eixos coordenados; - o centro não coincide com a origem.
Parábolas *transladadas*	- O eixo de simetria é paralelo (coincidente ou distinto) com um dois eixos coordenados; - o vértice não coincide com a origem com sistema cartesiano..

Fonte: O autor

Quadro 4.4 – Cônicas: posições rotacionadas

Tipo de cônica	**Posição rotacionada**
Elipses alongadas, hipérboles e parábolas *rotacionados*	Em relação aos eixos coordenados, há rotação dos(s) eixo(s) de simetria ou, em outros termos, quando os(s) eixo(s) de simetria não são paralelos aos eixos coordenados.

Fonte: O autor

No caso das circunferências não falaremos em posição rotacionada.

Há ainda outras considerações. No caso das elipses, tomaremos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos e vemos que ela assume dois valores visuais que são os seguintes: os dois eixos são diferentes (*elipses alongadas em* α); os dois são iguais (*circunferência com* $R = R_0$). Para as *elipses alongadas em* α que estão na posição padrão ainda usaremos como variável visual posição do eixo maior (contido em α) em relação aos eixos coordenados. Essa variável assume dois valores (no sistema cartesiano xy o eixo maior está em y ou em x). Já em *circunferência com* $R = R_0$ consideraremos a variável visual tamanho do raio que assume infinitos valores.

Para as hipérboles consideraremos a posição do eixo de simetria que intercepta a hipérbole em relação aos eixos coordenados como variável visual e, na posição padrão, há dois valores (no caso do sistema cartesiano xy esse eixo está em x ou em y).

Para as parábolas, tomaremos as seguintes variáveis visuais: a posição do eixo simetria da parábola em relação aos eixos de coordenados; o semieixo determinado pela projeção ortogonal dos pontos da parábola sobre seu eixo de simetria. Na posição padrão, a aquela variável possui dois valores (no sistema cartesiano xy o eixo de simetria coincide com o eixo x ou com o eixo y) e esta possui dois valores para as parábolas abrindo no sentido positivo (são os semieixos y_+ ou x_+) e dois valores para as parábolas abrindo no sentido negativo (são os semieixos y_- ou x_-).

4.2.2 REGISTROS SIMBÓLICOS DAS CÔNICAS PADRÃO E SUAS UNIDADES SIGNIFICANTES SIMBÓLICAS

Sabemos que as equações das cônicas podem ser expostas de várias formas, mas que algumas permitem evidenciar mais explicitamente as unidades significantes simbólicas *básicas* que se articulam/correlacionam com as variáveis visuais que queremos chamar a atenção. Chamaremos essas formas de *básicas* e preferencialmente as usaremos. O uso do adjetivo básico, porém é optativo ou conforme o entendimento pode ser substituído por outro como o clássico termo *canônico*.

Nesta subseção analisaremos/discutiremos os registros (ou equações) *básicas* simbólicos(as) das elipses, hipérboles e parábolas nas posições padrão e suas respectivas unidades significantes simbólicas básicas. Para tanto, é necessário o (re)conhecimento do conjunto/combinação dessas unidades e, por isso, recorreremos as oposições qualitativas (as semelhanças e diferenças) entre elas. Porém, as articulações/correlações com as variáveis visuais correspondentes serão feitas apenas na subseção 4.2.3 e 4.2.4.

Nos três quadros seguintes, em que resumimos tais questões algébricas, considere que p, a, b e R são números reais positivos e que as variáveis são x e y. Iniciaremos, a partir do Quadro 4.5, com as elipses padrão.

Quadro 4.5 – Unidades significantes simbólicas das elipses padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**[12]	**Outro membro da equação**
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a<b)$ $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1(a=b=R)$	$(+1)$	2 termos quadráticos com sinais iguais e positivos.[13]

Fonte: O autor ,mbljvm

No caso das elipses é semioticamente importante à relação de ordem entre os denominadores das equações básicas. Observe que nas

[12] Não importa se esse é o primeiro ou o segundo membro da equação. A opção em dizer "um dos termos da equação" é apenas para deixar mais genérica a caracterização das unidades simbólicas da equação.

[13] Ao dizermos "termo quadrático com sinal positivo/negativo" queremos dizer que o coeficiente desse termo é positivo/negativo. De forma análoga, "termos quadrá-

duas primeiras equações básicas do quadro anterior os denominadores são diferentes ($a^2 \neq b^2$) já na terceira equação os denominadores são iguais. Quando os denominadores forem diferentes, também é importante saber que variável possui o maior denominador. Na primeira equação, o maior denominador está sobre de x^2 e na segunda o maior denominador está sobre y^2.

Se multiplicarmos essa equação básica por (-1) claro que determinamos uma equação tal que um dos membros há dois termos quadráticos com mesmo sinal (e negativos) e no outro membro há apenas o número -1. Nesse caso, a equação não será chamada de básica.

A partir do Quadro 4.6 trataremos das hipérboles padrão.

Quadro 4.6 – Unidades significantes simbólicas das hipérboles padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	(+1)	2 termos quadráticos sendo 1 com sinal e positivo e 1 com sinal negativo.

Fonte: O autor

Para as equações básicas das hipérboles é importante, do ponto de vista semiótico, saber qual dos termos quadráticos tem coeficiente com sinal positivo. Note que na primeira equação esse termo tem variável x^2 é na segunda tem variável y^2.

No caso das elipses e hipérboles padrão as raízes quadradas dos denominadores permitem discutir semioticamente questões como cônicas de rotação e hipérbole equilátera. Porém, não temos como interesse discutir essas questões pelo fato e que elas fogem do interesse de estudo para o enfoque que daremos para as quádricas.

A partir do Quadro 4.7 trataremos das parábolas padrão.

Quadro 4.7 – Unidades significantes simbólicas das parábolas padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$x^2 = 4py$ $x^2 = -4py$ $y^2 = 4px$ $y^2 = -4px$	1 termo linear com coeficiente positivo ou negativo	1 termo quadrático com coeficiente +1.

Fonte: O autor

Quando as equações das parábolas estiverem na forma básica (Quadro 4.7) é importante sabermos qual variável é a linear e qual o sinal do coeficiente desse dessa variável.

Caso a equação esteja numa forma tal que a variável linear está isolada, então é importante sabermos que variável é linear, porém, nesse caso devemos saber o sinal do coeficiente do termo quadrático.

Em ambas as formas de apresentação da equação o estudo do sinal que aqui fizemos é equivalente a analisar se os sinais do termo linear e quadrático são iguais ou diferentes.

Justificamos nossa escolha na forma de apresentação dada no Quadro 4.7 por uma questão de costume em escrever da forma que escrevemos e também por preocupações com a congruência semântica.

Note ainda que em cada equação dos quadros anteriores não há repetição de variáveis. Adiantamos que isso também acontecerá nas quádricas não cilíndricas e não degeneradas padrão.

4.2.3 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS CÔNICAS: ANÁLISES, PROPOSTAS E *APRESENTAÇÃO* DAS ARTICULAÇÕES

Tendo como base que os registros em língua natural são importantes para a aprendizagem em matemática, buscamos a literatura especializada para analisarmos/discutirmos os termos usados para as cônicas não degeneradas e para as superfícies quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Daí, elaboramos propostas de registros em língua natural. No caso das cônicas, esse estudo será feito nesta subseção já para as quádricas o traremos na subseção 4.3.6 (p. 213).

No que tange as escolhas que fizemos, nossa pesquisa recaiu nos livros didáticos de Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007), pois em relação a outros livros clássicos que observamos os escolhidos nos pareceram ser os que mais desenvolveram registros em língua natural para as quádricas dentro perspectiva da TRRS.

Nossas análises/discussões dão indicativos de que os termos desses autores têm potencial para dizer algo dos objetos sob a forma de uma proposição matemática (*Função Apofântica*), para religar a outras proposições matemáticas de forma coerente (*Expansão Discursiva*) e realizar conversões, por isso, na perspectiva da TRRS, pensamos que eles podem trazer contribuições interessantes para a aprendizagem. Entretanto, por vezes eles possuem os seguintes problemas: a designação dos objetos não é consistente (*Função Referencial*) e geralmente não deixa explícitas correlações entre os registros em língua natural com unidades simbólicas e visuais; uso mais enfático apenas dos aspectos intuitivos; recurso de codificações em detrimento de conversões. Dessa forma, os aspectos semióticos e cognitivos podem ser comprometidos ou pouco explorados e, com isso, mesmo diante do citado potencial, podem surgir problemas na identificação dos objetos, além de comprometer os tratamentos e as próprias conversões que envolvam os registros em língua natural.

De qualquer forma, os termos que pesquisamos parecem recorrer, mesmo que nem sempre de forma explicita, a algumas variáveis visuais e a propriedades globais das figuras.

Apropriamo-nos de algumas contribuições desses autores para, mediante as possibilidades da Função Referencial, propormos o que chamaremos de registros *básicos* em língua natural. Justificamos o adjetivo *básico* por entender que nossas propostas de registros são elaboradas a partir de unidades significantes *básicas* do objeto. Nossas propostas escolheram variáveis visuais que pensamos expor propriedades globais da figura e, como contribuição, elas almejam as seguintes possibilidades: (1) criar designações linguísticas que não apresentem problemas de referência aos objetos e que possuam articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas; (2) explorar linguisticamente todas as diferentes posições de uma cônica/quádrica no sistema cartesiano; (3) a partir dos registros em língua natural, explorar de maneira imediata ao menos uma propriedade global da figura e por Expansões Discursivas explorar outras propriedades; (4) realizar conversões entre os registros em língua natural, cartesiano e simbólico. Assim, pode-se dar mais destaque aos aspectos semióticos e cognitivos presentes nos registros em língua natural sem, com isso, fazer com que um termo linguístico tenha apenas a função de codificação.

Cabe esclarecer que nossa intensão é que cada registro em língua natural contenha algumas e não todas as variáveis visuais do objeto. Do contrário, os registros seriam tediosos e nada práticos. Consequentemente, podem-se incluir outros elementos em nossa proposta ou, ainda, escolher outras variáveis diferentes das que escolhemos o que, inclusive, pode sugerir outros termos. Pensamos que estas escolhas dependerão dos interesses dos professores e dos alunos. Portanto, não pretendemos que nossos termos sejam absolutos e, assim, queremos apenas contribuir para o debate.

Acima de tudo, os registros devem estar em sintonia com propriedades globais da figura e, ao mesmo tempo, devem ter potencial para realizar conversões e contemplar as Funções Discursivas. Por isso, almejamos que nossas propostas sirvam não apenas para comunicar ou codificar os objetos.

Para a TRRS, a aprendizagem integrativa não se limita a apenas o estudo dos registros em língua natural e, por isso, a apropriação apenas desses termos não é o suficiente para esse tipo de aprendizagem. Além disso, o entendimento desses termos necessita que se tenham noções básicas das cônicas/quádricas.

Durante o processo de análises, percebemos que o estudo dos registros em língua natural dos elipsoides, hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides quádricas exige principalmente o estudo dos registros em língua natural das parábolas, hipérboles e elipses. Por isso, nossas análises e propostas de registros em língua natural foram feitas para essas cônicas e quádricas. Tendo como concepção o Princípio de Extensão de Caraça (1951), tentamos fazer com que um termo usado para um desses objetos fosse, na medida do possível, usado para as outros. Segundo esse princípio,

> [...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 1951, p. 10).

Visualmente veremos que tomamos *principalmente* as simetrias e interseções como variáveis visuais. Do ponto de vista algébrico, principalmente os termos lineares, quadráticos bem como os sinais de seus coeficientes foram tomados unidades significantes simbólicas correspondentes as variáveis visuais. As escolhas dessas variáveis e unidades, claro, nortearam a elaboração dos correspondentes registros em língua natural.

Na subseção seguinte iniciaremos nosso estudo com as parábolas.

4.2.3.1 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS PARÁBOLAS NAS POSIÇÕES PADRÃO

No estudo das parábolas no R^2 que estão nas posições padrão é comum usarmos os clássicos termos *parábola côncava para cima, para baixo, para direita e para esquerda* e correlacioná-los respectivamente aos registros simbólicos $x^2 = 4py$, $x^2 = -4py$, $y^2 = 4px$, $y^2 = -4px$.

Ainda recorremos aos registros cartesianos correspondentes.

Pensamos que os referidos termos são interessantes, pois visualmente e intuitivamente trazem propriedades globais que permitem correlacionar representações dos diferentes sistemas semióticos. Porém, vemos alguns problemas e limites neles.

Em primeiro lugar, ao correlacionar *parábola côncava para cima* com $x^2 = 4py$, por exemplo, supõe-se que o sistema cartesiano adotado é o canônico (eixo x na direção horizontal e com sentido para direita e eixo y na direção vertical e com sentido para cima). Se escolhermos outros sistemas cartesianos, suponha como exemplo mudar o sentido do eixo y, a mesma equação ($x^2 = 4py$) se corresponderá ao termo *parábola côncava para baixo* (e não mais para cima). Logo, as correlações desses registros em língua natural com os simbólicos são condicionadas ao sistema cartesiano adotado.

Além disso, para os casos em que a parábola é rotacionada em relação ao sistema cartesiano adotado pensamos que essa nomenclatura pode ser limitada.

Do ponto de vista de variável visual, o uso desses termos se apoia nos conceitos de convexidade. Com isso, surge a seguinte pergunta: o que significa convexidade? A partir de critérios geométricos, Camargo e Boulos (2005, grifo do autor, p. 317) distinguem que "[...] um conjunto é convexo se qualquer segmento de extremidades pertencentes a ele está nele contido, e côncavo no caso contrário, isto é, se existe um segmento que não satisfaz essa condição."No caso das elipses, parábolas e hipérboles esses autores nos convidam a notar que esses objetos dividem o plano em regiões[14] de tal forma que as regiões convexas, segundo a distinção por eles dada, contêm algum foco. Por isso, para as parábolas, a região que contém o foco é chamada de região focal da parábola ou região convexa determinada pela parábola e o conjunto que não contém o foco é chamado de região côncava determinada pela parábola. Os pontos das curvas nas pertencem a essas regiões.[15]

Dentro da perspectiva que discutimos, ao menos para as parábolas, côncavo e convexo são definições que andam juntas e, ainda nessa ótica, como se explicam os clássicos termos *côncavo para cima ou para baixo* usados nas parábolas? Como vemos o uso dos termos parábola côncava para cima ou para baixo, apesar de bastante usual pode ser mais complicado do que inicialmente a intuição parece dizer. Seu uso, portanto, necessita delimitar adequadamente a que se refere.

---

[14]Por uma questão de complexidade os autores usam argumentos intuitivos.

[15]Camargo e Boulos (2005) também definem essas ideias para as elipses e hipérboles.

Em Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007) e encontramos termos parecidos aos clássicos que já mencionamos no início desta subseção. Trata-se de termos semelhantes aos seguintes: *parábola que se abre (ou abrindo-se) para direita, para esquerda, para cima e para baixo.*[16] Da mesma forma que os termos *côncavo para cima, para baixo*, ... temos as mesmas contribuições, problemas e limites. Porém nestes casos, ainda há outro complicador, pois o que significa *que se abre*? Devemos admitir que são apenas códigos ou há mais potencial para o uso desses termos? Nesses livros, não encontramos explicações delimitadas nesse sentido e, por isso, supomos que para entendê-lo ou se recorre aos aspectos apenas intuitivos ou se remete a noção de distância. Porém, no segundo caso, a que distância nos referimos? Seria a distância entre dois pontos simétricos da parábola ou, para piorar, à distância dos pontos da parábola a um dos eixos coordenados? Neste caso, é fácil notar que dado um ponto pertencente à parábola à medida que ele que se afasta da origem ele aumenta a distância em relação aos dois eixos. Por isso, qual dos dois eixos coordenados nos referimos? Diante da não delimitação do que é o termo *que se abre* vemos que o uso apenas dos aspectos intuitivos para os termos aqui analisados geram dúvidas que podem inicialmente comprometer a Função Referencial e, subsequentemente, a Função Apofântica, a Expansão Discursiva e até as conversões.

Com o objetivo de ir além de apenas aspectos intuitivos partiremos para nossas propostas para o caso das parábolas padrão. Nesses casos, tomaremos duas variáveis visuais: o eixo de simetria da parábola; o semieixo determinado pela projeção ortogonal da parábola sobre seu eixo de simetria. Para a primeira variável visual, considerando que a equação está na forma básica, à unidade significante simbólica correspondente é a variável linear e para a segunda é o sinal do coeficiente dessa variável.[17]

Diante dessas considerações semióticas e cognitivas, incluindo aspectos intuitivos, para as parábolas padrão, propomos as seguintes convenções que chamaremos de registros básicos em língua natural: *parábola abrindo em* α_+*; parábola abrindo em* α_-. Nessas convenções, designamos que o eixo α é o eixo de simetria da parábola (por consequência da definição da parábola o foco e o vértice estão sobre esse

[16] Para ver os termos com mais detalhamento veja Leithold (1994, p. 892), Winterle (2000, p. 164), Anton (2002, p. 151) e Lehmann (2007, p. 129). Anton (2002, p. 235) ainda usa os seguintes termos: “[...] aberta na direção z negativa."

[17] Se preferirmos a segunda unidade significante simbólica correspondente pode ser verificar se os sinais dos coeficientes dos termos linear e quadrático são os mesmos ou não.

eixo) e, dessa forma, a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo α coincide com os pontos do semieixo α_+ ou do semieixo α_-. Com essas designações, temos as seguintes articulações/correlações:

Quadro 4.8 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para as parábolas padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Parábola abrindo em α_+.	- O eixo α é o eixo de simetria da parábola; - a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo α determina com os pontos do semieixo α_+.	- A variável linear é α; - o sinal do coeficiente de α é positivo.
Parábola abrindo em α_-.	- O eixo α é o eixo de simetria da parábola; - a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo α determina com os pontos do semieixo α_-.	- A variável linear é α; - o sinal do coeficiente de α é negativo.

Fonte: O autor

Na seção 4.2.4 (p. 164) explicaremos de maneira detalhada o Quadro anterior. Por ora, apenas apresentamos nossas propostas de registros em língua natural com as correspondentes unidades significantes simbólicas e variáveis visuais.

Conforme mostra o quadro anterior, nos apropriamos da expressão *abrindo*, usada semelhantemente por Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007). Justificamos essa apropriação por entender que se trata de uma expressão bastante intuitiva e, se for designada adequadamente, pode chamar a atenção para propriedades globais da figura. Portanto, o que fizemos foi apenas fazer uma convenção do termo *abrindo* que enunciasse a ideia de simetria e projeção. Além disso, pretendemos que ambiguidades acerca do uso desse termo sejam evitadas. Porém, conforme o interesse o termo *abrindo* pode ser suprimido de nossa proposta ficando com "parábola em α_+/α_-", ou até substituído por outro. Além disso, se o interesse for apenas se focar na questão da simetria, poderíamos dizer, por exemplo, *parábola com eixo α como eixo de simetria.* Com essa escolha teríamos um registro nada prático. Portanto, como vemos as convenções que adotamos subjacentes aos registros que propomos tornam-se práticas.

Do ponto de vista matemático, sabemos que há propriedades algébricas que permitem estudar as simetrias. Assim, de acordo com seus objetivos pedagógicos, o professor pode incluir esse tipo de análise nas atividades pedagógicas.

4.2.3.2 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS HIPÉRBOLES NAS POSIÇÕES PADRÃO

No estudo das hipérboles no R^2 que estão nas posições padrão, encontramos na literatura pesquisada termos semelhantes à *hipérbole com seu eixo transverso paralelo ao eixo x* (LEITHOLD, 1994),*hipérbole com o eixo real sobre o eixo dos x ou dos y* (WINTERLE, 2000) e *hipérbole com eixo focal ao longo (ou sobre) o eixo x ou y* (ANTON, 2002).[18]

Uma análise semiótica dos citados termos evidência que os termos “eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos x (ou y)"parecem que são pensados a partir da escolha desses eixos e dos focos como variáveis visuais. De todo modo, há unidades significantes que possibilitam correlações desses registros linguísticos com os registros cartesianos e simbólicos.

De maneira mais ampla, em o eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos α além da imediata posição desses eixos no sistema cartesiano, podemos estabelecer correlações com os registros simbólicos, pois nesse caso sabemos α^2 é a variável quadrática que tem coeficiente positivo. Como exemplo, em $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ como x^2 é a variável quadrática que tem coeficiente positivo, então linguisticamente podemos dizer *hipérbole com eixo real (ou focal ou transverso) sobre (ou ao longo) eixo dos x* e, no registro cartesiano, o eixo real e focal (obviamente também os focos) estão contidos no eixo x. Portanto, nesses termos temos possibilidades de delimitarmos designações que permitem conversões entre os registros simbólicos, em língua natural e cartesianos que inicialmente se central nos eixos citados e nos focos. Obviamente, a partir de expansões do discurso, podemos fazer outras conversões ou tratamentos.

Do ponto de vista semântico, se a intenção é chamar a atenção para o eixo focal ou os focos, é claro que os termos *eixo focal (e não real ou transverso) sobre eixo dos α* se mostram adequados. Já se a

[18]Para ver os termos com mais detalhamento veja Leithold (1994, p. 892), Winterle (2000, p. 195-196) e Anton (2002, p. 154-156).

intensão é chamar a atenção para o eixo de simetria que intercepta a hipérbole, então pensamos ser mais adequado semanticamente usarmos o termo *eixo transverso*. Por expansões discursivas, é claro que dado um desses termos pode-se inferir os conteúdos que o outro carrega.

Cabe lembrar que a forma da equação da hipérbole que geralmente usamos (equação básica) fornece de imediato à medida do semieixo transverso - basta extrair a raiz quadrada do denominador do termo quadrático com coeficiente positivo. Já para calcular a medida do semieixo focal precisamos de outros tratamentos simples. Por isso, para fazermos conversões que envolvam medidas, o uso do termo *eixo transverso (e não real ou focal)* é mais imediato.

Nos termos que pesquisamos, notamos ainda que as expressões *que se abre* usados nas parábolas não foram usadas para as hipérboles. Conforme discutimos, esses termos podem remeter a propriedades globais do objeto que, além de intuitivas, são visualmente interessantes. Por isso, pensamos em estender seu o uso para as hipérboles.

Assim, tentando articular aspectos intuitivos, delimitações formais e semióticas propomos o seguinte registro *básico* em língua natural para as hipérboles padrão: *hipérbole abrindo em* α. Nessa convenção o eixo α é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole (por consequência da definição da hipérbole, esse eixo contém os vértices, os focos e o eixo transverso). Com essas convenções, temos as seguintes articulações/correlações e significações:

Quadro 4.9 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para as hipérboles padrão

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade significante simbólica correspondente**[19]
Hipérbole abrindo em α.	- O eixo α é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole.	- A variável quadrática α^2 tem coeficiente positivo.

Fonte: O autor

Na seção 4.2.4 (p. 164) explicaremos de maneira detalhada o Quadro anterior. Por ora, apenas apresentamos nossas propostas de registros em língua natural com as correspondentes unidades significantes simbólicas e variáveis visuais.

Optamos em propor um registro que chame a atenção para a

[19] Estamos supondo que a equação está em uma das seguintes formas: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ou $-x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

variável visual relativa à simetria. Porém, conforme já dissemos também é interessante o registro *eixo focal sobre eixo dos α* se quisermos chamar a atenção para a variável visual eixo focal ou os focos. Entendemos apenas que nossa escolha parece evidenciar uma propriedade mais global da figura que é a questão da simetria.

4.2.3.3 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS ELIPSES NAS POSIÇÕES PADRÃO

Para as elipses no R^2 que estão nas posições padrão, encontramos na literatura pesquisada termos semelhantes à *elipse em que o eixo maior está sobre o eixo dos x ou dos y* (WINTERLE, 2000), *elipse com eixo maior (ou focos) ao longo (ou sobre) o eixo x ou y* (ANTON, 2002) e *elipse cujo centro está na origem e cujo eixo focal (ou maior) é coincidente com o eixo x ou y* (LEHMANN, 2007).[20]

Esses autores consideram a circunferência como um tipo de elipse[21], porém, optam em não usar os termos do parágrafo anterior para as circunferências.[22]

Além de explicitar propriedades globais da figura, do ponto de vista semiótico o termo *elipse com eixo maior (ou focos) ao longo (ou sobre) o eixo α* tem unidades significantes que permitem realizar conversões de forma bastante imediata e simples. Por isso, pensamos que são termos potencialmente proveitosos.

Para efeitos de comparação, cabe lembrar que a forma da equação da elipse que geralmente usamos ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) fornece de imediato à medida do semieixo maior - basta extrair a raiz quadrada do maior denominador dos temos quadráticos. Já para calcular a medida do semieixo focal precisamos de outros tratamentos simples. Por isso, para fazermos conversões que envolvam medidas, o uso o registro *elipse com eixo maior sobre o eixo α* é mais imediato do que quando usamos o termo *eixo focal sobre o eixo α.*

No R^3, na subseção 4.3.6.1 (p. 213) discutiremos registros em que alguns autores usam o termo *... alongado ...* para se referir a certos tipos de elipsoides. Veremos que por traz da definição desses termos estão questões semioticamente análogas as provenientes das elipses - a

---

[20] Para ver os termos com mais detalhamento veja Winterle (2000, p. 180), Anton (2002, p. 152-153) e Lehmann (2007, p. 148). Não encontramos contribuições de Leithold (1994) para as elipses.

[21] Ver Winterle (2000, p. 182), Anton (2002, p. 152) e Lehmann (2007, p. 182).

[22] Apoiados no Princípio de Extensão de Caraça (1951), estamos consideramos que a circunferência é um tipo de elipse.

comparação entre o tamanho dos eixos.

Tentando estender o uso do termo ... *alongado* ... para as elipses, propomos os registros básicos em língua natural do quadro seguinte. Neles, estamos supondo que o eixo α é o eixo que contém o eixo maior da elipse.

Quadro 4.10 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para as elipses padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**[23]
Elipse alongada em α.	- Os eixos maior e menor da elipse têm medidas diferentes; - e o eixo maior da elipse está contido no eixo coordenado α.	- Os denominadores dos dois termos quadráticos são diferentes; - entre os dois termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.
Circunferência com $R = R_o$	- Os eixos da elipse têm medidas iguais; - a medida do raio R é R_o.	- Os denominadores dos dois termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.

Fonte: O autor

Como consequência do Quadro anterior, o Quadro 4.17 (p. 170) trará, de forma mais separada, todas as possibilidades de articulações/correlações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em língua natural das elipses padrão. De qualquer forma, no sistema cartesiano xy, a variável visual que se refere à comparação entre o tamanho dos eixos assume dois valores (iguais ou diferentes) sendo que com ela diferenciamos elipses do tipo alongadas das que são do tipo circunferências. No caso das alongadas, há outra variável visual que é a posição do eixo maior e que também assume dois valores (o eixo maior está contido no eixo x ou no eixo y). No caso das circunferências, há ainda a variável visual medida do raio que assume infinitos valores.

Como exemplo, em $x^2/4 + y^2 = 1$ (os denominadores de x^2 e y^2 são diferentes; o maior denominador entre essas variáveis está sobre x^2) temos uma elipse alongada em x. Além disso, expandindo o discurso

[23] Estamos supondo que a equação está na seguinte forma: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

é possível saber que a medida do semieixo maior é $\sqrt{4} = 2$ unidades de comprimento (u.c). Na subseção 4.2.4 (p. 164), e de forma mais separada, traremos todas as possibilidades de articulações/correlações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em língua natural das elipses padrão.

Com alguns ajustes, pode-se propor o registro *elipse achatada em* α. Com isso, chegaríamos resultados semelhantes aos que propomos.

Por ser uma figura fechada, é claro que o termo *... abrindo ...* não faz sentido para as elipses e, por isso, não o usamos nesses casos. Ainda ressaltamos que a excentricidade[24] (e) também é uma variável visual importante, pois, com ela, podemos discutir o maior ou menor "alongamento" da elipse. Assim, conforme o interesse de estudo, podemos dizer "elipse alongada em α com $e = e_0$". No caso em que temos uma circunferência, como e=0, esse acréscimo é desnecessário. Seja como for, pode-se sempre fazer outros acréscimos conforme a conveniência.

4.2.3.4 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DAS PARÁBOLAS, HIPÉRBOLES E ELIPSES TRANSLADADAS E/OU ROTACIONADAS

Já designamos o que é o eixo α para as parábolas, hipérboles e elipses na posição padrão. No quadro a seguir, o acréscimo das aspas (') em α indica translação já o acréscimo de θ indica rotação (o sentido de rotação a convencionar pelo professor). O significado de α_+ e α_- com os citados acréscimos é análogo. Além disso, convencionaremos que para as parábolas $V(x_0, y_0)$ representa as coordenadas do vértice e para as elipses e hipérboles $C(x_0, y_0)$ representa as coordenadas do centro. Assim, o quadro a seguir apresenta os registros *básicos* em língua natural para o caso das posições padrão e também para os casos em que há transladadas e/ou rotação. Temos como base que a posição dessas figuras no sistema cartesiano é uma variável visual que assume os valores padrão, transladado, rotacionado e transladado/rotacionado. Com isso, os registros linguísticos que propomos para os casos transladados e rotacionados tentam incluir os correspondentes elementos algébricos que se relacionam a essas transformações.

Quadro 4.11 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para as parábolas, hipérboles e elipses padrão, transladadas e rotacionadas

[24] Camargo e Boulos (2005) ainda falam em *centralidade*.

Posição padrão	**Posição transladada**	**Posição rotacionada**	**Posição transladada e rotacionada**
Parábola abrindo em α_+ (ou em α_-).	Parábola abrindo em α'_+ (ou em α'_-) e $V(x_0, y_0)$.	Parábola abrindo em $(\alpha_+)_\theta$ (ou em $(\alpha_-)_\theta$).	Parábola abrindo em $(\alpha'_+)_\theta$ (ou em $(\alpha'_-)_\theta$) e $V(x_0, y_0)$.
Hipérbole abrindo em α.	Hipérbole abrindo em α' e $C(x_0, y_0)$.	Hipérbole abrindo em α_θ.	Hipérbole abrindo em α'_θ e $C(x_0, y_0)$.
Elipse alongada em α.	Elipse alongada em α' e $C(x_0, y_0)$.	Elipse alongada em α_θ.	Elipse alongada em α'_θ e $C(x_0, y_0)$.
Circunferência com $R = R_0$.	Circunferência com $R = R_0$ e $C(x_0, y_0)$.	Não convém.	Não convém.

Fonte: O autor

Como vemos, mediante algumas adaptações e/ou ampliações, tentamos estender nossas propostas de registros para as diferentes posições (padrão; transladada; rotacionada).

Como exemplo, analisaremos o caso da parábola de equação $(x-1)^2 = 4(y-2)$. Conforme sabemos, nesse caso temos as seguintes características: $V = (1, 2)$; o eixo de simetria é o eixo y' (paralelo ao eixo y e tem equação $x = 1$); a projeção ortogonal da parábola sobre o eixo y' coincide com os pontos do semieixo y'_+ (equação $x = 1; y \geq 2$). Com isso, o correspondente registro básico em língua natural é: "*parábola abrindo em* y'_+ *e* $V = (1, 2)$".

Conforme o interesse, algumas questões a respeito do eixo, como sua equação ou outro elemento, podem ser especificados entre parênteses logo após sua notação. Dessa forma, o exemplo anterior pode ser registrado da seguinte maneira: "*parábola abrindo em* y'_+ *(x=1;y*$\geq$ 2) *e* $V = (1, 2)$". Podemos ainda incluir outros elementos logo após o registro básico que propomos. Assim, nos casos em que as parábolas, elipses e hipérboles são obtidas pelas interseções com planos – questão recorrente no estudo as superfícies quádricas -, podemos fazer acréscimos como, por exemplo, "*hipérbole abrindo em* y', $V(x_0, y_0, z_0)$ e contida no plano de equação E".[25]

[25] Nos casos em que se deseja especificar as equações do plano e/ou da reta elas

4.2.4 ARTICULAÇÕES ENTRE OS REGISTROS GRÁFICOS, *BÁSICOS* SIMBÓLICOS E *BÁSICOS* EM LÍNGUA NATURAL

Considerando o estudo que fizemos a respeito das variáveis visuais (subseção 4.2.1), dos registros simbólicos e suas unidades simbólicas correspondentes (subseção 4.2.2) e dos registros em língua natural (subseção 4.2.3) das cônicas, nesta subseção analisaremos/discutiremos com mais profundidade articulações/correlações entre os registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural correspondentes para essas curvas.

Inicialmente, conforme mostra o quadro a seguir, trataremos do caso das parábolas padrão.

Quadro 4.12 – Articulações entre unidades significantes dos registros das parábolas padrão

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Parábola abrindo em α_+.	- O eixo α é o eixo de simetria; - projeção ortogonal da parábola sobre o eixo α determina os pontos do semieixo α_+.	- A variável linear é α; - o sinal do coeficiente de α é positivo.
Parábola abrindo em α_-.	- O eixo α é o eixo de simetria; - projeção ortogonal da parábola sobre o eixo determina os pontos do semieixo α_-.	- A variável linear é α; - o sinal do coeficiente de α é negativo.

Fonte: O autor

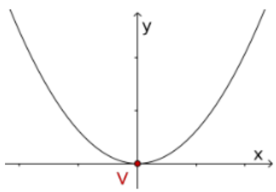
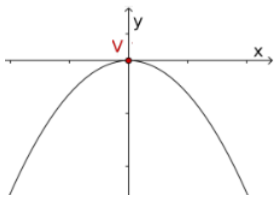
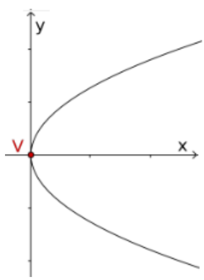
No sistema cartesiano xy a primeira variável visual assume dois valores (o eixo de simetria coincide com o eixo x ou com o eixo y) e a segunda também assume dois valores (semieixo y_+ ou x_+ para as parábolas que se abrem no sentido positivo e semieixo y_- ou x_- para as parábolas que se abrem no sentido negativo). Nesses casos, as correspondentes unidades significantes simbólicas consistem em identicar

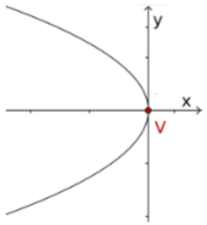
podem estar na forma que se julgar mais conveniente.

que variável é linear bem como o sinal de seu coeficiente. Como exemplo, para $x^2 = -4py$ (a variável linear é y e seu coeficiente é negativo) usaremos o registro parábola abrindo em y_- e, independente da posição do sistema cartesiano adotado, essa parábola terá o eixo y como eixo simetria e a projeção ortogonal dela sobre o eixo y coincide com os pontos do semieixo y_-.

Como consequência das convenções do Quadro anterior, o Quadro seguinte trará, de forma mais separada e incluindo todos os casos, as possibilidades de articulações/correlações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em língua natural das parábolas padrão.

Quadro 4.13 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de parábolas padrão

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Parábola abrindo em y_+.	$x^2 = 4py$
	Parábola abrindo em y_-.	$x^2 = -4py$
	Parábola abrindo em x_+.	$y^2 = 4px$

	Parábola abrindo em x_-.	$y^2 = -4px$

Fonte: O autor

A partir do Quadro seguinte trataremos das hipérboles padrão.

Quadro 4.14 – Articulações entre unidades significantes dos registros das hipérboles padrão

Registro básico em língua natural	**Variável visual**	**Unidade significante simbólica correspondente**
Hipérbole abrindo em α.	- O eixo α é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole.	- A variável quadrática α^2 tem coeficiente positivo

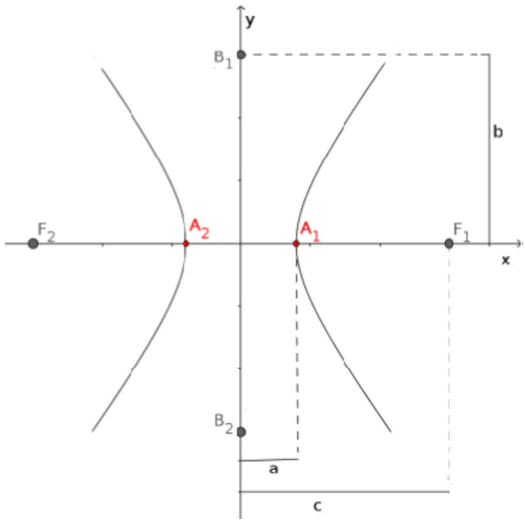
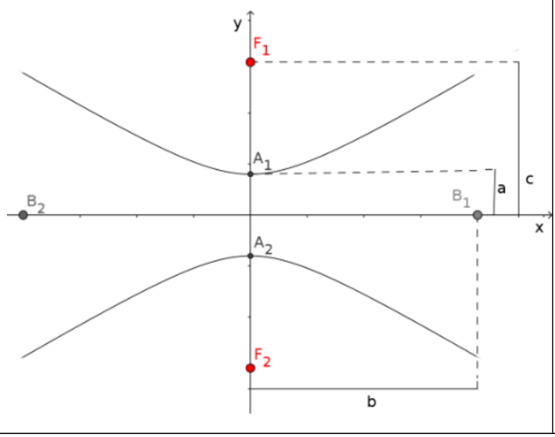
Fonte: O autor

No sistema cartesiano xy a variável visual do quadro anterior assume dois valores (o eixo de simetria que intercepta a hipérbole coincide com o eixo x ou com o eixo y). A unidade significante simbólica correspondente também assumi dois valores ($+x^2$ ou $+y^2$). Como exemplo, o registro básico em língua natural de $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ (a variável quadrática x^2 tem coeficiente positivo) é *hipérbole abrindo em* x e, com isso, o eixo x é o eixo de simetria que intercepta a hipérbole.

Além das implicações do quadro anterior, é imediato que a raiz quadrada do denominador da variável quadrática α^2 é numericamente à medida do semieixo transverso. Assim, podemos esboçar o gráfico dessa cônica.

Como consequência das convenções do Quadro anterior, o Quadro seguinte trará, de forma mais separada e incluindo todos os casos, as possibilidades de articulações/correlações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em língua natural das hipérboles padrão.

Quadro 4.15 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de hipérboles padrão

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Hipérbole abrindo em x.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	Hipérbole abrindo em y.	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Fonte: O autor

A partir do Quadro seguinte trataremos das elipses padrão.

Quadro 4.16 – Articulações entre unidades significantes dos registros das elipses padrão

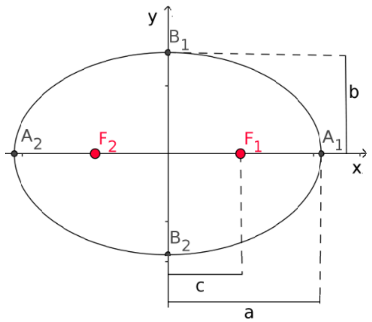
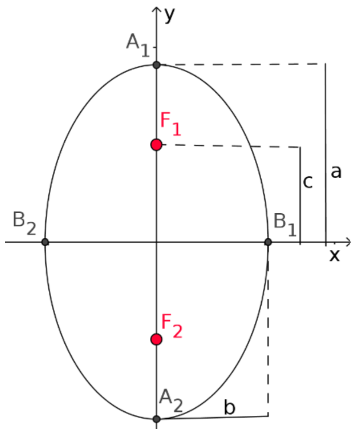
Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade significante simbólica correspondente**
Elipse alongada em α.	- Os eixos maior e menor têm medidas diferentes; - e o eixo maior está contido no eixo α.	- Os denominadores dos dois termos quadráticos são diferentes; - entre os dois termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.
Circunferência com $R = R_o$	- Os eixos têm medidas iguais; - a medida do raio R é R_o.	- Os denominadores dos dois termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.

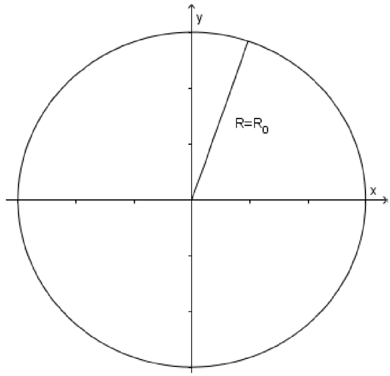
Fonte: O autor

No quadro anterior o eixo α, usado para as elipses alongadas, é o eixo de simetria que contém o eixo maior da elipse. Conforme mostra esse quadro, nas equações básicas os denominadores dos dois termos quadráticos são as unidades significantes simbólicas correspondentes as variáveis visuais que tomamos. A variável visual comparação entre o tamanho dos eixos tem como unidade simbólica correspondente a igualdade ou não entre os denominadores. A variável visual posição do eixo maior tem como unidade simbólica correspondente o reconhecimento de que variável quadrática tem o maior denominador (no sistema xy o maior denominador está sobre x^2 ou sobre y^2). A variável visual tamanho do raio tem como unidade simbólica correspondente o valor numérico da raiz quadrada do denominador do termo quadrático. Com exemplo, em $x^2/4+y^2 = 1$ (os denominadores de x^2 e y^2 são diferentes; o maior denominador entre essas variáveis está sobre x^2) temos uma elipse alongada em x. Além disso, expandindo o discurso é possível saber que a medida do semieixo maior é $4 = 2$ unidades de comprimento (u.c).

Como consequência das convenções do Quadro anterior, o Quadro seguinte trará, de forma mais separada e incluindo todos os casos, as possibilidades de articulações/correlações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em língua natural das elipses padrão.

Quadro 4.17 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de elipses padrão

<table>
<tr><th>Registros cartesianos</th><th>Registros básicos em língua natural</th><th>Registros básicos simbólicos</th></tr>
<tr><td></td><td>Elipse alongada em x.</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$(a > b)$</td></tr>
<tr><td></td><td>Elipse alongada em y.</td><td>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$(a < b)$</td></tr>
</table>

	Circunferência com $R = R_0$.	$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ $(a = b = R)$

Fonte: O autor

Considerando as variáveis visuais que tomamos bem como as articulações provenientes delas, nas posições padrão, as parábolas têm quatro possibilidades, as hipérboles duas e as elipses três totalizando, assim, nove possibilidades. Obviamente, é possível que se tome outras variáveis e, dessa forma, se chegue a outro número. Porém, conforme dissemos no inicio da subseção 4.2 nosso objetivo é fazer um breve estudo a respeito das cônicas.

4.3 ANÁLISE DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS BASEADA NA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A subseção 4.3 traz uma análise/discussão semiótica dos registros das quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Inicialmente trataremos de maneira mais isolada respectivamente os seguintes registros: cartesianos; simbólicos; em língua natural. Depois, trataremos as correlações/articulações entre entre esses registros. Nossas escolhas levaram em consideração as dificuldades visuais e algébricas discutidas na **Introdução**. Assim, esta subseção está organizada da seguinte maneira:

- Análise/discussão das variáveis visuais (subseção 4.3.1 até 4.3.4.9);
- análise/discussão dos registros simbólicos e unidades simbólicas correspondentes (subseção 4.3.5);
- análise/discussão e propostas de registros em língua natural e das

correspondentes unidades significantes simbólicas e variáveis visuais (subseção 4.3.6);
- análise/discussão mais aprofundada das articulações/correlações entre registros cartesianos, *básicos* em língua natural e *básicos* simbólicos (subseção 4.3.7);
- análise/discussão de algumas propriedades que contribuem para a interpretação global (subseção 4.3.8).

Inicialmente sugerimos que o leitor veja os Quadros da subseção 4.3.1.2 (p. 175). Neles, de forma estática, estão os registros cartesianos, simbólicos e em língua natural das quádricas.

Caso haja interesse, o cenário REGISTROS FIGURAIS contém os registros figurais das quádricas não degeneradas (cilindros; elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos). Com eles, temos uma visualização "dinâmica" dessas quádricas.

4.3.1 VARIÁVEIS VISUAIS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CILINDRICAS E NÃO DEGENERADAS

No que diz respeito as variáveis visuais da quádricas não cilíndricas e não degeneradas (elipsoides; hiperboloides de uma e duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos e hiperbólicos), foco de nosso estudo, adiantamos que tomaremos a posição da quádrica em relação ao sistema cartesiano (subseção 4.3.1.1 - p. 172) como variável visual que assume três valores visuais: padrão; translada; rotacionada.

Para as posições padrão, também tomaremos as diferentes posições padrão (subseção 4.3.1.4 - p. 185) e ainda as interseções das quádricas com planos (subseção 4.3.2 - p. 186 - até subseção 4.3.4.7 - p. 202) como variáveis visuais. Para o caso dos elipsoides, também tomaremos algumas variáveis visuais específicas (subseção 4.3.1.3 - p. 183).

Nas subseções seguintes detalharemos cada uma dessas variáveis visuais.

4.3.1.1 A VARIÁVEL VISUAL POSIÇÃO EM RELAÇÃO AO SISTEMA CARTESIANO

Assim como fizemos nas cônicas não degeneradas (elipses, hipérboles e parábolas), no estudo das quádricas não cilíndricas e não degeneradas consideraremos que a posição desses objetos em relação ao sistema cartesiano é uma variável visual que assume três valores: padrão, transladada e rotacionada. Iniciamos dizendo que no caso das quádricas diferenciamos esses valores a partir possibilidade de que os planos coordenados ou planos paralelos aos planos coordenados sejam planos de simetria e também considerando a posição dos *pontos significativos* (centro; vértice; ponto de sela) em relação a origem.

Precisamos, mesmo que brevemente, discutir algumas questões figurais provenientes da simetria das quádricas. Para tanto, os cenários REGISTROS FIGURAIS - SIMETRIA 1, 2 e 3 permitem, de forma "dinâmica", visualizar essas questões.

No que diz respeito ao número de planos de simetria, para os hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e cones quádricos podem acontecer duas possibilidades. Na primeira, há apenas três planos de simetria perpendiculares entre si. Na segunda há um *feixe de planos de simetria* (FPS)[26] que contêm a reta r e também há um plano de simetria perpendicular (s) a esse feixe (é claro que s não pertencente FPS).

Para os paraboloides elípticos também há duas possibilidades. Na primeira, há apenas dois planos de simetria perpendiculares entre si. Na segunda há um FPS que contêm a reta r.

Para os paraboloides hiperbólicos há apenas uma possibilidade que é ter apenas dois planos de simetria perpendiculares entre si.

Para os elipsoides há três possibilidades. Para os elipsoides que têm os três eixos[27] com tamanhos diferentes, há apenas três planos de simetria perpendiculares entre si. Para os elipsoides que têm dois eixos com tamanhos iguais e um com tamanho diferente (*esferoide*), há um FPS que contêm a reta r e também há um plano de simetria perpendicular (s) a esse feixe. Para os elipsoides que têm os três eixos com tamanhos iguais (superfície esférica), há um FPS que contêm o ponto C (são todos os planos que contêm o centro da superfície esférica).

O centro dos elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e dos cones quádricos é determinado pela interseção

---

[26] Trata-se do conjunto de planos que contém a reta r.

[27] Os eixos do elipsoide (maior, médio e menor) são segmentos de reta e os eixos de simetria do elipsoide são retas.

entre seus planos de simetria. No caso dos paraboloides elípticos e hiperbólicos a interseção dessas superfícies com os seus planos de simetria determinam respectivamente o vértice e ponto de sela. A esses pontos, que conforme veremos constituem as definições das posições das quádricas, chamaremos de *pontos significativos*.[28]

Feito essa breve discussão, os quadros a seguir diferenciam as posições padrão e transladadas no sistema cartesiano. Caso seja de interesse, os cenários POSIÇÕES DAS QUÁDRICAS 1, 2, 3 e 4 permite visualizar essas posições de forma "dinâmica".[29]

Quadro 4.18 – Quádricas: posições padrão

Tipo de quádrica	**Posição padrão**
Elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos *padrão*	- Os três planos coordenados são planos de simetria da quádrica.[30]
Paraboloides elípticos *padrão*	- Dois planos coordenados são planos de simetria da quádrica; - o vértice coincide com a origem com sistema cartesiano.[31]
Paraboloides hiperbólicos *padrão*	- Dois planos coordenados são planos de simetria da quádrica; - o ponto de sela coincide com a origem com sistema cartesiano.

Fonte: O autor

Quadro 4.19 – Quádricas: posições transladadas

Tipo de quádrica	**Posição transladada**

[28]Observe que no caso dos paraboloides a interseção entre seus planos de simetria determina uma reta e não um ponto.

[29]Uma definição mais genérica e formal a respeito de translação e também de rotação exige conhecimentos que fogem do escopo desse nível de aprendizagem. Para tanto, é necessário definir conceitos da Álgebra Linear tais como base e ortonormalidade.

[30]Em decorrência da definição, para os elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos na posição padrão o centro coincidindo com a origem.

[31]Para os Paraboloides elípticos/hiperbólicos pode-se ter dois planos coordenados como planos de simetria e o vértice/ponto de sela não coincidir com a origem do sistema cartesiano. Nesse caso, teremos uma translação.

Elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos *transladados*	- Existem três planos distintos entre si, mas que são paralelos[32] (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o centro não coincide com a origem com sistema cartesiano.[33]
Paraboloides elípticos *transladados*	- Existem dois planos distintos entre si, mas que são paralelos (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o vértice não coincide com a origem.
Paraboloides hiperbólicos *transladados*	- Existem dois planos distintos entre si, mas que são paralelos (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o ponto de sela não coincide com a origem.

Fonte: O autor

Quadro 4.20 – Quádricas: posições rotacionadas

Tipo de quádrica	**Posição rotacionada**
Elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones quádricos elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos *rotacionados*	Não há dois planos coordenados ou dois planos paralelos aos planos coordenados que são planos de simetria da quádrica.

Fonte: O autor

No caso das superfícies esféricas não falaremos em posição rotacionada.

[32] No que diz respeito a paralelismo de planos seguiremos a definição de Dolce e Pompeo (2005). Para eles, planos paralelos podem ser distintos ou coincidentes. Logo, ao dizermos apenas planos paralelos estamos incluindo essas duas possibilidades. Se quisermos nos referir a uma das duas diremos *planos paralelos distintos* ou *planos paralelos coincidentes*.

[33] Ao menos um desses três planos deve ser paralelo distinto e os outros dois podem ser paralelos coincidentes ou distintos. Se esses três planos pudessem ser paralelos coincidentes teríamos a posição padrão e, nesse caso, teríamos o centro coincidindo com a origem.

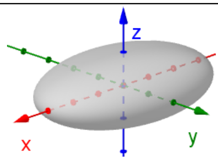
4.3.1.2 VARIÁVEIS VISUAIS DAS QUÁDRICAS NÃO CILINDRICAS E NÃO DEGENERADAS NAS POSIÇÕES PADRÃO

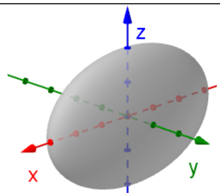
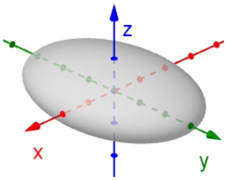
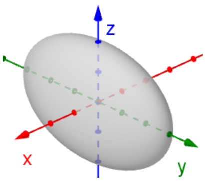
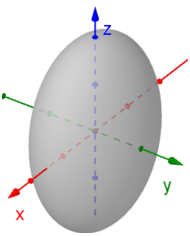
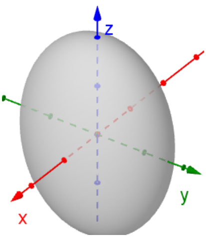
Daqui para frente, nas subseções 4.3.1.3 até 4.3.4.9, as variáveis visuais tomadas irão se referir as quádricas nas posições padrão.

Nossa escolha se deve ao fato de na posição padrão as análises algébrica e visual são mais simples. De qualquer forma, matematicamente estamos amparados, pois os teoremas da Álgebra Linear garantem que sempre é possível por translações e/ou rotações escolhermos novos eixos coordenados que fazem com que dois (para o caso dos paraboloides) ou os três (para o caso dos elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos) dos planos coordenados sejam planos de simetria dessas quádricas e o centro/vértice/ponto de sela coincida com a origem do sistema cartesiano (veja o Teorema Espectral). Com essa escolha, temos a posição padrão.

Nas posições padrão, veremos que como fruto das articulações/correlações entre as variáveis visuais tomadas com as unidades significantes simbólicas correspondentes no sistema cartesiano xyz são trinta e quatro casos de posições padrão das quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Detalhadamente, são treze casos para os elipsoides, três para os hiperboloides de uma folha, três para os hiperboloides de duas folhas, três para os cones quádricos, seis para os paraboloides elípticos e seis para os paraboloides hiperbólicos. Os quadros a seguir apenas *apresentam*, de forma "estática", todas essas posições padrão com seus correspondentes registros básicos simbólicos e básicos em língua natural. Nas subseções 4.3.1.3 até 4.3.4.9 explicaremos as variáveis visuais tomadas para chegarmos a tais possibilidades.

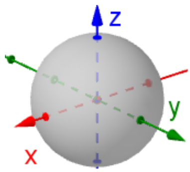
Quadro 4.21 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de elipsoides padrão que têm os três eixos com medidas diferentes (*elipsoide em* α *e* β)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Elipsoide em x e y	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $a \neq b \neq c$; $a > b > c$.

	Elipsoide em x e z	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b \neq c;$ $a > c > b.$
	Elipsoide em y e x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b \neq c;$ $b > a > c.$
	Elipsoide em y e z	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b \neq c;$ $b > c > a.$
	Elipsoide em z e x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b \neq c;$ $c > a > b.$
	Elipsoide em z e y	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b \neq c;$ $c > b > a.$

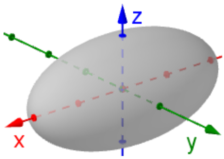
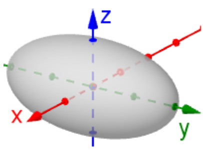
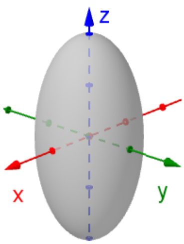
Fonte: O autor

Quadro 4.22 – Correspondentes registros do elipsoide padrão que têm os eixos com medidas iguais (*superfície esférica com* $R = R_0$)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Superfície esférica com $R = R_0$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $a = b = c = R$.

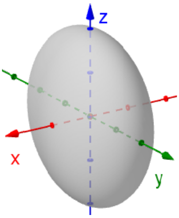
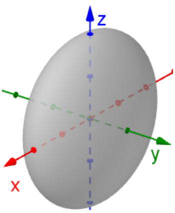
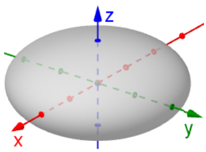
Fonte: O autor

Quadro 4.23 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de elipsoides padrão que têm dois eixos com medidas iguais e o terceiro com medida diferente e maior (*esferoide alongado em* α)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Esferoide alongado em x	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $a \neq b = c;$ $a > b = c.$
	Esferoide alongado em y	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $b \neq a = c;$ $b > a = c.$
	Esferoide alongado em z	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $c \neq a = b;$ $c > a = b.$

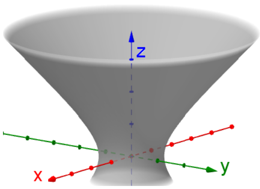
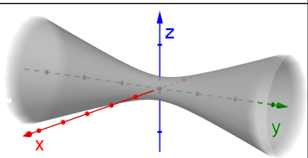
Fonte: O autor

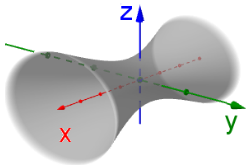
Quadro 4.24 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de elipsoides padrão que têm dois eixos com medidas iguais e o terceiro com medida diferente e menor (*esferoide achatado em* α)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Esferoide achatado em x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b = c;$ $a < b = c.$
	Esferoide achatado em y	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $b \neq a = c;$ $b < a = c.$
	Esferoide achatado em z	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $c \neq a = b;$ $c < a = b.$

Fonte: O autor

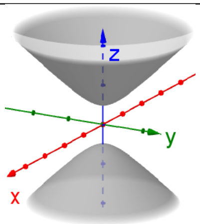
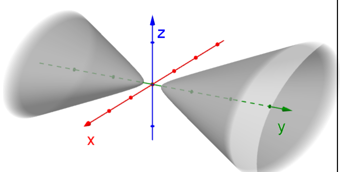
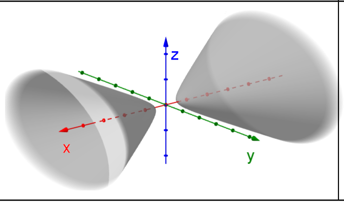
Quadro 4.25 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de hiperboloides de uma folha padrão (*hiperboloide de uma folha abrindo em* α)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Hiperboloide de uma folha abrindo em z.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
	Hiperboloide de uma. folha abrindo em y	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

	Hiperboloide de uma folha abrindo em x.	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Fonte: O autor

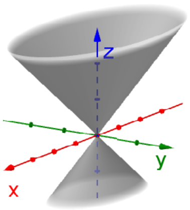
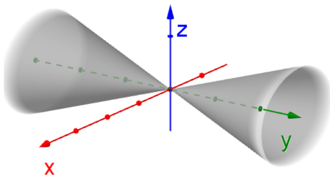
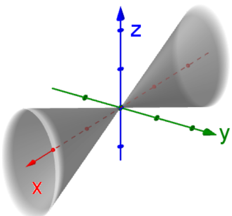
Quadro 4.26 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de hiperboloides de duas folhas padrão (*hiperboloide de uma folha abrindo em* α)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em z.	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em y.	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em x.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Fonte: O autor

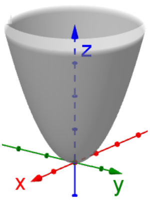
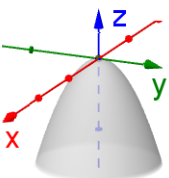
Quadro 4.27 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de cones quádricos elípticos padrão (*cone quádrico elíptico abrindo em* α)

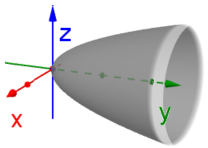
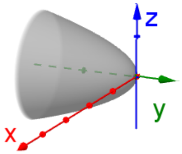
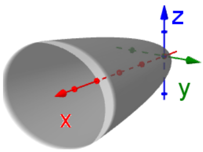
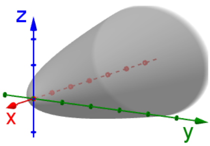
Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**

	Cone quádrico elíptico abrindo em z.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
	Cone quádrico elíptico abrindo em y.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
	Cone quádrico elíptico abrindo em x.	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Fonte: O autor

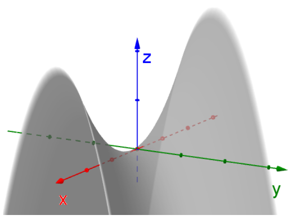
Quadro 4.28 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de paraboloides elípticos padrão (*paraboloide elíptico abrindo em* α)

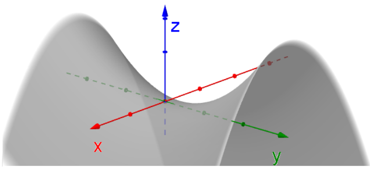
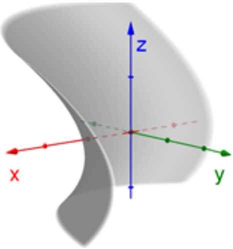
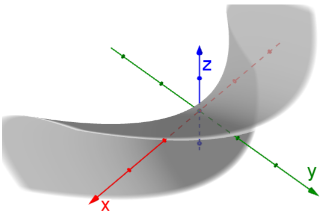
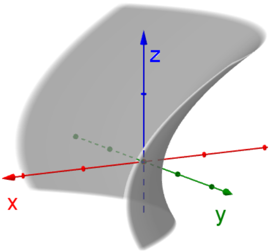
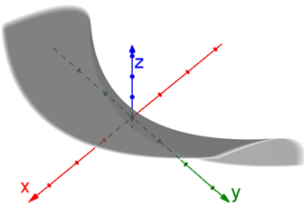
Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

	Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	$y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

Fonte: O autor

Quadro 4.29 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de selas padrão (*sela com assento abrindo em* α_+ *e contido em* $\beta = 0$)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$.	$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

	Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $x = 0$.	$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
	Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $z = 0$.	$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$
	Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $x = 0$.	$y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$
	Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $z = 0$.	$x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$
	Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $y = 0$.	$x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

Fonte: O autor

4.3.1.3 VARIÁVEIS VISUAIS ESPECÍFICAS DOS ELIPSOIDES NA POSIÇÃO PADRÃO

Nesta subseção analisaremos/discutiremos variáveis visuais específicas dos elipsoides padrão.

Inicialmente, adotaremos como variável visual a comparação entre o tamanho dos eixos (maior, médio e menor ou do raio) e teremos três valores visuais que são os seguintes: os três eixos são diferentes; dois são iguais e um diferente; os três são iguais. Chamaremos respectivamente esses casos de *elipsoide em* α *e* β*, esferoide* e *superfície esférica com* $R = R_0$. O cenário ELIPSOIDE permite visualizar essas possibilidades.

Para cada um desses casos ainda adotamos outras variáveis visuais. Para o primeiro caso, tomamos a posição dos eixos maior, médio e menor em relação aos eixos coordenados como variável visual. Para o segundo tomamos duas variáveis visuais: a comparação entre o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais; a posição do eixo com medida diferente em relação aos eixos coordenados. Para o terceiro tomamos a medida do raio como variável visual.

A seguir, explicaremos melhor as consequências das variáveis tomadas para cada caso de elipsoide.

Para os elipsoides em α e β há seis possibilidades. Podemos entender esse número pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Conforme sabemos, o eixo maior pode estar em três posições (contido no eixo x,y ou$z$). Escolhido uma dessas possibilidades, o eixo médio tem duas possibilidades e, consequentemente, o eixo menor tem apenas a possibilidade restante. Logo, pelo PFC, são $3.2.1 = 6$ possibilidades. O quadro a seguir sintetiza essas possibilidades sendo que ao dizermos *elipsoide em* α *e* β queremos dizer que o eixo maior e médio estão contidos respectivamente nos eixos α e β (dois dos três eixos coordenados).

Quadro 4.30 – Diferentes casos de elipsoides com os três eixos com medidas diferentes (*elipsoides em* α *e* β)

Registros básicos em língua natural	**O eixo maior está contido no**	**O eixo médio está contido no**	**O eixo menor está contido no**
Elipsoide em x e y.	Eixo x	Eixo y	Eixo z
Elipsoide em x e z.	Eixo x	Eixo z	Eixo y
Elipsoide em y e x.	Eixo y	Eixo x	Eixo z
Elipsoide em y e z.	Eixo y	Eixo z	Eixo x

Elipsoide em z e x.	Eixo z	Eixo x	Eixo y
Elipsoide em z e y.	Eixo z	Eixo y	Eixo x

Fonte: O autor

Quando o tamanho dos eixos possuem duas medidas iguais e uma diferente nos apropriamos do termo esferoide, clássico na literatura. Nesse caso, tomamos como variável visual a comparação entre tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais. Se a medida diferente for maior que as outras duas diremos *esferoide alongado em* α e se a medida diferente for menor que as outras duas, diremos *esferoide achatado em* α. Temos, assim, dois valores visuais associados à citada variável. No primeiro caso *em* α quer dizer que o eixo maior está contido no eixo α e no segundo quer dizer que o eixo menor está contido no eixo α. Portanto, para os esferoides na posição padrão também tomamos a posição do eixo com medida diferente (em relação aos eixos coordenados) como uma variável visual que assume três valores (eixo maior ou menor no eixo x,y ou z). Temos, com isso, seis possibilidades que estão resumidas nos quadros a seguir.

Quadro 4.31 – Diferentes casos de elipsoides com dois eixos com medidas iguais e um com medida diferente e maior (*esferoide alongado em* α)

Registros básicos em língua natural	**O eixo maior está contido no**	**Os eixos iguais estão contidos no**
Esferoide alongado em x.	Eixo x	Eixos y e z
Esferoide alongado em y.	Eixo y	Eixos x e z
Esferoide alongado em z.	Eixo z	Eixos x e y

Fonte: O autor

Quadro 4.32 – Diferentes casos de elipsoides com dois eixos com medidas iguais e um com medida diferente e menor (*esferoide achatado em* α)

Registros básicos em língua natural	**O eixo menor está contido no**	**Os eixos iguais estão contidos no**
Esferoide achatado em x.	Eixo x	Eixos y e z
Esferoide achatado em y.	Eixo y	Eixos x e z
Esferoide achatado em z.	Eixo z	Eixos x e y

Fonte: O autor

Quando o tamanho dos três eixos são iguais, que chamamos de superfície esférica, consideramos que tamanho do raio como uma variável visual que possui infinitos valores.

4.3.1.4 DIFERENTES POSIÇÕES PADRÃO

Especificamente para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides padrão tomamos as diferentes posições padrão[34] como uma variável visual. Nesta subseção analisaremos/discutiremos esta variável sendo que ela se refere às diferentes posições que essas superfícies podem estar no sistema cartesiano. No caso dos elipsoides as variáveis visuais que tomamos especificamente para eles também contemplam, mesmo que implicitamente, as diferentes posições padrão.

Diferenciaremos e reconheceremos as diferentes posições padrão, no caso dos hiperboloides e dos cones quádricos elípticos e dos paraboloides elípticos padrão, tendo como base o eixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares (trata-se de interseções da quádrica - veja a definição dessas elipses na subseção 4.3.4.6 da p. 201). Para os paraboloides elípticos padrão nos basearemos no semieixo coordenado que essas elipses são perpendiculares. Assim, para cada uma dessas quádricas há três valores possíveis no sistema cartesiano xyz que se referem as seguintes quádricas: hiperboloide de uma/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em x, ou em y ou em z. Para os paraboloides elípticos padrão temos seis valores visuais que se referem as seguintes quádricas: paraboloide elíptico abrindo em z_+, ou em z_-, ou em y_+, ou em y_-, ou em x_+ ou em x_-.

No caso dos paraboloides hiperbólicos padrão nos basearemos no semieixo que a "parábola assento" (trata-se de interseção da quádrica - veja a definição dessa parábola na subseção 4.3.3.7 da p. 192) está abrindo bem como o plano coordenado que a contém. Assim, temos seis valores visuais que se referem as seguintes quádricas: Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$, ou em z_+ e contido em $x = 0$, ou em y_+ e contido em $z = 0$, ou em y_+ e contido em $x = 0$, ou em x_+ e contido em $z = 0$, ou em x_+ e contido em $y = 0$.

Na subseção 4.3.1.2 (p. 175) apresentamos visualmente as posições aqui discutidas.

[34] Também se pode pensar em diferentes posições transladadas ou rotacionadas. Na subseção 4.3.6.5 (p. 230) há indicativos nesse sentido.

4.3.2 VARIÁVEIS VISUAIS INTERSEÇÕES COM PLANOS

A interseção de qualquer quádrica com qualquer plano determina uma das cônicas (elipse, hipérbole, parábola ou degeneradas)[35] sendo que dependendo do tipo de quádrica mudam os tipos de cônicas determinadas. Na posição padrão, as interseções mais simples e também interessantes são aquelas que são feitas com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados. Tomaremos essas interseções como variáveis visuais para o estudo das quádricas não cilíndricas e não degeneradas padrão. Note que as variáveis visuais que tomamos incluem as curvas de nível. Porém, nossas variáveis não se limitam a apenas o estudo dessas curvas. Com nossa escolha, mesmo que mais trabalhosa, pensamos que é possível conhecermos melhor os as quádricas.

Nessas interseções, que serão analisadas/discutidas nesta subseção, considere o sistema cartesiano xyz.

4.3.3 VARIÁVEIS VISUAIS INTERSEÇÕES COM PLANOS COORDENADOS

Nessa seção, relativo às quádricas não cilíndricas e não degeneradas na posição padrão, analisaremos as três variáveis visuais interseções com os planos coordenados. Uma dessas variáveis é a interseção com o plano xy, a outra é a interseção com o plano xz e a terceira é a interseção com o plano yz.

Os cenários ELIPSOIDE, HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA, HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS, CONE QUÁDRICO ELÍPTICO, PARABOLOIDE ELÍPTICO e PARABOLOIDE HIPERBÓLICO permitem visualizar essas interseções.

4.3.3.1 INTERSEÇÕES DOS ELIPSOIDES PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os elipsoides a interseção com o plano xy tem os valores elipse alongada em x ou em y ou circunferência com $R = R_0$, a interseção com o plano xz tem os valores elipse alongada em x ou em z ou

[35] Por esse motivo uma quádrica também é chamada de *conicoide*. Para ter mais detalhes ver Lehmann (2007, p. 374).

circunferência com $R = R_0$ e a interseção com o plano yz tem os valores elipse alongada em y ou em z ou circunferência com $R = R_0$. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos. Nele, perceba que a possibilidade de termos circunferências só não acontece nas elipsoides em α e β (as que têm os três eixos com medidas diferentes).

Quadro 4.33 – Interseções do *elipsoides em* α *e* β com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Elipsoide em x e y.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em y.
Elipsoide em x e z.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em z.
Elipsoide em y e x.	Elipse alongada em y.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em y.
Elipsoide em y e z.	Elipse alongada em y.	Elipse alongada em z.	Elipse alongada em y.
Elipsoide em z e x.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em z.	Elipse alongada em z.
Elipsoide em z e y.	Elipse alongada em y.	Elipse alongada em z.	Elipse alongada em z.

Fonte: O autor

Quadro 4.34 – Interseções do *esferoide alongado em* α com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Esferoide alongado em x.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em x.	Circunferência com $R = R_0$.
Esferoide alongado em y.	Elipse alongada em y.	Circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em y.
Esferoide alongado em z.	Circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em z.	Elipse alongada em z.

Fonte: O autor

Quadro 4.35 – Interseções do *esferoide achatado em* α com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Esferoide achatado em x.	Elipse alongada em y.	Elipse alongada em z.	Circunferência com $R = R_0$.
Esferoide achatado em y.	Elipse alongada em x.	Circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em z.
Esferoide achatado em z.	Circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em x.	Elipse alongada em y.

Fonte: O autor

Quadro 4.36 – Interseções da *superfície esférica com* $R = R_0$ com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Superfície esférica com $R = R_0$.	Circunferência com $R = R_0$.	Circunferência com $R = R_0$.	Circunferência com $R = R_0$.

Fonte: O autor

4.3.3.2 INTERSEÇÕES DOS HIPERBOLOIDES DE UMA FOLHA PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os hiperboloides de uma folha a interseção com o plano xy tem os valores elipse alongada em x ou em y ou circunferência com $R = R_0$; hipérbole abrindo em x ou em y, a interseção com o plano xz tem os valores elipse alongada em x ou em z ou circunferência com $R = R_0$; hipérbole abrindo em x ou em z e a interseção com o plano yz tem os valores elipse alongada em y ou em z ou circunferência com $R = R_0$; hipérbole abrindo em y ou em z. O quadro a seguir sintetiza as nove possibilidades que dissemos.

Quadro 4.37 – Interseções do *hiperboloides de uma folha padrão* com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**

Hiperboloide de uma folha abrindo em z.	- Elipse alongada em x; - elipse alongada em y; - circunferência com $R = R_0$.	Hipérbole abrindo em x.	Hipérbole abrindo em y.
Hiperboloide de uma folha abrindo em y.	Hipérbole abrindo em x.	- Elipse alongada em x; - elipse alongada em z; - circunferência com $R = R_0$.	Hipérbole abrindo em z.
Hiperboloide de uma folha abrindo em x.	Hipérbole abrindo em y.	Hipérbole abrindo em z.	- Elipse alongada em y; - elipse alongada em z; - circunferência com $R = R_0$.

Fonte: O autor

4.3.3.3 INTERSEÇÕES DOS HIPERBOLOIDES DE DUAS FOLHAS PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os hiperboloides de duas folhas a interseção com o plano xy tem os valores vazio; hipérbole abrindo em x ou em y, a interseção com o plano xz tem os valores vazio; hipérbole abrindo em x ou em z e a interseção com o plano yz tem os valores vazio; hipérbole abrindo em y ou em z. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos.

Quadro 4.38 – Interseções do *hiperboloides de duas folhas padrão* com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Hiperboloide de duas folhas abrindo em z.	ϕ	Hipérbole abrindo em z.	Hipérbole abrindo em z.

Hiperboloide de duas folhas abrindo em y.	Hipérbole abrindo em y.	ϕ	Hipérbole abrindo em y.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em x.	Hipérbole abrindo em x.	Hipérbole abrindo em x.	ϕ

Fonte: O autor

4.3.3.4 INTERSEÇÕES DOS CONES QUÁDRICOS ELÍPTICOS PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os cones quádricos elípticos as interseções com os planos xy, xz e yz têm os valores um ponto (origem); um par de retas concorrentes. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos.

Quadro 4.39 – Interseções do *cones quádricos elípticos padrão* com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Cone quádrico elíptico abrindo em z.	Um ponto (origem)	Um par de retas concorrentes	Um par de retas concorrentes
Cone quádrico elíptico abrindo em y.	Um par de retas concorrentes	Um ponto (origem)	Um par de retas concorrentes
Cone quádrico elíptico abrindo em x.	Um par de retas concorrentes	Um par de retas concorrentes	Um ponto (origem)

Fonte: O autor

4.3.3.5 INTERSEÇÕES DOS PARABOLOIDES ELÍPTICOS PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os paraboloides elípticos a interseção com o plano xy tem os valores um ponto (origem); parábola abrindo em y_+, ou em y_-, ou em x_+, ou em x_-, a interseção com o plano xz tem os valores um ponto (origem); parábola abrindo em z_+, ou em z_-, ou em x_+, ou em x_- e a interseção com o plano yz tem os valores um ponto (origem); parábola abrindo em z_+, ou em z_-, ou em y_+, ou em y_-. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos.

Quadro 4.40 – Interseções do *paraboloides elípticos padrão* com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	Um ponto (origem)	Parábola abrindo em z_+.	Parábola abrindo em z_+.
Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	Um ponto (origem)	Parábola abrindo em z_-.	Parábola abrindo em z_-.
Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	Parábola abrindo em y_+.	Um ponto (origem)	Parábola abrindo em y_+.
Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	Parábola abrindo em y_-.	Um ponto (origem)	Parábola abrindo em y_-.
Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	Parábola abrindo em x_+.	Parábola abrindo em x_+.	Um ponto (origem)
Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	Parábola abrindo em x_-.	Parábola abrindo em x_-.	Um ponto (origem)

Fonte: O autor

4.3.3.6 INTERSEÇÕES DOS PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS PADRÃO COM OS PLANOS COORDENADOS

Para os paraboloides hiperbólicos (selas) a interseção com o plano xy tem os valores um par de retas concorrentes; parábola abrindo em y_+, ou em y_-, ou em x_+, ou em x_-, a interseção com o plano xz tem os valores um par de retas concorrentes; parábola abrindo em z_+, ou em z_-, ou em x_+, ou em x_- e a interseção com o plano yz tem os valores um par de retas concorrentes; parábola abrindo em z_+, ou em z_-, ou em y_+, ou em y_-. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos.

Quadro 4.41 – Interseções das *selas padrão* com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com o plano yz**
Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$.	Um par de retas concorrentes	Parábola abrindo em z_+.	Parábola abrindo em z_-.
Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $x = 0$.	Um par de retas concorrentes	Parábola abrindo em z_-.	Parábola abrindo em z_+
Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em y_+.	Um par de retas concorrentes	Parábola abrindo em y_-.
Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em y_-.	Um par de retas concorrentes	Parábola abrindo em y_+.
Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em x_+.	Parábola abrindo em x_-.	Um par de retas concorrentes
Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $y = 0$.	Parábola abrindo em x_-.	Parábola abrindo em x_+.	Um par de retas concorrentes

Fonte: O autor

4.3.3.7 AS PARÁBOLAS ASSENTO E ESTRIBO

Em cada um dos seis casos do quadro anterior podemos notar que as interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas, em sentidos opostos. Chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (chamaremos de semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (chamaremos de semieixo α_+). Assim, adotaremos as seguintes convenções:

- *Parábola assento*[36] ou simplesmente *assento* é a que está abrindo em

[36]Na subseção 4.3.6.4 (p. 226) discutiremos com mais detalhamento epistemológico o que entendemos por essas definições.

α_+;
- *parábola estribo* ou simplesmente *estribo* é a que está abrindo em α_-.[37]

4.3.4 VARIÁVEL VISUAL INTERSEÇÕES COM PLANOS PARALELOS DISTINTOS AOS PLANOS COORDENADOS

Nesta seção, relativo às quádricas não cilíndricas e não degeneradas na posição padrão, analisaremos as variáveis visuais interseções com planos paralelos *distintos* aos planos coordenados. Neste momento os casos em que os planos paralelos são coincidentes não estão sendo considerados, pois são os que vimos anteriormente.

As análises se dividem em três: as interseções com planos paralelos *distintos* ao plano xy; as interseções com planos paralelos *distintos* ao plano xz; as interseções com planos paralelos *distintos* ao plano yz.

Os cenários ELIPSOIDE, HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA, HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS, CONE QUÁDRICO ELÍPTICO, PARABOLOIDE ELÍPTICO e PARABOLOIDE HIPERBÓLICO permitem visualizar essas interseções.

O acréscimo das aspas ($'$) em α indica translação e, assim, ao dizermos *eixo* α' queremos dizer que o *eixo* α foi transladado ou, em outros termos, que o *eixo* α' é paralelo ao *eixo* α. Nesta subseção estamos tomando planos paralelos *distintos* aos planos coordenados e, por isso, aqui esses eixos serão paralelos *distintos*. De maneira análoga, ao dizermos *parábola abrindo em* y'_+ significa que a parábola *parábola abrindo em* y_+ foi transladada. Nas propostas de registros em língua natural (subseção 4.3.6 - p. 213) retomaremos essa notação.

[37] Pode-se obter parábolas nas interseções dos paraboloides hiperbólicos com planos que não são os coordenados. Porém, quando essas superfícies estiverem nas posições padrão usaremos os termos "parábolas assento e estribo" apenas para as parábolas determinadas nas interseções com os planos coordenados. Já para as posições transladadas e rotacionadas usaremos os termos "parábolas assento e estribo" apenas para as que são determinadas nas interseções com os planos de simetria desses paraboloides.

4.3.4.1 INTERSEÇÕES DOS ELIPSOIDES PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os elipsoides as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ (paralelos distintos ao plano xy) têm como valores o vazio, dois pontos, elipses alongadas em x' ou em y' ou circunferências com $R = R_0$, as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ (paralelos distintos ao plano xz) têm como valores o vazio, dois pontos, elipses alongadas em x' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$ e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ (paralelos distintos ao plano yz) têm como valores o vazio, dois pontos, elipses alongadas em y' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$. O quadro a seguir sintetiza o que dissemos. Perceba que a possibilidade de termos circunferências só não acontece nas elipsoides em α e β (as que têm os três eixos com medidas diferentes).

Quadro 4.42 – Interseções do *elipsoides em α e β* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação**[38] $\boldsymbol{z = k_1}$	**Interseções com planos de equação** $\boldsymbol{y = k_2}$	**Interseções com planos de equação** $\boldsymbol{x = k_3}$
Elipsoide em x e y.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.
Elipsoide em x e z.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.
Elipsoide em y e x.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.
Elipsoide em y e z.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.

[38] Em toda a subseção 4.3.4 estamos considerando que $k_1.k_2.k_3 \neq 0$, pois trata-se de planos paralelos distintos (e não coincidentes) aos planos coordenados. Nos Quadros dessa subseção não escrevemos k_1^*, $k_2 \in R^*$ e k_3^* apenas por uma questão de economia de escrita. Porém, o termo *distintos* das legenda desses Quadros já deixam essas restrições implícitas.

Elipsoide em z e x.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.
Elipsoide em z e y.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.

Fonte: O autor

Quadro 4.43 – Interseções do *esferoide alongado em* α com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Esferoide alongado em x.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.
Esferoide alongado em y.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.
Esferoide alongado em z.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.

Fonte: O autor

Quadro 4.44 – Interseções do *esferoide achatado em* α com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Esferoide achatado em x.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.
Esferoide achatado em y.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em z', 2 pontos e ϕ.

Esferoide achatado em z.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em x', 2 pontos e ϕ.	Elipse alongada em y', 2 pontos e ϕ.

Fonte: O autor

Quadro 4.45 – Interseções da *superfície esférica com* $R = R_0$ com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Superfície esférica com $R = R_0$.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.	Circunferência com $R = R_0$, 2 pontos e ϕ.

Fonte: O autor

4.3.4.2 INTERSEÇÕES DOS HIPERBOLOIDES DE UMA FOLHA PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os hiperboloides de uma folha padrão as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em y' ou circunferências com $R = R_0$; hipérboles abrindo em x' ou em y'; um par de retas concorrentes, as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em z' ou circunferência com $R = R_0$; hipérboles abrindo em x' ou em z'; um par de retas concorrentes e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em y' ou em z' ou circunferência com $R = R_0$; hipérboles abrindo em y' ou em z'; um par de retas concorrentes. O quadro a seguir sintetiza as possibilidades que dissemos.

Quadro 4.46 – Interseções do *hiperboloides de uma folha padrão* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**

Hiperboloide de uma folha abrindo em z.	- Elipse alongada em x'; - elipse alongada em y'; - circunferência com $R = R_0$.	- Hipérbole abrindo em x'; - hipérbole abrindo em z'; - um par de retas concorrentes.	- Hipérbole abrindo em y' - hipérbole abrindo em z'; - um par de retas concorrentes.
Hiperboloide de uma folha abrindo em y.	- Hipérbole abrindo em x'; - hipérbole abrindo em y'; - um par de retas concorrentes.	- Elipse alongada em x'; - elipse alongada em z'; - circunferência com $R = R_0$.	- Hipérbole abrindo em y'; - hipérbole abrindo em z'; - um par de retas concorrentes.
Hiperboloide de uma folha abrindo em x.	- Hipérbole abrindo em x'; - hipérbole abrindo em y'; - um par de retas concorrentes.	- Hipérbole abrindo em x'; - hipérbole abrindo em z'; - um par de retas concorrentes.	- Elipse alongada em y'; - elipse alongada em z'; - circunferência com $R = R_0$.

Fonte: O autor

4.3.4.3 INTERSEÇÕES DOS HIPERBOLOIDES DE DUAS FOLHAS PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os hiperboloides de duas as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em y' ou circunferências com $R = R_0$; dois pontos; o vazio; hipérboles abrindo em x' ou em y', as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$; dois pontos; o vazio; hipérboles abrindo em x' ou em z' e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em y' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$; dois pontos; o vazio; hipérboles abrindo em y' ou em z'. O quadro a seguir sintetiza as possibilidades que dissemos.

Quadro 4.47 – Interseções do *hiperboloides de duas folhas padrão* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Hiperboloide de duas folhas abrindo em z.	- Elipses alongadas em y'; - elipses alongadas em x'; - circunferências com $R = R_0$; - 2 pontos; - ϕ.	Hipérbole abrindo em z'.	Hipérbole abrindo em z'.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em y.	Hipérbole abrindo em y'.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em z'; - circunferências com $R = R_0$; - 2 pontos; - ϕ.	Hipérbole abrindo em y'
Hiperboloide de duas folhas abrindo em x.	Hipérbole abrindo em x'.	Hipérbole abrindo em x'.	- Elipses alongadas em y'; - elipses alongadas em z'; - circunferências com $R = R_0$; - 2 pontos; - ϕ.

Fonte: O autor

4.3.4.4 INTERSEÇÕES DOS CONES QUÁDRICOS ELÍPTICOS PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os cones quádricos elípticos as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em y' ou circunferências com $R = R_0$; hipérboles abrindo em x' ou em y', as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em z' ou circunferências com R= R_0; hipérboles abrindo em x' ou em z' e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em y' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$; hipérboles abrindo em y' ou em z'. O quadro a seguir sintetiza as possibilidades que dissemos.

Quadro 4.48 – Interseções do *cones quádricos elípticos padrão* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Cone quádrico elíptico abrindo em z.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em y'; - circunferência com $R = R_0$; - um ponto (origem).	Hipérboles abrindo em z'.	Hipérboles abrindo em z'.
Cone quádrico elíptico abrindo em y.	Hipérboles abrindo em y'.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em z'; - circunferência com $R = R_0$; - um ponto (origem).	Hipérboles abrindo em y'.
Cone quádrico elíptico abrindo em x.	Hipérboles abrindo em x'.	Hipérboles abrindo em x'.	- Elipses alongadas em y'; - elipses alongadas em z'; - circunferência com $R = R_0$; - um ponto (origem).

Fonte: O autor

4.3.4.5 INTERSEÇÕES DOS PARABOLOIDES ELÍPTICOS PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os paraboloides elípticos as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em y' ou circunferências com $R = R_0$; o vazio; parábolas abrindo em x'_+, ou em x'_-, ou em y'_+ ou em y'_-, as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em x' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$; o vazio; parábolas abrindo em x'_+, ou em x'_-, ou em z'_+ ou em z'_- e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ têm como valores elipses alongadas em y' ou em z' ou circunferências com $R = R_0$; o vazio; parábolas abrindo em y'_+, ou em y'_-, u em z'_+ ou em z'_- O quadro a seguir sintetiza as possibilidades que dissemos.

Quadro 4.49 – Interseções do *paraboloides elípticos padrão* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em y'; - ϕ.	Parábola abrindo em z'_+.	Parábola abrindo em z'_+.
Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em y'; - ϕ.	Parábola abrindo em z_-.	Parábola abrindo em z_-.
Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	Parábola abrindo em y_+.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em z'; - ϕ.	Parábola abrindo em y_+.
Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	Parábola abrindo em y_-.	- Elipses alongadas em x'; - elipses alongadas em z'; - ϕ.	Parábola abrindo em y_-.

Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	Parábola abrindo em x_+.	Parábola abrindo em x_+.	- Elipses alongadas em y'; - elipses alongadas em z'; - ϕ.
Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	Parábola abrindo em x_-.	Parábola abrindo em x_-.	- Elipses alongadas em y'; - elipses alongadas em z'; - ϕ.

Fonte: O autor

4.3.4.6 AS "ELIPSES COM EIXOS AUMENTANDO" PERPENDICULARES AO EIXO α

Para o caso dos hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos padrão, nas subseções que trataram de interseções vimos que as interseções com planos paralelos (coincidentes ou distintos) a um dos planos coordenados determinam elipses ou cônicas degeneradas. Genericamente, chamaremos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e sabemos os centros dessas elipses estão sobre esse eixo. Visualmente, para essas superfícies é significativo que os eixos maior e menor (ou diâmetro) dessas elipses aumentam de tamanho à medida que elas se afastam da origem seguindo na direção do eixo α. Para os paraboloides elípticos padrão essas elipses são determinadas em apenas um dos sentidos do eixo α (apenas no sentido positivo ou apenas no sentido negativo desse eixo). Chamaremos essas cônicas de "elipses com eixos aumentando" e, com elas, temos a impressão de que essas quádricas estão abrindo.

Além disso, convencionaremos que ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo α" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo.

Na subseção em que faremos articulações com elementos algébricos (subseção 4.3.7.2 - p. 244) discutiremos essas elipses do ponto de vista das unidades significantes simbólicas. Inclusive, essas cônicas serão usadas nas propostas de registros em língua natural que faremos (subseção 4.3.6.3 - p. 221). [39]

[39] Nas interseções dos hiperboloides e dos paraboloides elípticos com planos oblíquos a um dos eixos coordenados pode-se obter elipses que aumentam o tamanho

4.3.4.7 INTERSEÇÕES DOS PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS PADRÃO COM PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS

Para os paraboloides hiperbólicos as interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \in R^*$ têm como valores hipérboles abrindo em x' ou em y'; parábolas abrindo em y'_+, ou em y'_-, ou em x'_+ ou em x'_-, as interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \in R^*$ têm como valores hipérboles abrindo em x' ou em z'; parábolas abrindo em x'_+, ou em x'_-, ou em z'_+ ou em z'_- e as interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \in R^*$ têm como valores hipérboles abrindo em y' ou em z'; parábolas abrindo em y'_+, ou em y'_-, ou em z'_+ ou em z'_-. O quadro a seguir sintetiza as possibilidades que dissemos.

Quadro 4.50 – Interseções das *selas padrão* com os planos paralelos (*distintos*) aos planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseções com planos de equação $z = k_1$**	**Interseções com planos de equação $y = k_2$**	**Interseções com planos de equação $x = k_3$**
Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$.	- Hipérboles abrindo em x'; - hipérboles abrindo em y'.	Parábola abrindo em z'_+.	Parábola abrindo em z'_-.
Sela com assento abrindo em z_+ e contido em $x = 0$.	- Hipérboles abrindo em x'; - hipérboles abrindo em y'.	Parábola abrindo em z'_-.	Parábola abrindo em z'_+.
Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em y'_+.	- Hipérboles abrindo em x'; - hipérboles abrindo em z'.	Parábola abrindo em y'_-.

de seus eixos. Porém, quando essas quádricas estiverem na padrão ou transladada usaremos a expressão "elipses com eixos aumentando" apenas para as interseções perpendiculares a um dos eixos coordenados. Quando essas quádricas estiverem na posição rotacionada essa expressão será usada apenas para as elipses obtidas nas interseções com planos perpendiculares a um dos eixos de simetria da quádrica. A opção em dar um termo específico para essas elipses deve-se ao fato de que com elas podemos diferenciar as posições dos hiperboloides. Trata-se, contudo, de mero recurso didática.

Sela com assento abrindo em y_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em y'_-.	- Hipérboles abrindo em x'; - hipérboles abrindo em z'.	Parábola abrindo em y'_+.
Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $z = 0$.	Parábola abrindo em x'_+.	Parábola abrindo em x'_-.	- Hipérboles abrindo em y'; - hipérboles abrindo em z'.
Sela com assento abrindo em x_+ e contido em $y = 0$.	Parábola abrindo em x'_-.	Parábola abrindo em x'_+.	- Hipérboles abrindo em y'; - hipérboles abrindo em z'.

Fonte: O autor

4.3.4.8 GENERALIZAÇÕES A RESPEITO DAS INTERSEÇÕES COM OS PLANOS COORDENADOS

Considere que os planos coordenados sejam *plano 1, plano 2* e *plano 3* e os eixos coordenados respectivamente perpendiculares a esses planos sejam α_1, α_2 e α_3.[40] Com essas suposições, faremos generalizações a respeito do que dissemos nas interseções com planos coordenados (subseção 4.3.3 - p. 186 - até subseção 4.3.3.7 - p. 192).

Quadro 4.51 – Generalizações a respeito das interseções com os planos coordenados

Tipo de quádrica	**Interseção com o *plano 1***	**Interseção com o *plano 2***	**Interseção com o *plano 3***
Elipsoide	Elipse alongada em α_2; ou em α_3; ou circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em α_1; ou em α_3; ou circunferência com $R = R_0$.	Elipse alongada em α_1; ou em α_2; ou circunferência com $R = R_0$.

[40] Para nossas análises não importa se, por exemplo, o eixo α_1 é o eixo x ou y ou z. O que importa é que os eixos α_1, α_2 e α_3 são distintos e são os coordenados. O análogo vale para os *planos 1, 2* e *3*.

Hiperboloide de uma folha abrindo em α_1.	Elipse alongada em α_2; ou em α_3; ou circunferência com $R = R_0$. Ela é "perpendicular" ao eixo α_1 e com seu centro pertencente a esse eixo.	Hipérbole abrindo em α_3.	Hipérbole abrindo em α_2.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em α_1.	ϕ	Hipérbole abrindo em α_1.	Hipérbole abrindo em α_1.
Cone quádrico elíptico abrindo em α_1.	1 ponto (origem)	1 par de retas concorrentes	1 par de retas concorrentes
Paraboloide elíptico abrindo em α_{1+}.	1 ponto (origem)	Parábola abrindo em α_{1+}.	Parábola abrindo em α_{1+}.
Paraboloide elíptico abrindo em α_{1-}.	1 ponto (origem)	Parábola abrindo em α_{1-}.	Parábola abrindo em ou α_{1-}.
Sela com assento abrindo em α_{1+} e contido em $\beta = 0$. **Observação:** $\beta = 0$ é a equação do *plano 2*.	1 par de retas concorrentes	Parábola abrindo em α_{1+} (Parábola assento).	Parábola abrindo em α_{1-}. (Parábola estribo). **Observação:** As parábolas assento e estribo estão abrindo no mesmo eixo, porém em sentido opostos e estão contidas em planos perpendiculares.

Fonte: O autor

4.3.4.9 GENERALIZAÇÕES A RESPEITO DAS INTERSEÇÕES COM OS PLANOS PARALELOS DISTINTOS AOS PLANOS COORDENADOS

Considere que os planos coordenados são *plano 1, plano 2* e *plano 3* e seus respectivos planos paralelos *distintos* são *plano 1', plano 2'* e *plano 3'.* Neste momento, o caso em que os planos paralelos coincidem com os planos coordenados não estão sendo considerados, pois eles são os que vimos no quadro anterior. Considere ainda os eixos coordenados α_1, α_2 e α_3 (conforme definidos na subseção anterior) e seus respectivos eixos paralelos distintos α'_1, α'_2 e α'_3. Com essas suposições, faremos generalizações a respeito do que dissemos nas interseções com planos paralelos distintos aos planos coordenados (subseção 4.3.4 - p. 193 - até subseção 4.3.4.7 - p. 202).

Quadro 4.52 – Generalizações a respeito das interseções com os planos paralelos distintos aos planos coordenados

Tipo de objeto	**Interseção com o *plano 1'***	**Interseção com o *plano 2'***	**Interseção com o *plano 3'***
Elipsoide	Elipse alongada em α'_2; ou em α'_3; ou circunferência com $R = R_0$; ou 2 pontos; ou ϕ.	Elipse alongada em α'_1; ou em α'_3; ou circunferência com $R = R_0$; ou circunferência com $R = R_0$; ou 2 pontos; ou ϕ.	Elipse alongada em α'_1; ou em α'_2; ou circunferência com $R = R_0$; ou 2 pontos; ou ϕ.

Hiperboloide de uma folha abrindo em α_1.	Elipse alongada em α'_2; ou em α'_3; ou circunferência com $R = R_0$. Elas são "perpendiculares" ao eixo α_1 e com seus centros pertencente a esse eixo.	Hipérboles abrindo em α'_1, ou em α'_3 ou cônicas degeneradas (retas concorrentes). **Comentário:** As hipérboles abrindo em α'_3 são determinadas por planos que estão *entre* os pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado. As que estão abrindo em α'_1 são determinadas por planos que estão *fora* dos pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado. As cônicas degeneradas são determinadas por planos que passam pelos pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado.	Hipérboles abrindo emα'_1, ou em α'_2 ou cônicas degeneradas (retas concorrentes). **Comentário:** As hipérboles abrindo em α'_2 são determinadas por planos que estão *entre* os pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado. As que estão abrindo em α'_1 são determinadas por planos que estão *fora* dos pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado. As cônicas degeneradas são determinadas por planos que passam pelos pontos de interseção do hiperboloide com o eixo coordenado.

Hiperboloide de duas folhas abrindo em α_1.	Elipses alongadas em α'_2; ou em α'_3; ou circunferências com $R = R_0$; ("perpendiculares" ao eixo α_1 e com seus centros pertencentes a esse eixo); ou 2 pontos; ou ϕ.	Hipérbole abrindo em α'_1.	Hipérbole abrindo em α'_1.
Cone quádrico elíptico abrindo em α_1.	Elipses alongadas α'_2; ou em α'_3; ou circunferências com $R = R_0$; ("perpendiculares"ao eixo α_1 e com seus centros pertencentes a esse eixo).	Hipérboles abrindo em α'_1.	Hipérboles abrindo em α'_1.
Paraboloide elíptico abrindo em α_{1+}.	Elipses alongadas em α'_2; ou em α'_3; ou circunferências com $R = R_0$; ("perpendiculares" ao semieixo α_{1+} e com seus centros pertencentes a esse semieixo); ou ϕ.	Parábola abrindo em α'_{1+}.	Parábola abrindo em α'_{1+}.

Paraboloide elíptico abrindo em α_{1-}.	Elipses alongadas em α'_2; ou emα'_3; ou circunferências com $R = R_0$; ("perpendiculares" ao semieixo α_{1-} e com seus centros pertencentes a esse semieixo); ou ϕ.	Parábola abrindo em α'_{1-}.	Parábola abrindo em ou α'_{1-}.
Sela com assento abrindo em α_{1+} e contido em $\beta = 0$. **Observação:** $\beta = 0$ é a equação do *plano 2*.	Hipérboles abrindo em α'_2 e em α'_3. As que estão abrindo em α'_3 são determinadas pelos *planos 1'* que interceptam α_{1+}. As que estão abrindo em α'_2 são determinadas pelos *planos 1'* que interceptam α'_{1-}.	Parábola abrindo em α'_{1+}.	Parábola abrindo em α'_{1-}.

Fonte: O autor

4.3.5 REGISTROS SIMBÓLICOS E SUAS UNIDADES SIGNIFICANTES SIMBÓLICAS

Nesta subseção, relativo às quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão, analisaremos/discutiremos os registros *básicos* simbólicos, que também chamaremos de *equações básicas*. Para tanto, mais do que apenas apresentar as equações como um todo, recorreremos as oposições qualitativas para (re)conhecermos os elementos que constituem o *conjunto das unidades simbólicas* das equações além de como é a *combinação* desses elementos nas equações.

Inicialmente caracterizaremos o que chamaremos de *registros* *básicos simbólicos* das referidas quádricas. Dizemos que os registros simbólicos das quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão estão na forma básica quando obedecerem as seguintes condições:

- Em um dos membros da equação haja apenas termos quadráticos;
- os numeradores dos coeficientes numéricos dos termos quádricos têm modulo igual a 1;
- no outro membro haja apenas um termo linear com coeficiente igual a 1 ou apenas um termo numérico igual a 1 ou 0.

Nos quadros a seguir, que cumprem os objetivos desta subseção, considere que a, b, c e R são números reais positivos e que as variáveis são x, y e z. Esclarecemos que as articulações entre os registros simbólicos, cartesianos e em língua natural só serão feitos na subseção 4.3.7 à subseção 4.3.7.5.

Iniciaremos com o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas dos elipsoides padrão.

Quadro 4.53 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos elipsoides padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$	(+1)	3 termos quadráticos com sinais iguais e positivos.

Fonte: O autor

No caso dos elipsoides, além do que está exposto no Quadro anterior, é semioticamente importante identificar os denominadores dos termos quadráticos da equação para, com isso, fazer relações ou operações tais como: identificar a relação de ordem entre os denominadores; identificar a posição dos denominadores em relação às variáveis; calcular a raiz quadrada dos denominadores. Daí, lembramos que nos casos em que os três denominadores são diferentes teremos um elipsoide em α e β, nos casos em que dois denominadores são iguais e um é diferente teremos um esferoide e nos casos em os três denominadores são iguais teremos uma superfície esférica com $R = R_0$.

Para cada um desses casos ainda há outras unidades simbólicas. Para o primeiro caso, é importante saber sobre que variáveis quadráticas estão o maior, o médio e o menor denominador. Para o segundo é importante saber se o denominador diferente é menor ou maior que os denominadores iguais. Ainda nesse caso importa saber sobre que variável quadrática está o denominador diferente (para incluir a questão visual veja o correspondente Quadro da subseção 4.3.1.2 - p. 175).

A seguir, traremos o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas dos hiperboloides de uma folha padrão.

Quadro 4.54 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos hiperboloides de uma folha padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	(+1)	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com **sinal diferente** e negativo.

Fonte: O autor

Sabemos que um hiperboloide de uma folha padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (abrindo em z, em y ou em x) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente (para incluir a questão visual veja o correspondente Quadro da subseção 4.3.1.2 - p. 175). Por isso há três equações para essa quádrica no quadro anterior. O comentário análogo vale para as demais quádricas que esse quadro se refere. Veremos que nossas propostas de registros em língua natural consideram essa questão e que, além disso, para cada uma dessas posições (ou equações) propomos um correspondente registro básico em língua natural.

O próximo Quadro trará o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas dos hiperboloides de duas folhas e cones quádricos nas posições padrão.

Quadro 4.55 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos hiperboloides de duas folhas padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**

$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	(+1)	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo.

Fonte: O autor

Quadro 4.56 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos cones quádricos elípticos padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	(0)	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal **diferente** e negativo. Se multiplicarmos as equações por (-1) teremos uma equação com 3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo. O que é importante é que em ambos os casos o termo quadrático com sinal diferente é o mesmo.

Fonte: O autor

Para os hiperboloides e os cones quádricos elípticos, além do que expomos nos 3 Quadros anteriores, é semioticamente importante identificar, entre os termos quadráticos, o termo que possui sinal diferente. Esse, por sua vez, recorre a outras duas unidades significantes: que sinal é esse (positivo ou negativo)? Que variável quadrática é essa (x^2, y^2 ou z^2)? Assim, temos as seguintes seis possibilidades: $+x^2$; $+y^2$; $+z^2$; $-x^2$; $-y^2$; $-z^2$. Para o caso dos hiperboloides de uma folha, em que há dois termos quadráticos positivos e um negativo, o termo quadrático com sinal diferente sempre será negativo e, entre as seis possibilidades citadas, restam apenas às três últimas. Para os hiperboloides de duas folhas, em que há dois termos quadráticos negativos e um positivo, o termo quadrático com sinal diferente sempre será positivo e, consequentemente, temos apenas as três primeiras possibilidades. Para os cones quádricos elípticos, como o segundo membro da equação básica é zero e podemos multiplicar os dois membros da equação por (-1), pode haver dois termos quadráticos positivos e um negativo ou, multiplicando por

(-1), dois termos quadráticos negativos e um positivo. Logo, as seis possibilidades citadas são válidas sendo que o que é importante é que em ambos os casos, multiplicando ou não por (-1), a variável quadrática com sinal diferente é a mesma mudando apenas seu sinal. Como exemplo, o cone de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ tem dois termos quadráticos positivos e um negativo e se multiplicarmos esta equação por (-1) teremos dois termos quadráticos negativos e um positivo. Em ambos os casos o que é significativo semioticamente é que a variável com sinal diferente é z mesmo que no primeiro caso ela tenha sinal positivo e no segundo tenha sinal positivo.

A seguir, traremos o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas dos paraboloides elípticos padrão.

Quadro 4.57 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos paraboloides elípticos padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente (+1)	2 termos quadráticos com mesmo sinal (**sinal positivo**)
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (**sinal negativo**)

Fonte: O autor

No caso dos paraboloides elípticos, além do que expomos no Quadro anterior, é semioticamente importante identificar qual variável é a linear (z, y ou x) e qual o sinal das variáveis quadráticas (positivo ou negativo). Da articulação dessas duas unidades temos as seguintes possibilidades: $\{z; +x^2; +y^2\}$; $\{z; -x^2; -y^2\}$; $\{y; +x^2; +z^2\}$;$\{y; -x^2; -y^2\}$; $\{x; +y^2; +z^2\}$;$\{x; -y^2; -z^2\}$.

Por fim, traremos o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas dos paraboloides hiperbólicos padrão.

Quadro 4.58 – Unidades significantes simbólicas das equações básicas dos paraboloides hiperbólicos padrão

Registros básicos simbólicos	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**

$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear com coeficiente (+1)	2 termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro negativo)

Fonte: O autor

No caso dos paraboloides hiperbólicos, além do que expomos no Quadro anterior, importa identificar qual variável é linear, qual variável quadrática tem sinal negativo e qual variável quadrática tem sinal positivo. Da articulação dessas duas unidades temos as seguintes possibilidades: $\{z; +x^2; -y^2\}$; $\{z; -x^2; y^2\}$; $\{y; +x^2; -z^2\}$;$\{y; -x^2; y^2\}$; $\{x; +y^2; -z^2\}$;$\{x; -y^2; z^2\}$.

Note ainda que em cada equação dos quadros anteriores não há repetição de variáveis.

4.3.6 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL PARA AS QUÁDRICAS: ANÁLISES E PROPOSTAS

Relativo as quádricas não cilíndricas e não degeneradas padrão, nesta subseção traremos nossa análise/discussão e propostas de registros em língua natural e das correspondentes unidades significantes simbólicas e variáveis visuais. Para sabermos que livros escolhemos para tais estudos (das cônicas e das quádricas), assim como nossa metodologia e objetivos, acesse a subseção 4.2.3 (p. 152)

4.3.6.1 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DOS ELIPSOIDES, HIPERBOLOIDES, CONES QUADRICOS ELÍPTICOS E PARABOLOIDES PRESENTES EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

A seguir apresentaremos, em forma de quadros, os registros em língua natural que pesquisamos nos livros relativos às superfícies quádricas não cilíndricas e não degeneradas.Na primeira coluna dos quadros são apresentados os termos clássicos e de uso comum. Na segunda, são os termos específicos usados pelo autor em análise.

Quadro 4.59 – Registros em língua natural propostos por Leithold (1994)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	Registros em língua natural com os adjetivos sugeridos pelo autor
Elipsoide	1 – "Se dois números quaisquer desses três [*a, b* e *c*] forem iguais, teremos um elipsoide de revolução que também será chamado de **esferoide**." (p. 889, grifo do autor); 2 – "Um esferoide para o qual o terceiro número seja maior que os outros dois iguais é chamado de **prolato** (alongado nos polos). [...] tem o formato de uma bola de futebol americano." (p. 889, grifo do autor); 3 – "Um esferoide **oblato** será obtido se o terceiro número for menor do que os outros, que são iguais." (p. 889, grifo do autor); 4 – "Se todos os três números *a, b* e *c* [...] forem iguais [...] será uma **esfera**." (p. 889, grifo do autor).
Hiperboloide de uma folha	5 – Hiperboloide *elíptico* de uma folha (p. 889, grifo nosso); 6 – "[...] o eixo desse hiperboloide é z" (p. 890); 7 - "Se $a = b$, a superfície é um hiperboloide de revolução para o qual o eixo é a reta contendo os eixos conjugados [eixo perpendicular ao que contém os focos]." (p. 890).
Hiperboloide de duas folhas	8 - Análogo a 5 (p. 890); 9 - "Se $a = b$, a superfície é um hiperboloide de revolução no qual o eixo é a reta contendo o eixo transverso." (p. 890).
Cone quádrico elíptico	10 – "O cone circular reto gerado pela rotação de $y = x$ em torno do eixo x."(p. 905, exercício 11 da seção das respostas).[41].
Paraboloide elíptico	11 – "O paraboloide de revolução gerado pela rotação $y^2 = 9z$ em torno do eixo z." (p. 905, exercício 9 da seção das respostas).

[41] As citações 10 e 11 foram retiradas da seção que apresenta as respostas dos exercícios. Elas referem-se, respectivamente, aos exercícios 11 e 9 de Leithold (1994, p. 905)

Paraboloide hiperbólico	12 - Não encontrado.[42]

Fonte: Leithold (1994)

Quadro 4.60 – Registros em língua natural propostos por Winterle (2000)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	**Registros em língua natural com os adjetivos sugeridos pelo autor**
Elipsoide	1 - "Elipsoide de revolução em torno do eixo Oz." (p. 216); 2 - "elipsoide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz." (p. 230).
Hiperboloide de uma folha	3 – Análogo a 1. (p. 218); 4 - "[...] hiperboloide de uma folha ao longo do eixo Oz." (p. 129); 5 – "hiperboloide de uma folha, centro $(3, -1, -4)$, eixo paralelo a Oy." (p. 230).
Hiperboloide de duas folhas	6 - Análogo a 1, 4 (p. 220) e 5 (p. 230).
Cone quádrico elíptico	7 - Análogo a 1 e 4 (p. 223); 8 – "superfície cônica, *vértice* $(0, -2, 1)$, eixo paralelo a Ox." (p. 230, grifo nosso).
Paraboloide elíptico	9 - Análogo a 1, 4 (p. 221) e 8 (p. 230).
Paraboloide hiperbólico	6 - Análogo a 4 (p. 222).

Fonte: Winterle (2000)

Quadro 4.61 – Registros em língua natural propostos por Anton (2002)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	**Registros em língua natural com os adjetivos sugeridos pelo autor**
Elipsoide	1 - Não encontrado.
Hiperboloide de uma folha	2 - "Hiperboloide de uma folha, o eixo é o eixo y." (p. 574).

[42] Esse objeto nunca pode ser de revolução.

Hiperboloide de duas folhas	3 - "Hiperboloide de duas folhas separadas pelo plano yz." (p. 574).
Cone quádrico elíptico	4 - "[...] cone circular que se abre ao longo do eixo z." (p. 238); 5 - "Cone elíptico com eixo x como eixo." (p. 574).
Paraboloide elíptico	6 - "[...] paraboloide circular que se abre ao longo do eixo z positiva [...]". (p. 238); 7 - "Paraboloide circular aberto para baixo no eixo z negativo." (p. 574).
Paraboloide hiperbólico	8 - "[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo y [...]". (p. 239); 9 - "paraboloide hiperbólico montado nos eixos x e z". (p. 574).

Fonte: Anton (2002)

Note que diferente dos demais autores, ao se referir aos elipsoides Anton (2002) não inclui adjetivos tais como "de revolução", "oblato", "prolato", "esferoide", "alongado" e "encurtado". Dessa forma, linguisticamente não há diferenciação entre os tipos de elipsoides. Cabe ainda a ressalva que Anton (2002), na seção 4.1 desse livro, trata das superfícies esféricas sem, contudo, referir-se a elas como um tipo de elipsoide.

Quadro 4.62 – Registros em língua natural propostos por Lehmann (2007)

Registros em língua natural sem o acréscimo de adjetivos	**Registros em língua natural com os adjetivos sugeridos pelo autor**
Elipsoide	1 - "[...] elipsoide de revolução ou esferoide [...] elipsoide alongado [...] elipsoide encurtado [...] superfície esférica [...]". (p. 378).
Hiperboloide de uma folha	2 - "[...] hipérbole de uma folha que se encontra ao longo do eixo coordenado [...]". (p. 379); 3 – "[...] hiperboloide de revolução de uma folha que pode ser gerado pela rotação da hipérbole $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ e $x = 0$ em torno do eixo Z." (p. 379).
Hiperboloide de duas folhas	3 – Análogo a 2 e 3 (p. 381).
Cone quádrico elíptico	4 – "[...] superfície cônica quádrica cujo eixo se encontra ao longo do eixo Z." (p. 379)

Paraboloide elíptico	5 – Análogo a 2 e 3 (p. 382-383).
Paraboloide hiperbólico	7- "[...] se encontra ao longo do eixo coordenado [...]". (p. 379)

Fonte: Lehmann (2007)

Em capítulo anterior ao das quádricas, especificamente o que discute as superfícies de revolução, Lehmann (2002, p. 365) ainda expõe os seguintes termos: [...] superfície de revolução cujo eixo de revolução é o eixo Z." Para as que o eixo de revolução é o eixo coordenado, Lehmann (2002, p. 365, grifo do autor) ainda acrescenta: "[...] superfície que se encontra ao longo deste eixo."

4.3.6.2 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DOS ELIPSOIDES

Conforme mostram os quadros da subseção 4.3.6.1 nos casos em que o elipsoide possui três eixos congruentes é comum o uso do termo *superfície esférica* ou *esfera*.

Nos casos em que o elipsoide possui dois eixos congruentes é comum o termo *esferoide*. Nesses casos os adjetivos *prolato, oblato, alongado* e *encurtado* também são acrescentados. Entre os quatro termos, por uma questão de simplicidade e recorrência, preferimos *alongado* e *encurtado*. Neste último ainda podemos usar o adjetivo *achatado*.

Quando os três eixos possuem medidas diferentes encontramos apenas seguinte contribuição de Winterle (2000, p. 230): "elipsoide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz." Nela temos unidades significantes que permitem fazer Conversões e Expansões Discursivas que envolvam o eixo maior. Porém, qual a posição dos outros eixos? Como vemos esse registro não abre possibilidades de Conversões ou Expansões Discursivas que envolvem os outros eixos.

Vemos ainda que é recorrente o uso do adjetivo *de revolução* para os casos em que o elipsoide é uma superfície de revolução.[43] Caso o estudo tenha como foco as superfícies de revolução, pensamos que o uso desse adjetivo é semanticamente interessante pelo fato de que chama a atenção para uma interessante propriedade global da figura – a revolução. Particularmente se o interesse for expor o eixo de revolução, então o registro "elipsoide de revolução em torno do eixo Oz", de Winterle (2000, p. 216), mostra-se vantajoso. Porém, note que ao

[43] Um elipsoide que tem os três eixos com medidas diferentes não é de revolução.

dizermos apenas *elipsoide de revolução* não diferenciamos os elipsoides do tipo esferoide dos que são do tipo superfície esférica. Além disso, nos esferoides e nas superfícies esféricas está implícita, mesmo que sejam necessárias Expansões Discursivas, a ideia de revolução.

Feito a análise dos termos usados pelos autores dos livros que pesquisamos, partiremos, a partir do quadro seguinte, para nossas propostas de registros básicos em língua natural para os elipsoides na posição padrão.

Considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ e note que nesse sistema os eixos coordenados são os eixos α, β e γ e que qualquer deles pode ser o eixo x, y ou z sempre, claro, diferentes entre si.

Quadro 4.63 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para os elipsoides padrão e correlações entre registros

Registros básicos em língua natural	**Variáveis visuais**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Elipsoide em α e β	- Os três eixos (maior, menor e médio) têm medidas diferentes; - o eixo maior está contido no eixo α, o eixo médio está contido no eixo β. **Comentário:** por expansão discursiva o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2, o médio está sobre β^2 e o menor está sobre a outra variável quadrática.
Superfície esférica com $R = R_0$	- Os eixos têm medidas iguais; - medida do raio R é R_0. **Comentário:** Os eixos são chamados de diâmetro e os semieixos são chamados de raio.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.

Esferoide alongado em α.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos menores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável α^2.
Esferoide achatado em α.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α. **Comentário:** por expansão discursiva os eixos maiores do elipsoide estão contidos nos eixos β e γ.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.

Fonte: O autor

No quadro anterior vemos que nas variáveis visuais tomadas as unidades significantes simbólicas correspondentes são provenientes da identificação dos denominadores dos termos quadráticos da equação e de relações ou operações envolvendo esses termos (relação de ordem entre os denominadores; posição dos denominadores em relação às variáveis; raiz quadrada dos denominadores, ...) Nos parágrafos seguintes detalharemos essas variáveis e as correspondentes unidades.

Primeiro, nossas propostas de registros básicos em língua natural tomaram a comparação entre o tamanho dos eixos do elipsoide como variável visual e, com isso, ela assume três valores: os três eixos têm medidas diferentes (*elipsoide em* α *e* β); dois eixos têm medidas iguais e o terceiro tem medida diferente (*esferoide*); as medidas dos eixos são iguais (*superfície esférica*). Em ordem, esses valores se correspondem algebricamente com as seguintes relações entre os denominadores dos termos quadráticos da equação: os três denominadores são diferentes; dois são iguais e um é diferente; os três são iguais.

Para os *elipsoides em* α *e* β a posição dos eixos maior, médio e menor em relação aos eixos coordenados também configura uma variável visual que, na posição padrão, possui seis valores. Podemos entender esse número pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Conforme sabemos, no sistema cartesiano xyz, em relação aos eixos coordenados, o eixo maior pode estar em três posições (contido no eixo x, y ou z). Escolhido uma dessas possibilidades, o eixo médio tem duas possibilidades e, consequentemente, o eixo menor tem apenas a possibilidade restante. Logo, pelo PFC, são $3.2.1 = 6$ possibilidades. O Quadro 4.30 (p. 184) detalha essas possibilidades sendo que ao dizermos *elipsoide em* α *e* β note que consideramos, *em ordem*, que o eixo maior e médio estão contidos respectivamente nos eixos α e β. Caso haja interesse, o Quadro 4.21 (p. 176) articula/correlaciona os registros gráficos, básicos em simbólicos e básicos em língua natural desses elipsoides.[44] Algebricamente para analisarmos esses seis valores devemos identificar, em relação aos termos quadráticos, qual tem maior, médio e menor denominador.

Para os *esferoides* o tamanho do eixo com medida diferente em relação ao outros dois com medidas iguais também configura uma variável visual. Com isso, temos os dois seguintes valores visuais: alongado; achatado. Algebricamente basta identificarmos em relação aos termos quadráticos se o denominador diferente é maior (alongado) ou menor (achatado) que os dois iguais. Ainda para os *esferoides* a posição do eixo alongado (ou achatado) em relação aos eixos coordenados também configura uma variável visual que possui os seguintes valores visuais: alongada (ou achatado) no eixo x, y ou z. Nesse caso, algebricamente devemos identificar em relação aos termos quadráticos qual possui maior (menor para os achatados) denominador. Temos, portanto, seis tipos de esferoides (3 alongados e 3 achatados). Os Quadros 4.31 e 4.32 (p. 184) detalham esses valores. Caso haja interesse, os Quadros 4.23 e 4.24 (p. 177) articulam/correlacionam os registros cartesianos, básicos em simbólicos e básicos em língua natural desses elipsoides.

Quando o tamanho dos eixos é igual (superfície esférica com $R = R_0$) consideramos que tamanho do raio $R = R_0$ como uma variável visual que possui infinitos valores. Algebricamente a identificação da raiz quadrada de um dos denominadores dos termos quadráticos permite determinar tais valores visuais.[45] Caso haja interesse, o Qua-

[44] Para chegarmos ao número 6 estamos supondo que o elipsoide está na posição padrão. Assim, os eixos maior, médio e menor dessa superfície estão obrigatoriamente contidos em um dos eixos coordenados.

[45] Caso a equação da superfície esférica esteja na forma $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, então devemos identificar a raiz quadrada do termo independente dessa equação.

dro 4.22 (p. 176) articula/correlaciona os registros cartesianos, básicos em simbólicos e básicos em língua natural desse elipsoide.

Em síntese, na posição padrão nossas propostas contemplam os seis tipos de elipsoides em α e β os três tipos de esferoides alongados, os três tipos de esferoides achatados além da superfície esférica.

Como exemplo de aplicação que discute os diferentes tipos de elipsoides, considere o que tem equação $x^2/4 + y^2/9 + z^2/4 = 1$. Qual dos tipos anteriores ele é? Inicialmente observe que os denominadores dos três termos quadráticos são $4, 4$ e 9. Comparando seus valores é fácil ver que dois deles são iguais $(4 = 4)$ e o terceiro (9) é maior que os outros dois. Logo, trata-se de um esferoide alongado. Como o maior denominador está sobre a variável y^2 concluímos que é um *esferoide alongado em* y. Em termos cartesianos, os eixos menores do elipsoide estão sobre os eixos x e z e o eixo maior está sobre o eixo y. As medidas dos semieixos menores e do semieixo maior são respectivamente iguais a $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$ unidades de comprimento. Assim, podemos ter um esboço do registro cartesiano e, claro fazer Conversões e Expansões Discursivas envolvendo os registros em língua natural.

Conforme mostra o quadro anterior, nos apropriamos de alguns termos dos autores pesquisados. Em nosso caso, fizemos articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas. Pensamos que essa articulação não é natural e, portanto, elas devem ser trabalhadas. Porém, por vezes constatamos que os livros analisados excluem, sobretudo algebricamente, tais articulações.

4.3.6.3 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DOS HIPERBOLOIDES, CONES QUÁDRICOS ELÍPTICOS E PARABOLOIDES ELÍPTICOS

Analisando os quadros da subseção 4.3.1.2 (p. 175), para os casos dos hiperboloides, dos cones e dos paraboloides que são do tipo de revolução, vemos que é bastante recorrente o uso do adjetivo *revolução* ou *rotação* seguido dos termos *em torno do eixo* α. Da mesma forma que discutimos para os elipsoides, no sentido de destacar as variáveis relacionadas a superfícies de revolução pensamos que os citados termos são interessantes. Porém, como nem todas estas superfícies quádricas são de revolução, esses termos são limitados.

Sem fazer uma designação clara, e talvez recorrendo apenas a aspectos intuitivos ou apenas como um código, Winterle (2000) e Lehmann (2007) usam termos semelhantes a *hiperboloide de uma/duas folhas/cones quádricos elípticos/paraboloide elíptico ao longo do eixo α.* Porém, o que significa isso?

Especificamente no estudo das superfícies de revolução que tem um dos eixos coordenados como eixo de revolução, Lehmann (2007) propõe termos correlacionando-os as interseções. De maneira mais específica, segundo esse autor, se eixo coordenado é o eixo de revolução, [...] então as seções da superfície por planos perpendiculares ao eixo são todas circunferências cujos centros se encontram sobre o referido eixo. Diz-se então que a superfície se encontra ao longo deste eixo. (p. 365, grifo do autor) Como vemos, os termos criados por Lehmann (2017) para as superfícies de revolução não são apenas códigos e não se limitam aos aspectos intuitivos. Ao invés disso, o autor refere-se aos objetos de forma bem delimitada e formal. Entretanto, conforme já dito, Lehmann (2007) usa esses termos para superfícies que não são de revolução sem designar o sentido de tal uso.

Especificamente para os hiperboloides de uma folha, o registro "hiperboloide *elíptico* de uma folha", de Leithold (1994, p. 889, grifo nosso), destaca uma elipse que, conforme sabemos, é uma das interseções dessa superfície. Porém, como nessa superfície há infinitas interseções que definem elipses, surge a seguinte questão: qual plano determina essa elipse? Mesmo com esses limites ou com a pouca exploração dessa interseção, fazendo algumas delimitações pensamos que a ideia de destacar uma ou até infinitas elipses obtidas por interseções pode ser útil se consideramos que podemos recorrer a elas como recurso para diferenciar os tipos de hiperboloides, os tipos de cones quádricos e os tipos de paraboloides elípticos no que tange a sua posição no sistema cartesiano.

Para o caso dos registros em língua natural das parábolas, já dissemos que Leithold (1994), Winterle (2000), Anton (2002) e Lehmann (2007) usam termos semelhantes a *que se abre (ou abrindo-se*). Para os cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos, conformem consta no Quadro 4.61, Anton (2002) também faz uso dos termos que se abre. Com isso, surgem as possibilidades e problemas semelhantes aos que já discutimos para as parábolas (veja a página 154).

Retomaremos os citados potenciais mais adiante. Antes, recordamos que para o caso dos hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos padrão as interseções com planos paralelos (coincidentes ou distintos) a um dos planos coordenados, que consideramos como variáveis visuais, determinam infinitas elipses ou cônicas degeneradas (valores visuais). Pensamos que visualmente é significativo o fato de que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do diâmetro) à medida que essas interseções se afastam da origem.

Chamaremos essas cônicas de “elipses com eixos aumentando” e, com elas, temos a impressão de que as quádricas estão abrindo. Além disso, denotaremos por o eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e sabemos os centros dessas elipses estão sobre esse eixo. Para os paraboloides elípticos padrão essas elipses são determinadas apenas em um dos sentidos do eixo α (apenas no sentido positivo que chamaremos de α_+ ou apenas no sentido negativo que chamaremos de α_-)

A partir da posição das “elipses com eixos aumentando” em relação aos eixos coordenados podemos diferenciar as diferentes posições padrão e, ainda, propor registros linguísticos conforme mostra quadro seguinte. Nele, perceba que estendemos o uso do termo *abrindo*, recorrente nas cônicas, para diferentes tipos de quádricas.

Quadro 4.64 – Propostas de registros *básicos* em língua natural e correlações entre registros

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade simbólica correspondente na equação básica da quádrica**
Hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em α.	As “elipses com eixos aumentando são perpendiculares” ao eixo coordenado α.	A variável quadrática α^2 tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas.
Paraboloide elíptico abrindo em α_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo α_+.	- A variável linear é α; - as variáveis quadráticas têm coeficiente com sinal positivo.
Paraboloide elíptico abrindo em α_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo α_-.	- A variável linear é α; - as variáveis quadráticas têm coeficiente com sinal negativo.

Fonte: O autor

Na análise de nossas propostas inicialmente retomamos que um hiperboloide de uma folha/duas folhas/cones quádricos elípticos padrão pode estar em três posições diferentes no sistema cartesiano (abrindo em z, em y ou em x) e que conforme é essa posição há uma equação correspondente. Daí perceba que em nossas propostas essa relação biunívoca é mantida isso por que para cada uma dessas posições (ou equações) há um correspondente registro básico em língua natural. Para entender tal questão, basta constatar que no sistema cartesiano xyz as elipses com eixos aumentando podem ser perpendiculares ao eixo x, ou ao eixo y ou ao eixo z. Nesses casos, a unidade simbólica correspondente que permite tal identificação é o termo quadrático com sinal diferente. Essa, por sua vez, recorre a outras duas unidades significantes: que sinal é esse (positivo ou negativo)? Que variável quadrática é essa? Assim, nas posições padrão, nossas propostas contemplam os 3 tipos de hiperboloides de uma folha, 3 tipos de hiperboloides de duas folhas e 3 tipos de cones quádricos elípticos.

Para os paraboloides elípticos as elipses com eixos aumentando podem estar em 6 posições. No sistema cartesiano xyz tratam-se das elipses com eixos aumentando perpendiculares ao semieixo x_+, ou x_-, ou y_+, ou y_-, ou z_+ ou z_-. As unidades simbólicas correspondentes são a variável linear e o sinal dos coeficientes dos termos quadráticos. Quando esse sinal for positivo as elipses são perpendiculares ao semieixo α_+ e quando eles forem negativos elas são perpendiculares ao semieixo α_-. Assim, nas posições padrão, nossas propostas contemplam os 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_+ e os 3 tipos de paraboloides elípticos abrindo em α_-. Além disso, análogo ao que dissemos no parágrafo anterior a relação um para um é mantida (uma posição padrão $\leftrightarrow$ uma equação $\leftrightarrow$ um registro básico em língua natural).

No sistema cartesiano xyz as designações dos registros que propomos permitem a produção dos Quadros 4.25, 4.26, 4.27 e 4.28 (p. 179) em que estão articulados/correlacionados os registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural das quádricas em questão. Neles, em que temos as posições padrão, vemos que há quinze possibilidades de posição padrão sendo três para os hiperboloides de uma folha, três para os hiperboloides de duas folhas, três para os cones quádricos elípticos e seis para os paraboloides elípticos.

Como exemplo de aplicação, considere a quádrica de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$. Nela, entre outras, podemos elaborar perguntas como as seguintes: que quádrica é essa (1)? Que eixo coordenado às elipses com eixos aumentando são perpendiculares (2)? Qual seu registro básico em língua natural dessa quádrica? Para discutir essas perguntas, inicialmente cabe identificarmos na equação básica as seguintes unidades significantes simbólicas: um dos membros da equação tem três termos quadráticos sendo dois positivos e um negativo; no outro membro temos apenas o número 1. Diante dessas unidades, temos um hiperboloide de uma folha padrão e assim respondemos a questão

(1). Além disso, como z^2 é a variável quadrática que tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas, então graficamente temos que as "elipses com eixos aumentando" dessa superfície são perpendiculares ao eixo z e, consequentemente, também sabemos que linguisticamente se trata de um hiperboloide de uma folha abrindo em z. Dessa forma, sem contar que identificamos a posição da quádrica no sistema cartesiano, respondemos questões (2) e (3). Outras possibilidades de questionamentos são os seguintes: qual a equação dos planos que determinam as elipses com eixos aumentando? Prove algebricamente que a interseção desses planos com a quádrica determinam elipses. Conforme já dissemos, as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo z (ou paralelas ao plano xy), logo, os planos que as determinam também os são e, com isso, tratam-se dos planos de equação $z = k; k \in R$. Para realizarmos a solicitada prova primeiro substituímos a equação do plano na equação da quádrica e depois realizamos simplificações. Com isso, conforme detalhado nas contas da página 232, ficamos com a equação

$$\frac{x^2}{a^2(c^2+1)/c^2} + \frac{y^2}{b^2(c^2+1)/c^2} = 1$$

que de fato se refere a elipses, pois há as seguintes unidades significantes simbólicas nessa equação: um dos membros da equação tem dois termos quadráticos positivos; no outro membro temos apenas o número 1. Mais adiante, na subseção 4.3.7.2 (p. 244) aprofundaremos o que foi dito neste parágrafo.

De forma análoga ao exemplo que discutimos, podemos fazer Expansões e Conversões com os registros em língua natural dos hiperboloides de duas folhas, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos padrão.

Portanto, como vemos, as designações presentes em nossas propostas de registros em língua natural permitem Expansões Discursivas e Conversões em duplo sentido. Para isso, claro, é necessário termos certos conteúdos principalmente no que diz respeito a interseções com planos. Caso haja interesse, esses conteúdos foram discutidos na subseção 4.3.2 - p. 186).

4.3.6.4 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DOS PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS

Para os paraboloides hiperbólicos os registros que encontramos nos livros são mais problemáticos no que diz respeito à Função Referencial.

Ao tratar as quádricas Anton (2002, p. 239) propõe o "exercício 5" em que o objetivo é trabalhar a transformação do registro simbólico para o registro em língua natural. Parte do enunciado dessa questão diz o seguinte: "[...] identifique a superfície quádrica e dê uma descrição verbal de sua orientação [...]". Como exemplo ainda na parte do enunciado, sem dizer qual é o correspondente registro simbólico, esse autor usa o seguinte registro em língua natural: "[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo y [...]". Para o registro simbólico $y = z^2/c^2 - x^2/a^2$, Anton (2002, p. 574), sem expor explicações, dá como correspondente, na seção das respostas, o seguinte registro em língua natural: "paraboloide hiperbólico montado nos eixos x e z". Nesses casos, os usos das descrições verbais são feitos de forma codificada e sem apresentar designações explícitas e delimitadas. Diante desses limites, para entendermos a associação entre as fórmulas e esses termos em língua natural nos resta fazermos algumas suposições.

Uma suposição é que Anton (2002) recorreu a possível associação entre o objeto matemático[46]sela (paraboloide hiperbólico) com o objeto real sela de cavalo. Daí, suponha ainda que Anton (2002) considerou implicitamente as seguintes designações a respeito de "assentar": no objeto real assentar se refere, de alguma maneira, ao assento da sela do cavalo; no objeto ideal assentar se refere a obter uma parábola na interseção da quádrica com algum plano. Dessa forma, certamente fez-se associações entre parábola (objeto ideal) e o assento da sela de um cavalo (objeto real). Admitindo essas suposições, em "[...] paraboloide hiperbólico assentado no eixo y [...]", proposto por Anton (2002, p. 239), supostamente está implícito que se trata de uma sela tal que se obtém uma parábola abrindo em y na interseção dessa quádrica com um plano. Porém, temos os seguintes problemas com essas descrições e suposições: essa parábola está abrindo no sentido positivo ou negativo? Que plano

[46]Estamos considerando que os objetos matemáticos, como um paraboloide hiperbólico, são objetos ideais e a sela de um cavalo é um objeto real. Com isso, este é apenas uma representação daquele. Stewart (2010, p. 768, grifo nosso) se refere a essa relação da seguinte maneira "[...] o formato da superfície [do paraboloide hiperbólico] perto da origem se *assemelha* a uma sela." De maneira parecida, Lehmann (2007, p. 383, grifo nosso) escreve que "a superfície [do paraboloide hiperbólico] tem a forma de sela [...]"

foi usado nessa interseção? Sem essas duas delimitações e baseando-se apenas nas suposições que agora fizemos, com a descrição verbal desse autor não sabemos se ele se refere à sela de equação $y = x^2/a^2 - z^2/c^2$ ou a de equação $y = -x^2/a^2 + z^2/c^2$ pois ambas possuem parábolas abrindo em y na interseção com um dos planos coordenados. Temos, portanto, problemas de referência.

Ainda recorrendo à comparação com o objeto real sela de cavalo, supomos que "montado nos eixos x e z" implica obter uma parábola na interseção com o plano xz. Nesse caso, há quatro selas (de equações $z = x^2/a^2 - y^2/b^2, z = -x^2/a^2 + y^2/b^2, x = y^2/b^2 - z^2/c^2$ e $x = -y^2/b^2 + z^2/c^2$) que satisfazem o que procuramos. Mais uma vez, há um problema de referência.

Outra suposição é que "paraboloide hiperbólico montado nos eixos x e z" queira dizer que a interseção da quádrica com o plano xz determina cônicas degeneradas (duas retas concorrentes). Assim, o problema da referência não unitária se repete, pois há dois tipos de selas que tem esta característica ($y = x^2/a^2 - z^2/c^2$ e $y = -x^2/a^2 + z^2/c^2$).[47]

Os termos de Winterle (2000) e Lehmann (2007) também possuem problemas semelhantes.

Mesmo os problemas citados, com algumas delimitações, nos apropriaremos da ideia de "assentar" aqui discutida. Para tanto, recordamos que as interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas, em sentidos opostos. Chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (chamaremos de semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (chamaremos de semieixo α_+). Assim, adotamos as seguintes convenções:

- *Parábola assento*[48] ou simplesmente *assento* é a que está abrindo em α_+;
- *parábola estribo* ou simplesmente *estribo* é a que está abrindo em α_-.

Diante dessas convenções, no sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ considere o paraboloide hiperbólico padrão de equação $\alpha = \frac{\beta}{a^2} - \frac{\gamma}{b^2}$. Assim,

---

[47]Sugerimos que a visualização dessas interseções seja feita com o auxílio do Geogebra no cenário PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

[48]Na Introdução já dissemos que estamos concebendo que a parábolas assento e a parábola estribo são objetos ideais enquanto que o assento e os estribos (parte da sela do cavalo em que se colocam os pés) são objetos reais. Estes objetos reais são apenas representações daqueles objetos ideais.

propomos o “registro básico em língua natural” do quadro a seguir. Mais uma vez note que deixamos explícitas as articulações entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas. Conforme já dissemos, tal delimitação é fundamental para a aprendizagem na perspectiva da TRRS.

Quadro 4.65 – Propostas de registros *básicos* em língua natural para os paraboloides hiperbólicos e correlações entre registros

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidades significantes simbólicas correspondentes**
Sela com assento abrindo em α_+ e contida em $\beta = 0$.	- A parábola assento está abrindo em α_+; - a parábola assento está contida no plano de equação $\beta = 0$. **Observação:** Em decorrência da definição de parábola assento e estribo, por Expansões Discursivas temos as seguintes consequências imediatas: - A parábola estribo está abrindo em α_-; – a parábola estribo está contida no plano de equação $\gamma = 0$ (perpendicular ao eixo γ).	- O termo linear é α; – o termo quadrático negativo é do tipo (-β^2). **Observação:** por Expansões Discursivas temos que: - O termo quadrático com coeficiente positivo é do tipo γ^2.

Fonte: O autor

Mais adiante, na atividade da página 250, discutiremos as articulações/correlações do Quadro 4.65 com mais detalhamento e rigor matemático.

Por ora, note que no quadro anterior para definirmos a parábola assento precisamos articular as seguintes variáveis visuais dessa cônica: em que semieixo positivo o assento ela está abrindo *(1)*? Qual plano coordenado contém o assento *(2)*? No caso das selas padrão que estão no sistema cartesiano xyz, a variável *(1)* tem os seguintes valores visuais: semieixo x_+; semieixo y_+; semieixo z_+. Já a variável *(2)* tem os seguintes valores visuais: plano xy de equação $z = 0$; ou plano xz de equação $y = 0$; ou plano yz de equação $x = 0$. Articulando os valores de *(1)* e

(2), temos as seguintes seis possibilidades para a posição da parábola assento: abrindo em x_+ e contida em $z = 0$; abrindo em x_+ e contida em $y = 0$; abrindo em y_+ e contida em $z = 0$; abrindo em y_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+ e contida em $x = 0$; abrindo em z_+ e contida em $y = 0$. As unidades significantes simbólicas correspondentes a essas duas variáveis visuais são, respectivamente, as seguintes: qual variável é linear? Qual variável quadrática tem sinal negativo? Com isso, cada uma dessas possibilidades se refere a uma das seis selas padrão. Caso haja interesse, podemos visualizar esses seis casos no Quadro 4.29 (p. 182).

A seguir, tomaremos um exemplo de aplicação para um desses seis casos. Porém, antes lembramos que pela designação que demos a parábola assento deve estar abrindo em um semieixo positivo e é determinada pela interseção da sela com um dos planos coordenados. Já a parábola estribo deve estar abrindo no mesmo semieixo da parábola assento, mas em sentido oposto, e deve ser determinada pela interseção com outro plano coordenado que contenha esse mesmo semieixo. Também sabemos que a interseção da sela com o terceiro plano coordenado é uma cônica degenerada (um par de retas concorrentes).

Dito isso, considere a quádrica de equação $z = x^2/a^2 - y^2/b^2$. Nela, entre outras, podemos elaborar perguntas como as seguintes: que quádrica é essa (1)? Em que eixo coordenado as parábolas assento e estribo estão abrindo (2)? Quais as equações dos planos que contêm essas parábolas (3)? Qual o registro básico em língua natural dessa quádrica (4)? Para discutir essas perguntas, inicialmente cabe identificarmos na equação básica as seguintes unidades significantes simbólicas: um dos membros da equação tem dois termos quadráticos com sinais oposto; no outro membro temos uma variável linear com coeficiente 1. Diante dessas unidades, temos uma sela padrão e assim respondemos a questão (1). Para responder (2), note que a variável linear é z, logo, a parábola assento está abrindo em z_+ e a parábola estribo está abrindo em z_-. Para responder (3), note que o termo quadrático com coeficiente negativo (positivo) é tipo $-y^2$ (x^2), logo, o plano de equação $y = 0$ $(x = 0)$ contém a parábola assento (estribo). Com isso, trata-se de uma *sela com assento abrindo em z_+ e contida em $y = 0$* (4). Outro caminho para resolver essas questões é proceder da seguinte maneira: substituir a equação do plano $x = 0$ na correspondente variável da equação da sela; fazer as devidas simplificações; realizar o mesmo procedimento para $y = 0$ e para $z = 0$; verificar em qual desses casos determinamos as parábolas assento e estribo; analisar geometricamente os procedimentos utilizados. Mais adiante, na subseção 4.3.7.3 (p. 250), aprofundaremos o que foi dito neste parágrafo.

Portanto, como vemos, as designações presentes em nossas propostas de registros em língua natural permitem Expansões Discursivas e Conversões. Daí, podemos fazer articulações/correlações entre os registros gráficos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural apresentadas no Quadro 4.29 (p. 182) dos seis casos de posições padrão expostos nesse quadro. Em especial, podemos identificar e (re)conhecer no sistema cartesiano os seis casos e sela padrão partindo das parábolas padrão e assento.

4.3.6.5 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL DOS ELIPSOIDES, HIPERBOLOIDES, CONES QUÁDRICOS ELÍPTICOS, E PARABOLOIDES TRANSLADADOS E/OU ROTACIONADOS

Nos casos em que há translação ou rotação propomos que os registros em língua natural sejam usados de maneira análoga ao que fizemos para as cônicas na subseção 4.2.3.4 (p. 162).

4.3.7 ARTICULAÇÕES ENTRE OS REGISTROS GRÁFICOS, *BÁSICOS* SIMBÓLICOS E *BÁSICOS* EM LÍNGUA NATURAL

Considerando o estudo que fizemos a respeito das variáveis visuais (subseção 4.3.1), dos registros simbólicos e suas unidades simbólicas correspondentes (subseção 4.3.5) e dos registros em língua natural (subseção 4.3.6) das quádricas, nesta subseção analisaremos/discutiremos *com mais profundidade* as articulações/correlações entre os registros cartesianos, *básicos* simbólicos e *básicos* em língua natural correspondentes para essas superfícies.

Dividiremos a apresentação nas seguintes partes:

- Articulações que envolvem interseções com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados (subseção 4.3.7.1);
- articulações que envolvem as “elipses com eixos aumentando” dos hiperboloides, dos cones quádricos elípticos e dos paraboloides elípticos (subseção 4.3.7.2);
- articulações que envolvem “parábolas assento e estribo” dos parabo-

loides hiperbólicos (subseção 4.3.7.3);
- "outras articulações" (subseção4.3.7.5);
- articulações que envolvem interseções com eixos coordenados (subseção 4.3.7.4).

4.3.7.1 ARTICULAÇÕES QUE ENVOLVEM INTERSEÇÕES COM PLANOS

Nesta subseção analisaremos/discutiremos todas as possibilidades de interseções das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas padrão com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados incluindo o ponto de vista das unidades significantes simbólicas das equações dessas superfícies e das cônicas determinadas.

Antes de iniciarmos o estudo é necessário revisarmos os seguintes conteúdos: articulações entre os registros cartesianos, básicos simbólicos e básicos em lingua natural das cônicas (veja a subseção 4.2.4 – p. 164); registros básicos simbólicos e suas unidades significantes simbólicas das quádricas (veja a subseção 4.3.5 – p. 208); equações dos planos coordenados e dos planos paralelos aos planos coordenados (revisaremos a seguir).

No que diz respeito aos citados planos, as equações $z = 0, y = 0$ e $x = 0$ são os registros simbólicos respectivamente dos planos coordenados xy, xz e yz e as equações $z = k_1$, $y = k_2$ e $x = k_3$; k_1, k_2 e k_3 são números reais são respectivamente as equações dos planos paralelos aos planos coordenados xy, xz e yz.[49]

No sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ a equação $\alpha = k; k \in R$ é a equação do plano perpendicular ao eixo coordenado α e paralelo ao plano coordenado $\beta\gamma$. Se $k = 0$, então o plano de equação $\alpha = k$ coincide com o plano $\beta\gamma$, se $k > 0$ ($k < 0$), então o plano de equação $\alpha = k$ é a translação do plano $\beta\gamma$ k unidades no sentido positivo (negativo) do eixo α.

Algebricamente, para o estudo da interseção de uma quádrica de equação E com um dos planos coordenados e com um dos planos paralelos aos planos coordenados sugerimos o procedimento de "**substituir a equação do plano na correspondente variável de E e, a seguir, fazer simplificações**". Em cada substituição apenas uma entre as

[49]É claro que aquelas equações são casos particulares destas em que k_1, k_2 e k_3 são iguais ao zero. Se esses números forem não nulos, então $z = k_1$, $y = k_2$ e $x = k_3$ representam planos paralelos *distintos* aos planos coordenados.

equações $z = k_1, y = k_2$, $x = k_3$ deve ser substituída na correspondente variável de E. Feito essa substituição sabemos que a variável da equação da quádrica que foi substituída pela equação do plano se *transformará* numa constante e, consequentemente, determinaremos uma equação com duas variáveis que irá se referir a uma das cônicas. Quando os objetos determinados são elipses, hipérboles e parábolas (cônicas não degeneradas) sugerimos que as equações estejam na forma básica, pois, assim, reconhecemos de forma imediata as unidades significantes simbólicas das equações dessas cônicas. Para simplificar a escrita da Tese chamaremos cada uma dessas substituições e as seguidas simplificações de **procedimento *P*** ou simplesmente ***P***. No uso desse procedimento sugerimos que a interpretação geométrica implícita seja considerada.

Como **exemplo** do uso desse procedimento, faremos o procedimento P entre a equação $z = 1$ (plano paralelo ao plano xy) e a equação (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (hiperboloide de uma folha abrindo em z). Com isso, ficamos com:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{c^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{c^2} + 1$$

$$\rightarrow \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = \tfrac{c^2+1}{c^2} \rightarrow \tfrac{x^2}{a^2(c^2+1)/c^2} + \tfrac{y^2}{b^2(c^2+1)/c^2} = 1$$

O significado desse procedimento é que a interseção do plano e da quádrica em questão determina uma elipse que está contida nesse plano. Logo, determinamos uma elipse que é "perpendicular ao eixo z", que intercepta esse eixo no ponto $(0; 0; 1)$ e que é "paralela ao plano xy".[50]

Feito essa breve revisão, partiremos para as análises das interseções sobre o ponto de vista das unidades significantes simbólicas. Iniciaremos com dois exemplos particulares para, mais a frente, propormos análises mais genéricas.

No primeiro **exemplo**, considere o elipsoide de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (E) e o plano coordenado xy (equação $z = 0$). O que determinamos na interseção desses dois objetos? Para respondermos essa questão basta substituirmos $z = 0$ na variável z de E e fazermos as simplificações para, assim, determinarmos a equação básica $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Do ponto de vista de unidades significantes simbólicas, vemos que determinamos uma equação tal que um dos membros

[50]Ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo α" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo. De forma análoga, "elipse paralela ao plano β e γ" quer dizer que o plano que contém essa elipse é paralelo ao plano β e γ". Essa forma de escrever é apenas para reduzir à escrita.

possui dois termos quadráticos com mesmo sinal (e positivos) e no outro membro há apenas o número um. Portanto, a interseção da quádrica com o plano em questão determina uma elipse.

No segundo **exemplo**, considere o hiperboloide de duas folhas abrindo em z de equação básica $-x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ (E). É possível obtermos hipérboles ou parábolas na interseção dessa quádrica com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados? Analisando as unidades significantes da quádrica, temos às seguintes unidades: um dos membros da equação básica possui três termos quadráticos sendo dois sinais iguais e negativos e um com sinal diferente e positivo; o outro membro possui apenas o número um. Para termos uma hipérbole é necessário as seguintes unidades significantes: em um dos membros há dois termos quadráticos com sinais opostos; o outro membro há apenas o número um. No caso das parábolas, é necessário as seguintes unidades: um dos membros possui um termo quadrático com coeficiente um; o outro membro possui um termo linear com coeficiente positivo/negativo (parábolas abrindo no sentido positivo/negativo). Substituindo $x = k_3; k_3 \in R$ (planos paralelos ao plano yz) em E e fazendo simplificações (procedimento P) temos as seguintes unidades simbólicas: um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos; o outro membro há apenas o número um (hipérbole). Se realizarmos o procedimento P com $y = k_2; k_2 \in R$ (planos paralelos ao plano xz) também teremos resultados análogos. Logo, a interseção da quádrica com os planos paralelos ao plano yz e ao plano xz determinam hipérboles. Já se realizarmos o procedimento P com $z = k_1; k_1 \in R$ (planos paralelos ao plano xy), independente do valor de $z = k_1$, não teremos dois termos quadráticos com sinais opostos no mesmo membro da equação e, por isso, as interseções da quádrica com esses planos não determinam hipérboles. Analisando as unidades significantes da quádrica vemos que se realizarmos o procedimento P com qualquer um desses planos em questão nunca determinaremos um termo linear e, por isso, nunca teremos parábolas padrão ou transladadas[51].

A seguir, aprofundaremos, de maneira mais genérica e para cada uma das quádricas, a análise das interseções sobre o ponto de vista das unidades significantes simbólicas. A estratégia básica dessa análise consiste em identificar semioticamente como fica a equação da quádrica

[51] No caso das parábolas transladadas além das unidades significantes simbólicas das parábolas padrão temos as unidades que indicam translações nas direções dos dois eixos coordenados (geralmente indicamos por $-x_0$ e $-y_0$). É o caso, por exemplo, de $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ que representa as translações nas direções dos eixos x e y de $x^2 = 4py$. Quando $x_0 = y_0 = 0$ claro que não há translação.

após realizar o procedimento P. Para tanto, é necessário saber essas unidades tanto para as quádricas quanto para as cônicas.

No caso dos elipsoides um dos membros da equação básica possui termos três quadráticos que têm mesmo sinal (e positivos) e o outro membro há o número um. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados ($z = 0; y = 0; x = 0$) teremos um dos membros da equação básica com dois termos quadráticos com sinais iguais (e positivos) e o outro membro possui apenas o número um, assim, só podemos determinar elipses. Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados ($z = k_1, y = k_2, x = k_3; k_1.k_2.k_3 \neq 0$ teremos três possibilidades: a anteriormente citada (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais (e negativos) e o outro membro possui apenas o número um (cônica degenerada – vazio); as coordenadas de pontos (cônica degenerada - ponto).

Para os hiperboloides de uma folha, um dos membros da equação básica possui três termos quadráticos sendo dois com dois sinais iguais e positivos e um com sinal diferente e negativo e o outro membro possui apenas o número um. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados teremos as seguintes possibilidades: um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (o que determina uma elipse); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles). Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados teremos seguintes possibilidades: as duas anteriores (elipses; hipérboles); cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior).

Para os hiperboloides de duas folhas, um dos membros da equação básica possui três termos quadráticos sendo dois com dois sinais iguais e negativos e um com sinal diferente e positivo e o outro membro possui apenas o número um. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados teremos as seguintes possibilidades: um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e negativos e o membro outro possui apenas o número um (cônica degenerada – vazio); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles). Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados teremos seguintes possibilidades: as anteriores (cônica degenerada – vazio; hipérboles); as coordenadas de pontos (cônica degenerada – ponto); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o membro outro possui apenas o número um (elipses).

Para os cones quádricos elípticos, um dos membros da equação básica possui três termos quadráticos sendo dois com sinais iguais e positivos e um com sinal diferente e negativo e o outro membro possui apenas o número zero. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados teremos as seguintes possibilidades: cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior); as coordenadas de um ponto (cônica degenerada – a origem). Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados teremos seguintes possibilidades: um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).

Obviamente, se multiplicarmos a equação do cone por (-1) teremos outra forma da equação com as seguintes unidades: um dos membros possui três termos quadráticos sendo dois com sinais iguais e negativos e um com sinal diferente e positivo; o outro membro possui apenas o número zero. Assim, a análise do que determinamos nas interseções será a análoga ao que acabemos de fazer no parágrafo anterior.

Para os paraboloides elípticos abrindo no sentido positivo/negativo, um dos membros da equação básica possui dois termos quadráticos com coeficientes com sinais iguais e positivos/negativos e o outro membro possui um termo linear com coeficiente igual a um. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados teremos as seguintes possibilidades: um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal positivo/negativo (parábolas abrindo no sentido positivo/negativo); as coordenadas de um ponto (cônica degenerada – a origem). Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados teremos seguintes possibilidades: a primeira possibilidade anterior (parábolas abrindo no sentido positivo/negativo); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e negativos e o outro possui apenas o número um (cônica degenerada - vazio).

Para os paraboloides hiperbólicos, um dos membros da equação básica possui dois termos quadráticos com coeficientes com sinais opostos e o outro membro possui um termo linear com coeficiente igual a um. Depois de feito P com as equações dos planos coordenados teremos as seguintes possibilidades: um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal positivo (parábolas abrindo no sentido positivo); um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal negativo (parábolas abrindo no sentido negativo); cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior). Depois de feito P com as equações dos planos paralelos *distintos* aos planos coordenados teremos seguintes possibilidades: as duas primeiras possibilidades anteriores (parábolas abrindo no sentido positivo e negativo); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).

O quadro a seguir sintetiza a análise de todas as possibilidades de interseções das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados sobre o ponto de vista das unidades significantes simbólicas das equações básicas dessas superfícies e das cônicas.

Na segunda coluna do quadro estão às "unidades significantes simbólicas da equação básica da quádrica", na terceira e quarta colunas estão às "unidades significantes simbólicas da equação básica da cônica definida após realizarmos o procedimento P".

Quadro 4.66 – Análise das interseções com planos sobre o ponto de vista das unidades significantes simbólicas das equações básicas.

Tipo de quádrica padrão	**Unidades significantes simbólicas da equação básica da quádrica**	**Unidades significantes simbólicas da equação básica da cônica definida após realizar o procedimento P com $z = 0; y = 0; x = 0$.**	**Unidades significantes simbólicas da equação básica cônica definida após realizar o procedimento P com $z = k_1; y = k_2; x = k_3; k_1.k_2.k_3 \neq 0$.**

Elipsoide	Um dos membros possui termos três quadráticos que têm mesmo sinal (e positivos) e o outro membro há o número um.	Um dos membros com dois termos quadráticos com sinais iguais (e positivos) e o outro membro possui apenas o número um (elipses).	A possibilidade ao lado (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais (e negativos) e o outro membro possui apenas o número um (cônica degenerada – vazio); as coordenadas de pontos (cônica degenerada - ponto).
Hiperboloide de uma folha abrindo em α.	Um dos membros possui três termos quadráticos sendo dois com dois sinais iguais e positivos e um com sinal diferente e negativo e o outro membro possui apenas o número um.	Um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipse); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).	As possibilidades ao lado (elipses; hipérboles); cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior).

Hiperboloide de duas folhas abrindo em α.	Um dos membros possui três termos quadráticos sendo dois com dois sinais iguais e negativos e um com sinal diferente e positivo e o outro membro possui apenas o número um.	Um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e negativos e o outro possui apenas o número um (cônica degenerada - vazio); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).	As possibilidades ao lado (cônica degenerada - vazio; hipérboles); as coordenadas de pontos (cônica degenerada – ponto); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o membro outro possui apenas o número um (elipses).

Cone quádrico elíptico abrindo em α.	Um dos membros possui três termos quadráticos sendo dois com sinais iguais e positivos e um com sinal diferente e negativo e o outro membro possui apenas o número zero. Se multiplicarmos as equações por (-1) teremos uma equação com 3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo. O que é importante é que em ambos os casos a variável com sinal diferente é a mesma.	Cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior); as coordenadas de um ponto (cônica degenerada – a origem).	Um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).

Paraboloide abrindo em α_+.	Um dos membros da equação básica possui dois termos quadráticos com coeficientes com sinais iguais e positivos e o outro membro possui um termo linear com coeficiente igual a um.	Um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal positivo (parábolas abrindo no sentido positivo); as coordenadas de um ponto (cônica degenerada – a origem).	A primeira possibilidade ao lado (parábolas abrindo no sentido positivo); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e negativos e o outro possui apenas o número um (cônica degenerada – vazio).

Paraboloide abrindo em α_-.	Um dos membros da equação básica possui dois termos quadráticos com coeficientes com sinais iguais e negativos e o outro membro possui um termo linear com coeficiente igual a um.	Um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal negativo (parábolas abrindo no sentido negativo); as coordenadas de um ponto (cônica degenerada – a origem).	A primeira possibilidade ao lado (parábolas abrindo no sentido negativo); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro possui apenas o número um (elipses); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e negativos e o outro possui apenas o número um (cônica degenerada – vazio)

Sela com assento abrindo em α_+ e contido em $\beta = 0$.	Um dos membros da equação básica possui dois termos quadráticos com coeficientes com sinais opostos e o outro membro possui um termo linear com coeficiente igual a um.	Um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal positivo (parábolas abrindo no sentido positivo); um dos membros possui um termo linear com coeficiente um e o outro membro possui um termo quadrático com coeficiente com sinal negativo (parábolas abrindo no sentido negativo) cada membro possui um termo linear com coeficientes com mesmo sinal (cônica degenerada – reta); cada membro possui um termo linear com coeficientes com sinais opostos (cônica degenerada – reta concorrente a anterior).	As duas primeiras possibilidades ao lado (parábolas abrindo no sentido positivo e negativo); um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro possui apenas o número um (hipérboles).

Fonte: O autor

Conforme vimos, os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor do termo independente (zero ou um) são unidades significantes simbólicas das equações. Daí, para cada quádrica padrão é importante (re)conhecermos os elementos do *conjunto das unidades simbólicas* da equação além da combinação desses elementos na equação em questão. Com isso, podemos saber se haverá ou não elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas nas interseções com planos. Consequentemente, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e cartesianos (da superfícies quádrica como um todo e das interseções determinadas) se correspondem da maneira como conhecemos. Por isso, algebricamente o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das quádricas são as condições semióticas que possibilitam as correlações entre as equações e as formas geométricas das quádricas. Nessas correlações os procedimentos algébricos e geométricos subjacentes às interseções entre as quádricas e os planos (coordenados e paralelos aos planos coordenados) são as operações matemáticas responsáveis pelo processo de significação. Ao desprezar esses procedimentos, ao invés de fazermos Conversões, nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações. Porém, em decorrência do tempo didático, em geral é impraticável realizar tais procedimentos de forma completa no estudo de todas as quádricas. Por isso, confrontando a citada relevância desses procedimentos com o tempo didático, sugerimos que eles sejam feitos de forma completa em apenas uma das quádricas. Para as demais, a partir de uma situação de institucionalização do conhecimento, podemos estender o uso de tais procedimentos sem realizá-los de forma completa. Nesses casos, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, optamos em chamar a atenção para o conjunto/combinação das unidades significantes das equações de cada quádrica e, a partir daí, analisar quais são possibilidades de valores visuais (elipses; parábolas; ...) que podemos determinar nas interseções com planos.

Nesse caminho, visualmente o uso do Geogebra permite estudar todas as interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados de maneira rápida e dinâmica. Além disso, as propriedades de *reflexões* (subseção 4.3.8.1 - p. 254) permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica e, assim, as análises que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem feitas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Daí, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos. Dessa forma, pode-se otimizar o tempo didático e certamente o tempo de aprendizagem.

4.3.7.2 ARTICULAÇÕES QUE ENVOLVEM AS "ELIPSES COM EIXOS AUMENTANDO" DOS HIPERBOLOIDES, DOS CONES QUÁDRICOS ELÍPTICOS E DOS PARABOLOIDES ELÍPTICOS

Especificamente para o caso dos hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos padrão, na subseção 4.3.4.6 (p. 201), dissemos que as interseções com planos paralelos (coincidentes ou distintos) a um dos planos coordenados determinam elipses ou cônicas degeneradas. Genericamente, chamamos de eixo α o eixo coordenado perpendicular a esses planos e sabemos os centros dessas elipses estão sobre esse eixo. Visualmente, comentamos que é significativo o fato de que os eixos maior e menor (ou raio) dessas elipses aumentam de tamanho à medida que elas se afastam da origem seguindo na direção do eixo α. Para os paraboloides elípticos padrão as elipses são determinadas em apenas um dos sentidos do eixo α (apenas no sentido positivo ou apenas no sentido negativo desse eixo). Nesta subseção articularemos/correlacionaremos com mais profundidade e de forma genérica os aspectos cartesianos, algébricos e linguísticos subjacentes a essas elipses. Faremos isso a partir das atividades seguintes.

1 No sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ (os eixos coordenados são os eixos α, β e γ) podemos fazer as seguintes generalizações:

Quadro 4.67 – elipses com eixos aumentando: correlações entre registros

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Unidade simbólica correspondente na equação básica da quádrica**
Hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em α.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo α.	A variável quadrática α^2 tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas.

Paraboloide elíptico abrindo em α_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo α_+.	- A variável linear é α; - as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinais positivos.
Paraboloide elíptico abrindo em α_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo α_-.	- A variável linear é α; - as variáveis quadráticas têm coeficientes com sinais negativos.

Fonte: O autor

Tomamos por definição a correspondência entre as colunas um e dois do quadro anterior. Porém, ainda falta justificar as correlações com a coluna três. Para tanto, responda os itens a seguir:

a) Para os hiperboloides de uma folha/duas folhas/cones quádrico elíptico, se na equação básica a variável quadrática α^2 tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas, então temos que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares" ao eixo coordenado α. Justifique, em função das unidades significantes simbólicas, essa afirmação.[52]
b) para os paraboloides elípticos, por qual motivo na equação básica a variável linear deve ser α para termos que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares" ao eixo coordenado α? Justifique sua resposta em função das unidades significantes simbólicas.[53]

Respostas:

a) Sabemos que um dos membros das equações básicas das quádricas em questão têm três termos quadráticos sendo dois com sinais iguais e um com sinal diferente. Por hipótese, o termo que possui a variável α^2 é o que possui sinal diferente. Desconsideremos os casos em que as interseções determinam degeneradas e usaremos o procedimento P para realizar as análises das interseções. Após realizarmos o procedimento P em α^2 essa variável será um número real e, depois de feito as simplificações, restará uma equação básica de cônica tal que em um dos membros haverá apenas dois termos quadráticos com sinais iguais (necessários para termos uma elipse). Se realizarmos o procedimento

[52]Para resolver este item sugerimos acessar os Quadros 4.54 (p. 210), 4.55 (p. 211) e 4.56 (p. 211).
[53]Para resolver este item sugerimos que acessar o Quadro 4.57 (p. 212).

P em qualquer uma das outras variáveis da equação básica da quádrica teremos, depois das simplificações, uma equação básica de cônica com dois termos quadráticos sendo que um desses termos é α^2 e o outro, por hipótese, terá sinal diferente de α^2. Assim, serão dois termos quadráticos com sinais opostos no mesmo membro da equação e, com isso, não definimos elipses. Logo, se desejamos ter elipses o procedimento P deve ser realizado na variável quadrática com sinal diferente, ou seja, em α^2. Sabemos que realizar o procedimento P na variável α^2 implica geometricamente definir as interseções com planos perpendiculares ao eixo α. Portanto, concluímos que geometricamente os resultados de P realizados no termo quadrático com sinal diferente (α^2) definem elipses perpendiculares ao eixo coordenado α.
b) Sabemos que nas equações básicas das quádricas em questão um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e no outro há apenas uma variável linear. Por hipótese, a variável linear é α. Desconsideremos os casos em que as interseções determinam degeneradas e usaremos o procedimento P para realizar as análises das interseções. Após realizarmos o procedimento P em α essa variável será um número real e restará uma equação básica de cônica tal que em um dos membros haverá apenas dois termos quadráticos com sinais iguais (necessários para termos uma elipse). Se realizarmos o procedimento P nas variáveis quadráticas restará as unidades significantes simbólicas de uma parábola. Portanto, concluímos que geometricamente os resultados de P realizados no termo linear (α) definem elipses perpendiculares ao eixo coordenado α.

Comentários: no caso dos hiperboloides de uma folha a variável quadrática que tem coeficiente com sinal diferente tem sinal positivo já para os hiperboloides de duas folhas essa variável tem coeficiente com sinal negativo. No caso dos cones quádrico elíptico, como o termo independente da equação é zero, então a variável quadrático que tem coeficiente com sinal diferente pode ser positivo ou negativo (basta multiplicarmos a equação por -1).

Além disso, tendo como base o conhecimento de que eixo (ou semieixo) coordenado que as “elipses com eixos aumentando” são perpendiculares”, podemos diferenciar e (re)conhecer a posição da correspondente quádrica no sistema cartesiano.

2 Considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$, as constantes reais positivas a, b e c e os planos de equação $\alpha = k; k\in R$. Sabemos que esses planos são perpendiculares ao eixo coordenado α e paralelos ao

plano coordenado $\beta\gamma$. Também sabemos que à medida que aumentam os valores de k os planos $\alpha = k$ se afastam da origem e se k aumenta e $k > 0$ então esses planos se afastam no *sentido positivo do eixo* α (chamado de semieixo α_+) e se k aumenta em módulo e $k < 0$ então esses planos se afastam no *sentido negativo do eixo* α (chamado de semieixo α_-).

Para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides elípticos, vimos que as interseções dessa quádricas com infinitos planos paralelos a um dos planos coordenados determinem elipses (ou possivelmente cônicas degeneradas) que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas interseções se afastam da origem. Com isso, temos a impressão de que essas quádricas abrem.

Suponha, conforme discutido na atividade anterior, que para determinarmos as "elipses com eixos aumentando" o procedimento P deve ser realizado na variável α. O quadro a seguir apresenta algumas questões relacionadas a determinação dessas elipses.

Quadro 4.68 – elipses com eixos aumentando: correlações entre registros

Equação básica da quádrica	**Unidade simbólica da equação básica da quádrica que deve passar por P para determinarmos elipses (ou possivelmente degeneradas).**	**Equação básica da interseção com o plano $\alpha = k$ (após realizado o procedimento P)**
$\frac{\beta}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} = 1$ (Hiperboloide de uma folha abrindo em α.)	A variável quadrática α^2.	**Elipses:** $\begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(c^2+k^2)/c^2} + \frac{\gamma^2}{b^2(c^2+k^2)/c^2} = 1 \end{cases}$

$-\frac{\beta}{a^2}-\frac{\gamma^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}=1$ (Hiperboloide de duas folhas abrindo em α.)	Idem	**Elipses:** – Se $k > c$ ou $k < -c \rightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(-c^2+k^2)/c^2}+\frac{\gamma^2}{b^2(-c^2+k^2)/c^2}=1 \end{cases}$ **Degeneradas:** – Se k $=\pm c \rightarrow$(0,0,$\pm c$); – se $-c < k < c \rightarrow S=\phi$.
$\frac{\beta}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}-\frac{\alpha^2}{c^2}=0$ (Cone quádrico elíptico abrindo em α.)	idem	**Elipses:** – Se $k \neq 0\rightarrow$ $\begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{(a^2k^2)/c^2}+\frac{\gamma^2}{(b^2k^2)/c^2}=1 \end{cases}$ **Degenerada:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0).
$\alpha=\frac{\beta}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}$ (Paraboloide elíptico abrindo em α_+.)	A variável linear α.	**Elipses:** – Se $k > 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2k}+\frac{\gamma^2}{b^2k}=1 \end{cases}$ **Degeneradas:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0); - se $k < 0 \rightarrow S=\phi$
$\alpha=-\frac{\beta}{a^2}-\frac{\gamma^2}{b^2}$ (Paraboloide elíptico abrindo em α_-.)	Idem	**Elipses:** – Se $k < 0\rightarrow \begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(-k)}+\frac{\gamma^2}{b^2(-k)}=1 \end{cases}$ **Degeneradas:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0); - se $k > 0 \rightarrow S=\phi$

Fonte: O autor

Responda as questões seguintes:

a) Desconsiderando as cônicas degeneradas, algebricamente, por que as "elipses com eixos aumentando" aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas (ou o plano que as determina) se afastam da origem?
b) para os paraboloides elípticos abrindo em α_+, por que as elipses são determinadas apenas no semieixo α_+? Dê sua resposta em função das unidades significantes simbólicas das equações básicas da terceira coluna do Quadro anterior.
c) para os paraboloides elípticos abrindo em α_-, por que as elipses são determinadas apenas no semieixo α_-? Dê sua resposta em função das unidades significantes simbólicas das equações básicas da terceira coluna do Quadro anterior.

d) por que os centros das “elipses com eixos aumentando” estão sobre o eixo α?

Respostas:

a) Por hipótese, as interseções que determinam elipses se afastam da origem e, obviamente, os planos que as determinam também se afastam da origem. Algebricamente, para que isso ocorra, é necessário aumentar os valores de k o que, consequentemente, aumentam os denominadores das equações da quarta coluna do quadro anterior. O aumento desses denominadores implica aumentar as medidas dos eixos (ou do raio). Logo, à medida que essas elipses se afastem da origem seus eixos aumentam e as quádricas abrem.
b) Se $k > 0$ as unidades significantes simbólicas após realizado P são: um dos membros possui dois termos quadráticos e positivos; no outro membro temos apenas um. Com isso, de fato definimos elipses. Se $k < 0$ as unidades significantes simbólicas da equação após realizado P são: um dos membros possui dois termos quadráticos e negativos; no outro membro temos apenas um. Com isso, não definimos elipses e sim o conjunto vazio. Observe que as elipses foram definidas apenas $k > 0$ o que significa, em termos geométricos, que as elipses (ou os planos que as contêm) são definidas apenas no semieixo α_+.
c) Se $k > 0$ as unidades significantes simbólicas da equação após realizado P são: um dos membros possui dois termos quadráticos e negativos; no outro membro temos apenas um. Com isso, não definimos elipses e sim o vazio. Se $k < 0$ as características dos termos da equação depois de realizado P são: um dos membros possui dois termos quadráticos e positivos; no outro membro temos apenas um. Com isso, de fato definimos elipses. Observe que as elipses foram definidas apenas $k < 0$, o que significa, em termos geométricos, que as elipses (ou os planos que as contêm) são definidas apenas no semieixo α_-.
d) porque nas equações da terceira coluna do Quadro anterior não há os termos que caracterizam translação ($-\beta_0$ e $-\gamma_0$) ou eles valem zero.

4.3.7.3 ARTICULAÇÕES QUE ENVOLVEM "PARÁBOLAS ASSENTO E ESTRIBO" DOS PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS

Vimos, na subseção 4.3.3.7 (p. 192), que as interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas em sentidos opostos. Chamamos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, dessa forma, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (chamamos de semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (chamamos de semieixo α_+). Assim, adotamos as seguintes convenções:

- *Parábola assento* ou, simplesmente, *assento* é a que está abrindo em α_+;
- *parábola estribo* ou, simplesmente, *estribo* é a que está abrindo em α_-.

Nesta subseção articularemos/correlacionaremos com mais profundidade e de forma genérica os aspectos cartesianos, algébricos e linguísticos subjacentes a essas parábolas.

Discutiremos essas articulações a partir da atividade seguinte.

1 Considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$, as constantes reais positivas a,b e c e uma sela em que a variável linear da equação básica é α, a variável quadrática que tem coeficiente com sinal negativo é β^2 e a variável quadrática que tem coeficiente com sinal positivo é γ^2 ou, em outros termos, a equação básica dessa sela é $\alpha = \gamma/a^2 - \beta/b^2$. Em função as unidades significantes simbólicas dessa equação, justifique por qual motivo trata-se de uma *"sela com assento abrindo em α_+ e contida no plano de equação $\beta = 0$"*?[54]

Resposta:
Realizando o procedimento P com a equação $\beta = 0$ ficamos com a equação $(\gamma^2 = a^2.\alpha)$. Geometricamente significa que a interseção do plano de equação $\beta = 0$ com a sela determina uma parábola contida nesse plano e abrindo em α_+, ou seja, trata-se da "parábola assento abrindo em α_+ e contida no plano de equação $\beta = 0$". Observe que se realizarmos o procedimento P com a equação $\gamma = 0$ ficamos com $(\beta^2 = -b^2.\alpha)$. Geometricamente significa que a interseção do plano de

[54]Para resolver esta atividade sugerimos que sejam acessados as unidades simbólicas da p. 213 e o procedimento P da página 231.

equação $\gamma = 0$ com a sela determina uma parábola contida nesse plano e abrindo em α_-, ou seja, trata-se da "parábola estribo abrindo em α_- e contida no plano de equação $\beta = 0$".

Comentário: como consequência das definições que fizemos a respeito de assento e estribo, se soubermos que a parábola assento está contida no plano coordenado de equação $\beta = 0$ e está abrindo no semieixo α_+, então a parábola estribo estará contida no plano coordenado que é perpendicular ao plano de equação $\beta = 0$ e que contém o semieixo α_-. Dessa forma, podemos diferenciar e (re)conhecer a posição dos seis tipos de selas padrão tendo como base o semieixo que a parábola assento está abrindo bem como o plano coordenado que a contém.

4.3.7.4 ARTICULAÇÕES QUE ENVOLVEM INTERSEÇÕES COM EIXOS COORDENADOS

Semioticamente, no estudo das interseções das quádricas com os eixos coordenados, há algumas questões algébricas e figurais relevantes que se articulam/correlacionam. Analisaremos/discutiremos essas questões nesta subseção.

Inicialmente, considere que os eixos coordenados sejam α_1, α_2 e α_3. Para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão valem as seguintes afirmações:

Quadro 4.69 – Generalizações a respeito das interseções com os eixos coordenados

Tipo de objeto	**Interseção com α_1**	**Interseção com α_2**	**Interseção com α_3**
Elipsoide	2 pontos distintos	2 pontos distintos	2 pontos distintos
Hiperboloide de uma folha	2 pontos distintos	2 pontos distintos	ϕ
Hiperboloide de duas folhas	2 pontos distintos	ϕ	ϕ
Cone quádrico elíptico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)
Paraboloide elíptico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)
Paraboloide hiperbólico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)

Fonte: O autor

Num sistema cartesiano xyz a interseção das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm a equação com termo independente igual a zero (cones quádricos elípticos padrão e paraboloides padrão) com os eixos x ou y ou z é o ponto de coordenadas $O(0,0,0)$, ou seja, a origem do sistema cartesiano. No caso das demais quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm termo independente diferente de zero (elipsoides e hiperboloides) não há interseção com a origem. Portanto, para o caso das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas o termo independente é uma unidade significante na identificação da interseção com a origem.

No caso dos elipsoides padrão, o procedimento algébrico para determinarmos as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados consiste inicialmente em escrever a equação na forma básica ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$) e, a seguir, calcular os valores das constantes a, b e c que são respectivamente as raízes quadradas dos denominadores dos termos x^2, y^2 e z^2 (suponha que as variáveis sejam x, y e z). Feito isso, valem as seguintes afirmações:

- Pontos de interseção com o eixo $z \leftrightarrow P(0,0,\pm c)$;
- pontos de interseção com o eixo $y \leftrightarrow P(0,\pm b,0)$;
- pontos de interseção o eixo $x \leftrightarrow P(\pm a,0,0)$.

Para os hiperboloides padrão as interseções com os eixos coordenados, quando não vazias, são determinadas algebricamente de forma análoga a que fizemos com as elipsoides. No caso em que o termo quadrático da equação básica tem coeficiente negativo à interseção com correspondente eixo é vazia. Assim, em $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ as interseções com os eixos y e z é vazia e com o eixo x é o ponto indicado $P(\pm a, 0, 0)$. Em $-x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ a interseção com o eixo x é vazia e com os eixos y e z são respectivamente os pontos indicados por $P_1(0,\pm b,0)$ e $P_2(0,0,\pm \text{c})$.

Como vemos, do ponto de vista das interseções das elipsoides e hiperboloides padrão com os eixos coordenados as raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos *das equações básicas* são significativas, pois, determinam as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção(ões) com esses eixos. Para essas quádricas os sinais dos coeficientes dos termos quadráticos também são significativos sendo que quando eles forem positivos indica que há interseção com o correspondente eixo e quando eles são negativos indica que não há interseção com esse eixo.

4.3.7.5 OUTRAS ARTICULAÇÕES

Além do que já discutimos semioticamente a respeito de articulações/correlações entre registros, há outras questões que podem ser tomadas. Nesta subseção elas serão levantadas.

Em primeiro lugar, cabe lembrar que as interseções das quádricas com planos determinam cônicas. Por isso, no estudo dessas interseções podemos incluir as unidades significantes das cônicas nas análises. Para tanto, basta primeiro realizar o procedimento P e, a seguir, como determinamos equações das cônicas, proceder da mesma forma que foi proposto na subseção que trata das articulações das cônicas (ver a subseção 4.2.4 – p. 164).

Para o caso das variáveis visuais *específicas* dos elipsoides (subseção 4.3.1.3 – p. 183) já discutimos as articulações na própria subseção.

Em todos os casos, é possível que as Conversões sejam feitas em duplo sentido.

Outra questão, que não temos como objetivo discutir profundamente nesta Tese, são as superfícies de rotação (ou revolução). Contudo, pensamos que possivelmente elas envolvam variáveis visuais específicas. No caso das quádricas que podem ser de rotação, cabe o breve comentário de que podemos analisá-las semioticamente a partir do procedimento P e tendo os denominadores das equações básicas como unidades significantes simbólicas. Caso haja interesse, alguns detalhes matemáticos a respeito das rotações podem ser vistos em Camargo e Boulos (2005, p. 446). Com esses detalhes podemos ter bons indicativos de estudos na perspectiva da TRRS.

4.3.8 ALGUMAS PROPRIEDADES QUE CONTRIBUEM PARA A INTERPRETAÇÃO GLOBAL

Nesta subseção discutiremos algumas propriedades de reflexão e de simetria. Pretendemos que elas contribuam para a *interpretação global de propriedades figurais.*

4.3.8.1 REFLEXÕES DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

No estudo das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas o recurso das reflexões em torno dos planos de equação $x = 0, y = 0, z = 0, x = y, x = z$ ou $y = z$ permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica e, assim, temos uma visão global dessas posições. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma dessas quádricas podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as afirmações que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Como exemplo, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos. Dessa forma, pode-se otimizar o tempo didático e o tempo de aprendizagem.

Algebricamente, *apresentamos*, a seguir, algumas propriedades de reflexões que permitem tal estudo. Nosso objetivo é apenas aplicá-las e adiantamos que o uso delas com as equações básicas são bastante simples. Caso haja interesse na exploração visual destas propriedades, sugerimos o uso do Geogebra.

Em um sistema de coordenadas xyz, considere as superfícies S_1 e S_2 de equações, respectivamente, E_1 e E_2. Valem as propriedades[55] seguintes que chamaremos respectivamente de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6:

- Se E_2 for obtida a partir da substituição de z por $(-z)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano xy;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de y por $(-y)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano xz;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por $(-x)$ em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano yz;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por y e de y por x em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $x = y$;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de x por z e de z por x em E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $x = z$;
- se E_2 for obtida a partir da substituição de y por z e de z por y em

[55] Essas propriedades estão descritas resumidamente em Anton (2002, p. 237).

E_1, então S_2 é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $y = z$.

Para resumir P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 adotaremos respectivamente os esquemas seguintes.

Figura 7 – Propriedades de reflexão

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } xy}]{z \leftrightarrow (-z)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } xz}]{y \leftrightarrow (-y)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } yz}]{x \leftrightarrow (-x)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } x=y}]{x \leftrightarrow y} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } x=z}]{x \leftrightarrow z} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } y=z}]{y \leftrightarrow z} E_2$$

Fonte: O autor

4.3.8.2 SIMETRIAS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

No entendimento das posições padrão a partir de propriedades globais o estudo das simetrias é parte importante (o Quadro 4.73 no fim desta subseção retoma essa questão). Por isso, nessa subseção, daremos atenção às simetrias em relação aos planos coordenados e veremos que elas podem ser analisadas do ponto de vista algébrico. A seguir, *apresentaremos* as propriedades que permitem tal estudo e as aplicaremos no estudo das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas.

Considere uma superfície S de equação E com variáveis x, y e z. Valem os seguintes resultados enunciados por Lehmann (2007).[56]

[56]Modificamos um pouco a apresentação original de Lehmann (2007). Nosso

Quadro 4.70 – Propriedades de simetria

E não é modificada quando substituímos x, y e z por	**S é simétrica em relação ao**
$-x, y, z$	plano yz
$x, -y, z$	plano xz
$x, y, -z$	plano xy
$-x, -y, z$	eixo z
$-x, y, -z$	eixo y
$x, -y, -z$	eixo x
$-x, -y, -z$	Origem

Fonte: Lehmann (2007, p. 347)

Dizemos que uma superfície é totalmente simétrica em relação ao sistema cartesiano quando ela for simétrica em relação aos três planos coordenados, aos três eixos coordenados e à origem. Da aplicação das propriedades do Quadro nos registros básicos simbólicos é imediato provar que as seguintes quádricas na posição padrão são totalmente simétricas em relação ao sistema cartesiano: elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos. Isso se deve ao fato de que, nesses casos, todos os termos com variáveis são quadráticos e, além, sabemos que $k^2 = (-k)^2$.[57] Como exemplo, o quadro a seguir verifica essa afirmação para o caso do hiperboloide de uma folha abrindo em z que tem $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ como equação básica.

Quadro 4.71 – Verificação das simetrias do hiperboloide de uma folha abrindo em z

Simetria em relação ao plano yz	$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xz	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(-z)^2}{c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)

objetivo é apenas aplicar as propriedades enunciadas por este autor.

[57]As superfícies são chamadas de *cêntricas* quando são simétricas em relação a um ponto, ponto esse chamado de centro. Os elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos são tipos de *superfícies quádricas cêntricas*. No caso em que essas quádricas estão na posição padrão o centro coincide com a origem do sistema cartesiano. Para ver a lista completa das quádricas cêntricas e não cêntricas ver Lehmann (2007, p. 375).

Simetria em relação ao eixo z	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo y	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação à origem	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)

Fonte: O autor

Para verificar que os outros dois hiperboloides nas posições padrão (abrindo em y e em x) são totalmente simétricos em relação ao sistema cartesiano podemos proceder da mesma maneira que fizemos no quadro anterior. Porém, se pensarmos no que discutimos na subseção de reflexões (4.3.8.1 - p. 254), os hiperboloides de uma folha abrindo em y e em x são determinados a partir de reflexões do correspondente hiperboloide abrindo em z. Assim, se este hiperboloide é totalmente simétrico em relação ao sistema cartesiano então aqueles também são. Da mesma forma, podemos verificar que os elipsoides, os hiperboloides de duas folhas e os cones quádricos padrão são totalmente simétricos. Para efeitos de simplificações de contas, Boulos (2010, p.403) demonstram que para que uma superfície seja totalmente simétrica em relação a um sistema cartesiano basta que ela seja simétrica em relação aos planos coordenados.

No caso dos paraboloides nas posições padrão temos simetria em relação a dois dos planos coordenados e ao eixo coordenado determinado pela interseção desses planos. Esse eixo é o correspondente a variável linear da equação básica. No caso do paraboloide elíptico abrindo em z_+, que tem $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ como equação básica, a variável linear é z e, por isso, ele é simétrico em relação ao eixo z e aos planos xz e yz - perceba que a interseção desses planos determina o eixo z. Para verificar essa afirmação, veja o quadro seguinte.

Quadro 4.72 – Verificação das simetrias do paraboloide elíptico abrindo em z_+

Simetria em relação ao plano yz	$z=\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \to z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xz	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2} \to z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)

Simetria em relação ao plano xy	$(-z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \to z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) \to$ $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (Não há simetria.)
Simetria em relação ao eixo z	$z = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \to z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo y	$(-z) = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \to z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)
Simetria em relação ao eixo x	$(-z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \to z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)
Simetria em relação à origem	$(-z) = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \to z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)

Fonte: O autor

Para efeitos de simplificações de contas, de maneira geral se uma superfície é simétrica em relação a dois dos planos coordenados, então ela também é simétrica em relação ao eixo coordenado determinado pela interseção destes planos - teorema enunciado em Lehmann (2007, p. 350).

Frente ao exposto, podemos fazer algumas *generalizações* a respeito das quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão. Primeiro, as que têm como variáveis apenas três termos quadráticos são totalmente simétricas (elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos). Além disso, no caso das que têm como variáveis apenas dois termos quadráticos e um termo linear (paraboloides) há simetria em relação a dois planos coordenados e a um eixo coordenado. Esse eixo será o eixo correspondente a variável linear e os planos são os que contêm esse eixo ou, em outros termos, são os que determinam, por interseção, esse eixo. O quadro a seguir resume o que dissemos neste parágrafo.

Quadro 4.73 – Simetria das quádricas

Tipo de quádrica padrão	**Variável visual**	**Unidade simbólica correspondente**
Elipsoides/ hiperboloides/cones quádricos elípticos	Totalmente simétrico em relação ao sistema cartesiano	Três termos quadráticos

Paraboloides	- Simetria em relação a um eixo coordenado α; - simetria em relação a dois planos coordenados. Observação: esses planos são os que contêm o eixo α.	- Um termo é linear (esse termo é α); - dois termos quadráticos.

Fonte: O autor

Diante do estudo das simetrias feito nesta seção, podemos retomar o estudo das posições padrão realizado na seção 4.3.1.1 (p. 172) e incluir o ponto de vista algébrico. Dessa forma, como consequência imediata da aplicação das propriedades de simetria nas definições das posições padrão dadas no Quadro 4.18 (p. 173), para provar que a quádrica está na posição padrão, no caso dos elipsoides, dos hiperboloides e dos cones quádricos elípticos, basta verificarmos se eles são totalmente simétricos em relação ao sistema cartesiano; no caso dos paraboloides é suficiente verificar se dois dos planos coordenados são planos de simetria e se o vértice/ponto de sela coincide com a origem. O procedimento algébrico usado nesta última verificação consiste em apenas averiguar se origem pertence à superfície quádrica.

Como vemos, as propriedades de simetria que discutimos permitem interpretar globalmente as simetrias em relação aos planos coordenados e, consequentemente, analisar as posições padrão do ponto de vista algébrico. Feito esse estudo, o estudo das posições transladadas pode ser feito de forma análoga ao de Moretti (2003); Moretti e Thiel (2012).

5 ANÁLISE A PRIORI

Nesta seção discutiremos a análise a priori elaborada para a Engenharia Didática realizada nesta Tese. Com ela, temos o planejamento de elementos fundamentais do Contrato Didático e das *variáveis de comando* tomadas. Esta seção está organizada da seguinte maneira:

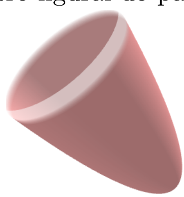
- Apresentação da Sequência de Ensino usada na experimentação;
- *Variáveis de comando global* concernentes a organização global de nosso estudo (subseção 5.2);
- *variáveis de comando local* específicas a cada uma das 9 atividades da Sequência de Ensino usada na experimentação (subseção 5.3).

5.1 SEQUÊNCIA DE ENSINO: PARABOLOIDE ELÍPTICO PADRÃO

5.1.1 INTRODUÇÃO

A figura a seguir apresenta um registro visual do paraboloide elíptico.

Figura 8 – Registro figural do paraboloide elíptico



Fonte: O autor

5.1.2 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos dos paraboloides elípticos *padrão*. Para realizá-las com o auxílio do cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, considere as seguintes informações:

- As designações P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 se referem aos seis tipos de paraboloides elípticos padrão;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano xy e perpendiculares ao eixo z. Para modificar sua posição basta modificar os valores de k_1;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano xz e perpendiculares ao eixo y. Para modificar sua posição basta modificar os valores de k_2;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano yz e perpendiculares ao eixo x. Para modificar sua posição basta modificar os valores de k_3.

Atividades

1 Abra o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO e veja os registros cartesianos dos seis casos paraboloides elípticos padrão. Depois disso, escreva qual(is) a(s) diferença(s) e semelhança(s) visual(is) entre P_1 e P_4.[1]

2 Abra o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO e resolva as atividades seguintes.[2]

a) Selecione P_1 e o PLANO_1 (Janela de Álgebra), modifique os valores de k_1(Janela de Visualização) e observe os registros cartesianos. A seguir, conjeture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por P_1 e PLANO_1.
b) Selecione P_2 e o PLANO_1, modifique os valores de k_2 e observe os registros cartesianos. A seguir, conjeture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por P_2 e PLANO_1
c) qual(is) à(s) semelhança(s) e diferença(s) visual(is) entre as interseções determinadas nas questões “a” e “b”?

3 Qual(is) a(s) diferença(s) e semelhança(s) visual(is) entre P_1 e P_4?

[1] P_1 está abrindo em z_+ e P_4 está abrindo em x_-.
[2] P_2 está abrindo em z_-.

5.1.3 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Inicialmente definimos que ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo α" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo. Essa forma de escrever é apenas para reduzir nossa comunicação.

Dito isso, note que para os paraboloides elípticos padrão visualmente é significativo o fato de que as interseções dessas quádricas com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses perpendiculares a esse eixo" que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas se afastam da origem. Chamaremos essas cônicas de "elipses com eixos aumentando" e, com elas, temos a impressão de que os hiperboloides estão abrindo. A partir da posição dessas elipses usaremos os registros em língua natural do quadro a seguir:

Quadro 5.1 – Registros *básicos* em língua natural dos paraboloides elípticos padrão

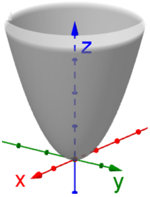
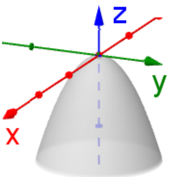
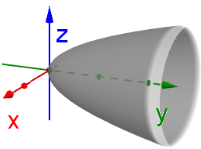
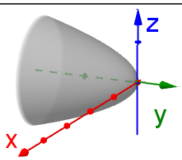
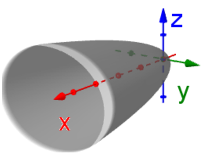
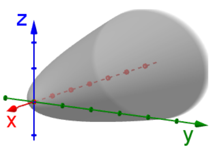
Registros básicos em língua natural	**Característica visual**
Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo z_+.
Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo z_-.
Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_+.
Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_-.
Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo x_+.
Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo x_-.

Fonte: O autor

5.1.4 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos seis tipos de paraboloides elípticos padrão. Na subseção 5.1.7 (p. 266) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro 5.2 – Correspondentes registros dos *paraboloides elípticos abrindo em* α

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	$y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$
	Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

Fonte: O autor

5.1.5 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

A atividade seguinte discute características importantes dos registros básicos simbólicos dos paraboloides elípticos padrão.

Atividade

4 Considere as equações a seguir:

$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$
$z = -x^2/a^2 - y^2/b^2$
$y = x^2/a^2 + z^2/c^2$
$y = -x^2/a^2 - z^2/c^2$
$x = y^2/b^2 + z^2/c^2$
$x = -y^2/b^2 - z^2/c^2$

Sem se ater aos aspectos visuais, escreva quais as semelhanças e diferenças entre essas equações.

5.1.6 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: SÍNTESES DAS CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equações *básicas* dos paraboloides elípticos padrão. No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro 5.3 – Característica algébricas dos termos das equações básicas dos paraboloides elípticos padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear e com coeficiente igual a (+1)	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **positivo**)
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **negativo**)

Fonte: O autor

5.1.7 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

5 Já discutimos que para os paraboloides elípticos padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos semieixos coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o Quadro 5.2 e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos semieixos coordenados às elipses são perpendiculares.

5.1.8 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS: SÍNTESES E DEFINIÇÕES

A seguir algumas correlações entre os registros cartesianos, básicos em língua natural e básicos simbólicos. Elas são análogas as dos hiperboloides padrão.[3]

Quadro 5.4 – Correspondentes registros dos *paraboloides elípticos abrindo em* α

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas das equações básicas**
Paraboloide elíptico abrindo em z_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo z_+.	A variável linear é z; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.
Paraboloide elíptico abrindo em z_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo z_-.	A variável linear é z; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativos**.
Paraboloide elíptico abrindo em y_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_+.	A variável linear é y; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.

[3] Analisaremos mais formalmente os conteúdos desse quadro na Atividade 8.

Paraboloide elíptico abrindo em y_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo y_-.	A variável linear é y; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativos**.
Paraboloide elíptico abrindo em x_+.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo x_+.	A variável linear é x; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.
Paraboloide elíptico abrindo em x_-.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo x_-.	A variável linear é x; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativos**.

Fonte: O autor

Sugerimos que os conteúdos desse quadro sejam conferidos no Quadro 5.2 (p. 264).

Atividades de revisão

6 Resolva as atividades a seguir. Nos três primeiros itens, sem o recurso computacional, determine o registro básico em língua natural, o registro básico simbólico e faça um esboço do registro cartesiano.

a) $-x^2/16 - y^2/4 + z = 0$
b) $-y - x^2 - z^2 = 0$
c) $-y^2/4 - z^2/49 - x = 0$
d) no item "a" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro 5.4 (p. 266) dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
e) no item "b" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro 5.4 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
f) no item "c" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro 5.4 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta.

7 As atividades seguintes dizem respeito as interseções com planos. Para realizá-la, abra o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO e selecione P_1 (de equação $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$).

Com relação à interseção de P_1 com o plano xy,

a) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome do objeto determinado;
b) faça os cálculos que provam sua resposta da questão "a" ou explique/justifique-a em língua natural recorrendo a resultados/argumentos matemáticos de seu conhecimento.

Com relação à interseção de P_1 com o plano xz,

c) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome do objeto determinado;
d) calcule a equação básica determinada pela interseção em questão;
e) o objeto determinado está abrindo em que semieixo? Justifique sua resposta com argumentos baseados nas "características dos termos da equação" determinada.

Com relação à interseção de P_1 com o plano yz,

f) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome do objeto determinado;
g) calcule a equação básica determinada pela interseção em questão;
h) o objeto determinado está abrindo em que semieixo? Justifique sua resposta com argumentos baseados nas "características dos termos da equação" determinada.

Com relação à interseção de P_1 com planos de equação $z = k_1; k_1 \neq 0$,

i) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome do objeto determinado;
j) calcule a equação básica determinada pela interseção em questão;
k) o que acontece com as interseções (não vazias) se $a > b$? E se $b > a$? E se $a = b$? Justifique sua resposta com argumentos baseados nas "características dos termos da equação" determinada.

Com relação à interseção de P_1 com planos de equação $y = k_2; k_2 \neq 0$,

l) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome dos objetos determinados;
m) calcule a equação básica determinada pela interseção em questão;

n) os objetos determinados estão abrindo em que semieixo (justifique sua resposta baseando nas "características dos termos da equação" determinada)? Quais as coordenadas do vértice desses objetos?

Com relação à interseção de P_1 com planos de equação $x = k_3; k_3 \neq 0$

o) responda, com o auxílio do Geogebra, o nome dos objetos determinados;
p) calcule a equação básica determinada pela interseção em questão;
q) os objetos determinados estão abrindo em que semieixo (justifique sua resposta baseando nas "características dos termos da equação determinada)? Quais as coordenadas do vértice desses objetos?

8 Considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$, as quádricas E_1 e E_2 de equações respectivamente $\alpha = \beta^2/a^2 + \gamma^2/b^2$ e $\alpha = -\beta^2/a^2 - \gamma^2/b^2$; a e b são constantes positivas, os planos coordenados (de equação $\alpha = 0, \beta = 0$ e $\gamma = 0$) e os planos paralelos aos planos coordenados (de equação $\alpha = k_1, \beta = k_2$ e $\gamma = k_3$; k_1, k_2 e k_3 são constantes reais). Resolva as atividades seguintes. As justificativas ou explicações devem ser baseadas nas características dos termos das equações das quádricas em questão e das cônicas. Nelas, os cálculos algébricos ou o uso do Geogebra são sugeridos, mas não são obrigatórios.

a) Por que as interseções entre a quádrica E_1 (ou E_2) com qualquer um dos planos do enunciado não determinam hipérboles?
b) por que as interseções entre a quádrica E_1 com planos do enunciado podem determinar parábolas abrindo no sentido positivo?
c) por que as interseções entre a quádrica E_2 com planos do enunciado podem determinar parábolas abrindo no sentido negativo?
d) por que as interseções entre a quádrica E_1 com planos de equação $\alpha = k_1; k_1 > 0$ determinam elipses perpendiculares ao semieixo α_+?
e) por que as interseções entre a quádrica E_1 com planos de equação $\alpha = k_1; k_1 <0$ são vazias?
f) por que as interseções entre a quádrica E_2 com planos de equação $\alpha = k_1; k_1 < 0$ determinam elipses perpendiculares ao semieixo α_-?
g) por que as interseções entre a quádrica E_2 com planos de equação $\alpha = k_1; k_1 > 0$ são vazias?

9 A didática/metodologia do curso facilitou a aprendizagem das representações cartesianas, simbólicas, em língua natural e o "trân-

sito/passagem" entre essas representações? Justifique sua resposta.

5.2 VARIÁVEIS DE COMANDO GLOBAL

Diante dos alunos[4] e usando linguagem apropriada, planejamos tratar das seguintes questões gerais concernentes a organização global de nosso estudo:

- Explicitar que o objetivo das aulas é o da realização de uma pesquisa do tipo Engenharia Didática;
- solicitar/acordar que durante todas as aulas coletaríamos dados referentes às seguintes produções deles: produções escritas na mídia lápis-papel (1); produções verbais (2); produções elaboradas no Geogebra (3);
- solicitar/acordar que nos anexos da Tese constariam as produções (1) (sem expor os nomes) já em nosso Diário de Campo constariam algumas das produções (2) e (3).
- sem expor nomes, solicitar/acordar que o professor-pesquisador analisaria as produções dos alunos e que esse estudo seria apresentado na Tese e em futuros artigos científicos;
- para cada atividade explicitar os objetivos conforme o tipo de situação a ser realizada (situação de ação, de formulação, de validação e de institucionalização).[5] Nestes instantes, também planejamos esclarecer o possível uso do Geogebra e da mídia lápis-papel (de acordo com os pressupostos da subseção 2.3);
- propor/acordar que as aulas fossem em dois encontros por semana de 90 minutos cada;
- propor/acordar que as aulas fossem em horário oposto ao das aulas normais de tal forma que não prejudicasse o andamento normal das aulas regulares;
- discutir que o Contrato Didático poderia ser rompido conforme o andamento e interesse da pesquisa e dos alunos;
- propor/acordar o estudo de algumas ferramentas do Geogebra;
- propor/acordar uma revisão breve das cônicas segundo o enfoque dado na subseção 4.2;
- propor/acordar a apresentação do cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO (disponível em: https://wiki.sj.ifsc.edu.br/wiki/index.php/Sérgio_Florentino_da_Silva).

[4] A escolha dos alunos segue o que está discutido na subseção 3.1 (p. 125).
[5] Na página 136 discutimos essa classificação.

5.3 VARIÁVEIS DE COMANDO LOCAL

Além das variáveis de comando globais que acabamos de descrever, tomamos variáveis de comando local específicas para cada uma das 9 atividades da Sequência de Ensino e as discutiremos nas nove subseções a seguir.

No caso das 8 primeiras atividades as variáveis de comando local contemplam seu o *tipo de situação*, os *objetivos* e as *hipóteses* da atividade já na atividade 9 estão contemplados apenas os *objetivos* e as *hipóteses*.

5.3.1 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 1

Na atividade 1 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: *predominante* uma situação de ação com o uso livre do Geogebra/cenário e inicialmente sem nossa intervenção explícita - as intervenções serão no final da atividade;
- *objetivo da atividade*: analisar (avaliar/identificar) quais oposições qualitativas (semelhanças e diferenças) visuais entre P_1 e P_4 que os alunos reconhecem e a maneira como eles se referem a essas qualidades/propriedades (Função Referencial);
- *hipóteses*: os alunos darão maior ênfase aos aspectos empíricos e imediatos como forma, posição da "boca", "abertura", "concavidade", "alongamento" ou outros sem usar as desconstruções dimensionais provenientes das interseções com planos (variáveis visuais). Também falarão sobre reflexões ou simetrias (mesmo que de forma intuitiva, pragmática e sem se referir aos planos de simetria). Os alunos não terão dificuldades com o uso do cenário.

Comentário1: Apesar de que previmos que os alunos pudessem falar de reflexões/simetria, em decorrência do tempo que eles disponibilizaram não tínhamos como objetivo trabalhar as reflexões de maneira mais bem elaborada. De qualquer forma, temos uma proposta de ensino desses conteúdos no Apêndice A. Cabe ainda o comentário que P_1 (de equação $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$) não é a reflexão de P_4 (de equação $x = -y^2/b^2 - z^2/c^2$). O correto é dizer que P_1 é a reflexão do paraboloide de equação $x = -y^2/b^2 - z^2/a^2$ (o denominador de $-z^2$ é a^2 e não c^2 como em P_4). Essa afirmação pode ser melhor entendida com as propriedades de reflexão da subseção 4.3.8.1 (p. 254).

5.3.2 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 2

Na atividade 2 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: inicialmente é *predominante* uma situação de ação e de formulação com o uso livre do Geogebra/cenário sendo que as intervenções explícitas do professor-pesquisador só ocorrerão depois que os alunos concluírem esta atividade. Nesse momento, as repostas serão validadas ou refutadas. Logo após, iniciará uma situação de institucionalização em que discutiremos as interseções com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados que definem os valores visuais elipses com eixos aumentando perpendiculares a esse eixo, um ponto (origem), o conjunto vazio bem como as diferentes posições que eles podem estar no sistema cartesiano. No fim dessa institucionalização estenderemos essas questões para os hiperboloides de uma duas folhas e cones quádricos elípticos;
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos identifiquem as interseções com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados que definem os valores visuais elipses com eixos aumentando perpendiculares a esse eixo, um ponto (origem), o conjunto vazio[6] bem como as diferentes posições que elas podem estar no sistema cartesiano. A partir daí, analisar (avaliar/identificar) a maneira como os alunos se referem a essas questões bem como as oposições qualitativas entre elas;
- *hipóteses*: A maioria dos alunos identificarão os valores visuais elipses, ponto e vazio podendo incluir o fato de que em P_1 e P_2 esses valores estão refletidos. Outros alunos omitirão os valores vazio e ponto. Alguns alunos não registrarão, mesmo com termos próprios, o fato de que as "elipses estão abrindo" nem as diferentes posições que elas podem estar no sistema cartesiano (perpendiculares ao semieixo z_+, ou ao semieixo y_-, ...). Os alunos não terão dificuldades com o uso do cenário.

Comentário2: Aplicando as propriedades de reflexão da subseção 4.3.8.1 (p. 254) podemos provar que P_1 (de equação $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$) é a reflexão de P_2 (de equação $z = -x^2/a^2 - y^2/b^2$). Consequentemente, as elipses determinadas em P_1 são a reflexão das elipses determinadas em P_2.

[6] Essas interseções são variáveis visuais que tomamos na subseção 4.3.2.

5.3.3 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 3

Essa atividade é a mesma que a número 1, porém, depois de realizado a atividade 2, esperávamos que as novas respostas dos alunos incluam as variáveis/valores visuais que os alunos experimentaram no Geogebra durante a atividade 2. Com relação as variáveis de comando local da atividade 3, elas são as seguintes:

- *Tipo de situação*: inicialmente é *predominante* uma situação de ação e de formulação com o uso livre do Geogebra/cenário sendo que as intervenções explícitas do professor-pesquisador só ocorrerão depois que os alunos concluírem esta atividade. Nesse momento, as repostas serão validadas ou refutadas. Logo após, iniciará uma situação de institucionalização em que discutiremos que no sistema cartesiano podemos diferenciar e reconhecer a posição dos paraboloides elípticos padrão tendo como base o semieixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares". No fim dessa institucionalização estenderemos essas questões para os hiperboloides de uma duas folhas e cones quádricos elípticos;
- *objetivo da atividade*: idem a atividade 1 além de compararmos, do ponto vista da TRRS, a evolução as respostas dadas nas atividades 1 e 3;
- *hipóteses*: os alunos diferenciarão P_1 e P_4 usando ao menos algumas variáveis/valores visuais "experimentados" na atividade 2. Entre elas, incluem-se o fato de que em P_1 as elipses estão abrindo em z_+ e em P_4 as elipses estão abrindo em x_-. Os alunos não terão dificuldades com o uso do cenário.

Antes da realização da atividade 4 definiremos os registros básicos em língua natural dos paraboloides elípticos padrão segundo o Quadro 5.1 (p. 263). Em atividades seguintes trabalharemos a aplicação deste quadro.

Também *apresentaremos* o Quadro 5.2 (p. 264) em que estão os correspondentes registros cartesianos, básicos em língua natural e simbólicos dos seis casos de paraboloides elípticos padrão. Nele, as conversões entre as duas primeiras colunas já terão sido discutidas a partir do Quadro 5.1 e a terceira coluna, nesse momento, será apenas apresentada.

5.3.4 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 4

Na atividade 4 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: é *predominante* uma situação de ação e de formulação na mídia lápis-papel e sem nossa intervenção explícita;
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos identifiquem/destaquem as características dos termos das equações básicas sendo que entre elas estão às unidades significantes simbólicas do Quadro 5.3 (p. 265) que serão necessárias para as conversões. Além disso, analisar (avaliar/identificar) como os alunos se referem a essas características;
- *hipóteses*: Todos os alunos identificarão/destacarão características dos termos das equações. Entre elas, algumas não são fundamentais para as conversões que envolvam os registros simbólicos e outras, porém, são essenciais. De maneira geral, as respostas dos alunos não envolverá todas unidades simbólicas que norteiam as conversões. Alguns ainda usarão termos não formais ou errados no uso da Função Referencial.

De maneira aleatória, depois de realizado esta atividade o professor-pesquisador separará a turma em dois grupos (G_1 e G_2) e procederá da seguinte forma:

- Para os alunos do grupo G_1 será discutido individualmente o Quadro 5.3 (p. 265) que dá atenção às unidades significantes simbólicas que são necessárias para as conversões e que expõe a maneira matemática de se referir a essas unidades;
- para os alunos do grupo G_2, nesse momento, não será feito essa discussão.

Com essa escolha esperamos que a próxima atividade tenha resultados significativamente distintos (veja as hipóteses da atividade 5).

5.3.5 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 5

Na atividade 5 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: é *predominante* uma situação de ação e de formulação na mídia lápis-papel e inicialmente sem nossa intervenção

explícita - as intervenções serão no final da atividade. Depois que os alunos concluírem a atividade o professor-pesquisador validará ou refutará as respostas deles. A institucionalização dos aspectos análogos para os hiperboloides de uma e duas folhas e para os cones quádricos elípticos será feito depois de concluirmos o estudo dos paraboloides elípticos padrão.
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos identifiquem/destaquem às unidades significantes simbólicas que norteiam as conversões bem como as correlacionem com as unidades significantes dos outros registros além de analisar (avaliar/identificar) como os alunos se referem a elas.
- *hipóteses*: Em relação ao grupo G_2 os alunos do grupo G_1 se referirão de maneira mais adequada, clara e objetiva as unidades simbólicas necessárias para realizar as conversões da atividade 5.

Antes da atividade seguinte o professor-pesquisador discutirá o Quadro 5.3 (p. 265) com o grupo G_2. Além disso, com todos os alunos, sintetizaremos todas as conversões/unidade significantes do Quadro 5.4 (p. 266) e as aplicaremos no Quadro 5.2 (p. 264).

5.3.6 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 6

Na atividade 6 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: é *predominante* uma situação de ação e de formulação na mídia lápis-papel e sem nossa intervenção explícita. Depois que os alunos concluírem a atividade o professor-pesquisador validará ou refutará as respostas deles.
- *objetivo da atividade*: analisar (avaliar/identificar) se os alunos realizam conversões entre os registros gráfico, em língua natural e simbólico e se eles mobilizam as correspondentes unidades significantes. Além disso, analisar como eles se referem a essas questões semióticas.
- *hipóteses*: os alunos realizarão as conversões adequadamente, mobilizarão as unidades significantes e farão bom uso da Função Referencial. Alguns cometerão erros de tratamentos ao isolar a variável linear.

Antes de iniciarmos a atividade 7 o professor-pesquisador revisará o conteúdo interseção com planos, os quadros da subseção 4.2.4 (p. 164) referentes as cônicas padrão, as equações das cônicas transladadas bem como a determinação das coordenadas do vértice/centro.

5.3.7 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 7

Nos itens “a” e “b” da atividade 7 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*:o item “a” é *predominante* uma situação de ação e o item “b” é predominantemente de validação (explicação e/ou prova) em que será necessário expandir o discurso (Função Discursiva). As mídias lápis-papel e Geogebra serão usadas conjuntamente e a atividade será sem nossa intervenção explícita. Depois que os alunos concluírem os itens “a” e “b” da atividade 7 o professor-pesquisador fará intervenções e validará ou refutará as respostas deles.
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos trabalhem a variável visual interseção da quádrica com o plano xy bem como os tratamentos, as conversões, as expansões do discurso, o uso da Função Referencial e as unidades significantes em questão. Analisar (avaliar/identificar) o uso de todas essas questões semióticas por parte dos alunos.
- *hipóteses*: no item “a” os alunos não terão dificuldades e usarão os seguintes léxicos: ponto; origem; $(0,0,0)$. No item “b” acontecerá o seguinte: alguns alunos apenas irão descrever ou narrar sua solução; alguns alunos farão explicações recorrendo a unidades apofânticas de um quadro teórico formal (teoremas, definições, ...) ou de um quadro social (crenças, opiniões, ...) tanto corretos quanto incorretos expressos principalmente em língua natural.

A seguir, apresentaremos aos alunos (*devolução* da atividade) os itens “c”, “d” e “e” da atividade 7.

Nos itens “c”, “d” e “e” da atividade 7 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: análogo ao descrito nos itens “a” e “b”.
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos trabalhem a variável visual interseção da quádrica com o plano xz bem como os tratamentos, as conversões, as expansões do discurso, o uso da Função Referencial e as unidades significantes em questão. Analisar (avaliar/identificar) o uso de todas essas questões semióticas por parte dos alunos.
- *hipóteses*: no item “c” os alunos não terão dificuldades. No item

“d” os tratamentos usados na expansão do discurso são simples e por isso não haverá problemas na resolução. No item “e”, recorrendo às unidades significantes simbólicas das cônicas discutidas na revisão feita no fim da atividade 6, a maioria dos alunos não terá problemas no uso da Função referencial e na conversão em questão.

A seguir, apresentaremos aos alunos os itens “f”, “g” e “h” da atividade 7.

As variáveis de comando local dos itens “f”, “g” e “h” da atividade 7 serão análogas aos dos itens “c”, “d” e “e”.
A seguir, apresentaremos aos alunos os itens “i”, “j” e “k” da atividade 7.
Nos itens “i” “j” e “k” da atividade 7 nossas variáveis de comando local são as seguintes:

- *Tipo de situação*: análogo ao descrito nos itens “a” e “b”.
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos trabalhem a variável visual interseção da quádrica com planos de equação $z = k_1; k_1 \neq 0$ bem como os tratamentos, as conversões, as expansões do discurso, o uso da Função Referencial e as unidades significantes em questão. Analisar (avaliar/identificar) o uso de todas essas questões semióticas por parte dos alunos.
- *hipóteses*: no item “i” alguns alunos identificarão os valores visuais elipses e vazio e outros omitirão os valores vazio ou incluirão erroneamente o ponto (consideramos por hipótese que $z = k_1; k_1 \neq 0$). No item “j”os tratamentos são simples e por isso não haverá grandes problemas na expansão discursiva. No item “k”, recorrendo às unidades significantes simbólicas das cônicas discutidas na revisão feita no fim da atividade 6, a maioria dos alunos não terá problemas em todo esse item.

A seguir, apresentaremos aos alunos os itens “l” “m” e “n” da atividade 7.

As variáveis de comando local dos itens “l”, “m” e “n”da atividade 7 são as seguintes.

- *Tipo de situação*: análogo ao descrito nos itens “a” e “b”.
- objetivo da atividade: oportunizar que os alunos trabalhem a variável visual interseção da quádrica com planos de equação $y = k_2; k_2 \neq 0$ bem como os tratamentos, as conversões, as expansões do discurso, o

uso da Função Referencial e as unidades significantes em questão para realizar a Função Referencial. Analisar (avaliar/identificar) o uso de todas essas questões semióticas por parte dos alunos.
- hipóteses: no item “l” os alunos não terão problemas. No item “m” alguns alunos terão problemas nos tratamentos ao expandirem o discurso no registro simbólico. No item “n”, recorrendo às unidades significantes simbólicas das cônicas discutidas na revisão feita no fim da atividade 6, a maioria dos alunos não terá problemas para resolver a primeira pergunta do item. Na segunda pergunta do item “n” alguns não conseguirão determinar as coordenadas do vértice ou cometerão erros em sua determinação.

A seguir, apresentaremos aos alunos os itens “o”, “p” e “q” da atividade 7.

As variáveis de comando local dos itens “o”, “p” e “q” são análogas as dos itens “l”, “m” e “n”. Porém, temos como hipótese que a maioria dos alunos não errará mais as coordenadas do vértice pelo fato de que já fizemos as devidas correções no item “n”.

No fim da atividade 7 faremos as validações/refutações finais para, com a institucionalização do conhecimento feita com professor-pesquisador, estendermos o que for discutido nessa atividade para as demais quádricas.

5.3.8 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 8

As variáveis de comando local da atividade 8 são as seguintes.

- *Tipo de situação*: toda esta questão é *predominante* uma situação de validação (explicação e/ou prova) em que será necessário expandir o discurso (Função Discursiva) além de usar a Função Referencial, tratamentos e conversões norteados pelo reconhecimento e o uso das unidades significantes em questão. Depois que os alunos concluírem a atividade o professor-pesquisador fará intervenções e validará ou refutará as respostas deles e institucionalizará os aspectos discutidos para outras quádricas;
- *objetivo da atividade*: oportunizar que os alunos trabalhem situações de validação a partir de expansões do discurso, da Função Referencial, de tratamentos e conversões norteados pelo reconhecimento e o uso das unidades significantes em questão. Analisar (avaliar/identificar) o

uso de todas essas questões semióticas por parte dos alunos.
- *hipóteses*: diante do enfoque semiótico que trabalhamos, esperamos, de maneira geral, que os alunos evoquem as unidades significantes das cônicas e do paraboloide elíptico padrão para fazer conversões, designações e expansões discursivas. Porém, possivelmente surgirão os seguintes problemas: alguns alunos não "recordarão" ou desconhecerão unidades apofânticas necessários para resolver os casos em que a solução é vazia (itens "e" e "g"); alguns alunos usarão unidades apofânticas expressas de maneira pouco clara e talvez confusa; no uso da Função Referencial as unidades significantes usadas por alguns não serão suficiente para identificar a que objeto essas unidades se referem.

5.3.9 ANÁLISE A PRIORI DA ATIVIDADE 9

As correspondentes variáveis de comando local desta atividade foram os seguintes.

- *objetivos*: de maneira geral, obter dados complementares no que tange as impressões dos alunos com relação ao ensino e aprendizagem ocorrido. De maneira mais específica, identificar, segundo o ponto de vista das impressões dos alunos, se a didática/metodologia do curso facilitou a aprendizagem tanto das representações gráficas, simbólicas, em língua natural quanto do "trânsito/passagem" entre essas representações;
- *hipóteses*: os registros dos alunos indicariam que a didática/metodologia do curso facilitou a aprendizagem tanto das representações cartesianas, simbólicas, em língua natural quanto do "trânsito/passagem" entre essas representações.

6 EXPERIMENTAÇÃO

A Sequência de Ensino que inicialmente pensamos na análise a priori constavam apenas 8 atividades. Porém, durante a fase de experimentação tivemos a ideia de elaborar a atividade 9 para, com isso, gerar dados complementares a respeito das impressões dos alunos com relação ao ensino e a aprendizagem ocorridos na experimentação. Assim, a "análise a priori final" se refere a uma Sequência de Ensino com 9 atividades que foram trabalhadas na experimentação.

No que concerne a fonte de dados coletados na experimentação, elas se resumem as seguintes produções dos alunos: produções escritas na mídia lápis-papel (1); produções verbais (2); produções elaboradas no Geogebra (3). As produções (1) estão nos Anexos e as produções (2) e (3) estão em nosso Diário de Campo. Entre elas, a fonte principal são as produções (1).

Nossos sujeitos de pesquisa foram dez alunos do IFSC/SJ. Na subseção 3.1 (p. 125) detalharemos melhor quem são eles bem como os critérios que nos conduziram a esses alunos.

Em geral nossa impressão foi de que em toda a experimentação não houve problemas disciplinares ou de falta de interesse por parte dos alunos. Porém, trata-se de uma simples impressão superficial e nada metodológica.

Com relação a sequência do que foi trabalhado na experimentação, iniciamos discutindo o Contrato Didático (incluindo as variáveis de comando global discutidas na análise a priori). Depois disso, sem maiores dificuldades, apresentamos as ferramentas básicas do Geogebra. Da mesma forma, seguimos com uma revisão das cônicas segundo o enfoque da subseção 4.2 (p. 146). Logo a seguir entramos nas quádricas.

Na seção seguinte iniciaremos as fases de análise a posteriori e a validação. Nela, discutiremos os casos de quebra e renegociação de Contrato Didático. Também detalharemos, na ótica da TRRS, o que ocorreu na experimentação no tocante a aplicação da Sequência de Ensino junto aos alunos.

7 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Esta seção inclui as fases de análise a posteriori e de validação/refutação e está organizada em dez subseções. As nove primeiras se referem a cada uma das nove correspondentes atividades da Sequência de Ensino usada na experimentação. A décima subseção é uma síntese de quais das 9 atividades realizadas na experimentação foram validadas.

De início cabe dizer que as variáveis de comando global tomadas na análise a priori (ver a seção 5 - p. 261) em geral foram acordadas pelos alunos sem maiores problemas. Porém, por vezes aconteceram rupturas no Contrato Didático que serão discutidas nas nove subseções seguintes.

7.1 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 1

Na análise a priori de nossa Engenharia Didática tínhamos como hipótese que na fase de experimentação as respostas dos alunos a atividade 1 dariam maior ênfase aos aspectos empíricos e imediatos como forma, posição da "boca", "abertura", "concavidade", "alongamento" ou outros sem usar as desconstruções dimensionais provenientes das interseções com planos. Também tínhamos como hipótese que haveria, de forma pragmática, falas a respeito das reflexões e simetrias. Conforme mostram as falas a seguir, essas hipóteses foram validadas.

Figura 9 – Atividade 1: resposta do aluno A_5

1) Os dois paraboloides P1 e P4 se assemelham em formato e origem, porém, se diferenciam pelo fato de P1 abrir em Z^+ e P4 abrir em Y^-.

Fonte: Acervo do autor

Figura 10 – Atividade 1: resposta do aluno A_7

1)
P1 e P4: semelhanças:

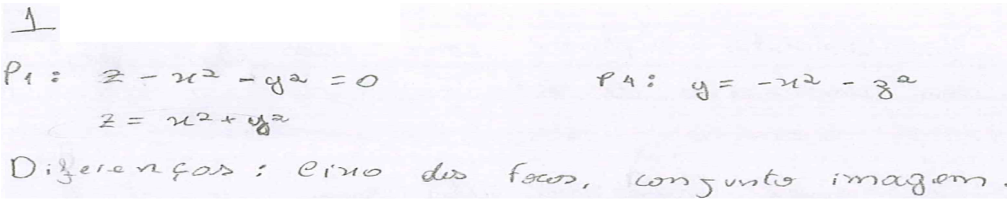
diferenças: *P4 está simétrico com o eixo Y

* P1 está simétrico com o eixo Z

Fonte: Acervo do autor

Porém, algumas respostas, que não foram previstas em nossas hipóteses da análise a priori, incluem proposições não tão imediatas e que buscam teorizações mais amplas. Para discuti-las, observe a resposta de A_{10}, A_8 e A_2 dadas a seguir. Na resposta de A_{10}, vemos que são diferenciados o conjunto imagem e a posição dos focos (supostamente relacionado ao foco de uma antena parabólica ou análogo ao foco de uma parábola). Já na resposta de A_8, vemos que há informações a respeito do diâmetro. Na resposta de A_2, vemos que já há conjecturas que associam elementos visuais com unidades simbólicas. Mesmo que com pouca delimitação formal ou de forma empírica, essas respostas buscaram um avanço no discurso.

Figura 11 – Atividade 1: resposta do aluno A_{10}


1

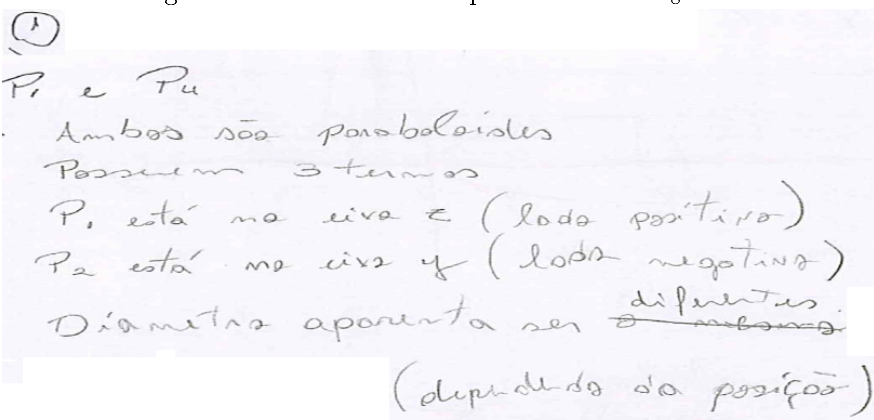
$P_1: z - x^2 - y^2 = 0$ $\quad$ $P_4: y = -x^2 - z^2$

$z = x^2 + y^2$

Diferenças: eixo dos focos, conjunto imagem.

Fonte: Acervo do autor

Figura 12 – Atividade 1: resposta do aluno A_8


1

P_1 e P_4

Ambos são paraboloides

Possuem 3 termos

P_1 está no eixo z (lado positivo)

P_4 está no eixo y (lado negativo)

Diâmetro aparenta ser ~~o mesmo~~ diferentes

(dependendo da posição)

Fonte: Acervo do autor

Figura 13 – Atividade 1: resposta do aluno A_2

1) As semelhanças: Ambos são parabolóides elípticos

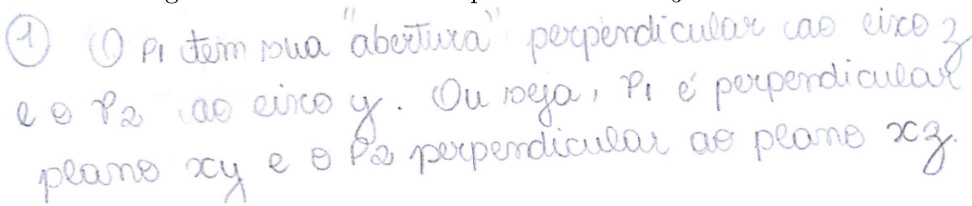
As diferenças: A formula das parabolóides faz com que elas abram em eixos deferentes. Lembrando que; o termo linear é o responsável por mostrar para onde está sendo a abertura

Fonte: Acervo do autor

Além do que já discutimos, do ponto de vista da Função Apofântica identificamos nas respostas dos alunos algumas questões interessantes que falaremos a seguir. Primeiramente, analisando os anexos vemos que em geral os alunos disseram alguma coisa a respeito dos paraboloides da atividade 1 (Função Apofântica). Por isso, atribuímos um *valor social* a todas as respostas dadas a essa atividade, pois todos os alunos cumprem a "ordem" dada pelo professor de resolver a atividade. Adiantamos que nas demais atividades quase todos os alunos alcançaram inicialmente esse valor havendo algumas exceções. Na sequência das análises das demais atividades discutiremos pontualmente essas exceções que configuraram uma quebra de Contrato Didático.

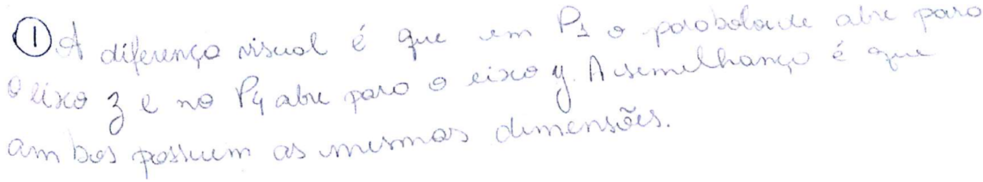
Retornando exclusivamente a atividade 1, *em geral* vemos que as proposições dadas (Função Apofântica) pelos alunos pouco se apoiam em um quadro teórico (teoremas, axiomas, definições, ...) mais rigoroso, por isso, não atribuímos *valor epistêmico de certeza* a elas. Mesmo assim, elas foram validadas e valorizadas pelo professor-pesquisador pelo fato de que possuem *argumentação verdadeira* e, assim, atribuímos o *valor lógico de verdade.* Porém, como é o caso das duas falas a seguir (Figuras 14 e 15), algumas argumentações se apoiam com mais ênfase em definições criadas pelos próprios alunos. Durante a experimentação valorizamos essas argumentações e inclusive durante nossa intervenção, no fim da atividade, elas foram apresentadas a todos os alunos, mas, comentamos que se trata de criações particulares dos próprios alunos e que no decorrer das aulas aprimoraríamos os discursos e as designações para contextos mais delimitados, amplos e científicos. Além disso, discutimos que uma possível *extensão semântica* de um *léxico* deve ser usado com cautela para evitar problemas de referência, expansão do discurso e, claro, compreensão decorrentes de eventuais confusões ou erros.

Figura 14 – Atividade 1: resposta do aluno A_3


① O P1 tem sua "abertura" perpendicular ao eixo z e o P2 ao eixo y. Ou seja, P1 é perpendicular plano xy e o P2 perpendicular ao plano xz.

Fonte: Acervo do autor

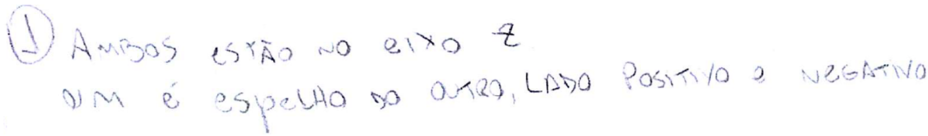
Figura 15 – Atividade 1: resposta do aluno A_9


① A diferença visual é que em P1 o paraboloide abre para o eixo z e no P4 abre para o eixo y. A semelhança é que ambos possuem as mesmas dimensões.

Fonte: Acervo do autor

No caso da resposta do aluno A_6 (Figura 16), além da pouca delimitação dos termos da primeira parte de sua resposta, o que indica problemas no uso da Função Referencial, a segunda parte da resposta apresenta uma unidade apofântica errada. Por isso, não atribuímos valor lógico de verdade a ela. Para identificar tal erro basta aplicar as propriedades de reflexão da subseção 4.3.8.1 (p. 254) e verificar que P_1 (de equação $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$) não é a reflexão de P_4 (de equação $x = -y^2/b^2 - z^2/c^2$). O correto é dizer que P_1 é a reflexão do paraboloide de equação $x = -y^2/b^2 - z^2/a^2$ (o denominador de $-z^2$ é a^2 e não c^2 como em P_4). Logicamente, neste momento da experimentação esperávamos que o aluno ainda não tivesse as ferramentas algébricas necessárias que garantem tal discussão e, por isso, no fim dessa atividade, apoiados no Geogebra, ficamos ao nível de conjecturas ao dizermos que os eixos das correspondentes figuras determinadas nas interseções de P_1 e P_4 com planos (elipses) têm medidas diferentes. Porém, no fim da experimentação discutimos com o grupo tais ferramentas de maneira sucinta.

Figura 16 – Atividade 1: resposta do aluno A_6



1 AMBOS ESTÃO NO EIXO Z
UM É ESPELHO DO OUTRO, LADO POSITIVO E NEGATIVO

Fonte: Acervo do autor

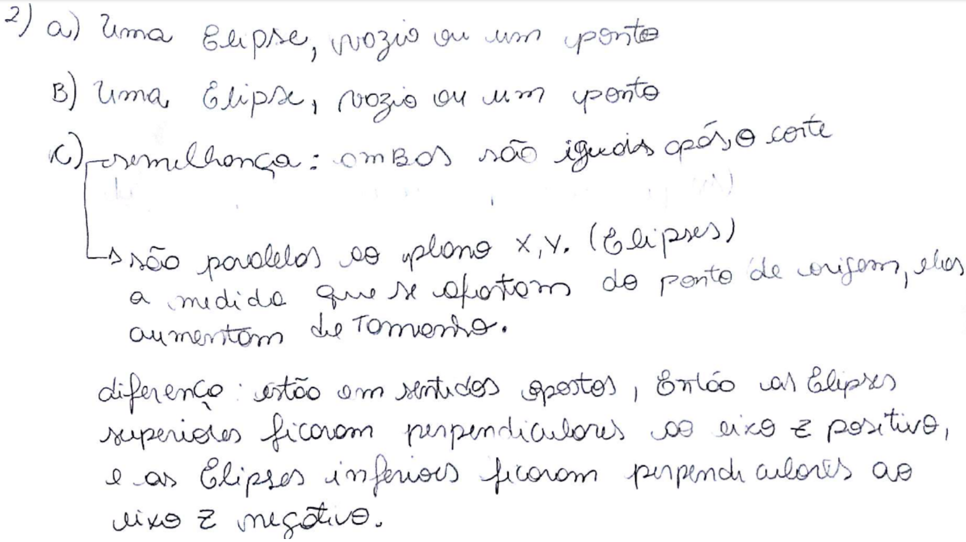
Diante do exposto e considerando o confronto entre o que ocorreu na experimentação com o que planejamos na análise a priori, chegamos a algumas conclusões finais relativas a atividade 1. No que diz respeito aos objetivos entendemos que eles foram validados. Já a realização prática da atividade 1 se caracterizou segundo a maneira que ela foi classificada na análise a priori (situação de ação). Em síntese, mesmo que na experimentação os alunos deram algumas respostas que não prevíamos nas hipóteses, consideramos que em geral a atividade 1 de nossa Engenharia Didática foi validada. No fundo, consideramos que essas respostas - as que não foram previstas - são gratas surpresas.

Esclarecemos que tomamos “hipótese não prevista” como diferente de “hipótese errada ou não confirmada”. Naquele caso, trata-se de algo que não consta nas hipóteses e, com isso, não as contraria enquanto que neste caso se trata de algo que contraria uma hipótese prevista na análise a priori.

7.2 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 2

Nos anexos vemos que a *maioria* dos alunos identificou os três valores visuais em questão (elipse; ponto; vazio) e se referiu a eles de maneira apropriada inclusive incluindo elementos teóricos semelhantes a “elipses com eixos aumentando perpendiculares a um dos semieixos”. Nesses casos, em geral atribuímos as suas produções o valor lógico de verdade. Para ilustrar um desses casos, apresentamos o registro seguinte.

Figura 17 – Atividade 2: resposta do aluno A_1



2) a) Uma Elipse, vazio ou um ponto

B) Uma Elipse, vazio ou um ponto

C) semelhança: ambos são iguais após o corte

↳ são paralelos ao plano x, y. (Elipses)
a medida que se afastam do ponto de origem, elas aumentam de tamanho.

diferença: estão em sentidos opostos, Então as Elipses superiores ficaram perpendiculares ao eixo z positivo, e as Elipses inferiores ficaram perpendiculares ao eixo z negativo.

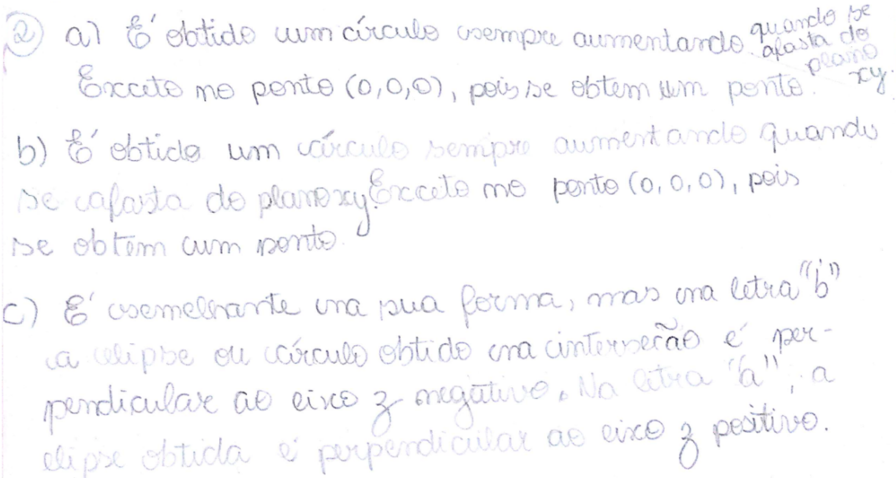
Fonte: Acervo do autor

Na figura anterior, especificamente relativo à unidade apofântica "ambas são *iguais* após o corte", não atribuímos valor lógico de verdade pelo fato de que se trata de elipses *refletidas* e que possuem equações diferentes. Não obstante, aprimoramos linguagem do aluno e comentamos que proposições do tipo "em ambos os casos temos elipses, um ponto e o vazio depois do corte" ou "elipses refletidas, ... " são mais apropriadas. O objetivo dessa discussão, além de corrigir o erro do aluno, foi propor unidades apofânticas semelhantes a que o aluno elaborou, porém que estejam corretas.

No que diz respeito à Função Referencial, ao *designar* o valor visual "vazio", alguns alunos o fizeram em língua natural usando os seguintes termos: "nada; vazio; não há interseção". Um aluno ainda usou o símbolo matemático de "não existe". Consideramos como válido todos essas designações, mas discutimos que intelectualmente o termo preferido em língua natural é "vazio" e, além disso, lembramos o símbolo canônico "ϕ". Ao designar o valor visual "ponto/origem", a maioria dos alunos recorreu ao registro língua natural e alguns o fizeram em forma de terno ordenado. Discutimos com os alunos essas múltiplas possibilidades de se referir ao objeto em questão.

No caso do registro a seguir (Figura 18), vemos que o aluno não inclui o vazio e, além disso, nos itens "a" e "b" refere-se apenas as circunferências e não as elipses (mais genéricas). Nos anexos, vemos que o aluno A_{10} também se refere às circunferências e não as elipses. Mesmo diante desses limites, esses valores visuais são verdadeiros e, no contexto das Funções Discursivas, também atribuímos valor lógico de verdade a essa argumentação. Durante a experimentação, no fim desta atividade, discutimos com os alunos as possibilidades e os limites do uso desses termos.

Figura 18 – Atividade 2: resposta do aluno A_3


2) a) É obtido um círculo sempre aumentando quando se afasta do plano xy. Exceto no ponto (0,0,0), pois se obtem um ponto.

b) É obtido um círculo sempre aumentando quando se afasta do plano xy. Exceto no ponto (0,0,0), pois se obtem um ponto.

c) É semelhante na sua forma, mas na letra "b" a elipse ou círculo obtido na interseção é perpendicular ao eixo z negativo. Na letra "a", a elipse obtida é perpendicular ao eixo z positivo.

Fonte: Acervo do autor

No caso a seguir, em que expomos parte da resposta do aluno A_9 ao item "a", há uma afirmação absurda e, por isso, não atribuímos valor lógico de verdade. Perceba que qualitativamente os itens "a" e "b" do caso anterior (Figura 18) são diferentes do caso do aluno A_9. Enquanto neste temos um absurdo naqueles temos respostas corretas (mesmo que incompletas).

Figura 19 – Atividade 2 (parte 1): resposta do aluno A_9


Quando k_1 for ≤ 0 obtemos um ponto.

Fonte: Acervo do autor

Mesmo que não tendo sido solicitado na atividade 2, alguns alunos incluíram em sua resposta elementos algébricos articulados a elementos visuais e, com isso, fizeram uma *expansão do discurso* (Função

Discursiva). Para ilustrar, veja os registros a seguir (Figuras 20 e 21). No caso do aluno A_9 (parte de sua resposta dada ao item "a") vemos que ele recorre pragmaticamente ao Geogebra para, principalmente em língua natural, narrar e descrever algumas relações interessantes observadas. Porém, essas articulações não parecem se apoiarem num quadro teórico mais amplo. Portanto, se trata predominantemente de uma *expansão natural do discurso.* Já no caso do aluno A_{10} a expansão do discurso ocorreu de forma mais elaborada e inclui o domínio de um conhecimento intelectual específico (curvas de nível; imagem). Portanto, esta resposta apoiou-se num quadro teórico mais amplo e, por isso, é predominantemente uma *expansão cognitiva do discurso.*

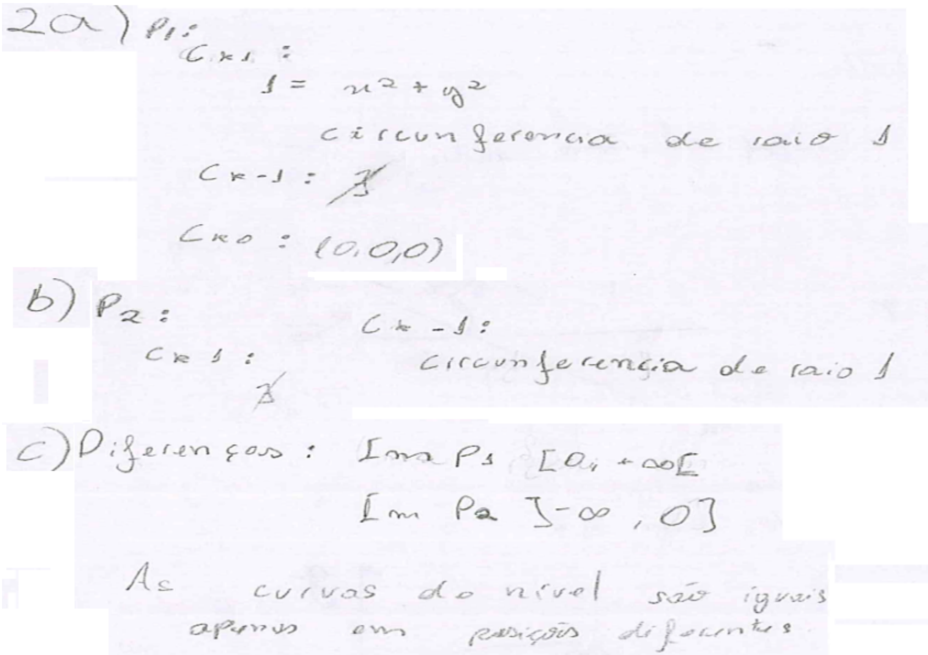
Figura 20 – Atividade 2 (parte 2): resposta do aluno A_9

2 a)

Quando os valores de a, b e c são iguais é possível visualizar uma circunferência e que quanto maior o valor de K, maior será o raio da circunferência. Se os valores de a, b e c forem diferentes é possível obter diferentes formatos de paraboloides

Fonte: Acervo do autor

Figura 21 – Atividade 2: resposta do aluno A_{10}



Fonte: Acervo do autor

Com relação às hipóteses que formulamos na analise a priori relativas à atividade 2, a que prevê que a maioria dos alunos identificariam os valores visuais elipses, origem e vazio foi confirmada. Também foi confirmada a hipótese de que alguns alunos não falariam, mesmo com termos próprios, do fato de que as “elipses estão abrindo”. Porém, a hipótese que fizemos que dizia que alguns alunos não registrariam a diferença entre as posições das “elipses com eixos aumentando” no sistema cartesiano (perpendiculares ao semieixo z_+, ou ao semieixo y_-, ...) não se confirmou. Diante de nosso erro de previsão, pensamos que os alunos superaram nossas expectativas.

No que tange aos objetivos, o que foi planejado foi validado na prática. Além disso, a atividade foi realizada conforme o tipo de situação que planejamos na análise a priori incluindo a *institucionalização*[1] dos aspectos aqui trabalhados para os hiperboloides de uma e duas folhas e para os cones quádricos elípticos.

Em síntese, diante do exposto, de maneira geral consideramos

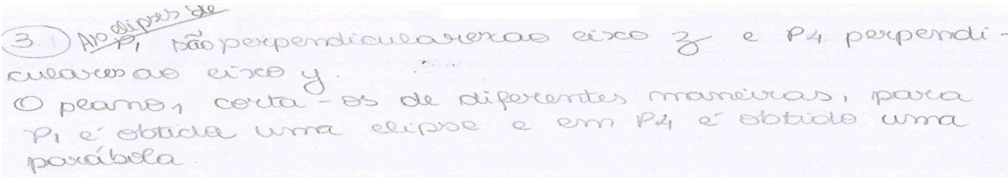
[1]Veja as definições dos tipos de Situações Didáticas na página 136.

como validada a realização da atividade 2.

7.3 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 3

Ao diferenciar P_1 e P_4 nesta atividade percebemos que os alunos incluíram em suas respostas as variáveis/valores visuais que eles "experimentaram" no Geogebra durante a atividade 2 (interseções com planos – elipses; ponto; vazio). Em particular, muitos diferenciaram P_1 e P_4 recorrendo, mesmo que com seus próprios termos, as "elipses com eixos aumentando". O registro a seguir, referente à atividade 3, ilustra o que dissemos.

Figura 22 – Atividade 3: resposta do aluno A_3


3.1) Ao As elipses de P1 são perpendiculares ao eixo z e P4 perpendi-
culares ao eixo y.
O plano, corta-os de diferentes maneiras, para
P1 é obtida uma elipse e em P4 é obtido uma
parábola.

Fonte: Acervo do autor

Apesar de que na atividade 3 as respostas dos alunos já são mais bem elaboradas, pensamos que em geral elas ainda não se sustentam suficientemente num quadro teórico. Por isso, não atribuímos valor epistêmico de certeza. Mesmo assim, em geral trata-se de produções verdadeiras e, por isso, atribuímos valor lógico de verdade a elas. As exceções são as proposições dos registros a seguir. No caso da proposição do aluno A_{10} (Figura 23), apesar de que os dois paraboloides "aparentam serem equivalentes", o estudo algébrico das reflexões mostram que eles não são (já explicamos essa questão depois da Figura 15 da página 286).

Retornando aos registros a seguir, vemos que o aluno A_9 (Figura 24) deveria dizer "plano perpendicular ao eixo" ao invés de dizer "plano perpendicular a elipse". Esse mesmo aluno ainda comete um erro ao afirmar que em P_4 quanto maior os valores de a e b maior será a "abertura" da elipse. Conforme sabemos, isso é válido para P_1 sendo que para P_4 o referido aumento acontece em relação a aumento dos valores a e c.

Apesar de que na atividade 3 as respostas dos alunos já são mais bem elaboradas, pensamos que em geral elas ainda não se sustentam suficientemente num quadro teórico. Por isso, não atribuímos valor

epistêmico de certeza. Mesmo assim, em geral trata-se de produções verdadeiras e, por isso, atribuímos valor lógico de verdade a elas. As exceções são as proposições dos registros a seguir. No caso da proposição do aluno A_{10} (Figura 23), apesar de que os dois paraboloides "aparentam serem equivalentes", o estudo algébrico das reflexões mostram que eles não são (explicamos essa questão depois da Figura 15 da página 286). Logicamente, neste momento da experimentação esperávamos que o aluno ainda não tivesse as ferramentas algébricas necessárias que garantem tal discussão e, por isso, apoiados no Geogebra ficamos ao nível de conjecturas ao dizermos que os eixos das correspondentes elipses determinadas nas interseções de P_1 e P_4 têm medidas diferentes (isso é o suficiente para notar que essas quádricas não são equivalentes). Porém, no fim da experimentação discutimos tais ferramentas de maneira sucinta. Retornando aos registros a seguir, vemos que o aluno A_9 (Figura 24) deveria dizer "plano perpendicular ao eixo" ao invés de dizer "plano perpendicular a elipse". Esse mesmo aluno ainda comete um erro ao afirmar que em P_4 quanto maior os valores de a e b maior será a "abertura" da elipse. Conforme sabemos, isso é válido para P_1 sendo que para P_4 o referido aumento acontece em relação a aumento dos valores a e c.

Figura 23 – Atividade 3 (parte 1): resposta do aluno A_{10}

Semelhanças: São paraboloides equivalentes.

Fonte: Acervo do autor

Figura 24 – Atividade 3 (parte 1): resposta do aluno A_9

Em P_1 quanto maiores os valores de a e b maior é a abertura da elipse. O mesmo vale para P_4.

A principal diferença é que no eixo z positivo quanto maior a posição do plano perpendicular a elipse maiores são as elipses obtidas e no caso do eixo z negativo quanto menor a posição do plano perpendicular

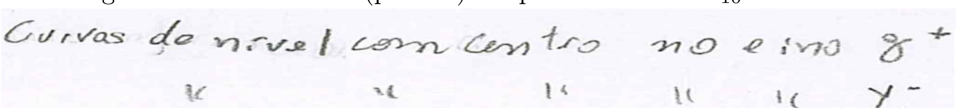
Fonte: Acervo do autor

Contudo, o aluno A_9 (Figura 24), a partir do registro "em P_1

quanto maior os valores de a e b maior será a abertura da elipse”, inclui elementos algébricos articulados a elementos visuais que a atividade não solicitou. Dessa forma, principalmente em língua corrente, há uma expansão do discurso (Função Discursiva). Essa expansão teve apoio mais intenso no Geogebra e, assim, ocorreu de forma mais pragmática do que intelectual. Além disso, A_9 ficou ao nível de narração ou descrição do que foi observado experimentalmente sem, com isso, avançar para explicações mais elaboradas que estão articuladas a um quadro teórico. Portanto, se trata predominantemente de uma *expansão natural do discurso.*

Já no discurso de A_{10} registrado a seguir vemos que a expansão do discurso ocorreu de forma mais intelectual e inclui o domínio de um conhecimento intelectual específico (*curvas de nível*). Portanto, a resposta do aluno apoiou-se num quadro teórico mais amplo e, por isso, ele é predominantemente uma *expansão cognitiva do discurso.* Porém, cabe a ressalva, discutida em classe, que seria mais apropriado dizer semieixo (e não eixo) z_+.

Figura 25 – Atividade 3 (parte 2): resposta do aluno A_{10}



Fonte: Acervo do autor

Para evitar futuros problemas na maneira de se referir aos objetos matemáticos, durante a experimentação (no fim desta atividade) comentamos com todos os alunos algumas proposições criadas por eles que estão nos registros a seguir (Figuras 26 e 27). Com relação ao termo “raio da elipse”, usado pelo aluno A_4, dissemos que ele é restrito para as elipses que são do tipo circunferências e, por isso, usaríamos os termos mais genéricos (eixos maior e menor).[2] Também comentamos que o termo “elipses com eixos aumentando”, usados por nós mesmos, não significa que as elipses são “figuras abertas”. No fundo, significa apenas que os eixos dessas elipses aumentam de tamanho à medida que elas se afastam da origem. Assim, comentamos que termos como “as elipses estão abertas”, usadas pelo aluno A_5, devem ser reavaliadas. Daí, convencionamos com o grupo que usaríamos o termo “elipses com eixos aumentando” sempre com o sentido que especificamos. De

[2]Obviamente nos casos em que temos uma circunferência o termo raio é adequado.

qualquer maneira, o que fizemos foi discutir a forma como os alunos de referem (Função Referencial) a determinados objetos.

Figura 26 – Atividade 3: resposta do aluno A_4

O raio da elipse formada por uma interseção de P_1 e um plano perpend
ao eixo $z+$ aumenta

Fonte: Acervo do autor

Figura 27 – Atividade 3: resposta do aluno A_5

3)
As elipses de P1 estão abertas em z^+ e as elipses de P4 estão abertas em y^-.

Fonte: Acervo do autor

Antes de resolvermos a atividade 4, seguindo o que planejamos na análise a priori, realizaremos um momento de institucionalização do conhecimento. Primeiro, discutimos que podemos diferenciar e reconhecer a posição dos paraboloides elípticos padrão tendo como base o semieixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares". Estendemos essa ideia para os hiperboloides de uma folha e duas folhas e para os cones quádricos elípticos padrão.

A seguir, a partir do Quadro 5.1 (p. 263), definimos os registros básicos em língua natural dos paraboloides elípticos padrão.

Por fim, *apresentamos* o Quadro 5.2 (p. 264) em que estão os correspondentes registros cartesianos, básicos em língua natural e simbólicos dos seis casos de paraboloides elípticos padrão. Nele, as conversões entre as duas primeiras colunas já foram discutidas a partir do Quadro 5.1 e a terceira coluna, nesse momento, foi apenas apresentada.

Diante do exposto, segundo previsto na análise a priori, apesar de que as atividades 1 e 3 são idênticas, as respostas dadas não são. Conforme mostramos, as respostas dadas a esta atividade incluem os aspectos semióticos discutidos na atividade 2 (interseções com planos) e as respostas dadas aquela atividade predominantemente se limitaram aos aspectos empíricos mais imediatos ("abertura", "boca", ...). Logo, pensamos que houve uma evolução qualitativa na maneira de se referir as oposições qualitativas de P_1 e P_4.

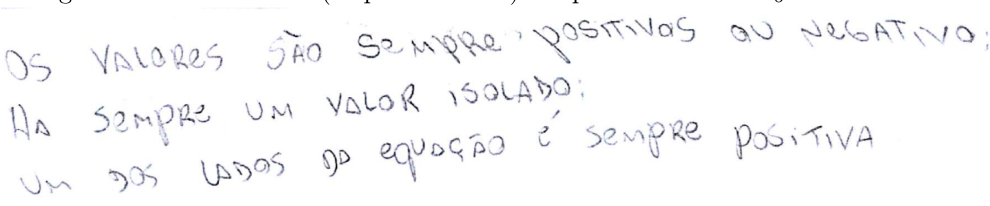
Em síntese, confrontando o que expomos nessa subseção com os objetivos, o tipo de situação e as hipóteses definidos para a atividade 3 na análise a priori (p. 273), consideramos que a realização dessa atividade foi validada.

7.4 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 4

Conforme previsto na analise a priori, na resolução da atividade 4 todos os alunos identificaram ou destacaram "características dos termos das equações básicas" dadas na atividade. A essas respostas em geral atribuímos valor lógico de verdade, pois trata-se de *unidades apofânticas* com argumentações válidas.

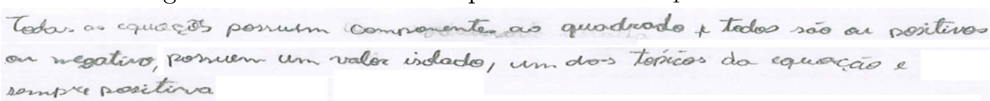
As argumentações dos registros a seguir, apesar de termos atribuído valor lógico de verdade, foram retomadas com todos os alunos com o objetivo de ampliar/melhorar suas designações. No caso do registro do aluno A_6 (Figura 28), primeiro chamamos a atenção de que ao dizermos termos como "termo quadrático positivo/negativo" temos que ter claro que estamos querendo dizer que seu coeficiente é positivo/negativo, mas que podemos atribuir qualquer valor real a correspondente variável desse termo. Depois, lembramos que é recorrente na literatura o uso dos termos primeiro e segundo membros da equação para se referir ao popular "lado da equação". De forma semelhante, as designações "componentes ao quadrado e tópicos da equação", usados pelo aluno A_4 (Figura 29), possuem termos mais científicos. Já com relação ao registro do aluno A_9 (Figura 30), comentamos que é não apropriado dizer que o "termo que está isolado ... nem possui denominador". Também é mais adequado as designações "a variável (e não o eixo) que está isolada".

Figura 28 – Atividade 4 (resposta inteira): resposta do aluno A_6


OS VALORES SÃO SEMPRE POSITIVOS OU NEGATIVO;
HA SEMPRE UM VALOR ISOLADO;
UM DOS LADOS DA EQUAÇÃO É SEMPRE POSITIVA

Fonte: Acervo do autor

Figura 29 – Atividade 4: resposta do aluno A_4


Todas as equações possuem componentes ao quadrado e todos são ou positivos ou negativo, possuem um valor isolado, um dos tópicos da equação é sempre positiva

Fonte: Acervo do autor

Figura 30 – Atividade 4: resposta do aluno A_9

As semelhanças são:

- Em todas as equações é possível observar que um dos três eixos está em função dos demais;
- É possível observar também que em todas as funções existem parâmetros para os eixos positivos e negativos do plano cartesiano.

As diferenças são:

- O termo que está isolado não é quadrático e nem possui um denominador;
- O eixo que está isolado é sempre positivo.

Fonte: Acervo do autor

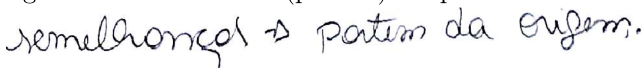
Apesar dos comentários do parágrafo anterior, os argumentos dos alunos A_4 (Figura 29) e A_9 (Figura 30), assim como de outros alunos, remetem a identificação ou ao destaque de unidades significantes que são usadas nas conversões. Outras argumentações, apesar de válidas, não identificaram ou destacaram tais unidades significantes e, assim, os alunos não se referiram ao que é semioticamente fundamental para realizarmos conversões que envolvam os registros simbólicos. É o caso, por exemplo, dos registros dos alunos A_5 e A_1 a seguir.

Figura 31 – Atividade 4: resposta do aluno A_5

Se assemelham pelo fato de todas as equações existir uma relação entre {x, y e z},

Fonte: Acervo do autor

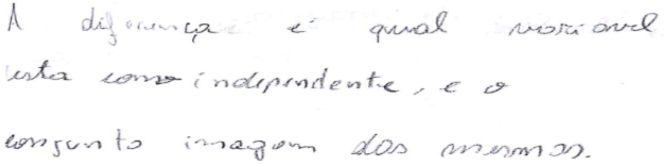
Figura 32 – Atividade 4 (parte 1): resposta do aluno A_1



Fonte: Acervo do autor

Mesmo com objetivos e escrita pouco clara, os registros do aluno A_{10}, apresentados a seguir, nos chamaram a atenção e nos fizeram ir conversar com ele pelo fato que tais termos pareciam remeter a um quadro teórico mais amplo. Com isso, mediante o *ato ilocutório*, o aluno nos disse que podemos saber o conjunto imagem a partir das seguintes informações da equação: qual variável é independente; qual o sinal dos termos quadráticas. Inclusive, de forma intelectual, ele usou teoremas para contemplar suas proposições. Como exemplo, explicou que em $z = x^2 + y^2$ a variável independe é z e os "termos quadráticos são positivos". Como a soma de dois termos quadráticos com coeficiente positivo é maior ou igual a zero, então z também será maior ou igual a zero. Logo, nesse caso a imagem é maior ou igual a zero. Diante do exposto, consideramos que ocorreu uma expansão cognitiva do discurso e, além disso, atribuímos valor epistêmico de certeza a argumentação oral do aluno.

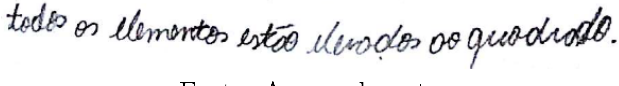
Figura 33 – Atividade 4: resposta do aluno A_{10}



Fonte: Acervo do autor

Entre as argumentações que não atribuímos valor lógico de verdade é evidente que estão às registradas a seguir.

Figura 34 – Atividade 4: resposta do aluno A_7



Fonte: Acervo do autor

Figura 35 – Atividade 4 (parte da resposta): resposta do aluno A_6

OS VALORES SÃO SEMPRE POSITIVAS OU NEGATIVO:

Fonte: Acervo do autor

Figura 36 – Atividade 4: resposta do aluno A_8

todos tem 4 variancia, em que os mesmos estão
elevados ao quadrado
Existe o lado positivo e negativo de cada equação.

Fonte: Acervo do autor

No caso do registro a seguir, vemos que há pouca delimitação ou confusão à que se refere o aluno. Consequentemente, torna-se mais difícil atribuirmos um *estatuto* a essa argumentação. Mesmo diante desses problemas, nos pareceu que o aluno tentou expandir seu discurso ao buscar articular elementos visuais com algébricos. Por isso, fomos ao encontro dele e, mediante o ato ilocutório, tentamos entender as "intenções" de seus termos. Porém, não tivemos sucesso e, dessa forma, pode-se apenas fazer especulações a respeito da resposta dada.

Figura 37 – Atividade 4 (parte 2): resposta do aluno A_1

diferenças →
são os eixos em que apontam e os
sinais são diferentes, então são sentidos opost

Fonte: Acervo do autor

Ressaltamos que os alunos não se referiram a todas as unidades simbólicas necessárias semioticamente para realizarmos conversões.

Conforme planejado na análise a priori, depois de realizado esta atividade o professor-pesquisador, de maneira aleatória, procedeu da seguinte forma:

- Para os alunos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, que chamamos de grupo G_1, foi discutido individualmente o Quadro 5.3 (p. 265) que dá atenção às unidades significantes simbólicas que serão necessárias para

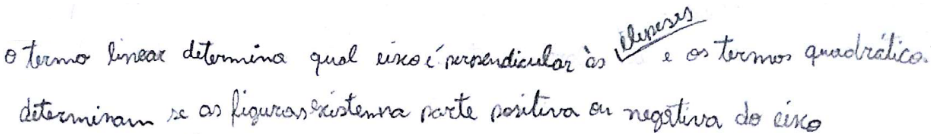
as conversões e que expõe a maneira matemática de se referir a essas unidades;
- para os alunos A_7, A_8, A_9 e A_{10}, que chamamos de grupo G_2, nesse momento não foi feito essa discussão.

Diante do exposto, os objetivos, o tipo de situação e as hipóteses previstas na análise a priori da atividade 4 foram legitimados na prática. Logo, consideramos como validada a realização dessa atividade.

7.5 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 5

Em geral, os registros das respostas dos alunos do grupo G_1 indicam que eles se referiram de maneira adequada, clara e objetiva as unidades simbólicas necessárias para realizar as conversões da atividade. Um bom exemplo é o registro a seguir.

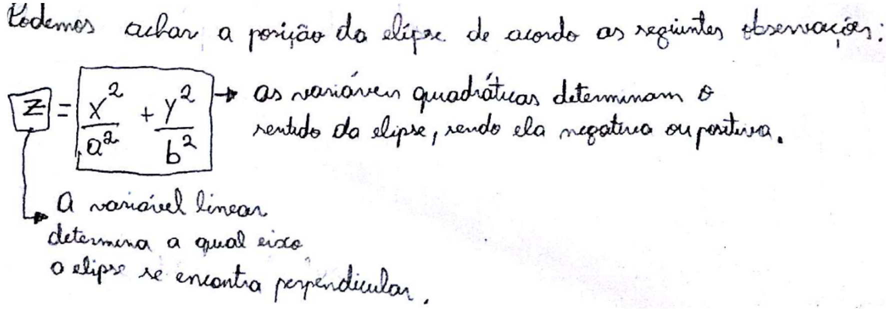
Figura 38 – Atividade 5: resposta do aluno A_4


o termo linear determina qual eixo é perpendicular às elipses e os termos quadrático.
determinam se as figuras existem na parte positiva ou negativa do eixo

Fonte: Acervo do autor

Porém, algumas designações, mesmo que possam ser entendidas, foram rediscutidas. Para ilustrar, veja os registros a seguir. No caso do aluno A_6 (Figura 40), sugerimos que fosse dito “termo linear” e não apenas “linear” e, além disso, “termos quadráticos” ao invés de “equação quadrática”. No caso do aluno A_2 (Figura 39), comentamos que os termos “sentido da elipse” precisam ser bem delimitados ou redefinidos. Mediante o ato ilocutório (no fim desta atividade), oralmente esse aluno atendeu adequadamente nossas solicitações. Da mesma forma, o aluno A_3 (Figura 41) reavaliou e refez a sua fala “eixo isolado” adequadamente.

Figura 39 – Atividade 5: resposta do aluno A_2



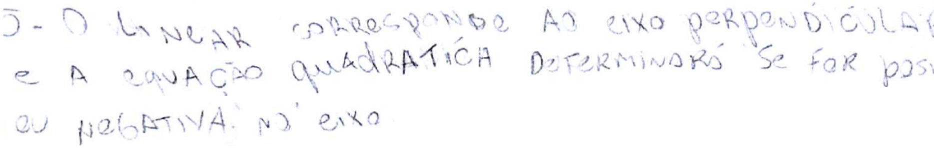
Podemos achar a posição do elipse de acordo as seguintes observações:

$$\boxed{z} = \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$ → as variáveis quadráticas determinam o sentido do elipse, sendo ela negativa ou positiva.

A variável linear determina a qual eixo o elipse se encontra perpendicular.

Fonte: Acervo do autor

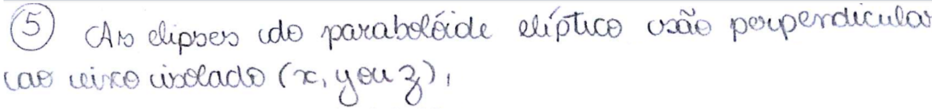
Figura 40 – Atividade 5: resposta do aluno A_6



5- O LINEAR CORRESPONDE AO EIXO PERPENDICULA
e A EQUAÇÃO QUADRÁTICA DETERMINARÁ SE FOR POSI
OU NEGATIVA NO EIXO

Fonte: Acervo do autor

Figura 41 – Atividade 5 (parte da resposta): resposta do aluno A_3

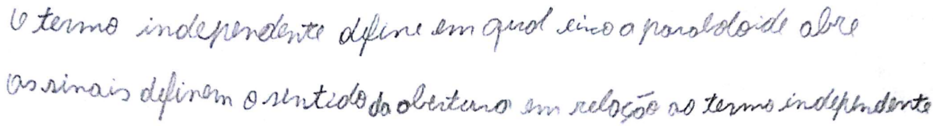


(5) As elipses do parabolóide elíptico são perpendiculares
ao eixo isolado (x, y ou z),

Fonte: Acervo do autor

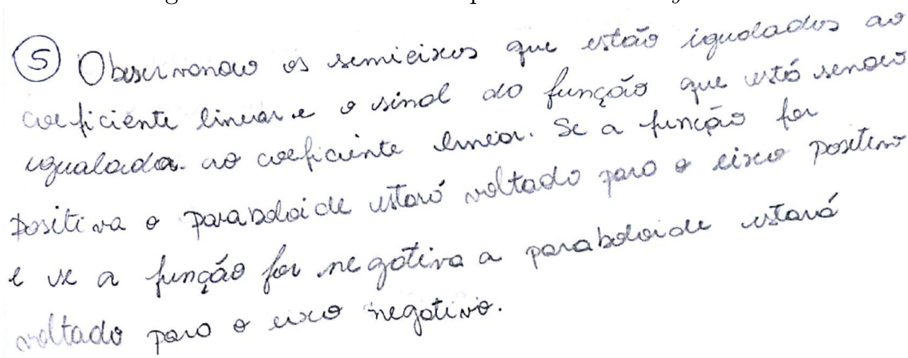
No caso dos alunos do grupo G_2 houve menos clareza e objetividade do que semioticamente norteia as conversões em questão. Para ilustrar, veja os registros a seguir. No caso do aluno A_7 (Figura 42), apesar de que mediante o ato ilocutório foi possível entender que "termo independente" no fundo se refere ao termo linear, optamos em corrigir o uso desses termos. Porém, a segunda parte de seu registro, mesmo no ato ilocutório, pareceu pouco delimitada ou confusa para o aluno. Problemas semelhantes ocorreram com o aluno A_8 (veja os anexos). No caso do aluno A_9 (Figura 43), mesmo que com o uso confuso de alguns termos, tínhamos a impressão de que o aluno sabia do que se tratava. No ato ilocutório de fato confirmamos essa impressão. Já para o aluno A_{10}, tínhamos a impressão de que ele recorreu a expansão discursiva que comentamos na análise da atividade 4 (veja a Figura 33 - p. 298 - e o comentário anterior a ela). No ato ilocutório essa impressão também se confirmou.

Figura 42 – Atividade 5: resposta do aluno A_7


O termo independente define em qual eixo o paraboloide abre
Os sinais definem o sentido da abertura em relação ao termo independente

Fonte: Acervo do autor

Figura 43 – Atividade 5: resposta do aluno A_9


5 Observamos os semieixos que estão igualados ao coeficiente linear e o sinal da função que está sendo igualada ao coeficiente linear. Se a função for positiva o paraboloide estará voltado para o eixo positivo e se a função for negativa a paraboloide estará voltado para o eixo negativo.

Fonte: Acervo do autor

Figura 44 – Atividade 5: resposta do aluno A_{10}


Ver o conjunto . imagem e qual termo esta como independente.

Fonte: Acervo do autor

De maneira geral, tanto com o grupo G_1 quanto com o G_2 houve a necessidade de que o professor-pesquisador fizesse algumas correções ou adequações. Porém, conforme previsto, em relação ao grupo G_2 os alunos do grupo G_1 se referiram de maneira mais adequada, clara e objetiva as unidades simbólicas que norteiam as conversões da atividade 5. Pensamos que o fato de que os alunos do grupo G_2 não terem nossas explicações com relação ao Quadro 5.3 (p. 265) contribuiu para tal diferença. Obviamente, há outras questões tais como o histórico dos alunos que não temos como objetivo discutir em nossa pesquisa. De qualquer maneira, os dados da experimentação dão indicativos da importância em esclarecer as unidades significantes simbólicas.

No fim desta atividade, conforme planejado, o professor-pesquisador discutiu o Quadro 5.3 (p. 265) com o grupo G_2. Além disso, com os dois grupos, sintetizamos todas as conversões/unidades significantes do Quadro 5.4 (p. 266) e as aplicamos no Quadro 5.2 (p. 264).

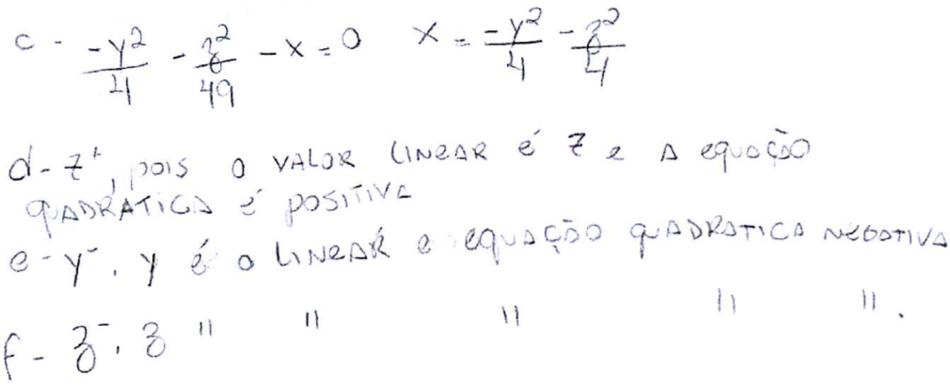
Diante do exposto, admitidos que os objetivos e a tipologia da situação previstos na análise a priori da atividade 5 foram legitimados na experimentação. Com relação as hipóteses que tomamos, mesmo que também houve problemas com algumas designações dos alunos dos grupo G_1, consideramos que elas se efetivaram. Portanto, essa atividade foi validada.

7.6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 6

Inicialmente cabe dizer que o aluno A_{10} não quis registrar no papel suas respostas referentes aos itens “d”, “e” e “f” desta atividade. Havendo essa quebra de Contrato Didático, solicitamos que sua resposta fosse ao menos oral. O aluno atendeu nosso pedido e deu respostas de maneira correta e conforme as unidades significantes que discutimos. Dessa forma, renegociamos o Contrato Didático.

No caso do aluno A_6, conforme mostra o registro a seguir, houve erros nas respostas dos itens “c” e “f”. Conversamos com o aluno e ele disse que foi apenas falta de atenção. Considerando suas demais respostas vemos que de fato foi apenas distração. Além disso, conforme feito em outras ocasiões, discutimos os termos usados por ele para fazer designações.

Figura 45 – Atividade 6 (parte da questão): resposta do aluno A_6

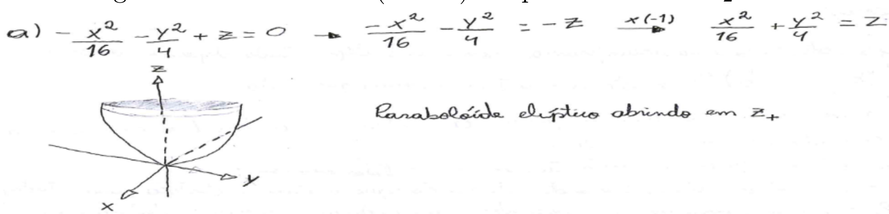


Fonte: Acervo do autor

No item "b" o aluno A_9 também cometeu uma pequena distração. Ao invés de registrar em seu caderno a equação $-y - x^2 - z^2 = 0$ ele registrou a equação $-z - x^2 - y^2 = 0$. Mesmo assim, com relação a equação registrada a resposta dada pelo aluno foi correta.

Salvo os dois problemas citados dos alunos A_6 e A_9, nas demais respostas dadas a atividade 6, temos indicativos de que os alunos realizaram conversões entre os registros cartesiano, em língua natural e simbólico e mobilizaram as correspondentes unidades significantes. Como exemplo, veja o registro a seguir:

Figura 46 – Atividade 6 (item a): resposta do aluno A_2



Fonte: Acervo do autor

Dessa forma, as conversões realizadas pelos alunos recorreram a um quadro teórico que articula elementos semióticos bem delimitados e claros e, por isso, concebemos que eles realizaram expansões discursivas do tipo cognitivas. Inclusive, o uso dos léxicos para se referirem as unidades significantes em geral foi bem feito.

No que diz respeito aos tratamentos, apenas o caso já discutido do aluno A_6 relativo ao item "c" (Figura 45) contém erro. Dessa forma, uma de nossas hipóteses da análise a priori está errada, pois está previsto que *alguns* (no plural) alunos cometeriam erros tratamentos.

Salvo isso o restante de nossas previsões incluindo tipologia da situação, os objetivos e as demais hipóteses ocorreram conforme planejamos.

Inclusive, conforme também planejamos, antes de iniciarmos a atividade 7 o professor-pesquisador revisou o conteúdo interseção com planos, os quadros da subseção 4.2.4 (p. 164) que tratam das cônicas padrão, as equações das cônicas transladadas bem como a determinação das coordenadas do vértice/centro.

Portanto, diante do erro de previsão concernente aos tratamentos que acabamos de citar, consideramos como parcialmente validada a atividade 6.

7.7 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 7

Com as discussões que veremos nesta subseção podemos concluir que os objetivos e a tipologia da situação didática previstas na análise a priori foram validadas. Algumas poucas hipóteses, porém não se confirmaram. Para chegar a tal conclusão, a seguir analisaremos cada item da atividade 7.

No item "a" tudo ocorreu de acordo com o previsto. Assim, os léxicos usados foram os seguintes: ponto; origem; $(0, 0, 0)$.

No item "b" algumas respostas foram mediadas por unidades apofânticas externas (*similaridade externa*). Nesses casos, as explicações evocaram o uso de conhecimentos como teoremas, definições e, ainda, usaram tratamentos algébrico/aritméticos. Nesse sentido, veja a resposta a seguir. Nela atribuímos valor lógico de verdade e epistêmico de certeza. Porém, conversamos com o aluno a respeito das seguintes questões: qual o significado dos léxicos "número neutro"? qual o universo numérico do teorema enunciado? No ato ilocutório ele respondeu a tudo de maneira adequada. Assim, entendemos que a solução fez uma expansão cognitiva do discurso.

Figura 47 – Atividade 7 (item b): resposta do aluno A_3

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$-\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$ $\quad \boxed{y = 0}$ e $\boxed{x = 0}$

Para um número elevado ao quadrado dar negativo, o único jeito é o x e o y sendo 0, pois ele é neutro.

Fonte: Acervo do autor

No caso da resposta seguinte (aluno A_1) dada ao item "b", mesmo que haja o uso de certos teoremas na expansão do discurso, a solução parece se apoiar mais intensamente na particular na substituição de 0 no lugar das variáveis sem usar teoremas/axiomas que garantam a unicidade da solução. Por isso, mesmo que a solução tenha valor lógico de verdade, ela não possui valor epistêmico de certeza.

Figura 48 – Atividade 7 (item b): resposta do aluno A_1

B) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ z = 0 \end{cases}$

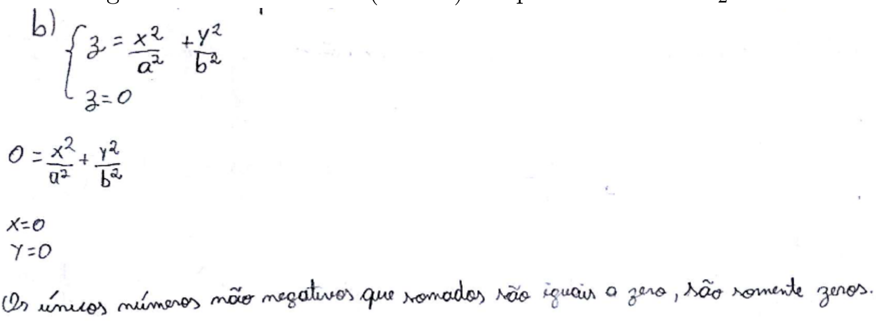
$\rightarrow 0 = \dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2}$

Substituindo o x e o Y por zero, teremos um numerador 0, e dividindo eles por qualquer denominador, irá zerar o mesmo Portanto, x e Y igual a 0, são a solução.

Fonte: Acervo do autor

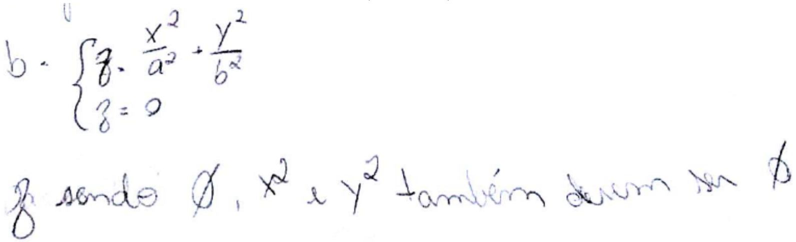
Nas duas soluções a seguir, dadas ao item "b", em algum momento parece que se recorre ao pragmatismo das substituições numéricas. Certamente, essa estratégia influenciou nas unidades apofânticas enunciadas em língua natural no fim das respostas de ambos os alunos. Porém, no caso do aluno A_6, sua unidade apofântica aparentemente tem um estatuto de *quadro social em forma de crença.* Já no caso do aluno A_2, sua enunciação parece ter um estatuto de *quadro teórico em forma de teorema.* Neste caso, o uso de léxicos associativos tais como “únicos” e “somente” nos dão tais indicativos. Tratam-se, portanto, de discursos qualitativamente diferentes.

Figura 49 – Atividade 1 (item b): resposta do aluno A_2



Fonte: Acervo do autor

Figura 50 – Atividade 7 (item b): resposta do aluno A_6

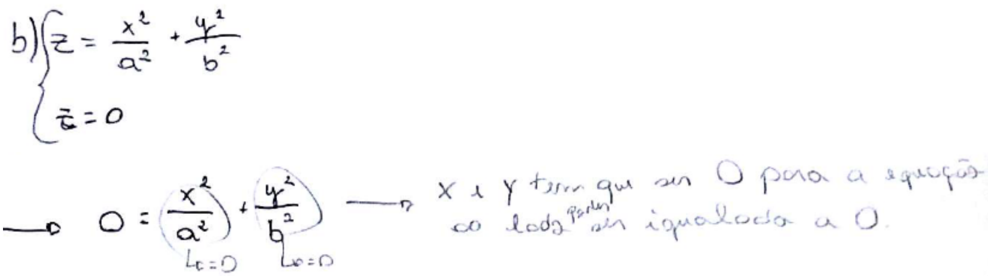


Fonte: Acervo do autor

Cabe o registro de que na solução “b” o aluno A_6 (Figura 50) usou o léxico “ϕ” para designar zero. Mediado pelo ato ilocutório, o aluno disso que se trata de uma solicitação do professor de Eletrônica (disciplina de seu curso de graduação). A justificativa é que o léxico “0” já tem um uso específico nessa disciplina. Por conta própria, o aluno disse que não faria mais essa “troca” nas disciplinas de Matemática. Porém, por vezes a troca ocorria.

Há ainda algumas soluções dadas ao item “b” em que não há ênfase as explicações que evocassem um quadro teórico mais amplo. Como exemplo, veja o registro a seguir. Nele, vemos que o aluno se volta a *descrição* ou *narração* da solução. Dessa forma, ficou mais caraterizado a *expansão natural do discurso*.

Figura 51 – Atividade 7 (item b): resposta do aluno A_8



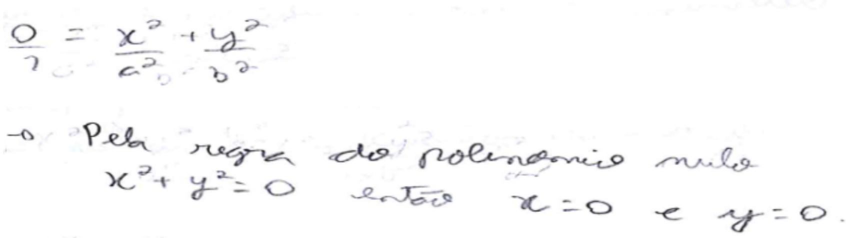
b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases}$

$\to 0 = \left(\dfrac{x^2}{a^2}\right) + \left(\dfrac{y^2}{b^2}\right) \longrightarrow$ x e y tem que ser 0 para a equação o lado poder ser igualado a 0.

Fonte: Acervo do autor

No caso do registro a seguir houve erro relativo ao uso da definição de *polinômio nulo*. Conforme sabemos, no caso em questão temos uma equação com termo independente igual a zero e não um polinômio identicamente nulo[3]. Por isso, o suposto teorema usado pelo aluno não é apropriado para a resolução da atividade. Dado esse problema de argumentação, consideramos que a solução do aluno não tem valor lógico de verdade. Discutimos essa questão com ele.

Figura 52 – Atividade 7 (item b): resposta do aluno A_5



$0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$\to$ Pela regra do polinômio nulo $x^2 + y^2 = 0$ então $x = 0$ e $y = 0$.

Fonte: Acervo do autor

Conforme planejado, nossas intervenções relativas aos itens "a" e "b" incluindo validação/refutação só ocorreram depois que os alunos concluíram esses itens.

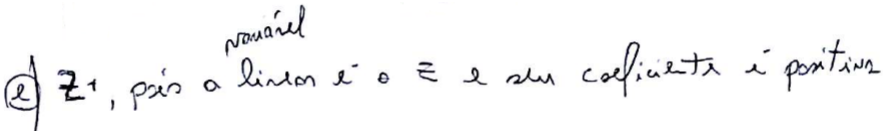
Frente confronto que acabamos de fazer, consideramos como validados os itens "a" e "b" da atividade 7.

Retornando as análises, evidenciamos que os alunos resolveram os itens "c", "d" e "e" da atividade 7 com facilidade. No caso do item

[3]Um polinômio é dito identicamente nulo se tem todos os seus *coeficientes* são iguais a zero

"d", não houveram problemas com os tratamentos. No caso do item "e" a maioria fez a conversão pedida a partir da expansão cognitiva do discurso que, para tanto, evocou a articulação de unidades significantes simbólicas e linguísticas. Como exemplo, veja o registro do aluno A_8 a seguir:

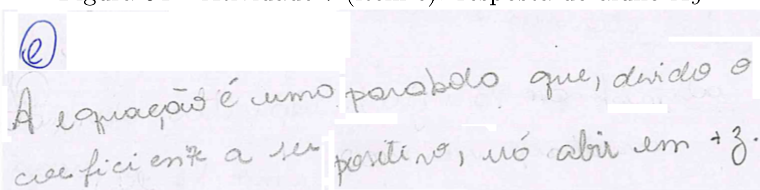
Figura 53 – Atividade 7 (item e): resposta do aluno A_8



Fonte: Acervo do autor

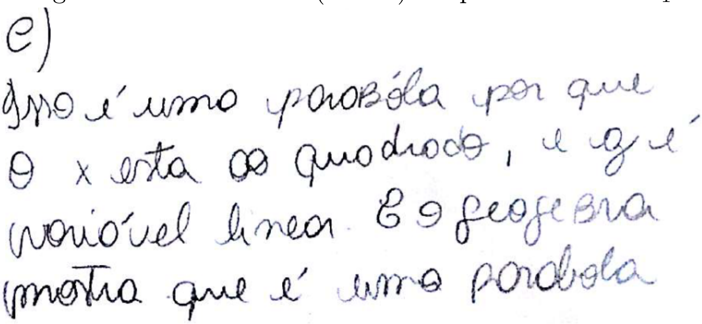
Ainda no item "e", mesmo não tendo sido solicitado, os alunos A_9 e A_1 (Figuras 54 e 55) afirmam, de formas diferentes, que a equação ($x^2 = a^2 z$) é de uma parábola e, assim transitam entre os registros simbólicos e em língua natural. Porém, podemos notar que o nível de argumentação dos dois alunos nessa operação é diferente. No caso daquele aluno ele apenas se limita a afirmar que a "a equação [determinada na letra 'd'] é de uma parábola". Assim, seu discurso fica mais ao nível de uma *codificação* entre a *equação como um todo* e seu registro em língua natural. Já no caso deste aluno ao dizer "isso é uma parábola por que o x está ao quadrado, e z é variável linear", vemos a evocação de unidades significantes que correlacionam os registros em língua natural e o simbólico. Dessa forma, há um salto qualitativo tanto na maneira como A_1 se refere ao registro simbólico em questão quanto como na forma que é executada a mudança de registro que, nesse caso, fica mais ao nível de conversão do que de uma simples codificação.

Figura 54 – Atividade 7 (item e): resposta do aluno A_9



Fonte: Acervo do autor

Figura 55 – Atividade 7 (item e): resposta do aluno A_1


e)
Isso é uma parabóla por que o x esta ao quadrado, e y é variável linear. E o geogebra mostra que é uma parabola

Fonte: Acervo do autor

Conforme planejado, as intervenções do professor-pesquisador relativas ao itens "c, d" e "e" da atividade 7 incluindo validação/refutação só ocorreram depois que os alunos resolveram esses itens.

As respostas dadas aos itens "f", "g" e "h" da atividade 7 foram análogos as que foram dadas nos três itens anteriores.

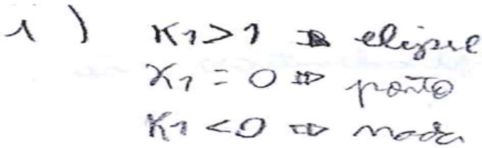
Diante do que discutimos, consideramos os itens "c" ao "h" como validados.

Dando sequência as análises da atividade 7, partiremos para os itens "i, j" e "k".

No item "i" todos os alunos registraram o valor visual elipse. Além disso, conforme já prevíamos, alguns alunos (A_7 e A_8) não incluíram o valor visual vazio. Porém, contrário ao que tínhamos previsto, nenhum aluno cometeu o erro de atribuir o valor visual ponto.

A resposta do aluno A_5 (registro a seguir), mesmo que correta, está incompleta, pois exclui o que ocorre com a interseção quando $0 < k_1 \leq 1$.

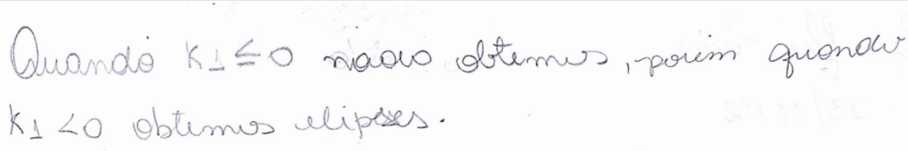
Figura 56 – Atividade 7 (item i): resposta do aluno A_5


i) $K_1 > 1 \Rightarrow$ elipse
$K_1 = 0 \Rightarrow$ ponto
$K_1 < 0 \Rightarrow$ nada

Fonte: Acervo do autor

A resposta do aluno A_9 (registro a seguir) apresenta argumentações não válidas. A essa resposta não atribuímos valor lógico de verdade.

Figura 57 – Atividade 7 (item i): resposta do aluno A_9

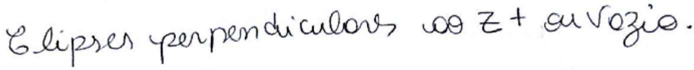


Quando $K_1 \leq 0$ vazio obtemos, porém quando $K_1 < 0$ obtemos elipses.

Fonte: Acervo do autor

Entre os alunos que apresentaram argumentações válidas e que se referiram aos dois valores visuais (elipses; vazio) requisitados na atividade, estão os alunos A_1, A_3 e A_4 registrados a seguir:

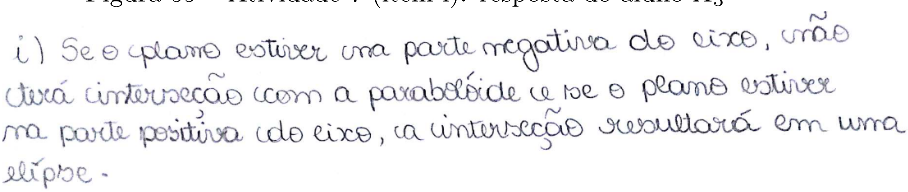
Figura 58 – Atividade 7 (item i): resposta do aluno A_1



Elipses perpendiculares ao $Z+$ ou vazio.

Fonte: Acervo do autor

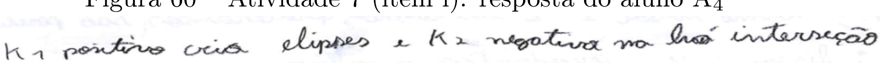
Figura 59 – Atividade 7 (item i): resposta do aluno A_3



i) Se o plano estiver na parte negativa do eixo, não terá intersecção com a parabolóide e se o plano estiver na parte positiva do eixo, a intersecção resultará em uma elipse.

Fonte: Acervo do autor

Figura 60 – Atividade 7 (item i): resposta do aluno A_4



K_1 positivo cria elipses e K_2 negativo não há intersecção

Fonte: Acervo do autor

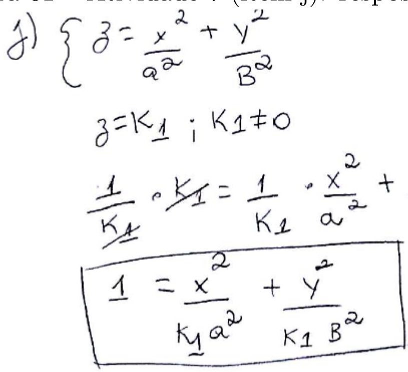
No caso do aluno A_1 (Figura 58), sua resposta evoca unidades significantes que permitem designar de forma sintética, explícita e "econômica" a "posição das elipses" em relação a um dos semieixos coordenados. No caso do aluno A_3 (Figura 59), pode-se chegar as mesmas conclusões porém, para tanto, ou elas estão implícitas ou exigem expansões discursivas. Em ambos os casos, as respostas como um todo possuem unidades apofânticas que trazem mais elementos do que apenas dizer que as interseções determinam elipses.

Outra diferenciação é que em A_3 há apenas léxicos em língua natural enquanto que em A_1 e A_4 é incluído léxicos provenientes da linguagem simbólica.

Conforme planejado, a intervenção do professor-pesquisador indicando erros, acertos e comparação entre as respostas dadas pelos alunos ao item "i" só foi feita com o grupo depois de que os alunos realizaram a o item "k". O mesmo ocorreu com o item "j".

Com relação ao item "j", todos os alunos realizaram corretamente os tratamentos e as conversões que permitem determinar a equação em questão. No caso da solução dos alunos A_7, A_8 (veja os anexos) e A_1 (Figura 61) o modo de progresso do discurso foi por *substituição*. Nessas soluções, que consideramos como válidas, o valor visual "vazio" está implícito na equação que foi determinada a partir da expansão do discurso. Como exemplo, veja o registro a seguir relativo daquele aluno:

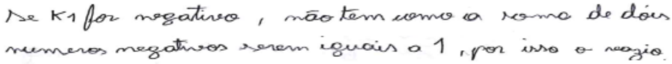
Figura 61 – Atividade 7 (item j): resposta do aluno A_1



Fonte: Acervo do autor

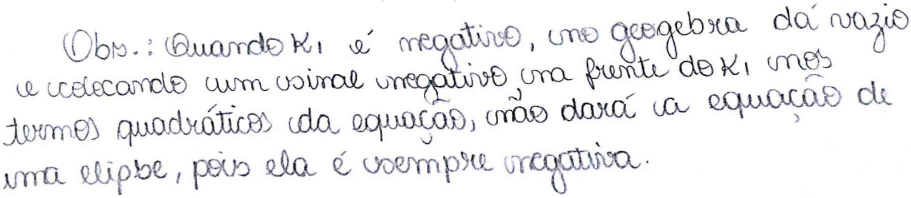
Outros alunos, mesmo que tenham apresentado a equação e com isso estando implícito o valor visual "vazio", deixam explícito esse valor por meio da inclusão de unidades apofânticas externas. Essas unidades possuem similaridade semântica e, com isso, mantêm a mesma *referência*. Nesses casos, caracterizamos que houve uma expansão cognitiva do discurso. Como exemplo, veja os registros a seguir dos alunos A_2 e A_3. Cabe o comentário que o aluno A_2 explicitou esse valor não no item "j" (item que foi solicitado a equação) e sim no item seguinte (item "k").

Figura 62 – Atividade 7 (parte do item k): resposta do aluno A_2


Se K1 for negativo, não tem como a soma de dois numeros negativos serem iguais a 1, por isso o vazio.

Fonte: O autor

Figura 63 – Atividade 7 (item j): resposta do aluno A_3

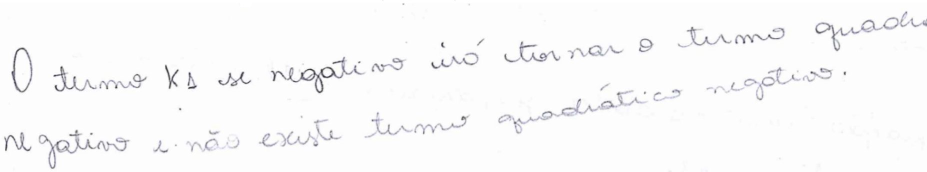

Obs.: Quando K1 é negativo, no geogebra dá vazio e colocando um sinal negativo na frente do K1 nos termos quadráticos da equação, não dará a equação de uma elipse, pois ela é sempre negativa.

Fonte: Acervo do autor

Especificamente nas unidades apofânticas do aluno A_3 (Figura 63) vemos que as conversões também articulam o registro cartesiano fruto do uso experimental do Geogebra. Porém, discutimos com o grupo o sentido de "colocar um sinal negativo na frente do k_1" e também a que se refere o pronome "ela" utilizada para fazer uma retomada anafórica.

Ainda no item "j", alguns alunos incluíram unidades apofânticas externas que não concebemos valor lógico de verdade. É o caso do registro a seguir. Nele, discutimos com o aluno que existem termos quadráticos com coeficientes negativos e, portanto, a frase do aluno não está enunciada de maneira adequada.

Figura 64 – Atividade 7 (item j): resposta do aluno A_9


O termo K1 se negativo irá tornar o termo quadra
quadrático negativo.
negativo e não existe termo

Fonte: Acervo do autor

Por vezes alguns alunos ainda usaram o léxico "elipse" sem flexão de número (no singular) ao passo que o contexto exigia tal flexão. Nesses casos, fizemos as devidas intervenções.

Entre os dez alunos da pesquisa apenas o aluno A_2 (Figura 65) inicialmente registrou *todo* o item "k" na mídia lápis-papel. Essa constatação contrariou uma de nossas hipóteses da análise a priori que indicava que todos os alunos responderiam todo esse item com facilidade. De qualquer forma, vemos que o aluno A_2 evocou as unidades significantes simbólicas das elipses.

Figura 65 – Atividade 7 (outra parte do item k): resposta do aluno A_2

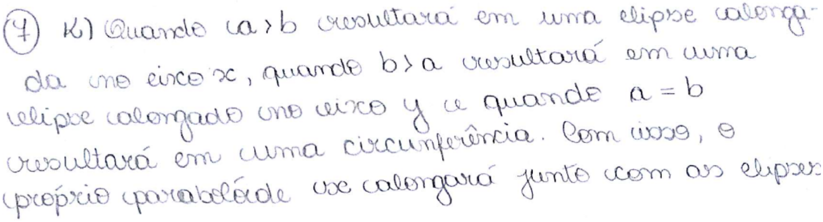
K)
se $a > b$, temos uma elipse alongada em x,
pois seu divisor é maior que o de y
se $b > a$, temos uma elipse alongada em y,
pois seu divisor é maior que o de x
se $a = b$, temos uma circunferência, pois os valores
dos divisores são iguais.
se K1 for negativo, não tem como a soma de dois
numeros negativos serem iguais a 1, por isso o vazio.

Fonte: Acervo do autor

O aluno A_1 respondeu a todo o item "k" que "não lembrava" da resposta. Já os outros oito alunos (A_3; A_4; A_5; A_6; A_7; A_8; A_9; A_{10}) não resolveram inicialmente apenas última parte desse item (a parte da justificativa). Nesse sentido, houve uma quebra de Contrato Didático que tentamos renegociar. No caso do aluno A_1 não tivemos sucesso algum e nos demais casos os alunos deram suas respostas adequadamente apenas de forma oral.

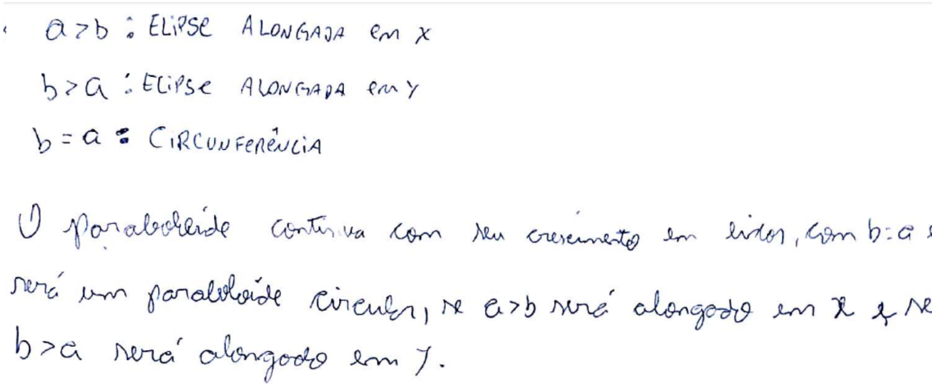
Ainda no item "k", os alunos A_3 (Figura 66) e A_5 (Figura 67) apresentaram na mídia lápis-papel outras unidades apofânticas válidas e que, inclusive, remetem a relações entre o paraboloide como um todo com suas interseções. Especificamente no caso do aluno A_5, vemos que ele evoca a interessante ideia de *paraboloide circular*. Porém, os dois alunos, mesmo que tenham explorado interessantes questões, não responderam a justificativa pedida no item. Dessa forma, diante de todo o grupo, valorizamos a argumentação deles, mas discutimos suas possibilidades e limites em responder o item "k" como um todo.

Figura 66 – Atividade 7 (item k): resposta do aluno A_3


(7) K) Quando a > b resultará em uma elipse alongada no eixo x, quando b > a resultará em uma elipse alongado no eixo y e quando a = b resultará em uma circunferência. Com isso, o próprio parabolóide se alongará junto com as elipses

Fonte: O autor

Figura 67 – Atividade 7 (item k): resposta do aluno A_5


a > b : ELIPSE ALONGADA em x

b > a : ELIPSE ALONGADA em Y

b = a : CIRCUNFERÊNCIA

O Parabolóide continua com seu crescimento em lados, com b = a e será um parabolóide circular, se a > b será alongado em x e se b > a será alongado em y.

Fonte: Acervo do autor

Diante do exposto, concebemos que os itens “i”, “j” e “k” da atividade 7 foram parcialmente validados.

Dando sequência as análises da atividade 7, partiremos para os itens “l”, “m” e “n”.

No item “l”, conforme planejamos, em geral todos os alunos resolveram a atividade tranquilamente.

Destacamos o caso dos alunos A_3 e A_8 que apresentaram os léxicos “uma parábola”. Nessa situação, a expressão “uma” cumpre a operação cognitiva de *determinação*. Dialogamos com eles que frente a pergunta da atividade é mais conveniente a resposta “parábolas” (no plural).

No item “m” os alunos A_1 e A_2 cometeram erros nos tratamentos. Salvo esses casos, os demais não tiveram problemas.

A maioria dos alunos resolveu todo o item “n” de maneira adequada. Como exemplo, veja o registro seguinte.

Figura 68 – Atividade 7 (item n): resposta do aluno A_3

n) Abrindo em z positivo, pois z é o linear e porque a constante (a^2) é positiva. Seu vértice $= \left(0, K_2, \frac{K_2^2}{b^2}\right)$

Fonte: Acervo do autor

Alguns alunos erraram a determinação das coordenadas do vértice solicitada no item "n". Como exemplo, veja os registros a seguir:

Figura 69 – Atividade 7 (item n): resposta do aluno A_6

Vértice $= \left(0, K_2, \frac{-K_2^2}{b^2}\right)$

Fonte: Acervo do autor

Figura 70 – Atividade 7 (item n): resposta do aluno A_7

$$z - \frac{K_2^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow a^2\left(z - \frac{K_2^2}{b^2}\right) = x^2$$

$$a^2\left(z - \frac{K_2^2}{b^2}\right) = (x - 0)^2 \rightarrow V = \left(0, \frac{K_2^2}{b^2}\right)$$

Fonte: Acervo do autor

O aluno A_{10} não apresentou a justificativa pedida na primeira pergunta do item "n". Porém, no ato ilocutório conseguimos que o aluno respondesse oralmente essa justificativa. Assim, houve uma renegociação do Contrato Didático.

No item "n" a aluna A_1 respondeu mais uma vez que não lembrava da resolução. Já o aluno A_2, como consequência de já ter errado o item "m", acabou também errando todo o item "n".

Conforme planejado, nossas intervenções relativas aos itens "l", "m" e "n" da atividade 7 incluindo validação/refutação só ocorreram depois que os alunos concluíram esses itens.

Diante do exposto, concebemos que os itens "l", "m" e "n" da atividade 7 foram validados.

Dando sequência as análises da atividade 7, partiremos para os itens “o”, “p” e “q”. Conforme mostram os anexos da Tese, os resultados desses itens são bastante parecidos com os dos três itens anteriores. As diferenças são que os erros na determinação das coordenadas do vértice diminuíram, mas em contrapartida aumentou o número de alunos que não justificou a segunda parte do item “q”. Não previmos esse fato, porém cabe a ressalva que, conforme já dissemos, hipótese não prevista é diferente de hipótese errada. No ato ilocutório os alunos disseram que essa justificativa era análoga a dada no item “n” e por isso não a fariam no item “q”. Nesse sentido, houve uma quebra de Contrato Didático que tentamos renegociar sem sucesso.

Depois que os alunos concluírem toda a atividade 7 o professor-pesquisador interviu validando ou refutando as respostas por eles dadas aos itens “o”, “p” e “q”.

Logo a seguir o professor-pesquisador institucionalizou os aspectos discutidos em toda a atividade 7 para outras quádricas.

Diante do exposto, concebemos que os itens “o”, “p” e “q” da atividade 7 foram validados.

7.8 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 8

Legitimando os objetivos elaborados na análise a priori, em toda a atividade 8 os alunos priorizaram a evocação das unidades significantes das cônicas[4] e do paraboloide elíptico padrão para fazer conversões, designações e expansões discursivas. Com isso, tratamentos algébricos foram pouco explorados ou foram feitos apenas mentalmente.

Com relação ao uso das Funções Discursivas, mesmo que foram feitos descrições/narrações de procedimentos, em geral os alunos não se limitaram a tal forma de discurso. Ao invés disso, a partir do *uso especializado da língua natural*, foram incluídas unidades apofânticas externas que permitiram que o discurso avançasse ao nível de *explicações* ou *provas*. O uso dessas unidades indica o conhecimento semiótico das definições dos objetos em questão bem como das regras que permitem determinar suas interseções. Portanto, as argumentações se apoiam num quadro teórico particularmente do tipo semiótico e, em geral, houve uma expansão cognitiva do discurso.

Feito as análises gerais a respeito das resoluções dadas a toda a atividade 8, partiremos para análises específicas de cada item.

[4]No caso das cônicas não degeneradas estamos tomando as que estão nas posições padrão e transladadas

No item “a”, a partir da análise das unidades significantes do paraboloide elíptico padrão, os alunos argumentam que impossível determinar as unidades significantes de uma hipérbole nas interseções. Com isso, foi realizado uma análise das unidades significantes da quádrica e da cônica em questão. Para exemplificar, veja os registros seguintes.

Figura 71 – Atividade 8 (item a): resposta do aluno A_3

(8)
a) Na equação da parabolóide, o sinal dos termos quadráticos é sempre igual e nunca chegará a ter termos quadráticos com sinais opostos (como o da hipérbole).

Fonte: Acervo do autor

Figura 72 – Atividade 8 (item a): resposta do aluno A_9

Quando se substitui a equação do plano na equação do paraboloide não é possível obter dois termos quadráticos com sinais opostos, o que é necessário para obter a equação do hiperboloide.

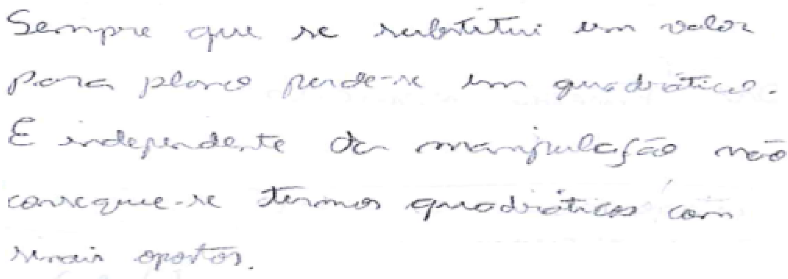
Fonte: Acervo do autor

Figura 73 – Atividade 8 (item a): resposta do aluno A_2

8) a) Para haver uma equação da hipérbole, seria necessário que os termos quadráticos fossem opostos, algo que é impossível de chegar através das substituições,

Fonte: Acervo do autor

Figura 74 – Atividade 8 (item a): resposta do aluno A_5


Sempre que se substitui um valor para plano perde-se um quadrático. E independente da manipulação não consegue-se termos quadráticos com sinais opostos.

Fonte: Acervo do autor

Nos anexos da Tese vemos que a maioria dos alunos apresentou unidades apofânticas semelhantes às do aluno A_3. Nesse caso, vemos que a rigor é necessário que seja acrescentado o léxico "básica" ou "canônica" na palavra "equação". De maneira análoga, a rigor o aluno A_9 deveria dizer algo do tipo "... sinais opostos no mesmo membro da equação .... " e não apenas "... sinais opostos ...".

Na resposta do aluno A_9 (Figura 72) percebemos que o aluno expõe o seguinte procedimento: "quando se substitui a equação do plano na equação do paraboloide". No fundo, por similaridade semântica e em língua natural, o aluno descreve o procedimento algébrico que determina a interseção do plano com a quádrica. Mesmo que de forma mais implícita, os registros dos alunos A_3 (Figura 71) e A_5 (Figura 74) também tentam fazer a mesma descrição. Porém, no caso do aluno A_5 seus registros parecem se referir apenas a interseções que algebricamente envolvam os termos quadráticos. Discutimos esses limites e possibilidades com todos os alunos.

Na resolução do item "b", a partir da análise das unidades significantes do paraboloide elíptico padrão, os alunos argumentam a possibilidade de determinar as unidades significantes de uma parábola abrindo no sentido positivo nas interseções. Com isso, foi realizado uma análise das unidades significantes da quádrica e da cônica em questão. Para exemplificar, veja os registros seguintes.

Figura 75 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_3

b) Sempre que substituir β ou γ por uma constante resultará em uma parábola, pois na equação aparecerá um termo linear, com um coeficiente positivo e um termo quadrático isolado.

Fonte: Acervo do autor

Figura 76 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_5

Caso haja intersecção feitas por planos paralelos a $\beta = 0$ e $\gamma = 0$ teremos um linear em α com o coeficiente positivo e um quadrático positivo. no outro lado da igualdade

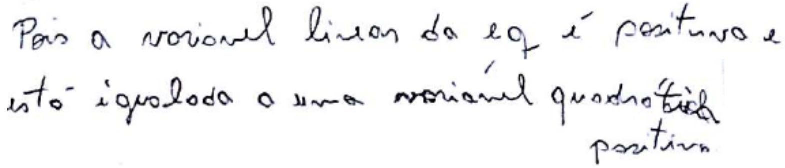
Fonte: Acervo do autor

No caso do aluno A_2 (veja os anexos), A_3 (Figura 75) e A_5 (Figura 76), vemos que eles identificam em qual das três variáveis da equação do paraboloide é possível realizar os procedimentos algébricos de interseção para, com isso, determinar parábolas. O aluno A_5 ainda indica que geometricamente se trata de planos paralelos aos planos de equação $\beta = 0$ ou $\gamma = 0$.

vemos que eles identificam em qual das três variáveis da equação do paraboloide é possível realizar os procedimentos algébricos de interseção para, com isso, determinar parábolas.

Algumas respostas apenas referem-se às unidades simbólicas que são produzidas depois da realização do procedimento algébrico que determina as interseções. Dessa forma, algumas passagens da expansão do discurso são omitidas ou devem ser inferidas pelo leitor. Como exemplo, veja o registro a seguir:

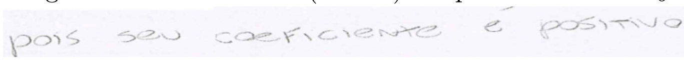
Figura 77 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_8


Pois a variavel linear da eq é positiva e está igualada a uma variavel quadrática positiva

Fonte: Acervo do autor

No caso do aluno A_6 (registro a seguir), a unidade apofântica apresentada, além de possuir poucos elementos semióticos necessários para a inferência requerida, não os articula bem com a pergunta da atividade. Com isso, há muitas passagens que são omitidas ou supostas sendo exigido do leitor muitas deduções. Consequentemente, a argumentação é pouco consistente, frágil e, inclusive, pode conter erros implícitos. Diante desses problemas, sugerimos ao aluno que elaborasse melhor suas predicações o que, claro, tem reflexos em suas significações.

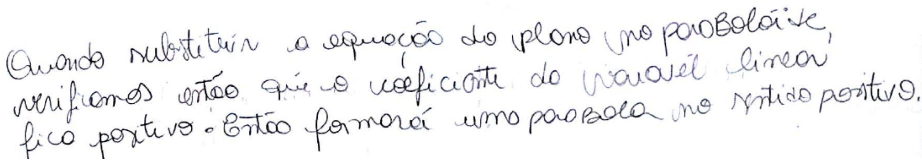
Figura 78 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_6


pois seu coeficiente é positivo

Fonte: Acervo do autor

No caso do aluno A_1 (registro a seguir), as unidades apofânticas apresentadas não fazem referência ao termo quadrático. Com isso, as unidades apresentadas não garantem a referência ao objeto parábola.

Figura 79 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_1


Quando substituir a equação do plano no paraboloide, verificamos então que o coeficiente da variavel linear fica positivo. Então formará uma parabola no sentido positivo.

Fonte: Acervo do autor

Na expansão do discurso do aluno A_2 (registro a seguir) às unidades significantes designadas são insuficientes ou imprecisas para garantir a referência as parábolas abrindo no sentido positivo.

Figura 80 – Atividade 8 (item b): resposta do aluno A_2

Qualquer uma das contantes que forem substituidas no equação, não irão alterar o sinal dela, logo, as parábolas sempre estarão no sentido positivo

Fonte: Acervo do autor

As respostas dadas ao item "c" são análogas as dadas no item "b". Porém, a aluna A_1 usou o léxico "elipse" ao invés de "parábola". No ato ilocutório isso foi resolvido.

Para o item "d" os alunos usaram termos semelhantes aos dos alunos A_3 e A_5 (Figuras a seguir). Por vezes, como no caso do aluno A_5, foram usados expressões do tipo "dois termos quadráticos" ao passo que deveriam dizer "dois termos quadráticos com *coeficientes positivos*". Mesmo assim, as unidades significantes da elipse e do paraboloide elíptico padrão mediaram os discursos.

Figura 81 – Atividade 8 (item d): resposta do aluno A_3

(d) Pois una equação aparecerá dois termos quadráticos positivos e o número 1 isolado.

Fonte: Acervo do autor

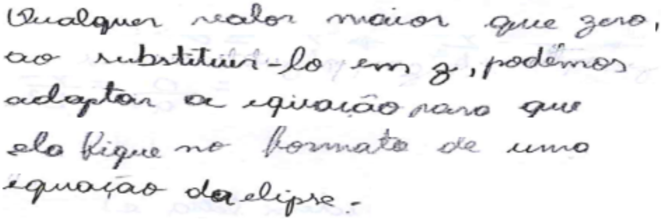
Figura 82 – Atividade 8 (item d)1: resposta do aluno A_5

dois valores quadráticos com K1 no quociente e a soma destes dois termos quadráticos se iguala a 1

Fonte: Acervo do autor

A resposta do aluno A_2 (registro a seguir) ao item "d", mesmo que válida, foi à única que não explicitou as unidades significantes das elipses. A escolha do aluno não significa que ele não conheça essas unidades, porém, seja por opção ou por desconhecimento, abre-se mão das potencialidades da expansão do discurso articulado a um quadro teórico do tipo semiótico em que se explicita as unidades significantes.

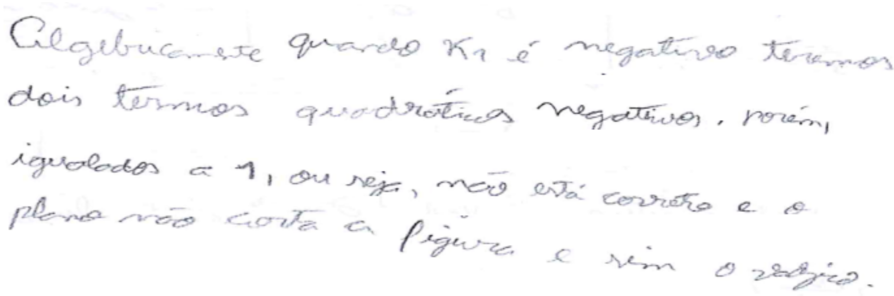
Figura 83 – Atividade 8 (item d): resposta do aluno A_2


Qualquer valor maior que zero, ao substituí-lo em z, podemos adaptar a equação para que ela fique no formato de uma equação da elipse.

Fonte: Acervo do autor

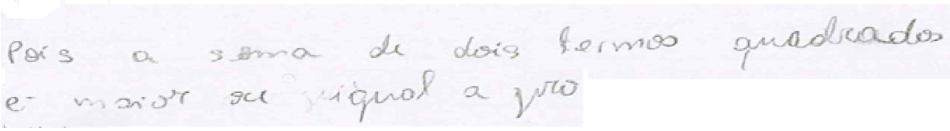
No item "e", a partir das unidades significantes do paraboloide elíptico padrão, os alunos usaram teoremas semelhantes aos que afirmam que no campo dos reais a soma de dois termos quadráticos com coeficientes positivos nunca é negativo. Cabe a ressalva que todos os alunos deixaram implícito que o teorema usado se refere ao reais. Como exemplo, veja os registros dos alunos A_5 e A_{10} a seguir. No caso do aluno A_{10} a rigor deveria estar dito "termos quadráticos com coeficientes positivos". No caso do aluno A_5, mesmo que implicitamente, parece que a equação foi dividida por k_1 com o objetivo de deixá-la igualada a 1. A expressão "igualados a 1" nos dá essa impressão. De qualquer forma, sabemos que esse procedimento algébrico é bastante comum quando determinamos as equações das elipses e das hipérboles. Além disso, esse aluno apresenta uma unidade apofântica relacionada ao registro cartesiano.

Figura 84 – Atividade 8 (item e): resposta do aluno A_5


Algebricamente quando K1 é negativo teremos dois termos quadráticos negativos, porém, igualados a 1, ou seja, não está correto e o plano não corta a figura e sim o redigio.

Fonte: Acervo do autor

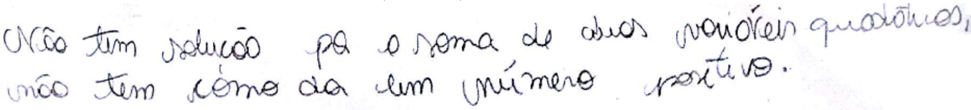
Figura 85 – Atividade 8 (item e): resposta do aluno A_{10}



Fonte: Acervo do autor

No caso do aluno A_1 sua argumentação relativa ao item "e" obviamente não foi validada.

Figura 86 – Atividade 8 (item e): resposta do aluno A_1



Fonte: Acervo do autor

No caso dos alunos A_5 e A_{10} (Figuras 84 e 85), mesmo com os já citados problemas, eles apresentam teoremas que são expostos de maneira razoavelmente explícita. Obviamente, a partir do que o aluno A_8 (Figura 87) expõe, mesmo que talvez ele próprio não esteja consciente, também é possível chegar a teoremas. Porém, para tanto este aluno exige que o leitor faça expansões discursivas. Nesse sentido, os teoremas daqueles alunos são mais explícitos e diretos. Além disso, também é possível que o aluno A_8 no fundo desconheça tais teoremas e apenas tenha se limitado a narrar à constatação de um ponto de vista particular seu. Com isso, sua resposta tem estatuto que se situa num quadro social de crença ou de opinião não estando explícito, portanto, um quadro teórico que permite explicar consistentemente o motivo que faz com que interseção seja vazia. Como vemos, podemos diferenciar qualitativamente as respostas dos alunos em questão.

Figura 87 – Atividade 8 (item e): resposta do aluno A_8

e) Pois os termos quadraticos tem que ter o mesmo sinal do termo linear se não não existe intersecção. (depois de ser feita a substituição por K1)

Fonte: Acervo do autor

No item "f" as respostas são semelhantes as dadas no item "d". Basicamente a mudança foi que alguns alunos descreveram que a equação será multiplicada por -1.

No caso do aluno A_3 (registro a seguir), sua argumentação frente ao item "f" obviamente não é válida. Possivelmente essa falha foi fruto de erros de tratamentos. O aluno não deve ter notado que ao dividir um número real negativo por $k_1 < 0$ o resultado será positivo.

Figura 88 – Atividade 8 (item f): resposta do aluno A_3

f) Pois uma equação aparecerá dois termos quadráticos negativos e o número 1 isolado.

Fonte: Acervo do autor

As respostas dadas ao item "g" são análogas as dadas ao item "e", pois em ambos os casos temos solução vazia.

Nossas intervenções relativas à atividade 8 incluindo validação/refutação das respostas dadas pelos alunos só ocorreram depois que os alunos concluíram essa atividade. Logo após, o professor-pesquisador institucionalizou os aspectos discutidos para as outras quádricas.

Diante do exposto, vemos que a tipologia da situação didática, os objetivos e hipóteses previstas na análise a priori da atividade 8 ocorreram conforme planejado. Logo, consideramos que a atividade 8 foi validada.

7.9 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 9

Os registros dos anexos dão indicativos de que os alunos concebem que a didática/metodologia do curso facilitou a aprendizagem tanto das representações cartesianas, simbólicas, em língua natural quanto do "trânsito/passagem" entre essas representações. Portanto, as hipóteses discutidas na análise a priori se confirmaram. Os registros a seguir ratificam essa questão.

Figura 89 – Atividade 9: resposta do aluno A_3

• O curso foi muito bem elaborado e teve explicações muito boas. É um curso que irei levar para a engenharia, para tentar tirar notas melhores em cálculo, pois com certeza ajudou e muito. Ainda mais com a ferramenta Geogebra, que nos fez visualizar ainda melhor os gráficos e entender suas equações. Agora, conseguimos identificar, através das equações, qual será seu gráfico, o porque dele e vice versa.

Fonte: Acervo do autor

Figura 90 – Atividade 9: resposta do aluno A_1

A dinâmica do curso facilitou
sim o entendimento dos gráficos.
O conjunto, a explicação do professor,
material impresso e os dados visuais
geogebra, permitiram a visualização
completa das figuras.
Muitas vezes é difícil fazer uma
conexão da parte algébrica com o
gráfico.
Da forma que foi explicado nos
ajuda a fazer um "link" entre
a parte algébrica e o formato das
figuras.
Deixou a aula dinâmica,
possibilitando ver mais opções
em menos tempo

Fonte: Acervo do autor

Figura 91 – Atividade 9: resposta do aluno A_7

Ajudou, entendi de forma mais clara a relação entre os termos e os seus papéis
graficamente, como saber a fórmula olhando o gráfico, e como saber o gráfico
já conhecendo a fórmula. Além de relacionar tudo com os nomes, relacionando
tudo junto.

Fonte: Acervo do autor

Ao se referir a didática/metodologia do curso, conforme mostram os registros anteriores, alguns alunos destacam a importância ou a relevância do Geogebra no ensino para que a referida aprendizagem fosse obtida.

Algumas falas não foram previstas na análise a priori. Nesse sentido, citamos o aluno A_5 que fez observações em forma de elogios ao professor (ver o Anexo E). No mesmo sentido, o aluno A_4 fez comentários a cerca da avaliação realizada no curso (ver o Anexo E).

Outros, como o aluno A_3 (Figura 89), ainda comentaram que os conteúdos aprendidos ajudarão em outras disciplinas da graduação na qual eles cursam. Mesmo que essas falas nos tenham deixado lisonjeado, elas não estavam nos objetivos e hipóteses da atividade 9.

Destacamos ainda que o aluno A_{10} saiu mais cedo da aula e, por isso, não realizou a atividade 9. Dessa forma, houve uma quebra de Contrato Didático. Procuramos esse aluno recorrendo ao celular (ligações e whatsapp) e no próprio locus da pesquisa para que ele escrevesse sua resposta. Porém, não obtivemos sucesso e, com isso, o Contrato Didático não foi renegociado com o aluno.

Considerando que os objetivos da atividade foram contemplados e que as hipóteses *previstas* foram legitimados, a atividade 9 foi validada.

7.10 VALIDAÇÃO DAS NOVE ATIVIDADES: SÍNTESES

Nesta subseção sintetizaremos quais das 9 atividades realizadas na experimentação foram validadas. Para ter maiores detalhes basta acessar as nove subseções anteriores.

Entre as nove atividades, consideramos que a realização das seguintes foram validadas: 1; 2; 3; 4; 5; 7 (todos os itens exceto “i”, “j” e “k”); 9. As demais atividades (6; 7 itens “i”, “j” e “k”; 8) foram validadas parcialmente. Como vemos, nenhuma das atividades foi refutada.

Nos casos em que a atividade foi validada observamos que a tipologia da situação, os objetivos e as hipóteses previstas na análise a priori foram, em geral, validados na experimentação. Já quando a atividade foi validada apenas parcialmente observamos que a tipologia da situação e os objetivos foram validados, mas algumas poucas hipóteses estavam erradas ou não se confirmaram.

Estamos considerando que “hipótese não prevista” é diferente de “hipótese errada ou não confirmada”. Naquele caso, se trata de algo que não consta nas hipóteses e, com isso, não as contraria enquanto que neste caso se trata de algo que contraria uma hipótese prevista na análise a priori.

Por vezes, alguns alunos apresentaram respostas interessantes que mesmo que não foram previstas foram consideradas como gratas surpresas por representarem a competência deles.

Diante do exposto, consideramos que a realização da Sequência de Ensino que propomos e experimentamos foi validada.

Certamente nossa experiência em lecionar o conteúdo quádricas bem como o interesse e a competência dos alunos contribuiu para que as variáveis de comando que foram previstas na análise a priori fossem confirmadas na análise a posteriori e validação. Trata-se, porém, de mera impressão que precisa ser mais bem investigada.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Orientados pelo Método de Análise e Identificação das Variáveis Cognitivas da TRRS, nas análises preliminares de nosso estudo sobre o ensino e a aprendizagem das quádricas identificamos que essas superfícies têm várias variáveis visuais que, por sua vez, possuem unidades significantes simbólicas e linguísticas correspondentes. Além disso, da articulação entre essas unidades chegamos a muitas possibilidades. Com isso, determinamos treze casos para os elipsoides, três para os hiperboloides de uma folha, três para os hiperboloides de duas folhas, três para os cones quádricos, seis para os paraboloides elípticos e seis para os paraboloides hiperbólicos. Nesse contexto, temos indícios da complexidade das quádricas no que tange as dimensões epistemológica e cognitiva. Ao mesmo tempo, segundo o referencial da TRRS, a dimensão didática até então elaborada (Teses/Dissertações; livros didáticos) dá indícios de deficiências no uso didático desses elementos semióticos.

Conscientes dessas dificuldades, para estarmos em *sintonia* com a TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento, tomamos variáveis visuais que permitem identificar/analisar as diferenças e semelhanças tanto entre os vários casos de quádricas quanto entre uma mesma quádrica em posições diferentes no sistema cartesiano. Assim, consideramos as oposições qualitativas que existem entre os vários casos e as que são específicas de cada quádrica. Nesse caminho, diferente do que por vezes é a prática pedagógica recorrente, indicamos as articulações semióticas envolvendo os registros em língua natural, cartesiano e simbólico de maneira explícita.

A primeira variável visual que tomamos para as quádricas foi à posição da quádrica no sistema cartesiano e vimos que ela assume três valores: padrão, transladada e rotacionada. Nossa intenção em incluir tal variável é apenas dar uma breve noção das diferentes posições no sistema cartesiano e, a partir daí, privilegiar o estudo de uma dessas posições (a posição padrão). Com isso, mesmo que os aspectos algébricos foram pouco explorados, podemos analisar a partir de transformações específicas que as posições transladadas e rotacionadas se correlacionam com a posição padrão e, nesse sentido, temos uma visão global e articulada das diferentes posições. De qualquer forma, para definirmos os citados valores visuais nos baseamos nas posições dos planos de simetria das quádricas em relação aos planos coordenados escolhidos e também na posição do ponto significativo (centro; vértice; ponto de sela) da superfície em relação à origem do sistema cartesiano.

Entre as variáveis visuais que tomamos para as quádricas consideramos como *fundamental* as interseções com planos (coordenados e paralelos aos coordenados). Mesmo que contrarie a prática pedagógica recorrente, consideramos que todos os valores visuais determinados por todos esses casos de interseções sejam (re)conhecidos, pois, o desconhecimento dessas desconstruções dimensionais prejudica a visualização da quádrica no sistema cartesiano. Porém, em função do tempo didático propomos que tal (re)conhecimento seja feita com o auxílio do Geogebra para apenas uma das posições que cada caso de quádrica padrão pode estar no sistema cartesiano. A partir daí, as interseções das quádricas que estão em outras posições padrão podem ser entendidas usando o recurso das reflexões. Nesse estudo, vimos que as correspondentes unidades significantes simbólicas são os termos quadráticos, os termos lineares, os sinais dos coeficientes desses termos e o valor do termo independente (zero ou um) das equações das quádricas. Com eles, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, semioticamente é importante (re)conhecermos os elementos que constituem *conjunto das unidades simbólicas* da equação além de como é a *combinação* desses elementos na equação em questão. Em primeiro lugar, esse reconhecimento é fundamental para identificar as oposições qualitativas (semelhanças e diferenças) das diferentes equações das quádricas. Ademais, é desse conjunto/combinação que podemos analisar se haverá ou não os valores visuais elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas nas interseções com planos. Inclusive, podemos "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um desses planos. Nesse caminho, podemos entender semioticamente por que os registros simbólicos e cartesianos (da superfícies quádrica como um todo e das interseções determinadas) se correspondem da maneira como conhecemos. Por isso, algebricamente o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas das equações das quádricas são as condições semióticas que possibilitam as correlações entre as equações e as formas geométricas das quádricas.

Portanto, sugerimos como recurso didático *principalmente* o uso das interseções com planos articulado a compreensão de que os valores visuais determinados (elipses; parábolas; hipérboles; cônicas degeneradas) dependem ou são condicionados ao conjunto/combinação das unidades simbólicas que a equação correspondente possui. Não obstante, mesmo que os livros didáticos e os docentes utilizem frequentemente essas interseções como recurso para o ensino das quádricas, infelizmente é negligenciado as articulações semióticas e, assim, ou fica a cargo do aluno a identificação/correlação de tais unidades ou elas não são (re)conhecidas. Dessa forma, sem a identificação das regras de funcionamento semiótico em questão, que temos como base não serem compreendidas de forma natural ou espontânea, certamente comprometesse a aprendizagem integrativa e duradoura dos alunos.

Nas interseções entre as quádricas com os planos (coordenados e paralelos aos planos coordenados) consideramos que o procedimento P são as operações matemáticas responsáveis pela significação. Ao desprezá-los, ao invés de fazermos conversões nos limitamos a realizar trânsitos entre registros apenas em forma de codificações. Porém, em decorrência do tempo didático, em geral é impraticável realizar tais procedimentos de forma completa no estudo de todas as quádricas. Por isso, confrontando a citada relevância desses procedimentos com o tempo didático, sugerimos que eles sejam feitos de forma completa em apenas uma das quádricas. Para as demais, a partir de uma situação de institucionalização do conhecimento, podemos estender o uso de tais procedimentos sem realizá-los de forma completa. Nesses casos, mais do que apenas apresentar a equação como um todo, optamos em chamar a atenção para o conjunto/combinação das unidades significantes das equações de cada quádrica e, a partir daí, analisar quais são possibilidades de valores visuais (elipses; parábolas; ...) que podemos determinar nas interseções com planos.

Em nossa prática docente a quádrica escolhida para tal estudo completo é o paraboloide elíptico. Justificamos tal escolha devido à relevância dessa superfície dentro do Cálculo e também no contexto de nossos alunos graduandos da Engenharia de Telecomunicações. Mas, conforme outro critério pode-se privilegiar qualquer outra quádrica.

No caso das variáveis visuais específicas que tomamos para os elipsoides padrão, que se baseiam principalmente nos eixos dessas superfícies, vimos que elas abrem possibilidades no ensino e na aprendizagem. Com elas, podemos explorar as semelhanças e diferenças entre os 13 tipos de elipsoides padrão incluindo o estudo dos registros em língua natural que propomos.

Já para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides padrão tomamos as diferentes posições padrão como uma variável visual importante. Para tanto, recorremos às "elipses com eixos aumentando" e a "parábola assento" como recurso de identificação e (re)conhecimento das diferentes posições que cada uma dessas quádricas pode estar no sistema cartesiano. Porém, essas cônicas são apenas de interseções com planos que abrem possibilidades análogas as descritas no parágrafo anterior.

Destacamos especialmente que as variáveis visuais específicas que tomamos para os elipsoides além de nossas designações sobre elipses com eixos aumentando, parábolas assento e estribo nos permitiu propor registros em língua natural para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas. Daí, elaboramos os seguintes registros: *elipsoide em* α *e* β; *esferoide alongado em* α; *esferoide achatado em* α; *superfície esférica com* $R = R_0$; *hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em* α; *Sela com assento abrindo em* α_+ *e contida em* $\beta = 0$. Na elaboração desses termos, diferente do que por vezes os livros fazem em que a opção é criar termos linguísticos apoiados apenas em aspectos intuitivos, recorremos a algumas variáveis visuais que exprimam propriedades globais da figura e que são significativamente importantes do ponto de vista cognitivo. Dessa forma, nossas propostas de registros em língua natural abrem as seguintes possibilidades: criar designações linguísticas que não apresentem problemas de referência aos objetos e que possuam articulações explícitas entre os registros em língua natural com as unidades simbólicas e as variáveis visuais tomadas; explorar linguisticamente todas as diferentes posições de uma quádrica no sistema cartesiano; a partir dos registros em língua natural, explorar de maneira imediata ao menos uma propriedade global da figura e por Expansões Discursivas explorar outras propriedades; realizar conversões entre os registros em língua natural, cartesiano e simbólico. Assim, pode-se dar mais destaque aos aspectos semióticos e cognitivos presentes nos registros em língua natural sem, com isso, fazer com que um termo linguístico tenha apenas a função de codificação.

Com relação a variável visual interseção com eixo coordenado, vimos que para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas há diferentes valores visuais (dois pontos; um ponto; conjunto vazio) que, por sua vez, possuem unidades simbólicas correspondentes que permitem identificar esses valores nas equações. Também há unidades simbólicas que permitem determinar as coordenadas desses pontos (quando não vazios). Mais uma vez, entendemos que a identificação e a correlação dessas unidades podem potencializar o ensino e a aprendizagem dessas superfícies.

Além das variáveis visuais que tomamos, consideramos que o recurso das reflexões pode contribuir para interpretação global de propriedades figurais na perspectiva da TRRS. Particularmente as reflexões das quádricas em torno dos planos de equação $x = 0, y = 0, z = 0, x = y, x = z$ ou $y = z$ permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica e, assim, temos uma visão global dessas posições. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma das quádricas não cilíndricas e não degeneradas podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as análises que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Como exemplo, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos. Dessa forma, pode-se otimizar o tempo didático e certamente o tempo de aprendizagem. Por isso, elencamos algumas propriedades algébricas que permitem o estudo das reflexões na perspectiva da TRRS.

Também elencamos algumas propriedades algébricas para o estudo das simetrias. Com elas, vimos que podemos fazer algumas análises semióticas do ponto de vista das unidades significantes simbólicas.

Para ilustrar o fruto de algumas de nossas análises, considere a equação $z = x^2 + y^2$ (E_1). Sabemos que (E_1) se refere a um paraboloide elíptico padrão abrindo no sentido positivo pelo seguinte fato: um dos membros da equação há apenas um termo linear com coeficiente 1; o outro membro há dois termos quadráticos com coeficientes positivos. Além disso, como a variável linear é z e os coeficiente dos termos quadráticos são positivos, então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo z_+ e temos linguisticamente um paraboloide abrindo em z_+. Note que algebricamente o conjunto/combinação das unidades significantes simbólicas serviu de norteador de nossas conversões com os registros cartesianos e linguísticos. De forma análoga, podemos inferir que as equações $y = -x^2 - z^2$ (E_2) e $z = x^2 - y^2$ (E_3) se referem, respectivamente, a um paraboloide elíptico abrindo em y_- a uma sela com assento abrindo em z_+ e contido em $y = 0$.

No que diz respeito ao Geogebra, avaliamos que ele contemplou os objetivos que a ele almejamos. Em primeiro lugar, para o pesquisador e para os alunos ele contribuiu de forma dinâmica e interativa para a identificação das variáveis visuais e das unidades significantes correspondentes e também para a articulação/correlação entre os diferentes registros envolvidos. Com ele, tanto na fase de experimentação quanto nas propostas de Sequência de Ensino que elaboramos podemos dar mais ênfase aos aspectos qualitativos e cognitivos subjacentes a teoria que seguimos. Logo, o Geogebra abriu possibilidades para que potencializássemos um trabalho em sintonia com a TRRS, mas com o diferencial da forma dinâmica e interativa que ele proporcionou. Além disso, na fase de experimentação percebemos que o Geogebra contribuiu para a instalação de um contexto de investigação em sala de aula no qual os alunos ocuparam espaço relevante. Daí houve maior possibilidade de participação efetiva e autônoma deles no processo de ensino e de aprendizagem nos três tipos de situações didáticas que trabalhamos (situações de formulação, validação e institucionalização). Particularmente nas situações de formulação, em que os alunos se envolveram em "descobertas matemáticas", eles formularam conjecturas e, por indução de vários casos, testaram, validaram ou refutaram suas conjecturas. Nessas situações o professor-pesquisador esteve atento a eventuais erros provenientes tanto do *software* quanto do "olhar" dos alunos sendo que os registros simbólicos elaborados na mídia lápis-papel se mostraram como um recurso fundamental para refutar hipóteses. Até nas situações de validação em que foi exigido um trabalho mais rigoroso dos mecanismos de provas o Geogebra foi usado, porém, nesse caso ele foi mais bem articulado com a mídia lápis-papel. Nesses momentos, inclusive ficou mais evidente que as mídias digitais ao invés de excluírem a mídia lápis-papel as complementam. Já nas situações de institucionalização esse *software* acelerou bastante o processo de extensão das ideias que discutimos nos paraboloides elípticos para as demais quádricas. Em linhas gerais, entendemos que nossa forma de trabalho didático com o Geogebra contemplou um trabalho em sintonia com elementos da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e, ao mesmo tempo, com a Abordagem Experimental em Educação Matemática de Borba (2010). Com relação ao tempo, o *software* Geogebra otimizou o tempo do pesquisador, o tempo didático e certamente o tempo de aprendizagem dos alunos. Em especial destacamos que com ele podemos visualizar todas as interseções com planos e todas as posições padrão de cada quádrica de maneira muito rápida.

Como consequência do exposto, neste trabalho sugerimos o uso do Geogebra no ensino das quádricas. Vemos que nossa justificativa se deu principalmente pelo fato de que com ele temos potencial para trabalhar em sintonia com a TRRS com o diferencial da forma interativa, dinâmica e participativa permitida aos alunos. Porém, em decorrência de outras justificativas e até do surgimento de novas tecnologias outros *softwares* podem ser escolhidos.

A respeito das validações de nossa Engenharia Didática, em geral obtivemos bons resultados. Entre as nove atividades, consideramos que a realização das seguintes foram validadas: 1; 2; 3; 4; 5; 7 (todos os itens exceto "i", "j" e "k"); 8; 9. As demais atividades (6; 7 itens "i", "j" e "k") foram validadas parcialmente. Como vemos, nenhuma das atividades foi refutada.

Nos casos em que a atividade foi validada observamos que a tipologia da situação, os objetivos e as hipóteses previstas na análise a priori foram, em geral, validados na fase de experimentação. Já quando a atividade foi validada apenas parcialmente observamos que a tipologia da situação e os objetivos foram validados, mas, algumas poucas hipóteses estavam erradas ou não se confirmaram.

Estamos considerando que "hipótese não prevista" é diferente de "hipótese errada ou não confirmada". Naquele caso, se trata de algo que não consta nas hipóteses e, com isso, não as contraria enquanto que neste caso se trata de algo que contraria uma hipótese prevista na análise a priori. Por vezes, alguns alunos apresentaram respostas interessantes e mesmo que elas não tivessem sido previstas por nós, foram consideradas como gratas surpresas por representarem a competência deles.

Diante do exposto, consideramos que a realização da Sequência de Ensino que propomos e experimentamos foi validada.

Certamente nossa experiência em lecionar o conteúdo quádricas bem como o interesse e a competência dos alunos contribuiu para que as variáveis de comando que foram previstas na análise a priori fossem confirmadas na análise a posteriori e validação. Trata-se, porém, de mera impressão que precisa ser mais bem investigada.

Em nossas análises a posteriori, principalmente a partir das Funções Discursivas da Linguagem, avaliamos qualitativamente as produções dos alunos frente às atividades que propomos. Como fruto desse trabalho, também avaliamos o potencial de nossa Sequência de Ensino, a aprendizagem e os processos cognitivos que os alunos mobilizaram. Nossas conclusões são que no decorrer do processo *gradualmente* as Funções Referencial e Expansão Discursiva necessárias para o progresso do discurso e paralelamente os Tratamentos e as Conversões (em duplo sentido) foram mobilizadas adequadamente pelos alunos. Nesse caminho, a evocação dos conteúdos presentes nas variáveis visuais, nos registros básicos simbólicos e suas unidades significantes simbólicas e nos registros básicos em língua natural que tomamos em todo o processo foram bem mobilizados pelos alunos e, dessa forma, vemos um bom uso do quadro teórico particularmente do tipo semiótico. Portanto, temos *indícios* de que diante de nossa Sequência de Ensino os processos cognitivos mobilizados pelos alunos evocaram adequadamente as variáveis cognitivas que tomamos como fundamentais para a aprendizagem. Por isso, certamente os alunos compreenderam os objetos trabalhados e, consequentemente, a Sequência que trabalhamos na experimentação tem um bom potencial de ensino. Porém, mesmo diante já citado progresso gradual do discurso, temos clareza, conforme está bem detalhado nas análises a posteriori e validação, que durante o processo houve problemas. Isso, claro, faz parte da prática.

As Sequências de Ensino que propomos (**Apêndices**) foram organizadas didaticamente segundo certa sequência lógica, porém, o fundamental é que a Sequência de Ensino permita que os alunos mobilizem as variáveis cognitivas que tomamos. Portanto, a organização em si não é o mais importante e, inclusive, há várias outras possibilidades que podem ser desenvolvidas conforme variáveis tais como o tempo didático, objetivos, métodos e compreensões do professor e, ainda, motivações ou necessidades pessoais dos alunos. Nossa intensão em elaborar tais Sequências foi apenas expor uma possibilidade de trabalho didático e esclarecemos que as propostas estão organizadas de maneira que o leitor possa, conforme seus interesses, "pular" as seções. Assim pode-se, por exemplo, iniciar as atividades diretamente na subseção das quádricas padrão e desconsiderar o que vem anteriormente. Pode-se ainda não explorar as propriedades de reflexão ou de simetria. Também é possível não trabalhar com todos os cálculos das seções que estudam as interseções.

A seguir resumiremos a referida sequência lógica presente em nossa organização didática. Nos limitaremos a Sequência do **Apêndice A**. Justificamos esse limite pelo fato de que essa foi realmente a Sequência que propomos para uso em sala de aula.

Iniciaremos com o Quadro 8.1 que se refere a primeira parte da Sequência de Ensino do **Apêndice A**. Nessa primeira parte o objetivo é proporcionar uma visão global de todos os tipos de quádricas incluindo as diferentes posições no sistema cartesiano, as simetrias e os pontos significativos. Note que recorreremos principalmente aos aspectos visuais e experimentais proporcionados pelo Geogebra sempre possibilitando que os alunos participem de forma autônoma do processo de ensino.

Quadro 8.1 – Superfícies quádricas: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Superfícies quádricas: registros figurais e em língua natural.	(1) *Apresentação* dos registros figurais e dos correspondentes registros em língua natural das quádricas de forma estática na mídia lápis-papel e de forma dinâmica no Geogebra.

(2) Superfícies quádricas não cilíndricas e não degeneradas: simetrias.	(2) A partir de atividades experimentais do Geogebra, permitir que os alunos façam conjecturem a respeito dos planos de simetria dessas quádricas. Num segundo momento o professor sintetizará as seguintes questões: número de planos de simetria incluindo os casos em que há feixe de planos de simetria; posição entre os planos de simetria.
(3) Superfícies quádricas não cilíndricas e não degeneradas: pontos significativos.	(3) A partir de atividades experimentais do Geogebra, permitir que os alunos (re)conheçam os pontos significativos (centro; vértice; ponto de sela). Para tanto, recorrer às interseções com os planos de simetria ou as interseções com os planos de simetria e a quádrica. Num segundo momento o professor sintetizará essas definições.
(4) Superfícies quádricas não cilíndricas e não degeneradas: posições no sistema cartesiano.	(4) A partir de atividades experimentais do Geogebra, permitir que os alunos (re)conheçam as posições da quádrica no sistema cartesiano (padrão; transladada; rotacionada). Para tanto, recorrer aos planos de simetria e aos pontos significativos. Num segundo momento o professor sintetizará essas definições.
(5) Superfícies quádricas: equação geral.	(5) O professor definirá a equação geral das quádricas. Nas mídias lápis-papel e Geogebra dar algumas equações de quádricas degeneradas e discutir os gráficos. Incluir a equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = -4$ (a solução é o ponto $(2; 0; 0)$ - quádrica degenerada) e destacar que essa solução não é visualizada imediatamente no Geogebra se não fizermos os cálculos algébricos ou se não escondermos os eixos coordenados no Geogebra.

Fonte: O autor

A segunda parte da Sequência de Ensino do **Apêndice A** se refere as quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas *posições padrão*. Note que iniciamos com o aprofundamento dos registros cartesianos (principalmente as interseções) e linguísticos e, aos poucos, as equações serão inseridos e correlacionadas de maneira mais profunda com os outros registros. Nesse caso a organização didática foi elaborada conforme a sequência lógica dos 5 Quadros a seguir.

Iniciaremos, no Quadro a seguir, com a organização proposta para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides elípticos padrão. Nesses objetos, trata-se da mesma lógica de organização.

Quadro 8.2 – Hiperboloides/cones quádricos elípticos/paraboloides elípticos padrão: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Introdução: *apresentar* os registros cartesianos dos hiperboloides/cones quádricos elípticos/paraboloides elípticos em todas as posições padrão.	(1) Apresentar esses registros no Geogebra. Não dar ênfase as equações.
(2) Interseções com planos (coordenados e paralelos aos planos coordenados).	(2) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem quais são os valores visuais determinados (elipses; hipérboles; parábolas; cônicas degeneradas) nessas interseções. Não dar ênfase as equações.
(3) elipses com eixos aumentando. Registros básicos em língua natural e os registros cartesianos.	(3) Permitir que os alunos (re)conhecer visualmente as elipses com eixos aumentando e definir os registros básicos em língua natural das quádricas em questão. Discutir que podemos diferenciar as posições dessas quádricas no sistema cartesiano a partir da posição dessas elipses. Não dar ênfase as equações.
(4) Registros básicos simbólicos, básicos em língua natural e cartesianos: apresentação.	(4) *Apresentar* os registros básicos simbólicos e seus correspondentes registros básicos em língua natural e cartesianos.
(5) Unidades significantes simbólicas.	(5) Discutir essas unidades sem necessariamente as correlacionarmos com os correspondentes aspectos cartesianos.

(6) Registros básicos simbólicos, básicos em língua natural e cartesianos: correlações	(6) Permitir que os alunos conjecturem como reconhecer nas equações básicas a posição das elipses com eixos aumentando no sistema cartesiano e, consequentemente, como correlacionar semioticamente os registros básicos simbólicos com os correspondentes registros básicos em língua natural e cartesianos. Num segundo momento o professor sintetizará essas correlações.
(7) Interseções com os eixos coordenados.	(7) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem que: para os hiperboloides as coordenadas de tais pontos de interseções são determinados a partir das raízes quadradas dos denominadores da equação básica; para os hiperboloides nos casos em que o coeficiente do termo quadrático é negativo a interseção com o correspondente eixo coordenado é vazia; para os cones quádricos elípticos e paraboloides elípticos as interseções com os três eixos coordenados coincide com a origem. A seguir trabalhar a demonstração formal dessas conjecturas.
(8) Revisão e sínteses.	(8) Na mídia lápis-papel (sem o Geogebra), trabalhar alguns exercícios em que são dadas algumas equações e pede-se para determinar os registros básicos simbólicos, em língua natural e cartesianos, as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e a posição das elipses com eixos aumentando no sistema cartesiano.

(9) Provar o item (2) e discutir as correlações entre as unidades significantes simbólicas e os valores visuais desse item.	(7) Na mídia lápis-papel (Geogebra é opcional) trabalhar as provas/refutações das conjecturas do item (2) e discutir que algebricamente às unidades significantes simbólicas são as condições semióticas que permitem entender as seguintes questões: por qual motivo às interseções das quádricas com planos definem (ou não) elipses, parábolas, hipérboles ou cônicas degeneradas; por qual motivo uma equação e um gráfico de uma dada quádrica se correspondem; como "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um plano.
(10) Aprofundamento.	(10) Atividades de aprofundamento que discutem de maneira genérica e na ótica das unidades simbólicas as interseções com planos, as elipses com eixos aumentando, os registros básicos em língua natural e as correlações entre eles.

Fonte: O autor

Quadro 8.3 – Paraboloides hiperbólicos padrão: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Introdução: *apresentar* os registros cartesianos em todas as diferentes posições padrão.	(1) Apresentar esses registros no Geogebra. Não dar ênfase as equações.
(2) Interseções com planos.	(2) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem quais são os valores visuais determinados (hipérboles; parábolas; cônicas degeneradas) nessas interseções. Não dar ênfase as equações.
(3) Parábolas assento e estribo. Registros básicos em língua natural e os registros cartesianos.	(3) Permitir que os alunos (re)conhecer visualmente as parábolas assento e estribo e definir os registros básicos em língua natural da quádrica em questão. Discutir que podemos diferenciar as posições da quádrica no sistema cartesiano a partir da posição dessas parábolas. Não dar ênfase as equações.

(4) Registros básicos simbólicos, básicos em língua natural e cartesianos: apresentação.	(4) *Apresentar* os registros básicos simbólicos e seus correspondentes registros básicos em língua natural e cartesianos.
(5) Unidades significantes simbólicas.	(5) Discutir essas unidades sem necessariamente as correlacionarmos com os correspondentes aspectos cartesianos.
(6) Registros básicos simbólicos, básicos em língua natural e cartesianos: correlações.	(6) Permitir que os alunos conjecturem como reconhecer nas equações básicas a posição das parábolas assento e estribo no sistema cartesiano e, consequentemente, como correlacionar semioticamente os registros básicos simbólicos com os correspondentes registros básicos em língua natural e cartesianos.
(7) Aprofundamento.	(7) Atividade de aprofundamento que discute de maneira genérica e na ótica das unidades simbólicas as interseções com planos, as parábolas assento e estribo, os registros básicos em língua natural e as correlações entre eles.
(8) Interseções com os eixos coordenados.	(8) Afirmar que a referida interseção coincide com a origem (análogo aos paraboloides elípticos e cones quádricos elípticos padrão).
(9) Análogo ao item (9) do Quadro 8.2.	

Fonte: O autor

Quadro 8.4 – Elipsoides padrão: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Introdução: *apresentar* um registro cartesiano e o registro básico simbólico.	(1) Apresentar esses registros no Geogebra.
(2) Interseções com planos.	(2) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem quais são os valores visuais determinados (elipses; cônicas degeneradas) nessas interseções. Não dar ênfase as equações.

(3) Unidades significantes simbólicas.	Discutir essas unidades sem necessariamente as correlacionarmos com os correspondentes aspectos cartesianos.
(4) Medidas dos eixos e semieixos do elipsoide.	(4) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem que essas medidas são numericamente iguais às raízes quadradas dos denominadores da equação básica.
(5) Interseções com os eixos coordenados.	(5) No Geogebra permitir que os alunos conjecturem que as coordenadas de tais pontos de interseções são determinados a partir das raízes quadradas dos denominadores da equação básica. A seguir trabalhar a demonstração formal desse item e consequentemente do anterior. Caso essa demonstração já tenha sido trabalhada com outras quádricas pode-se não realizá-la para os elipsoides padrão.
(6) Revisão e sínteses.	(6) Na mídia lápis-papel (sem o Geogebra), trabalhar exercícios em que são dadas algumas equações de elipsoides e pede-se para determinar a forma básica dessas equações, as medidas dos eixos e semieixos, as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e esboçar os registros cartesianos correspondentes elipsoides.
(7) Análogo ao item (9) do Quadro 8.2.	
(8) Tipos de elipsoides. Registros cartesianos e básicos em língua natural.	(8) No Geogebra permitir que os alunos (re)conheçam visualmente os tipos de elipsoides. A partir dos registros cartesianos definir os registros básicos em língua natural sem dar ênfase às equações.
(9) Tipos de elipsoides. Registros cartesianos, básicos em língua natural e simbólicos.	Permitir que os alunos conjecturem como correlacionar semioticamente os registros básicos simbólicos com os correspondentes registros básicos em língua natural e cartesianos. Num segundo momento o professor sintetizará essas correlações.
(10) Revisão e sínteses	(10) Idem ao item (6) incluindo os registros básicos em língua natural.

(11) Equação específica das superfícies esféricas ($x^2 + y^2 + z^2 = R^2$).	(11) Demonstrar que essa equação é consequência imediata da equação básica do elipsoide padrão. Exercícios para determinar a medida do raio e esboçar os registros cartesianos.

Fonte: O autor

Observe que o conteúdo do item (9) dos Quadros 8.2 e 8.3 é análogo ao conteúdo do item (7) do Quadro 8.4. Portanto, sugerimos que ele seja tratado em apenas uma das quádricas. Em nosso caso, conforme já justificamos, privilegiamos os paraboloides padrão.

Para o uso das propriedades de reflexão e de simetria no estudo das quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão propomos uma organização didática conforme a sequência lógica dos Quadros a seguir:

Quadro 8.5 – Reflexões das superfícies quádricas: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Reflexões das quádricas: conjecturas.	(1) No Geogebra, permitir que os alunos conjecturem que cada quádrica não degenerada pode ser obtida de outra(s) por reflexão(ões) em torno do(s) plano(s) de equação $x = 0, y = 0, z = 0, x = y, x = z$ ou $y = z$.
(2) Propriedades algébricas de reflexão: apresentação.	(2) *Apresentar* propriedades algébricas de reflexão.
(3) Propriedades algébricas de reflexão: aplicações.	(3) *Aplicar* as propriedades de reflexão em exercícios. Validar/refutar as conjecturas elaboradas no momento (1). Discutir que as reflexões permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma dessas quádrica podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as afirmações que fizermos para uma quádricas em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem feitas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão.

Fonte: O autor

Quadro 8.6 – Simetrias das superfícies quádricas: conteúdos e estratégias

Conteúdo	**Estratégia de Ensino**
(1) Propriedades algébricas de simetria: apresentação.	(1) *Apresentar* propriedades algébricas de simetria.
2) Propriedades algébricas de simetria: aplicações.	(2) *Aplicar* as propriedades de simetria em exercícios.
(3) Propriedades algébricas de simetria: análises semióticas do ponto de vista das unidades significantes simbólicas	(3) Discutir que as quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm como variáveis apenas três termos quadráticos são totalmente simétricos (elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos). No caso das que têm como variáveis apenas dois termos quadráticos e um termo linear (paraboloides) há simetria em relação a dois planos coordenados e a um eixo coordenado. Esse eixo será o eixo correspondente a variável linear e os planos são os que contêm esse eixo ou, em outros termos, são os que determinam, por interseção, esse eixo.

Fonte: O autor

Note que nossa organização didática possui potencial para que os alunos tenham autonomia de participarem ativamente do processo de ensino. Com isso, é *possível* que o professor só interfira depois que os alunos criem suas próprias conjecturas ou conforme a necessidade e o tempo didático. Também é possível que muitas das atividades sejam propostas como tarefa de casa antes de serem trabalhadas em classe. Perceba também que antes de iniciarmos os aspectos algébricos demos atenção aos aspectos visuais, cartesianos e linguísticos. Dessa forma, gradualmente os registros simbólicos são inseridos e correlacionados com os outros registros que já foram ao menos inicialmente trabalhados.

Porém, é importante deixarmos claro que o que fizemos foi desenvolver uma pesquisa científica na perspectiva da TRRS, principalmente no que diz respeito à Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais, as Funções Discursivas da Linguagem e as operações cognitivas de Conversão e Tratamento, que aborde as quádricas. Com isso, nossa intenção é apenas contribuir para o debate e, dessa forma, durante a Tese nossas considerações tiveram um tom de propostas e não de soluções absolutas e definitivas para o ensino e a aprendizagem das quádricas. De maneira mais ampla, consideramos que motivadores tais como pesquisas futuras, o surgimento de novas mídias e de novas definições do currículo podem fazer com que nosso estudo seja ressignificado ou, inclusive, desconsiderado.

Esclarecemos ainda que sabíamos que as interseções e também as outras variáveis visuais que tomamos são consideradas relevantes sobre o ponto de vista matemático. Também já sabíamos que ao menos as interseções são utilizadas didaticamente nos livros e pelos docentes. Mas, nossa pesquisa mostrou que faltava um estudo teórico e prático na ótica da TRRS que indicasse a relevância dessas variáveis no ensino e na aprendizagem e, além disso, indicasse possibilidades de uso delas de forma integrativa. Dessa forma, buscamos potencializar o uso de tais variáveis no ensino segundo a teoria que escolhemos.

Nesse caminho, demos indicativos da complexidade semiótica presente tanto na identificação quanto na articulação das unidades significantes que tomamos. Por isso, no ensino não devemos negligenciar ou considerar como triviais o (re)conhecimento das regras de funcionamento semiótico que subjazem tal complexidade.

Finalizamos indicando alguns limites e possibilidades que identificamos a partir de nossos estudos.

Primeiro, com relação as propriedades de reflexão e simetria que usamos na Tese, vislumbramos a possibilidade de que elas possam ser explorados no ensino de curvas no R^2. Dessa forma, certamente pode-se contribuir para a visão global e articulada desses objetos matemáticos. Porém, entendemos que é necessário um estudo científico a luz da TRRS que analise de forma consistente essa possibilidade no ensino e na aprendizagem.

Além disso, vemos a necessidades de novas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem das superfícies na ótica da TRRS. Nesses estudos, incluem-se as superfícies que estão em posições rotacionadas, as que são do tipo cilíndricas, as do tipo superfícies cônicas (quádricas ou não), as superfícies de rotação e ainda outras superfícies mais genéricas. Também vemos que outros sistemas gráficos, como os de coordenadas polares ou esféricas devem ser pesquisados.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Engenharia Didática: evolução e diversidade. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, out. 2012.

ANTON, Howard. **Cálculo:** um novo horizonte. v. 2. 6. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2002. 552 p. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; Márcia Tamanaha.

ARTIGUE, Michelè. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996. p. 193-218. (Horizontes Pedagógicos). Tradução Maria José Figueiredo.

BALDIN, Yuriko Yamamoto; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Geometria analítica para todos e atividades com octave e Geogebra**. Sao Carlos: Edufscar, 2011. 493 p.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. 195 f. Tese (Doutorado) – Curso de Pós-graduação em Educação, Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 99 p. (Tendências em educação Matemática).

BORBA, Marcelo de Carvalho; CHIARI, Aparecida Santana de Souza. Diferentes usos de tecnologias digitais nas licenciaturas em matemática da UAB. **Nuances:** estudos sobre educação, Presidente Prudente, v. 25, n. 2, p.127-147, maio 2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho. Softwares e internet na sala de aula de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** . Curitiba: Via Litterarum, 2010. P. 01 – 09. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF. Acesso em: 22 jul. 2013.

________. Computador é a solução: mas qual é o problema?. In: SEVERINO, Antônio Joaquim; FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Formação docente:** rupturas e possibilidades. Campinas: Papirus, 2002. P. 141-159. (Cidade educativa).

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: USP, Edgard Blücher, 1974.

BOYER, Carl; MERZBACH, Uta C.. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p. Tradução de: Helena Castro.

BRANDT, Célia Finck. **Contribuições dos registros de representação semiótica na conceituação do sistema de numeração**. 2005. 242 f. Tese (Doutorado) – Curso de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; BASSOI, Tânia Stella. Estudo das funções do discurso na resolução de problemas matemáticos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 2, p.479-503, 2014.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 7, n. 2, p.201-227, abr. 2005.

________. O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 7, n. 13, p.23–37, 2014.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996. p. 36-111. (Horizontes Pedagógicos). Tradução Maria José Figueiredo.

________. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008, 128 p.

(Educação em ação). Tradução de: Camila Bógea.
BURAK, D.; BRANDT. C.F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas. Contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **ZETETIKÉ** – FE – Unicamp – v.8, n. 33 – jan/jun, 2010.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 3. Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. 543 p.

CAJORI, Florian. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2007. 654 p. Tradução de: lázaro coutinho.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 3. Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. 543 p.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1951.

COLOMBO, Janecler Ap. Amorin. **Representações semióticas no ensino:** contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 2008. 251 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

COLOMBO, Janecler Ap. Amorin; FLORES, Claudia R; MORETTI, Thadeu Moretti. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 16, n. 29 – jan./jun., 2008.

CORRÊA, Madeline Odete Silva; MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

CHAVEZ, Eduardo O.C. Informática na Educação. **Anais do I Encontro Nacional de Educação Matemática** – Minicurso. I,1987, São Paulo. PUC: MEC/CAPRS/PADCT/SPEC, 1988. 162.

Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/enemI.pdf. Acesso em: 22 jul. 2013.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Algumas notas históricas sobre a emergência e a organização da pesquisa em educação matemática, nos Estados Unidos e no Brasil. In: GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; D'AMBROSIO, Ubiratan; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; MIGUEL, Antonio. (Orgs). **A educação matemática:** breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. Revista Brasileira de Educação, n.27, p.70-93, set./out./nov./dez. 2004.

________. **Informática, Ciências e Matemática**. Site oficial de Ubiratan D'Ambrosio. Disponível em: <https://sites.google.com/site /etnomath/1>. Acesso em: 23 jul. 2013.

________. **A influência da tecnologia no fazer matemático ao longo da história:** reflexos na matemática e no seu ensino. Site oficial de Ubiratan D'Ambrosio. Disponível em: <https://sites.google.com/site/ etnomath/1>. Acesso em: 4 maio 2015.

DEMO, P. **Pesquisa e construção de conhecimento**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1996.

DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz; BRANDT, Célia Finck. Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática** – Comunicação oral. XI, 2013, Paraná. PUC/ Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional do Paraná, 2013.

________. Conhecimentos docentes: uma análise dos discursos de professores que ensinam matemática. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DIONIZIO, Fátima Aparecida Queiroz; BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria. **Perspectivas da Educação Matemática**, UFMS, v. 7, p.513-553, 2014. Número temático. Disponí-vel em: <http://www.edumat.ufms.br/>. Acesso em: 11 out. 2014.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993. 452 p.

DUVAL, Raymond. **Sémiósis et pensée humaine:** registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Suisse: Peter Lang, 1995.

________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. P. 11- 33. In: Machado, Silvia D. A. (Orgs). **Aprendizagem em matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. 2003.

________. **Semiosis y pensamiento humano:** registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educacion y Pedagogia, Grupo de Educacion Matematica, 2004. 328 p. Tradução de: Myriam Vega Restrepo.

________. **Semiósis e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais (fascículo I). São Paulo: Livraria da Física, 2009. 120 p. (Coleção contextos da ciência). Tradução de: Lênio Fernandes Levy; Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011a. 160 p. Tradução: Marlene Alves Dias.

________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **REVEMAT**, Florianópolis, v.6, n.2, p.91-112, 2011b. Tradução Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 ago. 2013.

________. Registros de representações semióticos e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**, Florianópolis, v.6, n.2, p.266-297, 2012. Disponível em:

http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 ago. 2013.

________. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, PR., v.2, n.3, p. 10-34, jul-dez. 2013. Entrevista concebida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

________. Conferência proferida na Faculdade de Ciências Sociais e de Ciências da Educação da Universidade de Chipre. 2014, Chipre. Mudanças, em curso e futuras, dos sistemas educacionais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos... 2030! Trad. Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT:** UFSC, v.10, n. 1, p. 1-23, 2015. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 20 set. 2015.

ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM). XI, 2013, Curitiba. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática** – 25 anos – Apresentação. XI, 2013, Curitiba. PUC: SBEM, 2013. Disponível em: http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/apresentacao.html. Acesso em: 22 jul. 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. Ed. Campinas: Unicamp, 2011. 848 p. Tradução: Hygino H. Domingues.

FERREIRA, Fernanda Aparecida; SANTOS, Cintia Aparecida Bento dos; CURI, Edda. Um cenário sobre pesquisas brasileiras que apresentam como abordagem teórica os registros de representação semiótica. **TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – v. 4 , n. 2, p. 1-14, 2013.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, São Paulo, v.3, n.1, 1995.

FLORES, Claúdia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. A articulação de registros semióticos para a aprendizagem: analisando a noção de congruência semântica na matemática e na física. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 1, n. 1, p.25-40,

2008. Disponível em: <http://www.edumat.ufms.br/gestor/titan.php?target=openFilefileId=201>. Acesso em: 05 ago. 2014.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ/pucsp, 2002. p. 65-87. (Trilhas).

GOULART, Jany S.SS; DIAS, ANDRÉ L. Desenhos e gráficos na produção de significados pelos alunos participantes de um curso de geometria analítica. **Zetetiké**, Fe/unicamp, v. 21, n. 31, jan/jun, p. 121-154, 2013.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1991.

JÚNIOR, Antonio Olimpio. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no primeiro ano de Matemática – uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática**. 2006. 246 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

LEHMANN, Charles H.. **Geometria analítica**. 8. ed. 1. imp. São Paulo: Globo, 2007. Tradução de: Ruy Pinto da Silva Sieczkowski.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. Revisão técnica de: Wilson Castro Ferreira Júnior e Sílvia Pregnolatto.

LEMKE, Maria de F. dos Santos; KARRER, Mônica. Retas e planos no R3: um experimento de ensino utilizando recurso computacional. **Acta Scientiae**, Canos, v. 14, n. 1, jan/abril, p. 8-26, 2012.

LEMKE, Maria de F. dos Santos. **Retas e planos na Geometria Analítica Espacial:** uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de um software de geometria analítica. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011. 289p.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. São Paulo: 34, 1993. 126 p. (Coleção trans). Tradução Carlos Ireneu da Costa.

LINS, Rômulo Campos. O Computador na Classe de Matemática. **Anais do I Encontro Nacional de Educação Matemática** – Minicurso. I,1987, São Paulo. PUC: MEC/CAPRS/PADCT/SPEC, 1988. 162. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/enemI.pdf. Acesso em: 22 jul. 2013.

LOIOLA, de Jussara Araújo. **Cálculo, tecnologias e Modelagem Matemática:** as discussões dos alunos. 2002. 173 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

LUIZ, Learcino dos Santos. **Esboço de curvas no ensino superior:** uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

LUTZ, Maurício Ramos. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Estatística a Alunos do Ensino Médio na Modalidade PROEJA**. Porto Alegrete: UFRGS, 2012. 152f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ/pucsp, 2002. p. 197-208. (Trilhas).

MINAYO, M. C. S. **O desafio do conhecimento**. São Paulo: Hucitec,1993.

MINEIRO, Renato Mendes. **Atividades para o estudo de superfícies quádricas, mediadas por um modelo de representação tridimensional**. 2011, 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2011.

MONTEIRO, Maria de Fátima dos santos. **Retas e planos na**

geometria analítica espacial: uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de um software de geometria dinâmica. 2011, 248 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2011.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos Registros de Representação na Aprendizagem de Matemática. **Contra Pontos** – Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n.6, set/dez 2002.

_________. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. (Org.) Sílvia Dias Alcântara Machado. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, Méricles Thadeu; FERRAZ, Ademir Gomes; FERREIRA, Verônica Gitirana Gomes. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Revista Quadrante**, v. 17, n. 2, p. 97-122, 2008.

MORETTI, Méricles Thadeu; LUIZ, Learcino Santos. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.12, n.3, p.529-547, 2010.

_________. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do Ensino Universitário. In: BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. (Orgs). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Célia Finck; FRANCO, Patrícia Lanzini. Estudo das formas de negação no processo de ensino da matemática: ponto de encontro com os registros de representação semiótica. **Ciência e Educação**, v. 18, n. 2, p.469-486, 2012.

MORETTI, Méricles Thadeu; THIEL, Afrânio Austregéliso. O ensino de matemática hemético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **PRÁXIS EDUCATIVA**, Ponta Grossa, Paraná, v.7, n.2, p.379-396, 2012.

MORETTI, Méricles Thadeu. Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. **Acta Scientiae**, Canoas, Rio Grande do Sul, v. 15, n.2, p.289-303, 2013.

MOTTA, Janine Freitas; LAUDARES, João Bosco. Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de Visualização, com o software winplot. **BOLEMA**, Rio Claro, São Paulo, v.27, n.46, p.497-512, 2013.

NASSER, Lilian. Educação Matemática no Ensino Superior. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática** – Mesa Redonda. VIII, 2004, Recife. UFP: SBEM, 2004. 46.

NÉ, Adriano Luís dos Santos. **A análise da linguagem Matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no Ensino Superior**. 2013. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

OLIVEIRA, E.C.; ARAÚJO, I.C.; FILHO, J.M.B.; ARAÚJO, P.C de; IGLIORI, S.B.C. O que dizem as revistas sobre as TIC e o ensino da matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** . Curitiba: Via Litterarum, 2010. P. 01 – 09. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF. Acesso em: 22 jul. 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. 136 p. (Tendências em Educação Matemática).

__________. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ/pucsp, 2002. p. 13-43. (Trilhas).

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a idéia de Situação Didática**. 2008. Coordenação de Nilson José Machado. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2016.

REIS, Genésio Lima dos; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria**

Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 242 p.

REZENDE, Wanderley Moura. Ensino de Cálculo: um problema do Ensino Superior em Matemática? **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação** – Mesa Redonda. VIII, 2004, Recife. UFP: SBEM, 2004. 46.

ROCHA, Marcos Dias da. **Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina cálculo diferencial e integral:** estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

RODRIGUES, Simone Navas Barreiro. **Superfícies esféricas:** uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos, com o auxílio do software cabri-géometré 3D. 2012. 241 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-graduação em Educação Matemática, Universidade Anhanguera, São Paulo, 2012.

SILVA, Madeline Odete. **Esboço de curvas:** uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszakat. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. Florianópolis: UFSC, 2005. 4. ed. 138p. Disponível: http://projetos.inf.ufsc.br/arquivos /Metodologia%20da%20Pesquisa%203a%20edicao.pdf. Acesso em: 20 out. 2012.

SILVA, Sérgio Florentino da et al. Tópicos Atuais em Matemática e Etnomatemática: pontos de convergência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p.418-436, 1 dez. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/ revemat>. Acesso em: 1 dez. 2016.

SIMMONS, George F.. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1988. 2 v. Tradução de: Seiji Hariki; revisão técnica: Rodney Bassanezi, Silvia de Alencastro Pregnolatto.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Tradução: Orlando de Andrade Fiqueiredo; Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008. 138 p.

SOUTO, Daise Lago Pereira; BORBA, Marcelo de Carvalho. Miniciclo de aprendizagem expansiva em sistema seres-humanos-com-mídias e o fazer matemática online. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. XI, 2013, Curitiba. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. – Curitiba, PR: Via Litterarum, 2013.

STEWART, James. **Cálculo**. v. 2. 2. ed. 5 imp. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 541 p. Tradução: Antonio Carlos Moretti; Antonio Carlos Gilli Martins. Revisão técnica: Helena Maria Ávila de Castro.

VALENTE, José Armando. Integração, currículo e tecnologias – a passagem do lápis e papel para o currículo da era digital. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** . Curitiba: Sbem, 2013. p. 01 - 01. Disponível em: http://sbem.bruc.com.br/XIENEM/palestras.html. Acesso em: 22 jul. 2013.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000. 232 p.

APÊNDICE A – SEQUÊNCIA DE ENSINO: QUÁDRICAS

A.1 INTRODUÇÃO

Estudaremos um conjunto de objetos matemáticos que são conhecidas pelo nome genérico de *superfícies quádricas* ou, por simplicidade, também as chamaremos de *quádricas.*[1]

Ao introduzirem esse assunto, ainda em caráter inicial e intuitivo, Camargo e Boulos (2005, p. 402) referem-se às quádricas como "[...] a versão tridimensional das cônicas". No mesmo sentido, Stewart (2010, p. 767) fala que "as superfícies quádricas são as correspondentes tridimensionais das cônicas no plano." Essas falas, mesmo que apenas com objetivo de apresentação do assunto, dão pistas iniciais de que, de alguma forma, as cônicas têm relações com as quádricas.

Nosso objeto é conhecer com profundidade esse tipo de objeto sem nos limitarmos a apenas "olhar" um desenho que os representam. Para tanto, usaremos alguns assuntos já vistos e outros que serão trabalhados durante o processo. Nossas atividades de ensino serão propostas com o auxílio de algum *software* matemático que permite plotar gráficos. Sugerimos o Geogebra, porém, mediante a algumas adaptações, outros podem ser recorridos.[2] Construímos *cenários* nesse *software* que serão usados nas atividades propostas e que pretendem possibilitar a criação de conjecturas de forma experimental.[3] Na resolução das atividades, sempre que for conveniente, a mídia digital poderá ser articulada com a mídia lápis e papel.

Veremos que os *registros em língua natural (os nomes), figurais, simbólicos (as equações) e cartesianos* das quádricas possuem vários conteúdos. Inicialmente daremos ênfase aos aspectos visuais e, aos poucos, articularemos/correlacionaremos esse aspecto aos outros.

Dividiremos nossa apresentação em duas partes. Na primeira, que vai da seção A.1 até a seção A.5 (p. 378), temos como objetivo proporcionar uma visão global de todos os tipos de quádricas e, para tanto, recorreremos principalmente aos aspectos visuais e experimentais proporcionados pelo Geogebra. Estudaremos os registros visuais (principalmente as simetrias e os pontos significativos), os registros cartesianos (principalmente o estudo das posições das quádricas e dos pontos significativos no sistema cartesiano) e os registros simbólicos (explorados apenas de maneira introdutória e com uma equação genérica). Nesta seção, as quádricas também estarão em posições complicadas no sistema cartesiano que geram dificuldades visuais e algébricas.

---

[1] Em todo o nosso estudo só utilizaremos o sistema de coordenadas ortogonais.

[2] Para baixar esse *software*, entre em www.Geogebra.org.

[3] Esses cenários estão disponíveis em: wiki.sj.ifsc.edu.br.

Por esse motivo, nesta seção optamos tanto em restringir o estudo algébrico quanto em não incluir o estudo das interseções deixando-os, dessa forma, para a seção seguinte.

Na segunda parte, que se inicia na seção A.5 e vai o fim deste material, daremos ênfase as *quádricas não cilíndricas e não degeneradas que estão nas posições posição padrão.* Veremos que nessas situações as quádricas estão em "posições privilegiadas" no sistema cartesiano pois, nesses casos, é mais simples o aprofundamento dos estudos dos registros simbólicos, cartesianos e em língua natural bem como das articulações/correlações entre eles.

Esclarecemos que este material está organizado de maneira que o leitor possa, conforme seus interesses, "pular" as seções. Assim, conforme o interesse pode-se, por exemplo, iniciar as atividades diretamente na subseção das quádricas padrão e desconsiderar o que vem anteriormente. Pode-se ainda não explorar as propriedades de reflexão ou de simetria. Também é possível não trabalhar com todos os cálculos das seções que estudam as interseções.

A.2 REGISTROS EM LÍNGUA NATURAL

O termo quádricas é agregador e, com isso, inclui várias possibilidades. As quádricas referem-se aos seguintes objetos matemáticos:

1. **Quádricas não degeneradas:** *elipsoides; hiperboloides de uma folha; hiperboloides de duas folhas; cones quádricos elípticos; paraboloides elípticos; paraboloides hiperbólicos (selas); cilindros quádricos elípticos; cilindros quádricos hiperbólicos; cilindros quádricos parabólicos.*[4]
2. **Quádricas degeneradas:** *conjunto vazio; conjunto formado por um só ponto, reta, plano; reunião de dois planos paralelos; reunião de dois planos concorrentes.*[5]

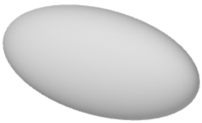
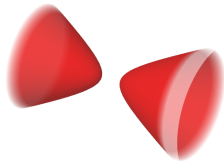
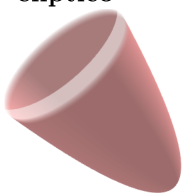
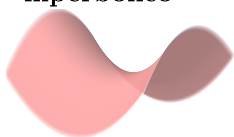
[4] Existem cones e cilindros que não são quádricas. Os que são, conforme veremos, têm como registro de representação simbólico uma equação do segundo em variáveis $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$. De forma geral, todo objeto matemático que é uma quádrica tem como registro de representação simbólico esse tipo de equação.

[5] A informação a respeito do elenco que constitui as quádricas foi retirada de Camargo e Boulos (2005, p. 428).

A.3 REGISTROS FIGURAIS

O estudo figural das quádricas degeneradas já nos é familiar e, por isso, neste momento não vamos nos ater e ele. Assim, a seguir apresentaremos registros figurais apenas das quádricas não degeneradas para, ainda em caráter introdutório, termos as primeiras identificações das *variáveis visuais* desses objetos além de correlacionar os nomes dos objetos com seus respectivos registros figurais.

Quadro A.1 – Quádricas não degeneradas

Elipsoide 	**Hiperboloide de uma folha** 	**Hiperboloide de duas folhas** 
Cone quádrico elíptico 	**Paraboloide elíptico** 	**Paraboloide hiperbólico** 
Cilindro quádrico elíptico 	**Cilindro quádrico hiperbólico** 	**Cilindro quádrico parabólico** 

Fonte: O autor

Para visualizar os registros figurais de forma dinâmica, realize a atividade seguinte com o auxílio dos *cenários* do Geogebra.

Atividade

1 Abra o cenário REGISTROS FIGURAIS e, na Janela de Álgebra, selecione cada uma das quádricas que já estão previamente registradas. Na Janela de Visualização 3D, use do comando Girar Janela de Visualização 3D.[6]

A atividade anterior inclui os registros dos cilindros quádrico elíptico, hiperbólico e parabólico. Esses, além de serem quádricas, também fazem parte de um conjunto de objetos matemáticos chamados de *superfícies cilíndricas*. O estudo dessas superfícies envolve conteúdos específicos a ela e que não temos como objetivo tratar neste momento como, por exemplo, o *Princípio da extrusão*[7], questões relacionadas aos planos de simetria e as interseções e a própria definição de *superfície cilíndrica*. Por isso, daqui para frente nosso estudo sobre as quádricas excluirá os três tipos de cilindros quádricos.[8]

A.3.1 SIMETRIAS DAS QUÁDRICAS NÃO CILÍNDRICAS E NÃO DEGENERADAS

Discutiremos, intuitivamente e do ponto vista dos registros figurais, os planos de simetria das quádricas não cilíndricas e não degeneradas.

Atividades

2 Abra o cenário REGISTROS FIGURAIS - SIMETRIA 1. Antes de resolver os itens a seguir, observe a Janela de Álgebra e perceba que já registramos dois hiperboloides de uma folha ($\mathrm{H1F}_{\mathbf{1}}$ e $\mathrm{H1F}_{\mathbf{2}}$), dois hiperboloides de duas folhas ($\mathrm{H2F}_{\mathbf{1}}$ e $\mathrm{H2F}_{\mathbf{2}}$), dois cones quádricos elípticos ($\mathrm{C}_{\mathbf{1}}$ e $\mathrm{C}_{\mathbf{2}}$), uma reta ($\boldsymbol{r}$), três planos perpendiculares entre si ($\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$) e um feixe de planos de que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ (FEIXE) que para ser representado basta modificarmos os

[6] Em todas as atividades propostas podem-se fazer outras modificações nos cenários conforme o interesse ou curiosidade do usuário.

[7] Ver Anton (2002).

[8] Obviamente, conforme o interesse do estudante, o assunto superfícies cilíndricas e cilindros quádricos poderão ser retomados e estudados com mais profundidade. Porém, sugerimos que isso seja feito em um capítulo separado em que se abordem os conteúdos específicos a esses objetos.

valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$.[9] Observe também que o FEIXE contém os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$. De maneira experimental, responda as questões seguintes:

a) Entre os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $\mathrm{H1F}_{\mathbf{1}}$? E de $\mathrm{H1F}_{\mathbf{2}}$?
b) Em relação a $\mathrm{H1F}_{\mathbf{1}}$ o FEIXE é um feixe de planos de simetria (FPS) que contêm a reta r? E em relação a $\mathrm{H1F}_{\mathbf{2}}$?
c) Entre os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $\mathrm{H2F}_{\mathbf{1}}$? E de $\mathrm{H2F}_{\mathbf{2}}$?
d) Em relação a $\mathrm{H2F}_{\mathbf{1}}$ o FEIXE é um FPS que contêm a reta $\boldsymbol{r}$? E em relação a $\mathrm{H2F}_{\mathbf{2}}$?
e) Entre os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $\mathrm{C}_{\mathbf{1}}$? E de $\mathrm{C}_{\mathbf{2}}$?
f) Em relação a $\mathrm{C}_{\mathbf{1}}$ o FEIXE é um FPS que contêm a reta $\boldsymbol{r}$? E em relação a $\mathrm{C}_{\mathbf{2}}$?
g) Para cada quádrica não degenerada desta atividade, que objeto matemático se obtém na interseção entre os seus planos de simetria?[10]

3 Abra o cenário REGISTROS FIGURAIS - SIMETRIA 2. Antes de resolver os itens a seguir, observe a Janela de Álgebra e perceba que já registramos dois paraboloides elípticos ($\mathrm{P}_{\mathbf{1}}$ e $\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$), um paraboloide hiperbólico ($\mathrm{P}_{\mathbf{3}}$), uma reta ($\boldsymbol{r}$), três planos perpendiculares entre si ($\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$) e um feixe de planos que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ (FEIXE) que para ser representado basta modificarmos os valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$. De maneira experimental, responda as questões seguintes:

a) Entre os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $\mathrm{P}_{\mathbf{1}}$? E de $\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$?
b) Em relação a $\mathrm{P}_{\mathbf{1}}$ o FEIXE é um feixe de planos de simetria (FPS) que contêm a reta $\boldsymbol{r}$? E em relação a $\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$?
c) Entre os planos $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{PLANO}_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $\mathrm{P}_{\mathbf{3}}$?
d) Em relação a $\mathrm{P}_{\mathbf{3}}$ o FEIXE é um (FPS) que contêm a reta $\boldsymbol{r}$?
e) Para cada quádrica não degenerada desta atividade, que objeto matemático se obtém na interseção entre os seus planos de simetria?
f) Para cada quádrica não degenerada desta atividade, que objeto

[9] Um feixe de retas que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ é um conjunto de planos que contém a reta $\boldsymbol{r}$.
[10] No Geogebra há um ícone que determina a Interseção de Dois Objetos.

matemático se obtém na interseção entre os seus planos de simetria com a própria superfície quádrica?

4 Abra o cenário REGISTROS FIGURAIS - SIMETRIA 3. Observe a Janela de Álgebra e perceba que já registramos três elipsoides ($E_{\mathbf{1}}$, $E_{\mathbf{2}}$ e $E_{\mathbf{3}}$), uma reta ($\boldsymbol{r}$), três planos perpendiculares entre si ($PLANO_{\mathbf{1}}$, $PLANO_{\mathbf{2}}$ e $PLANO_{\mathbf{3}}$), um feixe de planos que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ ($FEIXE_{\mathbf{1}}$) que para ser representado basta modificarmos os valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ e um feixe de planos de que contêm o ponto C ($FEIXE_{\mathbf{2}}$)[11] que para ser representado basta modificarmos os valores de $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{k}$ e o ponto C. De maneira experimental, responda as questões seguintes:

a) Entre os planos $PLANO_{\mathbf{1}}$, $PLANO_{\mathbf{2}}$ e $PLANO_{\mathbf{3}}$ quais são planos de simetria de $E_{\mathbf{1}}$? E de $E_{\mathbf{2}}$? E de$E_{\mathbf{3}}$?
b) Em relação a $E_{\mathbf{1}}$ o $FEIXE_{\mathbf{1}}$ é um feixe de planos de simetria (FPS) que contêm a reta $\boldsymbol{r}$? E em relação a $E_{\mathbf{2}}$? E em relação a $E_{\mathbf{3}}$?
c) Em relação a $E_{\mathbf{1}}$ o $FEIXE_{\mathbf{2}}$ é um (FPS) que contêm o ponto C? E em relação a $E_{\mathbf{2}}$? E em relação a $E_{\mathbf{3}}$?
d) Para cada item anterior, que objeto matemático se obtém na interseção entre os planos de simetria?

A.3.1.1 SIMETRIA: SÍNTESES

No que diz respeito ao número de planos de simetria, para os hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e cones quádricos podem acontecer duas possibilidades. Na primeira, há apenas três planos de simetria perpendiculares entre si. Na segunda há um *feixe de planos de simetria* (FPS) que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ e também há um plano de simetria perpendicular (chamaremos de plano $\boldsymbol{s}$) a esse feixe (é claro que $\boldsymbol{s}$ não pertencente ao FPS).

Para os paraboloides elípticos também há duas possibilidades. Na primeira, há apenas dois planos de simetria perpendiculares entre si. Na segunda há um FPS que contêm a reta $\boldsymbol{r}$.

Para os paraboloides hiperbólicos há apenas uma possibilidade que é ter apenas dois planos de simetria perpendiculares entre si.

Para os elipsoides há três possibilidades. Para os elipsoides que

[11] São todos os planos que contêm o ponto C.

têm os três eixos[12] com tamanhos diferentes, há apenas três planos de simetria perpendiculares entre si. Para os elipsoides que têm dois eixos com tamanhos iguais e um com tamanho diferente (*esferoide*), há um FPS que contêm a reta $\boldsymbol{r}$ e também há um plano de simetria perpendicular ($\boldsymbol{s}$) a esse feixe. Para os elipsoides que têm os três eixos com tamanhos iguais (superfície esférica), há um FPS que contêm o ponto C (são todos os planos que contêm o centro da superfície esférica).

A.3.2 PONTOS SIGNIFICATIVOS: CENTRO, VÉRTICE, PONTO DE SELA

Em nosso estudo discutiremos os registros cartesianos das quádricas. Nele, entre outras questões, será importante conhecermos "em que posição" (padrão, transladada ou rotacionada) a quádrica está em relação a um sistema cartesiano previamente definido. Para tanto, além de analisarmos a posição dos planos de simetria em relação aos planos coordenados, analisaremos a posição de **um ponto** da quádrica em relação à origem do sistema cartesiano. Obviamente, não escolheremos qualquer ponto e, dessa forma, definiremos *um ponto significativo* da quádrica. Usando um critério específico, escolheremos, para as elipsoides, hiperboloides de uma e duas folhas e cones quádricos elípticos o *centro* como ponto significativo. Com outro critério, para os paraboloides elípticos o ponto significativo será o *vértice* e para os paraboloides hiperbólicos será o *ponto de sela*. Na atividade anterior, apesar de que não demos os nomes na ocasião, esses pontos já foram estudados e, inclusive, sugerimos que as três definições a seguir sejam lidas concomitantemente com as respostas dadas a última pergunta das três atividades anteriores.

A.3.2.1 CENTRO DA SUPERFÍCIE

Para o caso dos elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e cones quádricos elípticos a interseção entre seus os planos de simetria define **um** ponto. A esse ponto chamaremos de *centro da superfície*, ou apenas *centro* e o indicaremos por C.

Atividade

[12] Os *eixos* do elipsoide (maior, médio e menor) são segmentos de reta e os *eixos de simetria* do elipsoide são retas.

5 Por que não é adequado usarmos a definição anterior para os paraboloides elípticos e hiperbólicos?

Resposta:

Para os paraboloides elípticos e hiperbólicos a interseção entre seus planos de simetria define uma reta e não apenas um ponto. Por isso, com esse critério não definimos **o** ponto *centro*.

A questão anterior discute por que não definimos centro para os paraboloides elípticos e hiperbólicos como fizemos para os outros objetos. Diante desse limite, escolheremos outro critério que servirá para definir um ponto significativo tanto para o paraboloide elíptico quanto para o paraboloide hiperbólico.

A.3.2.2 VÉRTICE DO PARABOLOIDE ELÍPTICO

Para o caso dos paraboloides elípticos a interseção entre os seus planos de simetria com a superfície do paraboloide define **um** ponto. A esse ponto chamaremos de *vértice do paraboloide elíptico*, ou apenas *vértice* e o indicaremos por V.

A.3.2.3 PONTO DE SELA DO PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Para o caso dos paraboloides hiperbólicos a interseção entre os entre seus planos de simetria com a superfície do paraboloide define **um** ponto. A esse ponto chamaremos de *ponto de sela do paraboloide hiperbólico*, ou apenas *ponto de sela* e o indicaremos por S.

Atividades

6 Para os paraboloides, a definição de *um ponto* significativo levou em consideração a interseção dos planos de simetria com a superfície do paraboloide em questão. Para os elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas e cones quádricos elípticos esse mesmo critério é adequado para a definição de um ponto significativo? Comente sua resposta.

Resposta:

Não. Pode ocorrer que a interseção determine mais de um ponto (como no caso dos elipsoides) ou nenhum ponto (como no caso dos hiperboloides de duas folhas) e, por isso, essa definição não é adequada para essas quádricas.

A.3.2.4 PONTOS SIGNIFICATIVOS: SÍNTESES

O quadro a seguir sintetiza o que dissemos a respeito dos pontos significativos.

Quadro A.2 – Quádricas: pontos significativos

Tipo de superfície quádrica	**Ponto significativo**	**Definição**
Elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones quádricos elípticos	Centro **Notação:** C	A interseção entre os seus planos de simetria define um ponto que chamaremos de *centro*.
Paraboloides elípticos	Vértice **Notação:** V	A interseção entre os seus planos de simetria com a superfície do paraboloide define um ponto que chamaremos de *vértice*.
Paraboloides hiperbólicos	Sela **Notação:** S	A interseção entre os seus planos de simetria com a superfície do paraboloide define um ponto que chamaremos de *ponto de sela*.

Fonte: O autor

A.3.3 POSIÇÕES NO SISTEMA CARTESIANO: PADRÃO, TRANSLADADA, ROTACIONADA

Os registros cartesianos permitem, entre outras questões, discutir que escolhido um sistema cartesiano as quádricas não cilíndricas e não degeneradas podem estar na *posição padrão, transladada* ou *rotacionada*. Conforme veremos, a definição dessas posições baseiam-se nas posições dos planos de simetria em relação aos planos coordenados escolhidos e também na posição do ponto significativo em relação à origem do sistema cartesiano. As atividades seguintes introduzem algumas dessas questões.

Atividades

7 Abra o cenário POSIÇÕES DAS QUÁDRICAS 1. Na Janela de Álgebra selecione *uma* das quádricas que já estão previamente registradas.[13] A seguir, na Janela de Visualização, modifique livremente os valores de $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}$ e $\boldsymbol{z_0}$. Repita esses procedimentos para todas as outras quádricas já registradas nesse cenário. Com suas palavras, o que aconteceu com os registros cartesianos das quádricas ao realizarmos esses procedimentos?

Resposta:

Os registros cartesianos das quádricas ficam na posição transladada ou na posição padrão.

8 Abra o cenário POSIÇÕES DAS QUÁDRICAS 2. Na Janela de Álgebra selecione os registros do FEIXE, dos PLANOS 1, 2 e 3 e *uma* das quádricas. A seguir, na Janela de Visualização, modifique livremente os valores de $\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$. Repita esses procedimentos para as outras quádricas do cenário e, com isso, responda as questões seguintes:

a) Experimentalmente, o FEIXE e os PLANOS 1, 2 e 3 são os planos de simetria de quais quádricas desse do cenário? Qual(is) a(s) possível(is) posição(ões) dos PLANOS 1, 2 e 3 em relação aos planos coordenados?
b) leia a definições dos Quadros A.3 e A.4 (p. 374) que falam dos elipsoides, hiperboloides de uma e duas folhas e cones quádricos elípticos nas posições padrão e transladados. Que posição as quádricas do cenário em estudo estão quando temos $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{0}$? E para o caso em que pelo menos um desses números seja não nulo? Justifique suas respostas.
c) o que acontece com o centro das quádricas quando elas estão na posição padrão? E quando elas estão na posição transladada?

[13]Para ver o registros cartesianos dos elipsoides é necessário selecionar $\boldsymbol{z_1}$ e $\boldsymbol{z_2}$.

Respostas:

a) O FEIXE é plano de simetria apenas do cone e os PLANOS 1, 2 e 3 são planos de simetria de todas as quádricas do cenário. Paralelos coincidentes ou paralelos distintos.
b) Posição padrão. Posição transladada. A justificativa é baseada na verificação das definições dos Quadros A.3 e A.4 (p. 374).
c) O centro dessas quádricas coincide com a origem do sistema cartesiano. O centro dessas quádricas não coincide com a origem do sistema cartesiano.

9 Abra o cenário POSIÇÕES DAS QUÁDRICAS 3. Na Janela de Álgebra selecione os registros do FEIXE, dos PLANOS 1, 2 e 3, do paraboloide elíptico $P_{\mathbf{1}}$ e de seu vértice V. A seguir, na Janela de Visualização, modifique livremente os valores de $\boldsymbol{x_0, y_0, z_0, m}$ e $\boldsymbol{n}$. Repita esses procedimentos para o paraboloide elíptico $P_{\mathbf{2}}$ e V e, a seguir, para o paraboloide hiperbólico $P_{\mathbf{3}}$ e seu ponto de sela S. Com isso, responda as questões seguintes:

a) Experimentalmente, o FEIXE e os PLANOS 1, 2 e 3 são os planos de simetria de quais quádricas desse do cenário? Qual(is) a(s) possível(is) posição(ões) dos PLANOS 1, 2 e 3 em relação aos planos coordenados?
b) leia a definições dos Quadros A.3 e A.4 (p. 374) que falam dos paraboloides elípticos nas posições padrão e transladados. Que posição as quádricas do cenário em estudo estão quando temos $\boldsymbol{x_0 = y_0 = z_0 = 0}$? E para o caso em que pelo menos um desses números seja não nulo? Justifique suas respostas.
c) o que acontece com C e S das quádricas quando elas estão na posição padrão? E quando elas estão na posição transladada?
d) na definição que demos acerca dos paraboloides padrão há duas condições. A segunda é uma consequência imediata da primeira? Discuta essa questão.

Respostas:

a) O FEIXE é plano de simetria apenas de $P_{\mathbf{3}}$, os PLANOS 2 e 3 são planos de simetria de todas as quádricas do cenário e PLANO1 não é plano de simetria de nenhuma das quádricas do cenário. Paralelos coincidentes ou paralelos distintos.
b) Posição padrão. Posição transladada. A justificativa é baseada na

verificação das definições dos Quadros A.3 e A.4 (p. 374).
c) P/S coincide com a origem do sistema cartesiano. P/S não coincide com a origem do sistema cartesiano.
d) Não. No cenário que estamos usando basta fazermos $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{y_0}$ e $\boldsymbol{z_0} \neq \mathbf{0}$ e temos um contraexemplo.

10 Abra o cenário POSIÇÕES DAS QUÁDRICAS 4. Leia as definições dos Quadros A.3, A.4 e A.5 (p. 374) que falam das quádricas padrão, transladadas e rotacionadas e, experimentalmente, diga qual a posição do hiperboloide de uma folha registrado nesse cenário. Justifique sua resposta.

Resposta:

Não há dois planos coordenados ou dois planos paralelos aos planos coordenados que são planos de simetria da quádrica. Por isso, o hiperboloide de uma folha está rotacionado.

A.3.3.1 POSIÇÕES NO SISTEMA CARTESIANO: SÍNTESES

De forma sintética, o quadro a seguir delimita as posições das quádricas não cilíndricas e não degeneradas no sistema cartesiano.[14]

Quadro A.3 – Quádricas: posições padrão

Tipo de quádrica	**Posição padrão**
Elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos *padrão*	- Os três planos coordenados são planos de simetria da quádrica.[15]
Paraboloides elípticos *padrão*	- Dois planos coordenados são planos de simetria da quádrica; - o vértice coincide com a origem com sistema cartesiano.[16]

[14] Na subseção A.69 (p. 464) faremos o estudo algébrico das simetrias. Antes, porém, é necessário o estudo dos registros algébricos das quádricas.

[15] Em decorrência da definição, para os elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos na posição padrão o centro coincidindo com a origem.

[16] Para os Paraboloides elípticos/hiperbólicos pode-se ter dois planos coordenados como planos de simetria e o vértice/ponto de sela não coincidir com a origem do sistema cartesiano. Nesse caso, teremos uma translação.

Paraboloides hiperbólicos *padrão*	- Dois planos coordenados são planos de simetria da quádrica; - o ponto de sela coincide com a origem com sistema cartesiano.

Fonte: O autor

Quadro A.4 – Quádricas: posições transladadas

Tipo de quádrica	**Posição transladada**
Elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos *transladados*	- Existem três planos distintos entre si, mas que são paralelos[17] (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o centro não coincide com a origem com sistema cartesiano.[18]
Paraboloides elípticos *transladados*	- Existem dois planos distintos entre si, mas que são paralelos (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o vértice não coincide com a origem.
Paraboloides hiperbólicos *transladados*	- Existem dois planos distintos entre si, mas que são paralelos (coincidentes ou distintos) aos planos coordenados, que são planos de simetria da quádrica; - o ponto de sela não coincide com a origem.

Fonte: O autor

Quadro A.5 – Quádricas: posições rotacionadas

Tipo de quádrica	**Posição rotacionada**

[17]No que diz respeito a paralelismo de planos seguiremos a definição de Dolce e Pompeo (2005). Para eles, planos paralelos podem ser distintos ou coincidentes. Logo, ao dizermos apenas planos paralelos estamos incluindo essas duas possibilidades. Se quisermos nos referir a uma das duas diremos *planos paralelos distintos* ou *planos paralelos coincidentes*.

[18]Ao menos um desses três planos deve ser paralelo distinto e os outros dois podem ser paralelos coincidentes ou distintos. Se esses três planos pudessem ser paralelos coincidentes teríamos a posição padrão e, nesse caso, teríamos o centro coincidindo com a origem.

Elipsoides, hiperboloides de uma folha, hiperboloides de duas folhas, cones quádricos elípticos, paraboloides elípticos e paraboloides hiperbólicos *rotacionados*	Não há dois planos coordenados ou dois planos paralelos aos planos coordenados que são planos de simetria da quádrica.

Fonte: O autor

No caso das superfícies esféricas não falaremos em posição rotacionada.

A.4 REGISTROS SIMBÓLICOS: INTRODUÇÃO

De maneira genérica, neste espaço faremos a introdução dos registros simbólicos (equações) das quádricas. Qualquer quádrica tem como registro simbólico uma equação do segundo grau em *três* variáveis. Isso justifica o porquê do nome quádrica. A seguir, revisaremos a definição dessa equação.

Definição: Considere os números reais $\boldsymbol{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J}$, que chamaremos de constantes reais, e as variáveis reais $\boldsymbol{x, y, z}$. Uma equação do segundo grau em três variáveis é uma equação do seguinte tipo:

$$\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0} \tag{A.1}$$

com a condição de que pelo menos uma das constantes $\boldsymbol{A, B, C, D, E, F}$ é diferente de zero. Essa condição, claro, garante que a equação tenha grau dois. Para simplificar nossa comunicação, adotaremos a seguinte linguagem:

- Termos quadráticos $\rightarrow$ $\boldsymbol{Ax^2, By^2, Cz^2, Dxy, Exz, Fyz}$
- termos quadráticos misto $\rightarrow$ $\boldsymbol{Dxy, Exz, Eyz}$
- termos lineares $\rightarrow$ $\boldsymbol{Gx, Hy, Iz}$
- termo independente $\rightarrow$ $\boldsymbol{J}$

Atividades

11 Abra o cenário REGISTROS SIMBÓLICOS. Selecione os objetos representados na Janela de Álgebra e identifique-os. Depois

disso, para cada equação dos itens a seguir, escreva o nome do objeto matemático no qual elas se referem. Além disso, elabore argumentos algébricos e/ou em língua natural que justifiquem o porquê de suas respostas.

a) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 0}$
Resolução: A equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 + 2 = 0}$ é equivalente a $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = -2}$. Como $\boldsymbol{x^2 \geq 0, y^2 \geq 0}$ e $\boldsymbol{z^2 \geq 0}$, então $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 \geq 0}$. Logo, a solução da equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = -2}$ é o conjunto vazio (quádrica degenerada).
b) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 4x = -4}$
Resolução: A equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 4x = -4}$ é equivalente a $\boldsymbol{(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 0}$. Dessa equação é obvio que $\boldsymbol{x - 2 = 0; y = z = 0 \rightarrow (2; 0; 0)}$. Logo, a solução da equação $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 4x = -4}$ é o ponto de coordenadas $\boldsymbol{(2; 0; 0)}$ (quádrica degenerada). Observe que essa solução pode não ser é visualizada imediatamente no Geogebra se não fizermos os cálculos algébricos ou se não escondermos os eixos no Geogebra.
c) $\boldsymbol{(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0}$
Resolução: Da equação $\boldsymbol{(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0}$ é imediato que $\boldsymbol{x - y = 0}$ e $\boldsymbol{y - z \rightarrow x = y = z}$. Logo, a solução dessa equação é uma reta com equação simétrica $\boldsymbol{x = y = z}$ (quádrica degenerada).
d) $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 = 0}$
Resolução: A equação $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 = 0}$ é equivalente a $\boldsymbol{(x - y)^2 = 0}$. Dessa equação é obvio que $\boldsymbol{x - y = 0 \rightarrow x = y}$. Logo, a solução da equação $\boldsymbol{x^2 - 2xy + y^2 = 0}$ é o plano de equação geral $\boldsymbol{x - y = 0}$ (quádrica degenerada).
e) $\boldsymbol{(x - y)(x - y + 2) = 0}$
Resolução: Da equação $\boldsymbol{(x - y)(x - y + 2) = 0}$ é imediato que $\boldsymbol{x - y = 0}$; $\boldsymbol{x - y + 2 = 0}$. Como sabemos, $\boldsymbol{x - y = 0}$ e $\boldsymbol{x - y + 2 = 0}$ são as equações gerais de dois planos em que podemos tomar o $\boldsymbol{\overrightarrow{n} = (1; -1; 0)}$ como vetor normal dos dois e, respectivamente, $\boldsymbol{d_1 = 0}$ e $\boldsymbol{d_2 = 2}$ como termos independentes. Logo, os dois planos são paralelos (pois podemos tomar o mesmo vetor normal) e distintos ($\boldsymbol{d_1 \neq d_2}$). Isso implica que a solução da equação $\boldsymbol{(x - y)(x - y + 2) = 0}$ é a reunião de dois planos paralelos distintos um com equação $\boldsymbol{x - y = 0}$ e outro com equação $\boldsymbol{x - y + 2 = 0}$ (quádricas degeneradas).
f) $\boldsymbol{(x - y)(x + y) = 0}$
Resolução: Da equação $\boldsymbol{(x - y)(x + y) = 0}$ é imediato que

$\boldsymbol{x - y = 0; x + y = 0}$. Como sabemos, $\boldsymbol{x - y = 0}$ e $\boldsymbol{x + y = 0}$ são as equações gerais de dois planos em que podemos tomar, respectivamente, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} = \boldsymbol{(1; -1; 0)}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{(1; 1; 0)}$ como vetores normais. Como as coordenadas desses vetores não são proporcionais, eles não são paralelos e, consequentemente, os planos são concorrentes. Logo, a solução da equação $\boldsymbol{(x - y)(x + y) = 0}$ é a reunião de dois planos concorrentes um com equação $\boldsymbol{x - y = 0}$ e outro com equação $\boldsymbol{x + y = 0}$ (quádricas degeneradas).

Comentário: Nesta subseção tratamos do estudo algébrico das quádricas a partir da Equação A.1. Como vemos, nos limitamos a poucos casos. Na subseção seguinte justificaremos por que de tal limite.

A.5 QUÁDRICAS NÃO CILÍNDRICAS E NÃO DEGENERADAS NA POSIÇÃO PADRÃO: APRESENTAÇÃO

Algebricamente, podemos estudar as quádricas não degeneradas nas posições padrão, transladada e rotacionada a partir da Equação A.1 (p. 376). Porém, em geral esse estudo é longo e complicado e está fora de nossos interesses neste momento. Particularmente quando há termo misto na Equação A.1 a quádrica é rotacionada.[19] Com isso, além da dificuldade de visualização dos correspondentes registros cartesianos, sobretudo no que diz respeito às simetrias e interseções com planos, a presença do termo misto pode complicar os cálculos algébricos. Por outro lado, há teoremas da Álgebra Linear (*veja o Teorema Espectral*) que garantem que sempre é possível por translações e/ou rotações escolhermos novos eixos coordenados que deixam a quádrica na posição padrão e que, consequentemente, deixam as equações em formas mais simples e que facilitam a visualização. Por isso, as posições padrão são consideradas "posições privilegiadas".

Mesmo conscientes desses limites e obstáculos algébricos e de visualização, na subseção A.1 (p. 363) tentamos proporcionar minimamente uma visão global das quádricas recorrendo, até então,principalmente aos aspectos visuais e experimentais proporcionadas pelo Geogebra.

Porém, daqui para frente privilegiaremos o estudo das quádricas nas posições padrão e, assim, será mais simples o aprofundamento dos estudos dos registros simbólicos, cartesianos e em língua natural bem

---

[19] A recíproca não é verdadeira. Para ter um contraexemplo veja Baldin e Furuya (2011).

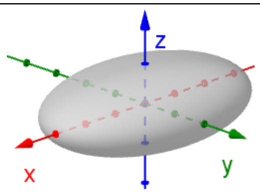
como das articulações/correlações entre eles. Nesse caso, não usaremos a forma da Equação A.1 e sim as que chamaremos de registros *básicos* simbólicos ou equações *básicas*. Linguisticamente, também usaremos o que definiremos como registros *básicos* em língua natural. O adjetivo *básico* se deve ao fato de que, em nossa compreensão, essa forma de apresentação dos registros permitirá de maneira mais simples identificar e analisar o que é significativamente básico (ou fundamental) tanto nas equações quanto nos registros em língua natural. A partir daí, as articulações/correlações, as diferenças e as semelhanças entre os registros das quádricas serão mais bem exploradas. Como consequência, o estudo das transladadas a partir das padrão é simples e parecido com o que se faz com as cônicas.

A seguir iniciaremos o estudo das quadrícas padrão não cilíndricas e não degeneradas com os elipsoides padrão.

A.6 ELIPSOIDE PADRÃO

Inicialmente *apresentaremos* o registro cartesiano e o registro *básico* simbólico do elipsoide padrão. Para tanto, veja o quadro a seguir:

Quadro A.6 – Registro cartesiano e *básico* simbólico do elipsoide padrão

Registro cartesiano	**Registro *básico* simbólico**
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ onde a, b e c são números reais positivos.

Fonte: O autor

No decorrer das atividades discutiremos correlações entre os registros do elipsoide padrão. Assim, poderemos incluir outras informações no quadro anterior.

Para realizar as atividades do estudo dos elipsoides padrão com o auxílio do cenário ELIPSOIDE, considere as seguintes informações:

- A designação ELIPSOIDE se refere ao elipsoide na posição padrão;
- a designação PLANO1 se refere *aos planos* paralelos ao plano xy e perpendiculares ao eixo z. Para modificar sua posição basta modificar

os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

Para *visualizarmos* as interseções do elipsoide padrão com planos paralelos aos planos coordenados realize a Atividade 1.[20]

1 Abra o cenário ELIPSOIDE e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) ELIPSOIDE e o PLANO1?
b) ELIPSOIDE e o PLANO2?
c) ELIPSOIDE e o PLANO3?

Respostas:

a) Elipses; ponto; conjunto vazio
b) Elipses; ponto; conjunto vazio
c) Elipses; ponto; conjunto vazio

A.6.1 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos da equação *básica* dos elipsoides padrão que devemos prestar atenção. Nele, apenas para simplificar a comunicação, ao dizermos “termo quadrático com sinal positivo/negativo” queremos dizer que o coeficiente desse termo é positivo/negativo.

Quadro A.7 – Característica algébricas dos termos da equação básica do elipsoide padrão

[20] Na subseção A.6.4 (p. 383) retomaremos o estudo dessas interseções incluindo os aspectos algébricos.

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$	$(+1)$	3 termos quadráticos com sinais iguais e positivos.

Fonte: O autor

Na equação $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ definimos:

- Denominadores dos termos quadráticos $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{b^2}$, $\boldsymbol{c^2}$;
- *raízes quadradas* dos denominadores dos termos quadráticos $\leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Note ainda que na equação do elipsoide padrão não há repetição de variáveis. Adiantamos que isso também acontecerá nas equações das demais quádricas não cilíndricas e não degeneradas padrão.

A.6.2 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A Atividade 2 introduz correlações entre o registro cartesiano e o registro *básico* simbólico dos elipsoides padrão. Antes de realizá-las, esclarecemos que os eixos e semieixos do elipsoide são segmentos de reta enquanto que os eixos coordenados são retas que são orientadas. Também cabe dizer que modificando os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ obviamente modificamos os valores de $\boldsymbol{2a, 2b}$ e $\boldsymbol{2c}$ e de $\boldsymbol{a^2, b^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$.

Atividades

2 Sabemos que a equação básica de um elipsoide padrão é $\boldsymbol{x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1}$. Abra o cenário ELIPSOIDE, modifique livremente os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ (*raízes quadradas* dos denominadores dos termos quadráticos da equação) e, a seguir, conjecture:

a) No registro cartesiano, o que acontece com a medida dos eixos do registro cartesiano do elipsoide quando modificamos os valores das "raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos"?
b) qual a relação entre a medida dos eixos e dos semieixos do elipsoide com $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$? Faça uma representação cartesiana da resposta desse item no Quadro A.6 (p. 379).

Respostas

a) As medidas dos eixos se modificam quando modificamos os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$.
b) Os eixos do elipsoide têm respectivamente medidas $\mathbf{2}\boldsymbol{a}, \mathbf{2}\boldsymbol{b}$ e $\mathbf{2}\boldsymbol{c}$. Os correspondentes semieixos têm as medidas $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$.

A.6.3 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

As atividades seguintes discutem as interseções do elipsoide padrão com os eixos coordenados.

Atividades

3 Abra o cenário ELIPSOIDE, selecione os pontos do cenário ($P_{\mathbf{1}}$, $P'_{\mathbf{1}}$, $P_{\mathbf{2}}$, $P'_{\mathbf{2}}$, $P_{\mathbf{3}}$ e $P'_{\mathbf{3}}$) e o elipsoide, modifique livremente os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$, observe o que acontece com os registros cartesianos e resolva as atividades seguintes.

a) Por conjectura, complete o quadro a seguir com as coordenadas dos pontos de interseção da superfície com os eixos coordenados;

Quadro A.8 – Interseções do elipsoide padrão com os eixos coordenados

Interseção com o eixo $\boldsymbol{x}$	**Interseção com o eixo $\boldsymbol{y}$**	**Interseção com o eixo $\boldsymbol{z}$**

Fonte: O autor

b) acrescente no registro cartesiano do Quadro A.6 (p. 379) as respostas do “item a” desta atividade;

c) prove formalmente as conjecturas do “item a” desta questão.

Comentário: Com a prova formal realizada nesta atividade também pode-se provar as conjecturas da atividade 2.

Atividades de revisão

4 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas.

Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine o registro básico simbólico e faça um esboço do registro cartesiano. Nesse esboço, marque as coordenados dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

a) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2/16 = -z^2 + 1}$
b) $\boldsymbol{x^2/4 = -y^2/9 - z^2/25 + 1}$
c) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0}$
d) $\boldsymbol{x^2/4 + z^2/4 = 1 - y^2}$
e) $\boldsymbol{y^2 + z^2/5 = -x^2 + 1}$

A.6.4 INTERSEÇÕES COM PLANOS

Algebricamente, para o estudo da interseção de uma quádrica de equação E com um dos planos coordenados ou com um dos planos paralelos aos planos coordenados sugerimos o procedimento de "**substituir a equação do plano na correspondente variável de E e, a seguir, fazer simplificações**". Em cada substituição apenas uma entre as equações $\boldsymbol{z = k_1, y = k_2}$, $\boldsymbol{x = k_3}$ deve ser substituída na correspondente variável de E. Quando os objetos determinados são elipses, hipérboles e parábolas (cônicas não degeneradas) sugerimos que as equações estejam na forma básica, pois, assim, reconhecemos de forma imediata as características dos termos das equações. Para simplificar a escrita chamaremos cada uma dessas substituições e as seguidas simplificações de **procedimento** $\boldsymbol{P}$ ou simplesmente $\boldsymbol{P}$. No uso desse procedimento sugerimos que o significado dos aspectos geométricos implícitos sejam analisados.

Como exemplo, faremos o procedimento $\boldsymbol{P}$ entre a equação $\boldsymbol{z = 1}$ (plano paralelo ao plano $\boldsymbol{xy}$) e a equação (E) $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$ (*hiperboloide de uma folha abrindo em* $\boldsymbol{z}$)[21]. Com isso, ficamos com:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{c^2}{c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{c^2} + 1}$$

$$\boldsymbol{\to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2+1}{c^2} \to \frac{x^2}{a^2(c^2+1)/c^2} + \frac{y^2}{b^2(c^2+1)/c^2} = 1}$$

O significado desse procedimento é que a interseção do plano e

[21]Estudaremos os hiperboloides de uma folha na subseção A.8 (p. 410).

da quádrica em questão determina uma elipse que está contida nesse plano. Logo, determinamos uma elipse que é "perpendicular ao eixo $\boldsymbol{z}$" e é "paralela ao plano $\boldsymbol{xy}$". Ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo. De forma análoga, "elipse paralela ao plano $\boldsymbol{\beta}$" quer dizer que o plano que contém essa elipse é paralelo ao plano $\boldsymbol{\beta}$". Essa forma de escrever é apenas para reduzir à escrita.

Feito essa breve revisão, partiremos para as atividades.

Atividades

As atividades seguintes discutem as interseções dos elipsoides padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados dando ênfase ao ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na Atividade 1 (p. 380). Para realizá-las, considere as seguintes **orientações**:

- Sugerimos que o Geogebra seja usado como apoio em toda a atividade;
- em decorrência das dificuldades inerentes ao desenho à mão livre, a cargo do leitor, os registros cartesianos podem ser desenhados ou apenas visualizados no Geogebra;
- sugerimos que os registros em língua natural e simbólicos das cônicas não degeneradas sejam escritos preferencialmente na forma básica.

5 Considerando que o elipsoide tem como registro básico simbólico $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$, complete os quadros seguintes. Esses quadros devem registrar apenas as respostas e os cálculos devem ser feitos em outro local.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.9 – Interseções do elipsoide padrão com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xy}$**	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xz}$**	**Interseção com plano $\boldsymbol{yz}$**

Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Se $\boldsymbol{a > b}$, elipse alongada em $\boldsymbol{x}$; se $\boldsymbol{b > a}$ elipse alongada em $\boldsymbol{y}$; se $\boldsymbol{a = b}$ circunferência com $\boldsymbol{R = a = b}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{z = 0}$.	**Resposta:** Se $\boldsymbol{a > c}$, elipse alongada em $\boldsymbol{x}$; se $\boldsymbol{c > a}$ elipse alongada em $\boldsymbol{z}$; se $\boldsymbol{a = c}$ circunferência com $\boldsymbol{R = a = c}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{y = 0}$.	**Resposta:** Se $\boldsymbol{b > c}$, elipse alongada em $\boldsymbol{y}$; se $\boldsymbol{c > b}$ elipse alongada em $\boldsymbol{z}$; se $\boldsymbol{b = c}$ circunferência com $\boldsymbol{R = b = c}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{x = 0}$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$

Fonte: O autor

b) interseções com planos de equação $\boldsymbol{z = k_1; k_1 \neq 0}$;[22]

Quadro A.10 – Interseções do elipsoide padrão com os planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$

Condição[23]	Se $\boldsymbol{k_1 = c}$ ou $\boldsymbol{k_1 = -c}$	Se $\boldsymbol{k_1 > c}$ ou $\boldsymbol{k_1 < -c}$	Se $\boldsymbol{-c < k_1 < c}$
Registro cartesiano			

[22]Nesse momento o caso em que os planos paralelos coincidem com os planos coordenados não estão sendo considerados, pois eles são os que vimos no "item a". Por isso, $\boldsymbol{k_1 \neq 0}$.

[23]Cabe lembrar que definimos $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ como números positivos. Assim, $\boldsymbol{-a, -b}$ e $\boldsymbol{-c}$ são números negativos.

Registro em língua natural[24]	**Resposta:** Cônicas degeneradas (pontos)	**Resposta:** Cônica degenerada (conjunto vazio)	**Resposta:** Se $\boldsymbol{a > b}$, elipses alongadas em $\boldsymbol{x'}$; se $\boldsymbol{b > a}$ elipses alongadas $\boldsymbol{y'}$; se $\boldsymbol{a = b}$ circunferências com $\boldsymbol{R = a = b}$, $\boldsymbol{C(0, 0, k_1)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se aproximam da origem.
Registro simbólico	**Resposta:** $\boldsymbol{(0; 0; c)}$ ou $\boldsymbol{(0; 0; -c)}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\phi}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{x^2}{a^2(c^2-k_1^2)/c^2} + \frac{y^2}{b^2(c^2-k_1^2)/c^2} = 1 \end{cases}}$

Fonte: O autor

c) interseções com planos de equação $\boldsymbol{y = k_2; k_2 \neq 0}$;

Quadro A.11 – Interseções do elipsoide padrão com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$

Condição	Se $\boldsymbol{k_2 = b}$ ou $\boldsymbol{k_2 = -b}$	Se $\boldsymbol{k_2 > b}$ ou $\boldsymbol{k_2 < -b}$	Se $\boldsymbol{-b < k_2 < b}$
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônicas degeneradas (pontos)	**Resposta:** Cônica degenerada (conjunto vazio)	**Resposta:** Se $\boldsymbol{a > c}$, elipses alongadas em $\boldsymbol{x'}$; se $\boldsymbol{c > a}$ elipses alongadas $\boldsymbol{z'}$; se a=c circunferências com $\boldsymbol{R = a = c}$, $\boldsymbol{C(0, k_2, 0)}$ e contidas no plano de equação $\boldsymbol{y = k_2}$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se aproximam da origem.

[24]Convencionaremos que os eixos $\boldsymbol{x'}$,$\boldsymbol{y'}$e $\boldsymbol{z'}$ são respectivamente paralelos aos eixos $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$. Em nosso estudo definiremos que eixos coincidentes são paralelos.

Registro simbólico	**Resposta:** $(\boldsymbol{0; b; 0})$ ou $(\boldsymbol{0; -b; 0})$	**Resposta:** $\boldsymbol{\phi}$	**Resposta:** $\begin{cases} \boldsymbol{y = k_2} \\ \boldsymbol{\frac{x^2}{a^2(b^2-k_2^2)/b^2} + \frac{z^2}{c^2(b^2-k_2^2)/b^2} =} \end{cases}$

Fonte: O autor

d) interseções com planos de equação $\boldsymbol{x = k_3; k_3 \neq 0;}$

Quadro A.12 – Interseções do elipsoide padrão com os planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$

Condição	Se $\boldsymbol{k_3 = c}$ ou $\boldsymbol{k_3 = -c}$	Se $\boldsymbol{k_3 > c}$ ou $\boldsymbol{k_3 < -c}$	Se $\boldsymbol{-c < k_3 < c}$
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônicas degeneradas (pontos)	**Resposta:** Cônica degenerada (conjunto vazio)	**Resposta:** Se $\boldsymbol{b > c}$, elipses alongadas em $\boldsymbol{y'}$; se $\boldsymbol{c > b}$ elipses alongadas $\boldsymbol{z'}$; se $\boldsymbol{b = c}$ circunferências com $\boldsymbol{R = b = c}$, $\boldsymbol{C(k_3, 0, 0)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se aproximam da origem.
Registro simbólico	**Resposta:** $(\boldsymbol{a; 0; 0})$ ou $(\boldsymbol{-a; 0; 0})$	**Resposta:** $\boldsymbol{\phi}$	**Resposta:** $\begin{cases} \boldsymbol{x = k_3} \\ \boldsymbol{\frac{y^2}{b^2(a^2-k_3^2)/a^2} + \frac{z^2}{c^2(a^2-k_3^2)/a^2} = 1} \end{cases}$

Fonte: O autor

A.6.5 TIPOS DE ELIPSOIDES

As atividades 6, 7, 8, 9 e 10 introduzem os tipos de elipsoides. Nelas, considere apenas as posições padrão

Atividades

6 Abra o cenário ELIPSOIDE e selecione a quádrica registrada como ELIPSOIDE. Modifique os valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e *visualize* os eixos e os semieixos do registro cartesiano do elipsoide de forma a fazer com que as modificações proporcionem as seguintes situações:

a) Os três eixos (e semieixos) tenham medidas diferentes;
b) os eixos tenham medidas iguais (chamaremos este tipo de elipsoide de *superfície esférica*);
c) dois eixos tenham mesma medida e o terceiro tenha medida maior que os outros dois (chamaremos este tipo de elipsoide de *esferoide alongado*);
d) dois eixos tenham mesma medida e o terceiro tenha medida menor que os outros dois (chamaremos este tipo de elipsoide de *esferoide achatado*).

Comentário: Nesta atividade diferenciamos os quatro tipos de elipsoides. No primeiro caso (eixos com medidas diferentes) usaremos os termos eixos maior, médio e menor para os eixos do elipsoide. No segundo (superfície esférica) os eixos e semieixos serão chamados respectivamente de diâmetro e raio. No terceiro caso (esferoide alongado) os dois eixos iguais serão chamados de eixos menores e o outro eixo será chamado de eixo maior. No quarto caso (esferoide achatado) os dois eixos iguais serão chamados de eixos maiores e o outro eixo será chamado de eixo menor.

Atividades

7 Sabemos que a equação básica de um elipsoide padrão é $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$. Discuta qual é a relação entre os denominadores dos termos quadráticos da equação ($\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{b^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$) para que o elipsoide:

a) Tenha os três eixos com medidas diferentes;
b) seja do tipo superfície esférica;
c) seja do tipo esferoide alongado;
d) seja do tipo esferoide achatado.

Respostas:

a) Os denominadores dos três termos quadráticos ($\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{b^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$) ou obviamente as raízes quadradas deles ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$) são diferentes.
b) Os denominadores dos três termos quadráticos ($\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{b^2}$ e $\boldsymbol{c^2}$) são iguais.
c) Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois.
d) Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois.

8 Nos casos em que o elipsoide tem os três eixos com medidas diferentes, usamos a nomenclatura eixos maior, médio e menor. Quando se trata de um elipsoide padrão que está no sistema cartesiano $\boldsymbol{xyz}$, seus três eixos (maior, médio e menor) estão contidos nos eixos $\boldsymbol{x, y}$ ou $\boldsymbol{z}$ de diferentes maneiras. Como exemplo, os eixos maior, médio e menor podem estar contidos respectivamente nos eixos $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$. Porém, há outras possibilidades. Recorrendo a Análise Combinatória ou ao cenário ELIPSOIDE, quantas são, no total, as possibilidades de elipsoides desse tipo?

Resposta:

São 6 possibilidades. Podemos entender esse número pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Conforme sabemos, na posição padrão o eixo maior pode estar em três posições (contido no eixo $\boldsymbol{x, y}$ ou $\boldsymbol{z}$). Escolhido uma dessas possibilidades, o eixo médio tem duas possibilidades e, consequentemente, o eixo menor tem apenas a possibilidade restante. Logo, pelo PFC, são $\mathbf{3.2.1 = 6}$ possibilidades. O quadro a seguir sintetiza essas possibilidades.

Quadro A.13 – Diferentes casos de elipsoides com os três eixos com medidas diferentes (*elipsoides em* $\boldsymbol{\alpha}$ *e* $\boldsymbol{\beta}$)

Registros básicos em língua natural	**O eixo maior está contido no**	**O eixo médio está contido no**	**O eixo menor está contido no**
Elipsoide em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixo $\boldsymbol{z}$
Elipsoide em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$.	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixo $\boldsymbol{y}$
Elipsoide em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$.	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixo $\boldsymbol{z}$
Elipsoide em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$.	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixo $\boldsymbol{x}$
Elipsoide em $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}$.	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixo $\boldsymbol{y}$
Elipsoide em $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$.	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixo $\boldsymbol{x}$

Fonte: O autor

9 Entre as possibilidades de *esferoides alongados* uma delas possui as seguintes características: os dois eixos menores (e com mesma medida) estão contidos nos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$; o eixo maior está contido no eixo $\boldsymbol{z}$. Porém, há outras possibilidades. Quantas são, no total, as possibilidades de elipsoides alongados?

Resposta:

São 3 possibilidades que estão resumidas no quadro a seguir.

Quadro A.14 – Diferentes casos de elipsoides com dois eixos com medidas iguais e um com medida diferente e maior (*esferoide alongado em* $\boldsymbol{\alpha}$)

Registros básicos em língua natural	**O eixo maior está contido no**	**Os eixos iguais estão contidos no**
Esferoide alongado em $\boldsymbol{x}$.	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$
Esferoide alongado em $\boldsymbol{y}$.	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$
Esferoide alongado em $\boldsymbol{z}$.	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

Fonte: O autor

10 Entre as possibilidades de *esferoides achatados* uma delas possui as seguintes características: os dois eixos maiores (e com mesma medida) estão contidos nos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$; o eixo menor está contido no eixo $\boldsymbol{z}$. Porém, há outras possibilidades. QQuantas são, no total, as possibilidades de elipsoides achatados?

Resposta:

São 3 possibilidades que estão resumidas no quadro a seguir.

Quadro A.15 – Diferentes casos de elipsoides com dois eixos com medidas iguais e um com medida diferente e menor (*esferoide achatado em* $\boldsymbol{\alpha}$)

Registros básicos em língua natural	**O eixo menor está contido no**	**Os eixos iguais estão contidos no**
Esferoide achatado em $\boldsymbol{x}$.	Eixo $\boldsymbol{x}$	Eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$
Esferoide achatado em $\boldsymbol{y}$.	Eixo $\boldsymbol{y}$	Eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$
Esferoide achatado em $\boldsymbol{z}$.	Eixo $\boldsymbol{z}$	Eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

Fonte: O autor

A.6.5.1 TIPOS DE ELIPSOIDES: SÍNTESES, DEFINIÇÕES E CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

Nas sínteses a seguir considere o sistema cartesiano $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}$. Nele, os eixos coordenados são os eixos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$.

A.6.5.1.1 ELIPSOIDES EM $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$

Nos casos em que os três eixos do elipsoide têm medidas diferentes usaremos o registro básico em língua natural do quadro a seguir:

Quadro A.16 – Registro *básico* em língua natural do *elipsoide em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$*

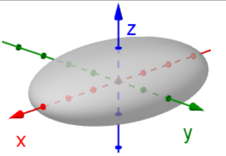
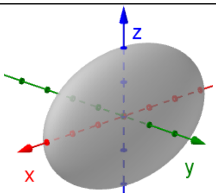
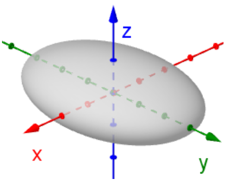
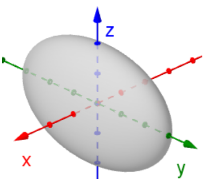
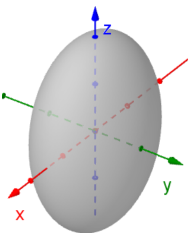
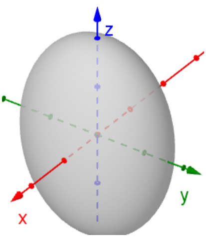
Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas da equação básica**
Elipsoide em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$	- Os três eixos (maior, menor e médio) têm medidas diferentes; - o eixo maior está contido no eixo $\boldsymbol{\alpha}$, o eixo médio está contido no eixo $\boldsymbol{\beta}$ e obviamente o eixo menor está contido no terceiro eixo coordenado (eixo $\boldsymbol{\gamma}$).	- Os denominadores dos três termos quadráticos são diferentes; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável $\boldsymbol{\alpha^2}$, o médio está sobre $\boldsymbol{\beta^2}$ e o menor está sobre a outra variável quadrática (variável $\boldsymbol{\gamma^2}$).

Fonte: O autor

Diante da definição anterior temos as seguintes possibilidades de elipsoide em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ no sistema cartesiano $\boldsymbol{xyz}$:

Quadro A.17 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de *elipsoides em $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$*

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**

	Elipsoide em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $a>b>c$.
	Elipsoide em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $a>c>b$.
	Elipsoide em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $b>a>c$.
	Elipsoide em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $b>c>a$.
	Elipsoide em $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $c>a>b$.
	Elipsoide em $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a\neq b\neq c}$; $c>b>a$.

Fonte: O autor

A.6.5.1.2 SUPERFÍCIE ESFÉRICA COM $\boldsymbol{R = R_0}$

Para os elipsoides que têm os eixos com medidas iguais usaremos registro básico em língua natural do quadro a seguir:

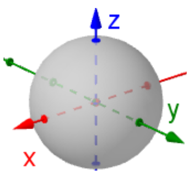
Quadro A.18 – Registro *básico* em língua natural da *superfície esférica com* $\boldsymbol{R = R_0}$

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas da equação básica**
Superfície esférica com $\boldsymbol{R = R_0}$	- Os eixos têm medidas iguais; - medida do raio $\boldsymbol{R}$ é $\boldsymbol{R_0}$. **Comentário:** Os eixos são chamados de diâmetro e os semieixos são chamados de raio.	- Os denominadores dos três termos quadráticos são iguais; - o denominador de cada termo quadrático é numericamente igual ao quadrado da medida do raio.

Fonte: O autor

Diante da definição anterior temos a seguinte possibilidade de superfície esférica com $\boldsymbol{R = R_0}$ no sistema cartesiano $\boldsymbol{xyz}$:

Quadro A.19 – Correspondentes registros do elipsoide padrão que têm os eixos com medidas iguais (*superfície esférica com* $\boldsymbol{R = R_0}$)

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Superfície esférica com $\boldsymbol{R = R_0}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Denominadores: $\boldsymbol{a = b = c = R}$.

Fonte: O autor

A.6.5.1.3 ESFEROIDE ALONGADO EM $\boldsymbol{\alpha}$

Nos casos em que temos um *esferoide alongado* (dois eixos têm medidas iguais e o terceiro tem medida maior que os outros) usaremos o registro básico em língua natural do quadro a seguir:

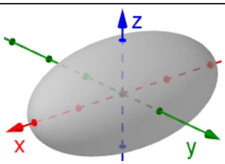
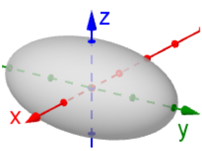
Quadro A.20 – Registro *básico* em língua natural dos *esferoide alongado em* $\boldsymbol{\alpha}$

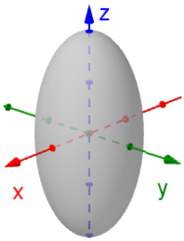
Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas da equação básica**
Esferoide alongado em $\boldsymbol{\alpha}$.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida maior que os outros dois; - o eixo maior está contido no eixo $\boldsymbol{\alpha}$.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é maior que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o maior denominador está sobre a variável $\boldsymbol{\alpha^2}$.

Fonte: O autor

Diante da definição anterior temos as seguintes possibilidades de *esferoide alongado em* $\boldsymbol{\alpha}$ no sistema cartesiano $\boldsymbol{xyz}$:

Quadro A.21 – Correspondentes registros dos diferentes tipos de *esferoides alongados em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Esferoide alongado em $\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{a \neq b = c}$; $a>b=c$.
	Esferoide alongado em $\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ Denominadores: $\boldsymbol{b \neq a = c}$; $b>a=c$.

	Esferoide alongado em z	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $c \neq a = b$; $c>a=b$.

Fonte: O autor

A.6.5.1.4 ESFEROIDE ACHATADO EM α

Nos casos em que temos um *esferoide achatado* (dois eixos têm medidas iguais e o terceiro tem medida menor que os outros) usaremos o registro básico em língua natural do quadro a seguir:

Quadro A.22 – Registro *básico* em língua natural do *esferoide achatado em α*

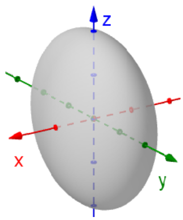
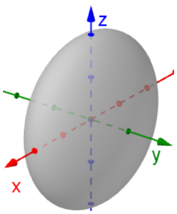
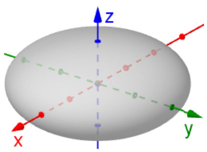
Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas da equação básica**
Esferoide achatado em α.	- Dois eixos têm medidas iguais e o terceiro eixo tem medida menor que os outros dois; - o eixo menor está contido no eixo α.	- Entre os três denominadores dos termos quadráticos, dois são iguais e o terceiro é menor que os outros dois; - entre os três termos quadráticos o menor denominador está sobre a variável α^2.

Fonte: O autor

Diante dessa definição anterior temos as seguintes possibilidades de *esferoide achatado em α* no sistema cartesiano xyz:

Quadro A.23 – Correspondentes registros dos *esferoides achatados em α*

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**

	Esferoide achatado em x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $a \neq b = c$; $a<b=c$.
	Esferoide achatado em y	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $b \neq a = c$; $b<a=c$.
	Esferoide achatado em z	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Denominadores: $c \neq a = b$; $c<a=b$.

Fonte: O autor

Comentário: Para diferenciar algebricamente os tipos de elipsoides podemos analisar tanto os valores de a^2, b^2 e c^2 (os denominadores dos termos quadráticos) quanto os de a, b e c (as raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos). Já as medidas dos eixos são numericamente iguais a $2a$, $2b$ e $2c$ (o *dobro das raízes quadradas* dos denominadores dos termos quadráticos) e dos semieixos são numericamente iguais a a, b e c.

Atividade resolvida

Como exemplo que discute os diferentes tipos de elipsoides, considere o que tem equação $x^2/4 + y^2/9 + z^2/4 = 1$. Qual dos tipos anteriores ele é?

Resolução:

Os denominadores dos três termos quadráticos são $4, 4$ e 9. Comparando seus valores é fácil ver que dois deles são iguais ($4 = 4$) e o terceiro (9) é maior que os outros dois. Logo, trata-se de um esferoide alongado. Como o maior denominador está sobre a variável $\boldsymbol{y^2}$ concluímos que é um *esferoide alongado em* $\boldsymbol{y}$. Em termos gráficos, os eixos menores do elipsoide estão sobre os eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ e o eixo maior está sobre o eixo $\boldsymbol{y}$. As medidas dos eixos menores e do eixo maior são respectivamente iguais a $\boldsymbol{\sqrt{4} = 2}$ e $\boldsymbol{\sqrt{9} = 3}$ unidades de comprimento. Assim, podemos ter um esboço do registro cartesiano.

Atividades de revisão

11 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine os registros básico simbólico, básico em língua natural e faça um esboço do registro cartesiano. Nesse esboço, marque as coordenados dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

a) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2/16 = -z^2 + 1}$
b) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0}$
c) $\boldsymbol{x^2/4 + z^2/4 = 1 - y^2}$
d) $\boldsymbol{y^2 + z^2/5 = -x^2 + 1}$
e) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = -z^2 + 9}$
f) $\boldsymbol{x^2/9 + y^2/4 + z^2 - 1 = 0}$
g) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2 + z^2 = 1}$
h) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2/4 = 1 - z^2}$

Respostas:[25]

a) Elipsoide em $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$
b) Superfície esférica com $\boldsymbol{R = \sqrt{3}}$
c) Esferoide achatado em $\boldsymbol{y}$
d) Esferoide alongado em $\boldsymbol{z}$
e) Superfície esférica com $\boldsymbol{R = 3}$
f) Elipsoide em $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$
g) Esferoide alongado em $\boldsymbol{x}$
h) Esferoide achatado em $\boldsymbol{z}$

Comentários: A superfície esférica é um tipo de elipsoide que tem os três eixos com medidas iguais, o que equivale algebricamente a $\boldsymbol{a = b = c = R}$. Assim, equação básica da superfície esférica na posição padrão pode ser expressa da seguinte forma:

[25] As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1\longrightarrow\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1}$$

(Equação básica)

Para efeitos de cálculos, podemos escrever a equação básica com os termos quadráticos tendo coeficientes iguais a 1 e assim obtermos a seguinte equação alternativa:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1\longrightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}=\frac{R^2}{R^2}\longrightarrow x^2+y^2+z^2=R^2}$$

(Equação alternativa)

É simples verificar que para determinar a medida do raio a partir de $\boldsymbol{x^2/R^2+y^2/R^2+z^2/R^2=1}$ basta extrairmos a raiz quadrada de um dos denominadores dos termos quadráticos. Para determinar a medida do raio a partir de $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=R^2}$ basta extrairmos a raiz quadrada do termo do segundo membro da equação. Em ambos os casos é imediato determinar a medida do raio.

Atividades

12 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine a medida do raio e faça um esboço do registro cartesiano.

a) $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=25}$
b) $\boldsymbol{x^2/100+y^2/100+z^2/100=1}$
c) $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=49}$
d) $\boldsymbol{x^2/81+y^2/81+z^2/81=1}$

Respostas:[26]

a) $\boldsymbol{R=5}$
b) $\boldsymbol{R=10}$
c) $\boldsymbol{R=7}$
d) $\boldsymbol{R=9}$

[26] As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

A.7 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA PADRÃO

No estudo do hiperboloide de uma folha padrão inicialmente daremos ênfase à introdução dos aspectos visuais, cartesianos e linguísticos sem se ater aos aspectos algébricos. Aos poucos incluiremos as questões algébricas e as correlações entre os diferentes tipos de registros. Essa estratégia também será usada para os hiperboloides de duas folhas, os cones quádricos elípticos e os paraboloides elípticos. A figura a seguir apresenta um registro visual do hiperboloide de uma folha.

Figura 92 – Registro figural do hiperboloide de uma folha

Fonte: O autor

A.7.1 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos dos hiperboloides de uma folha padrão. Para realizá-las com o auxílio do cenário HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA, considere as seguintes informações:

- As designações $\mathrm{H}_\mathbf{1}$, $\mathrm{H}_\mathbf{2}$ e $\mathrm{H}_\mathbf{3}$ se referem aos três tipos de hiperboloides de uma folha padrão;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

1 Abra o cenário HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) $H_{\mathbf{1}}$ e o PLANO1?
b) $H_{\mathbf{1}}$ e o PLANO2?
c) $H_{\mathbf{1}}$ e o PLANO3?
d) $H_{\mathbf{2}}$ e o PLANO1?
e) $H_{\mathbf{2}}$ e o PLANO2?
f) $H_{\mathbf{2}}$ e o PLANO3?
g) $H_{\mathbf{3}}$ e o PLANO1?
h) $H_{\mathbf{3}}$ e o PLANO2?
i) $H_{\mathbf{3}}$ e o PLANO3?

Respostas:

a) Elipses
b) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$ ou em $\boldsymbol{x'}$; retas concorrentes
c) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$ ou em $\boldsymbol{y'}$; retas concorrentes
d) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$ ou em $\boldsymbol{x'}$; retas concorrentes
e) Elipses
f) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$ ou em $\boldsymbol{z'}$; retas concorrentes
g) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$ ou em $\boldsymbol{y'}$; retas concorrentes
h) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$ ou em $\boldsymbol{z'}$; retas concorrentes
i) Elipses

2 Sabemos que as interseções dos hiperboloides de uma folha padrão com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam elipses. A partir do cenário HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA, conjecture:

a) O que acontece visualmente com essas elipses à medida que elas se afastam da origem?
b) qual a diferença visual entre a posição das elipses determinadas em $H_{\mathbf{1}}$, $H_{\mathbf{2}}$ e $H_{\mathbf{3}}$?

A.7.2 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Inicialmente definimos que ao dizermos "elipse perpendicular ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$" queremos dizer que o plano que contém essa elipse é perpendicular a esse eixo. Essa forma de escrever é apenas para facilitar nossa comunicação.

Dito isso, note que para os hiperboloides de uma folha padrão visualmente é significativo o fato de que as interseções dessas quádricas com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses perpendiculares a esse eixo" que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas se afastam da origem. Chamaremos essas cônicas de "elipses com eixos aumentando" e, com elas, temos a impressão de que os hiperboloides estão abrindo.[27] A partir da posição dessas elipses usaremos os registros em língua natural do quadro a seguir:

Quadro A.24 – Registros *básicos* em língua natural dos hiperboloides de uma folha padrão

Registros básicos em língua natural	**Característica visual**
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$.
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$.
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$.

Fonte: O autor

Diante das definições do quadro anterior, no sistema cartesiano podemos diferenciar e reconhecer a posição dos três hiperboloides de uma folha padrão tendo como base o eixo coordenado que as "elipses com eixos aumentando são perpendiculares".[28]

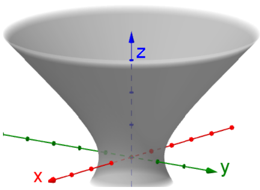
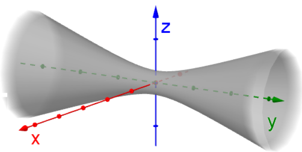
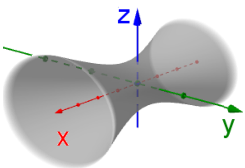
[27] De maneira análoga, também diremos que os hiperboloides de duas folhas, os cones quádricos elípticos e os paraboloides elípticos nas posições padrão estão abrindo.

[28] Nas interseções do hiperboloide com planos oblíquos a um dos eixos coordenados pode-se obter elipses que aumentam o tamanho de seus eixos. Porém, para os hiperboloides padrão e transladados usaremos a expressão "elipses com eixos aumentando" apenas para as interseções perpendiculares a um dos eixos coordenados. Para as quádricas que estão na posição rotacionada essa expressão será usada apenas para as elipses obtidas nas interseções com planos perpendiculares a um dos eixos de simetria da quádrica. A opção em dar um termo específico essas elipses deve-se ao fato de que com elas podemos diferenciar as posições dos hiperboloides.

A.7.3 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos três tipos de hiperboloides de uma folha padrão. Na subseção A.7.5 (p. 403) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro A.25 – Correspondentes registros dos *hiperboloide de uma folha abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$.	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$
	Hiperboloide de uma. folha abrindo em $\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$
	Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$.	$\boldsymbol{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$

Fonte: O autor

A.7.4 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equação *básicas* dos hiperboloides de uma folha padrão.

Trata-se, contudo, de mero recurso didática.

No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro A.26 – Característica algébricas dos termos da equação básica do hiperboloide de uma folha padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$ $\boldsymbol{-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$	$(+1)$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com **sinal diferente** e negativo.

Fonte: O autor

A.7.5 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

3 Já discutimos que para os hiperboloides de uma folha padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o Quadro A.25 (p. 402) e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos três eixos coordenados às citadas elipses com eixos aumentando são perpendiculares?

Respostas:

Entre as três variáveis quadráticas, primeiro é necessário identificar qual tem coeficiente com sinal diferente das outras duas. Se essa variável for $\boldsymbol{\alpha}$, então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$. Assim, diremos *hiperboloide de uma folha abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$.

A.7.5.1 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS: SÍNTESES E DEFINIÇÕES

Nas equações do Quadro A.25 (p. 402) é importante reconhecer qual dos termos quadráticos possui sinal diferente. Com isso, podemos fazer as seguintes correlações entre registros cartesianos, básicos em língua natural e básicos simbólicos.[29]

Quadro A.27 – Correspondentes registros do *hiperboloide de uma folha abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas das equações básicas**
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{z}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{z^2}$.
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{y}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{y^2}$.
Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{x}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{x^2}$.

Fonte: O autor

Sugerimos que os conteúdos desse quadro sejam conferidos no Quadro A.25 (p. 402).

A.7.6 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

As atividades seguintes discutem as interseções com os eixos coordenados.

Atividades

4 Abra o cenário HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA e resolva as atividades seguintes.

a) Selecione os pontos do cenário ($\mathrm{P}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{P}'_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{P}_{\mathbf{2}}$, $\mathrm{P}'_{\mathbf{2}}$, $\mathrm{P}_{\mathbf{3}}$ e $\mathrm{P}'_{\mathbf{3}}$) e o hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$ ($\mathrm{H}_{\mathbf{1}}$), de equação $\boldsymbol{x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1}$. Modifique os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$, observe

[29] Analisaremos mais formalmente os conteúdos desse quadro nas Atividades de aprofundamento da página 436.

o que acontece com os registros cartesianos e, por conjectura, complete o quadro a seguir com as coordenadas dos pontos de interseção da superfície com os eixos coordenados;

Quadro A.28 – Interseções de H_1 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

b) faça o mesmo para o hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{y}$ (H_2), de equação $\boldsymbol{x^2/a^2 - y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$;

Quadro A.29 – Interseções de H_2 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

c) faça o mesmo para o hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{H_3}$), de equação $\boldsymbol{-x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$;

Quadro A.30 – Interseções de H_3 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

d) prove formalmente o “item a” desta atividade.

Observação: note que nos casos em que o termo quadrático da equação básica tem coeficiente negativo à interseção com correspondente eixo é vazia.

Atividades de revisão

5 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine os

registros básico simbólico, básico em língua natural e faça um esboço do registro cartesiano. Nesse esboço, marque as coordenados dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

a)$\boldsymbol{x^2/4 + y^2/16 = z^2 + 1}$
b) $\boldsymbol{x^2 - y^2 + z^2 - 3 = 0}$
c) $\boldsymbol{-x^2/4 + z^2/4 = 1 - y^2}$
d) $\boldsymbol{y^2 + z^2/5 = x^2 + 1}$
e) $\boldsymbol{x^2 - y^2 = -z^2 + 9}$
f) $\boldsymbol{x^2/9 + y^2/4 - z^2 - 1 = 0}$
g) no item "a" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.27 (p. 404) dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
h) no item "b" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.27 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
i) no item "c" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.27 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta.

Respostas:[30]

a) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2/16 - z^2 = 1}$. Hiperboloide de uma folha (H1F) abrindo em $\boldsymbol{z}$.
b) $\boldsymbol{x^2/3 - y^2/3 + z^2/3 = 1}$. H1F abrindo em $\boldsymbol{y}$.
c) $\boldsymbol{-x^2/4 + z^2/4 + y^2 = 1}$. H1F abrindo em $\boldsymbol{x}$.
d) $\boldsymbol{-x^2 + y^2 + z^2/5 = 1}$. H1F abrindo em $\boldsymbol{x}$.
e) $\boldsymbol{x^2/9 - y^2/9 + z^2/9 = 1}$. H1F abrindo em $\boldsymbol{y}$.
f) $\boldsymbol{x^2/9 + y^2/4 - z^2 = 1}$. H1F abrindo em $\boldsymbol{z}$.

A.7.6.1 INTERSEÇÕES COM PLANOS

As atividades seguintes, que devem ser realizadas segundo as **orientações** da Atividade 5 da página 384, discutem as interseções dos hiperboloides de uma folha padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados do ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na

[30]As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

Atividade 1 (p. 399).

Atividades

6 Considere o hiperboloide de uma folha abrindo em z que tem como registro básico simbólico $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$. Com relação a ele, complete os quadros seguintes.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.31 – Interseções do hiperboloide de uma folha abrindo em z com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com plano yz**
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Se $a > b$, elipse alongada em x; se $b > a$ elipse alongada em y; se $a = b$ circunferência com $R = a = b$ e contida no plano de equação $z = 0$.	**Resposta:** Hipérbole abrindo em x e contida no plano de equação $y = 0$.	**Resposta:** Hipérbole abrindo em y e contida no plano de equação $x = 0$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$

Fonte: O autor

b) interseções com planos de equação $z = k_1; k_1 \neq 0$;

Quadro A.32 – Interseções do hiperboloide de uma folha abrindo em z com os planos de equação $z = k_1; k_1 \neq 0$

Tipo de registro	Interseção com planos de equação $z = k_1$
Registro cartesiano	
Registro em língua natural	**Resposta:** Se $a > b$, elipses alongadas em x'; se $b > a$ elipses alongadas y'; se $a = b$ circunferências com $R = a = b$, $C(0, 0, k_1)$ e contidas nos planos de equação $z = k_1$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se afastam da origem.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{x^2}{a^2(c^2+k_1^2)/c^2} - \frac{y^2}{b^2(c^2+k_1^2)/c^2} = 1 \end{cases}$

Fonte: O autor

c) interseções com planos de equação $y = k_2; k_2 \neq 0$;

Quadro A.33 – Interseções do hiperboloide de uma folha abrindo em z com os planos de equação $y = k_2$

Condição	Se $k_2 = b$ ou $k_2 = -b$	Se $k_2 > b$ ou $k_2 < -b$	Se $-b < k_2 < b$
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônicas degeneradas (retas concorrentes) contidas nos planos de equação $y = k_2$.	**Resposta:** Hipérboles abrindo em z', $C(0, k_2, 0)$ e contidas nos planos de equação $y = k_2$.	**Resposta:** Hipérboles abrindo em x', $C(0, k_2, 0)$ e contidas nos planos de equação $y = k_2$.

Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} y = k_2 \\ z = \pm\frac{c}{a}x \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} y = k_2 \\ \frac{x^2}{a^2(b^2-k_2^2)/b^2} - \frac{z^2}{c^2(b^2-k_2^2)/b^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** É a mesma equação da hipérbole ao lado.

Fonte: O autor

d) interseções com planos de equação $x = k_3; k_3 \neq 0$;

Quadro A.34 – Interseções do hiperboloide de uma folha abrindo em z com os planos de equação $x = k_3$

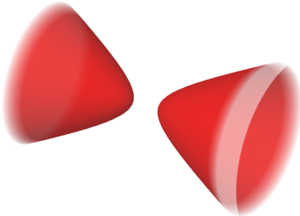
Condição	Se $k_3 = c$ ou $k_3 = -c$	Se $k_3 > c$ ou $k_3 < -c$	Se $-c < k_3 < c$
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônicas degeneradas (retas concorrentes contidas nos planos de equação $x = k_3$).	**Resposta:** Hipérboles abrindo em z', $C(k_3, 0, 0)$ e contidas nos planos de equação $x = k_3$.	**Resposta:** Hipérboles abrindo em y', $C(k_3, 0, 0)$ e contidas nos planos de equação $x = k_3$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} x = k_3 \\ z = \pm\frac{c}{b}y \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = k_3 \\ \frac{y^2}{b^2(a^2-k_3^2)/a^2} - \frac{z^2}{c^2(a^2-k_3^2)/a^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** É a mesma equação da hipérbole ao lado.

Fonte: O autor

A.8 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS PADRÃO

A figura a seguir apresenta um registro visual do hiperboloide de duas folhas.

Figura 93 – Registro figural do hiperboloide de duas folhas



Fonte: O autor

A.8.1 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos dos hiperboloides de duas folhas padrão. Para realizá-las com o auxílio do cenário HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS, considere as seguintes informações:

- As designações $\mathrm{H}_{\mathbf{1}}$, $\mathrm{H}_{\mathbf{2}}$ e $\mathrm{H}_{\mathbf{3}}$ se referem aos três tipos de hiperboloides de duas folhas padrão;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

1 Abra o cenário HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) $\mathrm{H}_{\mathbf{1}}$ e o PLANO1?
b) $\mathrm{H}_{\mathbf{1}}$ e o PLANO2?
c) $\mathrm{H}_{\mathbf{1}}$ e o PLANO3?
d) $\mathrm{H}_{\mathbf{2}}$ e o PLANO1?
e) $\mathrm{H}_{\mathbf{2}}$ e o PLANO2?

f) $\mathbf{H_2}$ e o PLANO3?
g) $\mathbf{H_3}$ e o PLANO1?
h) $\mathbf{H_3}$ e o PLANO2?
i) $\mathbf{H_3}$ e o PLANO3?

Respostas:

a) Elipses; pontos; conjunto vazio
b) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$
c) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$
d) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$
e) Elipses; pontos; conjunto vazio
f) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$
g) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$
h) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$
i) Elipses; pontos; conjunto vazio

A.8.2 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Para os os hiperboloides de *uma* folha padrão vimos, na subseção A.7.2 (p. 401), que as interseções dessas quádricas com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses com eixos aumentando perpendiculares" a esse eixo. De forma semelhante, no caso dos hiperboloides de *duas* folhas padrão as interseções com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses com eixos aumentando perpendiculares" a esse eixo ou cônicas degeneradas (conjunto vazio ou pontos). Dito isso, usaremos os registros *básicos* em língua natural do quadro seguinte.

Quadro A.35 – Registros *básicos* em língua natural dos hiperboloides de duas folhas padrão

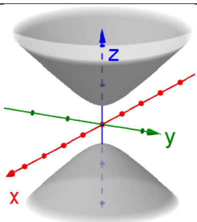
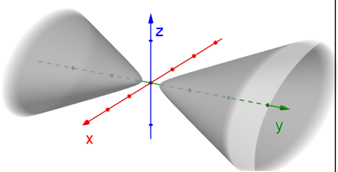
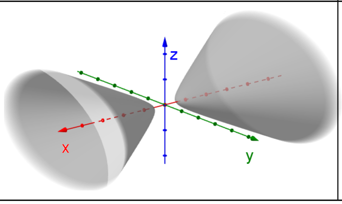
Registros básicos em língua natural	**Característica visual**
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$.

Fonte: O autor

A.8.3 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos três tipos de hiperboloides de duas folhas padrão. Na subseção A.8.5 (p. 413) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro A.36 – Correspondentes registros dos *hiperboloides de duas folhas abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{z}$.	$-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{1}$
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$.	$-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}-\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{1}$
	Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{x}$.	$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}-\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{1}$

Fonte: O autor

A.8.4 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equações *básicas* dos hiperboloides de duas folhas padrão. No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro A.37 – Característica algébricas dos termos da equação básica do hiperboloide de duas folhas padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$(+1)$	3 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e negativos e 1 com **sinal diferente** e positivo.

Fonte: O autor

A.8.5 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

2 Já discutimos que para os hiperboloides de duas folhas padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o Quadro A.36 (p. 412) e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos três eixos coordenados as citadas elipses com eixos aumentando são perpendiculares?

Resposta:

Entre as três variáveis quadráticas, primeiro é necessário identificar qual tem coeficiente com sinal diferente das outras duas. Se essa variável for $\boldsymbol{\alpha}$, então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$. Assim, diremos *hiperboloide de duas folhas abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$.

A.8.5.1 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS: SÍNTESES E DEFINIÇÕES

A seguir estão algumas correlações entre os registros cartesianos, básicos em língua natural e básicos simbólicos. Elas são análogas as dos hiperboloides de uma folha padrão.[31]

Quadro A.38 – Correspondentes registros do *hiperboloide de duas folhas abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas das equações básicas**
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{z}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{z^2}$.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{y^2}$.
Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{x^2}$.

Fonte: O autor

Sugerimos que os conteúdos desse quadro sejam conferidos no Quadro A.8.3.

Observação: para os hiperboloides de uma e duas folhas é importante reconhecer entre as três variáveis quadráticas das equações básicas qual tem sinal diferente. Porém, note que para os hiperboloides de uma folha padrão esse sinal é negativo enquanto que para os hiperboloides de duas folhas padrão esse sinal é positivo.

A.8.6 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

As atividades seguintes discutem as interseções com os eixos coordenados.

Atividades

3 Abra o cenário HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS e resolva as atividades seguintes.

[31] Analisaremos mais formalmente os conteúdos desse quadro nas Atividades de aprofundamento da página 436.

a) Selecione os pontos do cenário (P_1, P'_1, P_2, P'_2, P_3 e P'_3) e o hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{z}$ (H_1), de equação $\boldsymbol{-x^2/a^2 - y^2/b^2 + (z^2)/c^2 = 1}$. Modifique os valores de $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$, observe o que acontece com os registros cartesianos e, por conjectura, complete o quadro a seguir com as coordenadas dos pontos de interseção da superfície com os eixos coordenados;

Quadro A.39 – Interseções de H_1 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

b) faça o mesmo para o hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{y}$ (H_2), de equação $\boldsymbol{-x^2/a^2 + y^2/b^2 - (z^2)/c^2 = 1}$;

Quadro A.40 – Interseções de H_2 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

c) faça o mesmo para o hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$ (H_3), de equação $\boldsymbol{-x^2/a^2 - y^2/b^2 + (z^2)/c^2 = 1}$;

Quadro A.41 – Interseções de H_3 com os eixos coordenados

Interseção com o eixo x	**Interseção com o eixo y**	**Interseção com o eixo z**

Fonte: O autor

d) prove formalmente primeira pergunta desta atividade.

Observação: note que nos casos em que o termo quadrático da equação básica tem coeficiente negativo à interseção com correspondente eixo é vazia. Isso é válido para os hiperboloides de uma e de duas folhas.

Atividades de revisão

4 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine os registros básico simbólico, básico em língua natural e faça um esboço do registro cartesiano. Nesse esboço, marque as coordenados dos pontos de interseção com os eixos coordenados.

a) $\boldsymbol{-x^2/16 - y^2/9 = -z^2 + 1}$
b) $\boldsymbol{-x^2 + y^2 - z^2 - 10 = 0}$
c) $\boldsymbol{x^2/4 - z^2/49 = 1 + y^2}$
d) $\boldsymbol{-y^2 + z^2/5 = x^2 + 1}$
e) $\boldsymbol{-x^2 + y^2 = z^2 + 9}$
f) $\boldsymbol{x^2/9 - y^2/4 - z^2 - 1 = 0}$
g) no item "a" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.38 (p. 414) dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
h) no item "b" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.38 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
i) no item "c" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.38 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta.

Respostas:[32]

a) $\boldsymbol{-x^2/16 - y^2/9 + z^2 = 1}$. Hiperboloide de uma folha (H2F) abrindo em $\boldsymbol{z}$.
b) $\boldsymbol{-x^2/10 + y^2/10 - z^2/10 = 1}$. H2F abrindo em $\boldsymbol{y}$.
c) $\boldsymbol{x^2/4 - z^2/49 - y^2 = 1}$. H2F abrindo em $\boldsymbol{x}$.
d) $\boldsymbol{-x^2 - y^2 + z^2/5 = 1}$. H2F abrindo em $\boldsymbol{z}$.
e) $\boldsymbol{-x^2/9 + y^2/9 - z^2/9 = 1}$. H2F abrindo em $\boldsymbol{y}$.
f) $\boldsymbol{x^2/9 - y^2/4 - z^2 = 1}$. H2F abrindo em $\boldsymbol{x}$.

[32] As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

A.8.6.1 INTERSEÇÕES COM PLANOS

As atividades seguintes, que devem ser realizadas segundo as **orientações** da Atividade 5 da página 384, discutem as interseções dos hiperboloides de duas folhas padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados do ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na Atividade 1 (p. 410).

Atividades

5 Considere o hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$ que tem como registro básico simbólico $\boldsymbol{-x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1}$. Com relação a ele, complete os quadros seguintes.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.42 – Interseções do hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$ com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xy}$**	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xz}$**	**Interseção com plano $\boldsymbol{yz}$**
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Hipérbole abrindo $\boldsymbol{y}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{z = 0}$.	**Resposta:** Cônica degenerada (conjunto vazio)	**Resposta:** Hipérbole abrindo $\boldsymbol{y}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{x = 0}$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\phi}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$

Fonte: O autor

b) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$; $\boldsymbol{k_1.k_3 \neq 0}$;[33]

[33] $\boldsymbol{k_1.k_3 \neq 0 \leftrightarrow k_1 \neq 0}$ e $\boldsymbol{k_3 \neq 0}$.

Quadro A.43 – Interseções do hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$ com os planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$

Tipo de registro	**Interseção com planos de equação $z = k_1$**	**Interseção com planos de equação $x = k_3$**
Registro cartesiano		
Registro em língua natural	**Resposta:** Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{C(0,0,k_1)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$.	**Resposta:** Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$, $\boldsymbol{C(k_3,0,0)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{y^2}{b^2(c^2+k_1^2)/c^2} - \frac{x^2}{a^2(c^2+k_1^2)/c^2} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = k_3 \\ \frac{y^2}{b^2(a^2+k_3^2)/a^2} - \frac{z^2}{c^2(a^2+k_3^2)/a^2} = 1 \end{cases}$

Fonte: O autor

c) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2; k_2 \neq 0}$;

Quadro A.44 – Interseções do hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{y}$ com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$

Condição	Se $\boldsymbol{k_2 = b}$ ou $\boldsymbol{k_2 = -b}$	Se $\boldsymbol{k_2 > b}$ ou $\boldsymbol{k_2 < -b}$	Se $\boldsymbol{-b < k_2 < b}$
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônica degenerada (pontos)	**Resposta:** Se $\boldsymbol{a > c}$, elipses alongadas em $\boldsymbol{x'}$; se $\boldsymbol{c > a}$ elipses alongadas $\boldsymbol{z'}$; se $\boldsymbol{a = c}$ circunferências com $\boldsymbol{R = a = c}$, $\boldsymbol{C(0,k_2,0)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se afastam da origem.	**Resposta:** Cônica degenerada (conjunto vazio)

Registro simbólico	**Resposta:** $(\mathbf{0}; \boldsymbol{b}; \mathbf{0})$ ou $(\mathbf{0}; -\boldsymbol{b}; \mathbf{0})$	**Resposta:** $\begin{cases} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{k_2} \\ \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2(-b^2+k_2^2)/b^2}} + \frac{\boldsymbol{z^2}}{\boldsymbol{c^2(-b^2+k_2^2)/b^2}} \end{cases}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\phi}$ $= \mathbf{1}$

Fonte: O autor

A.9 CONE QUÁDRICO ELÍPTICO PADRÃO

A figura a seguir apresenta um registro visual do cone quádrico elíptico.

Figura 94 – Registro figural do cone quádrico elíptico

Fonte: O autor

A.9.1 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos dos cones quádricos elípticos padrão. Para realizá-las com o auxílio do cenário CONE QUÁDRICO ELÍPTICO, considere as seguintes informações:

- As designações C_1, C_2 e C_3 se referem aos três tipos de cones quádricos elípticos;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

1 Abra o cenário CONE QUÁDRICO ELÍPTICO e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) $C_{\mathbf{1}}$ e o PLANO1?
b) $C_{\mathbf{1}}$ e o PLANO2?
c) $C_{\mathbf{1}}$ e o PLANO3?
d) $C_{\mathbf{2}}$ e o PLANO1?
e) $C_{\mathbf{2}}$ e o PLANO2?
f) $C_{\mathbf{2}}$ e o PLANO3?
g) $C_{\mathbf{3}}$ e o PLANO1?
h) $C_{\mathbf{3}}$ e o PLANO2?
i) $C_{\mathbf{3}}$ e o PLANO3?

Respostas:

a) Elipses; ponto (origem)
b) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$; retas concorrentes
c) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$; retas concorrentes
d) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$; retas concorrentes
e) Elipses; ponto (origem)
f) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$; retas concorrentes
g) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$; retas concorrentes
h) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{x'}$; retas concorrentes
i) Elipses; ponto (origem)

A.9.2 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Para os cones quádricos elípticos padrão as interseções com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses com eixos aumentando perpendiculares" a esse eixo (para ler a respeito dessas elipses acesse a subseção A.7.2 - p. 401) ou uma cônica degenerada (um ponto - origem). Dito isso, usaremos os registros *básicos* em língua natural do quadro seguinte.

Quadro A.45 – Registros *básicos* em língua natural dos cone quádrico elíptico padrão

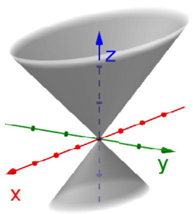
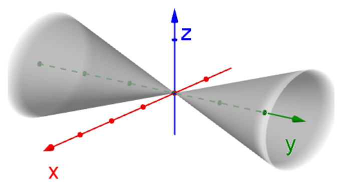
Registros básicos em língua natural	**Característica visual**
Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$.
Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$.
Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$.

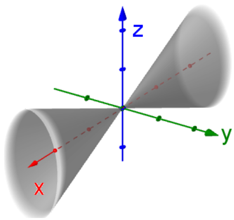
Fonte: O autor

A.9.3 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos três tipos de cones quádricos elípticos padrão. Na subseção A.9.5 (p. 423) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro A.46 – Correspondentes registros dos *cones quádricos elípticos abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
	Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}$.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

	Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{x}$.	$-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{0}$

Fonte: O autor

A.9.4 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equações *básicas* dos cones quádricos elípticos padrão. No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro A.47 – Característica algébricas dos termos da equação básica do cones quádricos elípticos padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}-\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{0}$ $\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}-\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{0}$ $-\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{\boldsymbol{z}^2}{\boldsymbol{c}^2}=\mathbf{0}$	0	2 termos quadráticos sendo 2 com sinais iguais e positivos e 1 com sinal **diferente** e negativo. **Observação:** Se multiplicarmos as equações por (-1) ainda teremos uma equação do tipo básica. Neste caso, haverá 2 com sinais iguais e negativos e 1 com sinal **diferente** e positivo. O que é importante é que em ambos os casos o termo quadrático com sinal diferente é o mesmo.

Fonte: O autor

A.9.5 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

2 Já discutimos que para os cones quádricos elípticos padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o Quadro A.46 (p. 422) e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos três eixos coordenados as citadas elipses com eixos aumentando são perpendiculares?

Resposta:

Entre as três variáveis quadráticas, primeiro é necessário identificar qual tem coeficiente com sinal diferente das outras duas. Se essa for é $\boldsymbol{\alpha}$, então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$. Assim, diremos *cone quádrico elíptico abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$.

A.9.5.1 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS: SÍNTESES E DEFINIÇÕES

A seguir estão algumas correlações entre os registros cartesianos, básicos em língua natural e básicos simbólicos. Elas são análogas as dos hiperboloides padrão.[34]

Quadro A.48 – Correspondentes registros dos *cones quádricos elípticos abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas das equações básicas**
Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{z^2}$.

[34] Analisaremos mais formalmente os conteúdos desse quadro nas Atividades de aprofundamento da página 436.

Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{y^2}$.
Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{x}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{x^2}$.

Fonte: O autor

Sugerimos que os conteúdos desse quadro sejam conferidos no Quadro A.46 (p. 422).

Observação: no caso dos cones quádricos elípticos padrão a variável quadrática que tem coeficiente com sinal diferente pode assumir sinal positivo ou negativo. Basta considerarmos as características algébricas discutidas na terceira coluna do Quadro A.47 (p. 422).

A.9.6 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

Para os três casos de cones quádricos elípticos padrão a interseção com os três eixos coordenados sempre coincide com a origem $\boldsymbol{(0, 0, 0)}$.

Atividades

3 Prove formalmente que a interseção do cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$ com o eixo $\boldsymbol{x}$ coincide com a origem.

Atividades de revisão

4 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine os registros básico simbólico, básico em língua natural e faça um esboço do registro cartesiano.

a) $\boldsymbol{-x^2/16 - y^2/4 + z^2 = 0}$
b) $\boldsymbol{-x^2 + y^2 + z^2 = 0}$
c) $\boldsymbol{-x^2/4 - z^2/49 + y^2 = 0}$
d) no item “a” as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.48 (p. 423) dê argumentos algébricos

que justificam sua resposta;
e) no item "b" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.48 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
f) no item "c" as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.48 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta.

Respostas[35]

a) Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$.
b) Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{x}$.
c) Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}$.

A.9.6.1 INTERSEÇÕES COM PLANOS

As atividades seguintes, que devem ser realizadas segundo as **orientações** da Atividade 5 da página 384, discutem as interseções dos cones quádricos elípticos padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados do ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na Atividade 1 (p. 420).

Atividades

5 Considere o cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$ que tem como registro básico simbólico $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0}$. Com relação a ele, complete os quadros seguintes.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.49 – Interseções do cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$ com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xy}$**	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xz}$**	**Interseção com plano $\boldsymbol{yz}$**

[35] As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônica degenerada (um ponto).	**Resposta:** Cônicas degeneradas (duas retas concorrentes contidas no plano de equação $\boldsymbol{y = 0}$).	**Resposta:** Cônicas degeneradas (duas retas concorrentes contidas no plano de equação $\boldsymbol{x = 0}$).
Registro simbólico	**Resposta:** $\boldsymbol{(0;0;0)}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} y = 0 \\ z = \pm\frac{c}{a}x \end{cases}}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} x = 0 \\ z = \pm\frac{c}{b}y \end{cases}}$

Fonte: O autor

b) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$, $\boldsymbol{y = k_2}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$; $\boldsymbol{k_1.k_2 \neq 0}$;[36]

Quadro A.50 – Interseções do cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$ com os planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$ e $\boldsymbol{y = k_2}$

Tipo de registro	**Interseção com planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$**	**Interseção com planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$**
Registro cartesiano		

[36] $\boldsymbol{k_1.k_2k_3 \neq 0} \leftrightarrow \mathrm{k}_1 \neq \boldsymbol{0}$ e $\mathrm{k}_2 \neq \boldsymbol{0}$.

Registro em língua natural	Se $\boldsymbol{a > b}$, elipses alongadas em $\boldsymbol{x'}$; se $\boldsymbol{b > a}$ elipses alongadas $\boldsymbol{y'}$; se $\boldsymbol{a = b}$ circunferências com $\boldsymbol{R = a = b}$, $\boldsymbol{C(0, 0, k_1)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se afastam da origem.	Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$, $\boldsymbol{C(0, k_2, 0)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{x^2}{a^2k_1^2/c^2} + \frac{y^2}{b^2k_1^2/c^2} = 1 \end{cases}}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} y = k_2 \\ \frac{z^2}{c^2k_2^2/b^2} - \frac{x^2}{a^2k_2^2/b^2} = 1 \end{cases}}$

Fonte: O autor

c) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$; $\boldsymbol{k_3 \neq 0}$.

Quadro A.51 – Interseções do cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}$ com os planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$

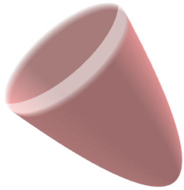
Tipo de registro	**Interseção com planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$**
Registro cartesiano	
Registro em língua natural	Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{z'}$, $\boldsymbol{C(k_3, 0, 0)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} x = k_3 \\ \frac{z^2}{c^2k_3^2/a^2} - \frac{y^2}{b^2k_3^2/a^2} = 1 \end{cases}}$

Fonte: O autor

A.10 PARABOLOIDE ELÍPTICO PADRÃO

A figura a seguir apresenta um registro visual do paraboloide elíptico.

Figura 95 – Registro figural do paraboloide elíptico



Fonte: O autor

A.10.1 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos dos paraboloides elípticos padrão. Para realizá-las com o auxílio do cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO, considere as seguintes informações:

- As designações P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 se referem aos seis tipos de paraboloides elípticos padrão;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

1 Abra o cenário PARABOLOIDE ELÍPTICO e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) P_1 e o PLANO1?
b) P_1 e o PLANO2?
c) P_1 e o PLANO3?
d) P_4 e o PLANO1?
e) P_4 e o PLANO2?
f) P_4 e o PLANO3?

Respostas:

a) Elipses; ponto (origem); conjunto vazio
b) Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_+}$
c) Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_+}$
d) Parábolas abrindo em $\boldsymbol{y'_-}$
e) Elipses; ponto (origem); conjunto vazio
f) Parábolas abrindo em $\boldsymbol{y'_-}$

A.10.2 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Para os paraboloides elípticos padrão as interseções com planos perpendiculares a um dos eixos coordenados determinam "elipses com eixos aumentando perpendiculares" a esse eixo (para ler a respeito dessas elipses acesse a subseção A.7.2 - p. 401) ou uma cônica degenerada (ponto; conjunto vazio). Dito isso, usaremos os registros *básicos* em língua natural do quadro seguinte.

Quadro A.52 – Registros *básicos* em língua natural dos paraboloides elípticos padrão

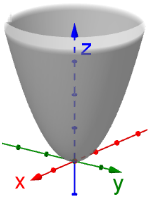
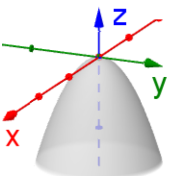
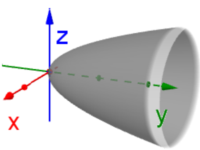
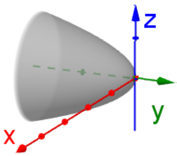
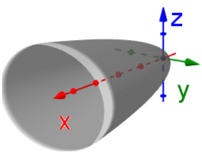
Registros básicos em língua natural	**Característica visual**
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_+}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{z_+}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_-}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{z_-}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_+}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{y_+}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_-}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{y_-}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x_+}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{x_+}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x_-}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{x_-}$.

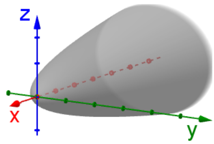
Fonte: O autor

A.10.3 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos seis tipos de paraboloides elípticos padrão. Na subseção A.10.5 (p. 431) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro A.53 – Correspondentes registros dos *paraboloides elípticos abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_+}$.	$\boldsymbol{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$
	Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_-}$.	$\boldsymbol{z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$
	Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_+}$.	$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$
	Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_-}$.	$\boldsymbol{y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$
	Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x_+}$.	$\boldsymbol{x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$

	Paraboloide elíptico abrindo em x_{-}.	$x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$

Fonte: O autor

A.10.4 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equações *básicas* dos paraboloides elípticos padrão. No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro A.54 – Característica algébricas dos termos das equações básicas dos paraboloides elípticos padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$	1 termo linear e com coeficiente igual a $(+1)$	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **positivo**)
$z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ $y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}$ $x = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$	Idem	2 termos quadráticos com mesmo sinal (sinal **negativo**)

Fonte: O autor

A.10.5 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

2 Já discutimos que para os paraboloides elípticos padrão as interseções com infinitos planos paralelos entre si e perpendiculares a um dos *semieixos* coordenados determinam as "elipses com eixos aumentando". Analise o A.53 (p. 431) e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas qual dos semieixos coordena-

dos às elipses com eixos aumentando são perpendiculares?

Respostas

Primeiro é necessário identificar duas coisas: que variável é a linear; qual é o sinal dos coeficientes das variáveis quadráticas. Se a variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$ e as variáveis quadráticas têm coeficientes positivos (negativos), então as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha}_+$ ($\boldsymbol{\alpha}_-$). Assim, diremos *paraboloide elíptico abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}_+$ ($\boldsymbol{\alpha}_-$).

A.10.5.1 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS: SÍNTESES E DEFINIÇÕES

A seguir algumas correlações entre os registros cartesianos, básicos em língua natural e básicos simbólicos. Elas são análogas as dos hiperboloides padrão.[37]

Quadro A.55 – Correspondentes registros dos *paraboloides elípticos abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}$

Registros *básicos* em língua natural	**Características visuais**	**Características algébricas das equações básicas**
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}_+$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{z}_+$.	A variável linear é $\boldsymbol{z}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}_-$.	As elipses com eixos aumentando são ao semieixo $\boldsymbol{z}_-$.	A variável linear é $\boldsymbol{z}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativas**.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}_+$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{y}_+$.	A variável linear é $\boldsymbol{y}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.

[37] Analisaremos mais formalmente os conteúdos desse quadro nas Atividades de aprofundamento da página 436.

Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_-}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{y_-}$.	A variável linear é $\boldsymbol{y}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativos**.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x_+}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{x_+}$.	A variável linear é $\boldsymbol{x}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **positivos**.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x_-}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{x_-}$.	A variável linear é $\boldsymbol{x}$; as duas variáveis quadráticas têm coeficientes **negativos**.

Fonte: O autor

Sugerimos que os conteúdos desse quadro sejam conferidos no Quadro A.53 (p. 431).

A.10.6 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

Para os seis casos de paraboloides elípticos padrão a interseção com os três eixos coordenados sempre coincide com a origem $\mathbf{(0, 0, 0)}$.

Atividades

3 Prove formalmente que a interseção do paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y_-}$ com o eixo $\boldsymbol{z}$ coincide com a origem.

Atividades de revisão

4 A seguir são dadas algumas equações de superfícies quádricas. Sem o recurso computacional, para cada uma delas, determine os registros básico simbólico, básico em língua natural e faça um esboço do registro cartesiano.

a) $\boldsymbol{-x^2/16 - y^2/4 + z = 0}$
b) $\boldsymbol{y - x^2 - z^2 = 0}$
c) $\boldsymbol{-y^2/4 - z^2/49 - x = 0}$
d) no item “a” as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.55 (p. 432) dê argumentos algébricos

que justificam sua resposta;
e) no item “b” as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.55 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta;
f) no item “c” as elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao .... Baseado no Quadro A.55 dê argumentos algébricos que justificam sua resposta.

Respostas:[38]

a) Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}_+$.
b) Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{y}_-$
c) Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{x}_-$.

A.10.6.1 INTERSEÇÕES COM PLANOS

As atividades seguintes, que devem ser realizadas segundo as **orientações** da Atividade 5 da página 384, discutem as interseções dos paraboloides elípticos padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados do ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na Atividade 1 (p. 428).

Atividades

5 Considere o paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ que tem como registro básico simbólico $\boldsymbol{z = x^2/a^2 + y^2/b^2}$. Com relação a ele, complete os quadros seguintes.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.56 – Interseções do paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xy}$**	**Interseção com o plano $\boldsymbol{xz}$**	**Interseção com plano $\boldsymbol{yz}$**

[38]As respostas dos registros cartesianos podem ser conferidas no Geogebra.

Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônica degenerada (um ponto)	**Resposta:** Parábola abrindo em z_+ e contida no plano de equação $y = 0$.	**Resposta:** Parábola abrindo em z_+ e contida no plano de equação $x = 0$.
Registro simbólico	**Resposta:** $(0; 0; 0)$	**Resposta:** $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = a^2.z \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = b^2 z \end{cases}$

Fonte: O autor

b) interseções com os planos de equação $z = k_1$; $k_1 \neq 0$;

Quadro A.57 – Interseções do paraboloide elíptico abrindo em z_+ com os planos de equação $z = k_1; k_1 \neq 0$

Condição	Se $k_1 > 0$	Se $k_1 < 0$
Registro cartesiano		
Registro em língua natural	Se $a > b$, elipses alongadas em x'; se $b > a$ elipses alongadas y'; se $a = b$ circunferências com $R = a = b$, $C(0, 0, k_1)$ e contidas nos planos de equação $z = k_1$. Elas aumentam o tamanho de seus eixos (ou raio) à medida que os planos se afastam da origem.	Cônica degenerada (vazio)
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{x^2}{a^2 k_1} + \frac{y^2}{b^2 k_1} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** ϕ

Fonte: O autor

c) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$; $\boldsymbol{k_2.k_3 \neq 0}$.

Quadro A.58 – Interseções do paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$

Tipo de registro	**Interseção com planos de equação $y = k_2$**	**Interseção com planos de equação $x = k_3$**
Registro cartesiano		
Registro em língua natural	Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_+}$, $\boldsymbol{V(0, k_2, k_2^2/b^2)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$. Elas são congruentes entre si.	Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_+}$, $\boldsymbol{V(k_3, 0, k_3^2/a^2)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{z = k_1}$. Elas são congruentes entre si.
Registro simbólico	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} y = k_2 \\ x^2 = a^2(z - \frac{k_2^2}{b^2}) \end{cases}}$	**Resposta:** $\boldsymbol{\begin{cases} x = k_3 \\ y^2 = b^2(z - \frac{k_3^2}{a^2}) \end{cases}}$

Fonte: O autor

Atividades de aprofundamento

As atividades seguintes são de aprofundamento, antes de iniciá-las sugerimos a revisão do **procedimento $\boldsymbol{P}$** que algebricamente trata das interseções de uma superfície com planos (ver a subseção A.6.4 – p. 383).. Com essas atividades pode-se provar ou justificar as conjecturas que foram discutidas no estudo dos elipsoides padrão, dos hiperboloides padrão, dos cones quádricos elípticos padrão e dos paraboloides elípticos padrão. De maneira mais específica, após a realização dessas atividades, esperamos que o leitor entenda de uma forma genérica que as *características algébricas dos termos das equações básicas* são as condições algébricas que determinam:

- por qual motivo as interseções das quádricas com planos definem (ou não) elipses, hipérboles, parábolas ou cônicas degeneradas;

- por qual motivo uma equação e um gráfico de uma dada quádrica se correspondem;
- como "prever" o que é definido na interseção de uma quádrica com um plano.

As justificativas das Atividades de aprofundamento (6, 7, 8, 9 e 10) devem ser baseadas nas *características algébricas dos termos da equação básica* das quádricas e das cônicas em questão. Diante disso, os cálculos algébricos ou o uso do Geogebra são sugeridos, mas não são obrigatórios.

6 Considere a quádrica de equação $\boldsymbol{z = x^2/a^2 + y^2/b^2}$ (E) e as suas características algébricas já caracterizadas na subseção A.10.4 (p. 431). Responda as questões seguintes.

a) Após a realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ entre a equação $\boldsymbol{x = 0}$ e a equação E determinamos uma equação básica. Quais são as características dos termos dessa equação? Que objeto foi definido após a realização de $\boldsymbol{P}$? Qual o significado geométrico da realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ em questão?
b) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos hipérboles? Isso é possível? Justifique sua resposta e diga o significado geométrico dela.
c) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos parábolas? Justifique sua resposta e diga o significado geométrico da realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ em questão?
d) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos elipses? Justifique sua resposta e diga o significado geométrico da realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ em questão?

Respostas:

a) As características dos termos da equação básica determinada após a realização de $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros da equação possui um termo quadrático com coeficiente igual a $(\boldsymbol{+1})$ e o outro membro tem um termo linear com coeficiente positivo. Definimos uma parábola abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{x = 0}$ (plano $\boldsymbol{yz}$). O significado geométrico é que a interseção do plano de equação $\boldsymbol{x = 0}$ (paralelo ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{y}$) com a quádrica define

uma parábola contida nesse plano.
b) Nenhum deles. Basta notarmos que nos termos de E não temos termos quadráticos com sinais opostos no mesmo membro da equação e, por isso, não há como termos hipérboles, pois as características dos termos da equação básica da hipérbole exigem esses tipos de termos. O significado geométrico é que as interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados não determinam hipérboles.
c) As variáveis quadráticas $\boldsymbol{x^2}$ e $\boldsymbol{y^2}$. Isso se justifica pelo fato de que depois de realizado o procedimento P em uma dessas variáveis teremos uma equação básica com as seguintes características: um dos membros da equação possui um termo quadrático com coeficiente igual a $(+\mathbf{1})$; no outro membro tem apenas um termo linear com coeficiente positivo adicionado a uma constante real (que indica translação da parábola nos casos em que essa constante é diferente de zero).
O significado geométrico é que as interseções dos planos de equação $\boldsymbol{x = k}$ (paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{x}$) ou $\boldsymbol{y = k; k \in R}$ (paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{y}$) com a quádrica definem parábolas contidas nesses planos.
d) A variável linear $\boldsymbol{z}$. Isso se justifica pelo fato de que depois de realizado o **procedimento $\boldsymbol{P}$** na variável $\boldsymbol{z}$ teremos uma equação básica em que um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro membro tem apenas o número um. O significado geométrico é que as interseções dos planos de equação $\boldsymbol{z = k; k \in R}$ (paralelo ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{z}$) com a quádrica definem elipses contidas nesses planos. No fundo, são "elipses que estão abrindo e são perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$". (Nas atividades de aprofundamento seguintes essa questão será retomada e aprofundada)

7 Considere a quádrica de equação $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1}$ (E) e as suas características algébricas já caracterizadas na subseção A.7.4 (p. 402). Responda as questões seguintes.

a) Após a realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ entre a equação $\boldsymbol{y = b}$ e a equação E determinamos uma equação básica. Quais são as características dos termos dessa equação? Que objeto foi definido após a realização de $\boldsymbol{P}$? Qual o significado geométrico da realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ em questão?
b) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos parábolas? Isso é possível. Justifique sua resposta e diga o significado geométrico dela?

c) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos hipérboles? Justifique sua resposta e diga o significado geométrico da realização do procedimento $\boldsymbol{P}$ em questão?
d) entre as três variáveis de E qual(is) pode(m) passar pelo procedimento $\boldsymbol{P}$ para determinarmos elipses? Justifique sua resposta e diga o significado geométrico da realização do procedimento P em questão?
e) a interseção da quádrica de equação E com o plano $\boldsymbol{yz}$ define a equação de um objeto. Quais são as características dos termos da equação básica do objeto definido? Justifique sua resposta e diga que objeto foi definido?

Respostas:

a) As características dos termos da equação básica determinada após a realização de $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros da equação possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro tem apenas o número um. Definimos uma hipérbole contida no plano de equação $\boldsymbol{y = b}$. O significado geométrico é que a interseção do plano de equação $\boldsymbol{y = b}$ (paralelo ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{y}$) com a quádrica define uma hipérbole contida nesse plano.
b) Nenhum deles. Basta notar que nos termos de E não temos termos lineares e, por isso, não há como definirmos parábolas, pois as características dos termos da equação básica da parábola exigem esse tipo de termo. O significado geométrico é que as interseções com planos coordenados e com planos paralelos aos planos coordenados não determinam parábolas.
c) As variáveis quadrática $\boldsymbol{x^2}$ e $\boldsymbol{y^2}$. Isso se justifica pelo fato de que depois de realizado o procedimento $\mathbf{P}$ em uma dessas variáveis teremos uma equação básica em que um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro tem apenas o número um. O significado geométrico é que as interseções dos planos de equação $\boldsymbol{x = k}$ (paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{x}$) ou $\boldsymbol{y = k; k \in R}$ (paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{y}$) com a quádrica definem hipérboles contidas nesses planos.
d) A variável quadrática $\boldsymbol{z^2}$. Isso se justifica pelo fato de que depois de realizado o procedimento $\boldsymbol{P}$ na variável $\boldsymbol{z^2}$ teremos uma equação básica em que um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e positivos e o outro membro tem apenas o número um. O significado geométrico é que as interseções dos planos de equação $\boldsymbol{z = k; k \in R}$ (paralelo ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{z}$) com a

quádrica definem elipses contidas nesses planos. No fundo, são "elipses com eixos aumentando perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$".
e) A interseção da quádrica com o plano $\boldsymbol{yz}$ (de equação $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$) é determinada pelo procedimento $\boldsymbol{P}$. Depois de feito esse procedimento, as características dos termos da equação básica são: um dos membros da equação possui dois termos quadráticos com sinais opostos e o outro membro tem apenas o número um. Logo, o objeto definido é uma hipérbole contida no plano em questão e perpendicular ao eixo $\boldsymbol{x}$.

8 Considere o sistema cartesiano $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}$ (os eixos coordenados desse sistema são os eixos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e γ), as quádricas $\mathrm{E}_\mathbf{1}$ e $\mathrm{E}_\mathbf{2}$ de equações respectivamente $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta^2/a^2} + \boldsymbol{\gamma^2/b^2}$ e $\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\beta^2/a^2} - \boldsymbol{\gamma^2/b^2}$; $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são constantes positivas, os planos coordenados (de equação $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ e $\gamma = \mathbf{0}$) e os planos paralelos aos planos coordenados (de equação $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k_2}$ e $\gamma = \boldsymbol{k_3}$; $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}$ e $\boldsymbol{k_3}$ são constantes reais). Veja as características algébricas dos termos das equações básicas dos paraboloides elípticos padrão (subseção A.10.4 - p. 431) e resolva as atividades seguintes.

a) Por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{1}$ (ou $\mathrm{E}_\mathbf{2}$) com qualquer um dos planos do enunciado não determinam hipérboles?
b) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{1}$ com planos do enunciado podem determinar parábolas abrindo no sentido positivo?
c) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{2}$ com planos do enunciado podem determinar parábolas abrindo no sentido negativo?
d) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{1}$ com planos de equação $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k_1}; \boldsymbol{k_1} > \mathbf{0}$ determinam elipses perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha_+}$?
e) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{1}$ com planos de equação $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k_1}; \boldsymbol{k_1} <0$ são vazias?
f) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{2}$ com planos de equação $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k_1}; \boldsymbol{k_1} < \mathbf{0}$ determinam elipses perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha_-}$?
g) por que as interseções entre a quádrica $\mathrm{E}_\mathbf{2}$ com planos de equação $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k_1}; \boldsymbol{k_1} > \mathbf{0}$ são vazias?

9 No sistema cartesiano $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}$ podemos fazer as seguintes generalizações:

Quadro A.59 – elipses com eixos aumentando: correlações entre registros

Registros básicos em língua natural	**Variável visual**	**Característica(s) algébrica(s) correspondente da equação básica da quádrica**
Hiperboloide de uma folha/duas folhas/cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$.	Entre as variáveis quadráticas a que tem coeficiente com sinal diferente é $\boldsymbol{\alpha^2}$.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$.	As elipses com eixos aumentando são perpendiculares ao semieixo $\boldsymbol{\alpha}_+$.	- A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; - os coeficientes das variáveis quadráticas têm sinais positivos.
Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_-$.	Elipses perpendiculares ao eixo semieixo $\boldsymbol{\alpha}_-$.	- A variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$; - os coeficientes das variáveis quadráticas têm sinais negativos.

Fonte: O autor

Tomamos por definição a correspondência entre as colunas um e dois do quadro anterior. Porém, ainda falta justificar as correlações com a coluna três. Para tanto, responda os itens a seguir:

a) Para os hiperboloides de uma folha/duas folhas/cones quádrico elíptico, se na equação básica a variável quadrática $\boldsymbol{\alpha^2}$ tem coeficiente com sinal diferente das outras duas variáveis quadráticas, então temos "elipses perpendiculares" ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$. Justifique, em função das unidades significantes simbólicas, essa afirmação.[39]
b) para os paraboloides elípticos, por qual motivo na equação básica a variável linear deve ser $\boldsymbol{\alpha}$ para termos "elipses perpendiculares" ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$? Justifique sua resposta em função das unidades significantes simbólicas.[40]

Respostas:

a) Sabemos que um dos membros das equações básicas das quádricas em questão têm três termos quadráticos sendo dois com sinais iguais e um com sinal diferente. Por hipótese, o termo que possui a

[39]Sugerimos acessar as subseções A.7.4 (p. 402), A.8.4 (p. 412) e A.9.4 (p. 422).
[40]Sugerimos que seja visto a subseção A.10.4 (p. 431).

variável $\boldsymbol{\alpha^2}$é o que possui sinal diferente. Desconsideremos os casos em que as interseções determinam degeneradas e usaremos o procedimento $\boldsymbol{P}$ para realizar as análises das interseções. Após realizarmos o procedimento $\boldsymbol{P}$ em $\boldsymbol{\alpha^2}$ essa variável será um número real e, depois de feito as simplificações, restará uma equação básica de cônica tal que em um dos membros haverá apenas dois termos quadráticos com sinais iguais (necessários para termos uma elipse). Se realizarmos o procedimento $\boldsymbol{P}$ em qualquer uma das outras variáveis da equação básica da quádrica teremos, depois das simplificações, uma equação básica de cônica com dois termos quadráticos sendo que um desses termos é $\boldsymbol{\alpha^2}$ e o outro, por hipótese, terá sinal diferente de $\boldsymbol{\alpha^2}$. Assim, serão dois termos quadráticos com sinais opostos no mesmo membro da equação e, com isso, não definimos elipses. Logo, se desejamos ter elipses o procedimento $\boldsymbol{P}$ deve ser realizado na variável quadrática com sinal diferente, ou seja, em $\boldsymbol{\alpha^2}$. Sabemos que realizar o procedimento $\boldsymbol{P}$ na variável $\boldsymbol{\alpha^2}$ implica geometricamente definir as interseções com planos perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$. Portanto, concluímos que geometricamente os resultados de $\boldsymbol{P}$ realizados no termo quadrático com sinal diferente ($\boldsymbol{\alpha^2}$) definem elipses perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$.
b) Sabemos que nas equações básicas das quádricas em questão um dos membros possui dois termos quadráticos com sinais iguais e no outro há apenas uma variável linear. Por hipótese, a variável linear é $\boldsymbol{\alpha}$. Desconsideremos os casos em que as interseções determinam degeneradas e usaremos o procedimento $\boldsymbol{P}$ para realizar as análises das interseções. Após realizarmos o procedimento $\boldsymbol{P}$ em $\boldsymbol{\alpha}$ essa variável será um número real e restará uma equação básica de cônica tal que em um dos membros haverá apenas dois termos quadráticos com sinais iguais (necessários para termos uma elipse). Se realizarmos o procedimento $\boldsymbol{P}$ nas variáveis quadráticas restará as unidades significantes simbólicas de uma parábola. Portanto, concluímos que geometricamente os resultados de $\boldsymbol{P}$ realizados no termo linear ($\boldsymbol{\alpha}$) definem elipses perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$.

Comentário: no caso dos hiperboloides de uma folha e dos cones quádrico elíptico a variável quadrática que tem coeficiente com sinal diferente tem sinal positivo já para os hiperboloides de duas folhas essa variável tem sinal negativo. Com os resultados do Quadro A.59 podemos identificar que eixo coordenado as "elipses com eixos aumentando" são perpendiculares e, a partir daí, diferenciar e reconhecer as diferentes posições de cada uma dessas quádrica no sistema cartesiano.

10 Considere o sistema cartesiano $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}$ e os planos de equação $\boldsymbol{\alpha = k; k \in R}$. Sabemos que esses planos são perpendiculares ao eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$ e paralelos ao plano coordenado $\boldsymbol{\beta\gamma}$. Também sabemos que à medida que aumentam os valores de $\boldsymbol{k}$ os planos $\boldsymbol{\alpha = k}$ se afastam da origem e se $\boldsymbol{k}$ aumenta e $\boldsymbol{k > 0}$ então esses planos se afastam no sentido positivo do eixo $\boldsymbol{\alpha}$ (semieixo $\boldsymbol{\alpha_+}$) e se $\boldsymbol{k}$ aumenta em módulo e $\boldsymbol{k < 0}$ então esses planos se afastam no sentido negativo do eixo $\boldsymbol{\alpha}$ (semieixo $\boldsymbol{\alpha_-}$).

Para os hiperboloides, os cones quádricos elípticos e os paraboloides elípticos, vimos que as interseções dessa quádricas com infinitos planos paralelos a um dos planos coordenados determinem elipses (ou possivelmente cônicas degeneradas) que aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas interseções se afastam da origem. Com isso, temos a impressão de a quádrica está abrindo.

Suponha que para determinarmos as "elipses com eixos aumentando" o procedimento $\boldsymbol{P}$ deve ser realizado na variável $\boldsymbol{\alpha}$. O quadro a seguir apresenta algumas questões relacionadas a determinação dessas elipses.

Quadro A.60 – elipses com eixos aumentando: correlações entre registros

Equação básica da quádrica	**Variável da equação básica da quádrica que deve passar por $\boldsymbol{P}$ para determinarmos elipses (ou possivelmente degeneradas).**	**Equação básica da interseção com o plano $\boldsymbol{\alpha = k}$ (após realizado o procedimento $\boldsymbol{P}$)**
$\boldsymbol{\frac{\beta}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{c^2} = 1}$ (Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$.)	A variável quadrática $\boldsymbol{\alpha^2}$.	**Elipses:** $\boldsymbol{\begin{cases} \alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(c^2+k^2)/c^2} + \frac{\gamma^2}{b^2(c^2+k^2)/c^2} = 1 \end{cases}}$

$-\frac{\beta}{a^2}-\frac{\gamma^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{c^2}=1$ (Hiperboloide de duas folhas abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$.)	Idem	**Elipses:** – Se $k > c$ ou $k < -c \rightarrow \begin{cases}\alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(-c^2+k^2)/c^2}+\frac{\gamma^2}{b^2(-c^2+k^2)/c^2}=1\end{cases}$ **Degeneradas:** **– *Se*** $k=\pm c \rightarrow$(0,0,$\pm c$); – se $-c < k < c \rightarrow S=\phi$.
$\frac{\beta}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}-\frac{\alpha^2}{c^2}=0$ (Cone quádrico elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$.)	idem	**Elipses:** – Se $k \neq 0 \rightarrow \begin{cases}\alpha = k \\ \frac{\beta^2}{(a^2k^2)/c^2}+\frac{\gamma^2}{(b^2k^2)/c^2}=1\end{cases}$ **Degenerada:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0).
$\alpha=\frac{\beta}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}$ (Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$.)	A variável linear $\boldsymbol{\alpha}$.	**Elipses:** – Se $k > 0 \rightarrow \begin{cases}\alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2k}+\frac{\gamma^2}{b^2k}=1\end{cases}$ **Degeneradas:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0); - se $k<0 \rightarrow S=\phi$
$\alpha=-\frac{\beta}{a^2}-\frac{\gamma^2}{b^2}$ (Paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_-$.)	Idem	**Elipses:** – Se $k < 0 \rightarrow \begin{cases}\alpha = k \\ \frac{\beta^2}{a^2(-k)}+\frac{\gamma^2}{b^2(-k)}=1\end{cases}$ **Degeneradas:** – Se $k=0 \rightarrow$(0,0,0); - se $k>0 \rightarrow S=\phi$

Fonte: O autor

Responda as questões seguintes:

a) Desconsiderando as cônicas degeneradas, algebricamente, por que as “elipses com eixos aumentando” aumentam o tamanho de seus eixos (ou do raio) à medida que elas (ou o plano que as determina) se afastam da origem?
b) para os paraboloides elípticos abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$, por que as elipses são determinadas apenas no semieixo $\boldsymbol{\alpha}_+$? Dê sua resposta em função das unidades significantes simbólicas da equações básicas da terceira coluna.
c) para os paraboloides elípticos abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_-$, por que as elipses são determinadas apenas no semieixo $\boldsymbol{\alpha}_-$? Dê sua resposta em função das unidades significantes simbólicas da equações básicas da terceira coluna.

d) por que os centros das “elipses com eixos aumentando” estão sobre o eixo $\boldsymbol{\alpha}$?

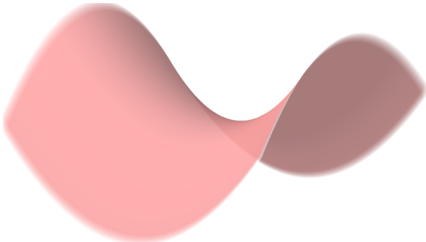
Respostas:

a) Por hipótese, as interseções que determinam elipses se afastam da origem e, obviamente, os planos que as determinam também se afastam da origem. Algebricamente, para que isso ocorra, é necessário aumentar os valores de $\boldsymbol{k}$ o que, consequentemente, aumentam os denominadores das equações da terceira coluna do quadro anterior. O aumento desses denominadores implica aumentar as medidas dos eixos (ou do raio). Logo, à medida que essas elipses se afastem da origem as quádricas abrem.
b) Se $\boldsymbol{k > 0}$ as características dos termos da equação após realizado $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros possui dois termos quadráticos e positivos; no outro membro temos apenas um. Com isso, de fato definimos elipses. Se $\boldsymbol{k < 0}$ as características dos termos da equação após realizado $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros possui dois termos quadráticos e negativos; no outro membro temos apenas um. Com isso, não definimos elipses e sim o conjunto vazio. Observe que as elipses foram definidas apenas $\boldsymbol{k > 0}$ o que significa, em termos geométricos, que as elipses (ou os planos que as contêm) são definidas apenas no semieixo $\boldsymbol{\alpha_+}$.
c) Se $\boldsymbol{k > 0}$ as características dos termos da equação após realizado $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros possui dois termos quadráticos e negativos; no outro membro temos apenas um. Com isso, não definimos elipses e sim o vazio. Se $\boldsymbol{k < 0}$ as características dos termos da equação depois de realizado $\boldsymbol{P}$ são: um dos membros possui dois termos quadráticos e positivos; no outro membro temos apenas um. Com isso, de fato definimos elipses. Observe que as elipses foram definidas apenas $\boldsymbol{k < 0}$, o que significa, em termos geométricos, que as elipses (ou os planos que as contêm) são definidas apenas no semieixo $\boldsymbol{\alpha_-}$.
d) porque nas equações da terceira coluna não há os termos que caracterizam translação $\boldsymbol{(-\beta_0}$ e $\boldsymbol{-\gamma_0)}$ ou eles valem zero.

A.11 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO PADRÃO (SELA)

A figura a seguir apresenta o registro visual do paraboloide hiperbólico (sela).

Figura 96 – Registro figural da sela



Fonte: O autor

A.11.1 REGISTROS CARTESIANOS

As atividades a seguir introduzem aspectos cartesianos das selas padrão. Para realizá-las com o auxílio do cenário PARABOLOIDE HIPERBÓLICO, considere as seguintes informações:

- As designações $S_{\mathbf{1}}$, $S_{\mathbf{2}}$, $S_{\mathbf{3}}$, $S_{\mathbf{4}}$, $S_{\mathbf{5}}$ e $S_{\mathbf{6}}$ se referem aos seis tipos de selas padrão;
- a designação PLANO1 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xy}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{z}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_1}$;
- a designação PLANO2 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{xz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{y}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_2}$;
- a designação PLANO3 se refere aos planos paralelos ao plano $\boldsymbol{yz}$ e perpendiculares ao eixo $\boldsymbol{x}$. Para modificar sua posição basta modificar os valores de $\boldsymbol{k_3}$.

Atividades

1 Abra o cenário PARABOLOIDE HIPERBÓLICO e conjecture o que é obtido na interseção entre os objetos designados por:

a) $S_{\mathbf{2}}$ e o PLANO1?
b) $S_{\mathbf{2}}$ e o PLANO2?
c) $S_{\mathbf{2}}$ e o PLANO3?

Respostas:

a) Hipérboles abrindo em $\boldsymbol{y'}$ ou em $\boldsymbol{x'}$; retas concorrentes

b) Parábolas abrindo em z'_-
c) Parábolas abrindo em z'_+

A.11.2 PARÁBOLAS "ASSENTO" E "ESTRIBO"

As interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados determinam os seguintes objetos: um par de retas concorrentes; duas parábolas abrindo no mesmo eixo coordenado, mas em sentidos opostos. Chamaremos o eixo que essas parábolas estão abrindo de eixo α e, assim, uma dessas parábolas está abrindo sentido positivo de α (chamaremos de semieixo α_+) e a outra no sentido negativo de α (chamaremos de semieixo α_+). Assim, adotaremos as seguintes convenções:

- *Parábola assento*[41] ou simplesmente *assento* é a que está abrindo em α_+;
- *parábola estribo* ou simplesmente *estribo* é a que está abrindo em α_-.[42]

Note que o eixo α é determinado pela interseção entre os planos coordenados que determinam as parábolas assento e estribo.

A.11.3 REGISTROS BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL

Considere o sistema cartesiano $\alpha\beta\gamma$ (os eixos coordenados desse sistema são os eixos α, β e γ). Se a parábola assento está abrindo no semieixo α_+ e está contida no plano coordenado de equação $\beta = 0$, então para os paraboloides hiperbólicos padrão usaremos o registro básico em língua natural do quadro a seguir:

---

[41] Estamos concebendo que a parábolas assento e a parábola estribo são objetos ideais enquanto que o assento e os estribos (parte da sela do cavalo em que se colocam os pés) são objetos reais. Estes objetos reais são apenas representações daqueles objetos ideais.

[42] Pode-se obter parábolas nas interseções dos paraboloides hiperbólicos com planos que não são os coordenados. Porém, quando essas superfícies estiverem nas posições padrão usaremos os termos "parábolas assento e estribo" apenas para as parábolas determinadas nas interseções com os planos coordenados. Já para as posições transladadas e rotacionadas usaremos os termos "parábolas assento e estribo" apenas para as que são determinadas nas interseções com os planos de simetria desses paraboloides.

Quadro A.61 – Registros *básicos* em língua natural dos paraboloides hiperbólicos padrão

Registros básicos em língua natural	**Características visuais**
Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$ e contido em $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.	- A parábola assento está abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$; - a parábola assento está contida no plano de equação $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$.

Fonte: O autor

Atividades

2 Abra o cenário PARABOLOIDE HIPERBÓLICO. Com relação às selas registradas como $S_{\mathbf{1}}$, $S_{\mathbf{2}}$, ..., $S_{\mathbf{6}}$, complete os pontilhados do quadro a seguir.

Quadro A.62 – Registros *básicos* em língua natural dos paraboloides hiperbólicos padrão

Sela em questão	**Características visuais**	**Registros básicos em língua natural**
$\boldsymbol{S_1}$	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ e contido em $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.
$\boldsymbol{S_2}$	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ e contido em $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

S_3	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{y_+}$ e contido em $\boldsymbol{z = 0}$.
S_4	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{y_+}$ e contido em $\boldsymbol{x = 0}$.
S_5	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{x_+}$ e contido em $\boldsymbol{z = 0}$.
S_6	- Assento abrindo no semieixo positivo ......; - assento contido no plano de equação .....; - estribo abrindo no semieixo negativo ......; - estribo contido no plano de equação	**Resposta:** Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{x_+}$ e contido em $\boldsymbol{y = 0}$.

Fonte: O autor

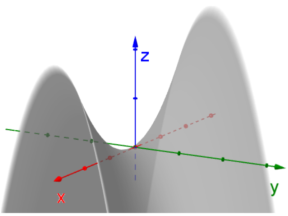
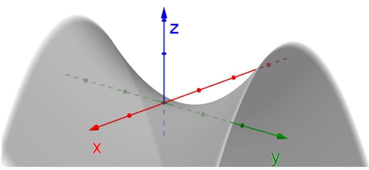
Observação: como consequência das definições que fizemos a respeito de assento e estribo, se soubermos que a parábola assento está contida no plano coordenado de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$ e está abrindo no semieixo $\boldsymbol{\alpha_+}$, então a parábola estribo estará contida no plano coordenado que é perpendicular ao plano de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$ e que contém o semieixo $\boldsymbol{\alpha_-}$. Dessa forma, podemos diferenciar e reconhecer a posição dos seis tipos de selas padrão partindo da identificação do semieixo que a parábola assento está abrindo bem como o plano coordenado que a contém.

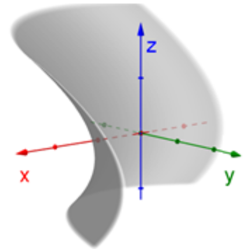
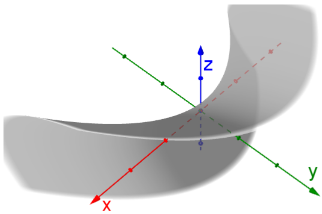
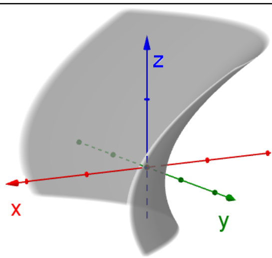
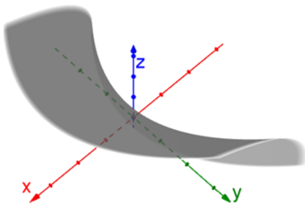
Comentário: para os hiperboloides, cones quádricos elípticos e paraboloide elípticos padrão as "elipses com eixos aumentando" são determinadas por *infinitos* planos paralelos a um dos planos coordenados. No caso dos paraboloides hiperbólicos padrão entre os três planos coordenados *apenas um* deles determina a parábola assento e *apenas* *outro* determina a parábola estribo. Outa diferença é que ao dizermos "hiperboloides/cones quádricos elípticos/paraboloide elípticos abrindo em $\boldsymbol{\alpha}$" as infinitas "elipses com eixos aumentando" são *perpendiculares* ao eixo $\boldsymbol{\alpha}$, já ao dizermos "sela com assento abrindo em $\boldsymbol{\alpha}_+$ e contido em $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$" o plano que contém essa parábola também *contém* o eixo $\boldsymbol{\alpha}$ e *não é perpendicular* a esse eixo.

A.12 REGISTROS CARTESIANOS, BÁSICOS EM LÍNGUA NATURAL E BÁSICOS SIMBÓLICOS

O quadro a seguir *apenas apresenta* os registros *básicos* simbólicos bem como os correspondentes registros cartesianos e *básicos* em língua natural dos seis tipos de paraboloides hiperbólicos padrão. Na subseção A.12.2 (p. 452) *discutiremos* as correlações entre esses registros.

Quadro A.63 – Correspondentes registros das *selas com assento abrindo em* $\boldsymbol{\alpha}_+$ *e contido em* $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$

Registros cartesianos	**Registros básicos em língua natural**	**Registros básicos simbólicos**
	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ e contido em $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.	$\boldsymbol{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$
	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z}_+$ e contido em $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.	$\boldsymbol{z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$

	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{y_+}$ e contido em $\boldsymbol{z = 0}$.	$\boldsymbol{y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$
	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{y_+}$ e contido em $\boldsymbol{x = 0}$.	$\boldsymbol{y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$
	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{x_+}$ e contido em $\boldsymbol{z = 0}$.	$\boldsymbol{x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$
	Sela com assento abrindo em $\boldsymbol{x_+}$ e contido em $\boldsymbol{y = 0}$.	$\boldsymbol{x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$

Fonte: O autor

A.12.1 REGISTROS BÁSICOS SIMBÓLICOS: CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES

O quadro a seguir destaca importantes *características algébricas* dos termos das equações *básicas* dos paraboloides hiperbólicos padrão. No estudo algébrico preste atenção a essas características.

Quadro A.64 – Característica algébricas dos termos das equações básicas dos paraboloides hiperbólicos padrão

Registro básico simbólico	**Um dos membros da equação**	**Outro membro da equação**
$\boldsymbol{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $\boldsymbol{z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ $\boldsymbol{y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ $\boldsymbol{y = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}}$ $\boldsymbol{x = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}$ $\boldsymbol{x = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$	1 termo linear e com coeficiente igual a (+1)	2 termos quadráticos com sinais opostos (1 positivo e o outro **negativo**)

Fonte: O autor

A.12.2 CORRELAÇÕES ENTRE REGISTROS

A atividade seguinte discute correlações entre registros.

Atividade

3 Já definimos as parábolas assento e estribo (subseção A.11.2 - p. 447). Analise o Quadro A.63 (p. 451) e, com isso, conjecture como reconhecer a partir das equações básicas:[43]

a) Em que eixo as parábolas assento e estribo estão abrindo;
b) a equação do plano que contém a parábola assento;
c) a equação do plano que contém a parábola estribo.

Respostas:

a) Basta identificar que variável é a linear. Caso ela seja $\boldsymbol{\alpha}$, então a parábola assento está abrindo em $\boldsymbol{\alpha_+}$ e a parábola estribo está abrindo em $\boldsymbol{\alpha_-}$.
b) Primeiro é necessário reconhecer que variável quadrática tem coeficiente com sinal negativo. Caso ela seja $\boldsymbol{\beta^2}$, então a equação do plano que contém a parábola assento é $\boldsymbol{\beta = 0}$.
c) Primeiro é necessário reconhecer que variável quadrática tem coeficiente com sinal positivo. Caso ela seja $\boldsymbol{\gamma^2}$, então a equação do

[43]A Atividade de aprofundamento da página 453 discutirá as conjecturas da Atividade 3 com mais rigor.

plano que contém a parábola assento é $\boldsymbol{\gamma = 0}$.

4 Considere a sela de equação $\boldsymbol{z = x^2/4 - y^2/9}$. Determine:

a) Em que semieixo as parábolas assento e estribo estão abrindo;
b) a equação do plano que contém a parábola assento;
c) a equação do plano que contém a parábola estribo.
d) o registro básico em língua natural da sela em questão.

Observação: para resolver essa questão podemos usar os resultados discutidos na questão anterior. Outra maneira é a seguinte: realizar o procedimento $\boldsymbol{P}$ com $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = 0}$ e $\boldsymbol{z = 0}$; verificar em qual desses casos determinamos as parábolas assento e estribos; analisar geometricamente os procedimentos utilizados.

5 Considere a sela de equação $\boldsymbol{y = -x^2/9 + z^2/16}$. Determine:

a) Em que semieixo as parábolas assento e estribo estão abrindo;
b) a equação do plano que contém a parábola assento;
c) a equação do plano que contém a parábola estribo.
d) o registro básico em língua natural da sela em questão.

Atividade de aprofundamento

A atividade seguinte é de aprofundamento e tem o mesmo objetivo que a Atividade de aprofundamento da página 436.

6 Considere o sistema cartesiano $\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}$ (os eixos coordenados desse sistema são os eixos $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e γ), as constantes reais positivas $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e uma sela em que a variável linear da equação básica é $\boldsymbol{\alpha}$, a variável quadrática que tem coeficiente com sinal negativo é $\boldsymbol{\beta^2}$ e a variável quadrática que tem coeficiente com sinal positivo é $\boldsymbol{\gamma^2}$ ou, em outros termos, a equação básica dessa sela é da forma $\boldsymbol{\alpha = \gamma/a^2 - \beta/b^2}$. Usando as *características dos termos dessa equação básica* (p. 452) e o procedimento $\boldsymbol{P}$ (p. 383), justifique por qual motivo trata-se de uma *"sela com assento abrindo em $\boldsymbol{\alpha_+}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$"*?

Resposta:

Realizando o procedimento $\boldsymbol{P}$ com a equação $\boldsymbol{\beta = 0}$ ficamos com a equação $(\boldsymbol{\gamma^2 = a^2.\alpha})$. Geometricamente significa que a interseção do plano de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$ com a sela determina uma parábola contida nesse plano e abrindo em $\boldsymbol{\alpha_+}$, ou seja, trata-se da "parábola assento abrindo em $\boldsymbol{\alpha_+}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$". Observe que se realizarmos o procedimento $\boldsymbol{P}$ com a equação $\boldsymbol{\gamma = 0}$ ficamos com $(\boldsymbol{\beta^2 = -b^2.\alpha})$. Geometricamente significa que a interseção do plano de equação $\boldsymbol{\gamma = 0}$ com a sela determina uma parábola contida nesse plano e abrindo em $\boldsymbol{\alpha_-}$, ou seja, trata-se da "parábola estribo abrindo em $\boldsymbol{\alpha_-}$ e contida no plano de equação $\boldsymbol{\beta = 0}$".

A.12.3 INTERSEÇÕES COM OS EIXOS COORDENADOS

Para os seis casos de paraboloides hiperbólicos padrão a interseção com os três eixos coordenados sempre coincide com a origem $\boldsymbol{(0, 0, 0)}$.

A.12.3.1 INTERSEÇÕES COM PLANOS

As atividades seguintes, que devem ser realizadas segundo as **orientações** da Atividade 5 da página 384, discutem as interseções dos paraboloides hiperbólicos padrão com os planos coordenados e com os planos paralelos aos planos coordenados do ponto de vista algébrico. Graficamente essas interseções já foram visualizadas na Atividade 1 (p. 446).

Atividades

7 Considere a "sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ e contido em $\boldsymbol{x = 0}$" que tem como registro básico simbólico $\boldsymbol{z = -x^2/a^2 + y^2/b^2}$. Com relação a ela, complete os quadros seguintes.

a) Interseções com os planos coordenados;

Quadro A.65 – Interseções da sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ e contido em $\boldsymbol{x = 0}$ com os planos coordenados

Tipo de registro	**Interseção com o plano xy**	**Interseção com o plano xz**	**Interseção com plano yz**
Registro cartesiano			
Registro em língua natural	**Resposta:** Cônicas degeneradas (duas retas concorrentes contidas no plano de equação $z = 0$.	**Resposta:** Parábola abrindo em z_- e contida no plano de equação $y = 0$.	**Resposta:** Parábola abrindo em z_+ e contida no plano de equação $x = 0$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = 0 \\ y = \pm\frac{b}{a}x \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = -a^2 z \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = b^2 z \end{cases}$

Fonte: O autor

b) interseções com planos de equação $z = k_1$; $k_1 \neq 0$;

Quadro A.66 – Interseções da sela com assento abrindo em z_+ e contido em $x = 0$ com os planos de equação $z = k_1$

Condição	Se $k_1 < 0$	Se $k_1 > 0$
Registro cartesiano		
Registro em língua natural	**Resposta:** Hipérboles abrindo em x', $C(0,0,k_1)$ e contidas nos planos de equação $z = k_1$.	**Resposta:** Hipérboles abrindo em y', $C(0,0,k_1)$ e contidas nos planos de equação $z = k_1$.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} z = k_1 \\ \frac{y^2}{b^2 k_1} - \frac{x^2}{a^2 k_1} = 1 \end{cases}$	**Resposta:** É a mesma equação da hipérbole representada ao lado.

Fonte: O autor

c) interseções com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$; $\boldsymbol{k_2.k_3 \neq 0}$.

Quadro A.67 – Interseções da sela com assento abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ e contido em $\boldsymbol{x = 0}$ com os planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$ e $\boldsymbol{x = k_3}$

Tipo de registro	**Interseção com planos de equação $y = k_2$**	**Interseção com planos de equação $x = k_3$**
Registro cartesiano		
Registro em língua natural	Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_-}$, $\boldsymbol{V(0, k_2, k_2^2/b^2)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{y = k_2}$. Elas são congruentes entre si.	Parábolas abrindo em $\boldsymbol{z'_+}$, $\boldsymbol{V(k_3, 0, -k_3^2/a^2)}$ e contidas nos planos de equação $\boldsymbol{x = k_3}$. Elas são congruentes entre si.
Registro simbólico	**Resposta:** $\begin{cases} y = k_2 \\ x^2 = -a^2(z - \frac{k_2^2}{b^2}) \end{cases}$	**Resposta:** $\begin{cases} x = k_3 \\ y^2 = b^2(z + \frac{k_3^2}{a^2}) \end{cases}$

Fonte: O autor

A.13 INTERSEÇÕES DA QUÁDRICAS COM OS EIXOS COORDENADOS: GENERALIZAÇÕES

Considere que os eixos coordenados sejam $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2}$ e $\boldsymbol{\alpha_3}$. Para nossa análise não importa se, por exemplo, o eixo $\boldsymbol{\alpha_1}$ é o eixo $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{z}$. O que importa é que os eixos $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2}$ e $\boldsymbol{\alpha_3}$ são distintos e são os coordenados. O análogo valerá quando definirmos que os *planos 1, 2* e *3* são os planos coordenados. Para as quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão valem as seguintes afirmações:

Quadro A.68 – Generalizações a respeito das interseções com os eixos coordenados

Tipo de objeto	**Interseção com α_1**	**Interseção com α_2**	**Interseção com α_3**

Elipsoide	2 pontos distintos	2 pontos distintos	2 pontos distintos
Hiperboloide de uma folha	2 pontos distintos	2 pontos distintos	ϕ
Hiperboloide de duas folhas	2 pontos distintos	ϕ	ϕ
Cone quádrico elíptico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)
Paraboloide elíptico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)
Paraboloide hiperbólico	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)	1 ponto (origem)

Fonte: O autor

Num sistema cartesiano $\boldsymbol{xyz}$ a interseção das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm a equação com termo independente igual a zero (cones quádricos elípticos padrão e paraboloides padrão) com os eixos $\boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{z}$ é o ponto de coordenadas $\boldsymbol{O(0,0,0)}$, ou seja, a origem do sistema cartesiano. No caso das demais quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas que têm termo independente diferente de zero (elipsoides e hiperboloides) não há interseção com a origem. Portanto, para o caso das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas o termo independente é significativo na identificação ou não da interseção da quádrica com a origem.

No caso dos elipsoides padrão, o procedimento algébrico para determinarmos as coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados consiste inicialmente em escrever a equação na forma básica ($\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$) e, a seguir, calcular os valores das constantes $\boldsymbol{a, b}$ e $\boldsymbol{c}$ que são respectivamente as raízes quadradas dos denominadores dos termos $\boldsymbol{x^2, y^2}$ e $\boldsymbol{z^2}$ (suponha que as variáveis sejam $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$). Feito isso, valem as seguintes afirmações:

- Pontos de interseção com o eixo $\boldsymbol{z \leftrightarrow P(0,0,\pm c)}$;
- pontos de interseção com o eixo $\boldsymbol{y \leftrightarrow P(0,\pm b,0)}$;
- pontos de interseção o eixo $\boldsymbol{x \leftrightarrow P(\pm a,0,0)}$.

Para os hiperboloides padrão as interseções com os eixos coordenados, quando não vazias, são determinadas algebricamente de forma análoga a que fizemos com as elipsoides. No caso em que o termo quadrático da equação básica tem coeficiente negativo à interseção com correspondente eixo é vazia. Assim, em $\boldsymbol{x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1}$ as interseções com os eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ é vazia e com o eixo $\boldsymbol{x}$ é $\boldsymbol{P(\pm a, 0, 0)}$. Em $\boldsymbol{-x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1}$ a interseção com o eixo $\boldsymbol{x}$ é vazia e com os eixos $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ são respectivamente os pontos $\boldsymbol{P_1(0,\pm b, 0)}$ e $\boldsymbol{P_2(0, 0,}\pm\mathrm{c}\boldsymbol{)}$.

Como vemos, do ponto de vista das interseções dos elipsoides e hiperboloides padrão com os eixos coordenados as raízes quadradas dos denominadores dos termos quadráticos *das equações básicas* são significativas, pois determinam as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção(ões) com esses eixos. Para essas quádricas os sinais dos coeficientes dos termos quadráticos também são significativos sendo que quando eles forem positivos indica que há interseção com o eixo o correspondente eixo e quando eles são negativos indica que não há interseção.

Atividades

1 A seguir estão os registros simbólicos de algumas quádricas. Para cada um dos casos determine, quando existir, as coordenados do ponto de interseção com os eixos coordenados. A seguir, faça um esboço do gráfico dessas quádricas incluindo a representação dos pontos calculados anteriormente. Use os resultados desta subseção.

a) $\boldsymbol{x^2/4 + y^2 - 1 = z^2/9}$
b) $\boldsymbol{0 = -z + x^2/4 + y^2}$

A.14 REFLEXÕES DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

O cenário REFLEXÕES QUÁDRICAS possui alguns registros de reflexões das superfícies quádricas. Experimentalmente podemos “brincar” com as quádricas desse cenário e, intuitivamente, conjecturar que cada uma delas pode ser obtida de outra(s) por reflexão(ões) em torno do(s) plano(s) de equação $\boldsymbol{x = 0, y = 0, z = 0, x = y, x = z}$ ou $\boldsymbol{y = z}$.

Algebricamente, há certas propriedades que permitem um estudo mais formal dessas questões e, assim, pode-se refutar ou validar conjecturas.

De maneira mais específica, veremos que dada à equação cartesiana E de uma superfície S podemos obter a equação da superfície refletida em torno de determinados planos. Faremos alguns exemplos nesse sentido para o caso das quádricas padrão não cilíndricas e não degeneradas. A seguir, alguns teoremas que permitem tal estudo.

A.14.1 PROPRIEDADES DE REFLEXÃO

Em um sistema de coordenadas $\boldsymbol{xyz}$, considere as superfícies $S_{\mathbf{1}}$ e $S_{\mathbf{2}}$ de equações, respectivamente, $E_{\mathbf{1}}$ e $E_{\mathbf{2}}$. Valem as propriedades[44] seguintes que chamaremos respectivamente de $P_{\mathbf{1}}$,$P_{\mathbf{2}}$,$P_{\mathbf{3}}$,$P_{\mathbf{4}}$,$P_{\mathbf{5}}$ e $P_{\mathbf{6}}$:

- Se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{z}$ por $(-\boldsymbol{z})$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano $\boldsymbol{xy}$;
- se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{y}$ por $(-\boldsymbol{y})$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano $\boldsymbol{xz}$;
- se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{x}$ por $(-\boldsymbol{x})$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano $\boldsymbol{yz}$;
- se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{y}$ e de $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{x}$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano de equação $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;
- se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{x}$ por $\boldsymbol{z}$ e de $\boldsymbol{z}$ por $\boldsymbol{x}$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano de equação $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$;
- se $E_{\mathbf{2}}$ for obtida a partir da substituição de $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{z}$ e de $\boldsymbol{z}$ por $\boldsymbol{y}$ em $E_{\mathbf{1}}$, então $S_{\mathbf{2}}$ é obtida de $S_{\mathbf{1}}$ por reflexão em torno do plano de equação $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

Para resumir $P_{\mathbf{1}}$,$P_{\mathbf{2}}$,$P_{\mathbf{3}}$,$P_{\mathbf{4}}$,$P_{\mathbf{5}}$ e $P_{\mathbf{6}}$ adotaremos respectivamente os esquemas seguintes.

[44] Essas propriedades estão descritas resumidamente em Anton (2002, p. 237). Nosso objetivo é apenas aplicá-las.

Figura 97 – Propriedades de reflexão

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } xy}]{z \leftrightarrow (-z)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } xz}]{y \leftrightarrow (-y)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano } yz}]{x \leftrightarrow (-x)} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } x=y}]{x \leftrightarrow y} E_2$$

$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } x=z}]{x \leftrightarrow z} E_2$$

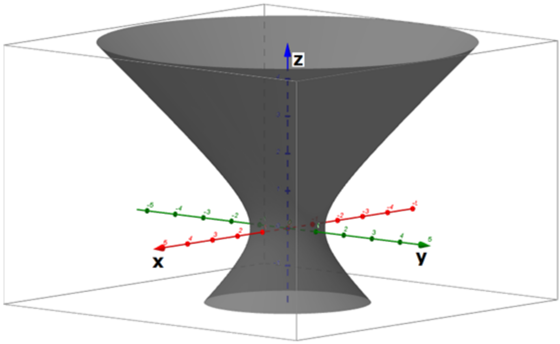
$$E_1 \xleftrightarrow[\substack{\text{reflexão em} \\ \text{relação ao plano de} \\ \text{equação } y=z}]{y \leftrightarrow z} E_2$$

Fonte: O autor

Atividades

1 O registro cartesiano a seguir é da superfície S_1 que é um hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$ que tem $\boldsymbol{x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1}$ como equação básica. Determine a equação básica e o registro básico em língua natural da superfície:

Figura 98 – Reflexões do hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{z}$



Fonte: O autor

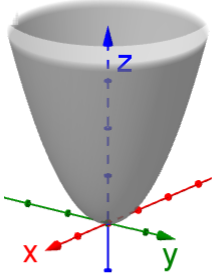
a) S_2 que é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $\boldsymbol{y = z}$;
b) S_3 que é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $\boldsymbol{x = z}$;
c) visualize os resultados encontrados no Geogebra.

Respostas:

a) Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{x^2/a^2 + z^2/b^2 - y^2/c^2 = 1(E_2)}$
b) Hiperboloide de uma folha abrindo em $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{z^2/a^2 + y^2/b^2 - x^2/c^2 = 1(E_3)}$

2 O registro cartesiano a seguir é da superfície S_1 que é um paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ que tem $\boldsymbol{z = x^2/a^2 + y^2/b^2(E_1)}$ como equação básica. Determine a equação básica e o registro básico em língua natural da superfície:

Figura 99 – Reflexões do paraboloide elíptico abrindo em z_+



Fonte: O autor

a) S_2 que é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $y = z$;
b) S_3 que é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano de equação $x = z$;
c) S_4 que é obtida de S_1 por reflexão em torno do plano xy;
d) S_5 que é obtida de S_2 por reflexão em torno do plano xz;
e) S_6 que é obtida de S_3 por reflexão em torno do plano yz;
f) visualize os resultados encontrados no Geogebra.

Respostas:

a) Paraboloide elíptico abrindo em y_+; $y = x^2/a^2 + z^2/b^2 (E_2)$
b) Paraboloide elíptico abrindo em $x_+; x = y^2/b^2 + z^2/a^2 (E_3)$
c) Paraboloide elíptico abrindo em $z_-; z = -x^2/a^2 - y^2/b^2 (E_4)$
d) Paraboloide elíptico abrindo em $y_-; y = -x^2/a^2 - z^2/b^2 (E_5)$
e) Paraboloide elíptico abrindo em $x_-; x = -y^2/b^2 - z^2/a^2 (E_6)$

3 Analise e discuta as afirmações a seguir:

a) Se fizermos uma reflexão da superfície S_1 de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1 (E_1)$ em torno do plano de equação $y = z$ obtemos a superfície S_2 de equação $x^2/a^2 + z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1 (E_2)$;
b) se fizermos uma reflexão da superfície S_1 de equação $z = x^2/a^2 + y^2/b^2 (E_1)$ em torno do plano de equação $x = z$ obtemos a superfície S_2 de equação $x = z^2/c^2 + y^2/b^2 (E_2)$;
c) visualize os resultados encontrados no Geogebra.[45]

[45]Essa questão dá indicativos de que o estudo algébrico é importante para validar ou refutar conjecturas.

Respostas:

a) Não. Obtemos a superfície de equação $\boldsymbol{x^2/a^2+z^2/b^2-y^2/c^2=1}$.
b) Não. Obtemos a superfície de equação $\boldsymbol{x=z^2/a^2+y^2/b^2}$.

Comentário: As três atividades anteriores estudam as reflexões de algumas superfícies quádricas. Um estudo mais amplo permite fazermos generalizações análogas para todas as quádricas. Note que as reflexões em torno dos planos de equação $\boldsymbol{x=0, y=0, z=0, x=y, x=z}$ e $\boldsymbol{y=z}$ permitem articular as diferentes posições padrão de uma mesma quádrica. De maneira mais específica, dado uma das posições padrão de uma dessas quádrica podemos determinar as outras posições a partir de reflexões em torno desses planos. Com isso, as afirmações que fizermos para uma quádrica em uma de suas posições padrão poderão, mediante ajustes provenientes da reflexão, serem estendidas a essa mesma quádrica em suas outras posições padrão. Como exemplo, se soubermos as interseções do paraboloide elíptico abrindo em $\boldsymbol{z_+}$ com os planos coordenados então, mediante as reflexões, também saberemos as interseções dos outros cinco paraboloides padrão com esses planos.

A.15 SIMETRIAS DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Já fizemos um breve estudo visual das simetrias das quádricas não cilíndricas e não degeneradas (subseção A.3.1 – p. 366). A partir dele, sobretudo com relação as simetrias em relação aos planos coordenados, delimitamos as posições padrão, transladadas e rotacionadas (subseção A.3.3 – p. 371). Nessa subseção, daremos atenção às simetrias em relação a esses planos e em relação aos eixos coordenados e veremos que elas podem ser analisadas do ponto de vista algébrico.

A seguir, *apresentaremos* as propriedades que permitem tal estudo e as aplicaremos no estudo das quádricas não cilíndricas e não degeneradas.

A.15.1 PROPRIEDADES DE SIMETRIA

Considere uma superfície S de equação E com variáveis $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$. Valem os seguintes resultados:

Quadro A.69 – Propriedades de simetria

E **não é modificada quando substituímos** x, y **e** z **por**	S **é simétrica em relação ao**
$-x, y, z$	plano yz
$x, -y, z$	plano xz
$x, y, -z$	plano xy
$-x, -y, z$	eixo z
$-x, y, -z$	eixo y
$x, -y, -z$	eixo x
$-x, -y, -z$	Origem

Fonte: Lehmann (2007, p. 347)

Dizemos que uma superfície é totalmente simétrica em relação ao sistema cartesiano quando ela for simétrica em relação aos três planos coordenados, aos três eixos coordenados e à origem. Dos registros básicos simbólicos e das propriedades do Quadro anterior é imediato provar que as seguintes quádricas na posição padrão são totalmente simétricas em relação ao sistema cartesiano: elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos. Isso se deve ao fato de que, nesses casos, todos os termos com variáveis são quadráticos e, além, sabemos que $k^2 = (-k)^2$.[46] Como exemplo, o quadro a seguir verifica essa afirmação para o caso do hiperboloide de uma folha abrindo em z que tem $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ como equação básica.

Quadro A.70 – Verificação das simetrias do hiperboloide de uma folha abrindo em z

Simetria em relação ao plano yz	$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xz	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xy	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(-z)^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Há simetria.)

[46] As superfícies são chamadas de *cêntricas* quando são simétricas em relação a um ponto, ponto esse chamado de centro. Os elipsoides, hiperboloides e cones quádricos elípticos são tipos de *superfícies quádricas cêntricas*. No caso em que essas quádricas estão na posição padrão o centro coincide com a origem do sistema cartesiano. Para ver a lista completa das quádricas cêntricas e não cêntricas ver Lehmann (2007, p. 375).

Simetria em relação ao eixo z	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo y	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo x	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)
Simetria em relação à origem	$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}-\frac{(-z)^2}{c^2}=1 \to \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (Há simetria.)

Fonte: O autor

Para verificar que os outros dois hiperboloides nas posições padrão (abrindo em y e em x) são totalmente simétricos em relação ao sistema cartesiano podemos proceder da mesma maneira que fizemos no Quadro anterior. Porém, se pensarmos no que discutimos na subseção A.14 (p. 458), os hiperboloides de uma folha abrindo em y e em x são determinados a partir de reflexões do correspondente hiperboloide abrindo em z. Assim, dadas as devidas correspondências, se este hiperboloide é totalmente simétrico em relação ao sistema cartesiano então aqueles também são. Da mesma forma, podemos verificar que os elipsoides, os hiperboloides de duas folhas e os cones quádricos padrão são totalmente simétricos. Para efeitos de simplificações de contas, Boulos (2010, p.403) demonstram que para que uma superfície seja totalmente simétrica em relação a um sistema cartesiano basta que ela seja simétrica em relação aos planos coordenados.

No caso dos paraboloides nas posições padrão temos simetria em relação a dois dos planos coordenados e ao eixo coordenado determinado pela interseção desses planos. Esse eixo refere-se a variável linear da equação básica. Como exemplo, veja que no caso do paraboloide elíptico abrindo em z_+, que tem $z = x^2/a^2 + y^2/b^2$ como equação básica, a variável linear é z e, por isso, ele é simétrico em relação ao eixo z e aos planos xz e yz – perceba que a interseção desses planos determina o eixo z. Para verificar essa afirmação, veja o quadro seguinte.

Quadro A.71 – Verificação das simetrias do paraboloide elíptico abrindo em z_+

Simetria em relação ao plano yz	$z=\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \to z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)

Simetria em relação ao plano xz	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao plano xy	$(-z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) \rightarrow z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (Não há simetria.)
Simetria em relação ao eixo z	$z = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (Há simetria.)
Simetria em relação ao eixo y	$(-z) = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \rightarrow z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)
Simetria em relação ao eixo x	$(-z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \rightarrow z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)
Simetria em relação à origem	$(-z) = \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} \rightarrow z = -(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})$ (Não há simetria.)

Fonte: O autor

Para os demais paraboloides padrão as verificações podem ser feitas recorrendo às reflexões (análogo ao que dissemos para os hiperboloides de uma folha).

Para efeitos de simplificações de contas, pode-se recorrer ao fato de que de maneira geral se uma superfície é simétrica em relação a dois dos planos coordenados, então ela também é simétrica em relação ao eixo coordenado determinado pela interseção destes planos - teorema enunciado em Lehmann (2007, p. 350).

Diante dessas discussões, podemos fazer algumas *generalizações* a respeitos das quádricas não cilíndricas e não degeneradas nas posições padrão. Primeiro, as que têm como variáveis apenas três termos quadráticos são totalmente simétricas (elipsoides; hiperboloides; cones quádricos elípticos). Além disso, no caso das que têm como variáveis apenas dois termos quadráticos e um termo linear (paraboloides) há simetria em relação a dois planos coordenados e a um eixo coordenado. Esse eixo será o eixo correspondente a variável linear e os planos são os que contêm esse eixo ou, em outros termos, são os que determinam, por interseção, esse eixo. O quadro a seguir resume o que dissemos neste parágrafo.

Quadro A.72 – Simetrias das quádricas

Tipo de quádrica padrão	**Características visuais**	**Características algébricas dos termos da equação básica**
Elipsoides/ hiperboloides/cones quádricos elípticos	Totalmente simétrico em relação ao sistema cartesiano	Três termos quadráticos
Paraboloides	- Simetria em relação a um eixo coordenado $\boldsymbol{\alpha}$; - simetria em relação a dois planos coordenados. Observação: esses planos são os que contêm o eixo $\boldsymbol{\alpha}$.	- Um termo é linear (esse termo é $\boldsymbol{\alpha}$); - dois termos quadráticos.

Fonte: O autor

Diante do estudo das simetrias feito nesta seção, podemos retomar o estudo das posições padrão realizado na seção A.3.3.1 (p. 374) e incluir o ponto de vista algébrico. Dessa forma, como consequência imediata da aplicação das propriedades de simetria nas definições das posições padrão dadas no Quadro A.3 (p. 374), para provar que a quádrica está na posição padrão, no caso dos elipsoides, dos hiperboloides e dos cones quádricos elípticos, basta verificarmos se eles são totalmente simétricos em relação ao sistema cartesiano; no caso dos paraboloides é suficiente verificar se dois dos planos coordenados são planos de simetria e se o vértice/ponto de sela coincide com a origem. O procedimento algébrico usado nesta última verificação consiste em apenas averiguar se origem pertence à superfície quádrica.

Como vemos, as propriedades de simetria que discutimos permitem interpretar globalmente as simetrias em relação aos planos coordenados e, consequentemente, analisar as posições padrão do ponto de vista algébrico.

Atividades

1 Considere as quádricas de equação $\boldsymbol{x^2/4+y^2-z^2/9=1(E_1)}$ e $\boldsymbol{z=x^2/4+y^2(E_2)}$. Resolva as atividades seguintes.

a) com relação à superfície de equação $\mathrm{E}_{\mathbf{1}}$, complete os quadros a seguir com sim (S) ou não (N).

Quadro A.73 – Simetria: atividade 1 a

Simetria em relação ao plano xy	**Simetria em relação ao plano xz**	**Simetria em relação ao plano yz**	**Simetria em relação ao eixo x**	**Simetria em relação ao eixo y**	**Simetria em relação ao eixo z**
Resposta: S	**Resposta:** S	**Resposta:** S	**Resposta:** S	**Resposta:** S	**Resposta:** S

Fonte: O autor

b) com relação à superfície de equação $\mathrm{E}_{\mathbf{2}}$, complete os quadros a seguir com sim (S) ou não (N).

Quadro A.74 – Simetria: atividade 1 b

Simetria em relação ao plano xy	**Simetria em relação ao plano xz**	**Simetria em relação ao plano yz**	**Simetria em relação ao eixo x**	**Simetria em relação ao eixo y**	**Simetria em relação ao eixo z**
Resposta: N	**Resposta:** S	**Resposta:** S	**Resposta:** N	**Resposta:** N	**Resposta:** S

Fonte: O autor

Sugestão: visualize o que foi discutido nesta questão no Geogebra.

ANEXO A – PRODUÇÃO DO ALUNO A_1

1) semelhança: ambos tem o mesmo formato
diferença: estão em direções diferentes

2) a) Uma Elipse, vazio ou um ponto

B) Uma Elipse, vazio ou um ponto

C) semelhança: ambos são iguais após o corte

→ são paralelos ao plano X,Y. (Elipses)
a medida que se afastam do ponto de origem, elas aumentam de tamanho.

diferença: estão em sentidos opostos, então as Elipses superiores ficaram perpendiculares ao eixo Z positivo, e as Elipses inferiores ficaram perpendiculares ao eixo Z negativo.

3) A diferença entre as elipses é a sua perpendicularidade, uma delas a P_1, é perpendicular ao Z positivo, e a outra a P_2, é perpendicular ao Y negativo.

4) semelhanças → partem da origem.

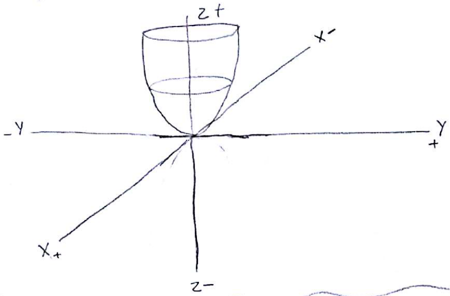
diferenças → são os eixos em que apontam e os sinais são diferentes, então são sentidos opostos

5) O sinal dos Termos quadráticos indica o sentido do paraboloide Elíptico.

A variável linear indica com qual eixo as Elipses são perpendiculares

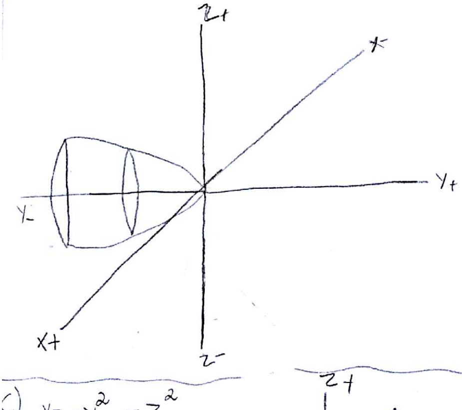
6) $z = +\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$

a)



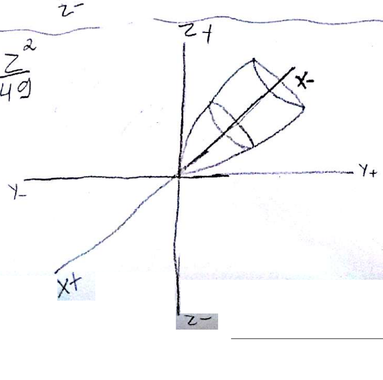
Paraboloide Elíptico abrindo em Z+

B) $y = -x^2 - z^2$



Paraboloide Elíptico abrindo em Y-

C) $x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$



Paraboloide Elíptico abrindo em X-.

6) d) $z+$, a variável linear indica com qual eixo os elipses são perpendiculares. E o sentido para que elas apontam é possível ver através do sinal da variável quadrática

e) $y-$, idem item anterior.

f) x^-, idem item anterior.

7) a) Origem

B) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ z = 0 \end{cases}$

$0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2}$

substituindo o x e o Y por zero, teremos um numerador 0, e dividindo eles por qualquer denominador, irá zerar o mesmo Portanto, x e Y igual a 0, são a solução.

c) Uma Parábola

d) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ y = 0 \end{cases}$

$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{0^2}{B^2}$

$z = \dfrac{x^2}{a^2}$

$\boxed{a^2 z = x^2}$

e) Isso é uma parábola por que o x esta ao quadrado, e z é variável linear. E o geogebra mostra que é uma parábola

f) Parabola

g) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ x = 0 \end{cases}$

$z = \dfrac{0^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2}$

$z = \dfrac{y^2}{B^2}$

$\boxed{B^2 \cdot z = y^2}$

h) Idem a letra "E"

i) Elipses perpendiculares ao Z+ ou vazio.

j) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ z = K_1 \, ; \, K_1 \neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{1}{\cancel{K_1}} \cdot \cancel{K_1} = \dfrac{1}{K_1} \cdot \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{1}{K_1} \cdot \dfrac{y^2}{B^2}$

$\boxed{1 = \dfrac{x^2}{K_1 a^2} + \dfrac{y^2}{K_1 B^2}}$

k) não lembro

l) Parabola

m) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ y = K_2 \, ; \, K_2 \neq 0 \end{cases}$

$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{K_2^2}{B^2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{-K_2^2}{B^2} + z = \dfrac{x^2}{a^2}$

$\boxed{a_2 \cdot \dfrac{-K_2^2}{B^2} + z = x^2}$

n) não lembro

7)

O) Parabola

P) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{B^2} \\ x = k_3 \ ; \ k_3 \neq 0 \end{cases}$

$$z = \frac{(k_3)^2}{a^2} + \frac{y^2}{B^2}$$

$$\boxed{B_2 \cdot z - \frac{k_3^2}{a^2} = y^2}$$

Q) não lembro.

8)a) Quando substitui a equação do plano no paraboloide, não é possível ficar com duas variáveis quadráticas com sinais opostos.

B) Quando substituir a equação do plano no paraboloide, verificamos então que o coeficiente da variável linear fica positivo. Então formará uma parabola no sentido positivo.

c) Quando substituir a equação do plano no paraboloide, verificamos então que o coeficiente da variável linear fica negativo. Então formará uma elipse no sentido negativo

d) Quando substituir a constante maior que 0, no lugar do z sobrará as características de uma elipse. Que é uma constante igualada a dois termos quadráticos.

e) Não tem solução pq a soma de duas variáveis quadráticas, não tem como dar um número positivo.

) Ao substituir uma constante negativa no lugar da variável linear, ficamos com sinais negativos, então dividimos toda a equação por esta meta constante, e ficamos com as características de uma Elipse, duas variáveis quadráticas igualadas a uma constante.

) Não tem solução pq as duas variáveis quadráticas não tem como dar um valor positivo. Então

A dinâmica do curso facilitou sim o entendimento dos gráficos.

O conjunto, explicação do professor, material impresso e os dados visuais do geogebra, permitiram a visualização completa das figuras.

Muitas vezes é difícil fazer uma conexão da parte algébrica com o gráfico.

Da forma que foi explicado nos ajuda a fazer um "link" entre a parte algébrica e o formato das figuras.

Deixar a aula dinâmica, possibilitando ver mais opções em menos tempo

VII

ANEXO B – PRODUÇÃO DO ALUNO A_2

1) As semelhanças: Ambos são parabolóides elípticos

As diferenças: A formulo das parabolóides faz com que elas abram em eixos diferentes. Lembrando que; o termo linear é o responsável por mostrar para onde está sendo a abertura

2)

a) Podemos obter tanto uma circunferência, como uma elipse. Tudo depende dos valores aplicados em "a" e "b" b) O formato se mantem, a posição que muda

c) Encontramos o mesmo caso da questão "a" entretanto, a elipse (ou circunferencia), se encontra centrada nos valores negativos de z.

A medida que o valor da posição aumenta, os seguintes fatos ocorrem:

- a elipse de P_1 tem seus eixos maiores crescendo de acordo que o plano se desloca para o lado positivo
- a elipse de P_2 tem seus eixos maiores crescendo de acordo que o plano se desloca para o lado negativo

3) Ambas as elipses possuem seus centros alinhados ao eixo que a paraboloide se encontra, entretanto suas posições variam por conta de seus eixos.

- P_1: Elipse centrada no lado positivo de z
- P_4: Elipse centrada no lado negativo de y.

4) Podemos observar duas mudanças entre as equações:

- A ordem das variáveis:

Exemplo: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$

- Os sinais das frações

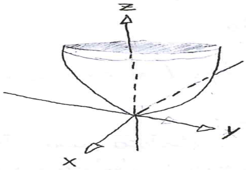
Exemplo: $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$

5) Podemos achar a posição da elipse de acordo as seguintes observações:

$$\boxed{z} = \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \rightarrow$$ as variáveis quadráticas determinam o sentido da elipse, sendo ela negativa ou positiva.

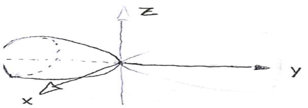
→ a variável linear determina a qual eixo a elipse se encontra perpendicular.

6) a) $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + z = 0 \rightarrow -\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = -z \xrightarrow{\times(-1)} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$



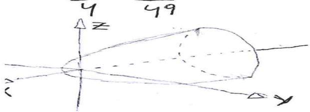
Parabolóide elíptico abrindo em z_+

b) $-y - x^2 - z^2 = 0 \rightarrow -\frac{x^2}{1^2} - \frac{z^2}{1^2} = y$



Parabolóide elíptico abrindo em y_-

c) $-\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49} - x = 0 \rightarrow x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$



Parabolóide elíptico abrindo em x.

d) z_+ : variavel linear z
variaveis quadraticas positivas

e) y_- : variavel linear y
variaveis quadraticas negativas

f) x_- : variavel linear x
variaveis quadraticas negativas.

7) a) A intersecção do plano $z=0$ com o paraboloide P_1, resulta um ponto

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z=0 \end{cases}$

$0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$x=0$
$y=0$

Os únicos números não negativos que somados são iguais a zero, são somente zeros.

c) Parábola.

d) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases}$

$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} \rightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2} \rightarrow x^2 = z \cdot a^2$

e) Abrindo em Z_+, pois o termo linear é Z e está positivo.

f) Parábola

g) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases}$

$z = \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \rightarrow z = \dfrac{y^2}{b^2} \rightarrow y^2 = z \cdot b^2$

h) Abrindo em Z_+, idem letra e)

i) Elipse ou vazio, depende da posição do plano.

j) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = k_1, \; k_1 \neq 0 \end{cases}$ $\quad \dfrac{k_1}{k_1} = \dfrac{\frac{x^2}{a^2}}{k_1} + \dfrac{\frac{y^2}{b^2}}{k_1} \rightarrow 1 = \dfrac{x^2}{a^2 \cdot k_1} + \dfrac{y^2}{b^2 \cdot k_1}$

k) se $a>b$, temos uma elipse alongada em x, pois seu divisor é maior que o de y

se $b>a$, temos uma elipse alongada em y, pois seu divisor é maior que o de x

se $a=b$, temos uma circunferência, pois os valores dos divisores são iguais

se k_1 for negativo, não tem como a soma de dois numeros negativos serem iguais a 1, por isso o vazio.

l) Parábola

m) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k_2 \ ; \ k_2 \neq 0 \end{cases}$ $\quad z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} \rightarrow -\frac{x^2}{a^2} = z - \frac{k_2^2}{b^2} \rightarrow -x^2 = a^2\left(z - \frac{k_2^2}{b_2}\right)$

$$\downarrow$$

$$x^2 = -a^2 z - \frac{k_2^2}{b_2} \cdot a^2$$

n) abrindo em z^-, pois o coeficiente do termo linear, é negativo.

o) Parábola

p) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 \ ; \ k_3 \neq 0 \end{cases}$ $\quad z - \frac{k_3^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \quad b^2\left(z - \frac{k_3^2}{a^2}\right) = y^2$

q)

z^+

$V = \left(k_3 \ ; \ 0 \ ; \ \frac{k_3^2}{a^2}\right)$

8) a) Para haver uma equação de hipérbole, seria necessário que os termos quadráticos fossem opostos, algo que é impossível de chegar através das substituições

b) Qualquer uma das constantes que forem substituídas na equação, não irão alterar o sinal dela, logo, as parábolas sempre estarão no sentido positivo

c) A ideia é a mesma da questão anterior, porém com valores negativos.

d) Qualquer valor maior que zero, ao substituí-lo em z, podemos adaptar a equação para que ela fique no formato de uma equação da elipse.

e) Porque é impossível a soma de dois positivos darem um negativo, então a solução é vazia

f) A ideia é a mesma da questão d, entretanto, com valores negativos.

g) A solução é vazia, pois a soma de dois negativos, não pode dar um valor positivo

Sim, a forma a qual o conteúdo foi passado, facilitou bastante o aprendizado. Geralmente é mais complicado aplicar o conteúdo teorico na prática, entretanto o Geogebra é extremamente ilustrativo e didático. Sem dúvidas a metologia foi importante em tudo no curso.

ANEXO C – PRODUÇÃO DO ALUNO A_3

① O P1 tem sua "abertura" perpendicular ao eixo z e o P2 ao eixo y. Ou seja, P1 é perpendicular plano xy e o P2 perpendicular ao plano xz.

② a) É obtido um círculo sempre aumentando quando se afasta do plano xy. Exceto no ponto (0,0,0), pois se obtem um ponto.

b) É obtido um círculo sempre aumentando quando se afasta do plano xy. Exceto no ponto (0,0,0), pois se obtem um ponto.

c) É semelhante na sua forma, mas na letra "b" a elipse ou círculo obtido na intersecção é perpendicular ao eixo z negativo. Na letra "a", a elipse obtida é perpendicular ao eixo z positivo.

(3.1) As elipses de P_1 são perpendiculares ao eixo z e P_4 perpendiculares ao eixo y.
O plano, corta-os de diferentes maneiras, para P_1 é obtida uma elipse e em P_4 é obtido uma parábola.

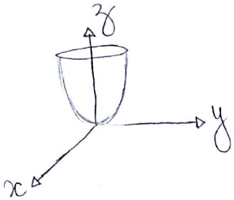
(4) A letra no 1º membro da equação (x, y ou z) não está elevada ao quadrado e nem há nada a dividindo. Há também diferenças entre elas, sendo que algumas que são igualadas à mesma letra, ora são todas negativas, ora são todas positivas.

(5) As elipses do parabolóide elíptico são perpendiculares ao eixo isolado (x, y ou z), a parabolóide estará na parte positiva do eixo quando a equação for toda positiva, quando a equação tiver o 2º membro negativo a parabolóide estará na parte negativa do eixo.

Ex.: $x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ → abrindo em x, na parte positiva

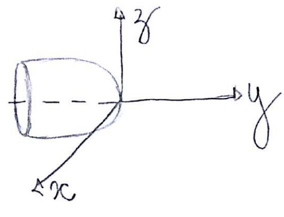
$z = -\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ → abrindo em z, na parte negativa

(6) a) $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$



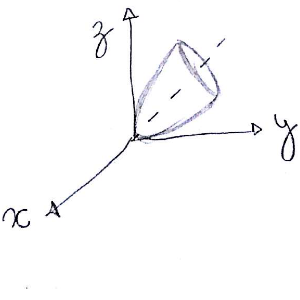
Parabolóide elíptico abrindo em z positivo.

b) $-x^2 - z^2 = y$



Parabolóide elíptico abrindo em y negativo.

c) $x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$



Parabolóide elíptico abrindo em x negativo.

d) Perpendiculares ao eixo z positivo. A equação é toda positiva e o eixo z está isolado (linear).

e) Perpendiculares ao eixo y negativo. Na equação o termo linear isolado (y) e os termos quadráticos são negativos.

f) Perpendiculares ao eixo x negativo. Na equação o termo linear isolado (x) e os termos quadráticos são negativos.

7_ a) Um ponto.

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$-\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$ $\quad \boxed{y = 0}$ e $\boxed{x = 0}$

Para um número elevado ao quadrado dar negativo, o único jeito é o x e o y sendo 0, pois ele é neutro.

c) Uma parábola

d) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2} + \cancel{\dfrac{0^2}{b^2}} \rightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2}$

$a^2 \cdot z = x^2$

e) Abrindo em z positivo

$\downarrow$

variável linear z e a constante é positivo.

f) Uma parábola

g) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow z = \dfrac{0^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \rightarrow z = \dfrac{y^2}{b^2}$

$b^2 . z = y^2$

h) Abrindo em z positivo

variável linear z e a constante é positiva

i) Se o plano estiver na parte negativa do eixo, não terá intersecção com a parabolóide e se o plano estiver na parte positiva do eixo, a intersecção resultará em uma elipse.

j) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = k_1 ;\ k_1 \neq 0 \end{cases} \rightarrow k_1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \ (\div k_1)$

$1 = \dfrac{x^2}{k_1 . a^2} + \dfrac{y^2}{k_1 . b^2}$

Obs.: Quando k_1 é negativo, no geogebra dá vazio e colocando um sinal negativo na frente do k_1 nos termos quadráticos da equação, não dará a equação de uma elipse, pois ela é sempre negativa.

(7) k) Quando a > b resultará em uma elipse alongada no eixo x, quando b > a resultará em uma elipse alongado no eixo y e quando a = b resultará em uma circunferência. Com isso, o próprio paraboloide se alongará junto com as elipses

l) Uma parábola

m) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = k_2 \, ; \, k \neq 0 \end{cases} \rightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k_2^2}{b^2}$

$$z - \frac{k_2^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

$$a^2\left(z - \frac{k_2^2}{b^2}\right) = x^2$$

n) Abrindo em z positivo, pois z é o linear e porque a constante (a^2) é positiva. Seu vértice $= \left(0, k_2, \dfrac{k_2^2}{b^2}\right)$

o) Uma parábola.

p) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 \, ; \, k \neq 0 \end{cases} \rightarrow z = \dfrac{k_3^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$$z - \frac{k_3^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$b^2 \cdot \left(z - \frac{k_3^2}{a^2}\right) = y^2$$

g) Abrindo em z positivo, pois o z é o linear e a constante (b^2) é positiva. Seu vértice $= \left(k_3, 0, \frac{k_3^2}{a^2}\right)$

(8)

a) Na equação da parabolóide, o sinal dos termos quadráticos é sempre igual e nunca chegará a ter termos quadráticos com sinais opostos (como o da hipérbole).

b) Sempre que substituir β ou γ por uma constante resultará em uma parábola, pois na equação aparecerá um termo linear, com um coeficiente positivo e um termo quadrático isolado.

c) Pois na equação aparecerá um termo linear, com um coeficiente negativo e um termo quadrático isolado.

d) Pois na equação aparecerá dois termos quadráticos positivos e o número 1 isolado.

e) Pois na equação aparecerá dois termos quadráticos negativos (por causa do k_1) e então nunca se igualará a 1.

f) Pois na equação aparecerá dois termos quadráticos negativos e o número 1 isolado.

g) Pois na equação continuará dois termos quadráticos negativos e então nunca se igualará a 1.

• O curso foi muito bem elaborado e teve explicações muito boas. É um curso que irei levar para a engenharia, para tentar tirar notas melhores em cálculo, pois com certeza ajudou e muito. Ainda mais com a ferramenta Geogebra, que nos fez visualizar ainda melhor os gráficos e entender suas equações. Agora, conseguimos identificar, através das equações, qual será seu gráfico, o porque dele e vice versa.

ANEXO D – PRODUÇÃO DO ALUNO A_4

1 - P_1 se algonga no eixo $z+$ e P_4 se alonga no eixo $y-$ e possuem o mesmo formato

2 a) caso $K_1 > 0$ forma uma elipse perpendicular ao eixo $z+$, cujo raio aumenta conforme K_1 aumenta, caso $K_1 = 0$ forma um ponto e caso $K_1 < 0$ não há interseção

b) caso $K_1 < 0$ forma uma elipse perpendicular ao eixo $z-$ cujo raio aumenta conforme K_1 diminui, caso $K_1 = 0$ forma um ponto e caso $K_1 > 0$ na há interseção

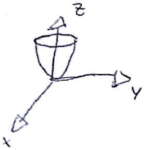
c) ambos casos forma elipses, porém no primeiro a elipse é formada perpendicula a $z+$ e no segundo, em $z-$

3. P_1 se alonga no eixo $z+$, em P_4, no eixo $y-$ e um plano que fizesse uma interseção com P_1 e gerasse uma elipse, geraria uma paralola em P_4 e vice-versa
O raio da elipse formada por uma interseção de P_1 e um plano perpendicular ao eixo $z+$ aumenta caso dito plano se afaste da origem, para P_4. o plano deverá ser perpendicular ao eixo $y-$ posa formar uma elipse cujo raio aumenta caso o plano se afaste da origem

4 - Todas as equações possuem componentes ao quadrado, todos são ou positivos ou negativos, possuem um valor isolado, um dos termos da equação é sempre positiva

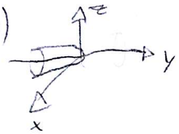
5 - o termo linear determina qual eixo é perpendicular às elipses e os termos quadrático determinam se as figuras existem na parte positiva ou negativa do eixo

6 - a)



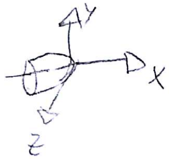
Paraboloide elíptico abrindo em z+

b)



" " " " y-

c)



" " " " x-

d) semieixo z+ ; termo linear é z e os termos quadráticos são positivos

e) semieixo y- ; linear é y, quadráticos negativos

f) semieixo x- ; linear é x, quadráticos negativos

7 a) ponto

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases}$

$$-\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} = 0$$

$$x = y = 0$$

para que z seja igual a 0, x e y também devem ser 0

c) parabola

d) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases}$

$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2}$

$z = \frac{x^2}{a^2}$

$a^2 z = x^2$ (abre no semieixo z + pois z é o linear e z é positivo

f) parábola

g) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad z = 0 + \frac{y^2}{b^2}$

$b^2 z = y^2$

h) abre no semieixo z + pois z é o linear e z é positivo

i) K_1 positivo seria elipses e K_2 negativo não há interseção

j) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = K_1 \end{cases}$

$K_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$$1 = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{K_1}$$

$1 = \frac{x^2}{K_1 a^2} + \frac{y^2}{K_1 b^2}$

se K_1 for negativo faz a soma dos termos serem negativos, o que é diferente de 1

7 k) $a > b$ a elipse gerada é alongada em x,

$a < b$ " " " " " " y

$a = b$ é uma circunferência

l) parábola

m) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k_2 \neq 0 \end{cases}$ Procedimento P

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{K_2^2}{b^2}$$

$$z - \frac{k_2^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

$$a^2 z - \frac{K_2^2 a^2}{b^2} = x^2$$

$ax^2 + bx + c = 0$

n) $z+$ pois z é linear e seu coeficiente é positivo vértice $\left(0, k_2, \frac{k_2^2}{b^2}\right)$

o) parábola

p) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 ; \ k_3 \neq 0 \end{cases}$

$$z - \frac{K_3^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$zb^2 - \frac{K_3^2 b^2}{a^2} = y^2 \Rightarrow b^2\left(z - \frac{k_3^2}{a^2}\right) = y^2$$

q) $V\left(K_3, 0, \frac{K_3^2}{a^2}\right)$

8 - a) ao substituir os valores, não é possível obter termos quadráticos de sinais diferentes

b) Pois o coeficiente do termo linear é positivo e há um termo quadrático do outro lado da igualdade

c) Pois o coefiente do termo linear é negativo e há um termo quadrático do outro lado da igualdade

d) Ao substituir se obtem dois termos quadráticos positivos de um lado da equação e o 1 do outro lado

e) Os termos quadraticos seriam negativos e nunca resultariam em 1

f) Pois os dois membros seriam negativos e ao dividi-los formariam dois termos quadráticos positivos em um lado e 1 do outro

g) Pois teriamos dois termos negativos de um lado, isso nunca resultará em um número positivo

Gostei de participar do curso pois com ele eu pude aprender algo que usarei posteriormente no curso. O professor teve uma boa didática e grande comprometimento para que todos os alunos entendessem o conteúdo, teve uma ótima forma de avaliar os participantes do curso. O uso do geogebra foi de grande ajuda para o entendimento dos gráficos, fazendo ser possível perceber como eles se comportam caso mudanças sejam feitas nas equações das figuras

ANEXO E – PRODUÇÃO DO ALUNO A_5

1) Os dois paraboloides P1 e P4 se assemelham em formato e origem, porém, se diferenciam pelo fato de P1 abrir em Z^+ e P4 abrir em Y^-.

2) a) Para $Z>0$ tenho uma elipse
$Z=0$ tenho um ponto
$Z<0$ tenho vazio

b) Para $Z>0$ tenho vazio
$Z=0$ tenho ponto
$Z<0$ tenho uma elipse

c) As mesmas figuras com sentidos opostos

3) As elipses de P1 estão abertas em Z^+ e as elipses de P4 estão abertas em Y^-.
Os eixos das elipses aumentam conforme o valor do eixo de abertura (x, y, z) aumentam ou diminui caso o eixo de abertura seja negativo

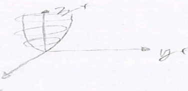
4 → Se assemelham pelo fato de todas as equações existir uma relação entre $\{x, y \text{ e } z\}$, diferenciam na disposição dos termos na equação, e no sinal dos termos.
↳ x e y em função de z, x e z em função de y, por exemplo.

5)

O linear determina o eixo perpendicular e os sinais dos termos quadráticos determinam o sinal do semi-eixo.

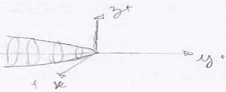
6)

a) $z = +\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$



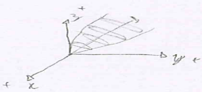
Paraboloide elíptico abrindo em z^+

b) $y = -x^2 - z^2$



Parabolóide elíptico abrindo em y^-

c) $x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$



Parabolóide elíptico abrindo em x^-

d) z^+ pois a parte linear da equação é z e os termos quadráticos são positivos

e) y^- pois a parte linear da equação é y e os termos quadráticos são negativos

f) x^- pois a parte linear da equação é x e os termos quadráticos são negativos

7)

a) um ponto.

b) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | $\frac{0}{1} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ → Pela regra do polinômio nulo
$z = 0$ | $x^2 + y^2 = 0$ então $x = 0$ e $y = 0$.

c) Parábola

d) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | $\frac{x^2}{a^2} + 0 = z$ → $\frac{x^2}{a^2} = z$ → $x^2 = za.(a)$
$y = 0$

e) O linear determina a abertura e o sentido, sendo $+za^2$ abre em z e é positivo.

f) Parábola

g) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ | $z = \frac{y^2}{b^2}$ → $y^2 = zb^2$
$x = 0$

h) O linear determina a abertura e o sentido, sendo $+zb^2$ abre em z e é positivo

i) $K_1 > 1$ ⇒ elipse
$K_1 = 0$ ⇒ ponto
$K_1 < 0$ ⇒ nada

j) $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2}$ | $K_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot \frac{1}{K_1} \Rightarrow \frac{x^2}{K_1 a^2} + \frac{y^2}{K_1 b^2} = 1$

$z = K_1$

Se K_1 for negativo os denominadores serão negativos e consequentemente a relação deixa de ser igual a 1.

7) k) $a > b$: ELIPSE ALONGADA em x

$b > a$: ELIPSE ALONGADA em y

$b = a$: CIRCUNFERÊNCIA

O paraboloide continua com seu crescimento em lados, com $b=a$ ele será um paraboloide circular, se $a>b$ será alongado em x e se $b>a$ será alongado em y.

l) parabola

m) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = K_2 ; K_2 \neq 0 \end{cases}$ | $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{K_2^2}{b^2}$ | $z - \dfrac{K_2^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$ | $x^2 = za^2 - \dfrac{a^2 K_2^2}{b^2}$

n) $z^+ \to z$ é linear e positivo VERTICE $= (0, K_2, +\dfrac{K_2^2}{b^2})$

o) Parábola

p) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = K_3 ; K_3 \neq 0 \end{cases}$ | $z = \dfrac{K_3^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ | $y^2 = zb^2 - \dfrac{b^2 K_3^2}{a^2}$

q) VÉRTICE $(K_3, 0, +\dfrac{K_3^2}{b^2})$

8) a)

Sempre que se substitui um valor para plano perde-se um quadrático.
E independente da manipulação não consegue-se termos quadráticos com sinais opostos.

b)

Caso haja intersecções feitas por planos paralelos a $\beta=0$ e $\mathcal{H}=0$ teremos um linear em α com o coeficiente positivo e um quadrático positivo no outro lado da igualdade

c)

Caso haja intersecções feitas por planos paralelos a $\beta=0$ e $\mathcal{H}=0$ teremos um linear em α com o coeficiente negativo e um quadrático positivo no outro lado da igualdade.

d) Na manipulação feita após substituir o valor K_1 no eixo α obtém-se dois valores quadráticos com K_1 no quociente e a soma destes dois termos quadráticos se iguala a 1.

e) Algebricamente quando K_1 é negativo teremos dois termos quadráticos negativos, porém, igualados a 1, ou seja, não está correto e o plano não corta a figura e sim o vazio.

f) se $\alpha = \frac{-\beta^2}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{b^2}$ e $z = K_1$; $K_1<0$ teremos após a manipulação dois termos quadráticos positivos, portanto, serão elipses.

g) Se $\alpha = \frac{-\beta^2}{a^2} - \frac{\mathcal{H}^2}{b^2}$ e $z = K_1$; $K_1>0$ teremos após a manipulação dois termos quadráticos negativos igualados a 1, portanto será vazio $\emptyset$.

BOM, ACREDITO QUE COM O MONTANTE DE CONHECIMENTOS APRESENTADOS A MINHA PESSOA POR MEIO DO GRANDE MESTRE SÉRGIO TAMBÉM CONHECIDO COMO "SERJÃO DA GA", SAIO UM POUCO MAIS SÁBIO, COM NOVOS INTERESSES E SABERES NA ÁREA DA GEOMETRIA.

DESDE JÁ AGRADEÇO O TEMPO DISPOSTO PELO GRANDE "SERJÃO DA GA", TEMPO ESSE DEDICADO A DEIXAR OS ALUNOS MAIS RICOS EM CONHECIMENTO.

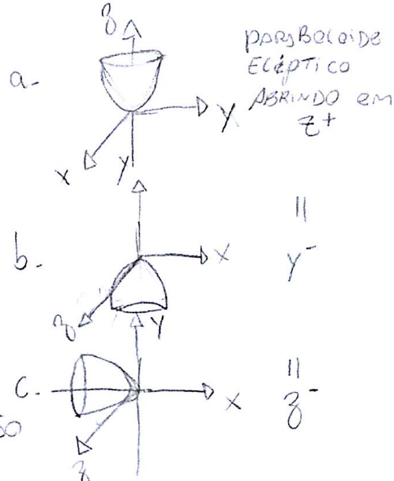
UM GRANDE ABRAÇO,

ANEXO F – PRODUÇÃO DO ALUNO A_6

① AMBOS ESTÃO NO EIXO Z
UM É ESPELHO DO OUTRO, LADO POSITIVO E NEGATIVO
②
a. ELIPSE, PONTO OU NADA
b. " " " "
C - NA LETRA A ESTA NO SENTIDO POSITIVO, E NA B NO SENTIDO NEGATIVO, AMBOS SÃO PERPENDICULARES AO EIXO Z. EM AMBOS OS CASOS QUANTO MAIS LONGE DO ZERO, MAIOR SERÁ O EIXO DAS ELIPSES.
③ NO CORTE DO PLANO, UM ESTA SEMPRE PERPENDICULAR POSITIVO E OUTRO NEGATIVO. UM EM RELAÇÃO Z POSITIVO E OUTRO Y NEGATIVO.

④ OS VALORES SÃO SEMPRE POSITIVOS OU NEGATIVO;
HA SEMPRE UM VALOR ISOLADO;
UM DOS LADOS DA EQUAÇÃO É SEMPRE POSITIVA

5 - O linear corresponde ao eixo perpendicular e a equação quadrática determinará se for positiva ou negativa no eixo



6.

a - $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + z = 0$ $\quad z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$

b - $-y - x^2 - z^2 = 0$ $\quad y = -x^2 - z^2$

c - $-\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49} - x = 0$ $\quad x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}$

d - z^+, pois o valor linear é z e a equação quadrática é positiva

e - y^-, y é o linear e equação quadratica negativa

f - z^-, z " " " " ".

7 -

a - ponto.

b - $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases}$

z sendo 0, x^2 e y^2 também devem ser 0

c - uma parabola

d - $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2}$

$z = \frac{x^2}{a^2}$

$x^2 = z \cdot a^2$

e - abrindo em z positivo, pois a constante na linear é +

~~Um~~ parabola.

g- $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$x = 0$

$z = \frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$z = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow b^2 z = y^2$

h- ABRE EM z^+ e é positivo DEVIDO A CONSTANTE SER +

i-

UMA elipse caso positivo, e se for NEGATIVA, NÃO DA NENHUMA FORMA

f-

$K_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$1 = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}{K_1}$

$1 = \frac{x^2}{K_1 a^2} + \frac{y^2}{K_1 b^2}$

A equação tem que se igualar para resultar a 1

(K)

$a > b \rightarrow$ O ALONGAMENTO EM X SERÁ MAIOR
$b > a \rightarrow$ O ALONGAMENTO EM Y SERÁ MAIOR
$a = b \rightarrow$ SERÁ UMA CIRCUNFERÊNCIA

O MESMO ACONTECE PARA UM PARABOLOIDE COM SEUS EIXOS.

(l) PARABOLA

(m)

$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k_2 ;\ k_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} \Rightarrow z - \frac{k_2^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow a^2\left(z - \frac{k_2^2}{b^2}\right) = x^2$

(n) z^+, pois z é linear e seu coeficiente é positivo
VÉRTICE $= \left(0, k_2, \frac{-k_2^2}{b^2}\right)$

(o) PARABOLA

(p) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 ;\ k_3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow b^2\left(z - \frac{k_3^2}{a^2}\right) = x^2$

(q) VÉRTICE $\left(k_3, 0, \frac{k_3^2}{a^2}\right)$

(8)

(a) AO SUBSTITUIR NA EQUAÇÃO, NÃO É POSSIVEL TER SINAIS DIFERENTES E DOIS TERMOS QUADRÁTICOS.

(b) pois seu coeficiente é positivo

(c) pois após a substituição o coeficiente é negativo.

d) Após substituir, torna-se uma equação de uma elipse.

(Um dos membros é dois quadráticos positivos e o outro o nº 1)

e)

Se K_1 for negativo, não se consegue igualar a 1.

f)

Todos os termos ficam negativo, e ao ajustar a equação (x-1) se torna a equação da elipse.

g)

Dois números negativos não resultariam a um número positivo (1)

Referente ao curso, ampliou a visão de analise, conseguir interpretar um gráfico sem expressar equações ou vice-versa.
A maneira de mostrar o resultado da equação no grafico faz com que o aluno decifre a formula, tentando explicar como chegou em tal resultado.
O jeito de como é questionado, há diversas respostas com o mesmo conceito.

ANEXO G – PRODUÇÃO DO ALUNO A_7

1)
P_1 e P_4 : semelhanças:

diferenças: * P_4 está simétrico com o eixo Y

* P_1 está simétrico com o eixo Z

2) a) Elipse. Nada. Ponto (0,0,0)

b) Elipse. Nada. Ponto (0,0,0)

c) Ambos partem da origem,

" formam uma elipse quando ocorre intersecção com o plano, não sendo na origem.

Os paraboloides e as intersecções são opostos do eixo Z

São simétricos com o eixo Z em comum.

3) Ambos partem da origem.

Os paraboloides e as elipses são perpendiculares entre si

P_1 é simétrico ao eixo Z.

P_4 é simétrico ao eixo Y.

4) todos possuem $\frac{x^2}{a^2}$ ou $\frac{y^2}{b^2}$, positivo ou negativo.

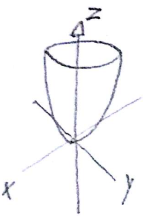
todos os elementos estão elevados ao quadrado.

todos as formulas possuem dois termos do lado direito da igualdade e um do lado esquerdo.

5) O termo independente define em qual eixo o paraboloide abre

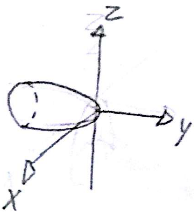
Os sinais definem o sentido da abertura em relação ao termo independente

6) a)



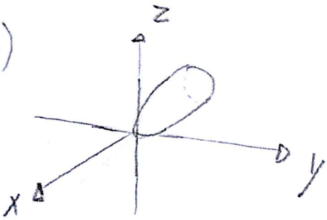
Paraboloide elíptico abrindo em Z+

b)



Paraboloide elíptico abrindo em Y-

c)



Paraboloide elíptico abrindo em X-

d) $z+$, porque todos os termos quadráticos são positivos e está igualado ao termo linear z

$y-$, porque está igualado ao termo linear y e os outros termos quadráticos são negativos

$x-$, porque está igualado ao termo linear x e os outros termos quadráticos são negativos.

7) a) Ponto, na origem.

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases}$

$0 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

os termos quadráticos têm que ser "0", porque é o caso em que a equação dá zero, já que qualquer outro número resultaria em um número positivo.

c) Parábola.

d) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{0}{b^2} \quad z = \dfrac{x^2}{a^2} \quad a^2 z = x^2$

e) Abrindo em $z+$

a variável linear é z e está sendo multiplicada por uma variável positiva.

f) Parábola

g) $z = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad z = \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \quad z = \dfrac{y^2}{b^2} \quad z b^2 = y^2$

h) $z+$, porque a variável linear é $z+$ e está sendo multiplicada por uma variável positiva

i) elipse

j) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = K_1 ; K_1 \neq 0 \end{cases}$

$K_1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \cdot \left(\dfrac{1}{K_1}\right)$ $\quad \dfrac{1}{\cancel{K_1}} \cdot \cancel{K_1} = \dfrac{1}{K_1} \cdot \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{1}{K_1} \cdot \dfrac{y^2}{b^2}$ $\quad 1 = \dfrac{x^2}{K_1 a^2} + \dfrac{y^2}{K_1 b^2}$

k)
Se $a > b \rightarrow$ alongada em x
Se $a < b \rightarrow$ " " y
Se $a = b \rightarrow$ circunferência

l) Parábola

m) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = K_2 , K_2 \neq 0 \end{cases}$

$z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{K_2^2}{b^2}$ $\quad \cancel{-\dfrac{K_2^2}{b^2} + a^2 z = x^2}$ $\quad \rightarrow \quad z - \dfrac{K_2^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$

$a^2\left(z - \dfrac{K_2^2}{b^2}\right) = x^2$

$a^2\left(z - \dfrac{K_2^2}{b^2}\right) = (x - 0)^2$

$V = \left(0, \dfrac{K_2^2}{b^2}\right)$

n) $z+$, porque a variável linear é z positivo.

o) Parábola

p) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 , k_3 \neq 0 \end{cases}$

$b^2\left(z - \dfrac{k_3^2}{a^2}\right) = y^2$

$z = \dfrac{k_3^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$z - \dfrac{k_3^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2}$

9) $z+$

Porque a variável linear é z e positivo.

$$V = \left(K_3, 0, \frac{K_3^2}{a^2}\right)$$

8) a) Porque não tem dois termos quadráticos com sinais opostos

b) A variável linear é positiva e igualada à variável quadrática positiva.

c) As variáveis quadráticas são negativas e igualadas à variável linear

d) Porque substituindo z por K_1 e dividindo por K_1, sobra dos termos quadráticos e do outro lado da igualdade, 1.

e) Porque a variável linear tem o sinal oposto das variáveis quadráticas (depois de ter substituído "z" por "K_1").

f) substituir "z" e dividir por "K_1". Resultando em 1 positivo e igualado a duas variáveis quadráticas positivas.

Ajudou, entendi de forma mais clara a relação entre os termos e os seus papéis graficamente, como saber a fórmula olhando o gráfico, e como saber o gráfico já conhecendo a fórmula. Além de relacionar tudo com os nomes, relacionando tudo junto.

ANEXO H – PRODUÇÃO DO ALUNO A_8

①

P_1 e P_2

- Ambos são parabolóides
Possuem 3 termos
P_1 está no eixo z (lado positivo)
P_2 está no eixo y (lado negativo)
Diâmetro aparenta ser ~~o mesmo~~ diferentes (dependendo da posição)

②

a) Elipse , Nada , Ponto (0,0,0)

b) Elipse , Quando positivo é nada , Ponto (0,0,0)

c) A intersecção entre o Parabolóide e o plano forma uma elipse nos dois casos.
Em a) quando o plano está no lado negativo do eixo Z deixa de ter intersecção com o parabolóide. Já em b) quando o plano está no lado positivo do eixo z deixa de ter intersecção com a parabolóide
Quando o plano está paralelo e coincidente com o eixo x a intersecção entre o plano e o parabolóide é apenas um ponto

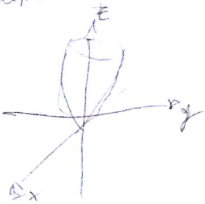
③ Partem da mesma origem
A elipse de P_1 faz 90° com a elipse de P_2
↳ lado positivo de z (Abrindo em Z+)
↳ lado negativo de y. (Abrindo em y −)

④ Todos tem 4 variáveis, em que os mesmos estão elevados ao quadrado
Existe o lado positivo e negativo ~~que~~ de cada equação.
Possuem 3 termos (dois do lado direito da igualdade e um do lado esquerdo).

⑤ Define para onde o parabolóide está abrindo em seu devido eixo.
O termo independente tem seu parabolóide aberta para o lado positivo quando sua igualdade for positiva
O termo independente tem seu parabolóide aberta para o lado negativo quando sua igualdade for negativa.

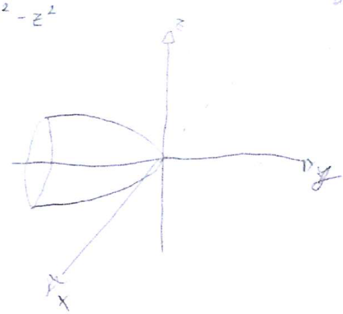
6 a) Paraboloide elíptico abrindo em z+

$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$$



b) Paraboloide elíptico abrindo em y-

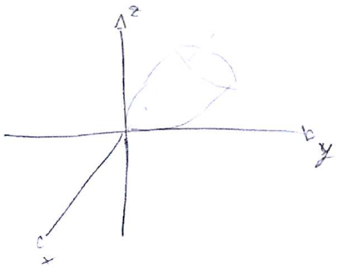
$$y = -x^2 - z^2$$



c)

$$x = \frac{-y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$$

Paraboloide elíptica abrindo em X-



6 d) z+, porque as variáveis quadráticas são positivas e igualados ao termo linear z.

e) y−, porque as variáveis quadráticas são negativas e igualados ao termo linear y.

f) x−, porque as variáveis quadráticas são negativas e igualados ao termo linear x.

~~7 a)~~

7 a) Um ponto $(0,0,0)$

b) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow 0 = \underbrace{\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)}_{x=0} + \underbrace{\left(\dfrac{y^2}{b^2}\right)}_{y=0}$ ⟶ x e y tem que ser 0 para a equação ao lado poder ser igualada a 0.

c) Uma parabola

d) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{0}{b^2}$ ⟶ y tem que ser 0 para a equação ao lado se tornar uma eq. do 2º grau e assim formar a parabola.

$x^2 = a^2 z$

e) z+, pois a variável linear é o z e seu coeficiente é positivo

f) Uma parábola

g) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow z = \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

$y^2 = z \cdot b^2$

h) z+, pois a variável linear é o z e seu coeficiente é positivo

i) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = k_1 ;\ k_1 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \left(k_1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)\left(\dfrac{1}{k_1}\right)$

$1 = \dfrac{x^2}{k_1 \cdot a^2} + \dfrac{y^2}{k_1 \cdot b^2}$

j) elipse

k) Se $a > b$ ⟶ alongada em x.

Se $a < b$ ⟶ alongada em y.

Se $a = b$ ⟶ circunferência.

l) $\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ y = K_2 ;\ K_2 \neq 0 \end{cases}$

m) Parabola

$$\hookrightarrow z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{K_2^2}{b^2} \longrightarrow x^2 = \left(z - \frac{K_2^2}{b^2}\right) \cdot a^2 \Longrightarrow \text{Vértice} = \left(0, \frac{K_2^2}{b^2}\right)$$

n) $z+$, a variável linear é z e seu coeficiente é positivo.

o) Parabola

p) $z = \dfrac{K_3^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \longrightarrow y^2 = b^2\left(z - \dfrac{K_3^2}{a^2}\right)$

q) em $z+$, pois a variável quadrática está igualada a variável linear z (a qual é positiva).

$$\text{Vértice} = \left(K_3, 0, \frac{K_3^2}{a^2}\right)$$

8

a) Os termos quadraticos tem o mesmo sinal.

b) Pois a variavel linear da eq é positiva e está igualada a uma variável quadrática positiva

c) as variáveis quadráticas são negativas e igualadas a uma variavel linear

d) Dividir a eq por K_1 (precisamos ter dois termos quadraticos e positivos de um dos lado e do outro um).

e) Pois os termos quadraticos tem que ter o mesmo sinal do termo linear se não não existe intersecção (depois de ser feita a substituição por K_1)

f) Depois que substitui divide por K_3 a equação fica com duas variáveis quadráticas ~~negativas~~ positivas igualadas a ~~um~~ menos um.

g) A variável linear (após substituida) tem que ter o mesmo sinal das variáveis quadráticas.

E O curso do prof. Sérgio ~~o~~ (feito através do geogebra e de listas de exercícios) ajudou muito a melhorar minhas percepções ~~das~~ algumas formas geométricas; me ensinou a elaborar e ~~...~~ a visualizar as suas representações algébricas e gráficas, além de demonstrar muito bem a transição existente entre um gráfico (com uma forma geométrica) e sua fórmula (equação)

ANEXO I – PRODUÇÃO DO ALUNO A_9

① A diferença visual é que em P_1 o paraboloide abre para o eixo z e no P_4 abre para o eixo y. A semelhança é que ambos possuem as mesmas dimensões.

②

a) Quando os valores de a, b e c são iguais é possível visualizar uma circunferência e que quanto maior o valor de K_1 maior será o raio da circunferência. Se os valores de a, b e c forem diferentes é possível obter diferentes formatos do paraboloide. Quando K_1 for ≤ 0 obtemos um ponto.

b) Sim, porém nesse caso quando os valores de K_1 forem maiores que zero obteremos um ponto. Dado que P_2 está abrindo para o eixo negativo de z.

c) As diferenças são que uma paraboloide abre para o eixo z positivo e outro para o negativo.

③ Visualmente podemos observar que P_4 está abrindo para o eixo negativo de y e P_1 para o eixo positivo de z.

Em P_1 quanto maiores os valores de a e b maior é a abertura do elipse. O mesmo vale para P_4.

A principal diferença é que no eixo z positivo quanto maior a posição do plano perpendicular a elipse maiores são as elipes obtidas e no caso do eixo y negativo quanto menor a posição do plano perpendicular a elipse maiores serão as elipes obtidas nos 'cortes' do plano no elipsoide.

(4) As semelhanças são:

- Em todas as equações é possível observar que um dos três eixos está em função dos demais;
- É possível observar também que em todas as funções existem parâmetros para os eixos positivos e negativos do plano cartesiano.

As diferenças são:

- O termo que está isolado não é quadrático e nem possui um denominador;
- O eixo que está isolado é sempre positivo.

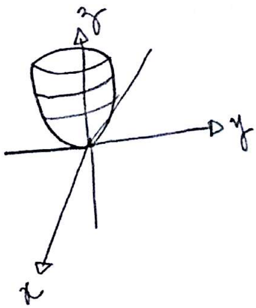
(5) Observamos os semieixos que estão igualados ao coeficiente linear e o sinal da função que está sendo igualada ao coeficiente linear. Se a função for positiva o paraboloide estará voltado para o eixo positivo e se a função for negativa a paraboloide estará voltado para o eixo negativo.

(6)

(a) $$-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} + z = 0$$

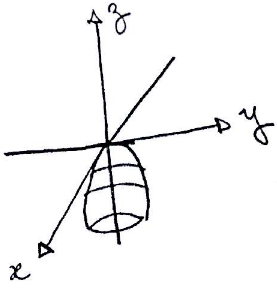
$$z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4}$$

Paraboloide elíptico abrindo em z.

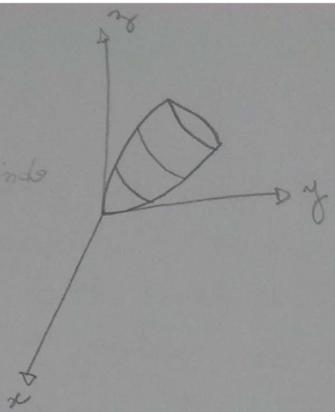


(b) $z = -x^2 - y^2$

Paraboloide elíptico abrindo em $-z$.



c) $x = -\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{49}$



Paraboloide elíptico abrindo em $-x$,

d) Ao eixo $+z$, porque z é o coeficiente linear da fórmula e positivo porque os termos quadráticos são positivos.

e) Ao eixo $-z$, porque $-z$ é coeficiente linear da fórmula e positivo porque os termos quadráticos são negativos

f) Ao eixo $+x$, idem a letra c.

7

a) Um ponto.

b) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = 0, \end{cases}$

$0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$\frac{x^2}{a^2} = -\frac{y^2}{b^2}$

Como não é possível um número quadrático ser negativo, arbitramos x e y como zero.

7

c) Uma parábola.

d) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = 0 \end{cases}$

$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{0}{b^2}$

$z = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow a^2 z = x^2$

e) A equação é uma parábola que, devido o coeficiente a ser positivo, irá abrir em $+z$.

f) Uma parabola.

g) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$

$z = \frac{0}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$z = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow b^2 z = y^2$

h) A parabola irá abrir para o eixo z porque ele é o termo linear da equação e positivo porque o sinal do termo linear é positivo.

(k) Se a > b a elipse estará mais alongada no eixo x, se b > a a elipse estará mais alongada no eixo y. Quando a = b obtemos uma circunferência.

(l) Parábola.

(m) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}$

$$z - \frac{k_z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow a^2\left(z - \frac{k_z^2}{b^2}\right) = x^2$$

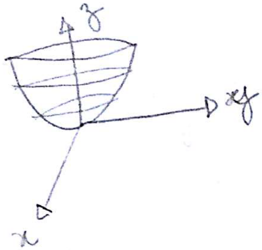
(n) +z. Porque a variável linear é z e o coeficiente a é positivo.

$$V = \left(0;\ k_z;\ \frac{k_z^2}{b^2}\right)$$

7

o) Parabola

p)



$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = K_3 \,;\, K_3 \neq 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{K_3^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad z - \frac{K_3^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

$$b^2\left(z - \frac{K_3^2}{a^2}\right) = y^2$$

q) $z+$

$$V = \left(K_3 \,;\, 0 \,;\, \frac{K_3^2}{a^2}\right)$$

Questão 8:

a) Quando se substitui a equação do plano na equação do paraboloide não é possível obter dois termos quadráticos com sinais opostos, o que é necessário para obter a equação do hiperboloide.

b) Porque após fazer as alterações algebricas podemos observar que temos um coeficiente quadrático multiplicando a variavel linear e como não existe número quadrático negativo é possível afirmar que a parabola irá abrir para o eixo positivo.

c) $z = \frac{-x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, substituindo qualquer uma dessas variaveis por qualquer constante, sendo ela negativa ou positiva, iremos obter uma parabola voltada para o eixo negativo por causa do sinal negativo que acompanha a equação e também por que nenhum número elevado ao quadrado resultará em um número negativo

d) Porque quando fazemos a substituição teremos dois termos quadráticos de um lado da equação e do outro lado uma constante.

(e) Porque a soma de dois valores positivos não pode resultar em um número negativo. Logo, teremos uma solução vazia.

(f) $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ em que $z = k_1$ e $k_1 < 0$, dividindo essa equação por k_1 iremos obter uma equação do tipo: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (dois termos quadráticos somados e igualados a 1).

(g) A soma de dois valores negativos não pode resultar em um número positivo. Logo, obtemos uma solução vazia.

(f) Sim. Pois com o auxílio do visual é possível ter um conhecimento mais empírico daquele conteúdo que o professor está tentando repassar.

Dessa forma fica mais fácil compreender e assimilar o que o professor está tentando nos passar.

ANEXO J – PRODUÇÃO DO ALUNO A10

1

P_1: $z - x^2 - y^2 = 0$

$z = x^2 + y^2$

P_4: $y = -x^2 - z^2$

Diferenças: eixo dos focos, conjunto imagem.

2

a) P_1:

C_{k1}:

$1 = x^2 + y^2$

circunferencia de raio 1

C_{k-1}:

$\nexists$

C_{k0}:

$(0,0,0)$

b)

P_2:

C_{k1}:

$\nexists$

C_{k-1}:

circunferencia de raio 1

C_{k0}:

$(0,0,0)$

c)

Diferenças: Im P_1 $[0, +\infty[$

Im P_2 $]-\infty, 0]$

As curvas de nivel são iguais apenas em posições diferentes.

3) Diferenças: Direcção e sentido

Semelhanças: São paraboloides equivalentes.

P_1: Curvas de nivel com centro no eixo z^+

" " " " " y^-

Continuação (3)

todas são paraboloides elípticos com suas elipses perpen-
-diculares a um semi-eixo de $\mathbb{R}^3$

Os semi-eixos são diferentes.

4)

A diferença é qual variável está como independente, e o conjunto imagem das mesmas.

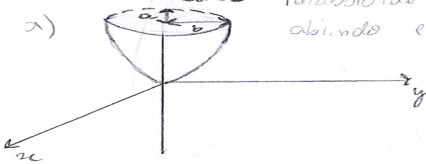
5)

Ver o conjunto imagem e qual termo está como independente.

6.

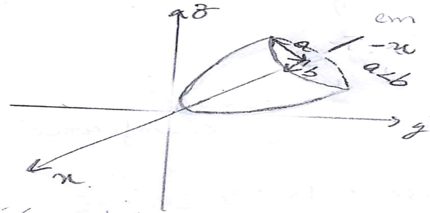
a) $a<b$

Paraboloide elíptico abrindo em z^+



c)

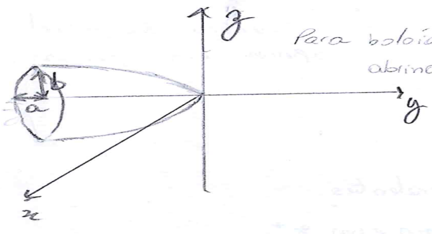
Parabolóide elíptico abrindo em x^-.



b)

$a=b$

Paraboloide elíptico abrindo em y^-



7

(a) $P(0,0,0)$

(b)

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z=0 \end{cases} \quad 0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad 0 = x^2b^2 + y^2a^2$$

Como a e $b \neq 0$ (condição de existência da elipse), a solução para a soma de quadrados ser igual a zero é ambos os termos sendo zero, então $x=y=0$

(c) Parábola

(d)

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases} \quad z = \frac{x^2}{a^2} \rightarrow \quad a^2 z = x^2$$

(e) Parábola abrindo em z^+ e com vértice na origem. Pois o coeficiente do termo linear (z) ser positivo

(f) Parábola

(g)

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases} \quad b^2 z = y^2$$

(h) Parábola abrindo em z^+, com vértice na origem.

(i) Para $z > 0$: elipses
Para $z < 0$: $\nexists$

(j)

$z < 0$ não está definido pois a soma de termos quadrados é maior que zero $\rightarrow \nexists$

para $z > 0$: $1 = \frac{x^2}{a^2 \cdot k_1} + \frac{y^2}{b^2 \cdot k_1} \rightarrow$ elipses

(k) $a > b \rightarrow$ elipse alongada em x
$a < b \rightarrow$ elipse alongada em y
$a = b \rightarrow$ circunferencia

(l) Parabolas

(m) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k_2 \end{cases}$ $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{k_2^2}{b^2} \\ x^2 = \left(z - \frac{k_2^2}{b^2}\right) a^2 \end{cases}$

(n) Parabola abrindo em z^+, com vértice em $\left(0, k_2, \frac{k_2^2}{b^2}\right)$

(o)
Parabola

(p) $\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k_3 \end{cases}$
$y^2 = \left(z - \frac{k_3^2}{a^2}\right) b^2$

Parabola abrindo em z^+, com vértice em $\left(k_3, 0, \frac{k_3^2}{a^2}\right)$

(Q)
Abrindo em z^{+}

$z = \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^3}{a^2} \rightarrow \frac{k^3}{a^2} = c \rightarrow z = \frac{y^2}{b^2} + c$ $\quad \frac{dz}{dy} = \frac{2y}{b^2} = 0 \rightarrow y = 0$

$\left(k_3, 0, \frac{k^3}{a^2}\right)$

(g) (a)

Uma equação hipérbole é definida pela diferença de duas variáveis quadradas o que não é possível em nenhuma intersecç
em $x^2 - y^2 = 1$

(b)

Pois o coeficiente do Termo quadrado e ~~o~~ linear é positivo, após realizados as substituições de y ou x por uma constante

(c) Pois o coeficiente de um dos termos da parábola obtida pelos intersecções é negativo.

(d)

Pois resulta na soma de duas variaveis quadradas igualadas a uma constante que dividida por ela mesma é igual a 1.

(e)

Pois a soma de dois termos quadrados é maior ou igual a zero

(f)

Ao multiplicar por (-1) resulta na equação de uma elipse (a soma dois termos quadrados igual a uma constante positiva).

(g)

Pois a soma de termos negativos é menor que zero.