UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Juliane Cristina Scheidt

O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA EM JOGOS SEQUENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Florianópolis

2019

Juliane Cristina Scheidt

O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA EM JOGOS SEQUENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Matemática para a obtenção do Grau de Licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Leandro Batista Morgado

Florianópolis

2019

Juliane Cristina Scheidt

O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA EM JOGOS SEQUENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado aprovado para a obtenção do Título de "Licenciada em Matemática", e aprovado em sua forma final pelo Departamento de Matemática

Florianópolis, 28 de Junho 2019

Prof. Dra. Sonia Elena Palomino Castro
Coordenador do Curso

Prof. Dr. Leandro Batista Morgado
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Leonardo Silveira Borges

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

Dedico este trabalho aos meus pais, Osvaldo e Solane, minha fonte de inspiração.

AGRADECIMENTOS

Eu não poderia começar agradecendo alguém se não eles, meus pais. Mesmo com todas as dificuldades impostas pela vida, ambos deram tudo o que tinham e o que não tinham para dar a melhor vida a mim e aos meus irmãos. Vocês são meus exemplos de determinação e amor. Peço desculpas pelas vezes que falhei como filha. Que a vida me permita ser ao menos um pouquinho do que vocês são. Sempre serei a “boneca” de vocês. Obrigada por acreditarem em mim até em momentos que eu mesma não sabia o que estava acontecendo. Amo vocês!

Dando continuidade, meus pais me deram a melhor família. Não é possível se esperar algo diferente quando se tem oito irmãos. Nesses seis anos de graduação, mais do que nunca, eu vi o quanto o amor de irmão existe, o quanto o amor de irmão pode te fortalecer. Eu vi o quanto vocês fazem falta dia a dia. Isolete, Tânia, Deise, Daniela, Grasiela, Walmir, João Paulo e Daniel, não sei o que teria sido de mim nesses anos sem a ajuda e o amor de vocês. Cada um teve papel fundamental nessa conquista. Espero compensá-los pela ausência e toda a ajuda que me deram. O amor que sinto por vocês é proporcional ao tamanho da nossa família!

Não sendo o suficiente, a família que o Senhor Osvaldo e a Dona Solane tiveram, cada filho está construindo sua família. Dessa parte, eu sou a pessoa mais sortuda desse universo. Graças aos meus irmãos, eu conheci o amor mais sincero, a fonte de luz e energia para qualquer momento. Graças aos meus irmãos, eu tenho meus filhos de coração, aqueles que me dão a paz, que transmitem gratidão no olhar, os seres mais irresistíveis desse mundo. Gustavo, Pedro, Lucas, Laura, Arthur, Davi e Elisa, minha vida nunca mais será a mesma com a vinda de vocês. Sou a tia e madrinha mais sortuda e amada de todas as galáxias, amo vocês (mesmo não gostarem muito de mim porque não dou presentes, logo a tia fica rica, acreditem ahahahah)

É necessário lembrar também dos meus cunhados e minhas cunhadas. Nunca imaginei ter tanta parceria com vocês como tenho hoje. A ajuda e o apoio de vocês fizeram toda diferença nesse processo. Muito obrigada por tudo!

Conforme minha vida segue seu rumo sou presenteada com vários pacotinhos de amor. Em todo esse período, com a ausência da minha família de sangue, eu recebi o apoio e o amor de pessoas desconhecidas, pessoas que hoje eu também chamo de família. Nessa minha família estão incluídos os meus amigos e colegas que a infância e Florianópolis me deram.

Mesmo não os vendo com frequência, jamais irei me esquecer de tudo o que vivi com vocês. Jana, Carlos, Gabriela Schvambach e Felicia, obrigada por todos os momentos, todas as festas, todas as tardes de domingo, todo apoio e carinho que tenho de vocês. Sinto saudades do tempo em que nossa única preocupação era se nossos pais nos deixariam sair para brincarmos, tomar banho de rio, ir em algum bailão, jogar futebol ou algo do que fazíamos. Bons tempos!

Para tornar meus dias de UFSC mais leves, coloridos e despreocupados (difícil), eu tive a sorte de ganhar meus amigos do famoso PIBID. Agnaldo, Aline, Anieli, Crisleine, Elídio, Gabriel (dono das piadas mais horríveis desse universo), Gabriela Finn, Jadna, Paloma, Pamela, Liana, Lucas, Rejeane, Thais e Tiago, eu não sei nem como agradecer todos os momentos que vivi com vocês. Obrigada por tudo!

Conforme os semestres foram passando, as matérias foram colocando em minha vida pessoas que dividiriam o mesmo sofrimento comigo. As milhares de listas de exercícios (que não sabíamos nem ler em um primeiro olhar), os nervosos por causa das provas, os intervalos de aulas, as muitas idas aos atendimentos com monitores ou professores, as idas ao CTC ou outros centros foram e ainda estão sendo vencidas com sucesso graças a vocês. Pessoal do PIBID (citado acima), André (obrigada por me socorrer em diversos momentos quando eu estava perdida no desenvolvimento do trabalho, muito da Teoria dos Jogos eu aprendi com você), Andresa, Deborah, Gabriela Jacoby, Lara, Letícia, Marcelo, Sabrina e Victor Damian, minha eterna gratidão por tudo. Peço desculpas pelas mil vezes que pedi fotos das matérias ou de listas, vocês me salvaram demais <3

Continuando com a minha família de Florianópolis, eu tenho uma mãe na matemática e minha irmãzinha (quase filha). May (só porque ela não gosta que eu a chame pelo nome) e Bruna, vocês viveram ao meu lado durante toda a jornada UFSC, viram desde o começo os trancos e barrancos que passei. Me ajudaram de todas as formas possíveis para que eu continuasse no curso. Eu jamais vou esquecer de tudo o que passamos juntas. Meu muito obrigada!

Caminhando ao meu lado durante um bom tempo desse processo, o presente mais lindo (no caso, por dentro) que a matemática poderia ter me dado foi a Tainá. Quem a conhece sabe o quanto ela sofre comigo, me ama e é amada por mim também. Quem me dera se eu tivesse um pouquinho do amor e empatia que você tem. O mundo precisa de mais pessoas como você. Obrigada por todos os momentos de estudo, de desabafo, de choro, de comemorações, conversas, por acreditar em mim e confiar em mim sempre. Sempre estarei ao seu lado, você é meu orgulho e acredito no seu potencial. Amo você! (Parece que ela é minha namorada, mas o Felix foi mais rápido :( )

Como dizem, não é só de matemática que vivemos, hahahah. Saindo um pouco do CFM, conheci pessoas mais do que especiais e que faço questão de levar para o resto da minha vida: Edgar e seus pensamentos filosóficos que eu não entendo nada (parece que fala em grego), Fernanda e a alegria que transmite no olhar (meu presente de Teoria dos Jogos), Lino e os infinitos docinhos do RU (desculpa pelas tentativas de me salvar em física, eu juro que tentava), Natália e Carolina minhas companheiras de dança (queria ter mais talento nesse ramo para poupar vocês de tudo o que viram), vocês todos são muito especiais para mim. Obrigada!

Nunca imaginei que falaria isso, mas estudar inglês foi uma das melhores coisas que decidi fazer. Além de aprender uma nova língua, eu conheci uma pessoa com um coração enorme e uma alegria incrível. Paula, você sem dúvida nenhuma é uma das minhas alegrias semanais. Obrigada por tudo, todo apoio, carinho e dedicação que você tem comigo. Obrigada pela companhia de sempre, os conselhos, as melhores festas e o nosso Nino (meu mais novo sobrinho). Só tenho a te agradecer por tudo! (Quando você quiser, marcamos nosso casamento <3)

Saindo um pouco da UFSC, mas não muito, eu tive a sorte de conhecer pessoas maravilhosas nesses anos todos de moradia estudantil. Seu Domingos, a pessoa que trabalha de segunda a segunda e sempre está sorrindo, obrigada por ser essa pessoa prestativa com todos nós da moradia. Odson, você é uma pessoa incrível, obrigada por todos os papos, mesmo que rápidos, obrigada por transmitir tanta alegria só no olhar! Tais, ou melhor, grande Taisinha, minha mãe da moradia, aprendi muito com você durante o tempo que moramos juntas, obrigada por tudo! Jussara, minha eterna gratidão por sempre estar disposta a ajudar, por me acompanhar em tantos rolês loucos e por ser essa pessoa maravilhosa!

Ainda da moradia, o bichinho do mato aqui teve a sorte imensa de conhecer você, Suelen. Você foi a pessoa que mais me ajudou em todos os sentidos nesses anos de Florianópolis. Hoje, muito do que sou (e tenho certeza disso), é graças à você. Tua amizade, companhia

e conselhos foram e são fundamentais para mim. A única coisa que ficamos devendo uma a outra foi ao menos um bendito open bar, mas tudo bem, eu aceito. Acredito muito em você. Queria ter um pouco dessa tua coragem de correr atrás dos seus sonhos. Amo você!

Sobre o assunto aprender coisas sobre a vida, eu não poderia deixar de falar de você, Júnior. Sorte a minha de te conhecer e ter tido o privilégio de estar ao teu lado por um tempo. Com você, eu vi a vida de uma forma totalmente diferente do que estava acostumada, vivi momentos de extrema felicidade, conheci pessoas maravilhosas e aprendi um pouco de tudo que possa ser possível na vida. Jamais conseguirei te agradecer por tudo que fizestes por mim. Tenho um imenso orgulho de você. Tens minha eterna gratidão e quando precisar estarei aqui!

Não posso deixar de agradecer ao meu neném de muitas idas a beiramar, conversas e comilanças. Marjorie, que energia maravilhosa é essa que você tem e transmite? Obrigada por tudo, e mesmo estando distantes diversas vezes, tens todo o meu apoio, admiração e carinho. Obrigada por entrar na minha vida!

Nessa reta final, a vida colocou no meu caminho você Victor Marques, ser humaninho fundamental durante esse processo. Obrigada por todo o apoio e por me compreender em todos os momentos de surtos. Espero que tudo isso acabe logo e que nossos dias tenham mais risadas do que stresses. Obrigada por me mimar tanto e por querer estar comigo em todos os momentos. Ainda, obrigada por ter trago junto com você, os seus amigos. Meus almoços não são mais os mesmos. Por todos os momentos, cada um tem minha gratidão!

Para me dar a certeza de que escolhi a profissão certa e que sou feliz com a vida que escolhi, graças a May eu conheci a minha pequena, eu conheci a Ana. Que doce essa menina, que feliz eu sou em te conhecer e conhecer sua família. Obrigada por me ensinar tanto e por me deixar tão feliz. Eu me torno uma criança quando estamos juntas? Sim! Você é meu orgulhinho? Sim! Não consigo imaginar minhas semanas sem ver você. À você e sua família, obrigada por acreditarem no meu trabalho e me acolherem com tanto amor.

E óbvio que eu preciso agradecer aqueles que foram e são responsáveis por todo o amor que sinto pela matemática e pela minha profissão. Professora Solene, com você eu conheci esse amor chamado matemática e cresci querendo seguir essa profissão. Quando cresci e chegou o momento de estudar essa coisa muito louca, eu tive a honra de ter aula com vários professores, onde tento além do conteúdo, absorver um pouco do modo de dar aula, do amor pela matemática e do

companheirismo com aqueles que estão do outro lado, nós alunos. À todos vocês, eu dou minha eterna gratidão.

Preciso deixar aqui os meus agradecimentos ao professor que deixa saltar pelos olhos o amor que sente por estar dando aula, o professor que consegue transformar as matérias mais chatas e entediantes nas melhores aulas possíveis. Não importa o dia ou horário da aula, a animação é sempre a mesma. Obrigada por tudo o que tens feito por nós alunos, professor Morgado. Sinto-me honrada por ter tido aula em diversas matérias com você e por ter você como meu orientador. Obrigada por todos os ensinamentos e por acreditar no meu potencial, colocando em minhas mãos essa pesquisa. Jamais teria feito isso sem sua ajuda!

Aos professores Leonardo Silveira Borges e Leandro da Silva Tavares, meu muito obrigada por aceitarem o convite para minha banca de TCC, por lerem e contribuírem com meu trabalho.

À todos os citados e os que talvez por um grande esquecimento eu não tenha citado (espero que eu tenha escrito o nome de todos os irmãos), mas que fizeram parte da minha vida, obrigada por tudo. Tudo o que sou e onde estou, eu devo à vocês <3

O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.

José de Alencar

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar um pouco da Teoria dos Jogos, desde aspectos históricos até o estudo dos dois tipos de jogos: simultâneos e sequenciais. O foco de estudo está em jogos sequenciais e o método de indução reversa para encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Ainda, é apresentado o conceito de aleatoriedade em jogos sequenciais e assim, feito o estudo das duas aplicações principais: Jogo do Nim e o Jogo de perguntas e respostas.

Palavras-chave: Teoria dos Jogos. *Payoffs*. Equilíbrio de Nash. Jogos Sequenciais. Árvore de Jogo. Método de Indução Reversa. Aleatoriedade e Jogos Sequenciais.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a little of the Theory of Games, since historical aspects to the study of the two types of games: simultaneous and sequential. The focus of the study is on sequential games and the backward induction method to find the perfect Nash equilibrium in subgame. Also, the concept of randomness in sequential games is presented and thus, the study of the two main applications is done: Game of the Nim and the Game of questions and answers.
Keywords: Game Theory. *Payoffs*. Nash Equilibrium. Sequential Games. Game Tree. Backward Induction Method. Randomness and Sequential Games.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos surgiu com a necessidade de analisar situações em que um grupo de agentes age de forma racional e estrategicamente, visando maximizar seus ganhos. A partir disso, podemos formalizar alguns aspectos dos jogos de mesa (como por exemplo o pôquer e o xadrez), leilões, concorrências entre empresas, entre muitas outras aplicações.

Uma aplicação dessa teoria ocorreu na Segunda Guerra Mundial (1939-1945), bem como a Guerra Fria e a Guerra da Coréia, sendo essas situações de combate entre países ou grupos. Temos ainda, aplicações em diversas áreas como Filosofia, Economia, Biologia, Ciências da Computação, Jornalismo e Política. Essa teoria também é utilizada para o estudo de situações como o que leva às empresas a pagarem prêmios como incentivo para seus funcionários, como alguns leilões são melhores do que outros, porque muitas florestas são depredadas, as concorrências entre empresas e até mesmo jogos de salão ou partidas de futebol possibilitando a discussão sob um ponto de vista mais formal.

Para usarmos tal teoria, precisamos considerar todas as características da situação. (FIANI, 2009) diz que uma situação estudada pela teoria dos jogos pode ter como participantes (agentes ou jogadores) indivíduos, grupos de indivíduos, empresas, e assim por diante, onde a decisão de cada um afeta diretamente o outro, sabendo ou não o que o outro irá escolher. Vale ressaltar que, no desenvolvimento deste trabalho, vamos considerar os participantes racionais, sendo que suas escolhas ocorrem em prol da maximização de sua recompensa.

Os jogos podem ser modelados de duas formas principais: jogos na forma normal (ações simultâneas) ou jogos na forma extensiva (ações sequenciais). As principais características que diferenciam os dois tipos são o tempo, a forma de representação e o fato de um jogador saber ou não o que o outro escolheu.

Ao fim de cada jogo, os jogadores recebem suas recompensas, que são dadas através dos *payoffs* respectivos. Com base nessas recompensas os jogadores fazem suas escolhas, pois, o objetivo destes é maximizar os ganhos.

Nesse contexto, a indução reversa surge como um método a ser usado para se obter a solução de um jogo na forma sequencial. O método consiste em analisar a “árvore do jogo", sendo esta a forma de representar um jogo sequencial de trás para frente. Essa análise consiste em pensar no que o outro jogador irá escolher e ver o quanto aquela escolha será bom para si. A partir disso, cada jogador faz suas jogadas pois já possui uma ideia do que o outro jogador irá escolher.

(FIANI, 2009) introduz a seguinte situação para dar início aos estudos dos jogos sequenciais e o método de indução reversa: Imagine uma situação em que uma empresa deseja ingressar em um mercado em que outra empresa já se encontra estabelecida. Dentro de um contexto de jogos, podemos denominar então a empresa que deseja ingressar no mercado como a empresa "Desafiante" e a empresa que já está estabelecida como a empresa "Dominante". As ações disponíveis para a empresa Desafiante são $\{Entrar\}$ ou $\{Não\ entrar\}$ no mercado e para a empresa Dominante são $\{Lutar\}$ ou $\{Acomodar\}$. O que seria então a melhor escolha neste caso para ambas as empresas, sendo que a empresa Desafiante faz sua escolha antes da empresa Dominante? Discutiremos essa situação em detalhes no desenvolvimento deste trabalho.

No segundo capítulo, faremos uma breve contextualização histórica da teoria dos jogos, citando as principais contribuições para o desenvolvimento e suas publicações. Ainda neste mesmo capítulo, apresentaremos os aspectos principais que constituem um jogo, algumas notações necessárias, bem como aspectos básicos de um jogo na forma normal e alguns métodos para encontrar a solução correspondente.

No terceiro capítulo faremos o estudo dos jogos sequenciais e sua forma de representação que denominamos como sendo a forma extensiva. Temos a diferença da representação normal e a extensiva de um jogo. Faremos um estudo detalhado sobre os conceitos necessários para a compreensão do que seria a forma extensiva (árvore de jogo). Ainda, serão explorados o conceito de subjogo e o que seria um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Analisaremos alguns exemplos buscando encontrar esse equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

No quarto capítulo temos o estudo do método de indução reversa para encontrar a solução de um jogo na forma extensiva. Faremos uma extensão para jogos sequenciais com aleatoriedade, mostrando que também é possível aplicar a indução reversa nesse tipo de jogo. Para finalizar, serão apresentados duas aplicações em jogos com aleatoriedade, sendo eles: Jogo do Nim e o Jogo de Perguntas e Respostas.

2 ASPECTOS GERAIS

A Teoria dos Jogos é uma teoria matemática criada para modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais agentes de decisão interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo (DUTTA, 1999). Ainda, o mesmo autor diz que a Teoria dos Jogos recebeu este nome pelo fato de jogos de salão como pôquer, bridge, xadrez, entre outros, serem considerados o ponto de partida para desenvolver os conceitos principais dessa teoria: interação, estratégia e racionalidade.

2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Pelos registros, segundo Dutta (1999), os estudos dessa teoria começaram com o economista francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877) em 1838 e se seguiram pelo economista Francis Edgeworth (1845-1926) em 1881. Antoine Augustin Cournot destacou-se através de sua publicação *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, onde fez uma análise a um problema de oligopólio (um mercado onde existem poucos vendedores para muitos compradores).

Segundo (FIANI, 2009), com a análise feita por Antoine Augustin Cournot, este elaborou um modelo onde duas empresas produzindo um mesmo produto estavam decidindo qual era a quantidade que cada uma iria produzir. Cournot encontrou uma solução, onde cada empresa produziria quantidades que eram compatíveis entre si.

Vale destacar também a grande importância do matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953). Em 1913, este demonstrou que no jogo de xadrez sempre existe um jogador com uma estratégia vencedora. Zermelo destacou-se ainda com a técnica de indução reversa, sendo esta uma forma de resolver determinado jogo na forma sequencial (será vista posteriormente).

(FIANI, 2009) cita a importância de Justin Emile Borel (1871-1956), no qual se preocupava com os jogos que dependiam simultaneamente da sorte e da habilidade do jogador, mais conhecidos como jogos estratégicos. Borel formulou o primeiro conceito de estratégia como sendo um método de jogo onde cada jogador sabe o que vai fazer em determinados momentos do jogo.

Podemos fazer uma ligação entre a origem da Teoria dos Jogos e John von Neumann (1903-1957). Este destacou-se através de suas publicações, a principal sendo o artigo publicado em 1928 *"Zur Theorie der Gesellschaftsspiele"*, onde demonstra que em jogos de soma zero (tipo de jogo onde o ganho de um jogador representa necessariamente a perda do outro jogador), a solução pode ser determinada por modelos matemáticos.

Em 1944, juntamente com Oskar Morgenstern (1902-1977), Neumann publicou o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, considerada a principal obra publicada referente a teoria dos jogos. Neste livro, Neumann e Morgenstern se concentraram em jogos de soma zero, definindo a representação de jogos na forma extensiva. Ainda, os autores abordaram aspectos como: o fator cooperação e a formação de coalizão entre os jogadores.

Porém, esta obra não abrangia boa parte de modelos de interações estratégicas. Assim, segundo (FIANI, 2009), a partir de 1950, John F. Nash Júnior, John C. Harsanyi e Reinhard Selten foram os responsáveis pelas publicações que contextualizavam as ferramentas da Teoria dos Jogos não apenas para jogos de soma zero, mas para todos os demais tipos de jogos. Através dessa contribuição, ambos receberam o prêmio Nobel de Economia em 1994.

Matemático norte-americano, John F. Nash Jr.(1928-2015) foi considerado um dos matemáticos mais importantes do século XX. Foi o responsável por introduzir o conceito de equílibrio em um jogo (não necessariamente sendo jogos de soma zero). Esse equilíbrio trata-se da combinação de estratégias onde a estratégia adotada por um jogador específico consiste na melhor resposta deste jogador se fixarmos as estratégias dos demais. Ainda, este equilíbrio é chamado de equilíbrio de Nash. A partir daí, o que se percebeu, foi que nem sempre a estratégia escolhida de forma racional como sendo a melhor resposta às estratégias escolhidas pelos demais jogadores traria a melhor situação para todos.

Por sua vez, o economista húngaro John C. Harsanyi (1920-2000) contribuiu para a Teoria dos Jogos desenvolvendo um modelo de jogo que trata de situações onde um jogador pode ter informações a mais sobre algum elemento do jogo, quando comparado aos demais jogadores. Neste caso, tem-se então uma situação de informação assimétrica, denominando-se então, um jogo de informação incompleta. Dessa forma, acaba-se estendendo a noção de equilíbrio de Nash para este tipo de situação. Harsanyi trabalhou nisso durante 1967-1968.

Ainda, o matemático e economista Reinhard Selten (1930-2016) contribuiu com a noção de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, sendo esta a estratégia que é necessariamente considerada ótima para todos os possíveis desdobramentos do jogo. Esta noção de equilíbrio tem extrema importância em jogos que envolvem ameaças e compromissos, pois, desta forma é possível analisar quais ameaças e compromissos são plausíveis. Ainda, este conceito é aplicado apenas em jogos do tipo sequencial.

A partir disso, a Teoria dos Jogos vêm sendo aplicada em diversas áreas. Entre as aplicações citadas por (FIANI, 2009)), tem-se Thomas C. Schelling que em 1960 publicou o livro *The Strategy of Conflict*, onde mostra que a Teoria dos Jogos pode ser aplicada em situações de conflito ou cooperação focando no exemplo da Guerra Fria, quando ocorreu o conflito entre Estados Unidos e União Soviética. Atualmente, tem-se essa teoria aplicada à Economia, Administração, Direito, Ciência Política, questões da natureza militar, Biologia, entre outros.

2.2 CONCEITOS PRÉVIOS

A seguir, serão apresentadas as definições e outros aspectos considerados fundamentais para a compreensão da discussão posterior sobre a Teoria dos Jogos.

2.2.1 Jogo

É muito comum no dia a dia nos depararmos com algum jogo, como baralho, xadrez, uma partida de futebol, *video game*, entre outros. Estes momentos considerados de pura diversão passam a nos intrigar com o fato de existir uma teoria responsável por estudá-los. E esse estudo é feito pela Teoria dos Jogos.

No entanto, vale considerar que esta teoria não se limita a esses jogos no senso comum. Também são estudadas pela Teoria dos Jogos situações em que há conflito de interesses entre duas ou mais pessoas (físicas ou jurídicas), e que a recompensa para os “jogadores” depende das ações tomadas por cada um deles.

Entre essas situações adicionais, destacamos o desfecho de uma guerra, a concorrência de empresas, o crescimento populacional, entre outros.

Nesse contexto, para a Teoria dos Jogos, um jogo consiste em uma situação onde existe a interação estratégica entre os participantes, onde estes reconhecem que existe uma interdependência mútua entre suas escolhas.

Segundo (DUTTA, 1999), para uma perfeita compreensão e eventual modelagem de cada uma dessas situações, é importante analisarmos as seguintes características:

- **Quem está jogando:** O grupo de jogadores que interage estrategicamente;

- **Com o que eles estão jogando:** As ações ou estratégias disponíveis para cada jogador;

- **A ordem:** Qual a ordem das ações escolhidas pelos jogadores (simultâneas ou sequenciais);

- **Recompensa:** O quanto o jogador pode perder ou ganhar, com as escolhas feitas.

Neste trabalho serão levados em consideração apenas os jogos não cooperativos. (FIANI, 2009) diz que um jogo é *não-cooperativo* quando os jogadores não podem estabelecer compromissos garantidos. Por outro lado, se os jogadores podem estabelecer compromissos, e esses compromissos possuem garantias efetivas, esse jogo é do tipo *cooperativo*.

As regras do jogo são de conhecimento igualitário de todos os jogadores. Tem-se a exceção dos jogos de informação incompleta, onde pode ocorrer que algum jogador faz sua escolha sem conhecer exatamente o histórico do jogo até aquele momento.

2.2.2 Jogadores

No contexto da Teoria dos Jogos, denominamos como jogador qualquer indivíduo ou organização que participa do jogo, capaz de tomar decisões. Essas decisões afetam tanto ele quanto os demais jogadores inseridos na mesma situação.

Neste trabalho, vamos considerar que o número de jogadores é finito e que a escolha de suas estratégias é feita de forma racional, sempre em busca da maximização de suas recompensas. No caso dessa teoria, a racionalidade está envolvida com a coerência entre os meios e os fins dos jogadores. Ou seja, a racionalidade está envolvida com os meios que os jogadores empregam para alcançar os fins e não com os fins em si mesmos (FIANI, 2009).

2.2.3 Conjunto de ações

Cada jogador possui um conjunto de ações disponíveis, ou seja, é um conjunto formado por todas as ações ou movimentos que este jogador pode escolher em um determinado momento do jogo. O conjunto de ações disponíveis de cada jogador é de conhecimento de todos os demais. Através delas, o jogador traça a estratégia que acredita ser a certa para maximizar seus ganhos.

Temos que a estratégia de um determinado jogador é dada pela análise das ações e suas respectivas recompensas, de acordo também com as recompensas dos outros jogadores. Com a estratégia, o jogador objetiva maximizar seus ganhos.

Uma estratégia é considerada pura quando o jogador escolhe suas ações de forma determinística, não existindo influência para a mudança desta escolha. Por outro lado, falamos em estratégia mista, quando o jogador atribui uma probabilidade à escolha de suas ações.

Para analisar quando é melhor adotar a estratégia mista, considere a seguinte situação: em um jogo de futebol, um jogador ao bater seu pênalti por várias vezes seguidas, se escolher chutar no mesmo lado, o goleiro acabará defendendo todas as cobranças pois já saberá onde o jogador chutará. Dessa forma é interessante para o jogador trocar de estratégia conforme vai cobrando as penalidades. Pode-se dizer então que estratégias mistas funcionam melhor nesta situação.

2.2.4 Recompensas

Ao fim do jogo, cada jogador recebe a recompensa, que também é conhecida como *payoff*. A recompensa especifica o que cada jogador irá receber de acordo com suas escolhas e em função das escolhas dos demais jogadores. Ainda, esses valores estão definidos desde o início do jogo.

Para a escolha da estratégia que terá como resultado essa recompensa, tem-se a *função recompensa*. Através dela, o jogador estará especificando sua preferência de escolha, não necessariamente significando que a recompensa escolhida é a maior de todas em questão numérica, mas é a mais preferível analisando o contexto do jogo. (SARTINI et al., 2004) também denomina essa função como *função utilidade*.

2.2.5 Notações

A seguir estão apresentadas algumas notações necessárias para a apresentação do conteúdo com o objetivo de tornar melhor a compreensão do que se segue.

- **Jogadores**: Os jogadores serão denotados pelo conjunto $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, sendo $n \in \mathbb{N}$ um número finito.

- **Conjunto de possíveis estratégias**: Sejam $i \in J$, e m_i a quantidade de estratégias do jogador i. Denotamos por $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots, e_{im_i}\}$ o conjunto finito das estratégias do jogador i. Nesse sentido, uma estratégia pura do jogador i será denotada por e_{ij}, onde $j \in \{1, 2, 3, \ldots, m_i\}$.

- **Perfil de estratégias puras**: Vamos considerar um jogo com n jogadores. Denotamos pelo vetor $e = (e_{1j_1}, e_{2j_2}, e_{3j_3}, \ldots, e_{nj_n})$ o perfil de estratégias puras em que o jogador 1 opta pela estratégia $e_{1j_1} \in E_1$, o jogador 2 opta pela estratégia $e_{2j_2} \in E_2$, e assim sucessivamente.

- **Conjunto de todas as estratégias de um jogo**: Sejam os conjuntos de estratégias $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dos n jogadores de um jogo. Então, o conjunto de todos os possíveis perfis de estratégias puras é dado pelo produto cartesiano:

$$E = \prod_{n=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times E_3 \times \cdots \times E_n$$

  Note que $e \in E$.

- **Função utilidade**: Em um jogo, para cada jogador $i \in J$ definimos uma *função utilidade* (ou função *payoff*), dada por:

$$\begin{array}{rccc} U_i : & E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & e & \mapsto & U_i(e) \end{array}$$

  Vale considerar que esta função indica a recompensa $U_i(e)$ obtida pelo jogador i se os jogadores optarem pelas estratégias puras descritas no vetor e.

2.2.6 Forma normal de um jogo

A Teoria dos Jogos faz o estudo de situações de interação estratégica, separando essas situações em dois casos principais: jogo simultâneo e jogo sequencial. Ao fazer a distinção de que tipo de jogo se trata, a análise e a solução são feitas conforme a forma de expor o jogo: normal ou extensiva.

(FIANI, 2009) define os jogos simultâneos como sendo aqueles em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma sua própria decisão.

Os jogos simultâneos são também conhecidos como jogos estáticos. Os jogadores fazem suas escolhas ao mesmo tempo, sem saber o que o outro jogador irá escolher. A forma de expor um jogo desse tipo chama-se normal ou estratégica (usaremos neste trabalho o termo normal).

A forma normal de um jogo é apresentada por uma matriz de recompensas, onde estão expostas as estratégias possíveis para cada jogador e ainda, a combinação das recompensas que cada um recebe por determinada estratégia. Esta matriz de recompensas consiste em uma tabela onde estão expostas todas as informações necessárias para analisar determinada situação.

Por outro lado, os jogos sequenciais são também conhecidos como jogos dinâmicos. Neste tipo de jogo, os jogadores fazem suas escolhas em uma ordem previamente estabelecida. Assim, cada jogador sabe o que o outro escolheu. A forma de representar esse tipo de jogo é denominada forma extensiva, que consiste em uma árvore, na qual descrevemos a evolução no tempo das ações adotadas pelos jogadores. O estudo desse tipo de jogo será feito com mais detalhes nos próximos capítulos, nos quais apresentaremos algumas árvores de jogos, bem como o método de resolução denominado indução reversa.

A seguir, vamos discutir alguns exemplos de jogos simultâneos, representados em sua forma normal.

Exemplo 1 (Exemplo Geral)**.** *Em uma determinada situação de interação estratégica tem-se dois jogadores, sendo eles A e B. O jogador A tem a sua disposição duas estratégias: α e β. O jogador B também tem duas estratégias: δ e θ . As recompensas atribuídas a cada possível escolha encontram-se na tabela a seguir:*

A/B	δ	θ
α	c, d	e, f
β	g, h	i, j

Tabela 1: Matriz de *payoff* do exemplo geral

Analisando os dados da tabela 1 acima, temos:

- Conjunto de jogadores: $J = \{A, B\}$;
- Conjunto de estratégias do jogador A: $E_A = \{\alpha, \beta\}$;
- Conjunto de estratégias do jogador B: $E_B = \{\delta, \theta\}$;
- Conjunto de estratégias do jogo: $E = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \theta), (\beta, \delta), (\beta, \theta)\}$;
- O *payoff* atribuído a cada combinação de estratégias possível referente a cada jogador é:
  - Para a combinação de estratégias (α, δ) temos que $U_A(\alpha, \delta) = c$ e ainda $U_B(\alpha, \delta) = d$;
  - Para a combinação de estratégias (α, θ) temos que $U_A(\alpha, \theta) = e$ e ainda $U_B(\alpha, \theta) = f$;
  - Para a combinação de estratégias (β, δ) temos que $U_A(\beta, \delta) = g$ e ainda $U_B(\beta, \delta) = h$;
  - Para a combinação de estratégias (β, θ) temos que $U_A(\beta, \theta) = i$ e ainda $U_B(\beta, \theta) = j$.

Exemplo 2 (Dilema do Prisioneiro)**.** *Dois indivíduos suspeitos de terem cometido um crime são presos pela polícia, que não tem provas suficientes para condenar nenhum deles. Os indivíduos são separados em celas diferentes, sendo oferecido aos dois exatamente o mesmo compromisso: se um cooperar e o outro optar por não cooperar, o que cooperar sai livre enquanto o que não colaborou pega pena de dez anos de prisão; se ambos colaborarem, serão condenados a cinco anos de prisão cada; se ambos não cooperarem, cada um leva um ano de prisão, pois sem a colaboração deles não há como obter uma condenação maior. No contexto dessa situação, cooperar significa confessar o crime (uma espécie de delação premiada).*

Jogador 1/ Jogador 2	Cooperar	Não Cooperar
Cooperar	-5, -5	0, -10
Não Cooperar	-10, 0	-1, -1

Tabela 2: Matriz de *payoff* do jogo ”Dilema do Prisioneiro”

A Tabela 2 corresponde a representação do jogo ”Dilema do Prisioneiro” na forma normal. Com o objetivo de facilitar o estudo desse exemplo, vamos usar a seguinte notação para as ações disponíveis para cada jogador:

- *Cooperar*: C;
- *Não Cooperar*: N.

Analisando a matriz dada, temos que:

- Conjunto dos jogadores é $J = \{1, 2\}$;
- O conjunto de estratégias do jogador 1 é:
  $E_1 = \{C, N\}$;
- O conjunto de estratégias do jogador 2 é:
  $E_2 = \{C, N\}$;
- O conjunto de estratégias do jogo é:
  $E = \{(C, C), (C, N), (N, C), (N, N)\}$;
- O *payoff* atribuído a cada combinação de estratégias possíveis são:
  - Para a combinação de estratégias (C, C) temos que $U_1(C, C) = -5$ e ainda $U_2(C, C) = -5$;
  - Para a combinação de estratégia (C, N) temos que $U_1(C, N) = 0$ e ainda $U_2(C, N) = -10$;
  - Para a combinação de estratégia (N, C) temos que $U_1(N, C) = -10$ e ainda $U_2(N, C) = 0$;
  - Para a combinação de estratégia (N, N) temos que $U_1(N, N) = -1$ e ainda $U_2(N, N) = -1$.

2.2.7 Estratégias dominantes e dominadas

Uma estratégia e_i pode ser classificada como estritamente dominante, fracamente dominante, estritamente dominada ou fracamente dominada.

Consideremos um jogo com n jogadores, e seja E_i o conjunto de estratégias de cada jogador $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Com a *função utilidade*, é possível saber os *payoffs* referentes a cada perfil de estratégias. Nesse sentido, pode ocorrer que uma destas estratégias apresente sempre melhores (ou piores) resultados do que uma outra estratégia de um determinado jogador. Trata-se da ideia de estratégia estritamente dominante (ou estritamente dominada), que definimos a seguir:

Definição 1. *Considere um jogo com $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sejam e_i^* e e_i^{**} estratégias do jogador i, e denote por e_{-i} um conjunto de possíveis estratégias dos demais jogadores. Ainda, considere a função utilidade U_i que determina as recompensas referentes a cada perfil de estratégias. Nesse contexto, dizemos que ${e_i}^*$ é estritamente dominante em relação à ${e_i}^{**}$ se*

$$U_i({e_i}^*, e_{-i}) > U_i({e_i}^{**}, e_{-i})$$

para todo e_{-i}.

Em outras palavras, tem-se que uma estratégia é estritamente dominante em relação a outra estratégia do mesmo jogador se ela resulta sempre em melhores resultados para este jogador, independente das escolhas dos demais jogadores.

Nos termos da definição apresentada, diremos que a estratégia ${e_i}^{**}$ é *estritamente dominada* pela estratégia ${e_i}^*$.

Quando a desigualdade não é estrita, podemos definir estratégias fracamente dominantes e dominadas, na forma a seguir:

Definição 2. *Considere um jogo com $J = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Sejam e_i' e ${e_i}''$ estratégias do jogador i, e denote por e_{-i} um conjunto de possíveis estratégias dos demais jogadores. Ainda, considere a função utilidade U_i que determina as recompensas referentes a cada perfil de estratégias. Nesse contexto, dizemos que ${e_i}'$ é fracamente dominante em relação à ${e_i}''$ se*

$$U_i({e_i}', e_{-i}) \geq U_i({e_i}'', e_{-i})$$

para todo e_{-i}, *e*

$$U_i(e_i', e_{-i}) > U_i(e_i", e_{-i}) \text{ para algum } e_{-i}.$$

Em outras palavras, tem-se que uma estratégia é fracamente dominante para um determinado jogador se ela apresenta resultados melhores ou iguais do que outra estratégia deste jogador, e apresenta um resultado estritamente melhor para pelo menos um perfil de estratégias puras dos demais jogadores.

Ademais, no contexto da definição acima, a estratégia $e_i"$ do jogador i será *fracamente dominada* pela estratégia e_i'.

A seguir, apresentamos um exemplo para um melhor entendimento de estratégia estritamente dominante, fracamente dominante, estritamente dominada e fracamente dominada.

Exemplo 3. *Considere a situação em que duas empresas trabalham com um mesmo produto biodegradável, sendo elas a empresa Limpo e a empresa Bonito. A empresa Bonito já está neste ramo enquanto a empresa Limpo é nova no ramo. Sendo assim, a empresa Limpo precisa decidir se lança o produto biodegradável para competir com a empresa Bonito, enquanto esta precisa decidir de aumenta ou não os gastos com publicidade para fazer mais propaganda de seu produto. A tabela abaixo representa esta situação na forma normal, contendo os lucros de cada empresa (valores em milhões de reais). (FIANI, 2009)*

Limpo/Bonito	Aumentar	Não Aumentar
Lançar	5, 5	7, 3
Não Lançar	2, 4	2, 7

Tabela 3: Exemplo de Estratégia Estritamente Dominante

Analisando as estratégias das duas empresas temos que se a empresa Bonito decidir aumentar os gastos com a publicidade, a empresa Limpo obterá maior lucro lançando seu produto biodegradável. O mesmo ocorre se a empresa Bonito decidir não aumentar os gastos com a publicidade. Sendo assim, temos que a empresa Limpo possui uma *estratégia estritamente dominante* sendo ela {*Lançar o produto biodegradável*}. Por consequência, temos que a estratégia {*Não lançar o produto biodegradável*} é a estratégia *estritamente dominada* para a empresa Limpo. Dessa forma, temos que a empresa Limpo, independente do que a empresa Bonito escolher, agindo de forma racional, preferirá a estratégia {*Lançar o produto biodegradável*}.

Agora, vamos considerar as estratégias da empresa Limpo. Se esta escolher lançar o produto biodegradável, a empresa Bonito obterá maior lucro se escolher aumentar os gastos com publicidade. Por outro lado, se a empresa Limpo decidir não lançar seu produto biodegradável, a empresa Bonito obterá maior lucro se escolher não aumentar os gastos com publicidade. Dessa forma, a empresa Bonito não possui estratégia *estritamente ou fracamente dominante* por consequência também não possui estratégia *estritamente ou fracamente dominada.*

Exemplo 4. *Considerando a mesma situação do exemplo anterior, e modificando os valores das recompensas, considere a nova tabela deste jogo em sua forma normal:*

Limpo/Bonito	Aumentar	Não Aumentar
Lançar	2, 5	7, 3
Não Lançar	2, 4	2, 7

Tabela 4: Exemplo de Estratégia Fracamente Dominante

Analisando as recompensas da mesma forma que no exemplo anterior, obtém-se que a estratégia {*Lançar o produto biodegradável*} é uma estratégia *fracamente dominante* para a empresa Limpo. Por consequência, a estratégia {*Não lançar o produto biodegradável*} é a estratégia *fracamente dominada* para a empresa Limpo.

Por outro lado, a empresa Bonito não possui estratégia *estritamente* ou *fracamente dominante*, e por consequência não possui estratégia *estritamente* ou *fracamente dominada.*

2.2.8 Métodos de resolução de um jogo na forma normal

Após modelar uma situação de interação estratégica da forma correta, é preciso saber como analisar as estratégias em busca de maximizar os ganhos de um determinado jogador. Aqui, é importante levar em consideração que todos os jogadores sabem da existência de todas as estratégias dos demais jogadores e o que estas estratégias podem lhe afetar, tanto positivamente quanto negativamente.

Em busca disso, serão apresentadas a seguir, duas formas de resolver um jogo na forma normal, sendo elas a eliminação iterada de estratégias dominadas e pelo equilíbrio de Nash. Existem casos em que é possível encontrar a melhor resposta pelos dois métodos, porém, isso depende muito da situação concreta.

2.2.8.1 Eliminação iterada de estratégias dominadas

Considerando uma situação de interação estratégica onde uma opção sempre lhe dá um resultado melhor do que as outras, seria racional escolhê-la? (FIANI, 2009).

Trata-se da maneira mais simples de encontrar o resultado de um jogo simultâneo na forma normal, ou seja, aplicar o método da eliminação iterada de estratégias dominadas. Esse método consiste no processo de eliminação das estratégias dominadas de cada jogador, reduzindo o tamanho do jogo respectivo (SARTINI et al., 2004).

Exemplo 5 (Dilema do Prisioneiro)**.** *Sendo já conhecida a situação desse exemplo, tem-se a seguinte tabela contendo as punições referentes aos dois jogadores:*

Jogador 1/ Jogador 2	Cooperar	Não Cooperar
Cooperar	-5, -5	0, -10
Não Cooperar	-10, 0	-1, -1

Tabela 5: Matriz de *payoff* do Dilema do Prisioneiro

Analisando primeiramente as estratégias do Jogador 2, temos que este irá escolher a estratégia {*Cooperar*} independente de qual estratégia o Jogador 1 escolher. Isto porque esta estratégia é estritamente dominante em relação a {*Não Cooperar*}.

Da mesma forma, temos que o Jogador 1 escolherá a estratégia {*Cooperar*} independente do que o Jogador 2 escolher. Temos então uma estratégia estritamente dominante para cada jogador sendo elas destacadas na matriz de *payoff* a seguir:

Jogador 1/ Jogador 2	Cooperar	Não Cooperar
Cooperar	-5, -5	0, -10
Não Cooperar	-10, 0	-1, -1

Tabela 6: Eliminação das estratégias estritamente dominadas (Dilema do Prisioneiro)

Portanto, temos a combinação de estratégias {*Cooperar*, *Cooperar*} resulta na melhor escolha para ambos os jogadores. Fazendo a eliminação da estratégia estritamente dominada, temos:

Jogador 1/ Jogador 2	Cooperar
Cooperar	-5, -5

Tabela 7: Solução do Jogo Dilema do Prisioneiro por Eliminação Iterada das Estratégias Estritamente Dominadas

Exemplo 6. *Considere a seguinte situação: duas empresas, a Carro Novo e a Novo Auto competem no mercado automobilístico. A empresa Carro Novo já tem seu modelo utilitário, que é um sucesso, enquanto a Novo Auto ainda não oferece nenhum modelo de utilitário.*

As estratégias disponíveis para a Novo Auto são: importar o utilitário da sua matriz estrangeira, produzir o utilitário nacionalmente ou simplesmente permanecer fora do segmento de utilitários, decidindo não competir com a Carro Novo. A empresa Carro Novo pode responder com as possíveis estratégias: mantendo o preço do seu modelo, diminuindo o preço do seu modelo ou lançando uma nova versão do seu modelo

A tabela a seguir com as recompensas apresenta as estimativas de lucros (em milhões) de cada combinação de ações das duas empresas, que resultam tanto dos custos de cada opção quanto da reação da demanda a novidades dos produtos e aos preços. (Exemplo retirado de (FIANI, 2009))

A representação desse jogo em sua forma normal é dada da seguinte forma:

Novo Auto/ Carro Novo	X	Y	Z
A	2, 1	2, 2	2, 3
B	4, 1	1, 4	1, 3
C	0, 6	1, 1	1, 0

Tabela 8: Matriz de *payoffs* do jogo: Empresa Novo Auto / Empresa Carro Novo

Em relação à matriz de *payoffs* acima temos que:

- **A**: referente à ação {*Importar da matriz*};
- **B**: referente à ação {*Lançar modelo próprio*};
- **C**: referente à ação {*Não competir*};
- **X**: referente à ação {*Manter preço*};

- **Y**: referente à ação {*Lançar nova versão*};
- **Z**: referente à ação {*Reduzir preço*}.

Analisando os *payoffs* da empresa Carro Novo, podemos perceber que esta empresa não possui estratégia estritamente dominante. Isso ocorre pelo fato de que se a empresa Novo Auto decidir Importar o utilitário de sua matriz estrangeira, a melhor opção para a Carro Novo será {*Reduzir o preço*}. Se a empresa Novo Auto decidir lançar um modelo próprio, a melhor estratégia para a empresa Carro Novo é {*Lançar nova versão*}. Por fim, se a empresa Novo Auto decidir ficar de fora do segmento de utilitários, a melhor estratégia para a empresa Carro Novo é {*Manter o preço*}.

Analisando os *payoffs* da empresa Novo Auto, temos que a estratégia {*Não competir*} é estritamente dominada em relação a estratégia {*Importar da matriz*}.

Novo Auto/ Carro Novo	X	Y	Z
A	2, 1	2, 2	2, 3
B	4, 1	1, 4	1, 3
C	0, 6	1, 1	1, 0

Tabela 9: Estratégia Estritamente Dominante (Empresa Novo Auto)

Dessa forma, a estratégia {*Não competir*} da empresa Novo Auto é eliminada, deixando a matriz de recompensas da seguinte forma:

Novo Auto/ Carro Novo	X	Y	Z
A	2, 1	2, 2	2, 3
B	4, 1	1, 4	1, 3

Tabela 10: Eliminação Iterativa da Estratégia Estritamente Dominada (1ª rodada)

Agora, analisando a tabela 10, temos que a empresa Carro Novo possui uma estratégia estritamente dominada pelas outras duas, ou seja, a estratégia {*Manter o preço*} é a pior das estratégias, independente do que a empresa Novo Auto escolher. Temos então a estratégia dominada em destaque na tabela abaixo:

Novo Auto/ Carro Novo	X	Y	Z
A	2, 1	2, 2	2, 3
B	4, 1	1, 4	1, 3

Tabela 11: Estratégia Estritamente Dominada (Empresa Carro Novo)

Eliminando a estratégia estritamente dominada da empresa Carro Novo, a matriz de recompensas fica da seguinte forma:

Novo Auto/ Carro Novo	Y	Z
A	2, 2	2, 3
B	1, 4	1, 3

Tabela 12: Eliminação Iterativa da Estratégia Estritamente Dominada (2ª rodada)

Analisando a tabela 12, temos que a empresa Novo Auto possui uma estratégia estritamente dominante, independente do que a empresa Carro Novo escolher. Pelos *payoffs*, a estratégia {*Importar da matriz*} é estritamente dominante sobre a estratégia {*Lançar modelo próprio*}, conforme é destacado na tabela a seguir:

Novo Auto/ Carro Novo	Y	Z
A	2, 2	2, 3
B	1, 4	1, 3

Tabela 13: Estratégia Estritamente Dominante para a Empresa Novo Auto

Eliminando a estratégia estritamente dominada da empresa Novo Auto, obtemos a seguinte matriz de recompensas:

Novo Auto/ Carro Novo	Y	Z
A	2, 2	2, 3

Tabela 14: Eliminação Iterativa da Estratégia Dominada (3ª rodada)

E finalmente, analisando a tabela 14, pelos *payoffs* da empresa Carro Novo, obtemos o resultado desse jogo pelo método de eliminação iterativa de estratégias dominadas, sendo ele o perfil de estratégias puras {*Importar da Matriz*, *Reduzir o preço*} com *payoffs* $(2, 3)$ para as empresas Novo Auto e Carro Novo, respectivamente.

2.2.8.2 Equilíbrio de Nash

Existem situações em que não é possível encontrar uma solução racional para o jogo pelo método de eliminação iterada das estratégias dominantes, por estas não existirem. Nesse contexto, um outro método de resolução é o Equilíbrio de Nash, que definiremos a seguir:

Definição 3 (Equilíbrio de Nash). *O perfil de estratégias puras* $e^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, \ldots, e_n^*)$ *é um equilíbrio de Nash se*

$$U_i(e_i^*, e_{-i}^*) \geq U_i(e_i, e_{-i}^*)$$

para todo e_i *e para todo* i. *(DUTTA, 1999)*

Em suma, quando obtemos um equilíbrio de Nash, a estratégia adotada por um jogador específico consiste na melhor resposta deste jogador se fixarmos as estratégias dos demais.

Vale considerar que, com a combinação de estratégias escolhida como sendo o equilíbrio de Nash, todos os jogadores não terão motivação para trocar de estratégia. Um método prático para obter o equilíbrio de Nash é fixar uma estratégia do outro jogador e verificar a melhor resposta do jogador em questão. Quando as melhores respostas coincidirem em um mesmo perfil de estratégias puras, encontramos um equilíbrio de Nash para o jogo respectivo.

Exemplo 7. *Analisando o jogo do Dilema do Prisioneiro cuja a matriz de payoffs está abaixo, temos:*

Jogador 1/ Jogador 2	Cooperar	Não Cooperar
Cooperar	-5, -5	0, -10
Não Cooperar	-10, 0	-1, -1

Tabela 15: Matriz de *payoff* do Dilema do Prisioneiro para a análise do Equilíbrio de Nash

Analisando as estratégias disponíveis para cada jogador, temos que a combinação de estratégias $(Cooperar, Cooperar)$ é um equilíbrio de Nash. Isso de fato ocorre, pois se um prisioneiro cooperar e o outro não, aquele que não cooperou pegará 10 anos de prisão, ao invés de 5 anos, se acaso cooperasse. Dessa forma, os dois tendem a cooperar. Esse é o único equilíbrio de Nash do jogo.

Exemplo 8. *Em uma determinada situação de dois jogadores sendo eles Jogador 1 e o Jogador 2, com as estratégias disponíveis sendo* $\{A, B\}$ *e* $\{C, D, E\}$ *os conjuntos de estratégias disponíveis para cada jogador, respectivamente. A matriz de payoffs se encontra a seguir:*

Jogador 1/ Jogador 2	C	D	E
A	5, 4	11, 1	0, 0
B	6, -1	0, 1	2, 2

Tabela 16: Matriz de *payoffs* sem estratégia dominante

Analisando a matriz, percebemos que nenhum jogador possui estratégia estritamente/fracamente dominante. Dessa forma, não é possível resolver este jogo por eliminação iterativa de estratégias dominadas.

Por outro lado, é possível resolver este jogo buscando o equilíbro de Nash pelo método prático descrito anteriormente.

Para o jogador 1:

- Se o Jogador 2 escolher a estratégia $\{C\}$, a melhor escolha para o Jogador 1 é $\{B\}$ pois o *payoff* é maior do que se for escolher $\{A\}$;
- Se o Jogador 2 escolher a estratégia $\{D\}$, a melhor escolha para o Jogador 1 é $\{A\}$ pois o *payoff* é maior do que se escolher $\{B\}$;
- Se o jogador 2 escolher a estratégia $\{E\}$, a melhor escolha para o Jogador 1 é $\{B\}$ pois o *payoff* é maior do que se escolher $\{A\}$.

Os resultados da análise feita até agora estão destacados na tabela abaixo:

Jogador 1/ Jogador 2	C	D	E
A	5, 4	11, 1	0, 0
B	6, -1	0, 1	2, 2

Tabela 17: Matriz de *payoffs* sem estratégia dominante

Para o Jogador 2:

- Se o jogador 1 escolher a estratégia $\{A\}$, a melhor escolha para o Jogador 2 será $\{C\}$, pois o *payoff* é maior do que se este escolher $\{D\}$ ou $\{E\}$;
- Se o Jogador 1 escolher a estratégia $\{B\}$, a melhor esclha para o jogador 2 é $\{E\}$, pois o *payoff* é maior do que se este escolher $\{C\}$ ou $\{D\}$.

A matriz abaixo traz em destaque os resultados dessa análise:

Jogador 1/ Jogador 2	C	D	E
A	5, 4	11, 1	0, 0
B	6, -1	0, 1	2, 2

Tabela 18: Melhor resposta para o jogador 2

Sabendo as melhores escolhas para os dois jogadores, com a tabela a seguir é possível ver qual será um equilíbrio de Nash do jogo.

Jogador 1/ Jogador 2	C	D	E
A	5, 4	11, 1	0, 0
B	6, -1	0, 1	2, 2

Tabela 19: Solução pelo Equilíbrio de Nash

A combinação (B, E) é um equilíbrio de Nash do jogo dando recompensas $(2, 2)$ para os Jogadores 1 e 2, respectivamente.

No próximo capítulo, vamos estudar os jogos em que as ações dos jogadores ocorrem de forma sequencial. Tratam-se dos jogos na forma extensiva, e sua representação será dada meio de uma árvore do jogo.

3 FORMA EXTENSIVA DE UM JOGO

Representar um jogo na forma normal pode trazer como consequência a perda de possíveis desdobramentos futuros das escolhas dos jogadores, e não existe a noção de tempo entre as jogadas, sendo que a solução é dada com apenas uma etapa de escolhas. Porém, existem situações de interação estratégica em que a solução é encontrada após um determinado número de etapas sucessivas. Neste capítulo, faremos um estudo da representação desse tipo de situação, como interpretá-lo e encontrar a melhor solução. As definições e exemplos foram retirados de (FIANI, 2009) e (SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008).

(FIANI, 2009) diz que nos jogos com ações sequenciais, os jogadores fazem suas escolhas com base nas escolhas do passado, e consequentemente, com as escolhas do futuro. Ainda, o mesmo autor diz que os jogadores não ignoram as decisões dos demais jogadores, ainda mais, pelo fato de que os jogadores podem mudar suas escolhas futuras, na intenção de se vingar ou algo do gênero.

Assim, para ser feita a análise desse outro tipo de jogo, usamos a representação na forma extensiva, também conhecida como a árvore de jogo. Esta árvore de jogo é composta por ramos e nós, com as recompensas descritas em nós terminais, que representam o final do jogo respectivo, e um número finito de ramos (veremos com mais detalhes posteriormente).

Para o estudo de um jogo do tipo sequencial, é preciso distinguí-lo em dois tipos: informação perfeita ou imperfeita. A diferença entre ambos é que no caso de informação perfeita todos os jogadores sabem o histórico do jogo antes de fazerem suas escolhas, incluindo a ordem das escolhas. Por outro lado, nos jogos de informação imperfeita, pelo menos um dos jogadores desconhece algum desses aspectos, como por exemplo a escolha feita pelo jogador anterior.

Neste trabalho, vamos abordar apenas exemplos de jogos com informação perfeita.

3.1 ÁRVORE DE JOGO

A representação de uma situação de interação estratégica que pode ser analisada como um jogo sequencial é feita por meio da *árvore de jogo.*

A árvore de jogo é composta por *nós* e *ramos.* (FIANI, 2009) define um nó como sendo uma etapa do jogo em que algum dos jogadores tem que tomar uma decisão. Ainda, o mesmo autor define um ramo como sendo uma ação do conjunto de ações do jogador a partir do seu nó.

Inicia-se uma árvore de jogo pelo *nó inicial*, que representa uma tomada de ação de um determinado jogador. A partir dele, outros nós surgem em razão da estratégia adotada pelo primeiro jogador. Dessa forma, uma escolha de um jogador torna possível outras escolhas de demais jogadores.

Surge então a definição de nó sucessor e nó predecessor de outro nó. Um *nó sucessor* de um dado nó é aquele que é provável escolha no futuro, caso o nó em questão seja alcançado no jogo. Consequentemente, um *nó predecessor* de outro nó é aquele que tem de ser alcançado para que este último se torne possível. Concluímos que um nó inicial é aquele que não tem predecessor.

Finalizando o jogo, temos os *nós terminais* ou *finais*. Estes, são aqueles nós que não possuem nós sucessores e que apresentam as recompensas ou *payoffs* dos jogadores, expressas por números e na ordem em que os jogadores entram no jogo.

Tendo todos os componentes de uma árvore de jogo bem definidos, precisamos agora estabelecer algumas regras para que a modelagem do jogo nesta forma seja coerente e represente de forma correta a situação a ser analisada. Para (DUTTA, 1999), uma árvore de jogo precisa satisfazer os seguintes itens:

1. Único ponto de partida: É de extrema importância saber onde o jogo começa. Dessa forma, a árvore de jogo deve conter apenas um nó inicial;

2. Não há ciclos: Não deve haver impasse enquanto acontece o jogo, ou seja, os ramos da árvore não podem criar um ciclo ou voltarem para os nós anteriores;

3. Uma maneira de proceder: É importante que não haja ambiguidade sobre como o jogo prossegue e, portanto, não deve haver dois ou mais ramos levando a um nó;

4. Um nó não pode ser um predecessor de si mesmo;

5. O predecessor de um predecessor também é um predecessor: se um nó β for um predecessor de α, e um nó γ é, por sua vez, um predecessor de β, então γ também é predecessor de α;

6. Predecessores podem ser classificados: se β e γ são ambos predecessores de α, deve ser o caso em que ou β é um predecessor de ou vice-versa;

7. Deve haver um predecessor comum: Considere quaisquer dois nós, α e β, nenhum dos quais precede o outro. Então deve haver um nó γ que é um predecessor de α e β.

Exemplo 9 (Jogo da Entrada). *Considere a situação em que uma empresa deseja entrar em um determinado mercado que já tem uma empresa estabelecida que domina o ramo. A empresa que deseja entrar no mercado será denominada por Desafiante e a empresa já estabelecida como Dominante.*

As duas empresas possuem duas ações possíveis. Para a empresa Desafiante temos como conjunto de ações $\{Entra, Não\ Entra\}$ *e para a empresa Dominante temos* $\{Luta, Acomoda\}$. *Como recompensa, definimos:*

- *Se a empresa Desafiante escolher a ação {Entra} e a empresa Dominante escolher a ação {Luta} temos o payoff* $(-1, 2)$, *que indica que a empresa desafiante perde um milhão de reais, e a empresa Dominante ganha dois milhões de reais;*

- *Se a empresa Desafiante escolher a ação {Entra} e a empresa Dominante escolher a ação {Acomoda} temos o payoff* $(3, 7)$, *que indica que a empresa desafiante ganha três milhões de reais, e a empresa Dominante ganha sete milhões de reais;*

- *Se a empresa Desafiante escolher a ação* $\{Não\ Entra\}$ *temos o payoff* $(0, 10)$, *que indica que a empresa Desafiante não perde e não ganha valor algum, e a empresa Dominante mantém seu lucro de dez milhões de reais.*

Ao analisar os conjuntos de ações das duas empresas temos que as ações da empresa Desafiante referem-se em entrar ou não no mercado em questão. Para a empresa Dominante, a ação $\{Luta\}$ refere-se a adotar guerra de preços , campanhas agressivas de marketing ou qualquer outra forma de garantir que a empresa Dominante não sofra uma redução significativa dos lucros, e a empresa Desafiante não consiga obter rendimento o suficiente nas vendas.

Ainda, a ação $\{Acomoda\}$ faria com que a empresa Dominante diminuísse sua produção com o objetivo de abrir espaço para a empresa Desafiante entrar no mercado e esta não afetar a produção total com sua nova oferta.

Os *payoffs* equivalem à milhões, onde os negativos representam quanto a empresa pode perder e os positivos em relação à quanto podem ganhar. A árvore de jogo que representa essa situação está a seguir:

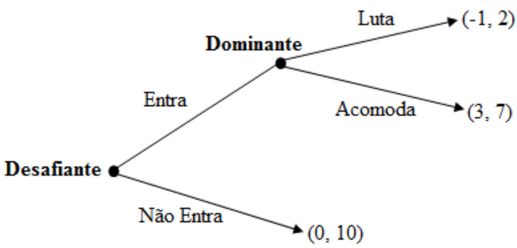

Figura 1: Árvore do Jogo da Entrada

Uma descrição matemática mais precisa dos jogos na forma extensiva, bem como uma discussão sobre os possíveis métodos para sua resolução serão apresentados na seção seguinte.

3.2 DEFINIÇÃO MATEMÁTICA

(SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008) diz que um jogo de informação perfeita na forma extensiva é uma árvore no sentido da teoria dos grafos, no qual cada nó representa a escolha de um dos jogadores, cada aresta representa uma ação possível e as folhas (nós terminais) representam o resultado final no qual cada jogador tem uma função útil.

A seguir é apresentada a definição de um jogo na forma extensiva de informação perfeita, segundo (SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008):

Definição 4. *Um jogo finito na forma extensiva de informação perfeita é uma 8-upla* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \upsilon)$*, onde:*

- N *é um conjunto de* n *jogadores;*
- A *é um conjunto (único) de ações;*
- H *é um conjunto de nós de escolha não-terminais;*
- Z *é um conjunto de nós terminais, disjunto de* H*;*
- $\chi : H \mapsto 2^A$ *é a função de ação, que atribui a cada nó de escolha um conjunto de ações possíveis;*

- *$\rho : H \mapsto N$ é a função de jogador, que atribui a cada nó não terminal um jogador $i \in N$ que escolhe uma ação nesse nó;*

- *$\sigma : H \times A \mapsto H \cup Z$ é a função sucessora, que mapeia um nó de escolha e uma ação para um novo nó de escolha ou nó terminal de tal forma que para todos $h_1, h_2 \in H$ e $a_1, a_2 \in A$, e se $\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2)$ então $h_1 = h_2$ e $a_1 = a_2$;*

- *$u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ onde $u_i : Z \to \mathbb{R}$ é uma função real que representa os payoffs para o jogador i nos nós terminais do conjunto Z.*

Exemplo 10. *(Jogo das empresas de vans) Consideremos a seguinte situação: duas empresas, sendo elas, a Inovadora e a Líder fazem parte do ramo de produção de vans. A empresa Inovadora está em dúvidas se é válido optar por um lançamento de um novo modelo. Com isso, a empresa Líder precisa decidir se mantém o preço de seu produto ou se o reduz. A representação dessa situação é dada a seguir, onde os payoffs representam os lucros respectivos em milhões de reais.*

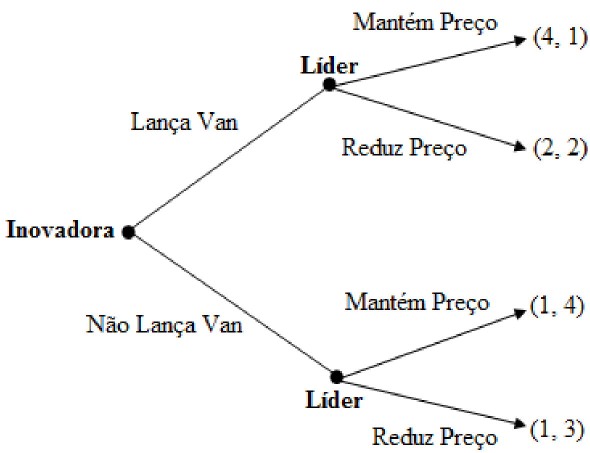

Figura 2: Árvore do Jogo Inovadora *versus* Líder

Descrevendo este exemplo com base na definição apresentada no início desta seção, temos:

- Conjunto de jogadores: $N = \{Inovadora, Líder\}$;
- Conjunto de ações:
  $A = \{Lança\,Van, Não\,Lança\,Van, Mantém\,Preço, Reduz\,Preço\}$;
- Conjunto de nós não terminais: $H = \{A, B, C\}$;
- Conjunto de nós terminais: $Z = \{a, b, c, d\}$;
- Função χ:
  $A \mapsto \{Lança\ Van, Não\ Lança\ Van\}$
  $B \mapsto \{Mantém\ Preço, Reduz\ Preço\}$
  $C \mapsto \{Mantém\ Preço, Reduz\ Preço\}$
- Função ρ:
  $A \mapsto Inovadora$
  $B \mapsto Líder$
  $C \mapsto Líder$
- Função σ:
  $(A, Lança\ Van) \mapsto B$
  $(A, Não\ Lança\ Van) \mapsto C$
  $(B, Mantém\ Preço) \mapsto a$
  $(B, Reduz\ Preço) \mapsto b$
  $(C, Mantém\ Preço) \mapsto c$
  $(C, Reduz\ Preço) \mapsto d$
- Funções u_I e u_L, denotando por I a empresa Inovadora e por L a empresa Líder: $u_I(a) = 4$, $u_L(a) = 4$, $u_I(b) = 2$, $u_L(b) = 2$, $u_I(c) = 1$, $u_L(c) = 4$, $u_I(d) = 1$, $u_L(d) = 3$.

3.3 ESTRATÉGIAS

Nos jogos representados na forma sequencial, a estratégia de um jogador passa a ser um plano de ações que especifica qual ação escolher em cada nó de escolha que lhe pertence. A seguir, temos a definição formal de estratégia:

Definição 5 (Estratégia Pura)**.** *Seja* $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, \upsilon)$ *um jogo de forma extensiva de informações perfeitas. Então as estratégias puras do jogador i consistem no produto cartesiano:*

$$\prod_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$$

.

Considerando a situação descrita no Jogo das Empresas de Vans, vamos descrever a seguir as possíveis estratégias das empresas Inovadora e Líder:

$S_I : \{Lança\ Van, Não\ Lança\ Van\}$.

$S_L : \{(Mantém\ Preço, Mantém\ Preço), (Mantém\ Preço, Reduz\ Preço), (Reduz\ Preço, Mantém\ Preço), (Reduz\ Preço, Reduz\ Preço)\}$.

3.3.1 Representação normal *versus* extensiva

Até o momento, vimos que uma maneira de representar uma situação de interação estratégica que pode ser analisada como sendo um jogo simultâneo é através da forma normal ou estratégica (matriz de *payoffs*). Ainda, vimos também que uma situação de interação estratégica de jogo sequencial costuma ser representada na forma extensiva (ávore de jogo).

Porém, estas representações não são únicas. Nesta seção, veremos que é possível representar um jogo sequencial na forma normal ou estratégica. Da mesma forma, é possível representar um jogo simultâneo através da forma extensiva, mas não entraremos nessa discussão pois esta representação envolve os jogos de informação imperfeita, que não são o objeto do nosso trabalho.

Para analisar como ocorre a representação de um jogo sequencial na forma normal, consideremos o exemplo do Jogo das Empresas de Vans, cuja árvore do jogo está na figura 2. Vimos que a Empresa Líder possui quatro estratégias a sua disposição, e assim segue que a representação desse jogo na forma normal é dada por:

Inovadora	Líder			
	Reduz Preço, Reduz Preço	Reduz Preço, Mantém Preço	Mantém Preço, Reduz Preço	Mantém Preço, Mantém Preço
Lança	2, 2	2, 2	4, 1	4, 1
Não Lança	1, 3	1, 4	1, 3	1, 4

Tabela 20: Forma Normal do Jogo da Entrada

O que difere essa matriz de *payoffs* para uma que representa algum jogo do tipo simultâneo é o fato de não haver apenas uma ação por coluna. Agora, em cada coluna temos duas ações representando as estratégias da empresa Líder.

Isso ocorre pelo fato de que em um jogo sequencial, a estratégia de um jogador se dá por um plano de ação que especifica o que um determinado jogador irá escolher em cada possível etapa do jogo que este possa vir a ter que tomar alguma decisão.

Assim, o primeiro elemento do plano de ação que compõe a estratégia da empresa Líder corresponde à ação da primeira linha da empresa Inovadora, e o segundo elemendo corresponde a ação da segunda linha.

No entanto, apesar de ser possível essa conversão, vale considerar que a forma normal não é uma representação ideal para este tipo de jogo, pois analisando a tabela não é possível saber a sequência de movimento dos jogadores.

Por outro lado, a tabela possibilita encontrarmos uma solução do jogo via equilíbrio de Nash, da mesma forma que fazíamos nos jogos simultâneos do capítulo anterior.

3.4 EQUILÍBRIO DE NASH PARA JOGOS SEQUENCIAIS

Teorema 1. *Todo jogo de informação perfeita (finito) de forma extensiva tem um equilíbrio de Nash de estratégia pura. (SHOHAM; LEYTON-BROWN, 2008)*

Nesse sentido, consideremos um jogo sequencial representado na forma normal. Analisando a matriz de *payoffs* desse jogo, os equilíbrios de Nash serão encontrados. Porém, existem casos em que os equilíbrios de Nash encontrados não correspondem às melhores decisões em cada um dos nós correspondentes, como veremos a seguir.

Exemplo 11. *Consideremos a situação analisada no Jogo da Entrada, cuja árvore de jogo está exposta na figura 1. Temos que a representação na forma normal é:*

Desafiante/Dominante	Luta	Acomoda
Entra	-1, 2	3, 7
Não Entra	0, 10	0, 10

Tabela 21: Forma normal do Jogo da Entrada

Nesta matriz, temos que os *payoffs* das combinações de estratégias $\{Não\ Entra, Luta\}$ e $\{Não\ Entra, Acomoda\}$ possuem o mesmo *payoff* $(0, 10)$. Isso acontece pelo fato de que se a empresa Desafiante optar pela estratégia $\{Não\ Entra\}$, a empresa Líder não terá opção de escolha. Optando pela estratégia $\{Luta\}$ ou $\{Acomoda\}$ a recompensa será $R\$10.000.000,00$ para a empresa Dominante e nenhum lucro ou prejuízo para a empresa Desafiante.

Analisando puramente a matriz de *payoffs* apresentada, encontramos dois equilíbrios de Nash para este jogo: $\{Não\ Entra, Luta\}$ e $\{Entra, Acomoda\}$.

Porém, em relação ao equilíbrio de Nash $\{Não\ Entra, Luta\}$, temos que a empresa Líder optaria pela estratégia $\{Luta\}$ o que não faz muito sentido em uma situação prática, pois trata-se de uma estratégia dominada para esta empresa. Assim, temos um exemplo de equilíbrio de Nash com estratégias puras que não faz sentido quando pensamos na situação concreta.

(FIANI, 2009) diz que obter algum equilíbrio no qual não faz sentido para a situação dá-se pelo fato de que o equilíbrio de Nash tende a gerar um número excessivo de equilíbrios em um jogo sequencial de informação perfeita.

Vemos que no equilíbrio de Nash $\{Não\ Entra, Luta\}$ a empresa Líder faz uma escolha de forma irracional, o que não condiz com a nossa busca pela solução do jogo. Assim, é preciso refinar a noção de Equilíbrio de Nash em busca de um perfil de estratégias com as melhores escolhas para ambos os jogadores, independente da ordem em que são feitas as escolhas.

Trata-se da noção que equilíbrio de Nash perfeito para subjogos, que será apresentada posteriormente. Para entender esse novo conceito, é necessário apresentar inicialmente a noção de subjogo.

3.5 SUBJOGO

Em uma árvore de jogo, existem algumas partes que podem ser vistas como jogos reduzidos, satisfazendo as condições necessárias para ser uma árvore de jogo. Essas partes são os subjogos do jogo em análise.

Para uma melhor compreensão, (DUTTA, 1999) define um subjogo da seguinte forma:

Definição 6. *Um subjogo é uma parte da árvore de jogo formada por uma coleção de nós e ramos que satisfaz três propriedades:*

1. *Inicia em um único nó de decisão;*
2. *Contém cada sucessor deste nó. (Lembrando que um sucessor para o nó x é todo nó que pode ser alcançado seguindo uma sequência de ramificações originadas em x;)*
3. *Se contiver qualquer parte de um conjunto de informações, ele contém todos os nós nesse conjunto de informações.*

Ao falarmos de conjunto de informações, este conceito refere-se mais para jogos de informação imperfeita, o que não é o caso de nosso estudo. Assim, nossos conjuntos de informação serão sempre unitários, contendo então todos os nós necessários.

Em busca de um melhor entendimento do conceito de subjogo, vamos analisar o exemplo a seguir:

Exemplo 12. *Consideremos a seguinte árvore de jogo, representando uma situação de interação estratégica de jogo sequencial na forma extensiva:*

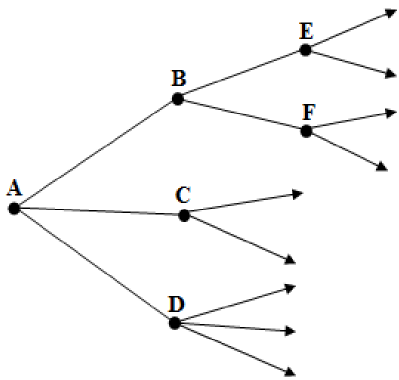

Figura 3: Exemplo geral para encontrar os subjogos

Temos como objetivo encontrar todos os subjogos desse jogo. Neste exemplo simplificado, não especificamos as ações e as recompensas dos jogadores, pois nosso objetivo aqui é tão somente localizar os subjogos.

Os nós estão identificados como: A, B, C, D, E, F. Para identificar os subjogos, andamos de trás para a frente na árvore do jogo. Sabendo disso, o primeiro passo consiste em identificar um grupo de nós terminais que sejam precedidos por um mesmo nó. Seguindo, é preciso analisar se este nó predecessor comum satisfaz a definição de subjogo.

Se este nó satisfaz as condições, encontramos o primeiro subjogo do jogo em questão. A partir disso, verificamos o nó antecessor do nó analisado anteriormente, e assim sucessivamente. Este procedimento termina ao encontrarmos o nó inicial, e de fato, pela definição apresentada, o jogo inteiro é um subjogo de si mesmo.

Considerando a árvore do jogo exposta na figura 3, vamos começar pelos três nós terminais do ramos inferior. O nó que antecede esses três nós terminais é o nó D. Vamos verificar se D satisfaz a definição de subjogo:

- Condição número 1: ao se iniciar em D, o possível subjogo se inicia em apenas um nó de decisão. Portanto esta condição é satisfeita.

- Condição número 2: um subjogo que se inicia em D conterá todos os nós que se seguem de D, ou seja, os três nós terminais do ramo inferior da árvore. Portanto, esta condição é satisfeita.

- Condição número 3: como um subjogo iniciado em D contém necessariamente este nó, e como D é o único elemento do conjunto de informação que o contém, temos que necessariamente um subjogo que começa em D conterá todos os nós do conjunto de informação. Portanto, temos que esta condição é satisfeita.

Encontramos então, o primeiro subjogo desse jogo. Este subjogo será chamado de Subjogo 1 ou por conveniência, chamaremos de SJ 1. Na figura a seguir temos o SJ 1 em destaque:

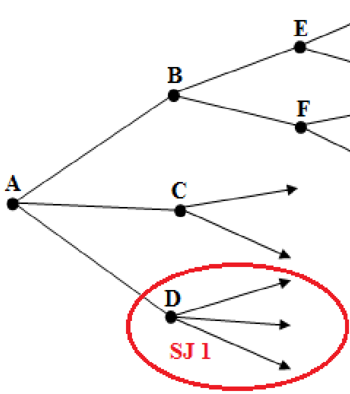

Figura 4: Subjogo 1 do exemplo geral

Repetindo o mesmo processo com o ramo do meio da forma estendida, sendo o ramo que se inicia em C e prossegue para dois nós terminais. Temos que um possível subjogo que inicia em C satisfaz a definição de subjogo, pois:

- Condição número 1: ao começar em C, um possível subjogo está se iniciando em um único nó de decisão.
- Condição número 2: um possível subjogo que se inicia em C conterá todos os nós que se seguem a C, sendo que este subjogo conterá os dois nós terminais que seguem de C.
- Condição número 3: um subjogo que se inicia em C contém necessariamente este nó, e sendo C o único elemento do conjunto de informação que contém C, necessariamente tem-se que o subjogo que se inicia em C contém todos os nós do conjunto de informação que contém C.

Encontramos o segundo subjogo desse jogo, sendo este denominado Subjogo 2 (SJ 2) e destacado na figura a seguir:

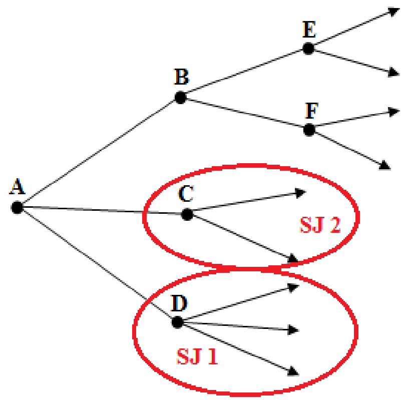

Figura 5: Subjogo 2 do Exemplo Geral

Vamos agora analisar se a parte da árvore que segue do nó B é um subjogo. Para isso precisamos verificar as condições da definição de subjogo:

- Condição número 1: ao começar em B, um possível subjogo iniciará em um único nó, portanto satisfaz esta condição.
- Condição número 2: ao começar em B, esta parte da árvore do jogo conterá todos os nós que seguem do nó B. Portanto, esta condição também está satisfeita.
- Condição número 3: considerando o conjunto de informação que contém C. Como este conjunto de informação é unitário, apenas o C pertence a ele. Dessa forma, temos que esta condição também é satisfeita.

Encontramos então, o terceiro subjogo dessa árvore de jogo. Este está destacado na figura a seguir e é denominado como Subjogo 3 ou SJ 3.

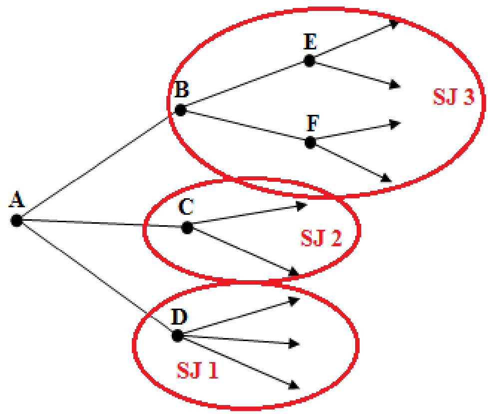

Figura 6: Subjogo 3 do Exemplo Geral

Seguindo, vamos analisar o que se segue a partir do nó B. Temos que deste, seguem dois ramos que dão origem aos nós E e F terminando em dois pares de nós terminais.

Levando em consideração o nó E e os dois nós terminais que seguem dele, temos que esta parte da árvore do jogo será mais um subjogo. De forma análoga, temos que a parte da árvore de jogo que se segue do nó de decisão F também forma um subjogo. Assim, encontramos os subjogos SJ 4 e SJ 5, conforme estão destacados na figura a seguir:

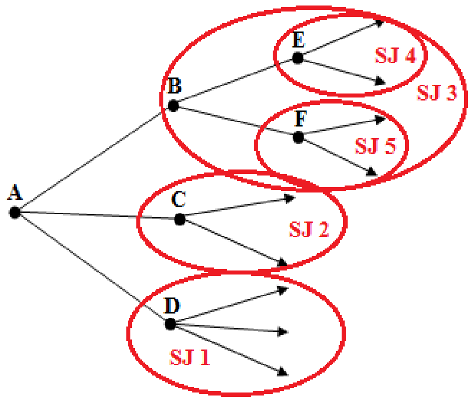

Figura 7: Subjogos 4 e 5 do Exemplo Geral

Com as condições da definição de subjogo, temos que este jogo ainda possui um subjogo: o jogo em toda sua totalidade. Dessa forma, temos que o jogo em um todo é o sexto e último subjogo e ainda, denominado por Subjogo 6 ou SJ 6. Na figura abaixo encontramos todos os subjogos desse jogo em destaque:

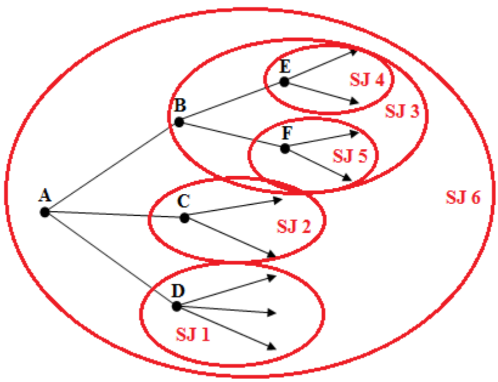

Figura 8: Todos os subjogos do Exemplo Geral

Exemplo 13. *Considerando o Jogo da Entrada, temos que os subjogos estão destacados na árvore de jogo à seguir:*

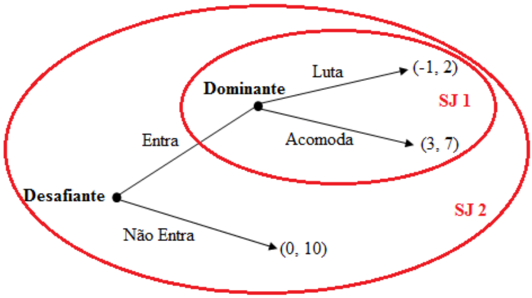

Figura 9: Subjogos do Jogo da Entrada

3.6 EQUILÍBRIO DE NASH PERFEITO EM SUBJOGOS

Como já vimos em alguns exemplos acima, existem jogos com mais do que um equilíbrio de Nash. Com os conceitos de equilíbrio de Nash e de Subjogo já estabelecidos, podemos refinar o conceito de equilíbrio de Nash para os jogos sequenciais, pensando em considerar como solução do jogo apenas os perfis que correspondem de fato às melhores respostas dos jogadores em todas as situações.

Essa reformulação trará então o conceito de equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, que apresentaremos a seguir. Nesse sentido, (FIANI, 2009) define:

Definição 7. *Uma combinação de estratégias é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se ela é um equilíbrio de Nash para o jogo em sua totalidade e se esta combinação é um equilíbrio de Nash para cada subjogo.*

Um possível processo para encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (também denominado de equilíbrio perfeito), ocorre da seguinte forma:

- 1º passo: Reescrevemos o jogo sequencial da forma extensiva para a forma normal (matriz de *payoffs*).

- 2º passo: Com a matriz de *payoffs*, é preciso identificar todos os equilíbrios de Nash. Isso é necessário pelo fato de que os candidatos à equilíbrios perfeitos serão os equilíbrios de Nash.

- 3º passo: Identificar todos os subjogos que existem na forma extensiva do jogo em questão.

- 4º passo: Testar todos os equilíbrios de Nash em cada subjogo correspondente. Se o equilíbrio de Nash for equilíbrio de Nash para cada subjogo, concluímos que este será um equilíbrio de Nash perfeito para subjogos.

A seguir, vamos discutir esse processo em alguns exemplos, visando identificar quais equilíbrios de Nash dos jogos em questão são também equilíbrios perfeitos.

Exemplo 14. *Em relação ao Jogo da Entrada, já vimos anteriormente que:*

- *Pelo exemplo 11, temos que o jogo da entrada possui duas combinações que resultam em equilíbrios de Nash: {Não Entra, Luta} e {Entra, Acomoda}.*

- *Os subjogos desse mesmo jogo foram encontrados, conforme pode ser visto na figura 9.*

Vamos encontrar o equilíbrio perfeito do jogo. Nesse sentido, precisamos verificar se os equilíbrios de Nash já encontrados são equilíbrios de Nash para cada subjogo. Como já encontramos os dois subjogos, vamos testar cada equilíbrio de Nash em SJ 1 e SJ 2:

- Para SJ 1: Temos que o Subjogo SJ 1 inicia no nó em que a empresa Dominante está decidindo se irá lutar ou acomodar-se, após a empresa Desafiante ter optado pela ação de Entrar no mercado. Dessa forma, precisamos analisar as duas combinações de estratégias {*Não Entra, Luta*} e {*Entra, Acomoda*} e encontrar a combinação que será a melhor escolha para as empresas em relação ao SJ 1.

  Como já foi visto, a empresa Desafiante optou por entrar no mercado. Assim, a combinação de estratégias que é um equilíbrio de Nash e será um equilíbrio de Nash também para o SJ 1 será {*Entra, Acomoda*}. Não faria sentido a estratégia {*Não Entra, Luta*} ser o equilíbrio de Nash para o SJ 1, pois lutar não é a melhor resposta para o jogador 2 neste nó de decisão.

- Para SJ 2: Agora, vamos analisar o SJ 2, ou seja, o jogo como um todo. Temos que os dois equilíbrios de Nash encontrados através da análise do jogo na forma normal, são também equilíbrios de Nash para SJ 2. Isso ocorre pelo fato de que os dois equilíbrios de Nash encontrados são as melhores respostas para todo o desenvolvimento do jogo. Isso foi visto pela forma normal, analisando os *payoffs* referentes a cada jogador.

Portanto, como a combinação de estratégias $\{Entra,\ Acomoda\}$ é um equilíbrio de Nash para cada subjogo, temos que este será o equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do Jogo da Entrada.

Exemplo 15. *Consideremos a seguinte árvore de jogo que representa uma situação de interação estratégica entre dois jogadores, no qual as ações disponíveis para cada um estão expostas nos ramos e por fim, os payoffs nos nós terminais:*

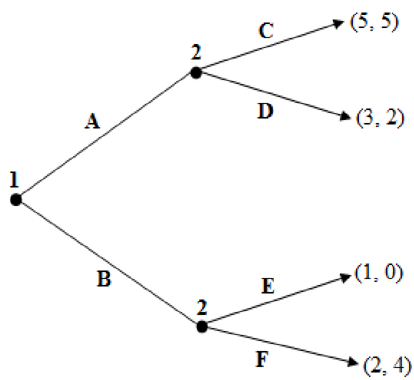

Figura 10: Representação na forma extensiva

Vamos encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogo para esta situação, pelo mesmo processo descrito anteriormente:

- 1º passo: Para encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogo, é preciso encontrar os equilíbrios de Nash do jogo, sendo assim, vamos representá-lo na forma normal (matriz de *payoffs*).

- 2º passo: Com a matriz de *payoffs*, fazendo a análise do jogo na forma normal, temos que os equilíbrios de Nash são dados pelas combinações de estratégias $\{A,(C,E)\}$ e $\{A,(C,F)\}$.

Jogador 1	Jogador 2			
	C, E	C, F	D, E	D, F
A	5, 5	5, 5	3, 2	3, 2
B	1, 0	2, 4	1, 0	2, 4

Tabela 22: Matriz de *payoffs*

- 3º passo: Agora, vamos identificar os subjogos que existem na forma extensiva desse jogo, para então no próximo passo encontrarmos o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

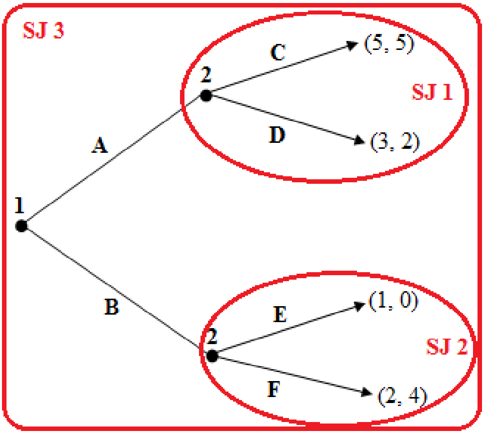

Figura 11: Subjogos

- 4º passo: Já sabendo quais são os subjogos e os equilíbrios de Nash (pela forma normal), através da análise destes, vamos encontrar o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos do jogo em questão.

Considerando o equilíbrio de Nash $\{A, (C, E)\}$, temos que essa combinação não pode ser o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, pois a condição de ser um equilíbrio de Nash para cada subjogo não é satisfeita. Isso acontece em relação ao SJ 2, pois a estratégia $\{E\}$ não é a melhor escolha para o jogador 2 .

Por outro lado, vemos que $\{A, (C, F)\}$ é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Isto porque ele satisfaz as condições necessárias, sendo elas: ser um equilíbrio de Nash em sua totalidade e ser um equilíbrio de Nash para cada subjogo.

Ressaltamos ainda que todo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é, ao mesmo tempo, um equilíbrio de Nash, pois o jogo inteiro é um subjogo de si mesmo. Porém, nem todo equilíbrio de Nash em um jogo sequencial é, necessariamente, um equilíbrio perfeito em subjogos, o que foi confirmado pela análise dos dois exemplos anteriores.

No entanto, o processo de transformar um jogo sequencial da forma extensiva para a forma normal, encontrar os equilíbrios de Nash, encontrar os subjogos e verificar qual equilíbrio de Nash satisfaz as condições para ser um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos pode ser uma tarefa bem demorada, dependendo do tamanho do jogo que estamos considerando.

Com o intuito de facilitar esta busca pelo equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, apresentaremos no próximo capítulo um outro método, denominado *Método de Indução Reversa.*

4 A INDUÇÃO REVERSA COMO MÉTODO DE SOLUÇÃO DE UM JOGO NA FORMA EXTENSIVA

Como mencionamos no capítulo anterior, todo jogo sequencial possui pelo menos um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Mencionamos também que esse equilíbrio pode ser encontrado analisando o jogo correspondente na forma normal, bem como os subjogos respectivos.

Neste capítulo vamos estudar uma forma mais eficiente de encontrar esse equilíbrio. Trata-se do *Método de Indução Reversa*. Este método é aplicado em um jogo sequencial analisando a árvore de jogo de trás para frente, indo dos *payoffs* dos jogadores até o primeiro nó de decisão que aparece isoladamente, e procurando identificar em cada etapa quais as melhores opções para cada jogador, como será visto a seguir. Para este capítulo, a principal referência utilizada foi (PRISNER, 2014).

4.1 O MÉTODO DA INDUÇÃO REVERSA

Em suma, o método de indução reversa permite encontrar o equilíbrio perfeito em subjogos analisando a árvore de jogo de trás para frente. O processo de aplicação desse método ocorre da seguinte forma:

- Tome qualquer nó que venha imediatamente antes dos nós terminais, ou seja, após cada movimento decorrente deste nó, o jogo termina. Como estamos supondo que o jogador que toma a decisão neste nó age de forma racional, temos que este irá escolher a ação que lhe dê maior *payoff*. Assim, selecione este movimento que será escolhido pelo jogador da vez.

- Atribuindo o *payoff* associado a esta mudança para o nó em questão, desconsidere todos os movimentos deste nó, reduzindo o jogo em questão. Agora, neste "‘novo jogo”, este nó comporta-se como um nó terminal.

- Repita este procedimento até que a origem seja o único nó restante. O resultado será dado por um perfil de estratégias, sendo estas as ações que estão no caminho percorrido até encontrar o nó inicial da árvore.

A seguir, é apresentado o algoritmo utilizado para a aplicação da indução reversa. A sigla E.N.P.S refere-se ao equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Este algoritmo foi retirado de (MANEA, 2016):

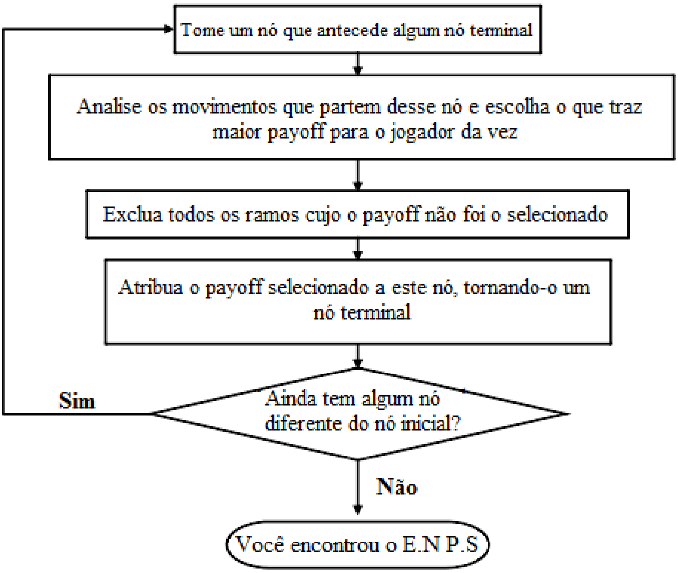

Figura 12: Algoritmo da Indução Reversa

Ainda, existem casos em que ao analisarmos dois ramos distintos que representam ações distintas, um determinado jogador possui os dois *payoffs* com o mesmo valor. Sendo assim, faremos a análise do jogo de outra forma: tomamos uma das ações em questão e analisamos o jogo em um todo como se essa ação fosse a escolhida pelo jogador. Repetimos esse processo para os outros ramos cujos *payoff* são os mesmos. Dessa forma, o jogo pode ter mais do que um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Exemplo 16 (Voltando a analisar o jogo das empresas de vans)**.** *Da mesma forma que no exemplo 10, duas empresas que atuam na produção de vans - Inovadora e Líder - decidem, respectivamente e sequencialmente, se lançam ou não um novo modelo e se mantém ou reduz o preço do seu produto. Assumimos também os mesmos payoffs descritos no capítulo anterior.*

A partir disso, temos que a árvore de jogo que representa essa situação é dada da seguinta forma:

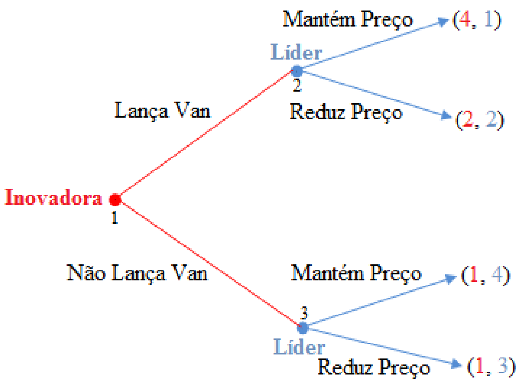

Figura 13: Árvore de jogo - Inovadora *versus* Líder

Já enumerados os nós de decisão da árvore, vamos aplicar o método de indução reversa para encontrarmos a solução do jogo. Começando pelo nó de decisão 2, referente à empresa Líder. Dessa forma, precisamos levar em consideração os *payoffs* referentes a esse jogador. Se a empresa Líder optar pela ação $\{Reduz\ Preço\}$, temos que o *payoff* é maior para a empresa Líder. Portanto, se a empresa Inovadora optar pela ação $\{Lança\ Van\}$, a empresa Líder irá escolher a ação $\{Reduz\ Preço\}$. Atualizamos então a árvore do jogo da seguinte maneira:

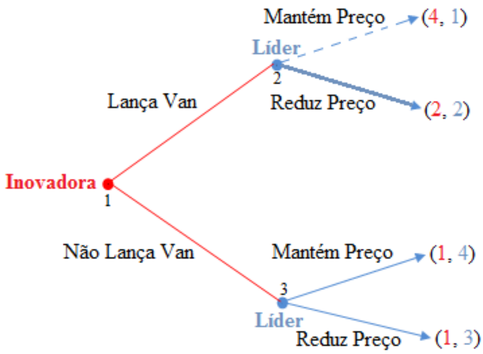

Figura 14: 1ª rodada da indução reversa (Inovadora *versus* Líder)

De forma análoga ao que fizemos em relação ao nó de decisão 2, vamos fazer com o nó de decisão 3. Pelos *payoffs* referentes à empresa Líder, temos que escolhendo a ação $\{Mantém\ Preço\}$, ela ganhará mais do que escolhendo a ação $\{Reduz\ Preço\}$.

Portanto, se a empresa Inovadora escolher a ação $\{Não\ Lança\ Van\}$, a empresa Líder escolherá $\{Mantém\ Preço\}$. Dessa forma, a árvore de jogo será:

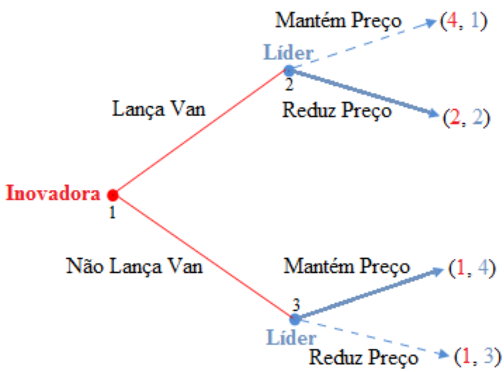

Figura 15: 2ª rodada da indução reversa (Inovadora *versus* Líder)

Por último, vamos analisar o nó de decisão 1, sendo um nó de escolha para a empresa Inovadora. Para escolher a melhor ação, a empresa Inovadora precisa levar em consideração as conclusões tiradas nas duas etapas anteriores de aplicação de indução reversa. Justificamos essa ideia pelo fato de que a empresa Inovadora presume que a empresa Líder agirá de forma racional.

Como vimos, se ela escolher a ação $\{Lança\ Van\}$, pela escolha da empresa Líder, a empresa Inovadora terá *payoff* 2. Ainda, se ela escolher a ação $\{Não\ Lança\ Van\}$, pela escolha da empresa Líder, a empresa Inovadora terá *payoff* 1. Assim, para maximizar seus ganhos, a empresa Inovadora escolherá a ação $\{Lança\ Van\}$. Portanto, a árvore de jogo com as melhores escolhas destacadas é:

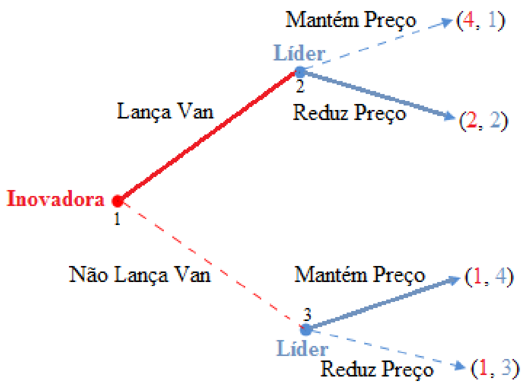

Figura 16: 3ª rodada da indução reversa (Inovadora *versus* Líder)

Com essa análise, temos que o equilíbrio de Nash perfeito em subjogos pela indução reversa é $\{Lança\ Van,\ Reduz\ Preço\}$ com *payoffs* $(2, 2)$ para a empresa Inovadora e para a empresa Líder, respectivamente.

Em seguida, apresentamos mais um exemplo prático da aplicação deste método de resolução de jogos na forma extensiva.

Exemplo 17 (Leilão). *Davi e Lucas estão participando de um leilão de um determinado item. Esse leilão possui um número máximo de 9 lances. Assumimos que o item em questão possui um valor econômico e/ou sentimental diferente para os participantes: para Davi, o item vale $R\$25,00$, e para Lucas vale $R\$35,00$. Em cada um dos lances, os jogadores possuem duas estratégias disponíveis: Apostar ou Passar. Se o jogador decidir pela estratégia Apostar ele aumenta $R\$10,00$ o valor do lance. Se o jogador optar pela estratégia Passar, o outro jogador* *é quem compra o objeto, porém ambos pagam o valor de sua última aposta. Veja então que, nesse tipo de leilão, um dos jogadores pode perder dinheiro, ficando sem o item leiloado.*

Veremos que a partir de um certo instante os payoffs podem ficar negativos, representando que o valor apostado pelo jogador é maior do que o valor que o item representa para este jogador. Sabendo dessas regras, e supondo que a tendência é que os jogadores façam suas escolhas de forma racional, o leilão deve acabar em qual lance?

A seguir, temos a árvore de jogo representando o jogo na forma extensiva:

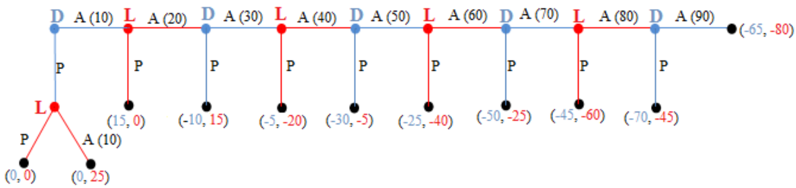

Figura 17: Representação na forma extensiva (Jogo do Leilão)

Na árvore de jogo, temos que:

- D: nós de decisão referentes ao Davi
- L: nós de decisão referentes ao Lucas
- A: ramos referentes à ação {Apostar}
- P: ramos referentes à ação {Passar}

O *payoff* é dado em relação ao valor que cada jogador deu para o item. Se o *payoff* for positivo, significa que o jogador estará lucrando esta quantidade sobre a compra do item, considerando o valor econômico e sentimental descrito no problema. Assim, se o *payoff* for negativo, temos que o jogador irá pagar esta quantidade a mais do que o valor respectivo, ou perder essa quantidade em dinheiro ficando sem o item leiloado.

Dessa forma, temos que o jogo tende a terminar nas primeiras rodadas, pois, quanto mais o jogo avança do número máximo de rodadas, mais dinheiro os jogadores podem perder.

Para aplicarmos a indução reversa na árvore de jogo em busca da rodada que o jogo tende a terminar, vamos enumerar cada nó de decisão, deixando a árvore de jogo da seguinte forma:

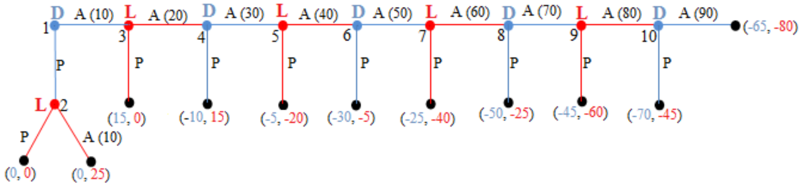

Figura 18: Enumeração dos nós de decisão (Jogo do Leilão)

Analisando os ramos que seguem do nó de decisão 10, temos que a melhor opção para Davi será $\{Apostar$ (90)$\}$, pois ele irá perder menos dinheiro do que se optar por $\{Passar\}$ e ainda ficará com o item leiloado. A árvore de jogo fica da seguinte forma:

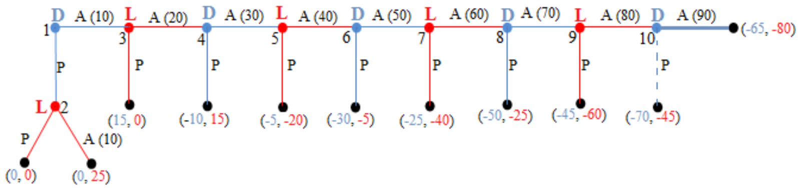

Figura 19: 1ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Analisando os ramos que seguem imediatamente do nó de decisão 9, temos que para Lucas a melhor opção será $\{Passar\}$, pois irá gastar menos do que se optar por $\{Apostar$ (80)$\}$. Assim, temos:

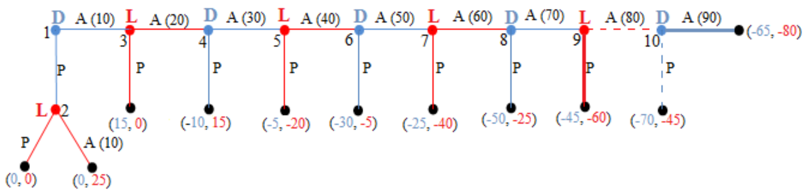

Figura 20: 2ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Analisando o nó de decisão 8, temos que Davi optará por $\{Apostar$ (70)$\}$ garantindo menor valor e ainda ficando com o item leiloado. Então:

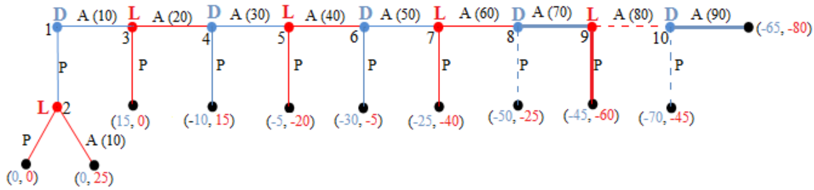

Figura 21: 3ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Pelo nó de decisão 7, temos que a melhor opção para Lucas será $\{Passar\}$, garantindo menor prejuízo, pois se optar por $\{Apostar\ (60)\}$ ele acabará tendo que pagar mais, e além disso pela tendência de escolha nos nós posteriores não deve ficar com o item.

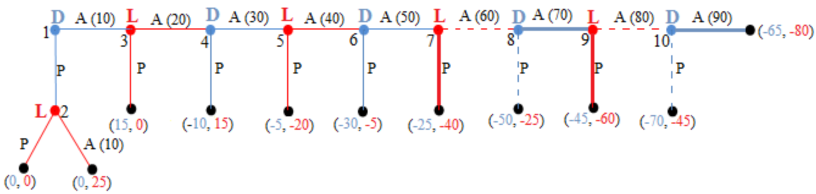

Figura 22: 4ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Analisando o nó de decisão 6 pertencente ao jogador Davi, segue que a melhor opção para ele será $\{Apostar\ (50)\}$, pois na próxima rodada Lucas irá optar por $\{Passar\}$. Assim, Davi ficará com o item leiloado e ainda pagará menos do que se optar por $Passar$ em 6. A árvore de jogo ficará da seguinte forma:

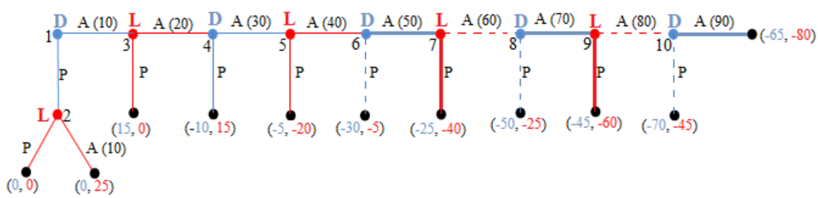

Figura 23: 5ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Pela análise do nó de decisão 5, temos que Lucas optará por $\{Passar\}$. Assim, Davi comprará o item e Lucas pagará menos pelo item do que se optar por $\{Apostar\ (40)\}$.

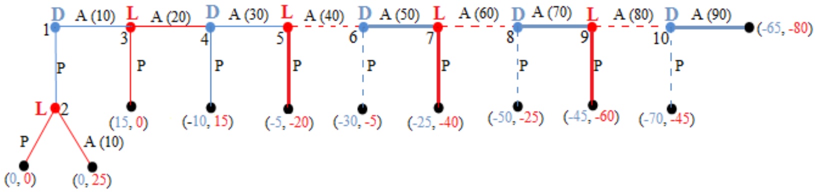

Figura 24: 6ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Agora, analisando o nó de decisão 4, Davi optará por $\{Apostar\ (30)\}$, fazendo com que Lucas optará por $\{Passar\}$ na próxima rodada. Assim, Davi ficará com o item e ainda pagará menos do que se optar por $\{Passar\}$.

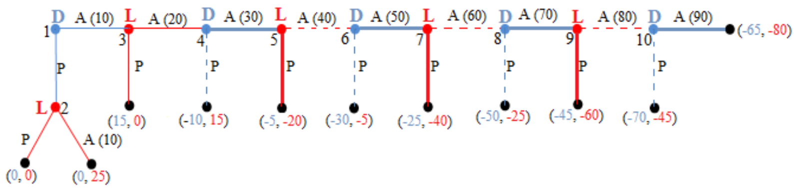

Figura 25: 7ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Pelo nó de decisão 3, onde Lucas faz sua escolha, temos que este optará por $\{Passar\}$ fazendo com que Davi compre o item. Caso contrário, ele acabará pagando um valor e não ficará com o item, da mesma forma.

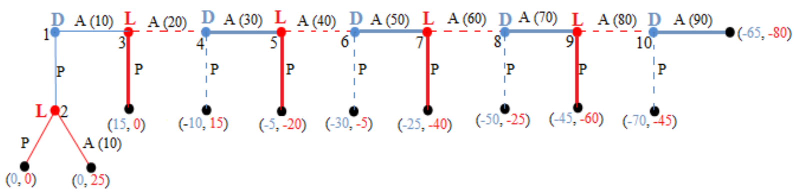

Figura 26: 8ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Analisando o nó de decisão 2, Lucas optará por $\{Apostar\ (10)\}$, pois ficará com a peça pagando apenas $R\$10,00$, valor abaixo do que ele diz pagar ao máximo pelo item.

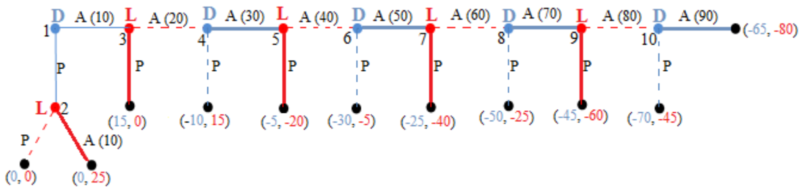

Figura 27: 9ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Agora, por último temos o nó de decisão 1, sendo este o nó inicial da árvore. Davi optará por $\{Apostar\ (10)\}$ já sabendo que Lucas optará por $\{Passar\}$ na próxima rodada. Assim, Davi pagará menos do que o valor dado por ele para o item e ainda, acabará ficando com o item leiloado.

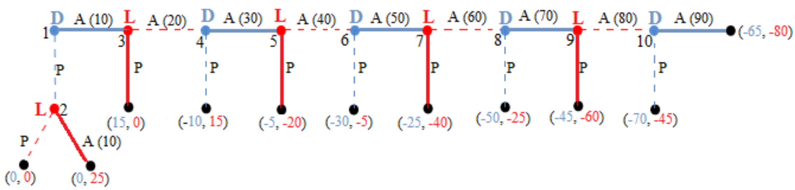

Figura 28: 10ª rodada da indução reversa (Jogo do Leilão)

Concluímos então que, segundo nossa intuição inicial, o leilão deve ser finalizado nos nós iniciais, mais precisamente no nó de decisão 3, dando *payoffs* $(15, 0)$ para Davi e Lucas, respectivamente. De fato, as recompensas dos jogadores acabam ficando negativas depois de uma determinada rodada. Isso significa que os jogadores teriam que pagar um valor muito maior do que o item representa de fato para eles, o que não compensa se estes agirem racionalmente.

4.2 INDUÇÃO REVERSA E O EQUILÍBRIO DE NASH

Para destacar a importância do método de indução reversa como forma de descobrir a solução de um jogo na forma extensiva, consideraramos que por meio deste método sempre encontramos pelo menos um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Nesse contexto, destacamos um importante resultado cuja demonstração pode ser encontrada em (EBBINGHAUS; KANAMORI; FRA-

SER, 2010):

Teorema 2 (Zermelo)**.** *Todo jogo finito de informação perfeita tem um equilíbrio de Nash de estratégia pura que pode ser encontrado por indução reversa. Além disso, se nenhum jogador tiver os mesmos payoffs em quaisquer dois nós terminais, a aplicação da indução reversa encontra um único equilíbrio de Nash.*

Ainda, vale que em um jogo sequencial de informação perfeita, uma combinação de estratégias é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se, e somente se, essa combinação é um equilíbrio de Nash que pode ser encontrado pelo método da indução reversa (FIANI, 2009).

4.3 JOGOS NA FORMA EXTENSIVA ENVOLVENDO ALEATORIEDADE

Nesta seção, vamos usar algumas noções de Teoria de Probabilidade, tais como distribuição de probabilidade, valor esperado ou esperança de uma variável aleatória, entre outras. Mais detalhes sobre essas noções podem ser encontrados em (MEYER, 1987), (ROSS, 2010) e (JAMES, 2015).

Como extensão dos jogos sequenciais, temos os jogos sequenciais que envolvem alguns elementos aleatórios. Isso nos dá uma mudança em nossa árvore de jogo. Antes tínhamos apenas os nós que indicavam os momentos de tomadas de ação dos jogadores e os nós terminais. Agora, temos também os nós aleatórios, que podem incluir o nó inicial, dependendo da situação.

Um nó (ou vértice) aleatório ocorre quando a sequência do jogo depende de um certo evento aleatório, com uma distribuição de probabilidade previamente definida. São exemplos desses possíveis eventos aleatórios o lançamento de uma moeda, pontuação de um dado, fracasso ou sucesso em uma experiência, entre outros.

Dos nós aleatórios partem ramificações permitindo que ocorra movimentação a partir deles. Nesse sentido, as arestas que se seguem estão associadas a uma probabilidade de alcançar as outras posições a partir da posição aleatória. A soma dessas probabilidades precisa necessariamente somar 1, pois há uma distribuição de probabilidade associada ao nó aleatório. Ainda, como estamos trabalhando com jogos de informação completa, temos que essas probabilidades são conhecidas por todos os jogadores.

Ainda, consideramos que mesmo com o fator aleatoriedade, conseguimos aplicar o método de indução reversa para este tipo de jogo.

Nesse caso, atribuímos os valores esperados dos *payoffs* em cada vértice, agora, considerando também os nós aleatórios.

(PRISNER, 2014) descreve o procedimento da indução reversa para jogos com aleatoriedade da seguinte forma:

1. Iniciando pelo final da árvore, encontre um vértice que não tenha valores de *payoff* associado, mas cujos sucessores tenham. Denote este nó por V.

2. Em V, ou um jogador deverá tomar sua decisão, ou temos um nó aleatório.

    (a) Suponha que em V um jogador X deve tomar sua decisão:

      i. Aqui procedemos como em jogos sequenciais sem aleatoriedade. Identificamos o vértice sucessor que trará maior *payoff* para o jogador X. Este será o nó que o jogador X irá escolher para se mover, desde que sua escolha ocorra de forma racional. Denotamos este nó por W.

      ii. Copie o valor dos *payoffs* de W para V. Voltamos então, ao passo número 1, até que todos os nós tenham valores associados.

    (b) Suponha que V é um nó aleatório:

      i. Nesse caso, existem nós sucessores que podem ser escolhidos dependendo das probabilidades atribuídas a cada um. Portanto, o valor em V para um determinado jogador será a soma dos produtos das probabilidades pelos valores de *payoff* obtido por este jogador nos nós sucessores. Trata-se do valor esperado em relação à distribuição de probabilidade correspondente. Após obter este resultado, é feita a atribuição do valor ao nó aleatório e voltamos então, ao passo 1, até que todos os nós tenham valores associados.

Como estamos tratando ainda de jogos sequenciais finitos com informação perfeita, o Teorema de Zermelo garante a existência de um equilibrio de Nash em jogos com aleatoriedade. A seguir, serão analisados dois exemplos de jogos desse tipo, encontrando o equilíbrio de Nash para cada um deles pelo método da indução reversa.

4.3.1 Jogo do Nim

Dois jogadores, Elisa e Gustavo alternam-se na remoção de uma ou duas pedras. Essas pedras estão expostas em uma mesa, sendo elas em um total de 4 pedras. O vencedor desse jogo será quem retirar a última pedra da mesa. Acontece que, após cada uma das rodadas, ocorre a retirada aleatória de zero ou uma pedra, com probabilidades de p e $1-p$, respectvamente. Neste jogo, assumimos que $p = \frac{1}{2}$. Se o jogo finalizar em um nó aleatório, os *payoffs* são $(0, 0)$. Caso contrário, o ganhador termina com *payoff* 1 e o perdedor finaliza com *payoff* -1.

Para aplicarmos o método da indução reversa em busca do equilíbrio de Nash perfeito em subjogos, construímos inicialmente a árvore de jogo que representa a situação em questão. Então:

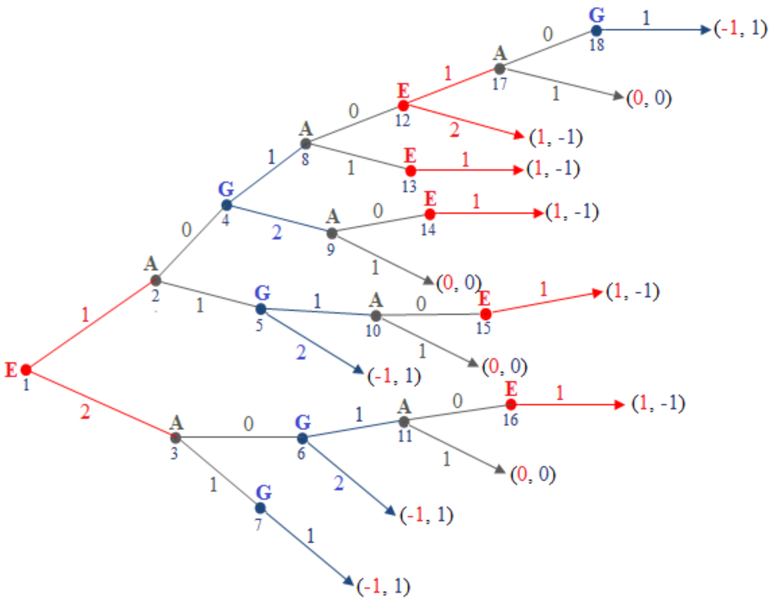

Figura 29: Forma extensiva do Jogo do Nim

Na árvore de jogo, temos que:

- E: nós de decisão referentes à Elisa
- G: nós de decisão referentes à Gustavo

- A: nós de decisão onde ocorre a retirada aleatória

Analisando o nó de decisão 18, Gustavo só tem a opção de retirar 1 pedra da mesa e vencer. Assim, destacamos esse ramo, tendo a seguinte árvore de jogo:

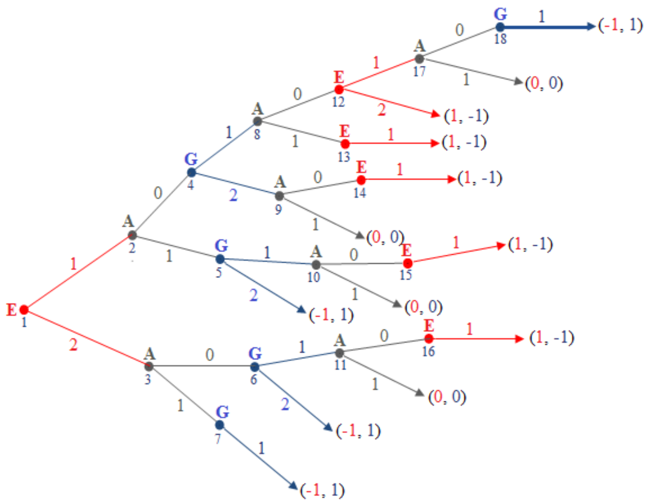

Figura 30: 1ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Levando em consideração o nó de decisão 17, sabemos que este se trata de um nó aleatório. Assim, precisamos calcular o valor esperado do *payoff* para ambos os jogadores. Então:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{2}$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

Assim, conforme o processo descrito, associamos ao nó 17 os *payoffs* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Agora, pelo nó de decisão 12 que corresponde a uma ação de Elisa, esta irá escolher a melhor ação (retirar 1 ou 2 pedras) com base nos payoffs $-\frac{1}{2}$ (referente ao nó 17) ou 1 (referente ao nó 18). Dessa forma, Elisa irá escolher por retirar 2 pedras da mesa, pois isso lhe tratá maior *payoff*. Temos a seguinte árvore de jogo:

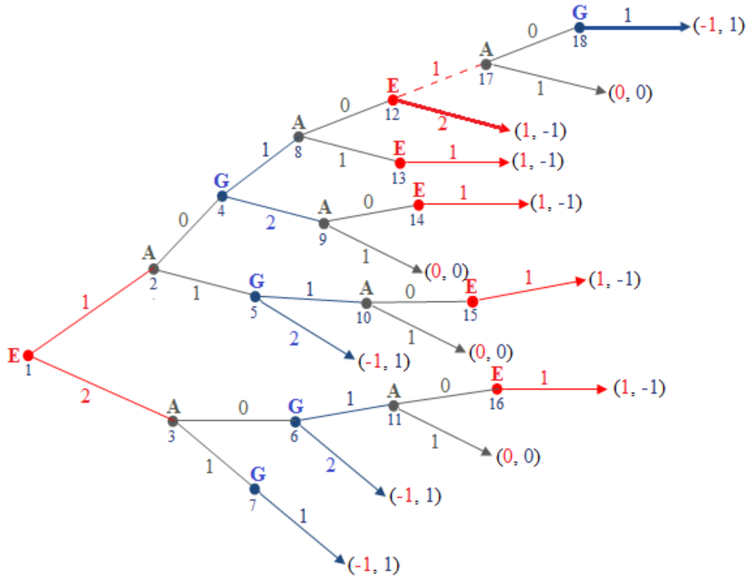

Figura 31: 2ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Analisando o nó 13, onde é a vez de Elisa fazer sua escolha, só lhe resta retirar 1 pedra da mesa e vencer o jogo. Assim, temos a seguinte árvore de jogo:

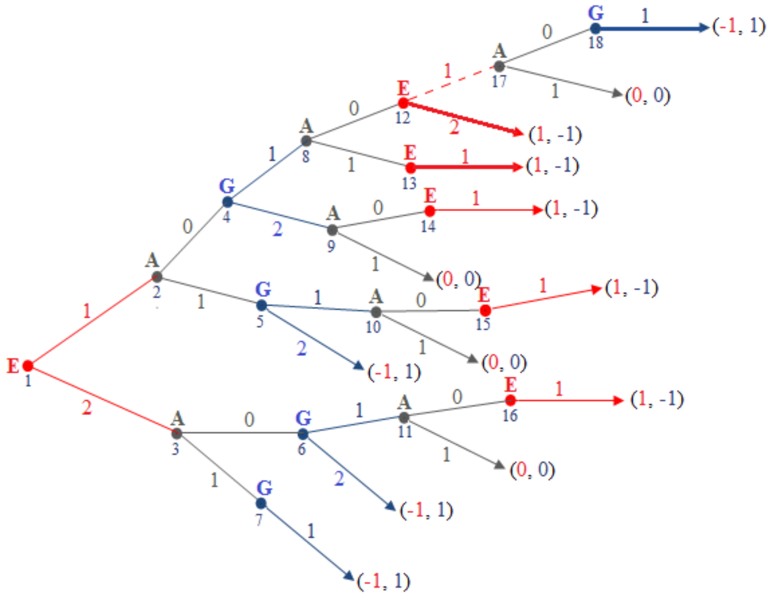

Figura 32: 3ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Da mesma forma, pelo nó de decisão 14, Elisa tem apenas a opção de retirar 1 pedra e vencer o jogo. Temos então a seguinte árvore:

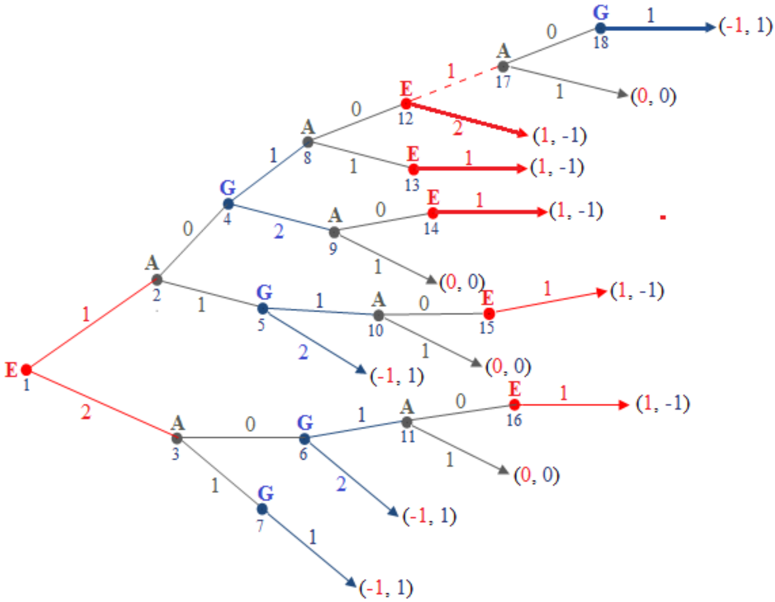

Figura 33: 4ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Levando em consideração o nó 8 que é aleatório, vamos calcular o *payoff* esperado para cada jogador. Já sabemos que, assumindo uma escolha racional, Elisa irá retirar 2 pedras caso não seja retirada pedra no nó aleatório, e Elisa irá retirar uma pedra caso seja retirada uma pedra no nó aleatório. Assim, temos que:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -1$$

Assim, a combinação de *payoffs* que associamos ao nó 8 é $(1, -1)$. De forma análoga, vamos calcular os *payoffs* esperados para ambos os jogadores através do nó aleatório 9. Temos:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (0) = -\frac{1}{2}$$

Dessa forma, temos que a combinação de *payoffs* que vamos associar ao nó aleatório 9 é $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Analisando as combinações fixadas nestes nós aleatórios, na vez de escolha do Gustavo no nó de decisão 4, temos que para ele será melhor a opção de retirar 2 pedras da mesa, pois o *payoff* esperado com esta ação é melhor do que o outro. Temos então a seguinte árvore de jogo atualizada conforme as melhores escolhas dos jogadores:

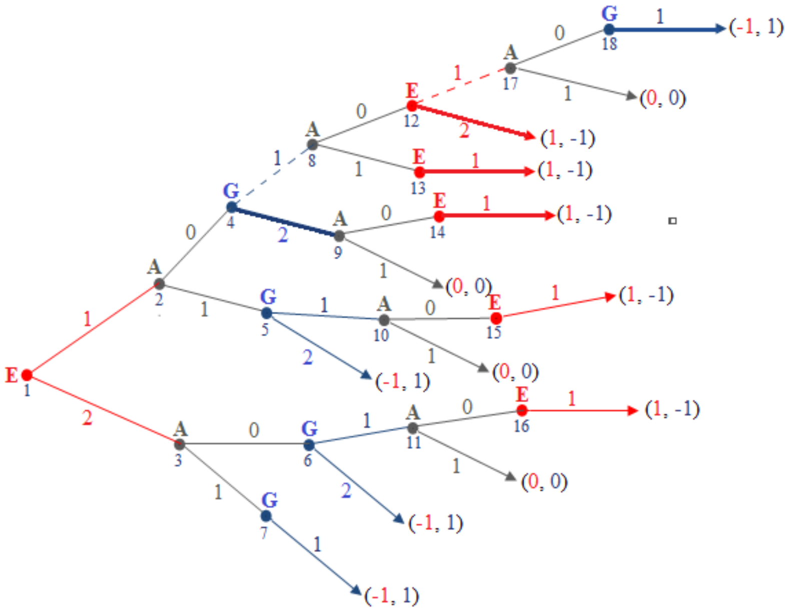

Figura 34: 5ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Levando em consideração o nó de decisão 15 onde Elisa faz sua escolha, temos que sua única opção é retirar 1 pedra da mesa e vencer o jogo. A árvore de jogo fica da seguinte forma:

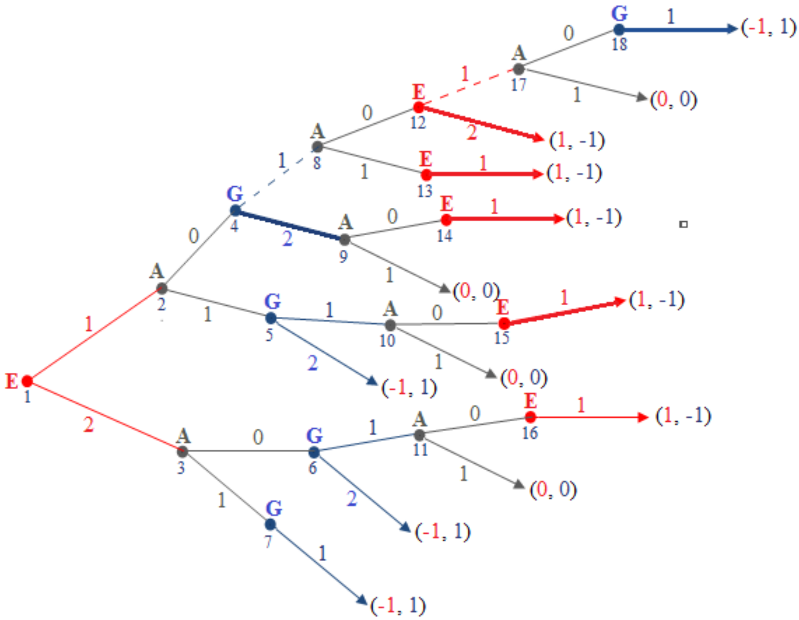

Figura 35: 6ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Precisamos calcular os *payoffs* esperados para os jogadores, em relação ao nó aleatório 10. Então:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{2}$$

Dessa forma, temos que a combinação de *payoffs* para o nó aleatório 10 é $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Sabendo disso, na sua vez de escolher a melhor ação no nó de decisão 5, Gustavo optará por retirar 2 pedras da mesa e ganhar o jogo. A árvore de jogo fica da seguinte forma:

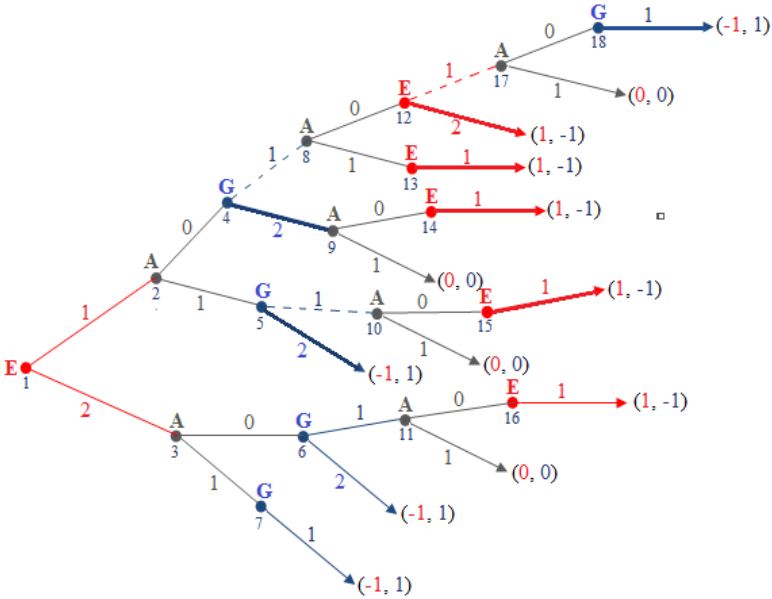

Figura 36: 7ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Conforme vimos, os *payoffs* esperados pelo nó aleatório 9 são $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ para Elisa e Gustavo, respectivamente. Considerando que Gustavo optou pela ação que resulta nessa combinação de *payoffs* e a escolha no nó de decisão 5, vamos encontrar os *payoffs* esperados no nó aleatório 2 para ambos os jogadores:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot (1) = \frac{1}{4}$$

Anexamos então a combinação de *payoffs* $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ao nó aleatório 2.

Continuando em nossa análise, temos que no nó de decisão 16, Elisa só tem a opção de retirar 1 pedra e vencer o jogo. Dessa forma, a árvore de jogo fica da seguinte forma:

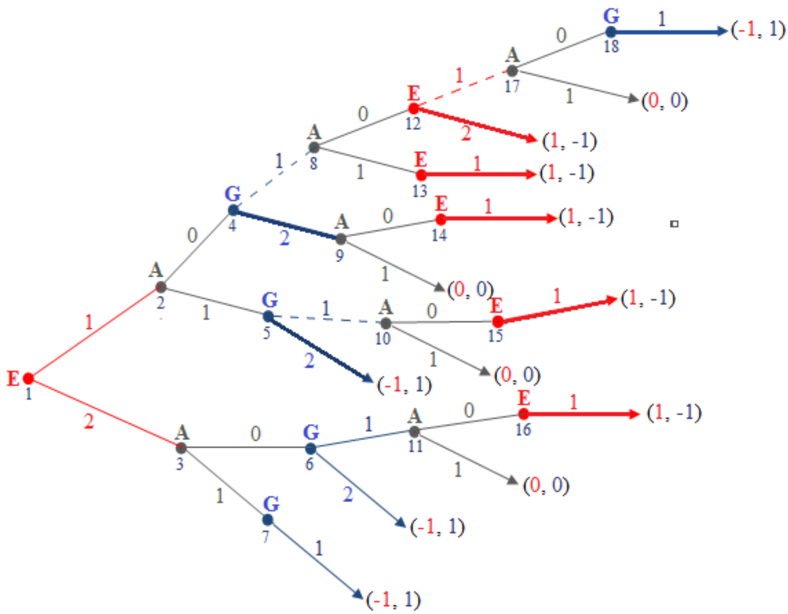

Figura 37: 8ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Levando em consideração os *payoffs* que se seguem dos ramos referentes ao nó aleatório 11, temos que os *payoffs* esperados são:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{2}$$

Fixando essa combinação de *payoffs* ao nó 11, temos que Gustavo em seu nó de decisão 6 optará pela ação de retirar 2 pedras da mesa, pois isso lhe trará a vitória do jogo. Destacamos esse ramo, obtemos a seguinte árvore de jogo:

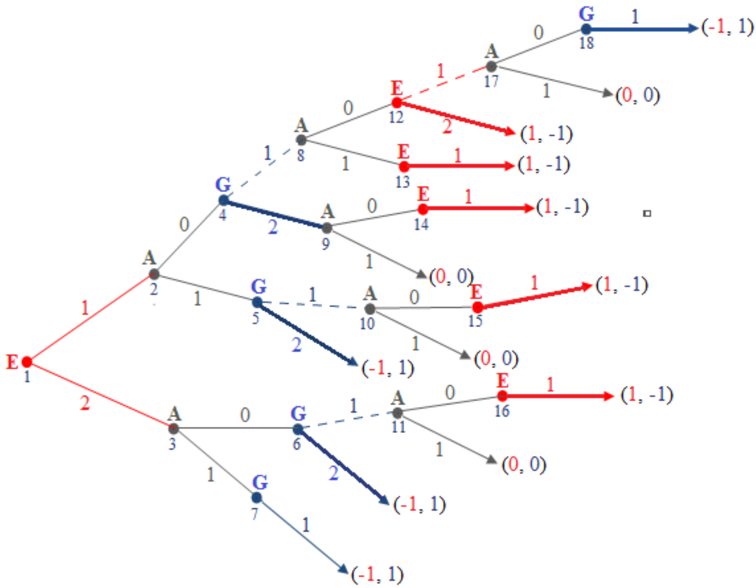

Figura 38: 9ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Ainda em relação à Gustavo, temos que no nó de decisão 7, este possui apenas a opção de retirar 1 pedra da mesa e vencer o jogo. Assim, a árvore de jogo será:

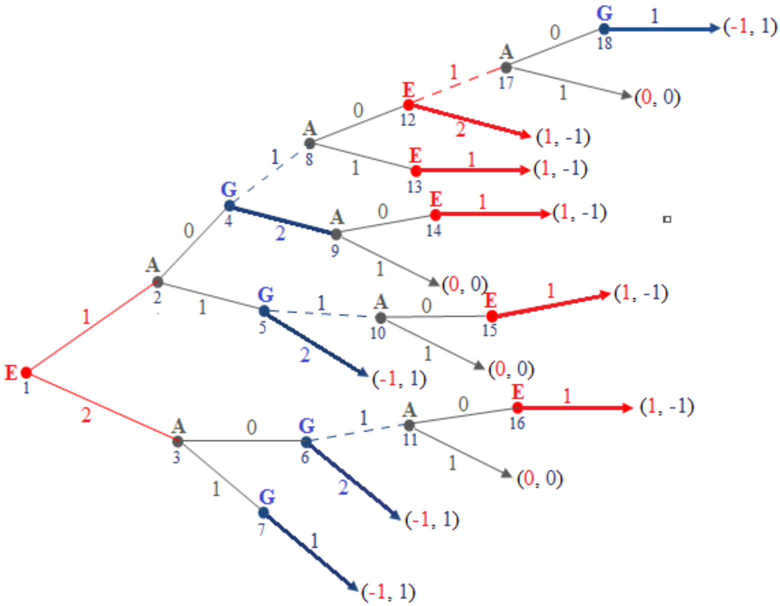

Figura 39: 10ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Com isso, usando o mesmo procedimento, vamos encontrar os *payoffs* esperados pelos jogadores em relação ao nó aleatório 3:

- Para Elisa:

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -1$$

- Para Gustavo:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1) = 1$$

Temos então a combinação de *payoffs* $(-1, 1)$ que será anexada ao nó aleatório 3 para então Elisa fazer sua escolha.

Por último temos a escolha da Elisa no nó inicial 1 através da análise das combinações de *payoffs* esperados pelos nós 2 e 3, que são $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ e $(-1, 1)$ respectivamente. Assim, temos que Elisa escolherá a ação de retirar 1 pedra da mesa, pois terá mais chance de vencer o jogo com essa ação.

Com isso, a árvore de jogo fica da seguinte forma, sendo as melhores escolhas em todos os nós de decisão de Elisa e Gustavo os ramos em destaque.

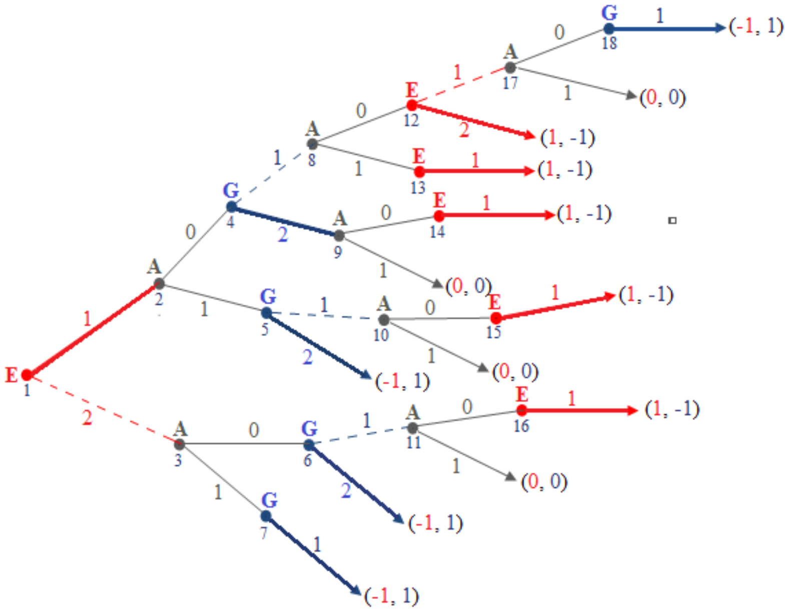

Figura 40: 11ª rodada da indução reversa (Jogo do Nim)

Lembrando que nos jogos sequenciais uma estratégia é um plano de ação, isto é, o jogador deve apontar suas escolhas em cada nó correspondente, obtemos que as estratégias de E e G que levam ao equilíbrio de Nash perfeito em subjogos são dadas por:

- Elisa: retirar uma pedra no nó 1, duas pedras no nó 12, uma pedra no nó 13, uma pedra no nó 14, uma pedra no nó 15, uma pedra no nó 16.

- Gustavo: retirar duas pedras no nó 4, duas pedras no nó 5, duas pedras no nó 6, uma pedra no nó 7, uma pedra no nó 18.

A seguir, vamos analisar um outro exemplo, referente a um jogo de perguntas e respostas, onde o elemento aleatório está nas chances do participante responder corretamente a próxima pergunta.

4.3.2 Jogo de perguntas e respostas

Nesta seção vamos considerar a seguinte situação (PRISNER, 2014): Laura está participando de um programa de perguntas e respostas. O número máximo de perguntas por programa são seis. Cada pergunta tem um valor atribuído a ela, sendo eles $R\$ \ 1.000,00$; $R\$ \ 1.000,00$; $R\$ \ 2.000,00$; $R\$ \ 4.000,00$; $R\$ \ 8.000,00$; $R\$ \ 16.000,00$.

Depois de cada rodada, Laura tem a opção de parar e pegar o dinheiro que ganhou até então, ou ouvir a próxima pergunta. Se Laura optar por ouvir a próxima pergunta, ela não tem saída, ou seja, é obrigada a responder a pergunta corretamente para ir para a próxima rodada. Se Laura der a resposta errada, ela perde todo o dinheiro que já ganhou.

Ainda, suponha que as perguntas ficam mais difíceis a medida em que o jogo avança. Nesse sentido, assumimos que na rodada de número n a probablidade de Laura errar a resposta é de $\frac{2}{9-n}$. Queremos estimar em que pergunta Laura deve parar para maximizar seus ganhos.

Considerando as regras do jogo, temos que a representação dele na forma extensiva é dada abaixo (os *payoffs* nos nós terminais correspondem ao prêmio em milhares de reais):

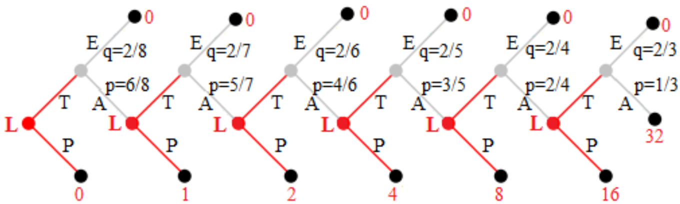

Figura 41: Árvore de jogo (Jogo de perguntas e respostas)

Na árvore de jogo, temos que:

- L: nós de decisão referentes à Laura
- T: ramos referentes a ação $\{Tentar\}$
- E: ramos referentes a ação $\{Errar\}$
- A: ramos referentes a ação $\{Acertar\}$
- P: ramos referentes a ação $\{Parar\}$

Em cada rodada, Laura tem as opções de $\{Tentar\}$ ou $\{Parar\}$. Se Laura optar por $\{Parar\}$, esse ramo é seguido por um nó terminal que determina o quanto Laura ganhou. Se Laura optar por $\{Tentar\}$ reponder a próxima pergunta, o ramo que corresponde a esta ação é seguido por um nó aleatório (cinza) onde a próxima pergunta ocorre. Deste nó, partem os ramos que representam o que ocorre se a resposta for certa ou errada. Para a resposta certa, temos a probabilidade p, para a resposta errada temos a probabilidade q. Ambas são encontradas através da probabilidade dada no enunciado e necessariamente devem somar 1, ou seja, $p+q=1$. Se Laura errar a resposta, temos que o jogo se encontra em um nó terminal dando a ela *payoff* 0. Caso contrário, temos que Laura acerta a resposta e o jogo continua.

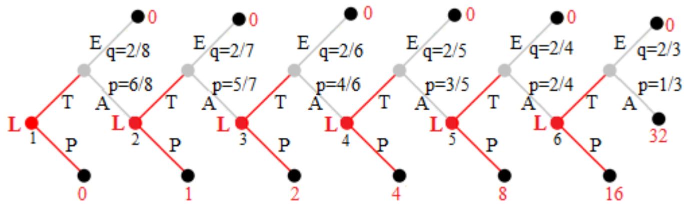

Figura 42: Enumeração dos nós de decisão (Jogo de perguntas e respostas)

Para iniciarmos a resolução deste jogo através da indução reversa, é preciso saber como calcular o *payoff* esperado se Laura optar por $\{Tentar\}$ responder a próxima pergunta.

Sabemos que a probabilidade de Laura errar a resposta é dada por $\frac{2}{9-n}$, onde n é o número do nó de decisão. Considerando o nó de decisão 6, temos que p e q são:

$$q = \frac{2}{9-6} = \frac{2}{3}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Com os valores de p e q, o *payoff* esperado se Laura tentar responder a pergunta de número 6 é dado por:

$$q \cdot 0 + p \cdot 32 = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 32 = \frac{32}{3}$$

Assim, para analisar qual é a melhor ação para Laura, analisamos o *payoff* dado se Laura $\{Parar\}$ e a recompensa calculada acima. Dessa forma, como $\frac{32}{3} < 16$, o melhor para Laura é $\{Parar\}$ caso o jogo chegue na sexta pergunta. Assim, temos a seguinte árvore atualizada:

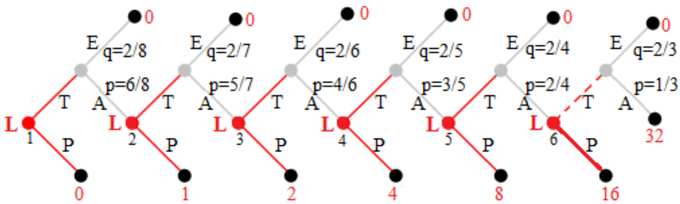

Figura 43: 1ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

De forma análoga ao que foi feito para calcular os valores de p, q e *payoff* esperado se Laura optasse por $\{Tentar\}$ responder a pergunta número 6, faremos para todos os outros nós de decisão que faltam. Assim, para o nó de decisão 5 que corresponde à quinta pergunta, temos:

$$q = \frac{2}{9-5} = \frac{1}{2}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

E ainda,

$$q \cdot 0 + p \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$$

Neste caso, será indiferente para Laura se ela optar por $\{Tentar\}$ ou $\{Parar\}$, pois em cada um, o *payoff* é 8. Destacamos então as duas ações na árvore de jogo abaixo:

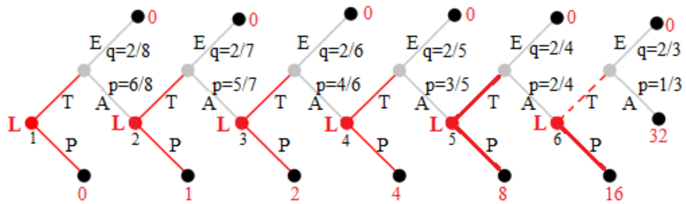

Figura 44: 2ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

Em relação ao nó de decisão 4, temos:

$$q = \frac{2}{9-4} = \frac{2}{5}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

E ainda,

$$q \cdot 0 + p \cdot 8 = \frac{2}{5} \cdot 0 + \frac{3}{5} \cdot 8 = \frac{24}{5}$$

Como $\frac{24}{5} > 4$, Laura irá optar por $\{Tentar\}$ responder a quarta pergunta. Assim, temos que a árvore de jogo que representa a situação é dada como:

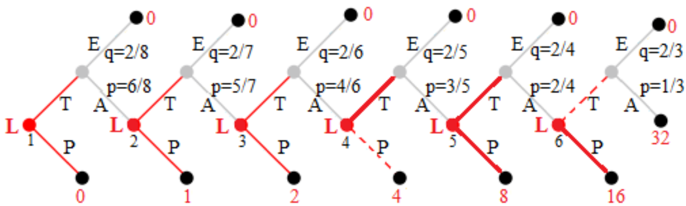

Figura 45: 3ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

Para o nó de decisão 3 que representa a terceira pergunta, temos que:

$$q = \frac{2}{9-3} = \frac{1}{3}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ainda, para calcular o *payoff* esperado, temos que:

$$q \cdot 0 + p \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

Como $\frac{8}{3} > 2$, temos que buscando maior *payoff* Laura irá $\{Tentar\}$ responder a terceira pergunta. Assim, a árvore de jogo fica da seguinte forma:

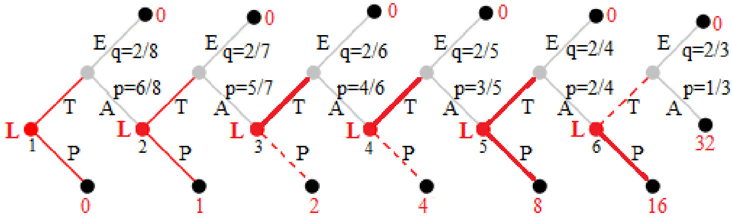

Figura 46: 4ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

Em relação ao nó de decisão 2, temos que:

$$q = \frac{2}{9-2} = \frac{2}{7}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

E ainda,

$$q \cdot 0 + p \cdot 2 = \frac{2}{7} \cdot 0 + \frac{5}{7} \cdot 2 = \frac{10}{7}$$

Como *Tentar* traz um *payoff* esperado de $\frac{10}{7}$ e $\frac{10}{7} > 1$, temos que Laura irá optar por $\{Tentar\}$ responder a pergunta de número 2. Assim, temos que:

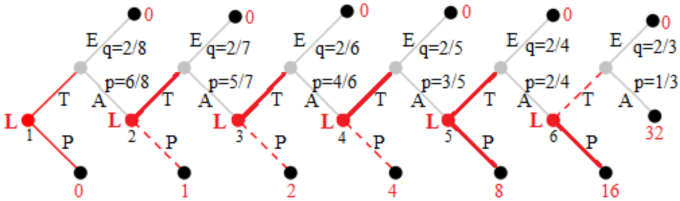

Figura 47: 5ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

Finalizando, em relação ao nó de decisão inicial, temos que:

$$q = \frac{2}{9-1} = \frac{1}{4}$$

$$p = 1 - q = 1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

E ainda,

$$q \cdot 0 + p \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

Como a opção $\{Tentar\}$ traz *payoff* esperado de $\frac{3}{4}$ e ainda, $\frac{3}{4} > 0$, temos que a melhor opção para Laura será $\{Tentar\}$. Essa escolha é evidente, pois na primeira pergunta Laura não tem nada a perder. Assim, a árvore de jogo ficará da seguinte situação:

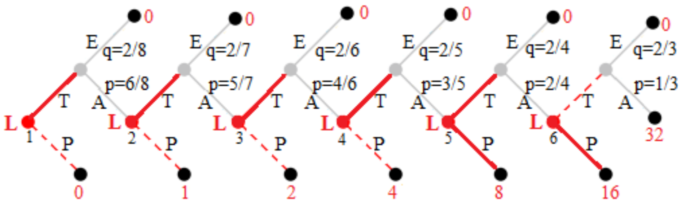

Figura 48: 6ª rodada da indução reversa (Jogo de perguntas e respostas)

Com a melhor resposta (com base no valor esperado) de todos os nós destacados, percebemos que a decisão racional é que Laura tente responder até a quarta pergunta, indeferente com relação a quinta pergunta, e pare antes de responder a sexta pergunta.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos alguns aspectos da Teoria dos Jogos, com ênfase no estudo dos jogos sequenciais e o método de indução reversa como técnica de resolução deste tipo de jogo. No decorrer do trabalho, discutimos diversas aplicações, como o exemplo clássico do Dilema do Prisioneiro, situações de concorrência entre empresas, Jogo do Leilão, entre outras.

As aplicações principais foram apresentadas no último capítulo, sendo elas o Jogo do Nim e o Jogo de perguntas e respostas, cuja diferença das demais aplicações é o fato de ocorrerem eventos aleatórios entre os movimentos dos jogadores, ocasião em que usamos algumas ferramentas da Teoria da Probabilidade para obter a melhor solução.

Inicialmente, no capítulo "Aspectos Gerais", apresentamos uma breve contextualização histórica, citando as principais contribuições para a Teoria dos Jogos. Ainda, discutimos os conceitos considerados necessários para que o leitor compreenda o que se segue no desenvolvimento dos próximos capítulos. Entre eles, destacamos o que significam para a Teoria dos Jogos termos importantes como jogo, jogadores, ações, recompensas, entre outros.

Ainda, neste mesmo capítulo, apresentamos os jogos em que as ações são escolhidas de forma simultânea pelos jogadores e sua forma de representação, denominada forma normal ou estratégica. Seguimos com o estudo do que seriam as estratégias dominantes e dominadas, finalizando o capítulo com a apresentação de dois métodos de resolução de jogos dessa natureza: eliminação iterada de estratégias dominadas e pela busca do equilíbrio de Nash.

No capítulo denominado "Forma extensiva de um jogo" apresentamos o estudo dos jogos sequenciais e sua forma extensiva de representação, por meio da árvore de jogo. Abordamos todas as características necessárias para que o leitor consiga fazer a análise correta desse tipo de representação. Ainda, dentre as definições que se encontram nesse capítulo, destacamos a noção de estratégia de um jogador (mais ampla que nos jogos simultâneos), que consiste em um plano de ação, ou seja, uma tomada de decisão para cada momento possível em que o jogador deve fazer uma escolha.

Ainda, abordamos os conceitos de equilíbrio de Nash para jogos sequenciais, dando destaque para o teorema que garante a existência de um equilíbrio de Nash com estratégia pura em todo o jogo de informação perfeita. Também, apresentamos o conceito de um subjogo e discutimos como esse conceito influencia na busca dos equilíbrios de Nash que fazem sentido quando pensamos em cada decisão isoladamente. Ganhamos então um refinamento deste método de solução, conhecido como equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.

Por último, temos o capítulo denominado por "A indução reversa como método de solução de um jogo na forma extensiva", onde apresentamos o método de indução reversa, que consiste em uma técnica para encontrar os equilíbrios de Nash perfeitos em subjogos, por meio de análise da árvore do jogo a partir dos nós terminais. Finalizamos nosso estudo com a discussão de jogos em que estão presentes eventos aletórios entre os movimentos dos jogadores, encontrando a melhor solução em dois exemplos: Jogo do Nim e Jogo de perguntas e respostas.

REFERÊNCIAS

DUTTA, P. K. *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge, Reino Unido: The Mit Press, 1999. 476 p.

EBBINGHAUS, H.-D.; KANAMORI, A.; FRASER, C. G. *Ernst Zermelo - Collected Works / Gesammelte Werke: Volume I / Band I - Set Theory, Miscellanea / Mengenlehre, Varia*. Berlin, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 654 p.

FIANI, R. *Teoria dos Jogos*. Rio de Janeiro, Brasil: CAMPUS, 2009. 393 p.

JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2015. 299 p.

MANEA, M. Backward induction (lecture notes). *MIT Open Course Ware*, p. 1–22, 2016.

MEYER, P. L. *Probabilidade: Aplicações à Estatística*. Brasil: Saraiva, LTC, 1987. 444 p.

PRISNER, E. *Game Theory: Through Examples*. Washington, DC: The Mathmatical Association of America, 2014. 308 p.

ROSS, S. *Probabilidade: um curso moderno com aplicações*. California, United States: Bookman, 2010. 606 p.

SARTINI, B. et al. Uma introdução à teoria dos jogos. *II Bienal da SBM-Universidade Federal da Bahia*, p. 1–61, 2004.

SHOHAM, Y.; LEYTON-BROWN, K. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press, 2008. 513 p.