

**Laura Antonia Barth Martinez**

**Transição de fase em redes neuronais com  
camadas**

**Florianópolis - Brasil  
05 de Setembro de 2018**



'  
Transição de fase em redes neuronais com camadas : / Laura Antonia  
Barth Martinez; orientador, Marcelo H. R. Tragtenberg. - Florianópolis -  
Brasil 2018.

110 p.

- Universidade Federal de Santa Catarina, . Programa de Pós-Graduação em  
Física.

Inclui Referências

I. , . II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de  
Pós-Graduação em Física. II. Transição de fase em redes neuronais com  
camadas.

**Laura Antonia Barth Martinez**

## **Transição de fase em redes neuronais com camadas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Tragtenberg  
Marcelo H. R. Tragtenberg

Trabalho aprovado. Florianópolis - Brasil, 05 de Setembro de 2018.

### **BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. Marcelo H. R. Tragtenberg**

(Orientador)

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

---

**Prof. Dr. Marco Aurelio Pires Idiart**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
(UFRGS)

---

**Prof. Dr. Germano Heinzelmann**

Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

*Für meine dreiköpfige Familie: Victoria de Barth, Eduardo Barbosa  
Araújo e Chico Barth. Und derjenige, der nicht mehr hier ist, aber  
immer das ist: Klaus Michael Barth.*



## AGRADECIMENTOS

- Ao professor Marcelo H. R. Tragtenberg pela orientação.
- A minha mãe, Victoria de Barth, por todo amor, dedicação e paciência.
- Ao meu pai, Michael Barth, por sempre estar comigo.
- A Eduardo Barbosa Araújo, pelo amor, companheirismo, ajuda e suporte.
- Ao secretário da pós-graduação, Antônio Marcos Machado.
- A Chico Barth, meu gato, por ser lindo e fofinho.
- A academia Racer e todos os seus profissionais, meu muito obrigada por me trazer saúde física e mental.
- Aos meus colegas e professores da pós-graduação e graduação.
- A todos os membros da banca pela presença, pela leitura e pelas sugestões de melhoria.
- Ao suporte financeiro da Capes.



*A natureza é o único livro que oferece um conteúdo valioso em todas  
as suas folhas.*

–Johann Wolfgang von Goethe



## RESUMO

O cérebro é um sistema dinâmico que está sujeito a fenômenos estocásticos, como avalanches neuronais, que são fenômenos que possuem criticalidade auto-organizada. A distribuição de probabilidade do tamanho e da duração dessas avalanches possuem um comportamento de lei de potência, o que pode ser favorável para a transmissão de informação no cérebro. A área que estuda a propagação de informação sensorial de forma quantitativa é a Psicofísica, nela a relação entre estímulo e percepção pode se dar através de uma lei de potência, conhecida como lei de Stevens. Um modelo matemático que otimiza a simulação computacional de sistemas excitáveis como o cérebro, são os autômatos celulares, pois eles funcionam a tempos discretos e sua evolução obedece regras simples. O objetivo de estudar redes em camadas é se aproximar mais da dinâmica de sistemas fisiológicos. Ao simular duas camadas com 100% de elementos excitáveis e outro com 20% de elementos inibitórios, pode-se constatar que o expoente crítico da lei Stevens diminui em comparação com sistemas de uma camada. E o intervalo de percepção sensorial para diferentes estímulos sofre uma transição de fase e é otimizado no ponto crítico.

**Palavras-chave:** transição de fase, expoente crítico, intervalo de percepção sensorial.



## ABSTRACT

The brain is a dynamic system that is subject to stochastic phenomena, such as neuronal avalanches, which are phenomena that have self-organized criticality. The probability distribution of the size and duration of these avalanches have a power law behavior, which may be conducive to the transmission of information in the brain. The area that studies the propagation of sensory information in a quantitative way is Psychophysics, the relation between stimulus and perception can be given through a law of power, known as Stevens law. A mathematical model that optimizes the computational simulation of excitable systems such as the brain, are cellular automata, as they function at discrete times and their evolution obeys simple rules. The goal of studying layered networks is to get closer to the dynamics of physiological systems. By simulating two layers with 100% excitable elements and another with 20% inhibitory elements, it can be seen that the critical exponent of the Stevens law decreases in comparison to one layer system. And the range of sensory perception for different stimuli undergoes a phase transition and is optimized at the critical point.

**Key-words:** phase transition, critical exponent, range of sensory perception.



## CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	25
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS . . . . .	29
2.1	Transições de primeira e segunda ordem . . . . .	29
2.2	Expoentes críticos . . . . .	31
2.3	Interações de longo alcance . . . . .	34
2.4	Criticalidade Auto-Organizada . . . . .	37
2.5	Avalanches neuronais in vitro . . . . .	39
2.6	Faixa dinâmica . . . . .	42
2.7	Avalanches neuronais implicam em faixa dinâmico maximizada na criticalidade . . . . .	43
3	AS TRÊS LEIS DA PSICOFÍSICA . . . . .	47
3.1	Lei de Weber . . . . .	47
3.2	Lei de Fechner . . . . .	48
3.3	Lei de Stevens . . . . .	50
4	TEORIA DE REDES ALEATÓRIAS . . . . .	55
4.1	Parâmetros de uma rede . . . . .	55
4.2	Rede Erdős-Rényi . . . . .	57
5	DINÂMICA DA REDE . . . . .	63
5.1	Neurônio . . . . .	63
5.2	Sinapse . . . . .	65
5.3	Neurônios pós-sinápticos excitatórios e inibitórios . . . . .	66
5.4	Autômato Celular . . . . .	67
6	MODELOS EM UMA CAMADA . . . . .	71
6.1	100% de elementos excitatórios . . . . .	71
6.2	80% de elementos excitatórios e 20% de elementos inibitórios . . . . .	84

<b>7</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>95</b>
<b>7.1</b>	<b>Duas camadas com 100% de elementos excita- tórios . . . . .</b>	<b>97</b>
<b>7.2</b>	<b>Duas camadas com 80% de elementos excita- tórios e 20% de elementos inibitórios . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>103</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA . . . . .</b>	<b>105</b>

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Diagrama de fase da água: as curvas rosas representam a sublimação, a fusão, a ebulição e a curva rosa tracejada representa o comportamento anômalo da água. Os pontos em preto são o ponto triplo e o ponto crítico [1]. . . . . 30
- Figura 2 – Esboço do parâmetro de ordem  $\rho$  em função de um parâmetro intensivo  $t$  para transições de fase descontínuas (A) e contínuas (B). A transição ocorre em  $t = 0$ . A linha tracejada serve apenas como guia para os olhos [2]. . . . . 32
- Figura 3 – Modelo de pilha de areia: a criticalidade auto-organizada estabelece uma relação entre fenômeno crítico e avalanches invariantes de escala (não mudam nem por um fator de multiplicativo), requerendo que o estado crítico seja um atrator na dinâmica e leve o sistema a se auto-organizar em torno da criticalidade. E isso permite que perturbações locais se propagem por todo o sistema [3]. . . . . 38
- Figura 4 – A distribuição do tamanho das avalanches neuronais em porções normais cultivadas do córtex. O expoente da lei de potência é dado pela inclinação da reta tracejada  $\alpha = 1.5$  e otimizado em  $\sigma = 1$ . [4]. . . . . 40
- Figura 5 – Os três regimes de um processo de ramificação. No alto, quando a taxa de ramificação é menor que 1, o sistema é subcrítico e a atividade decai com o tempo. No meio, quando a taxa de ramificação é igual a 1, o sistema é crítico e a atividade praticamente é mantida. Em baixo, quando a taxa de ramificação é maior que um, o sistema é supercrítico e a atividade aumenta ao longo do tempo [5]. . . . . 41
- Figura 6 – Faixa dinâmica maximizada no ponto crítico [6]. . . . . 43

Figura 7 – Resultado experimental. Distribuição das avalanches neuronais é otimizada quando o córtex não está submetido à modificação na proporção excitação-inibição (linha preta). A Linha tracejada representa uma lei de potência com expoente  $\alpha = 1.5$ . Ao modificar se as proporções entre excitação-inibição, a rede cortical se afasta da criticalidade (linhas vermelha e azul) [7]. 44

Figura 8 – Resultado experimental e simulado. A faixa dinâmica é máxima quando o córtex não está sobre efeito de modificações na proporção de excitação-inibição. O ponto crítico é  $\kappa \cong 1$ [7]. . . . . 45

Figura 9 – Ilustração da lei de Weber-Fechner [8]. . . . . 49

Figura 10 – Intensidade das sensações subjetivas em função da magnitude física dos estímulos em coordenadas lineares. As percepções sensoriais e os expoentes de Stevens, de cima para baixo, são: choque elétrico ( $m = 3.5$ ), comprimento aparente ( $m = 1.0$ ) e brilho ( $m = 0.33$ ) [9]. . . . . 51

Figura 11 – Intensidade das sensações subjetivas em função da magnitude física dos estímulos em coordenadas logarítmicas. As percepções sensoriais e os expoentes de Stevens, de cima para baixo, são: choque elétrico ( $m = 3.5$ ), comprimento aparente ( $m = 1.0$ ) e brilho ( $m = 0.33$ ).[9] . . . . . 51

Figura 12 – Tamanho relativo da componente de maior cluster ( $N_G/N$ ) em função do grau médio ( $\langle K \rangle$ ) no modelo de Erdős-Rényi. O surgimento da componente gigante se quando  $\langle K \rangle$  excede de 1. Abaixo, os quatro regimes característicos da evolução de uma rede aleatória [10]. . . . . 61

Figura 13 – Esquema geral das estruturas presentes num neurônio. Detalhe: canais iônicos (conjuntos de proteínas) por onde ocorre a difusão dos íons através da membrana. Esses canais estão espalhados por toda a membrana do neurônio [2]. . . . .	64
Figura 14 – Dinâmica do potencial da membrana de um neurônio [11]. . . . .	65
Figura 15 – Esquema das sinapses elétricas e químicas entre neurônios. (a) Sinapse elétrica: o sinal elétrico é transmitido, via junções comunicantes, do neurônio pré-sináptico para o pós-sináptico. (b) Sinapse química: o sinal elétrico no neurônio pré-sináptico é convertido em um sinal químico, na forma de neurotransmissores, os quais se ligam a receptores do neurônio pós-sináptico [11]. . . . .	66
Figura 16 – Mudança de estado de um nó excitável. O estado em repouso é representado por 0, o estado excitado é retratado por 1 e os estado refratários vão de 2 até $n - 1$ . . . . .	73
Figura 17 – Simulação com $N = 10^5$ sítios, $K = 10$ vizinhos e $n = 10$ estados. Densidade instantânea da atividade dos sítios para uma relação de ramificação média nos casos subcrítico(preto), crítico(vermelho) e supercrítico(azul) em função do tempo. Foram feitas 5 realizações diferentes para cada caso. . . . .	74
Figura 18 – Simulação com $N = 10^5$ sítios, $K = 10$ vizinhos e $n = 10$ estados. Densidade instantânea da atividade da rede para $\sigma$ crítico em função do tempo. Durante o intervalo de tempo $100 \text{ ms} \leq t \leq 300 \text{ ms}$ é aplicado um estímulo externo a igual $r = 0.5 \text{ ms}^{-1}$ , e zero em qualquer outro intervalo. . . . .	75

Figura 19 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 10$  estados. Densidade instantânea da atividade da rede para um parâmetro de ramificação supercrítico em função do tempo. Durante o intervalo de tempo  $100 \text{ ms} \leq t \leq 300 \text{ ms}$  é aplicado um estímulo externo a igual  $r = 0.5 \text{ ms}^{-1}$ , e zero em qualquer outro intervalo. 76

Figura 20 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . A linha azul estrelada representa a curva teórica modelada a partir da aproximação de campo médio. . . . . 78

Figura 21 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em escala logarítmicas. Com de  $\sigma = 0$  a 2 em intervalos de 0.2. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O segmento de linha vermelho representa a linha teórica modelada a partir da aproximação de campo médio no ponto crítico. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m = 1/2$  (crítico). . . . . 80

Figura 22 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo(em escala logarítmicas) de  $\sigma = 0$  a 2.0 em intervalos de 0.2. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O sistema satura em  $F_{max} = 0.2$ . . . . . 82

- Figura 23 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1$ . O alcance dinâmico em vermelho representa os resultados modelados a partir da aproximação de campo médio. . . . . 83
- Figura 24 – Mudança de estado de um nó excitável. O ícone  $I$  representa o estado inibido, o estado excitado é retratado por 1 e os estado refratários vão de 2 até  $n - 1$  [12]. . . . . 85
- Figura 25 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . A linha azul estrelada representa a curva teórica modelada a partir da aproximação de campo médio. . . . . 88
- Figura 26 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em escala logarítmicas. Com de  $\sigma = 0$  a 2.5 em intervalos de 0.25. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O segmento de linha vermelho representa a linha teórica modelada a partir da aproximação de campo médio no ponto crítico. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m = 1/2$  (crítico). . . . . 90
- Figura 27 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo(em escala logarítmicas) de  $\sigma = 0$  a 2.5 em intervalos de 0.25. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O sistema satura aproximadamente em  $F_{max} = 0.2$ . . . . . 91

Figura 28 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$ . O alcance dinâmico em vermelho representa os resultados modelados a partir da aproximação de campo médio. . . . . 92

Figura 29 – Simulação  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados e fração de excitatórios  $fe = 0.8$ . Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média com número de sítios  $N = 10^4$ (losangos marrons),  $N = 5.5 \cdot 10^4$ (quadrados roxos) e  $N = 10^5$ (círculos verdes). Otimização no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$ . . . . . 92

Figura 30 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios,  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$  com fração de nós excitatórios  $fe = 1.0$ (círculos pretos),  $fe = 0.8$ (quadrados vermelhos) e  $fe = 2/3$ (losangos roxos). . . . . 93

Figura 31 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios,  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média com fração de nós excitatórios  $fe = 1.0$ (círculos pretos),  $fe = 0.8$ (quadrados vermelhos) e  $fe = 2/3$ (losangos roxos). Otimização nos pontos críticos  $\sigma = 1.0$ ,  $\sigma = 1.25$ .  $\sigma = 1.5$ . . . . . 93

Figura 32 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camadas e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . . . . . 97

- Figura 33 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em coordenadas logarítmicas. Com de  $\sigma = 0.2$  a  $1.8$  em intervalos de  $0.2$ . Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. Os segmentos de linha em roxo e verde são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m \approx 0.25$  (crítico). . . . . 98
- Figura 34 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1$ . . . . 99
- Figura 35 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camadas e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . . . . . 100
- Figura 36 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em coordenadas logarítmicas. Com de  $\sigma = 0.25$  a  $2.25$  em intervalos de  $0.25$ . Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m \approx 0.26$  (crítico). . . . . 101
- Figura 37 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$ . . . 102



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos expoentes de Stevens  $m$  para diferentes tipos de percepção sensorial e condições de estímulos. 54



# 1 INTRODUÇÃO

O córtex cerebral de mamíferos é um exemplo de rede, que pode apresentar criticalidade auto-organizada. Esse termo foi proposto por Bak, Tang e Wiesenfeld para descrever a tendência natural de alguns sistemas evoluírem para um estado crítico sem a dependência de ajustes externos nos parâmetros e tampouco da configuração inicial do sistema [13]. Em 2003 Beggs e Plenz [14] mostram que pedaços do córtex de ratos possuem o que eles chamaram de avalanches neuronais, uma cascata de disparos de atividade na rede neuronal cujas distribuições de quantidade e duração podem ser aproximadas por leis de potência, como nos modelos críticos de pilhas de areia de Bak. As avalanches neuronais críticas podem otimizar a transmissão de informação no cérebro pois, no ponto crítico é possível propagar perturbações locais por todo o sistema, tendo um papel fundamental em diversas funções como a memória, atenção, percepção, pensamentos, linguagem e consciência [15].

As sensações de ouvir, ver, cheirar, degustar e tocar são capacidades fisiológicas do nosso organismo, pelas quais um estímulo externo ou interno provoca uma reação específica, produzindo uma percepção. A percepção é como o cérebro organiza e interpreta um estímulo dos sentidos, colocando-o em contexto. Logo, por uma questão de sobrevivência, somos capazes de perceber temperatura, dor, coceira, cócegas, toque, sensações musculares e viscerais, fome e sede, entre outras. A área da ciência que estuda quantitativamente essa relação entre o estímulo aplicado e a percepção produzida é a Psicofísica [16].

A busca por princípios para teorias de estímulo-resposta é uma tendência moderna em neurociência computacional. Weber e Fechner propuseram, no século 19, que a relação entre os estímulos e as respostas eram logarítmicas: a sensação subjetiva  $P$  está relacionada a um dado estímulo  $S$  o por  $P \sim \ln S$  [17]. Em meados da década de 1950, Stevens propôs uma teoria mais geral de estímulo-resposta com base em uma lei de potência  $P \sim S^m$ . Esta afirmação matemática foi obtida através de experimentos. Os valores para o expoente  $m$  dependem do tipo

das percepções e condições do estímulo. Por exemplo,  $m = 3.5$  está relacionado à percepção de choque elétrico através dos dedos,  $m = 1.0$  a percepção visual de uma linha projetada e a percepção de brilho de uma fonte pontual apresenta  $m = 0.5$  [9].

Neste trabalho foi utilizada uma rede aleatória do tipo Erdős-Rényi [18], onde ela é composta por nós e ligações aleatórias entre os nós. A dinâmica da rede foi modelizada por um autômato celular chamado de Greenber-Hastings [19]. Ele possui três estados, com a finalidade de simular meios excitáveis como as que ocorrem em tecidos nervosos do cérebro. Os autômatos celulares são modelos matemáticos discretos no espaço, no tempo e nas variáveis dinâmicas, sendo que sua evolução tem como princípio regras simples. Estas regras dependem do estado da própria célula e das células vizinhas.

Uma ideia recorrente no estudo de sistemas dinâmicos é a de que o processamento ideal de informações deve ser encontrado próximo à transição de fase. O trabalho de Kinouchi e Copelli [20] dá um exemplo de uma rede de elementos excitáveis que têm sua sensibilidade e faixa dinâmica maximizada no ponto crítico. No estado subcrítico, a atividade da rede cessa rapidamente após a aplicação de estímulo externo mas, no estado supercrítico, os elementos da rede apresentam atividade auto-sustentada. Esses resultados podem fornecer uma base neuronal microscópica para leis Psicofísicas, em particular verificou-se que o expoente de resposta aos estímulos satisfaz uma lei de potência de Stevens, com expoente  $m = 0.5$ . Esse mecanismo apresenta também, compatibilidade biológica com os sistemas olfativo e visual [21, 22].

A fim de estudar o comportamento crítico e dinâmico, Pei e colaboradores [12] basearam-se no modelo de Kinouchi e Copelli [20], para desenvolver um modelo de autômato celular para uma rede com elementos excitatórios e inibitórios. Em sistemas neuronais reais existe a coexistência de neurônios excitatórios e inibitórios [23]. Eles obtiveram resultados semelhantes, com a diferença que o ponto crítico se altera conforme muda-se a fração de elementos excitatórios na rede.

Plenz e colaboradores [7], com o objetivo de testar a hipótese de Kinouchi e Copelli [20], mostraram que a faixa dinâmica de tecidos

do hipocampo de rato *in vitro* é maximizada quando o tecido está em regime normal (crítico). Os regimes subcríticos e supercríticos foram produzidos por manipulação experimental.

Os modelos de Kinouchi e Copelli [20] e Pei e colaboradores [12] foram usados como base para este trabalho, cujo o objetivo é verificar o comportamento desses dois modelos em duas camadas. Nessa rede de duas camadas, as ligações intra-camada e a inter-camadas são modelados por redes de Erdős-Rényi não direcionada. O parâmetro  $L$  representa as ligações inter-camadas, e nesse trabalho é tomado como muito menor que o número de ligações intra-camada. Foram analisados um modelo com duas camadas de somente elementos excitatórios e outro com duas camadas de 80% e 20% de elementos excitatórios e inibitórios, respectivamente.

Os capítulos deste trabalho expõem o seguinte: no capítulo 2, descrevemos conceitos básicos sobre criticalidade auto-organizada. No capítulo 3, apresentamos uma breve revisão dos conceitos históricos das três leis da Psicofísica. No capítulo 4, demonstramos características gerais de redes do tipo Erdős-Rényi. No capítulo 5, descrevemos como se dá o comportamento biológico de um neurônio e como pode-se aplicar autômatos celulares à atividade neuronal. Nos capítulos 6, detalhamos os modelos que serviram de base para esse trabalho. No capítulo 7, apresentamos os resultados obtidos para nossos modelos. No capítulo 8, relatamos as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.



## 2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A dinâmica de um sistema como o cérebro pode ser medida pela transição entre seu estado pouco ativo (subcrítico) e seu estado ativo (supercrítico). Nesse capítulo, será explicado como sistemas no equilíbrio termodinâmico podem apresentar fenômenos emergentes parecidos com os que acontecem em sistemas críticos auto-organizados como os neurônios do cérebro.

### 2.1 TRANSIÇÕES DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Em um dado sistema, é possível definir uma relação fundamental das suas variáveis macroscópicas, ou parâmetros de controle, que assume diferentes valores para cada uma de suas fases. A fase é o estado macroscópico do sistema. Logo, o que define uma transição de fase é a modificação gradual dos parâmetros de controle que permite ao sistema transitar entre diferentes fases. Ao variar se os parâmetros de controle é possível mediar algumas quantidades macroscópicas, definidas como derivadas da relação fundamental. Estes determinam as fases e caracterizam as transições de fase [24].

O sistema termodinâmico de uma substância pura como a água, apresenta diferentes estados de agregação [25]:

- a altas temperaturas e baixas pressões, apresenta-se na forma gasosa;
- a baixas temperaturas e altas pressões, apresenta-se na forma sólida;
- a temperaturas e pressões intermediárias, pode se apresentar na forma líquida.

Variando se a temperatura,  $T$ , e a pressão,  $P$ , verifica-se que a água transita entre suas diferentes fases modificando os valores da compressibilidade ( $\chi$ ) e da densidade ( $\rho$ ). Um gás é caracterizado por alta compressibilidade e baixa densidade. Um sólido e um líquido, ao con-

trário, são pouco compressíveis e possuem densidades alta ou moderada. Um sólido contrasta-se por oferecer resistência à deformação. Um das possíveis representações da relação fundamental do sistema pode ser através da energia livre de Gibbs  $G(T,P,N)$ , que fornece o estado termodinâmico de  $N$  partículas no sistema.

A Figura 1 mostra o diagrama de fase da água pura. À pressão de 1 atm, o gelo e a água líquida coexistem à temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$ . À mesma pressão, a água líquida e vapor coexistem à temperatura de  $100^{\circ}\text{C}$ [25].

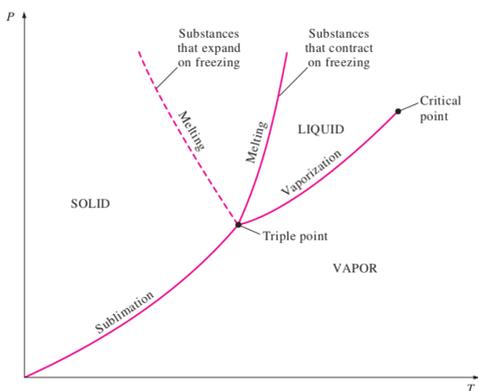


Figura 1 – Diagrama de fase da água: as curvas rosas representam a sublimação, a fusão, a ebulição e a curva rosa tracejada representa o comportamento anômalo da água. Os pontos em preto são o ponto triplo e o ponto crítico [1].

O que caracteriza uma transição de fase de primeira ordem é a variação descontínua dos parâmetros de ordem entre as fases, onde o parâmetro de ordem é um observável que surge através da quebra de simetria contida no sistema. No caso da água, a densidade entre as fases sólido/líquido/gás varia sensivelmente com a temperatura e pressão. No diagrama de fases da Figura 1, o ponto triplo é ponto de encontro das curvas de coexistência líquido-vapor, sólido-líquido e sólido-vapor. Nesse caso, a densidade é definida como o inverso da derivada de primeira ordem da energia livre de Gibbs com relação à

pressão:

$$\rho = \frac{N}{V} = N \left[ \frac{\partial G}{\partial P} \right]^{-1}. \quad (2.1)$$

Já a transição de fase de segunda ordem é caracterizada pela variação contínua dos parâmetros de ordem entre as fases e um estado crítico. Para a água, a densidade entre as fases líquida-vapor varia continuamente com a temperatura e a pressão. Percorrendo a linha de coexistência líquido-vapor em direção a altas pressões e altas temperaturas, a densidade do vapor cresce e a densidade do líquido decresce até o ponto em que as densidades tornam-se iguais. Esse ponto, que determina o término da linha de coexistência e corresponde ao estado em que as duas fases se tornam idênticas, recebe o nome de ponto crítico. Acima do ponto crítico a água pode existir somente na forma de gás e ela não pode ser liquefeita, por aumento de pressão. No diagrama de fases da Figura 1, o ponto crítico ( $P_c, T_c$ ) localiza-se no ponto terminal da linha de coexistência líquido-vapor. Ao redor do ponto crítico, certas grandezas termodinâmicas possuem comportamento singular. Como, por exemplo, a susceptibilidade (ou compressibilidade da água) que cresce sem limites e diverge no ponto crítico. A susceptibilidade,  $\chi$ , é definida como proporcional à segunda derivada da energia livre de Gibbs.

Transições de fase em outros sistemas são descritas por outros parâmetros ordem: a magnetização em materiais magnéticos e a polarização espontânea de um material ferroelétrico [24].

## 2.2 EXPOENTES CRÍTICOS

A Figura 2 mostra um exemplo genérico da variação do parâmetro de ordem  $\rho$  em transições de primeira e de segunda ordem em função de um parâmetro de controle  $t$ . As transições ocorrem em  $t = 0$ .

Se o sistema realmente possui uma transição de fase de segunda ordem, todas as quantidades termodinâmicas, perto do ponto crítico,

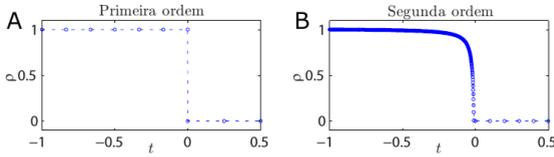


Figura 2 – Esboço do parâmetro de ordem  $\rho$  em função de um parâmetro intensivo  $t$  para transições de fase descontínuas (A) e contínuas (B). A transição ocorre em  $t = 0$ . A linha tracejada serve apenas como guia para os olhos [2].

vão depender de uma variável chamada de parâmetro de controle:

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (2.2)$$

Essas quantidades termodinâmicas podem ser expressas como uma função do tipo:

$$f(t) = At^x(1 + Bt^y + \dots). \quad (2.3)$$

Se o parâmetro de controle está perto do ponto crítico, a função pode ser aproximada por uma lei de potência,  $f(t) = At^x$ . Se o parâmetro de controle está longe do ponto crítico, a função tem que levar em conta todos os outros termos e não será mais uma lei de potência.

Logo, os expoentes críticos ( $\nu$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\alpha_c$  e  $\eta$ ) são definidos examinando o comportamento de lei de potência de quantidades termodinâmicas mensuráveis do sistema perto da transição de fase (quando,  $t \rightarrow 0$ ). Como seguem as equações a seguir [26]:

- comprimento de correlação

$$\xi \sim |t|^{-\nu}; \quad (2.4)$$

- parâmetro de ordem

$$\rho \sim |t|^\beta; \quad (2.5)$$

- susceptibilidade (ou compressibilidade) isotérmica a campo nulo

$$\chi \sim |t|^{-\gamma}; \quad (2.6)$$

- isoterma crítica ( $t = 0$ )

$$H \sim |\rho|^\delta \text{sgn}(\rho); \quad (2.7)$$

- calor específico a campo externo nulo

$$c_H \sim |t|^{-\alpha_c}; \quad (2.8)$$

- função correlação de pares

$$C(r) \sim |r|^{-(d-2+\eta)}. \quad (2.9)$$

onde,  $\text{sgn}(x)$  é uma função sinal;  $r$  é a distância radial em relação a um elemento qualquer do sistema;  $d$  é a dimensionalidade do sistema;  $H$  é um campo externo, por exemplo, um campo magnético para ímãs ou um campo de pressões para fluidos;  $t$  é um parâmetro de controle que tende a zero sobre o ponto crítico, podendo ser a temperatura de um ímã ou a temperatura de um fluido.

Os expoentes críticos obedecem a vínculos, chamados de relações de escala [25, 26]:

- relação de Rushbrooke

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (2.10)$$

- relação de Windom

$$\beta = \frac{\gamma}{\delta - 1}, \quad (2.11)$$

- relação de Fisher

$$v = \frac{\gamma}{2 - \eta}. \quad (2.12)$$

Transições de fase que surgem em diferentes sistemas muitas vezes possuem o mesmo conjunto de expoentes críticos, sendo ditos pertencentes a mesma classe de universalidade. Sistemas de uma mesma classe são equivalentes do ponto de vista macroscópico e dependem da dimensionalidade e da simetria.

### 2.3 INTERAÇÕES DE LONGO ALCANCE

O parâmetro de ordem e a sua susceptibilidade associada são, respectivamente, derivadas de primeira e de segunda ordem da energia livre do sistema. Nesta seção calcula-se o parâmetro de ordem e a susceptibilidade utilizando como base o modelo de Ising, mas o raciocínio pode ser aplicado a diversos sistemas termodinâmicos [27]. A susceptibilidade está intimamente ligada à correlação de pares, fazendo com que as flutuações do sistema sejam fundamentais numa transição de fases de segunda ordem.

Num sistema de  $N$  elementos, a energia livre é uma função composta pelo campo externo  $H$  (parâmetro de ordem) e uma quantidade  $X$  (parâmetro de controle), que responde às variações de  $H$ . Como por exemplos, no caso da água,  $X$  é o volume e  $H$  é a pressão; em ímãs,  $X$  é a magnetização e  $H$  é o campo magnético externo.

Definindo a função de partição como:

$$Z(H, T, N) = \sum_s e^{(-\beta E_s)}, \quad (2.13)$$

onde,  $E_s$  é a energia associada ao estado microscópico  $s$  e  $\beta = 1/k_B T$  é proporcional ao inverso da temperatura  $T$  do sistema e da constante de Boltzmann,  $k_B$ .

Com a função partição, a energia livre é:

$$G(H, T, N) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(H, T, N). \quad (2.14)$$

A função de partição é a soma dos pesos estatísticos de se encontrar o sistema em cada um dos seus estados,  $s$ . Portanto, a probabilidade de observar um estado  $s$  do sistema é proporcional ao peso de Boltzmann,  $P_s = e^{(\beta E_s)}$ . Logo, a média de uma quantidade termodinâmica  $X$  é:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{Z} \sum_s X_s e^{(-\beta E_s)}. \quad (2.15)$$

onde,  $X_s$  é o valor da quantidade  $X$  encontrada no estado  $s$ .

Já que a energia  $E_s$  tem termos do tipo,  $X_s H$ , essa média pode ser escrita usando as equações 2.13 e 2.14:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial H} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial H}. \quad (2.16)$$

Assim, usando as equações 2.14 e 2.16, obtêm-se, a primeira derivada da energia livre com relação a  $H$ :

$$\frac{\partial G}{\partial H} = -\langle X \rangle, \quad (2.17)$$

e a segunda derivada é:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial H^2} = -\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial H} \quad (2.18)$$

Suscetibilidade  $\chi$  mede a flutuação do parâmetro de ordem sobre a ação de um campo externo, assim:

$$\chi = \frac{\partial^2 G}{\partial H^2}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial H^2} = -\beta(\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2). \quad (2.20)$$

Se o parâmetro de ordem é descrito por,  $\rho = X$ , a susceptibilidade fica:

$$\chi = \beta(\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2). \quad (2.21)$$

Uma das principais características do estado crítico é a possibilidade de propagação de perturbações locais por todo o sistema através de interações de longo alcance. Uma maneira de quantificar as flutuações que propagam uma perturbação local é por meio da função correlação para duas posições em um sistema, definida como:

$$C(r) = \langle (s_i - \langle s_i \rangle)(s_j - \langle s_j \rangle) \rangle, \quad (2.22)$$

onde,  $s_i$  é o estado local do sítio  $i$ ,  $r$  é uma distância em relação a qualquer sítio do sistema e  $\langle \dots \rangle$  é a média de ensemble sobre todas as observações de  $s_i$  e  $s_j$  separados por uma distância  $r$ . Os termos entre parênteses significam as flutuações dos estados sobre suas médias.

Para que a função correlação seja positiva é necessário que haja coordenação e flutuação entre os estados dos sítios. Assim, quando o comprimento de correlação é maior que a distância entre os vizinhos mais próximos há um fenômeno crítico, que pode ser caracterizado como uma lei de potência. A função correlação então, é dada por uma lei de potência em função da distância radial em relação a um elemento qualquer do sistema e sua inclinação é dado pelo expoente crítico. No caso do modelo de Ising, por exemplo, quando a temperatura do ferromagneto é,

- baixa: há coordenação entre os estados (mesmo spin) mas, não há flutuação entre os estados;
- alta: não há coordenação (spins desordenados), mas há flutuação.
- crítica: há tanto coordenação como flutuação entre os estados.

A susceptibilidade dada na equação 2.20 pode ser reescrita usando o fato de que a variável  $X$  é a soma dos estados locais do sistema,  $X = \sum_i s_i$ . Sendo assim,  $\chi$  é a soma de todas as funções de correlação de pares do sistema:

$$\chi = \beta \sum_{i,j} C(r). \quad (2.23)$$

Se é possível colocar o eixo de referência para medir  $r$  sobre qualquer sítio do sistema, então a soma da equação anterior pode ser simplificada para  $\sum_{i,j} C(r) = N \sum_i C(r)$ . E se o sistema for muito grande e os sítios muito próximos, a soma sobre  $i$  pode ser substituída por uma integral sobre o volume do sistema com dimensão  $d$  [28]:

$$\chi \sim N \int_0^\infty C(r) r^{d-1} dr. \quad (2.24)$$

Para que a susceptibilidade divirja sobre o ponto crítico, a integral também deve divergir. Essa condição é satisfeita se o expoente crítico  $\eta < 2$  em  $C(r)$ .

A equação 2.24 diz que, no ponto crítico, as flutuações propagam sinais pela rede em todas as escalas do sistema. Apesar das ligações de

curto alcance, a rede acaba atingindo estados macroscópicos de aglomerados sujeitos à correlação de longo alcance. Entretanto, esses estados correlacionados críticos se dissipam rapidamente, dando lugar a outros estados igualmente correlacionados. O estado macroscópico do sistema, apesar de correlacionado, fica mudando continuamente devido às flutuações nos seus estados microscópicos, mantendo o parâmetro de ordem nulo. A sensibilidade do sistema a flutuações é, portanto, máxima no estado crítico.

Disto pode-se sugerir a teoria da criticalidade auto-organizada: sistemas longe do equilíbrio são críticos desde que apresentem correlação de longo alcance na propagação de flutuações microscópicas. Ela será explicada na próxima seção. A teoria descrita até agora tratava de sistemas termodinâmicos em equilíbrio [24, 25, 26]. Contudo, as mesmas noções podem ser generalizadas para transições de fase longe do equilíbrio.

## 2.4 CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA

O conceito de criticalidade auto-organizada (SOC, do inglês Self-Organized Criticality) foi proposto por Bak, Tang e Wiesenfeld [13] para descrever a tendência natural de alguns sistemas evoluírem para um estado crítico sem a dependência de ajustes externos nos parâmetros e tampouco da configuração inicial do sistema. A organização de um sistema em um estado crítico pode ser revelada pela resposta do sistema a perturbações externas ou internas.

Para ilustrar esse sistema complexo, Bak e seus colaboradores estudaram um modelo que ficou conhecido como a pilha de areia. Seus procedimentos são:

- Sobre um plano finito qualquer é continuamente e aleatoriamente despejado um fluxo de areia;
- Conforme a inclinação da pilha de areia aumenta, ocorrem alguns deslizamentos, ou seja, pequenos movimentos de grãos de areia da pilha.

- À medida que a altura da pilha atinge dimensões proporcionalmente maiores que sua base, deslizamentos maiores começam a ocorrer, isso representa o limiar do sistema.
- A quantidade de grãos que desmoronaram é o tamanho de uma avalanche e a quantidade de passos de tempo necessária para redistribuir esses grãos é a duração da avalanche. O sistema opera sobre uma rede finita, então os grãos das bordas da rede, ao serem redistribuídos, caem fora do sistema.
- O sistema atingiu um estado estacionário, onde a pilha passa a ter uma inclinação constante chamada de ângulo de estabilidade, e a média dos grãos que entram no sistema é a mesma que o deixa.
- No estado estacionário, o sistema é crítico, pois não é possível prever o tamanho nem o instante em que as avalanches vão correr. Isto significa que quando deslizamentos locais acontecem, podem ou não ser geradas avalanches de grandes tamanhos envolvendo todo o sistema. O sistema atingiu então, a criticalidade auto-organizada.



Figura 3 – Modelo de pilha de areia: a criticalidade auto-organizada estabelece uma relação entre fenômeno crítico e avalanches invariantes de escala (não mudam nem por um fator de multiplicativo), requerendo que o estado crítico seja um atrator na dinâmica e leve o sistema a se auto-organizar em torno da criticalidade. E isso permite que perturbações locais se propagem por todo o sistema [3].

As distribuições de probabilidade de um sistema que apresenta SOC são dadas pelas seguintes leis de potência:

- distribuição do tamanho  $s$  da avalanche com expoente crítico  $\alpha$ :

$$P(s) \sim s^{-\alpha}, \quad (2.25)$$

- distribuição da duração  $T$  da avalanche com expoente crítico  $\tau$ :

$$P(T) \sim T^{-\tau}. \quad (2.26)$$

Exemplos de fenômenos para os quais pode-se propor a dinâmica de SOC são: terremotos [29, 30], incêndios florestais [31], evoluções biológicas [32], flutuações do mercado de ações [33, 34], guerras [35] e interações sociais [36]. A seguir veremos um sugestão experimental de SOC no cérebro.

## 2.5 AVALANCHES NEURONAIS IN VITRO

Uma avalanche neuronal é uma cascata de disparos de atividade em uma rede neuronal cujas distribuições de quantidade e duração de disparos podem ser aproximadas por leis de potência, assim como nos modelos críticos de pilhas de areia. Beggs e Plenz [14] observaram essas avalanches em fatias cultivadas do córtex de ratos. Essas porções cultivadas foram dispostas sobre uma matriz de multi-eletrodos, onde os disparos dos neurônios são registrados pelos eletrodos. A quantidade e o duração desses disparos seguem aproximadamente uma distribuição na forma de leis de potência. A atividade da rede é caracterizada por breves disparos com duração de milissegundos, separados por períodos de quiescência que duram vários segundos.

A distribuição do tamanho da avalanche segue a seguinte lei de potência:

$$P(S) = kS^{-\alpha}, \quad (2.27)$$

onde,  $P(S)$  é a probabilidade de observar uma avalanche de tamanho  $S$ ,  $\alpha$  é o expoente dado pela inclinação da lei de potência em um gráfico log-log, e  $k$  é uma constante. Beggs e Plenz [14] obtiveram um expoente  $\alpha = 1.5$  para as porções cultivadas do córtex.

Em 2005, Haldeman e Beggs [4] modelaram a técnica de rede de ramificação utilizada experimentalmente por Beggs e Plenz em 2003. Cada eletrodo é representado por uma unidade de processamento que pode ser ligada (1) ou desligada (0). O modelo consiste de uma folha de multi-eletrodos  $N \times N$  com cada unidade conectada aleatoriamente a  $C$  outras unidades. A distribuição do tamanho das avalanches medida experimentalmente em 2003 aproxima-se aos dados teóricos de 2005, como pode ser visto na Figura 4.

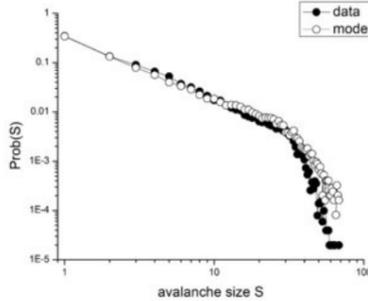


Figura 4 – A distribuição do tamanho das avalanches neuronais em porções normais cultivadas do córtex. O expoente da lei de potência é dado pela inclinação da reta tracejada  $\alpha = 1.5$  e otimizado em  $\sigma = 1$ . [4].

O parâmetro controlável usado no sistema é chamado de taxa de ramificação, que é compreendida como a razão entre o número de eletrodos ativos em um instante de tempo (eletrodos descendentes) pelo número de eletrodos ativos no instante anterior (eletrodos ancestrais):

$$\sigma = \frac{\text{eletrodos descendentes}}{\text{eletrodos ancestrais}}. \quad (2.28)$$

Para uma única unidade de processamento na rede, o parâmetro de ramificação  $\sigma$  é definido pela seguinte relação:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^N p_{ij}, \quad (2.29)$$

onde,  $\sigma_i$  é a expectativa de um eletrodo  $i$  ser ativado em um instante de tempo,  $N$  é a quantidade de eletrodos aos quais  $i$  está conectado e  $p_{ij}$  é probabilidade de uma unidade  $i$  ser ativada por um eletrodo  $j$  ativo.

Os sistema apresenta três regimes (ver Fig.5):

- Em processos subcríticos ( $\sigma < 1$ ), a atividade neuronal decai ao longo do tempo;
- Em processos críticos ( $\sigma = 1$ ), a atividade é aproximadamente sustentada e decai com uma lei de potência com expoente crítico igual a  $\alpha = 1.5$ ;
- Em processos supercríticos ( $\sigma > 1$ ) a atividade é crescente e se torna auto-sustentada.

As avalanches neuronais desse sistema foram capturadas quando o parâmetro controlável estava sintonizado no ponto crítico ( $\sigma = 1$ ).

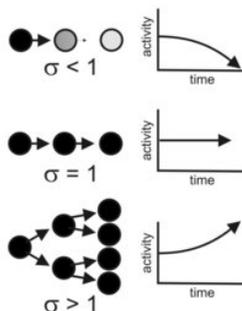


Figura 5 – Os três regimes de um processo de ramificação. No alto, quando a taxa de ramificação é menor que 1, o sistema é subcrítico e a atividade decai com o tempo. No meio, quando a taxa de ramificação é igual a 1, o sistema é crítico e a atividade praticamente é mantida. Em baixo, quando a taxa de ramificação é maior que um, o sistema é supercrítico e a atividade aumenta ao longo do tempo [5].

Com base nesses três regimes, outros trabalhos sugerem que um cérebro saudável deve estar num estado crítico, ou flutuar em torno

desse estado. A falta de criticalidade pode estar relacionada à epilepsia [37], à esquizofrenia [38], a estados inconscientes [39] e à depressão [40].

## 2.6 FAIXA DINÂMICA

A faixa dinâmica (ou alcance dinâmico, intervalo de resposta dinâmico, intervalo de percepção sensorial) descreve quantas ordens de magnitude um sistema sensorial pode suportar no sentido de distinguir diferentes estímulos. Assim, ela é a razão entre o maior e o menor valor que um estímulo pode assumir. Usualmente é usada no contexto de sinais luminosidade ou sonoros medidos em decibéis.

Sua medição pode ser feita através de uma escala logarítmica na base 10:

$$\Delta = 10 \log_{10} \frac{\text{maior sinal}}{\text{menor sinal}}. \quad (2.30)$$

Estudos da Psicofísica descrevem que qualquer sensação subjetiva  $P$  vinda de um estímulo  $S$  podem ter uma relação do tipo  $P \sim S^m$ , onde, o expoente  $m$  determina a função de transferência entre a sensação subjetiva e o estímulo. O problema não resolvido é o mecanismo neuronal que dá origem a tais expoentes. Em outras palavras, qual é a física da Psicofísica [6]?

Foi então que, Kinouchi e Copelli [20] sugeriram que para se obter a maior faixa dinâmica é necessário que a rede neuronal, apoiada nos sentidos sensoriais, deve ter operar no ponto crítico da transição de fase entre dois estados: subcrítico e supercrítico. No estado subcrítico a atividade neuronal cessa rapidamente após algum estímulo externo. Por outro lado, no estado supercrítico os neurônios da rede apresentam atividade auto-sustentada, ou seja, disparam incessantemente depois de receber algum estímulo externo.

Conforme a Figura 6 a faixa dinâmica é maximizada no ponto crítico da transição de fase:

- no caso subcrítico as conexões são fracas e a atividade cessa rapidamente;
- no caso crítico as conexões são aproximadamente um para um;

- no caso supercrítico as conexões são fortes e a atividade se auto-sustenta.

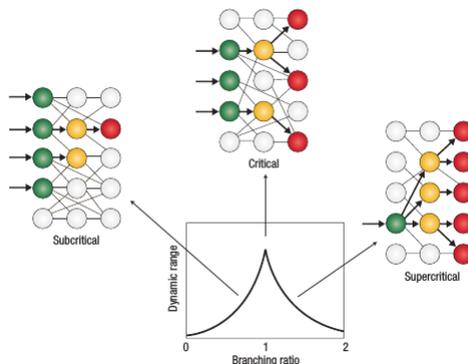


Figura 6 – Faixa dinâmica maximizada no ponto crítico [6].

Pei e colaboradores [12], tendo como base o modelo de Kinouchi e Copelli [20], propuseram um modelo de rede com elementos excitatórios-inibitórios e estudaram sua faixa dinâmica. Concluíram que a faixa dinâmica continua sendo maximizada no ponto crítico, apesar deste ser dependente da fração de elementos excitatórios.

Os modelos tem como características básicas neurônios conectados aleatoriamente de acordo com uma topologia Erdős-Renyi e sua dinâmica neuronal é simulada através de um autômato celular. Nos próximos capítulos veremos com mais detalhes como esses modelos foram construídos.

## 2.7 AVALANCHES NEURONAIS IMPLICAM EM FAIXA DINÂMICO MAXIMIZADA NA CRITICALIDADE

Plenz e colaboradores [7] testaram a hipótese de Kinouchi e Copelli [20] e mostraram que a faixa dinâmica de tecidos do hipocampo de rato é maximizada quando o tecido está em regime normal (crítico). Os regimes subcríticos e supercríticos são uma manipulação experimental

da proporção de excitação e inibição no córtex. Demonstraram que o córtex de ratos geram avalanches neuronais (ver Fig.7) e possuem faixa dinâmica maximizada no ponto crítico(ver Fig.8). As descobertas deles sugerem que a atividade espontânea e a faixa dinâmica do tecido neuronal são unificadas no contexto de fenômenos críticos e a mudança da excitação-inibição afasta o tecido da criticalidade.

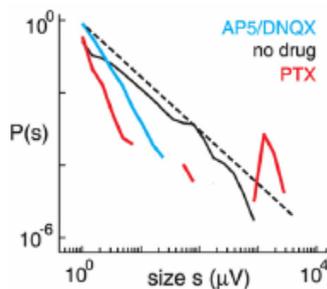


Figura 7 – Resultado experimental. Distribuição das avalanches neuronais é otimizada quando o córtex não está submetido à modificação na proporção excitação-inibição(linha preta). A Linha tracejada representa uma lei de potência com expoente  $\alpha = 1.5$ . Ao modificar se as proporções entre excitação-inibição, a rede cortical se afasta da criticalidade (linhas vermelha e azul) [7].

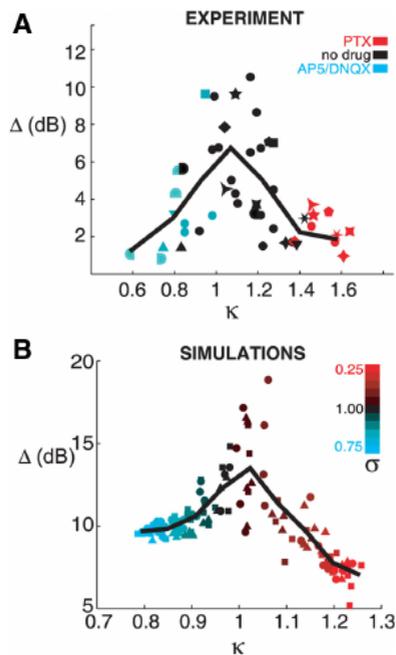


Figura 8 – Resultado experimental e simulado. A faixa dinâmica é máxima quando o córtex não está sobre efeito de modificações na proporção de excitação-inibição. O ponto crítico é  $\kappa \cong 1$ [7].



### 3 AS TRÊS LEIS DA PSICOFÍSICA

#### 3.1 LEI DE WEBER

Ambas as leis de Weber e Fechner foram formuladas e publicadas pelo filósofo alemão, Gustav Theodor Fechner, em seu livro *Elemente der Psychophysik* (Elementos da Psicofísica) em 1860 [17]. Esse trabalho foi o primeiro nessa área e o termo Psicofísica foi criado para descrever o estudo interdisciplinar de como o ser humano percebe a magnitude de estímulos físicos.

Ernst Heinrich Weber, um médico alemão, foi uma das primeiras pessoas a abordar o estudo da resposta humana a estímulos físicos de forma quantitativa. Fechner era estudante de Weber e nomeou sua primeira lei em homenagem ao seu mentor, já que foi Weber quem conduziu os experimentos necessários para formular a lei [17].

Os experimentos de Weber fizeram-no concluir que quanto mais intenso um estímulo (por exemplo, quanto mais brilhante a luz), maior a diferença apenas perceptível (DAP), quer dizer, menor diferença necessária no estímulo que pode ser percebido. Ou seja, para estímulos pequenos uma pequena DAP é suficiente para ser sentida, enquanto que para estímulos grandes é necessário uma grande DAP. Fechner acrescentou que essa mudança segue uma escala linear.

Fechner formulou a lei de Weber da seguinte forma: "A diferença apenas perceptível no estímulo é inversamente proporcional ao estímulo inicial e ela é constante independentemente do tamanho do estímulo." Assim,

$$\frac{\Delta S}{S_0} = \text{constante} \quad (3.1)$$

onde,  $\Delta S$  é a diferença apenas perceptível do estímulo e  $S_0$  é o estímulo inicial.

Essa habilidade para detectar diferença entre dois estímulos também é chamada de limiar diferencial. É a diferença mínima entre dois estímulos para que seja discriminada alguma diferença entre eles.

### 3.2 LEI DE FECHNER

Embora a lei de Weber inclua uma declaração sobre a proporcionalidade de uma mudança percebida nos estímulos iniciais, Weber apenas se refere a isso como uma regra prática em relação à percepção humana. Foi Fechner quem reformulou essa afirmação como uma expressão matemática na forma logarítmica [17]:

$$dP = k \frac{dS}{S} \quad (3.2)$$

onde, ele inclui uma constante  $k$  que depende do sentido específico e do tipo de estímulo.  $dP$  é a variação na percepção e  $dS$  é a variação no estímulo.

Integrando a equação 3.2, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^P dP &= k \int \frac{dS}{S} \\ p &= k \ln S + C \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para solucionar  $C$ , assume-se que a percepção  $P$  torna-se zero em algum estímulo limiar  $S = S_0$ . Logo, temos que:

$$C = -k \ln S_0 \quad (3.4)$$

Assim, substituindo 3.4 em 3.3, obtemos a proposição que sugere que uma sensação subjetiva é proporcional ao logaritmo da intensidade do estímulo:

$$P = k \ln \frac{S}{S_0} \quad (3.5)$$

Essa relação logarítmica significa que o estímulo varia como uma progressão geométrica (isto é, por um fator multiplicativo fixo) e a percepção correspondente se altera como uma progressão aritmética (isto é, adicionando uma quantidade constante). Fechner afirmou que essa lei incluía todos os sentidos, a visão, a audição, o tato e o olfato [17].

A título de um exemplo de percepção de brilho da luz: se comparamos o brilho de uma lâmpada de 25 watts uma de 50 watts, elas

parecem distintas. Mas, se compararmos o brilho entre uma lâmpada de 175 watts e uma de 200 watts, elas parecem quase iguais. Logo, somos menos sensíveis às diferenças na intensidade do sinal à medida que a intensidade de um estímulo aumenta.

Na Figura 9 há um exemplo visual da lei de Weber-Fechner. Os quadrados inferiores contém 10 pontos a mais do que os superiores. No entanto, a percepção é diferente: no lado esquerdo, a diferença entre o quadrado superior e o quadrado inferior é claramente visível. No lado direito, os dois quadrados parecem quase os mesmos.

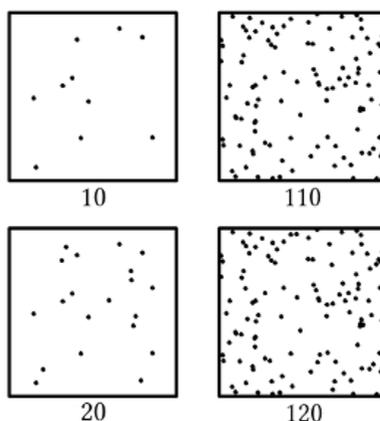


Figura 9 – Ilustração da lei de Weber-Fechner [8].

Mas, será que todas as sensações fisiológicas possuem esse comportamento logarítmico? A seguir vamos discutir as descobertas do psicofísico Stanley Smith Stevens, que afirma ter descoberto que na realidade o ser humano percebe na forma de uma lei de potência [41].

### 3.3 LEI DE STEVENS

Em 1957 um psicólogo americano, Stanley Smith Stevens, publica uma nova formulação para a percepção quantitativa humana com uma gama mais ampla de sensações. Ele sugeriu que a intensidade da sensação subjetiva é proporcional com o estímulo físico através de uma lei de potência [42]. A forma geral da lei é:

$$P = kS^m, \quad (3.6)$$

onde,  $S$  é magnitude do estímulo,  $P$  é a intensidade da sensação subjetiva;  $k$  é uma constante que depende da sensação-estímulo usado e  $m$  é o expoente de Stevens que depende do estímulo usado.

O expoente é o parâmetro mais importante, pois ele determina a curva que representa a relação entre o estímulo e a intensidade da sensação subjetiva:

- se é  $m > 1$ , a relação caracteriza uma curva côncava para cima;
- se é  $m = 1$ , a relação caracteriza uma linha reta;
- se é  $m < 1$ , a relação caracteriza uma curva côncava para baixo.

A Figura 10 mostra o comportamento de três tipos de curvas em escala lineares. A curva da percepção do choque elétrico chama a atenção pois, seu expoente é maior que um, o que quer dizer que as pessoas se tornam mais sensíveis à eletricidade à medida que a intensidade de um choque aumenta.

Colocando a equação 3.6 em termos logarítmicos é obtida uma função linear, onde o expoente  $m$  é a inclinação da reta e o logaritmo da constante  $k$  é a intercessão com os eixos  $P$  e  $S$ :

$$\ln P = m \ln S + \ln k. \quad (3.7)$$

A Figura 11 mostra o comportamento de três tipos de retas em escala logarítmicas. A inclinação de cada reta corresponde ao expoente  $m$  da função de potência característica de cada atributo sensorial.

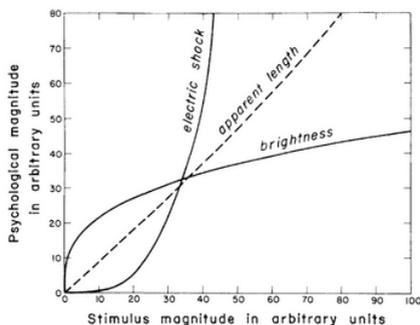


Figura 10 – Intensidade das sensações subjetivas em função da magnitude física dos estímulos em coordenadas lineares. As percepções sensoriais e os expoentes de Stevens, de cima para baixo, são: choque elétrico ( $m = 3.5$ ), comprimento aparente ( $m = 1.0$ ) e brilho ( $m = 0.33$ ) [9].

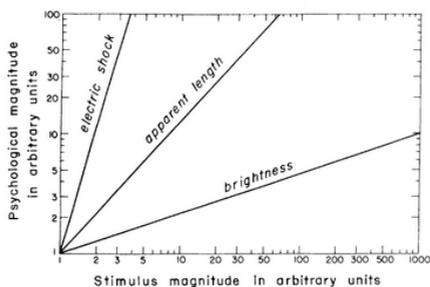


Figura 11 – Intensidade das sensações subjetivas em função da magnitude física dos estímulos em coordenadas logarítmicas. As percepções sensoriais e os expoentes de Stevens, de cima para baixo, são: choque elétrico ( $m = 3.5$ ), comprimento aparente ( $m = 1.0$ ) e brilho ( $m = 0.33$ ).[9]

Na Tabela 1 há vários expoentes, que Stevens catalogou, conforme o tipo de condição de estímulo fornecido e a resposta sensorial recebida [9].

## Métodos de medição utilizados por Stevens

Stevens usou dois métodos principais para medir a intensidade percebida por um estímulo, chamados de produção de magnitude e estimativa de magnitude [43].

1. Na estimativa de magnitude, o experimentador apresenta um estímulo padrão e atribui a ele um número chamando de módulo. A partir daí o experimentador aplica estímulos a um sujeito, o qual deve dizer o quão próximo ou distante esses estímulos estão do módulo.
2. Na produção de magnitude, o sujeito é livre para escolher seu próprio padrão.

## Interpretação de Stevens para sua lei de potência

Stevens propôs uma interpretação biológica para a sua lei psicofísica. Como essa lei de potência se aplica a todos os sistemas sensoriais então ela seria de fundamental importância para a sobrevivência do organismo. Quando os estímulos sensoriais se transformam em atividade neuronal e são interpretados no cérebro como uma percepção, os valores dos expoentes forneceriam informações sobre as propriedades básicas desse processo de estímulo-percepção. Se o estímulo vindo do ambiente é muito pequeno a atividade neuronal funcionaria como um magnificador, como por exemplo é o caso do expoente do choque elétrico ( $m = 3.5$ ). Mas, se o estímulo do ambiente externo é muito grande, a atividade neuronal se comportaria com um desmagnificador para evitar uma possível sobrecarga no organismo. Por exemplo, o expoente encontrado para brilho ou som ( $m = 0.5$ ), provavelmente, refletiria uma atividade neuronal desmagnificadora [44, 9].

## NÃO HÁ CONSENSO ENTRE A VALIDADE DAS LEIS

Uma grande incógnita fica em aberto, será que a percepção sensorial é logarítmica ou na forma de uma lei de potência? Escalas não-

lineares que possuem uma resolução perceptiva maior a menos estímulos são onipresentes em animais e nas modalidades sensoriais como: distinção entre pesos, dor, calor, sabor, sonoridade, brilho, distância, tempo e saturação de cores que são percebidas de forma logarítmica [45]. Outro exemplo é a colocação de números numa escala linear. Foi pedido para que alunos do jardim de infância dispusessem números de 1 até 100 em uma escala linear, mas eles não distribuíam os números uniformemente e sim o faziam num mapeamento logarítmico. Alunos da quarta série, no entanto, mapeiam mais linearmente do que logaritmicamente. Mas, se alguém perguntar a um adulto membro dos Mundurucu, uma comunidade amazônica com um léxico numérico reduzido e pouca educação formal, para completar a mesma tarefa, o mapeamento logarítmico ocorre novamente. Parece que colocar números uniformemente ao longo de uma linha é algo que é aprendido, e não algo natural. Assim, a maneira como percebemos números é logarítmica [46].

Em 2012, Sun e colaboradores [47] sugeriram que as sensações são percebidas em escalas logarítmicas, desde que a distribuição dos estímulos siga uma lei de potência. Realizaram um estudo de caso, apresentando evidências empíricas, para sons naturais e chegaram bem próximo a lei de Weber-Fechner.

Embora haja bastante debate sobre a validade das leis psicofísicas, os pesquisadores sugerem que as previsões psicofísicas são essencialmente equivalentes [48]. Mas de fato até agora, as leis psicofísicas são apenas empíricas, a teoria por trás delas está faltando.

Tabela 1 – Valores dos expoentes de Stevens  $m$  para diferentes tipos de percepção sensorial e condições de estímulos.

Percepção Sensorial	Expoente medido	Condição do estímulo
Som	0.67	Pressão sonora na frequência de 3000 Hz
Vibração	0.95	Frequência de 60 Hz no dedo
Vibração	0.6	Frequência de 250 Hz no dedo
Brilho	0.33	Olho adaptado ao escuro
Brilho	0.5	Fonte pontual
Brilho	0.5	Piscar de luz
Brilho	1.0	Fonte pontual brevemente disparada
Clareza	1.2	Refletância de papel cinza
Comprimento visual	1.0	Linha projetada
Área visual	0.7	Quadrado projetada
Vermelho saturado	1.7	Mistura vermelho-cinza
Sabor	1.3	Sacarose
Sabor	1.4	Sal
Sabor	0.8	Sacarina
Odor	0.6	Heptano
Frio	1.0	Contato do braço com metal
Calor	1.6	Contato do braço com metal
Calor	1.3	Irradiação na pele em uma pequena área
Calor	0.7	Irradiação na pele em uma grande área
Desconforto-frio	1.7	Irradiação no corpo todo
Desconforto-calor	0.7	Irradiação no corpo todo
Dor térmica	1.0	Radiação quente na pele
Rugosidade tátil	1.5	Esfregar lixa
Dureza tátil	0.8	Apertando borracha
Extensão do dedo	1.3	Grossura de blocos
Pressão na palma da mão	1.1	Força estática sobre a pele
Força muscular	1.7	Contração estática
Peso	1.45	Levantamento de peso
Viscosidade	0.42	Mexendo em fluido de silicone
Choque elétrico	3.5	Corrente através dos dedos
Esforço vocal	1.1	Pressão vocal sonora
Aceleração angular	1.4	5 s de rotação
Duração	1.1	Estímulo com ruído branco

## 4 TEORIA DE REDES ALEATÓRIAS

### 4.1 PARÂMETROS DE UMA REDE

Uma rede (ou um grafo) é composto por nós (ou vértices) e ligações (ou arestas) que conectam pares de nós. A forma como os nós se ligam através das ligações define a topologia da rede, sendo importante para o estudos nas áreas da biologia, da neurociência, da psicologia, das redes sociais, das redes de comunicação, etc [10].

Os parâmetros básicos de uma rede complexa são:

- o número de nós,  $N$ , que representa o número de componentes no sistema. Para distinguir-se os nós usamos índice  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .
- $L$  é o número de ligações entre os nós.

Quando modelamos um sistema físico por uma rede, escolhemos algum critério para determinar as ligações entre os ligamentos do sistema. As ligações de uma rede podem ser direcionadas ou não-direcionadas. Sistemas com ligações direcionadas possuem um sentido unilateral. Tendo como exemplo chamadas telefônicas, onde uma pessoa liga para a outra, ou como páginas da *Web* que apontam de um documento para outro. Sistemas com ligações não-direcionadas possuem um sentido bilateral. Tendo como exemplo, laços românticos ou linhas de transmissão da rede elétrica, nas quais a corrente elétrica pode fluir em ambas direções [10]. Nesse trabalho consideramos as redes como não-direcionadas.

### Conectividade

Cada nó em uma rede possui um grau de conectividade, que representa o número de ligações que este nó faz com os outros. Como exemplo, temos o número de citações que um trabalho de pesquisa recebe ou o número de contatos telefônicos que um indivíduo possui em seu celular. Denota-se por  $K_i$  o grau de conectividade do nó  $i$ . Em uma rede não-direcionada, o número total de ligações  $L$  pode ser

expresso pela metade da soma dos graus de cada nó da rede:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i, \quad (4.1)$$

onde o fator  $1/2$  corrige o fato de que cada ligação na soma é contado suas vezes. O grau médio de conectividade desse tipo de sistema corresponde a:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_i = \frac{2L}{N}. \quad (4.2)$$

### Matriz de adjacência

A conectividade de uma rede pode ser descrita através de uma matriz quadrada de ordem  $N$ , chamada de matriz de adjacência: correspondem as ligações da rede:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix},$$

onde os elementos  $a_{ij}$  são tais que:

- $a_{ij} = 1$  se há uma ligação entre um nós  $i$  e  $j$ ;
- $a_{ij} = 0$  se não há ligação entre os nós  $i$  e  $j$ ;

O grau  $K_i$  pode ser obtido diretamente dos elementos da matriz de adjacência. Para redes não-direcionadas, o grau  $K_i$  é igual a soma dos elementos da linha ou da coluna da matriz de adjacência, ou seja,

$$K_i = \sum_{j=1}^N a_{ji} = \sum_{i=1}^N a_{ji}. \quad (4.3)$$

### Pesos

A algumas redes estudadas pela ciência são ponderadas, onde cada ligação  $(i, j)$  tem um peso único  $w_{ij}$ . Em uma chamada telefônica,

por exemplo, o peso de cada ligação pode ser representado pelo total de minutos que dois indivíduos conversaram um com o outro ao telefone. Em redes elétricas, o peso é a quantidade de corrente que flui através das linhas de transmissão. Para redes ponderadas, os elementos da matriz de adjacência carregam o peso das ligações como:

$$a_{ij} = w_{ij}. \quad (4.4)$$

## 4.2 REDE ERDŐS-RÉNYI

O que caracteriza uma rede aleatória é que as ligações entre os nós existem com determinada probabilidade. Existem dois modelos básicos para esse tipo de rede:

1. modelo  $G(N, L)$  onde, os  $N$  nós estão conectados por  $L$  ligações fixas com grau médio de conectividade  $\langle K \rangle = 2L/N$ ;
2. modelo  $G(N, p)$  onde, cada par de nós  $N$  está conectado com uma probabilidade fixa  $p$ .

Construímos uma rede com o modelo  $G(N, p)$ , seguindo os passos:

- Começamos com  $N$  nós isolados.
- Para cada par de nós geramos um número aleatório através de uma distribuição uniforme de 0 a 1. Caso o número gerado seja menor ou igual a  $p$  inserimos uma ligação entre os nós, caso contrário os nós ficam desconectados.

A rede obtida após este procedimento é chamada de rede aleatório ou em honra a dois matemáticos, rede Erdős-Rényi [18].

### Distribuição da conectividade

Os dois modelo de redes aleatórios são conceitualmente diferentes mas, no limite de  $N \rightarrow \infty$ , essa diferença pode ser desprezada. Desta forma, neste trabalho utilizamos o modelo  $G(N, L)$  pois, simulamos redes com  $N$  grande. Assim, a seguir serão discutidas propriedades do

modelo  $G(N, p)$  que podem ser estendidas para o modelo  $G(N, L)$ . Em uma rede aleatória, a probabilidade de que o nó  $i$  tenha exatamente  $K_i = K$  ligações é o produto de três termos:

- A probabilidade de que haja  $K$  ligações presentes é  $p^K$
- A probabilidade de que as  $(N - 1 - K)$  ligações restantes estejam ausentes é  $(1 - p)^{N-1-K}$
- O fator combinatório de número de maneiras que podemos selecionar  $K$  ligações em  $N - 1$  ligações que esse nó pode ter.

A forma dessa distribuição depende do tamanho do sistema  $N$  e da probabilidade  $p$ :

$$p_K = \left[ \frac{(N-1)^K}{K!} \right] p^K (1-p)^{(N-1-K)} \quad (4.5)$$

A distribuição binomial nos permite calcular o grau médio de conectividade da rede,  $\langle K \rangle$  que é o produto da probabilidade  $p$  de dois nós estarem conectados e o número máximo de ligações  $(N - 1)$  que um nó pode ter em uma rede de tamanho  $N$ :

$$\langle K \rangle = \sum_{K=0}^{N-1} K p_K = p(N-1). \quad (4.6)$$

A maioria das redes reais é esparsa, quer dizer,  $\langle K \rangle \ll N$ . Isso permite que a distribuição binomial possa ser aproximada por uma distribuição de Poisson. O último termo da equação 4.5 pode ser simplificado para:

$$\ln[(1-p)^{(N-1-K)}] = (N-1-K) \ln(1-p) = \ln\left(1 - \frac{\langle K \rangle}{N-1}\right)$$

Usando a expansão em série do termo em logaritmo natural,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, \forall |x| \leq 1$$

Obtêm-se,

$$\ln[(1-p)^{(N-1-K)}] = (N-1-K) \frac{\langle K \rangle}{N-1} = -\langle K \rangle \left(1 - \frac{K}{N-1}\right) \approx -\langle K \rangle,$$

que é válido para  $\langle K \rangle \ll N$ .

Assim, o ultimo termo da equação 4.5 pode ser escrito como:

$$(1-p)^{(N-1-K)} = e^{-\langle K \rangle} \quad (4.7)$$

Combinando as equações 4.7 e 4.6 na equação 4.5 obtêm-se a distribuição de conectividade de uma rede aleatória:

$$p_K = \frac{(N-1)^K}{K!} p^K e^{-\langle K \rangle} = \frac{(N-1)^K}{K!} \left( \frac{\langle K \rangle}{N-1} \right)^K e^K,$$

$$p_K = \frac{\langle K \rangle^K}{K!} e^{-\langle K \rangle}. \quad (4.8)$$

Esse resultado é uma consequência importante do modelo de redes aleatórias. Em uma rede grande, o grau da maioria dos nós está nas proximidades estreitas de  $\langle K \rangle$ .

## Regimes da rede

As propriedades topológicas da rede dependem do número de ligações entre os nós. Podemos verificar essas diferenças estudando a variação do tamanho de maior agregado  $N_G$  (ou cluster) com a probabilidade  $p$ . Os casos extremos são:

- para  $p = 0 \Rightarrow \langle K \rangle = 0$ , logo, todos os nós estão isolados. Assim sendo, a maior componente do sistema tem tamanho  $N_G = 1$  para  $N$  grande e  $\frac{N_G}{N} \rightarrow 0$ .
- para  $p = 1 \Rightarrow \langle K \rangle = N - 1$ , logo, todos os nós estão conectados entre si e são uma única componente. Assim,  $N_G = N$  e  $\frac{N_G}{N} = 1$ .

Em 1959, Erdős e Rényi mostraram que existe um valor crítico  $p$  a partir do qual o tamanho do maior cluster representa uma fração finita do tamanho da rede, sendo assim chamada de componente gigante. O valor crítico de  $p$  encontrado é tal que  $\langle K \rangle$  é igual a um; para valores de  $p$  menor que o crítico não há componente gigante [49].

Retomando a equação 4.6 e levando em conta que  $\langle K \rangle = 1$ , a probabilidade crítica será:

$$p = p_c = \frac{1}{N-1} \approx \frac{1}{N}. \quad (4.9)$$

Portanto, quanto maior a rede, menor é a probabilidade necessária para se atingir uma componente gigante.

Então, em uma rede aleatória, com  $N$  grande, à medida que variamos  $p$ , podemos distinguir quatro regimes com relação ao tamanho do maior cluster (ver, figura 12):

- Regime subcrítico ( $\langle K \rangle < 1$ ):

$$\frac{N_G}{N} \sim \frac{\ln N}{N} \rightarrow 0 \quad (4.10)$$

- Regime crítico ( $\langle K \rangle = 1$ ): neste caso, a distribuição de tamanho dos clusters segue uma lei de potência.

$$\frac{N_G}{N} \sim \frac{N^{2/3}}{N} \sim \frac{1}{N^{1/3}} \quad (4.11)$$

- Regime supercrítico ( $\langle K \rangle > 1$ ):

$$\frac{N_G}{N} \sim \langle K \rangle - 1 \quad (4.12)$$

- Regime conectado ( $\langle K \rangle > \ln N$ ):

$$\frac{N_G}{N} \sim \frac{N}{N} \sim 1 \quad (4.13)$$

O modelo de rede aleatória possui então, uma transição de fase entre um estado de rede desconectada para um estado de rede conectada. Esse fenômeno emergente é similar aos fenômenos de criticalidade descritos anteriormente.

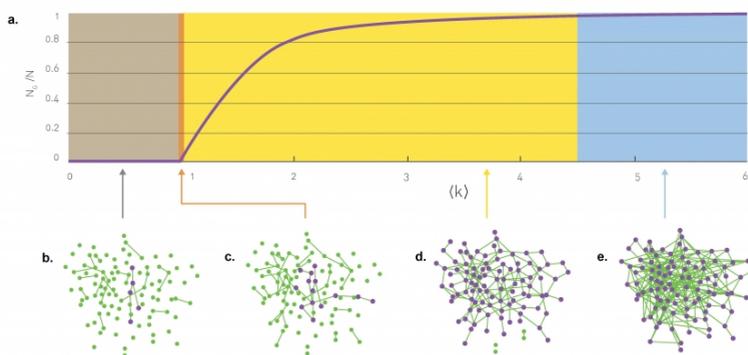


Figura 12 – Tamanho relativo da componente de maior cluster ( $N_G/N$ ) em função do grau médio ( $\langle K \rangle$ ) no modelo de Erdős-Rényi. O surgimento da componente gigante se quando  $\langle K \rangle$  excede de 1. Abaixo, os quatro regimes característicos da evolução de uma rede aleatória [10].



## 5 DINÂMICA DA REDE

O cérebro humano é um sistema altamente complexo formado por aproximadamente cem bilhões de neurônios, onde cada um deles tem em média cerca de dez mil conexões [50]. Estas conexões, denominadas sinapses, são responsáveis pela comunicação entre os neurônios, tendo a capacidade de transmitir sinais entre estas células [51]. Toda essa estrutura tem papel fundamental na memória, linguagem, consciência e em todos os nossos sentidos [15].

### 5.1 NEURÔNIO

Todo neurônio possui um corpo celular ou soma, onde estão presentes as principais organelas intracelulares. O corpo celular de praticamente todos os neurônios apresenta dois tipos de prolongamentos, os axônios e os dendritos. O axônio é responsável pela saída de informações da célula nervosa, conduzindo impulsos elétricos para outras células. Os dendritos, ao contrário dos axônios, recebem as informações provenientes de outros neurônios [52]. Logo, o sinal elétrico chega ao neurônio pelos dendritos, passa pelo soma e pelo axônio, onde é propagado a outros neurônios.

O neurônio é envolvido por uma membrana que separa o meio intracelular do extracelular. Essa membrana apresenta uma permeabilidade seletiva que permite a troca de íons entre o interior e exterior da célula através de canais iônicos, sendo esta a propriedade que possibilita a criação e propagação de sinais elétricos entre neurônios. Os canais iônicos são proteínas encontradas na membrana plasmática celular, com a capacidade de deixar passar íons de maneira seletiva, de forma contínua ou em resposta a estímulos elétricos, químicos ou mecânicos [11]. A Figura 13 representa as estruturas gerais de um neurônio.

Ao medir a diferença de potencial entre a parte interna e externa da membrana celular de um neurônio em seu estado de repouso, ou seja, quando inativo quanto à produção de sinais elétricos, verifica-se que existe uma diferença de potencial aproximadamente constante e não

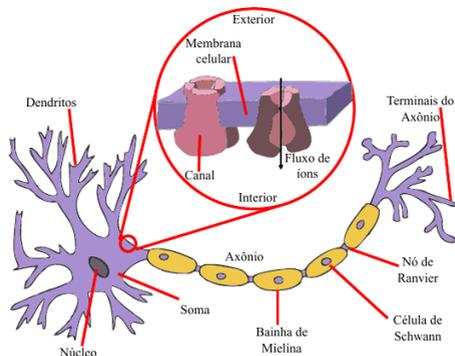


Figura 13 – Esquema geral das estruturas presentes num neurônio. Detalhe: canais iônicos (conjuntos de proteínas) por onde ocorre a difusão dos íons através da membrana. Esses canais estão espalhados por toda a membrana do neurônio [2].

nula. Essa diferença de potencial é chamada de potencial de repouso e tem sua origem relacionada ao equilíbrio entre o gradiente elétrico e químico de íons entre os meios intra e extracelular. Em seu estado ativo o neurônio apresenta o que chamamos de potencial de ação, que consiste de um sinal elétrico muito rápido resultante de uma variação abrupta do seu potencial de membrana, quando isso ocorre temos um disparo neuronal [52].

A Figura 14 mostra uma representação da dinâmica do potencial da membrana celular de um neurônio durante um disparo. Na ausência de um estímulo externo, o potencial permanece constante. Entretanto, dependendo do estímulo fornecido à célula, o potencial da membrana começa a variar, até atingir um potencial limiar. A partir desse limiar, o valor do potencial aumenta rapidamente até atingir a amplitude máxima, esse processo é chamado despolarização da membrana. O retorno do potencial até o limiar é conhecido como repolarização e o período onde o potencial permanece abaixo do potencial de repouso é chamado de hiperpolarização. Durante a repolarização e a hiperpolarização te-

mos um período refratário, onde o neurônio fica quiescente até poder disparar novamente [52].

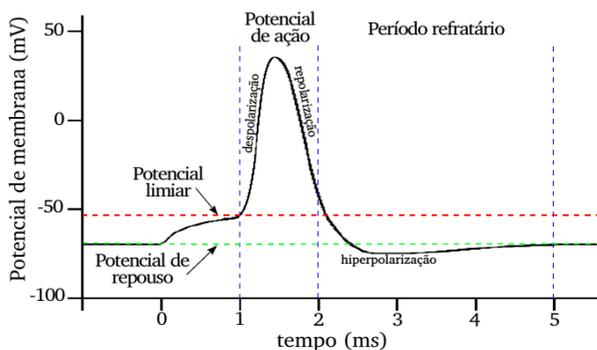


Figura 14 – Dinâmica do potencial da membrana de um neurônio [11].

## 5.2 SINAPSE

Sinapses são contatos funcionais entre os neurônios. Podem ser distinguidas, com base no seu mecanismo de transmissão, em duas categorias: sinapses elétricas e sinapses químicas. Nas sinapses elétricas a corrente flui diretamente através de canais, chamados de junções comunicantes, que conectam as células. A maioria dos neurônios, no entanto, não apresentam essas junções em suas conexões. Em vez disso, esses neurônios formam sinapses químicas, onde a comunicação entre as células ocorre por meio de neurotransmissores. Esses agentes químicos, liberados pelos neurônios pré-sinápticos, ligam-se a receptores dos neurônios pós-sinápticos, podendo abrir ou fechar alguns canais iônicos [11]. Esses receptores são responsáveis em converter o sinal químico em um sinal elétrico [53]. Na Figura 15 temos um esquema de sinapse elétrica e química.

Existem várias diferenças entre as sinapses elétricas e químicas. Em uma sinapse química a transmissão de sinal elétrico de um neurônio para outro é direcionada, diferentemente das elétricas, onde as correntes

elétricas ou íons podem se mover em qualquer direção. Além disso, a transmissão de sinal em uma sinapse elétrica é quase instantânea, ao contrário das sinapses químicas que está associada a um retardo de vários milissegundos. Esse atraso ocorre devido a diversos processos biológicos [11].

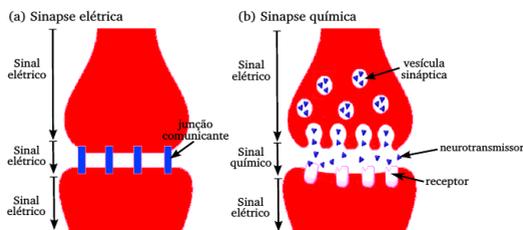


Figura 15 – Esquema das sinapses elétricas e químicas entre neurônios. (a) Sinapse elétrica: o sinal elétrico é transmitido, via junções comunicantes, do neurônio pré-sináptico para o pós-sináptico. (b) Sinapse química: o sinal elétrico no neurônio pré-sináptico é convertido em um sinal químico, na forma de neurotransmissores, os quais se ligam a receptores do neurônio pós-sináptico [11].

### 5.3 NEURÔNIOS PÓS-SINÁPTICOS EXCITATÓRIOS E INIBITÓRIOS

Um neurônio pós-sináptico, pode ser de dois tipos excitatório e inibitório. O potencial pós-sináptico excitatório é um tipo de potencial sináptico que faz um neurônio mais suscetível a gerar potencial de ação. O oposto disso é um potencial pós-sináptico inibitório, que faz um neurônio menos provável de gerar potencial de ação. Eles acontecem em sinapses químicas, que utiliza neurotransmissores para a criação de uma sinal celular. O que define se um potencial pós-sináptico é excitatório ou inibitório depende de algumas condições como o tipo de canal receptor, a permeabilidade iônica dos canais de íons e a as concentrações dos íons dentro e fora da célula [15, 52].

## 5.4 AUTÔMATO CELULAR

Neste trabalho usamos autômatos celulares (AC) para simular a dinâmica neuronal. AC viabilizam a simulações de um número muito grande de elementos, sem uso de supercomputadores, podendo ser um modelo vantajoso para estudar sistemas dinâmicos, como uma rede neuronal.

### Definição

Autômatos Celulares são modelos matemáticos que tem a capacidade de representar sistemas dinâmicos. São discretos no tempo, no espaço e nas variáveis de estados. O AC é composto por um conjunto de sítios com determinados estados, que interagem entre si em função de condições pré-definidas. Os estados dos sítios são alterados conforme um conjunto de regras de transição, que depende da vizinhança. Ou seja, esses sítios terão seus estados atualizados a cada passo de tempo discreto [54].

A definição matemática [55] é uma função quádrupla,  $U = (\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{N}, f)$ , onde,

- $\mathbf{L}$  é a estrutura da rede, onde seus elementos são chamados de sítios;
- $\mathbf{S}$  é o conjunto finito de estados;
- $\mathbf{N}$  é o conjunto finitos de vizinhos;
- $f$  é a função de transição local.

### Aplicações gerais

Nos anos 1940, Stanislaw Ulam estudou o crescimento dos cristais modelando-os em uma rede. Ao mesmo tempo, John von Neumann, colega de Ulam, trabalhava em sistemas de auto-reprodução e encontrava dificuldades para explicitar o seu modelo inicial de uma máquina capaz de se auto-reproduzir e suas cópias se auto-reproduzirem. Ulam

sugeriu-lhe que se inspirasse nos seus trabalhos, o que conduziu a von Neumann a conceber um modelo matemático abstrato para seu problema. O resultado foi o “copiador e construtor universal”, o primeiro autômato celular, baseado numa rede com duas dimensões onde cada célula podia estar em um de 29 estados [56]

Nos anos 1970, um autômato celular de duas dimensões e dois estados, chamado o Jogo da Vida, criado por John Conway, teve um grande sucesso na comunidade da informática. O jogo consiste de uma célula central vinculada a oito células adjacentes, tendo seu estado futuro definido por regras de vida e morte de seus vizinhos [57].

Em 1983, Stephen Wolfram publicou os estudos de um autômato celular em uma dimensão. Esse tipo de autômato possui três sítios com dois estados possíveis e cada sítio pode ter dois vizinhos, assim, podem ser feitas  $2^3 = 8$  combinações. Com essas possíveis combinações podem-se formar um total de  $2^8 = 256$  regras locais. Uma dessas regras, a regra 30, se aplica ao padrão de pigmentos gerados na superfície das espécie “conus textile”, um molusco marítimo [58].

A dinâmica dos autômatos celulares pode ser aplicada em diversas áreas, como por exemplo no tráfego de automóveis [59], na propagação de incêndios florestais [60] e modelagem de reações químicas [61]. Na área da neurociência, os autômatos celulares são utilizados para modelar a dinâmica da rede [20, 12, 62, 63], mostrando ser uma ferramenta simples para simulações computacionais.

## Aplicação numa rede neuronal

Nesse trabalho foi utilizado um modelo de autômato celular com três estados, com a finalidade de simbolizar a atividade neuronal em tecidos nervosos do cérebro. Esse modelo de AC é chamado de Greenber-Hastings [19].

Esse AC, possui  $n$  estados com neurônios excitáveis descritos pelas variáveis  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), onde  $N$  é o número de neurônios excitáveis da rede. Esses neurônios excitáveis podem estar em três estados diferentes:

- o estado  $s_i = 0$  representando um neurônio em seu potencial (polarizado) de repouso;
- o estado  $s_i = 1$  representando um neurônio em seu potencial (despolarizado) de disparo;
- o estado  $s_i = 2, \dots, n - 1$  representando um neurônio em seu período (hiperpolarização) refratário depois do disparo.

A evolução desse sistema dinâmico pode ser caracterizada pelas seguintes regras, sendo  $I_i(t)$  o estímulo externo recebido pelo sítio  $i$  no tempo  $t$ :

1. Um neurônio em repouso permanece em repouso até que algum estímulo externo ou um neurônio vizinho já excitado no tempo anterior o estimulem.
  - Se  $s_i(t) = 0$  então  $s_i(t + 1) = I_i(t)$ , onde  $I_i(t) \in [0, 1]$ .
  - Se  $s_i(t) = 0$  então  $s_i(t + 1) = 1$ , onde o sítio foi estimulado por conta de um vizinho ativo no passo de tempo anterior.
2. Quando o neurônio está no estado excitado no próximo passo de tempo ele entra no período refratário, durante o qual não pode disparar mesmo recebendo um estímulo externo.
  - Se  $s_i(t) \neq 0$  e  $s_i(t) \neq n$  então  $s_i(t + 1) = s_i(t) + 1$ , onde  $s_i(t) \in [0, 1, \dots, n - 1]$ .
3. Quando o período refratário do neurônio acabar ele volta para o estado de repouso no próximo passo de tempo
  - Se  $s_i(t) = n - 1$  então  $s_i(t + 1) = 0$ .

Considerando que o tempo de duração de um disparo neuronal é da ordem de um milissegundo, pode-se discretizar a variável  $t$  em 1 ms. A dinâmica do potencial da membrana neuronal pode ser associada as variáveis  $s_i$ . O estado de repouso ( $s_i = 0$ ) corresponde a um potencial de repouso de aproximadamente 70 mV. Quando o neurônio é excitado

( $s_i = 1$ ) o potencial de membrana pode atingir um pico de 40 mV. Após disparar, a membrana é repolarizada e depois hiperpolarizada fazendo com que o potencial de membrana atinja valores próximos de 80 mV. Durante esse período, o neurônio fica impossibilitado de disparar, até que o potencial de membrana retorne para o valor de repouso (70 mV) [52].

## 6 MODELOS EM UMA CAMADA

### 6.1 100% DE ELEMENTOS EXCITATÓRIOS

#### Dinâmica da rede

A rede possui  $N$  elementos com uma topologia aleatória não direcionada do tipo Erdős-Renyi, com um total de  $NK/2$  ligações. Isso conduz a uma conectividade média  $K$ , onde cada elemento  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) é conectado aleatoriamente com  $K_i$  vizinhos. A distribuição de conectividade segue uma distribuição de Poisson, para  $N$  grande. A dinâmica da rede é modelada através de um autômato celular com três estados:

- $s_i = 0$  é o estado de repouso;
- $s_i = 1$  corresponde ao estado excitado;
- $s_i = 2, \dots, n - 1$  são os estados refratários.

Há duas maneiras de um elemento  $i$  sair do estado de repouso ( $s_i = 0$ ) para o estado excitado ( $s_i = 1$ ).

1. Através de um estímulo externo modelado por um processo de Poisson.

O processo de Poisson em questão, leva em conta que em qualquer intervalo curto de tempo pode-se ou não observar um estímulo sensorial. Logo, a probabilidade de ocorrerem  $k$  estímulos em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é dada por:

$$p_k = \frac{(r\Delta t)^k}{k!} e^{-r\Delta t} \quad (6.1)$$

onde,  $r$  o número médio de estímulos sensoriais por unidade de intervalo de tempo medido em mili-segundo (ms).

Mas, os estímulos só atuam num tempo máximo de  $T$ . Exceder esse tempo é o equivalente a dizer que há zero estímulos num intervalo de tempo. Portanto, utilizando-se a equação 6.1 com  $k = 0$ , temos:

$$\lambda(t > T) = e^{-r\Delta t} \quad (6.2)$$

Analogamente, denota-se a probabilidade de que o tempo  $t$  não exceda  $T$ :

$$\begin{aligned}\lambda(t \leq T) &= 1 - \lambda(t > T) \\ &= 1 - e^{-r\Delta t}\end{aligned}\tag{6.3}$$

Cada elemento da rede recebe o sinal externo independentemente, isso modela a chegada do sinal elétrico no dendrito, proveniente de diferentes neurônios. O intervalo de tempo  $\Delta t$  adotado para o modelo é 1 ms, coincidindo aproximadamente com a duração de um disparo neuronal.

2. Com uma probabilidade  $p_{ij}$ , devido um vizinho  $j$  que se encontrava no estado excitado no passo de tempo anterior ( $s_j = 1$ ).

A probabilidade  $p_{ij}$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo de  $[0, p_{max}]$ . As ligações possuem pesos simétricos ( $p_{ij} = p_{ji}$ ), e eles são mantidos fixos ao longo de cada simulação.

Este tipo de acoplamento modela a junção comunicante, por onde passam as sinapses elétricas, caracterizando sinais rápidos e bidirecionais.

O parâmetro controlável usado nesse trabalho foi a relação de ramificação média dos elementos, que corresponde ao número médio de excitações criadas no próximo passo de tempo pelo elemento  $j$ ,

$$\sigma = \langle \sigma_j \rangle = \left\langle \sum_i^{K_j} p_{ij} \right\rangle.\tag{6.4}$$

Quando o valor máximo da distribuição da probabilidade  $p_{ij}$  é atingido, um vizinho ativo excita um elemento inativo. Esse valor máximo é igual a duas vezes a relação de ramificação média sobre o grau médio de conectividade:

$$p_{max} = \frac{2\sigma}{K}.\tag{6.5}$$

Durante as simulações manteve-se  $\sigma < K/2$ .

Após atingir o estado excitado, a dinâmica dos elementos é determinística. Se o elemento  $i$  estiver no estado excitado ( $s_i(t) = 1$ ), nos próximos passos de tempo ele estará nos estados refratários ( $s_i(t+1) = 2, \dots, n-1$ ) e assim por diante até ele voltar ao estado de repouso (ver Fig.16).

- se  $s_i(t) \neq 0$ , então  $s_i(t+1) = [s_i(t) + 1]$
- se  $s_i(t) = n-1$ , então  $s_i(t+1) = 0$ .

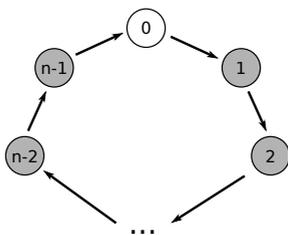


Figura 16 – Mudança de estado de um nó excitável. O estado em repouso é representado por 0, o estado excitado é retratado por 1 e os estado refratários vão de 2 até  $n-1$ .

A densidade de atividade instantânea da rede é a resposta imediata que se obtém de um estímulo. Em um tempo  $t$  qualquer, ela é dada por:

$$\rho(t) = \frac{\text{número de sítios ativos}}{N}. \quad (6.6)$$

A atividade média temporal ou taxa média de disparos da rede é:

$$F = \langle \rho(t) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho(t), \quad (6.7)$$

onde,  $T = 10^3$  ms é o tempo escolhida para as simulações.

A Figura 17 mostra a densidade instantânea da atividade da rede para valores de  $\sigma$  subcrítico ( $\sigma < 1$ ), crítico ( $\sigma = 1$ ) e supercrítico ( $\sigma > 1$ ) na ausência de estímulos externos ( $r = 0$ ). Para valores de  $\sigma$  subcrítico a densidade de sítios ativos cessa em um curto período de tempo. Quando os valores de  $\sigma$  são supercríticos a atividade da rede

possui auto-sustentação. A transição entre esses dois casos ocorre exatamente no ponto crítico  $\sigma_c = 1$ . Note que, antes da dinâmica ocorrer, foi deixado 10% da rede no estado ativo.

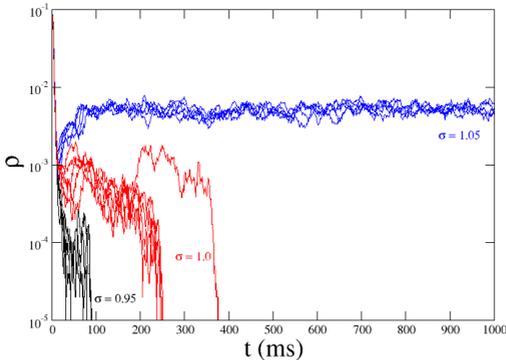


Figura 17 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 10$  estados. Densidade instantânea da atividade dos sítios para uma relação de ramificação média nos casos subcrítico (preto), crítico (vermelho) e supercrítico (azul) em função do tempo. Foram feitas 5 realizações diferentes para cada caso.

Nas Figuras 18 e 19 mostramos a densidade instantânea da atividade da rede para  $\sigma$  crítico e supercrítico aplicando-se um forte estímulo externo num determinado intervalo de tempo, e no restante do tempo o estímulo é zero. Durante a aplicação do estímulo observa-se em ambos uma oscilação transitente. Na ausência de estímulo, a oscilação não se mantém no regime crítico mas, no caso supercrítico ela permanece.

### Aproximação de campo médio

É necessário obter matematicamente o ponto de transição de fase do sistema, para isso é feita uma aproximação de campo médio.

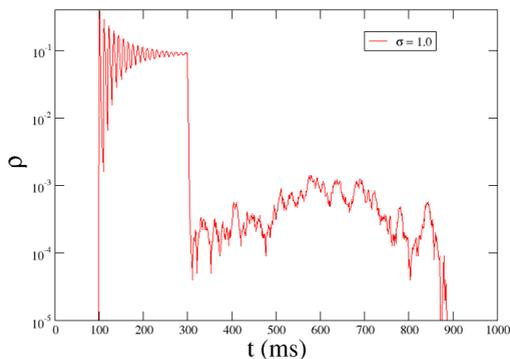


Figura 18 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 10$  estados. Densidade instantânea da atividade da rede para  $\sigma$  crítico em função do tempo. Durante o intervalo de tempo  $100 \text{ ms} \leq t \leq 300 \text{ ms}$  é aplicado um estímulo externo a igual  $r = 0.5 \text{ ms}^{-1}$ , e zero em qualquer outro intervalo.

A probabilidade de um sítio inativo, no tempo  $t$ , ser ativado no próximo passo de tempo por um dos vizinhos é dado por:

$$p(t) = 1 - \left(1 - \frac{\sigma \rho(t)}{K}\right)^K, \quad (6.8)$$

onde,

- $K = \langle K_i \rangle$  é o grau médio dos vizinhos;
- a probabilidade de ativação máxima é proporcional à razão média entre a ramificação local e do grau de vizinhos,  $p_{max} = \sigma/K$ ;
- $\rho(t)$  é a densidade de sítios ativos no tempo  $t$ .

A probabilidade de encontrar um sítio no estado de repouso é:

$$\rho_0(t) = 1 - (n-1)\rho(t) \quad (6.9)$$

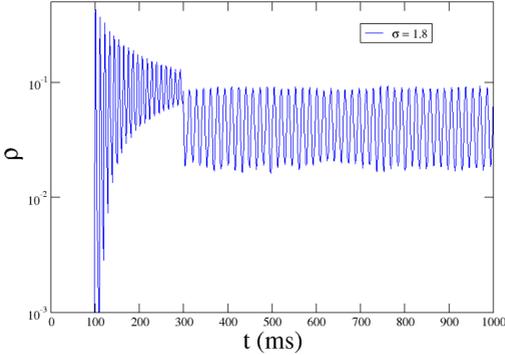


Figura 19 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 10$  estados. Densidade instantânea da atividade da rede para um parâmetro de ramificação supercrítico em função do tempo. Durante o intervalo de tempo  $100 \text{ ms} \leq t \leq 300 \text{ ms}$  é aplicado um estímulo externo a igual  $r = 0.5 \text{ ms}^{-1}$ , e zero em qualquer outro intervalo.

Assim, levando em conta o estímulo externo  $\lambda(r)$ , obtêm-se o seguinte mapa de campo médio:

$$\rho(t+1) = \rho_0(t)\lambda(r) + \rho_0(t)[1 - \lambda(r)]p(t), \quad (6.10)$$

onde, os termos correspondem a

- $\rho_0(t)\lambda(r)$ , ativação pelo estímulo externo;
- $\rho_0(t)[1 - \lambda(r)]p(t)$ , ativação pela vizinhança.

Considerando a densidade de sítios ativos invariante no tempo, podemos fazer uma aproximação com relação a atividade média da rede:

$$\langle \rho(t+1) \rangle \approx \langle \rho(t) \rangle \approx F \quad (6.11)$$

Logo, substituindo as equações 6.8 e 6.9 em 6.10 e usando a aproximação 6.11, obtêm-se a função resposta  $F$ :

$$F = [1 - (n-1)F] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma F}{K} \right)^K [1 - \lambda(r)] \right]. \quad (6.12)$$

### Analizando os limites dos sistema

Para obter informações sobre a transição de fase do sistema é necessário certificar-se de três limites.

1. O comportamento crítico do sistema sem uma perturbação externa - Atividade espontânea;

Quando o estímulo externo( $r$ ) é zero, a probabilidade da excitação externa( $\lambda$ ) é zero. Logo, a equação 6.12 fica:

$$F = [1 - F(n-1)] \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\sigma F}{K} \right)^K \right]. \quad (6.13)$$

Linearizando o termo em  $K$  da equação 6.13 em uma expansão binomial até a segunda ordem, temos:

$$\left( 1 - \frac{\sigma F}{K} \right)^K = 1 - \sigma F + \frac{(K-1)}{2K} \sigma^2 F^2 \quad (6.14)$$

Substituindo a equação 6.14 em 6.13, obtêm-se:

$$F = [1 - F(n-1)] \sigma F \left[ 1 - \frac{(K-1)}{2K} \sigma F \right] \quad (6.15)$$

Considerando o limite em que  $F \rightarrow 0$ , termos em  $F^2$  e superiores podem ser desprezados, assim, a atividade média espontânea é:

$$F(\sigma) = F_0 = \frac{\sigma - 1}{\sigma \left[ \sigma \frac{(K-1)}{2K} + n - 1 \right]} \quad (6.16)$$

Analizando a equação acima, o que caracteriza as regiões sub-crítico e crítica é quando  $\sigma \leq 1$  pois, os valores de  $F$  são não

negativos. A região supercrítica se dá quando  $\sigma > 1$  pois, os valores de  $F$  são positivos e não nulos. A transição de fase ocorre em  $\sigma_c = 1$ .

A Figura 20 mostra que a atividade média espontânea ( $F_0$ ) é zero nos regimes subcrítico e crítico ( $\sigma \leq 1$ ). Já no regime supercrítico ( $\sigma > 1$ ) a atividade espontânea é positiva e não nula. Esse resultado permite verificar em que ponto do sistema ocorre a transição de fase ( $\sigma_c = 1$ ). Note que, antes da dinâmica ocorrer, foi deixado 10% da rede no estado ativo.

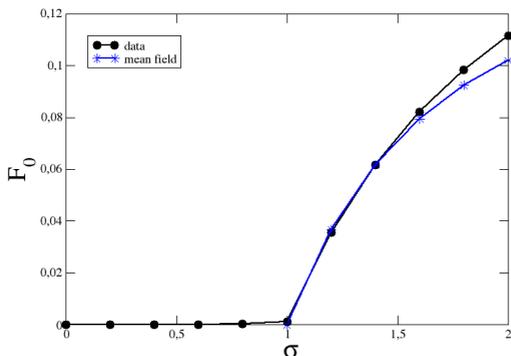


Figura 20 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . A linha azul estrelada representa a curva teórica modelada a partir da aproximação de campo médio.

2. O comportamento do sistema quando o estímulo externo vai a zero no ponto crítico.

Quando o estímulo externo tende a zero ( $r \rightarrow 0$ ), pode-se fazer uma expansão de primeira ordem no termo da exponencial em  $\lambda(r) = 1 - e^{-r} = 1 - (1 - r) = r$ . Levando em conta a análise no

ponto crítico,  $\sigma = \sigma_c = 1$ , a equação 6.12 fica:

$$F = [1 - F(n-1)] \left[ 1 - \left(1 - \frac{F}{K}\right)^K (1-r) \right] \quad (6.17)$$

Observação: se o parâmetro de ramificação média é  $\sigma = 0$ , quer dizer, elementos desacoplados da rede, pode-se rescrever 6.17 deixando explícita a dependência de  $r$  e  $F$ . Logo:

$$F = \frac{r}{1 + r(n-1)} \quad (6.18)$$

Linearizando o termo em  $K$  da equação 6.17 em uma expansão binomial de segunda ordem e considerando  $F \rightarrow 0$ :

$$\left(1 - \frac{F}{K}\right)^K = 1 - F + \frac{(K-1)}{2K} F^2. \quad (6.19)$$

Substituindo 6.19 em 6.17, obtêm-se:

$$r = Frn + F^2 \left[ \frac{(K-1)}{2K} + (n-1) \right], \quad (6.20)$$

os últimos termos da equação 6.20 podem ser desprezados pois,  $r \rightarrow 0$  e  $F \rightarrow 0$ .

Verificando somente a dependência de  $F^2$  em  $r$  da equação 6.20, e colocando os termos constantes como  $C = \frac{(K-1)}{2K} + (n-1)$ , encontra-se:

$$F = \sqrt{\frac{r}{C}} \quad (6.21)$$

Essa relação de estímulo-resposta confirma a equação de Stevens, apresentando em questão um expoente de Stevens igual a  $m = 0.5$  (válido para estímulos pequenos).

3. O comportamento do sistema quando o estímulo é muito grande.

Quando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\lambda(r) = 1 - e^{-r} = 1$ . Assim, a equação 6.17 fica:

$$F = F_{\text{máx}} = 1 - F(n-1) \quad (6.22)$$

$$F_{\text{máx}} = \frac{1}{n}$$

Com a Figura 21 verificamos as curvas de resposta, ou seja, a taxa média de disparo em função da taxa de estímulo. Com parâmetros de ramificação média de  $\sigma = 0$  a 2 em intervalos de 0.2. Para estímulos muito pequenos verifica-se a lei de potência  $F = Cr^m$  com expoentes de Stevens,  $m = 1/2$  no caso crítico. Quando os estímulos são muito grandes as curvas apresentam uma saturação.

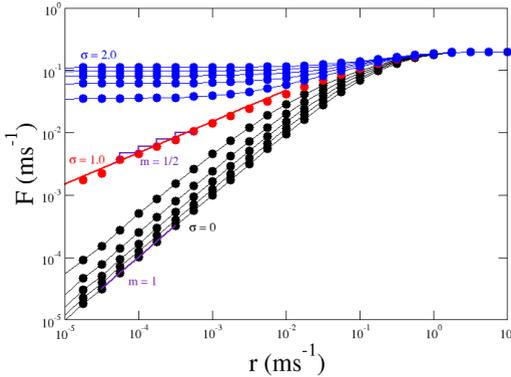


Figura 21 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em escala logarítmicas. Com de  $\sigma = 0$  a 2 em intervalos de 0.2. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O segmento de linha vermelho representa a linha teórica modelada a partir da aproximação de campo médio no ponto crítico. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m = 1/2$  (crítico).

## Faixa Dinâmica

Como visto na aproximação de campo médio, quando a rede é estimulada por um intervalo de valores de  $r$ , ela apresenta uma resposta mínima  $F_0$  (zero para os caso subcrítico e crítico) e uma resposta máxima  $F_{\text{max}}$ . Disso pode-se definir a faixa dinâmica do sistema, medido

em decibéis(dB), para cada  $\sigma$  como:

$$\Delta = 10 \log_{10} \frac{r_{superior}}{r_{inferior}} \quad (6.23)$$

A faixa  $[r_{inferior}, r_{superior}]$  é encontrada fazendo a correspondência como intervalo  $[F_{inferior}, F_{superior}]$ , calculado da seguinte maneira:

$$F_{inferior} = F_0 + x(F_{m\acute{a}x} - F_0); \quad (6.24)$$

$$F_{superior} = F_0 + (1 - x)(F_{m\acute{a}x} - F_0), \quad (6.25)$$

onde,  $x$  representa a fração de valores de  $F$  que serão descartados. Para esse trabalho foram descartados 10% dos valores mínimos e máximos de  $F$ .

A faixa dinâmica também pode ser calculada através do campo médio, se levarmos em conta que o grau médio de vizinhos  $K$  é grande, comparado aos parâmetros  $\sigma$  e  $F$ , a equação 6.17 fica:

$$F = [1 - F(n - 1)][1 - e^{-\sigma F}(1 - r)] \quad (6.26)$$

Da equação 6.26 calcula-se  $r_{inferior}$  em função de  $F_{inferior}$  pois, ela somente é válida para  $F \rightarrow 0$ ,

$$r_{inferior} = 1 - e^{\sigma F_{inferior}} + \frac{F_{inferior}}{[1 - F_{inferior}(n - 1)]} e^{\sigma F_{inferior}}. \quad (6.27)$$

Considera-se então, uma aproximação de  $r_{superior} \approx 1$ , onde a faixa dinâmica fica:

$$\Delta = -10 \log_{10} \left[ 1 - e^{\sigma F_{inferior}} + \frac{F_{inferior}}{[1 - F_{inferior}(n - 1)]} e^{\sigma F_{inferior}} \right] \quad (6.28)$$

sendo  $F_{inferior}$  obtido pela equação 6.24.

A Figura 22 é utilizada para verificar os intervalos  $[F_{inferior}, F_{superior}]$  e  $[r_{inferior}, r_{superior}]$  para o cálculo da faixa dinâmica de cada parâmetro de ramificação médio. As curvas apresentam um valor mínimo  $F_0$  diferente para cada  $\sigma$  e saturam em  $F_{max} = 0.2$ . A saturação do sistema pode ser calculado através da equação 6.22.

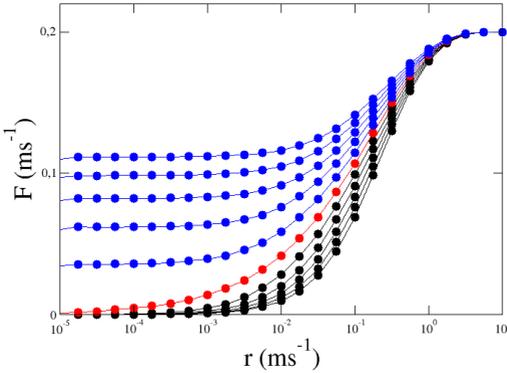


Figura 22 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo (em escala logarítmica) de  $\sigma = 0$  a 2.0 em intervalos de 0.2. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O sistema satura em  $F_{max} = 0.2$ .

Como pode ser visto na Figura 23, o regime ideal ocorre no ponto crítico ( $\sigma > 1$ ). No regime subcrítico ( $\sigma < 1$ ) a atividade espontânea  $F_0$  é nula mas, os estímulos fracos se ampliam devido a propagação de atividade entre os vizinhos. Como resultado, a faixa dinâmica  $\Delta(\sigma)$  aumenta monotonicamente com  $\sigma$ . No regime supercrítico ( $\sigma > 1$ ), o sistema possui atividade espontânea (auto-sustentada), presente mesmo com estímulos fracos. Portanto  $\Delta(\sigma)$  diminui pois, é preciso aumentar cada vez mais o estímulo externo para se obter uma resposta do sistema. Esse resultado é importante pois, o processamento de sinais é otimizado em uma transição de fase.

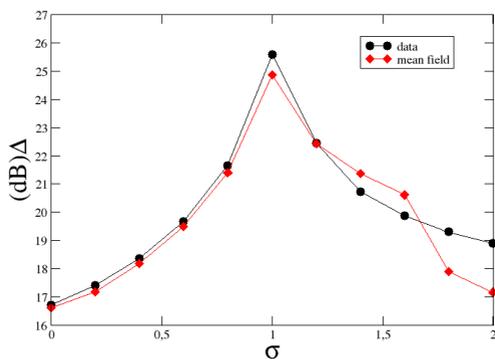


Figura 23 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1$ . O alcance dinâmico em vermelho representa os resultados modelados a partir da aproximação de campo médio.

## 6.2 80% DE ELEMENTOS EXCITATÓRIOS E 20% DE ELEMENTOS INIBITÓRIOS

O modelo discutido anteriormente considera somente elementos excitatórios, no entanto em sistemas neuronais reais existe a coexistência de neurônios excitatórios e inibitórios. A proporção de 80% e 20% de elementos excitatórios e inibitórios simula a quantidade de neurônios encontrados no córtex cerebral [23].

Afim de estudar o comportamento crítico e dinâmico Pei e colaboradores [12] basearam-se no modelo de Kinouchi e Copelli [20], para desenvolver um modelo de autômato celular para uma rede com elementos excitatórios e inibitórios. Mas, apesar dos neurônios pós-sinápticos inibitórios somente acontecerem em sinapses químicas, nesse trabalho, elas foram modeladas em sinapses elétricas.

### Dinâmica do modelo

Nesse modelo, com dinâmica de autômato celular, são considerados dois tipos nós: excitatórios e inibitórios. A função dos nós excitatórios é transmitir sinais que aumentem a probabilidade de excitação entre seus vizinhos, enquanto que a função dos nós inibitórios é diminuir essa probabilidade.

Em tempos discretos de  $t = 1, 2, \dots$  os estados  $s_i(t)$  dos nós são atualizados da seguinte forma:

- Se o nó  $i$  está no estado de repouso,  $s_i(t) = 0$ , ele pode ser inibido por um outro vizinho inibitório  $j$  já excitado previamente com uma probabilidade  $p_{ij}$ . Nesse caso, o estado do nó  $i$  permanece em repouso no próximo passo de tempo.
- Esse mesmo nó  $i$  pode também ser excitado por um vizinho excitatório  $j'$  já excitado anteriormente com uma probabilidade  $p_{ij'}$ .
- O nó  $i$  pode ser excitado por um estímulo externo modelado por um processo de Poisson.

- A dinâmica dos nós já excitados ou que estão no estado refratário é determinística, quer dizer, se o  $s_i(t) = 1$ , no próximo passo de tempo o estado muda para  $s_i(t+1) = 2, \dots, n-1$  e assim por diante até o nó voltar a ser  $s_i = 0$ .

Na Figura 24 temos um esquema da evolução de estado de nó excitável. O símbolo  $I$  representa o estado inibido, que pode ser determinado por,  $s_i = -1$ . O estado excitado é simbolizado por 1 e os estados refratários vão de 2 até  $n-1$ .

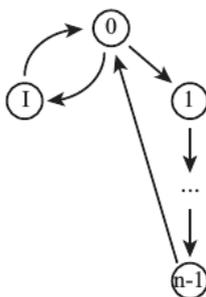


Figura 24 – Mudança de estado de um nó excitável. O ícone  $I$  representa o estado inibido, o estado excitado é retratado por 1 e os estado refratários vão de 2 até  $n-1$  [12].

A rede com  $N$  nós é uma Erdős-Reny, aleatória e não direcionada, com  $NK/2$  ligações sendo seus pares atribuídos aleatoriamente. Isso produz uma conectividade média  $K$ . Denota-se  $N_e = f_e N$  como os elementos excitatórios e  $N_i = f_i N$  como os inibitórios. A fração de excitatórios e inibitórios é respectivamente,  $f_e$  e  $f_i$ .

Para analisar a dinâmica desse rede, define-se a densidade de atividade instantânea em um tempo qualquer como a fração de nós excitatórios excitados, isto é:

$$\rho(t) = \frac{\text{número de nós excitatórios excitados}}{N_e} \quad (6.29)$$

Observe que apenas importam os nós excitatórios aqui.

Também se estabelece a atividade média da rede como:

$$F = \langle \rho(t) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho(t), \quad (6.30)$$

onde,  $T = 10^3$  é a janela temporal escolhida.

### Aproximação de campo médio

Os cálculos do campo médio baseiam-se nas mesmas considerações do modelo de Kinouchi e Copelli [20]. A relação de ramificação média  $\sigma$  corresponde ao número médio de excitações criadas no próximo passo de tempo por um elemento excitatório. Nessa rede as equações de atualização dos nós excitatórios e inibitórios são as mesmas. Assim, a taxa média de disparos pode ser aproximada por:

$$F = [1 - F(n-1)] \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_i K} \left[ \lambda + (1 - \lambda) \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_e K}\right] \right] \quad (6.31)$$

onde, os termos correspondem a

- $[1 - F(n-1)]$ , probabilidade de encontrar um nó no estado de repouso;
- $\left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_i K}$ , probabilidade de um sítio inibitório ser inibido;
- $\left[1 - \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_e K}\right]$ , probabilidade de um sítio excitatório ser excitado.
- $\lambda = 1 - e^{-r}$ , probabilidade do sítio ser ativado por uma perturbação externa.

Para obter uma solução analítica aproximada do valor da taxa média de disparos para valores pequenos ( $F \rightarrow 0$ ) e sem perturbação externa ( $r = 0 \implies \lambda = 0$ ) fazemos:

$$F = [1 - F(n-1)] \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_i K} \left[1 - \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_e K}\right] \quad (6.32)$$

A seguir, fazendo uma expansão binomial em torno de  $F = 0$  até a primeira ordem nos termos com  $K$  da equação 6.32:

$$\left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_i K} = 1 - f_i \sigma F \quad (6.33)$$

$$\left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_e K} = 1 - f_e \sigma F \quad (6.34)$$

Levando em conta as linearizações a equação 6.32 fica:

$$F = [1 - F(n-1)]f_e \sigma F(1 - f_i \sigma F). \quad (6.35)$$

Onde a solução , considerando  $F \rightarrow 0$ , é:

$$F = F_0 \approx \frac{\sigma - 1/f_e}{\sigma(\sigma f_i + n - 1)}. \quad (6.36)$$

Quando  $\sigma \rightarrow \sigma_c \implies F \rightarrow 0$ . Fazendo essa consideração em 6.36, têm-se que a relação de ramificação média é dada por:

$$\sigma_c = \frac{1}{f_e}. \quad (6.37)$$

Esse valor depende apenas da fração de nós excitatórios, ou seja, o ponto crítico não é afetado pelos nós inibitórios.

Nesse modelo foram usados 80% de nós excitatórios e 20% de nós inibitórios. Logo, a fração de nós excitatórios é  $f_e = 0.8$  e o ponto crítico é  $\sigma_c = 1.25$ . A figura 25 mostra que a atividade média espontânea ( $F_0$ ) da rede. Esse resultado permite verificar em que ponto do sistema ocorre a transição de fase.

Vamos verificar o comportamento da taxa média de disparos em função de estímulos externos pequenos no ponto crítico. Para isso é necessário fazer as seguintes considerações:

- quando o estímulo externo tende a zero ( $r \rightarrow 0$ ), pode-se fazer uma expansão de primeira ordem no termo da exponencial em  $\lambda(r) = 1 - e^{-r} = 1 - (1 - r) = r$ .
- se levarmos em conta que o grau médio de vizinhos  $K$  é grande, comparado aos parâmetros  $\sigma$  e  $F$ , podemos fazer a seguinte ex-

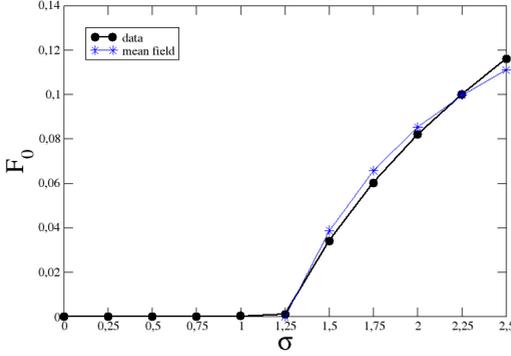


Figura 25 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ . A linha azul estrelada representa a curva teórica modelada a partir da aproximação de campo médio.

pansão até a segunda ordem:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_i K} &= (e^{-\frac{\sigma F}{K}})^{f_i K} = e^{-f_i \sigma F} = 1 - f_i \sigma F + \frac{(f_i \sigma F)^2}{2} + 0 \\ \left(1 - \frac{\sigma F}{K}\right)^{f_e K} &= (e^{-\frac{\sigma F}{K}})^{f_e K} = e^{-f_e \sigma F} = 1 - f_e \sigma F + \frac{(f_e \sigma F)^2}{2} + 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Assim, usando as considerações acima a equação 6.31 fica:

$$F = [1 - F(n-1)]e^{-f_i \sigma F} [r + (1-r)(1 - e^{-f_e \sigma F})]. \quad (6.39)$$

No ponto crítico  $\sigma = \sigma_c = \frac{1}{f_e}$  a equação obtida é:

$$F = [1 - F(n-1)] \left(1 - f_i \sigma_c F + \frac{(f_i \sigma_c F)^2}{2}\right) \left[r + (1-r) \left[F - \frac{F^2}{2}\right]\right]. \quad (6.40)$$

Fazendo a distributiva na equação 6.40 serão desconsiderados termos maior ou iguais a  $rF^2$  pois,  $r \rightarrow 0$  e  $F \rightarrow 0$ . Logo,

$$r = rF(f_i \sigma_c + n) + F^2 \left(f_i \sigma_c + n - \frac{1}{2}\right). \quad (6.41)$$

Estamos interessados na dependência de  $F^2$  com  $r$ , assim ficamos com:

$$F \approx \sqrt{\frac{r}{f_i \sigma_c + n - \frac{1}{2}}} \quad (6.42)$$

Essa é a equação que representa a dependência da taxa média de disparos em função dos estímulos externos pequenos no ponto crítico. É possível verificar que ela corresponde a lei de potência de Stevens,  $F = Cr^m$ , com expoente de Stevens igual a  $m = 0.5$ .

Com a Figura 26 verificamos as curvas de resposta, ou seja, a taxa média de disparo em função da taxa de estímulo. Com parâmetros de ramificação média de  $\sigma = 0$  a 2.5 em intervalos de 0.25. Para estímulo muito pequenos verifica-se a lei de potência  $F = Cr^m$  com expoentes de Stevens,  $m = 1/2$  no caso crítico. Quando os estímulos são muito grandes as curvas apresentam uma saturação.

### Faixa Dinâmica

A faixa dinâmica é obtida através da equação 6.23 mas, nesse modelo a dinâmica é maximizada conforme a equação 6.37. E através do campo médio, pode se obter um cálculo analítico aproximado.

Da equação 6.39 calcula-se  $r_{inferior}$  em função de  $F_{inferior}$  pois, ela somente é válida para  $F \rightarrow 0$ ,

$$r_{inferior} = 1 - e^{f_e \sigma F_{inferior}} + \frac{F_{inferior}}{[1 - F_{inferior}(n-1)]} e^{\sigma F_{inferior}}. \quad (6.43)$$

Considera-se então, uma aproximação de  $r_{superior} \approx 1$ , onde a faixa dinâmica fica:

$$\Delta = -10 \log_{10} \left[ 1 - e^{f_e \sigma F_{inferior}} + \frac{F_{inferior}}{[1 - F_{inferior}(n-1)]} e^{\sigma F_{inferior}} \right] \quad (6.44)$$

sendo  $F_{inferior}$  obtido pela equação 6.24.

A Figura 27 é utilizada para verificar os intervalos  $[F_{inferior}, F_{superior}]$  e  $[r_{inferior}, r_{superior}]$  para o cálculo da faixa dinâmica de cada parâmetro de ramificação médio. As curvas apresentam um valor mínimo  $F_0$  diferente para cada  $\sigma$  e saturam aproximadamente em  $F_{max} = 0.2$ .

Como pode ser visto na Figura 28, a faixa dinâmica é otimizada no ponto crítico ( $\sigma > 1.25$ ).

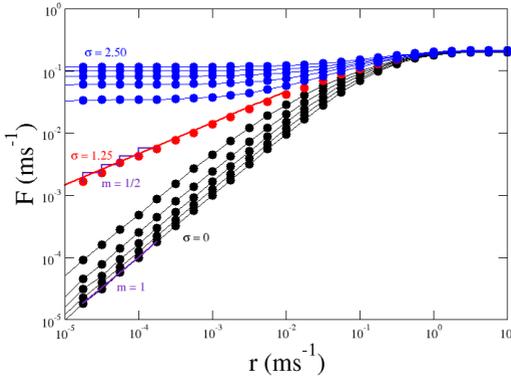


Figura 26 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em escala logarítmicas. Com de  $\sigma = 0$  a 2.5 em intervalos de 0.25. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O segmento de linha vermelho representa a linha teórica modelada a partir da aproximação de campo médio no ponto crítico. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m = 1/2$  (crítico).

## Resultados extras

Os resultados a seguir forma gerados com quantidades diferente de nós ( $N$ ) na rede e frações de nós excitatórios ( $fe$ ).

A Figura 29 mostra a faixa dinâmica da rede excitatórios-inibitórios com diferentes quantidades de  $N$ . A maior sensibilidade é  $\Delta(\sigma_c = 1.25) \approx 25.6\text{dB}$  na rede com  $N = 10^5$  elementos.

As Figuras 30 e 31 mostram que o ponto crítico da rede depende da fração de nós excitatórios. Isso é confirmado pela equação 6.37.

Na Figura 30 verificamos que quanto maior a fração de nós excitatórios maior é a atividade espontânea da rede acima dos pontos críticos, logo, como visto na Figura 31 a faixa dinâmica com  $fe = 1.0$  cai

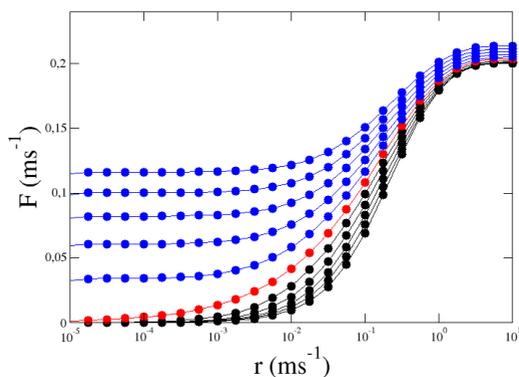


Figura 27 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo (em escala logarítmica) de  $\sigma = 0$  a 2.5 em intervalos de 0.25. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. O sistema satura aproximadamente em  $F_{max} = 0.2$ .

primeiro para o regime supercrítico. E as faixas dinâmicas no ponto crítico são  $\Delta(\sigma_c = 1.0) \approx 24.32\text{dB}$ ,  $\Delta(\sigma_c = 1.5) \approx 24.62\text{dB}$  e  $\Delta(\sigma_c = 1.25) \approx 24.67\text{dB}$ .

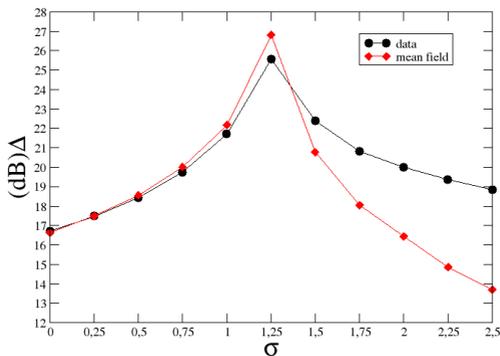


Figura 28 – Simulação com  $N = 10^5$  sítios,  $K = 10$  vizinhos e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$ . O alcance dinâmico em vermelho representa os resultados modelados a partir da aproximação de campo médio.

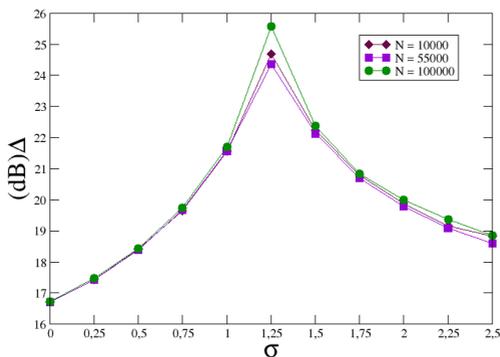


Figura 29 – Simulação  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados e fração de excitatórios  $fe = 0.8$ . Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média com número de sítios  $N = 10^4$  (losangos marrons),  $N = 5.5 \cdot 10^4$  (quadrados roxos) e  $N = 10^5$  (círculos verdes). Otimização no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$ .

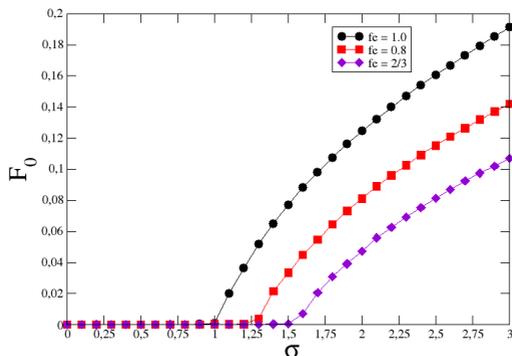


Figura 30 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios,  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$  com fração de nós excitatórios  $fe = 1.0$ (círculos pretos),  $fe = 0.8$ (quadrados vermelhos) e  $fe = 2/3$ (losangos roxos).

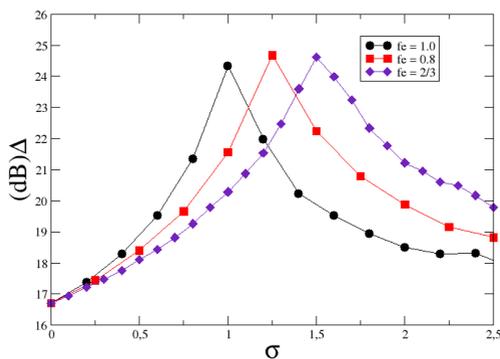


Figura 31 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios,  $K = 10$  vizinhos,  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média com fração de nós excitatórios  $fe = 1.0$ (círculos pretos),  $fe = 0.8$ (quadrados vermelhos) e  $fe = 2/3$ (losangos roxos). Otimização nos pontos críticos  $\sigma = 1.0$ ,  $\sigma = 1.25$ ,  $\sigma = 1.5$ .



## 7 RESULTADOS

Em 2006 Kinouchi e Copelli [20] e mais tarde em 2012, Pei e colaboradores [12], mostraram que a faixa dinâmica de uma rede neuronal é maximizada no ponto crítico. No ponto crítico há uma relação não linear de entrada e saída do tipo,  $F(r) \propto r^{1/2}$ . E o expoente  $m = 1/2$  pode ser interpretado como o expoente psicofísico da lei de Stevens.

Mas, o que aconteceria se a rede agora se apresenta na forma de camadas? O expoente de Stevens será maior ou menor que  $1/2$ ? A sensibilidade da faixa dinâmica aumentaria ou diminuiria?

Nesse trabalho se estudou o comportamento de um rede em duas camadas, onde as inter-camadas e a intra-camada são conectadas aleatoriamente com uma topologia Erdős-Reny não-direcionada. Cada camada possui a mesma quantidade de nós ( $N$ ), mesma quantidade de ligações ( $NK/2$ ) e a mesma conectividade média,  $K$ . Um novo parâmetro que foi introduzido na simulação é  $L$ , que são as ligações entre as camadas. A quantidade de  $L$  é muito menor que o número de ligações em cada camada. Cada nó  $i$  possui  $n$  estados, onde,  $s_i = 0$  é o estado de repouso,  $s_i = 1$  corresponde ao estado excitado e  $s_i = 2, \dots, n-1$  são os estados refratários.

A dinâmica do sistema é simulada com um autômato celular com tempos discretos, onde as características gerais, independente da natureza nós, são:

- O estímulo externo, modelado por um processo de Poisson, é aplicado somente na primeira camada.
- A seguir ocorre a dinâmica interna da primeira camada e inter-camada, seguindo da dinâmica da segunda camada.
- A probabilidade  $p_{ij}$  é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[0, p_{max} = 2\sigma/K]$ . Os pesos são simétricos ( $p_{ij} = p_{ji}$ ), e são mantidos fixos ao longo de cada simulação. Quando o valor máximo da distribuição da probabilidade  $p_{ij}$  é atingido, um vizinho ativo excita um elemento inativo. O parâmetro controlável usado nesse trabalho é a relação de ramificação

média dos elementos  $\sigma$ , que corresponde ao número médio de excitações criadas no próximo passo de tempo pelo elemento  $j$ .

- Nós já excitados ou que estão no estado refratário possuem dinâmica determinística, quer dizer, se  $s_i(t) = 1$ , no próximo passo de tempo o estado muda para  $s_i(t+1) = 2, \dots, n1$  e assim por diante até o nó voltar a ser  $s_i = 0$ .
- Tanto a atividade instantânea como a média do sistema são medidas somente na segunda camada, a fim de estudar o processo de entrada-saída.

Se as duas camadas possuem somente nós excitatórios, há duas maneiras de um elemento  $i$  sair do estado de repouso ( $s_i = 0$ ) para o estado excitado ( $s_i = 1$ ):

1. através de um estímulo externo.
2. com uma probabilidade  $p_{ij}$  de um vizinho ativo ( $s_j = 1$ ), excitado no passo de tempo anterior.

Se as duas camadas possuem um balanceamento de 80% e 20% de nós excitatórios e inibitórios, respectivamente, a função dos nós excitatórios é transmitir sinais que aumentem a probabilidade de excitação entre seus vizinhos, enquanto que a função dos nós inibitórios é diminuir essa probabilidade. Nesse caso os nós são atualizados da seguinte forma:

1. O nó  $i$  pode ser excitado por um estímulo externo.
2. Se o nó  $i$  esta no estado de repouso,  $s_i(t) = 0$ , ele pode ser inibido por um outro vizinho inibitório  $j$  já excitado previamente com uma probabilidade  $p_{ij}$ . Nesse caso, o estado do nó  $i$  permanece em repouso no próximo passo de tempo.
3. Esse mesmo nó  $i$  pode também ser excitado por um vizinho excitatório  $j'$  já excitado anteriormente com uma probabilidade  $p_{ij'}$ .

## 7.1 DUAS CAMADAS COM 100% DE ELEMENTOS EXCITATÓRIOS

Os resultados dessa secção são uma média de 3000 simulações distintas no regime crítico e 1500 simulações distintas nos regimes sub-crítico e supercrítico. Isso foi feito porque, o sistema apresenta alta variância para baixos valores de estímulo.

A Figura 32 mostra atividade média espontânea( $F_0$ ) da rede. Com esse resultado podemos verificar o ponto aonde ocorre a transição de fase, e podemos notar que o ponto crítico é o mesmo para o caso de uma camada, logo, o sistema em camadas não altera sua criticalidade.

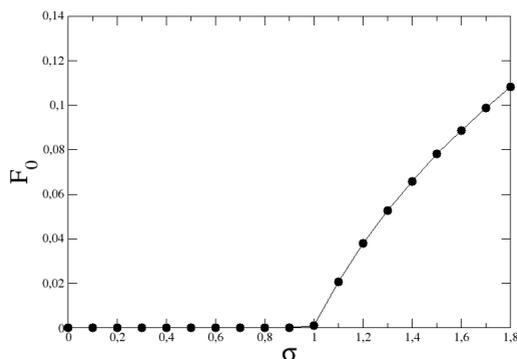


Figura 32 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camadas e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ .

Com a Figura 33 verificamos as curvas de resposta, ou seja, a taxa média de disparo em função da taxa de estímulo. Com parâmetros de ramificação média de  $\sigma = 0.2$  a 1.8 em intervalos de 0.2. Para estímulo muito pequenos verifica-se a lei de potência  $F = C r^m$  com expoentes de Stevens,  $m \approx 0.25$  no caso crítico.

Quando os estímulos são muito grandes as curvas apresentam

saturação mas, em pontos distintos. É importante notar que não a curva estímulo-resposta para o caso dos elementos desacoplados,  $\sigma = 0$ . Somente haverá uma resposta do sistema na segunda camada se houver interação entre os vizinhos.

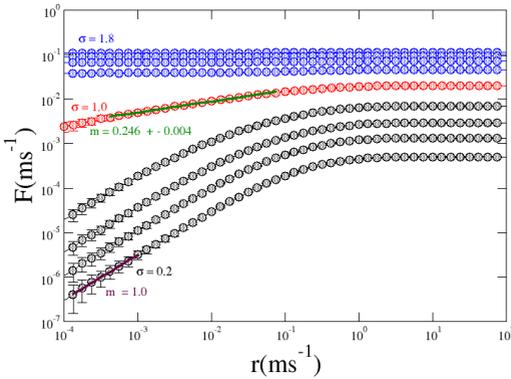


Figura 33 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em coordenadas logarítmicas. Com  $\sigma$  de 0.2 a 1.8 em intervalos de 0.2. Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. Os segmentos de linha em roxo e verde são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m \approx 0.25$  (crítico).

Como pode ser visto na Figura 33, o regime supercrítico apresenta pouca variação na resposta aos estímulos externos. Mas, mesmo assim é possível calcular a faixa dinâmica nesse regime através de um agrupamento de valores de  $F$ . Em cada curva  $F(r)$  foram descartados os dois pontos extremos de  $F$  e nos pontos restantes foi feita uma média de cinco em cinco pontos. Na Figura 34, o processamento de sinais é otimizado no ponto crítico.

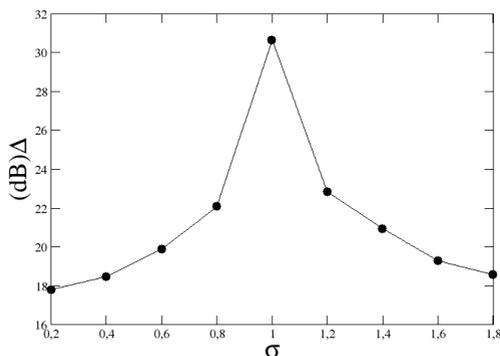


Figura 34 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1$ .

## 7.2 DUAS CAMADAS COM 80% DE ELEMENTOS EXCITATÓRIOS E 20% DE ELEMENTOS INIBITÓRIOS

Os resultados dessa secção são uma média de 1000 simulações distintas nos regimes crítico, subcrítico e supercrítico. Isso foi feito porque, o sistema apresenta alta variância para baixos valores de estímulo.

A Figura 35 mostra que a atividade média espontânea ( $F_0$ ) da rede. Verificamos o ponto aonde ocorre a transição de fase e sua criticidade não se alterou em comparação ao caso de uma camada.

A Figura 36 mostra a taxa média de disparo em função da taxa de estímulo. Com parâmetros de ramificação média de  $\sigma = 0.25$  a  $2.25$  em intervalos de  $0.25$ . Para estímulo muito pequenos verifica-se a lei de potência  $F = Cr^m$  com expoentes de Stevens,  $m \approx 0.26$  no caso crítico.

Como pode ser visto na Figura 36, o mesmo processo de agrupamento nos valores de  $F$  foi feito no regime supercrítico. Na Figura 37, o processamento de sinais é otimizado no ponto crítico.

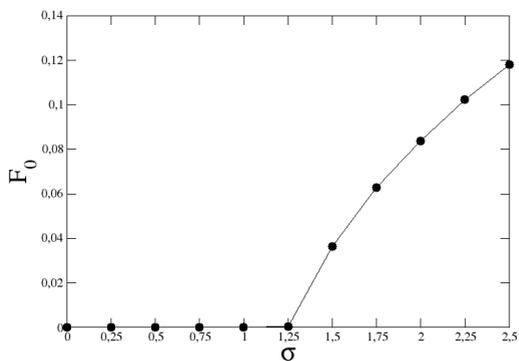


Figura 35 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camadas e  $n = 5$  estados. Atividade espontânea média  $F_0$  versus ramificação média  $\sigma$ .

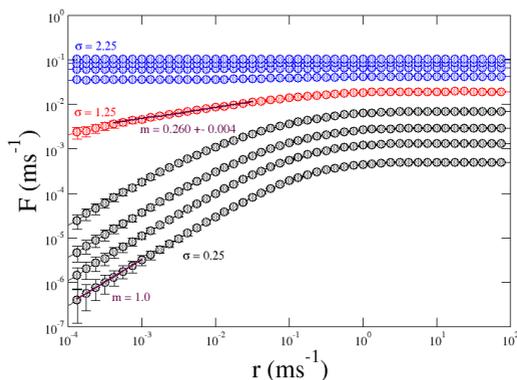


Figura 36 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Taxa média de disparo em função da taxa de estímulo em coordenadas logarítmicas. Com de  $\sigma = 0.25$  a  $2.25$  em intervalos de  $0.25$ . Os regimes subcrítico, crítico e supercrítico estão representados, respectivamente, pelas cores preto, vermelho e azul. Os segmentos de linha em roxo são as inclinações das retas com expoentes,  $m = 1$  (subcrítico) e  $m \approx 0.26$  (crítico).

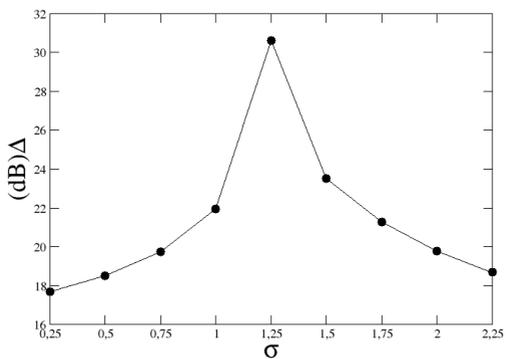


Figura 37 – Simulação com  $N = 10^4$  sítios em cada camada,  $K = 10$  vizinhos,  $L = 10^3$  ligações inter-camada e  $n = 5$  estados. Faixa dinâmica versus a taxa de ramificação média, otimizada no ponto crítico ponto  $\sigma = 1.25$

## 8 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Quando estudamos o comportamento de redes em camadas, tentamos nos aproximar o melhor possível a sistemas dinâmicos reais, como os sistemas biológicos do cérebro. Um exemplo é o córtex visual primário que é dividido em camadas e é uma das áreas responsáveis pelo processamento da informação visual.

O modelo de rede em camadas com 100% de elementos excitatórios apresenta sua faixa dinâmica maximizada no ponto crítico de uma transição de fase entre dois estados, subcrítico e supercrítico. A faixa dinâmica do sistema é maximizada no ponto crítico quando o expoente de resposta aos estímulos satisfaz uma lei de potência Psicofísica com expoente  $m \sim 0,25$

Mas, no cérebro há coexistência de sinapses excitatórias e inibitórias. Por esse motivo, propomos um modelo de rede em camadas com uma proporção de 80% de elementos excitatórios e 20% de elementos inibitórios. Os resultados obtidos foram muito similares ao modelo anterior, o sistema também apresenta transição de fase entre dois estados, subcrítico e supercrítico. A faixa dinâmica do sistema também é maximizada no ponto crítico quando o expoente de resposta aos estímulos satisfaz uma lei de potência Psicofísica com expoente  $m \sim 0,26$ .

Em ambos os casos pode-se constatar que: o expoente crítico da lei de potência diminuiu, o que talvez pode sugerir um fator multiplicativo do tipo:  $F \propto (r^{1/2})^{1/2}$  para cada camada. A faixa dinâmica teve sua sensibilidade aumentada em aproximadamente 20%, comparando com os modelos de uma camada. E independentemente do número de camadas, o ponto crítico não se altera.

Em trabalhos futuros pretendemos analisar o sistema com mais camadas e verificar se o fator multiplicativo é compatível com o número de camadas. Inserir sinapse química excitatória e inibitória. Modelar o mesmo sistema em redes diferentes, como por exemplo, redes de livre escala.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Yunus A Cengel and Michael A Boles. *Thermodynamics: An Engineering Approach*. McGraw-Hill, 2008.
- [2] Maurício Girardi Schappo et al. Transições de fase em modelos do cérebro: uma abordagem computacional. 2016.
- [3] Janina Hesse and Thilo Gross. Self-organized criticality as a fundamental property of neural systems. *Frontiers in systems neuroscience*, 8:166, 2014.
- [4] Clayton Haldeman and John M Beggs. Critical branching captures activity in living neural networks and maximizes the number of metastable states. *Physical review letters*, 94(5):058101, 2005.
- [5] Ariadne de Andrade Costa. *Quasi-criticalidade auto-organizada em avalanches neuronais*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [6] Dante R Chialvo. Psychophysics: Are our senses critical? *Nature physics*, 2(5):301, 2006.
- [7] Woodrow L Shew, Hongdian Yang, Thomas Petermann, Rajarshi Roy, and Dietmar Plenz. Neuronal avalanches imply maximum dynamic range in cortical networks at criticality. *Journal of neuroscience*, 29(49):15595–15600, 2009.
- [8] Wikimedia Commons. Weber-fechner law demonstration., 2017.
- [9] Stanley Smith Stevens. *Psychophysics: Introduction to its perceptual, neural and social prospects*. Routledge, 2017.
- [10] Albert-László Barabási and Márton Pósfai. *Network science*. Cambridge university press, 2016.
- [11] Fernando da Silva Borges et al. Faixa dinâmica em redes neuronais modeladas por autômatos celulares. 2016.

- [12] Sen Pei, Shaoting Tang, Shu Yan, Shijin Jiang, Xiao Zhang, and Zhiming Zheng. How to enhance the dynamic range of excitatory-inhibitory excitable networks. *Physical Review E*, 86(2):021909, 2012.
- [13] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Physical review A*, 38(1):364, 1988.
- [14] John M Beggs and Dietmar Plenz. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *Journal of neuroscience*, 23(35):11167–11177, 2003.
- [15] Gyorgy Buzsaki. *Rhythms of the Brain*. Oxford University Press, 2006.
- [16] GA Gescheider. Psychophysics: The fundamentals. lawrence erlbaum associates. *Inc., Publishers*, pages 1–71, 1997.
- [17] G Th Fechner. *Elemente der psychophysik*, volume 2. 2012.
- [18] Paul Erdos and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1):17–60, 1960.
- [19] James M Greenberg and SP Hastings. Spatial patterns for discrete models of diffusion in excitable media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 34(3):515–523, 1978.
- [20] Osame Kinouchi and Mauro Copelli. Optimal dynamical range of excitable networks at criticality. *Nature physics*, 2(5):348, 2006.
- [21] T Kosaka, MR Deans, DL Paul, and K Kosaka. Neuronal gap junctions in the mouse main olfactory bulb: morphological analyses on transgenic mice. *Neuroscience*, 134(3):757–769, 2005.
- [22] Timm Schubert, Joachim Degen, Klaus Willecke, Sheriar G Hormuzdi, Hannah Monyer, and Reto Weiler. Connexin36 mediates gap junctional coupling of alpha-ganglion cells in mouse retina. *Journal of Comparative Neurology*, 485(3):191–201, 2005.

- [23] Yael Adini, Dov Sagi, and Misha Tsodyks. Excitatory–inhibitory network in the visual cortex: Psychophysical evidence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 94(19):10426–10431, 1997.
- [24] H. B. Callen. *Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, 1985.
- [25] Mário José de Oliveira. *Termodinâmica*. Editora Livraria da Física, 2005.
- [26] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1971.
- [27] G. T. Newman, M. E. J.; Barkema. *Monte Carlo Methods in Statistical Physics*. New York, UK: Oxford University Press, 1999.
- [28] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. New York, UK: Oxford University Press, 1992.
- [29] Per Bak and Chao Tang. Earthquakes as a self-organized critical phenomenon. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 94(B11):15635–15637, 1989.
- [30] Zeev Olami, Hans Jacob S Feder, and Kim Christensen. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Physical Review Letters*, 68(8):1244, 1992.
- [31] Barbara Drossel, Siegfried Clar, and Franz Schwabl. Exact results for the one-dimensional self-organized critical forest-fire model. *Physical review letters*, 71(23):3739, 1993.
- [32] Oleg V Kovalev, Yuri M Pis’ mak, and Vladimir V Vechernin. Self-organized criticality in the model of biological evolution describing interaction of” coenophilous” and “coenophobous” species. *EPL (Europhysics Letters)*, 40(4):471, 1997.
- [33] M Bartolozzi, DB Leinweber, and AW Thomas. Self-organized criticality and stock market dynamics: an empirical study. *Physica*

- A: Statistical Mechanics and its Applications*, 350(2-4):451–465, 2005.
- [34] Makoto Nirei. Self-organized criticality in a herd behavior model of financial markets. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, 3(1):89, 2008.
- [35] David C Roberts and Donald L Turcotte. Fractality and self-organized criticality of wars. *Fractals*, 6(04):351–357, 1998.
- [36] Thomas Kron and Thomas Grund. Society as a self-organized critical system. *Cybernetics & Human Knowing*, 16(1-2):65–82, 2009.
- [37] John G Milton. Neuronal avalanches, epileptic quakes and other transient forms of neurodynamics. *European Journal of Neuroscience*, 36(2):2156–2163, 2012.
- [38] Petra E Vertes, Danielle S Bassett, and Thomas Duke. Scale-free statistics of neuronal assemblies predict learning performance. *BMC neuroscience*, 12(1):O4, 2011.
- [39] Timothy Bellay, Andreas Klaus, Saurav Seshadri, and Dietmar Plenz. Irregular spiking of pyramidal neurons organizes as scale-invariant neuronal avalanches in the awake state. *Elife*, 4:e07224, 2015.
- [40] Klaus Linkenkaer-Hansen, Simo Monto, Heikki Rytysälä, Kirsi Suominen, Erkki Isometsä, and Seppo Kähkönen. Breakdown of long-range temporal correlations in theta oscillations in patients with major depressive disorder. *Journal of Neuroscience*, 25(44):10131–10137, 2005.
- [41] Stanley Smith Stevens. To honor fechner and repeal his law. *Science*, 133(3446):80–86, 1961.
- [42] Stanley S Stevens. On the psychophysical law. *Psychological review*, 64(3):153, 1957.

- [43] Stanley Smith Stevens et al. On the theory of scales of measurement. 1946.
- [44] So S Stevens. Neural events and the psychophysical law. *Science*, 170(3962):1043–1050, 1970.
- [45] Lav R Varshney and John Z Sun. Why do we perceive logarithmically? *Significance*, 10(1):28–31, 2013.
- [46] Stanislas Dehaene. *The number sense: How the mind creates mathematics*. OUP USA, 2011.
- [47] John Z Sun, Grace I Wang, Vivek K Goyal, and Lav R Varshney. A framework for bayesian optimality of psychophysical laws. *Journal of Mathematical Psychology*, 56(6):495–501, 2012.
- [48] Stanislas Dehaene. The neural basis of the weber–fechner law: a logarithmic mental number line. *Trends in cognitive sciences*, 7(4):145–147, 2003.
- [49] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6:290–297, 1959 1959.
- [50] Robert Lent. Cem bilhões de neurônios-conceitos fundamentais em neurociência. 2ª. *Edição, Editora Atheneu*, 2010.
- [51] Wulfram Gerstner and Werner M Kistler. *Spiking neuron models: Single neurons, populations, plasticity*. Cambridge university press, 2002.
- [52] Eugene M Izhikevich. *Dynamical systems in neuroscience*. MIT press, 2007.
- [53] Christopher D Moyes and Patricia M Schulte. *Princípios de fisiologia animal*. Artmed Editora, 2009.
- [54] Stephen Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of modern physics*, 55(3):601, 1983.

- [55] Tommaso Toffoli and Norman Margolus. *Cellular automata machines: a new environment for modeling*. MIT press, 1987.
- [56] John Von Neumann and Arthur Walter Burks. *Theory of self-reproducing automata*. University of Illinois Press Urbana, 1996.
- [57] Martin Gardner. Mathematical games: The fantastic combinations of john conway’s new solitaire game “life”. *Scientific American*, 223(4):120–123, 1970.
- [58] Stephen Wolfram. *A new kind of science*, volume 5. Wolfram media Champaign, IL, 2002.
- [59] Kun Gao, Rui Jiang, Shou-Xin Hu, Bing-Hong Wang, and Qing-Song Wu. Cellular-automaton model with velocity adaptation in the framework of kerner’s three-phase traffic theory. *Physical Review E*, 76(2):026105, 2007.
- [60] A Hernández Encinas, L Hernández Encinas, S Hoya White, A Martín del Rey, and G Rodríguez Sánchez. Simulation of forest fire fronts using cellular automata. *Advances in Engineering Software*, 38(6):372–378, 2007.
- [61] Yifan Zhao, Stephen A Billings, and Alexander F Routh. Identification of excitable media using cellular automata models. *International journal of bifurcation and chaos*, 17(01):153–168, 2007.
- [62] Mauro Copelli, Antônio C Roque, Rodrigo F Oliveira, and Osame Kinouchi. Physics of psychophysics: Stevens and weber-fechner laws are transfer functions of excitable media. *Physical Review E*, 65(6):060901, 2002.
- [63] Kelly Cristiane Iarosz, Antonio Marcos Batista, Ricardo Luiz Viana, Sergio Roberto Lopes, Ibere Luiz Caldas, and Thadeu Josino Pereira Penna. The influence of connectivity on the firing rate in a neuronal network with electrical and chemical synapses. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(3):819–827, 2012.