Universidade Federal de Santa Catarina
TCC II

A Matemática do Texas Hold'em

No Limit Hold'em

Welerson Jung

Florianópolis
Junho de 2019

Sumário

Introdução

O jogo de pôquer é um dos mais fascinantes e populares jogos da história e resiste ao tempo, atraindo mais e mais adeptos em todos os países. Embora relativamente simples em suas regras básicas, suas inúmeras possibilidades de ação e arbitragem torna-o extremamente excitante, unindo amantes dos jogos em uma forma de entretenimento muito atrativa.

Durante mais de 1000 anos, o jogo de pôquer desenvolveu-se através de um amplo espectro de civilizações. Alguns atribuem a origem do jogo à Dinastia Sung da China, do século 10, enquanto outros apontam o seu começo com o jogo Persa chamado ”As Nas”, do século 16. Ao longo de sua história, o jogo recebeu novas variações, embora os conceitos básicos da estratégia psicológica e o ranking de cartas sempre estiveram presentes ao longo do curso da sua evolução.

A versão do jogo mais parecida com a versão contemporânea é o *Poque*, que data do século 17, na França. O jogo atravessou o Atlântico com um grupo de colonizadores franceses que eventualmente fundaram a cidade de New Orleans. A partir daí, se difundiu ao longo da rota do Rio Mississippi durante o século 18 e floresceu nos Estados Unidos durante o século 19, quando o pais começou sua expansão até o oeste. Por este motivo, a história de pôquer é normalmente associada com o ”Wild West”Americano.

Desde então, existem três versões predominantes do jogo: Stud de 5 Cartas e Stud de 7 Cartas , Texas Hold'em, Omaha e Omaha Hi-Low. O Texas Hold'em começou a ganhar popularidade durante os anos setenta, quando apareceu como o jogo principal da Série Mundial de pôquer. Hoje em dia, esse jogo é, sem dúvida, o mais popular dos três jogos e é jogado com frequência nas maiores salas de pôquer online do mundo, além dos cassinos terrestres de todo o mundo.

Muitas das principais características desse fascinante jogo reside nas habilidades mentais e cognitivas dos jogadores. Essas habilidades em geral são desenvolvidas com a prática e intuição sistemáticas. Ocorre porém que muitas delas podem ser sistematizadas por uma abordagem de conceitos centrais da Matemática.

A tomada de decisão é essencial para o sucesso de um jogador. Nos eventos da vida real, raramente fazemos as ”contas”de um possibilidade de sucesso ou fracasso, ou seja, utilizamos a probabilidade por intuição e experiência. Elas fazem parte do nosso mecanismo de sobrevivência. Assim funcionam as coisas no pôquer. A esmagadora maioria dos jogadores desconhecem o conceitos formais de probabilidade, que são conceitos essenciais para tomada de decisão no jogo.

Este trabalho tem por objetivo desenvolver mecanismos de tomada de decisão no jogo de pôquer por meio de técnicas simples baseadas na Matemática e mais especificamente, em probabilidades. Os conceitos centrais são probabilidade condicional, estabelecida pelo Teorema de Bayes juntamente como conceito de Valor Esperado.

O foco deste TCC é trabalhar com a modalidade Texas Hold'em No Limit Hold'em. No entanto, todos os resultados obtidos neste trabalho podem ser aplicados a modalidade Texas Hold'em Limit Hold'em, feitas é claro, as devidas ressalvas das mudanças de regras.

A ideia central que tive para escolha do tema desse trabalho foi abordar um tema popular e que ao mesmo tempo, explore e chame a atenção para uma aplicação efetiva da Matemática.

O primeiro capítulo descreve as regras, cronologia, ações do jogo de pôquer. No segundo, dois conceitos básicos importantes são introduzidos, sendo que um deles é uma probabilidade específica. No terceiro capítulo descrevemos Teorema de Bayes e o conceito de Valor Esperado que suportam a Matemática envolvida. Os capítulos quatro, cinco e seis tratam da dinâmica do jogos e suas modalidades: cash game, torneio e Pôquer online.

Tentei, nas medidas de minhas limitações, desenvolver um texto simples e objetivo que possa atrair a curiosidade do leitor, tanto para o jogo de Pôquer em si mesmo, quanto para enfatizar a importância da Matemática neste contexto.

1 Regras do Texas Hold'em

Neste primeiro capítulo, serão apresentadas as regras básicas do estilo de pôquer Texas Hold'em, mas primeiramente serão vistas as definições básicas.

1.1 Definições

- **Dealer**: No início de cada rodada, um jogador recebe o botão de *dealer*. Este botão passa de jogador para jogador, no sentido horário, na medida em que as rodadas avançam.
- **Blind**: Antes do início de uma rodada, os dois jogadores posicionados ao lado do *dealer*, no sentido horário, fazem apostas obrigatórias, o primeiro no sentido horário ao lado de dealer é o *small blind* que paga um valor x, já o segundo no sentido horário é o *big blind* que paga um valor 2x, em que x é um valor definido previamente.
- **Stack**: É a quantidade de fichas de um jogador.
- **Pote**: É o total de fichas apostadas na rodada.

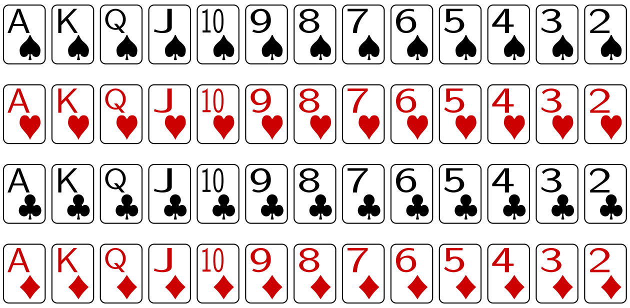
Antes de entender o jogo e sua cronologia, é necessário conhecer as possíveis ações dentro do jogo. Estas ações serão explicadas a seguir.

1.2 Ações

- **Correr (Fold)**: Nesta ação o jogador desiste da rodada.
- **Apostar (Bet)**: Quando não há apostas na rodada o jogador pode apostar, assim iniciando uma rodada de apostas.
- **Aumentar (Rise)**: O jogador faz uma aposta maior do que a já existente.
- **All-in**: Consiste em apostar todas as suas fichas.
- **Pagar (Call)**: Quando há uma aposta feita por um adversário, o jogador cobre essa aposta.
- **Mesa (Check)**: Quando não há uma aposta na mesa, o jogador resolve não apostar e só passa a vez.

Antes de entender o jogo e a cronologia da rodada também é pertinente conhecer o baralho de pôquer, que é o principal instrumento do jogo.

O baralho possui 52 cartas, 13 numerações com 4 naipes como podemos ver a seguir.

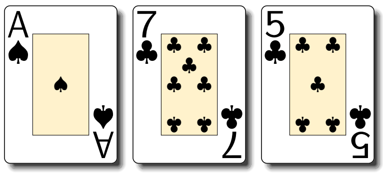


Finalmente podemos sintetizar o jogo e sua cronologia, mas antes é importante fazer uma observação. Nem sempre a rodada chega ao river que é a etapa final, pois se um jogador apostar e os outros correrem, então aquele que apostou leva o pote independentemente da etapa da rodada em que estiver, nesse caso não haverá necessidade de prosseguir a rodada encerando-a naquele momento.

1.3 O jogo e sua cronologia

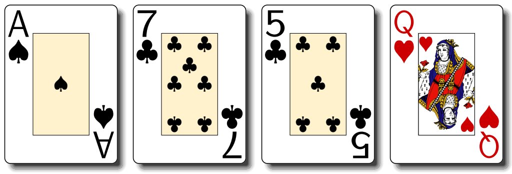
- **Pré-flop**: Esta é a primeira rodada de apostas, após cada jogador receber duas cartas visíveis apenas para si, e ainda, o *big blind* e o *small blind*terem pago suas apostas obrigatórias. Começa assim a primeira rodada de apostas pelo jogador ao lado do *big blind* no sentido horário. Este jogador pode pagar o valor do *big blind*, aumentar ou correr, após efetuar sua ação. O jogador seguinte no sentido horário também efetua uma ação, e assim por diante de jogador a jogador no sentido horário. A rodada de apostas termina quando chega novamente a vez do último jogador a apostar. No caso de ninguém aumentar e alguém pagar o valor do *big blind*, ocorre uma exceção e aquele que está na posição de *big blind* ainda pode apostar ou passar.

- **Flop**: Após a primeira rodada de apostas ocorre o *flop*. Nesta fase viram-se 3 cartas na mesa visíveis para todos os jogadores como no exemplo a seguir.

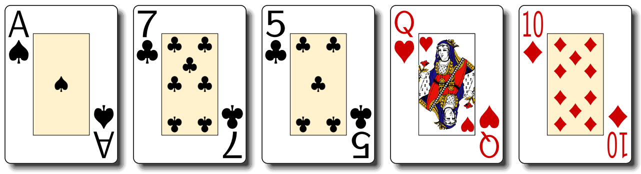
  Após as 3 cartas serem viradas na mesa, inicia-se uma nova rodada de apostas. Desta vez inicia-se pelo *small blind*, ou no caso do *small blind* já ter corrido, pelo primeiro jogador no sentido horário ao *small blind* que ainda esteja no jogo. Novamente, após chegar a vez de jogar do último a apostar, encera-se a fase do *flop*.

- **Turn**: Após o *flop* vem o *turn*. Nesta rodada vira-se a quarta carta como no exemplo a seguir.



Após virada a quarta carta, começa-se uma nova rodada de apostas com exatamente as mesmas regras do *flop*. Após encerar-se esta rodada de apostas, segue-se para a última parte da rodada.

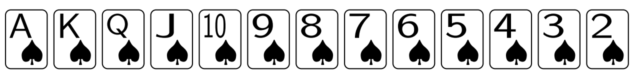
- **River**: Após o *turn* vem o *river*, a última rodada de apostas. Primeiro torna-se conhecida a quinta carta na mesa, como no exemplo a seguir.



Após virar-se a quinta carta inicia-se a última rodada de apostas. As regras são exatamente iguais ao *turn* e *flop*. Após encerar-se a rodada, caso tenhamos duas pessoas no pote, mostra-se as cartas de cada um, começando pelo primeiro a partir do *small blind* no sentido horário e assim seguindo sucessivamente. Aquele que possuir a mão mais forte ganha o pote. A mão mais forte é definida pelo ranking de mãos que apresentaremos logo a seguir.

1.4 Hierarquia de cartas

Antes de definir hierarquia de mãos, é importante definir hierarquia de cartas. A hierarquia é a seguinte: do maior para o menor da esquerda para a direita, em que Ás é a carta mais alta como mostrado em seguida.



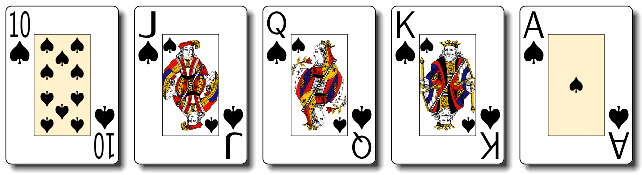
No Texas Hold'em não existe hierarquia de naipes, muito embora em outros estilos de pôquer exista.

A mão de um jogador no Texas Hold'em é formada pela melhor combinação de 5 cartas, entre as duas cartas que estão com o jogador e as 5 cartas da mesa. A "melhor combinação"é definida pela hierarquia de mãos que será descrita a seguir.

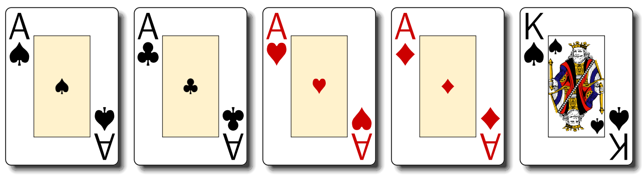
1.5 Hierarquia de mãos

A seguir temos a hierarquia de mãos da mais forte para a mais fraca.

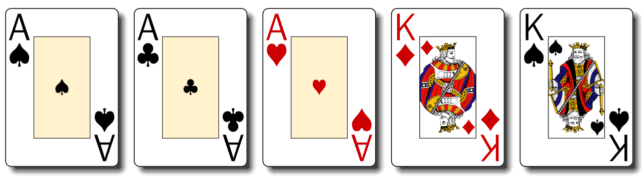
Straight flush: É uma sequência de 5 cartas do mesmo naipe. Essa sequência deve seguir a ordem de hierarquia de cartas. Quando for conveniente o Ás vale 1 e é possível formar a sequência 1-5. Se duas pessoas possuírem uma sequência de cartas do mesmo naipe, vence o jogador que possuir a sequência naipada encabeçada pela maior carta. O straight flush 10-A é conhecido como royal flush e é a mão mais forte do jogo. Eis o exemplo a seguir.



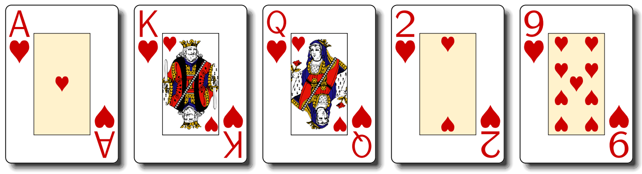
Quadra ou Pôquer: É uma mão com 4 cartas do mesmo valor. Se dois jogadores possuírem quadra, vence quem possuir a quadra com maior carta. Se eles possuírem a mesma quadra, vence quem possuir mão com a maior carta junto com a quadra. Eis o exemplo de uma quadra a seguir.



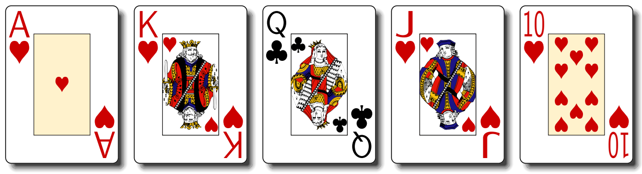
Full house: É uma mão formada por uma trinca e um par. Se duas pessoas possuírem uma full house, vence quem possuir a maior trinca. Se as duas possuírem a mesma trinca vence quem possuir o maior par. A seguir temos um exemplo de full house.



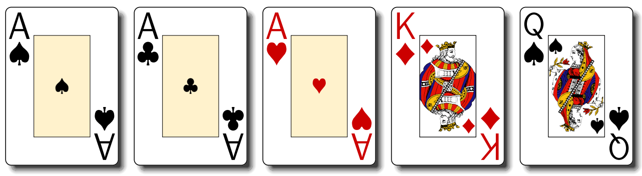
Flush: É uma mão formada por 5 cartas do mesmo naipe. Se duas pessoas possuírem um flush, vence quem possuir flush com a carta maior. Se ambas empatarem na maior carta, vence quem possuir a segunda maior. Se ambas empatarem na segunda maior, vence quem possuir a terceira maior e assim sucessivamente até a quinta carta. A seguir temos exemplo de flush.



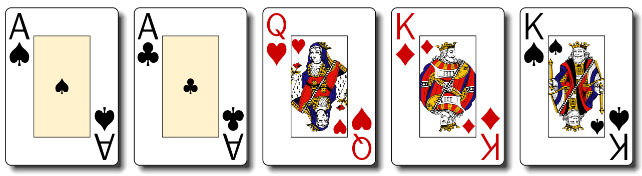
Sequência: É uma mão formada por uma sequência como a do straight flush sem que as cartas sejam todas do mesmo naipe. O critério de desempate é o mesmo que para o straight flush. A seguir temos um exemplo.



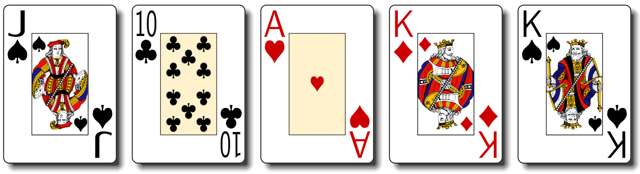
Trinca: É uma mão formada por 3 cartas com mesmo valor. Se duas pessoas possuírem trinca, vence quem possuir trinca com maior carta. Se ambas possuírem trinca com mesma carta, vence quem possuir a carta maior. Se ambas possuírem a carta maior, vence quem possuir a segunda carta maior. A seguir temos um exemplo de trinca.



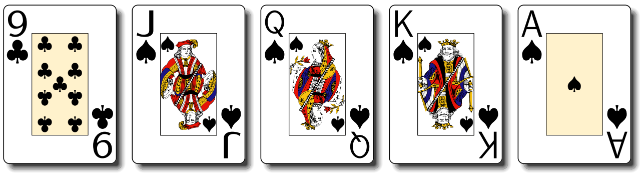
Dois pares:É uma mão formada por dois pares. Se duas pessoas possuírem 2 pares, vence quem possuir o par maior. Se ambos possuírem o mesmo par maior, vence quem possuir o segundo par maior. Se ambos possuírem os mesmos dois pares, vence quem possuir a carta maior. A seguir temos um exemplo de 2 pares.



Par: Consiste de um único par. Se duas pessoas possuírem um par, vence quem possuir o par maior. Se ambas possuírem o mesmo par, vence quem possuir a carta maior, sem ambas possuírem a carta maior, vence quem possuir a segunda carta maior, por fim se ambas possuírem a segunda carta maior vence quem possuir a terceira carta maior. A seguir temos um exemplo de par.



Carta mais alta: É uma mão que não se encaixa a nenhuma das outras, se dois jogadores não fizeram nenhuma das outras mãos, vence quem possuir a carta mais alta, se ambos possuírem uma mesma carta mais alta, vence quem possuir a segunda, se empatarem novamente nós estendemos a mesma lógica até a quinta carta. Segue a baixo um exemplo.



2 Conceitos básicos do Pôquer

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos do pôquer. Esses conceitos serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, uma vez que serão exaustivamente utilizados.

2.1 Odds e Outs

O primeiro conceito a ser apresentado é o de *outs*. Os *outs* são as cartas no baralho que podem vir no *turn* e *river* que farão com que o jogador tenha uma mão forte e que provavelmente fará o jogador levar o pote. Alguns exemplos serão listados a seguir.

Exemplo 2.1. *Suponha que que um jogar tenha a mão* 7♠9♠ *e as cartas na mesa sejam*

A♠ 10♠ 6♥ .

Neste caso o jogador tem 9 outs *pra flush e 4* outs *para sequência. Como a carta* 8♠ *é* out *para sequência e para flush, então o jogador tem um total de 12* outs, *como podemos ver a seguir.*

outs *para sequência*

8♠ 8♥ 8♣ 8♦

outs *para flush*

2♠ 3♠ 4♠ 5♠ 6♠ 8♠ J♠ Q♠ K♠

Exemplo 2.2. *Suponha que um jogador tenha a mão* 6♥5♥ *e vire na mesa as cartas*

4♥ K♣ 7♥ .

Neste caso o total de outs *é 15, cuja a distribuição é apresentada a seguir.*

outs *para sequência*

8♥ 8♣ 8♠ 8♦

3♠ 3♥ 3♣ 3♦

outs *para flush*

2♥ 3♥ 8♥ 9♥ 10♥ J♥ Q♥ K♥ A♥

Exemplo 2.3. *Suponha que um jogador tenha a mão* Q♥ Q♣ *e na mesa vire*

J♥ 6♥ J♠ 5♥.

Neste exemplo não temos outs *para sequência, mas temos nove* outs *para flush e 4* outs *para full house, totalizando assim 13* outs*. A seguir é apresentada a distribuição de* outs*.*

outs *para full house*

J♣ J♦ Q♠ Q♦

outs *para flush*

2♥ 3♥ 4♥ 7♥ 8♥ 9♥ 10♥ K♥ A♥

Exemplo 2.4. *Suponha que um jogador tenha a mão* J♠ K♦ *e vire na mesa*

A♦ 10♥ 6♣ 8♠ .

Claramente o jogador só possui 4 outs*, todos para sequência, e são eles:*

Q♠ Q♥ Q♣ Q♦ .

Exemplo 2.5. *Suponha que uma jogador possua a mão* Q♦ K♣ *e as cartas na mesa sejam*

J♦ 10♦ J♣

Neste caso o jogador possui oito outs *para sequência, e são eles:*

A♠ A♣ A♥ A♦ 9♠ 9♦ 9♣ 9♥.

Agora que temos alguns exemplos de *outs*, vamos esclarecer o conceito de *odds*. Oportunamente vamos reaproveitar esses exemplos.

Os *odds* são a probabilidade de acertar um *out* após a rodada de apostas. Existem algumas formas de se representar os *odds*. A mais comum é a relação P/Q em definida por: para cada número P de cartas que não acerta os *outs*, existe um número Q de cartas que acerta os *outs*. Essa terminologia não será utilizada aqui. Neste trabalho, por conveniência, os *odds* serão representados pela fração que indica a probabilidade de acertar um *out*.

Vamos exemplificar os *odds* reaproveitando os exemplos anteriores, começando pelo exemplo 1.

Vimos anteriormente, no exemplo 1, que se um jogador tem a mão 7♠9♠ e as cartas na mesa sejam A♠10♠6♥, então ele tem 9 *outs*. A probabilidade de acertar sequência ou flush no turn é de $\frac{9}{47}$, supondo que os jogador não esteja em all-in. Dizemos que seus *odds* são $\frac{9}{47}$, ou seja, aproximadamente $\frac{1}{5}$. Agora, suponha que o jogador esteja em all-in. Então seus *odds* são $1-\frac{38\cdot 37}{47\cdot 46}$, que é aproximadamente $\frac{1}{3}$.

Agora vamos olhar para o exemplo 2. Vimos naquele exemplo que se um jogador tem a mão 6♥5♥ e vire na mesa as cartas 4♥K♣7♥. Então o jogador tem 15 *outs*. Os *odds* do jogador em all-in nesse caso são aproximadamente $\frac{2}{3}$. Caso o jogador não esteja em all-in, seus *odds* são aproximadamente $\frac{1}{3}$.

No exemplo 3, o jogador possui a mão Q♥Q♣ e na mesa vira J♥6♥J♠5♥. Nesse caso o jogador possui 13 *outs*. Os *odds* do jogador nesta situação são $\frac{13}{46}$ que é aproximadamente $\frac{3}{10}$.

Olhando para o exemplo 4, vemos que se o jogador possui a mão J♠K♦ e vira na mesa A♦10♥6♣8♠, então o jogador possui 4 *outs*. Neste caso os *odds* são aproximadamente $\frac{1}{11}$.

Por fim, no exemplo 5, o jogador possui a mão Q♦K♣ e as cartas na mesa são J♦10♦J♣. Neste caso o jogador possui 8 *outs*. Em caso de all-in os *odds* são $\frac{1}{3}$. Mas se o jogador não for all-in, seus *odds* são $\frac{1}{6}$.

No próximo capítulo será apresentado o mais utilizado teorema para maximizar lucros no jogo de pôquer, além de noções não tão básicas, mas fundamentais, como por exemplo a de valor esperado.

3 Valor esperado e Teorema de Bayes

Neste capítulo será apresentado aquele que é o mais importante resultado a ser utilizado na hora de traçar uma estratégia no pôquer. Trata-se o teorema de Bayes. Além disso, também será apresentado um importante conceito, utilizado para tomar quase todas as decisões na mesa de pôquer: o conceito de Valor Esperado.

3.1 Teorema de Bayes

Antes de apresentar o teorema de Bayes é oportuno apresentar algumas definições que serão necessárias para entender o teorema.

Definição 3.1. *Seja U o conjunto de todos os possíveis resultados a respeito de uma determinada situação, dizemos que A é um evento se $A \subseteq U$, definimos também $A^c = U - A$.*

Quando estamos tratando de uma determinada situação no jogo de pôquer, U é sempre finito. Além disso, se $P(A) = \frac{|A|}{|U|}$ em que $|A|$ e $|U|$ são respectivamente o número de elementos de A e U. Concluímos então que a probabilidade de um evento no pôquer é sempre um número racional ente 0 e 1. Segue como consequência disto que

$$P(A) + P(A^c) = 1.$$

Definição 3.2. *Sejam A, B dois eventos. Denotamos o evento B condicionado a A como $B|A$, e dizemos que A e B são eventos independentes se $P(B) = P(B|A)$. Caso contrário A e B são ditos eventos dependentes.*

Uma observação útil a ser feita é que a relação "independência de eventos" é simétrica, ou seja, $P(B) = P(B|A)$ se, e somente se, $P(A) = P(A|B)$.

A seguir temos um exemplo de eventos dependentes e um outro exemplo de eventos dependentes.

Exemplo 3.1. *Suponhamos que estejamos jogando um dado (honesto) e que o evento A seja virar o número 6 na primeira vez em que joguemos o dado e o evento B seja virar o número 5 na segunda jogada. Note que $P(B) = P(B|A) = \frac{1}{6}$, pois o fato de virar 6 na primeira vez em que jogamos o dado não influencia na probabilidade do evento B ocorrer na segunda vez em que se joga o dado. Portanto A e B são eventos independentes.*

Exemplo 3.2. *Suponhamos que um jogador esteja recebendo cartas em uma rodada de Texas Hold'em e o evento A seja receber rei como a primeira carta e o evento B seja receber rei como a segunda carta. Note que $P(A) = \frac{1}{13}$ e $P(B|A) = \frac{1}{17}$. Portanto A e B são eventos dependentes.*

O exemplo anterior mostra dois eventos dependentes no pôquer. Como neste exemplo, a maioria dos casos a serem considerados no pôquer são dependentes. De fato, até o river é necessário se considerar as cartas que seu(s) adversário(s) possuem (que o jogador geralmente não sabe) condicionadas ao que pode virar na mesa até o fim da rodada.

A seguir será enunciado o mais pertinente teorema no estudo da Matemática do pôquer, o teorema de Bayes.

Teorema de Bayes*: Sejam A e B dois eventos quaisquer, então*

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A)P(A).$$

Se $P(B) \neq 0$, então pelo teorema de Bayes, podemos escrever

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Considerando o fato de que $P(A) + P(A^c) = 1$, podemos escrever $P(B)$ como a probabilidade de ocorrer $B|A$ se A ocorre, somado a probabilidade de ocorrer $B|A^c$ quando A^c ocorre, em outras palavras, podemos escrever

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} .$$

Além disso, considerando a igualdade dada pelo teorema e $P(B) \neq 0$, tem-se que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

O teorema de Bayes é um corolário da chamada lei da probabilidade total, que não será demonstrada e nem tampouco enunciada, pois para sua compreensão seria necessário tratar de diversos resultados que fogem ao escopo deste trabalho.

Aqui foram mostradas algumas formas de se descrever o teorema de Bayes, dentre as muitas situações que podem ocorrer. Cabe a cada jogador utilizar o teorema da forma que for conveniente. A seguir vamos exemplificar "uma" utilização do teorema de Bayes no jogo de pôquer.

Exemplo 3.3. *Um novo jogador chega a mesa. Usando todas as nossas habilidades de observação para qualificar qual tipo de jogador é o adversário, concluímos que existe* 10% *de chance deste jogador ser do tipo "maniac" que é um jogador que aumenta a aposta em* 80% *das mãos na posição* dealer*, e ainda, concluímos também que ele tem* 90% *de chance ser do tipo "tight" que é um jogador que aumenta* 10% *das mãos nesta posição. Na primeira mão estando na posição* dealer*, esse jogador aumenta a aposta. Qual é agora a probabilidade desse jogador ser do tipo maniac?*

Para resolver este problema vamos utilizar o teorema de Bayes, mas antes é necessário organizarmos as informações de forma conveniente para a solução.

Primeiro defina:

$A =$ o oponente vai aumentar na primeira mão em que estiver na posição *dealer*,

$B =$ o oponente é do tipo maniac.

Agora observe que:

$P(A|B) = 0,8$ (se o jogador for do tipo maniac ele vai aumentar 80% das vezes),

$P(A|B^c) = 0,1$ (se o jogador não for maniac ele vai aumentar 10% das vezes),

$P(B) = 0,1$ (10% das vezes o jogador é do tipo maniac),

$P(B^c) = 0,9$ (90% das vezes o jogador não é do tipo maniac).

Note que o que nós desejamos descobrir é exatamente $P(B|A)$. Aplicando o teorema de Bayes temos

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}.$$

Substituindo e calculando concluímos

$$P(B|A) = \frac{0,8 \cdot 0,1}{0,8 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,1} = \frac{8}{17}.$$

Naturalmente lidamos sempre com aproximações de estimativas estatísticas de comportamentos e há obviamente uma margem de erro para estes cálculos. Aqui nós concluímos que há uma chance de aproximadamente 47% do jogador ser do tipo maniac.

Supondo que ele aumentasse na rodada seguinte e que na posição anterior ao dealer a taxa de aumento do maniac é a mesma, então aplicando mais uma vez o teorema de Bayes, mudamos $P(B) = \frac{8}{17}$ e teremos

$$P(B|A) = \frac{0.8 \cdot \frac{8}{17}}{0.8 \cdot \frac{8}{17} + 0,1 \cdot \frac{9}{17}} = \frac{64}{73}.$$

Note que nesse caso a chance do jogador ser maniac ja sobe para mais de 87%. Se ele aumentasse na rodada seguinte ainda mantendo as hipóteses para a outra posição, a chance de maniac ja seria superior a 98%, e portanto, já seria sem dúvidas uma boa ideia considerá-lo maniac ao decidir sua estratégia.

No fundo, a aplicação de teorema de Bayes que acabou de ser descrita, tem por objetivo estimar com qual frequência o adversário blefa, o que, sem dúvida, é essencial no pôquer.

3.2 Valor esperado

A seguir será introduzido o conceito que dará mais sentido a obtenção deste tipo de informação.

Definição 3.3. *Seja* $B = \{(y_1, p_1), (y_2, p_2), \dots, (y_n, p_n)\}$ *o conjunto de todos os pares ordenados de resultados* y_i *e probabilidades desses resultados* p_i *relativos a uma determinada ação. O valor esperado desta ação que define* B *é*

$$< B >= \sum_{i=1}^{i=n} y_i p_i.$$

No pôquer, quando falamos de resultados relativos a uma determinada ação, nos referimos a ganhos ou perdas de fichas, ou até mesmo a nulidade de ganhos ou perdas de fichas. Além disso, como quase sempre não sabemos a mão do(s) adversário(s), e também não podemos prever com exatidão o comportamento deles relativo a nossas ações, então a probabilidade de cada resultado é estimada a respeito de uma quantidade quase sempre pequena de informações. Logo isto quase sempre aumenta muito o erro do cálculo do valor esperado.

Para reduzir o erro do cálculo do valor esperado, existem diversos métodos científicos descritos por uma vasta bibliografia que foge totalmente ao escopo deste trabalho, por isso mesmo, em boa parte dos problemas em que envolve uma situação muito especifica na mesa de pôquer, vamos assumir alguns números, supondo sempre que o trabalho de coleta de informação já tenha sido feito.

A seguir veremos alguns exemplos de aplicação de valor esperado que denotaremos por EV. Se B for o conjunto dos pares ordenados de resultados e suas respectivas probabilidades relativas a uma determinada ação, chamaremos o valor esperado desta ação por EV de B ou EV de uma ação que implica B, por simplicidade.

O primeiro exemplo a respeito de EV é o mais simples possível.

Exemplo 3.4. *Suponhamos que fomos desafiados a fazer uma aposta. Os termos da aposta são os seguintes:*

- *Joga-se uma moeda honesta em uma superfície plana;*
- *Se der "cara" nós ganhamos 1 real;*
- *Se der "coroa" nós perdemos 1 real.*

Vamos calcular o EV da aposta.

Nesse caso B=$\{$(1,$\frac{1}{2}$),(-1,$\frac{1}{2}$)$\}$, pois existe 50% de chances ganhar 1 real e 50% de chances de perder 1 real.

Portanto o EV da aposta (ou EV de B) é

$$EV = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Note que se substituirmos o termo "Se der "cara" nós ganhamos 1 real" por "Se der "cara" nós ganhamos 3 reais". Teríamos o EV da aposta dado por

$$EV = 3 \cdot \frac{1}{2}. + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Como a unidade de medida é real, o EV seria 1 real.

Agora veremos um exemplo um pouco menos simples que o anterior.

Exemplo 3.5. *Suponha que tenhamos sido desafiados a uma aposta com os seguintes termos:*

- *Joga-se um dado honesto numa superfície plana;*
- *Se cair o número escolhido ganhamos 2 reais;*
- *Se cair um número cuja somado ao escolhido o resultado der par, então não perdemos e nem ganhamos nada;*
- *Se cair um número cuja somado ao escolhido o resultado for ímpar, então perdemos 1 real.*

Calculemos o EV desta aposta.

Observe que para qualquer que seja o número escolhido, teremos uma face do dado para qual vamos ganhar 2 reais, duas faces do dado para as quais não ganhamos e nem perdemos nada e, 3 faces do dado para as quais perderemos 1 real. Como o dado é honesto, invariavelmente teremos

$$B = \left\{ \left(2, \frac{1}{6}\right), \left(0, \frac{1}{6}\right), \left(0, \frac{1}{6}\right), \left(1, \frac{1}{6}\right), \left(1, \frac{1}{6}\right), \left(1, \frac{1}{6}\right) \right\}.$$

Portanto o EV será

$$EV = 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Isto totaliza aproximadamente 17 centavos de EV.

Finalmente veremos um exemplo relacionado ao pôquer.

Exemplo 3.6. *Suponha que estamos enfrentando um adversário no river, o oponente tenha 1000 fichas, nós temos 1500 fichas e o pote tenha 1500 fichas. Então o oponente vai a all-in. Ao analisar a situação com uma quantidade de informação que conseguimos reunir do adversário previamente, concluímos que existe uma chance x do oponente estar blefando e $1 - x$ de ele ter uma mão monstro, melhor do que a nossa que é um par de azes. Supondo que cobrimos a aposta, para quais valores de x ocorre $EV = 0$, $EV < 0$ ou $EV > 0$?*

Primeiro observe que

$$EV = x \cdot 2500 + (1 - x) \cdot 1000 = 3500 \cdot x - 1000.$$

Considerando que esta função é crescente e igualando EV a zero, obtemos:

$$EV = 0 \ se \ x = \frac{2}{7},$$

$$EV < 0 \ se \ x < \frac{2}{7}$$

e

$$EV > 0 \ se \ x > \frac{2}{7}.$$

Observe que se supormos que demos all-in, mantendo as outras hipóteses do problema anterior em que x passa a ser chance do adversário dar call, o problema se torna análogo ao anterior.

Se uma aposta tem $EV > 0$, dizemos que essa aposta é favorável. Mas o fato de uma aposta ser favorável não implica que é conveniente faze-la. Para fazer uma aposta ela deve ser suficientemente favorável, ou seja, deve ser uma aposta favorável de tal forma que seja improvável que nós encontremos outra oportunidade tão boa ou melhor. Apostas pequenas, por exemplo, podem ser favoráveis na obtenção de informações, para que, em apostas grandes, possamos obter uma grande quantidade de fichas.

Fica clara a abstração do conceito de suficientemente favorável quando nos deparamos com a grande quantidade de situações diferentes em que as mais lucrativas estratégias a serem seguidas são totalmente diferentes. Além disso, vale lembrar que também existe certa arbitrariedade na definição dos critérios a serem estabelecidos para decidir se uma aposta é conveniente ou não.

Apesar de todas as observações feitas, o importante é focar no objetivo de maximizar os ganhos, e é claro, minimizar as perdas de fichas.

O conceito de EV é importante, mas é insuficiente para decidir o quão favorável é uma aposta. Por exemplo, considere que seu adversário deu all-in de 1000 fichas em um pote 50 fichas e você tem 60% de chances de vitória e 40% de chances de derrota. Nesse caso o EV do call é de 230 (supondo que você tenha 1000 fichas). Se ao invés disso, seu oponente der um all-in só de 100 fichas em um pote de 50, e você tem 90% de chances de vitória, por mais que essa aposta seja muito mais conveniente, tem um EV menor do que 230.

Muito embora o EV seja insuficiente para medir o quão favorável é uma aposta, existem algumas expressões matemáticas que podem nos dar uma mediada mais precisa. Por exemplo, quanto maior o valor da a fração

$$\frac{EV}{valor \ apostado}$$

mais favorável é a aposta. É claro que esse método não é suficientemente preciso em todas as situações, no entanto funciona muito bem quando as opções são all-in ou fold.

Nesse ponto, o leitor pode estar pensando sobre o motivo de simplesmente não definir simplesmente o quão favorável é uma aposta pela chance de vencer. Existem vários motivos para tal. No entanto, o principal deles é que se considerarmos só as chances de vitória, estaremos descartando uma variável fundamental que é o valor do pote, e embora as chances possam estar contra você, um pote gigantesco em relação ao seu stack, pode fazer a aposta ser muito favorável.

Feitas essas observações, vamos seguir com mais alguns exemplos práticos de EV.

Exemplo 3.7. *Estamos na posição de Dealer enfrentando apenas um adversário, nós temos* 1100 *fichas, o adversário tem* 1800 *o pote tem* 400 *fichas e o blind é 50/100. A nossa mão é* K♠10♠ *e de alguma forma sabemos que o adversário tem um A. As cartas na mesa são*

A♠ Q♠ 6♣ 9♥ .

O adversário dá check. Sabemos nesse momento que ele tem um par de azes e que ele provavelmente não vai correr a uma aposta pequena. Analisando seu comportamento, concluímos que se fizermos a aposta miníma de 100 *fichas, então ele tem aproximadamente* 100% *de chances de pagar. Se dermos all-in, então ele tem apenas* 20% *de chances de pagar a aposta. Qual aposta maximiza o EV?*

Primeiro, observe que a chance do adversário dar fold é 0 quando apostamos 100 fichas e 0.8 quando apostamos 1100 fichas. Vamos supor então que a chance do adversário dar fold suba linearmente em função do número de fichas, ou seja, se N é o número de fichas apostadas e P a probabilidade do adversário dar fold, então

$$P = kN + c$$

, em que k, c são constantes reais. Isso é uma equação da reta, e como temos os pontos $(N, P) = (100, 0)$ e $(N, P) = (1100, 0.8)$, fica fácil determinar $k = 0.0008$ e $c = -0.8$. Portanto, aproximamos a chance do adversário cobrir a aposta por

$$P = \frac{4N}{5000} - 0,08 = \frac{4(N-100)}{5000}.$$

Agora que temos uma estimativa da probabilidade do adversário desistir em função da aposta, lembremos que vencemos a aposta em duas circunstancias. A primeira é o adversário desistir e a segunda é nós acertarmos sequência ou flush. Como o adversário sabidamente tem um As, e temos 12 outs (somando os outs para sequência e fluh) dentre 45 possibilidades de cartas para virar na mesa, então nossa chance de vitória caso ele pague aposta é

$$V = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}.$$

Agora que temos todas as informações que precisamos podemos estimar o EV. Nesse caso,

$$EV = 400P + (1-P)[(400+N)V - (1-V)N],$$

substituindo P por

$$\frac{4(N-100)}{5000},$$

temos

$$\frac{8N-800}{25} + \frac{5100-4N}{5000}\left[\frac{1600+4N}{15} - \frac{11N}{15}\right] =$$

$$= \frac{8N-800}{25} + \frac{(5100-4N)(1600-7N)}{75000} =$$

$$= \frac{5760000-17872N}{75000} \cong \frac{307-N}{4}.$$

Essa conta de EV nos diz que não é muito conveniente fazer apostas altas. Nesse caso, se a aposta for maior do que 307 fichas, o EV vai ser negativo e passar a vez maximiza o EV. Mas há algo ainda mais importante a se observar nessas contas; note que não são contas simples para se fazer em segundos em uma mesa de pôquer. Por esse motivo vamos simplesmente testar alguns poucos valores de aposta na equação de EV. Não esperando fazer a aposta mais adequado, mas tentando fazer sempre uma aposta próxima à "ideal". Por exemplo, se testarmos as hipóteses não apostar, apostar 200 apostar 600 e dar all-in no EV do exemplo anterior, iriamos ver o EV decrescer enquanto aumentávamos a aposta e, obviamente, não teríamos apostado.

Exemplo 3.8. *Suponhamos agora que somos small blind eecebemos a mão J♥10♥. Então pagamos o blind junto com o big blind que chamaremos de jogador Y e outro jogador qualquer que chamaremos de jogador X, o blind é 50/100. Suponha também que temos 2900 fichas, o jogador Y tem 2700 fichas e o jogador X 3200 fichas, o pote é de 300 fichas. Vira então na mesa o flop*

K♥10♠7♣.

Supondo que a chance de nossos adversários blefar seja suficientemente pequena a ponto de desprezá-la. Vamos analisar a melhor estratégia.

Antes de traçar qualquer estratégia é útil notar que, como imaginamos que nossos adversários não vão blefar sem nada, eles só vão dar call ou raise se possuírem pelo menos um K ou 10, ou ainda uma boa chance de sequência com mãos como 8 e 9 ou J e Q, ou também um A e 7. A chance de um dos jogadores adversário ter um rei ou 10 é de aproximadamente o número de cartas que os adversários vão receber multiplicado pela chance de receber na primeira carta, ou seja, a chance é de aproximadamente

$$4 \cdot \frac{6}{47} \cong \frac{1}{2}.$$

Além disso, a chance de vir uma mão de 8 com 9 para um jogador é

$$\frac{8}{47} \cdot \frac{4}{46}.$$

Portanto, a chance de pelo menos um dos dois jogadores ter 7 e 8 é aproximadamente o dobro disso que é

$$\frac{8}{47} \cdot \frac{4}{46} \cdot 2 \cong \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

que é aproximadamente 3%. Da mesma forma concluímos que a chance de um dos adversários ter J e Q é aproximadamente 3%, e de possuírem A e 7 também é de aproximadamente 3%. Somando todas as chances concluímos que pelo menos um deles só vai dar call em um raise nosso é 60% das vezes. Vamos desprezar a chance de um raise do adversário em caso de trinca, pois essa chance é muito pequena, e com um par eles provavelmente teriam aumentado pré-flop.

Agora que sabemos que em 40% das vezes os adversários correm, vamos imaginar que teremos uma mão melhor do que a dos adversário até o turn em 20% das vezes, que veremos ainda futuramente nesse trabalho que é bem razoável assumir. Com estas informações calculamos que se F é a aposta, então o EV é

$$\frac{2}{5} \cdot 400 + \frac{3}{5}\left(\frac{F}{5} - F\right) = 160 - \frac{12F}{25}.$$

Para uma aposta de 100 fichas, o EV é 112. Se dermos check, assumindo que tenhamos $\frac{1}{3}$ de chances de vencer, o EV vai ser de 100 fichas, que é menor do que se apostarmos, fora que o adversário pode blefar e nós corrermos, que na prática diminui ainda mais nosso EV.

Suponhamos agora que nós apostamos 100, o adversário Y deu fold, e o X pagou. O pote agora é de 500 fichas. Vira a quarta carta e nós temos

K♥ 10♠ 7♣ 2♥,

se nós dermos check e, logo após isso, o adversário apostar 250 fichas, qual será a melhor opção de ação agora?

Primeiro lembremos que o jogador também pode estar em flush draw. Para a nossa sorte, se ele estiver em flush draw ele precisa ter na mão Q♥ ou A♥ para nos vencer, mas lembremos que esse oponente não blefa sem um bom draw, logo vamos nos restringir ao conjunto de mãos que já imaginávamos que ele tinha. Se ele deu raise ou acertou além do par flush draw, ou acertou dois pares, ou ainda pode ter um AK que também é uma mão forte. De todas essas hipóteses, as únicas que nos colocam em larga vantagem, são as de que ele tem um flush draw com cartas piores que a nossa, pois nesse caso poderemos tirar todas as fichas dele no river. O problema é que se considerarmos todas as possibilidades de mão que supomos no flop, o adversário tem vantagem em:

- 9 possibilidades de K com 2,
- 6 possibilidades de 10 com 2,
- 9 possibilidades de K com 7,
- 6 possibilidades de 10 com 7
- 6 possibilidades de 10 com K,
- 9 possibilidades de 7 com 2,
- 12 possibilidades de A com K
- 7♥A♥ ou 7♥Q♥.

Somando, notamos que existem 59 possibilidades do adversário ter grande vantagem estatística contra nossa mão. Por outra lado, só temos grande vantagem estatística em 6 possibilidades de flush draw com 7♥, mas o oponente ter uma destas mãos é bem improvável, pois era uma mão fraca no flop e ele poderia ter corrido. Então, concluímos que a chance do oponente ter uma mão contra qual possamos tirar todas as suas fichas é bem menor que 10%. Por outro lado, em mais de 90% das mãos, o oponentes tem cerca de 80% de chances de vencer, ou seja, ele vence em cerca de 72% dos casos, levando pelo menos cerca de 10% do nosso stack, podendo levar até mais caso ele aposte e nós dermos call. Se supormos que ganhamos cerca de 50% do nosso stack do adversário em 28% das vezes e ele ganha 20% do nosso stack em 72% das vezes, veremos que nosso EV será até negativo. Portanto concluímos que essa aposta não é muito favorável, uma vez que mesmo com previsões otimistas sobre os calls do oponente, não conseguimos ter um EV grande em relação ao nosso stack que, por sua vez, corre risco de ser dizimado.

Exemplo 3.9. *Estamos enfrentando um jogador muito cuidadoso e que gosta de jogar poucas mãos. Esse jogador só joga mãos de pares e mãos na forma AK e AQ na posição da mesa em que se encontra. Ele também só aumenta o pré-flop com pares maiores do que* 10*, AQ e AK. Nosso stack é de 1000 fichas e estamos na posição de dealer com a mão* $10\heartsuit 9\heartsuit$*. Já o adversário tem um stack de 1400 fichas e ele aumenta para 150 o pré-flop, sendo que o blind é 25/50. Deduzimos o oponente não tem um par de azes, pois o rise não foi muito grande. Suponha que vire no flop*

$$A\heartsuit \; J\spadesuit \; 7\heartsuit$$

e o adversário aposta mais 150 fichas. Agora o pote é 525 fichas. Qual é o EV para call?

A primeira observação útil a ser feita é a de que o adversário deve ter AQ, AK ou JJ. Por outro lado, só vencemos se acertarmos sequência ou flush, mas devemos excluir o out $J\heartsuit$ uma vez que isso poderia dar quadra ao adversário. Fazendo a conta, verificamos que temos 14 outs para uma vitória quase certa. Vamos desconsiderar a possibilidade do adversário acertar full house ao mesmo tempo que acertemos um dos nossos outs. Sendo assim, nossa chance de acertar um dos outs e vencer até o fim é de

$$1 - \frac{33}{47} \cdot \frac{32}{46} \cong 2 \cdot \frac{14}{46} \cong \frac{3}{5}.$$

De forma parecida concluímos que a chance de acertar um out no turn é de cerca de $\frac{3}{10}$. Com esse dado calculamos que o EV é cerca de

$$\frac{3}{10} \cdot 525 - \frac{7}{10} \cdot 150 = 52,5.$$

O EV é positivo, e é cerca de $\frac{1}{3}$ do valor ariscado, mas caso acertemos um out, existe a possibilidade de tirarmos um número muito maior de fichas do adversário. Se supormos que conseguiremos tirar em média até mais 500 fichas do adversário até o final, isso deve aumentar nosso EV até o river em cerca de

$$\frac{3}{10} \cdot 500 = 150$$

fichas. Ainda, supondo que a cada 4 vezes o adversário não aumente em uma em que nós não acertemos out, nosso EV até o river para check no turn vai aumentar em cerca de

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 150 = 22,5.$$

Optando por essa estratégia baseada nessas suposições, nosso EV até o river é de 225 fichas que é 1.5 vezes o valor ariscado. Isso já faz dessa aposta e estratégia algo muito favorável. Presumimos que o oponente se comportasse de uma determinada forma e estimamos o lucro em cima desta forma. Supondo que não tenhamos errado por muito, ou seja, que nossa observação esteja relativamente precisa, nosso EV ainda será maior do que o valor ariscado. Isso em qualquer situação de um contra um é uma aposta muito favorável.

Coletar informação comportamental dos adversários com precisão é tão importante quanto saber usa-la. Nesse trabalho não abordaremos essa coleta. O objetivo é assumir que temos essas informações e trabalhamos com elas para maximizar o lucro de fichas.

Trabalhamos alguns exemplos simples de EV nesse capitulo, sem considerar se estamos num torneio, cash game, Sit e Go, etc... Mas a verdade, é que trabalhar essas diferenças é fundamental. No próximo capitulo vamos começar a abordar a primeira destas formas de jogar Texas Hold'em, o cash game.

4 Cash Game

Nesta seção serão desenvolvidas estratégias básicas para jogar Texas Hold'em de uma das formas mais comuns, o *cash game*.

O *cash game* é a forma mais simples de se jogar pôquer. Nele os blinds são fixos, ou seja, não aumentam. Além disso, os jogadores podem entrar e sair a hora que quiserem. Quando entram, pagam um blind obrigatório (pode-se esperar para entrar na posição do big blind, para então pagar blind na posição mais conveniente), mas quando saem não há nenhum custo de fichas. Pode ser jogado de 2 a 22 jogadores, mas normalmente se é jogado de 4 a 9 jogadores. Pode-se também estipular um número máximo de jogadores. Em sites da internet como *Pokerstars* ou *888Poker* por exemplo, a maioria das mesas tem limite de 9 ou 6 jogadores.

Normalmente a maioria dos jogadores começa com um número razoavelmente grande blinds, entre 50 e 100 blinds, isto permite jogar com muita cautela, obtendo informações sobre os adversários antes de ariscar um grande número de fichas.

O primeiro tópico a ser discutido neste capítulo é o de posição na mesa. O fato é de que a posição na mesa em que um jogador se encontra interfere no seu EV em qualquer etapa da rodada, seja pré-flop, flop, turn ou river. A posição em que se está, determina com quais mãos é conveniente jogar, apostar ou correr.

Para ilustrar melhor, veremos um exemplo logo a seguir.

Exemplo 4.1. *Suponha que você esteja na mesa de pôquer com 9 pessoas (você e mais 8) no pré-flop, com uma mão que considere mediana, como por exemplo A10,A9,A8,J10, ou um par menor ou igual ao par de 10. Você paga o blind, imaginando que tenha em média* $\frac{2}{3}$ *de chances de vencer contra uma mão aleatória de um jogador que apenas pague o blind, supondo que todos os jogares anteriores a você tenham corrido e que apenas um deva pagar ou aumentar. Suponha ainda que a chance de cada jogador que ainda deve fazer seu movimento de aumentar a aposta é de* 10%, *e que você vai correr caso isso aconteça. Calcule o EV de sua mão em relação a sua aposta inicial até final da rodada, supondo que haja apenas checks.*

Observe que o EV depende de sua posição na mesa. Primeiro vamos considerar os casos em que você não é big blind ou small blind. Neste caso seja BB o big blind e J o número de jogadores a sua frente. Então o referido EV é aproximado por

$$\left(1-\frac{J}{10}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3BB}{2}+kBB\right)-\left(\frac{BB}{3}\right)\right]-\frac{JBB}{10}.$$

Em que kBB é valor médio apostado após as apostas obrigatórias (small e big blind).

$$Obs: \; Para \; 2 \leq J \leq 8, \; \left(\frac{9}{10}\right)^{J} \cong 1-\frac{J}{10}.$$

Note que $k = 1$ se quem paga está antes do small blind, $k = \frac{1}{2}$ se quem paga é o small blind e $k = 0$ se quem paga é o big blind. Calculando, temos que kBB será dado por

$$kBB = \frac{(J-2)BB + 0,5BB}{J}.$$

Substituindo, teremos o EV do exemplo anterior dado por:

$$\left(1 - \frac{J}{10}\right)\left[\left(BB + \frac{(6J-9)BB}{3J}\right) - \left(\frac{BB}{3}\right)\right] - \frac{JBB}{10} =$$

$$\left(\frac{10-J}{10}\right)\left[\frac{(8J-9)BB}{2J}\right] - \frac{JBB}{10} =$$

$$\frac{(10-J)(8J-9)BB - 2J^2BB}{20J}.$$

A tabela a baixo lista o EV para todos os valores de J de 8 a 2.

J	EV
2	1,3BB
3	1,45BB
4	1,325BB
5	1,05BB
6	0,7BB
7	0,307BB
8	-0,113BB

Olhando a tabela, fica claro que as posições finais tem melhor EV. Além disso, elas tem uma vantagem estratégica, pois quanto mais próximo da posição final se está, maior a quantidade de informação se obtém antes de tomar uma decisão.

Na primeira rodada o small blind e o big blind tem vantagem no EV, mas nas rodadas seguintes, como eles são os primeiros a jogar, eles estarão em total desvantagem em relação a posição. Além disso, no pré-flop eles fazem apostas obrigatórias sem ver as suas cartas (daí o nome "blind"), que obviamente é uma desvantagem.

Esse exemplo ajuda a ilustrar o fato de que a melhor posição na mesa, no ponto de vista estratégico, é a do dealer. A segunda melhor é a do jogador que joga antes do dealer, e assim por diante.

A seguir começaremos discutir estratégias no cash game rodada a rodada, começando pelo pré-flop, no qual nós decidimos com qual mão ir e quanto apostar.

4.1 Pré-flop

Serão discutidas agora as estratégias a serem adotadas no pré-flop. Para evidenciarmos a importância de uma boa estratégia, primeiro será apresentada uma estratégia ruim.

Suponha que um determinado jogador A esteja sentado em uma mesa de pôquer com mais 8 pessoas e cada jogador da mesa tenha 100 big blinds. Vamos demonstrar que a estratégia de dar all-in em todas as rodadas pode ser combatida por seus adversários com uma estratégia bem simples: dar call no all-in do jogador A apenas com as mãos QQ,KK e AA. Demonstraremos isto calculando o EV do jogador A.

Primeiro observe que dentre as

$$\binom{52}{2} = \frac{52!}{2!50!} = 1326$$

mãos possíveis, cada um dos 8 adversários do jogador A joga as

$$\binom{4}{2} = 6$$

possibilidades de AA, 6 possibilidades de KK e 6 possibilidades de QQ, totalizando assim 18 mãos em que os seus adversários jogam, ou seja, cada um deles joga

$$\frac{18}{1326} = \frac{3}{221}$$

das mãos. Sendo assim a chance de pelo menos um dos adversários de jogar A dar call em seu all-in é de aproximadamente

$$1 - \left(\frac{218}{221}\right)^8 \cong \frac{1}{9}.$$

Sabendo que a mão AA tem por volta de $\frac{4}{5}$ de chances de vitória no pré-flop contra qualquer mão diferente dela, considerando que a mão KK tem cerca de $\frac{4}{5}$ de chances de vitória contra qualquer mão que não seja ela mesma e não seja composta por ás, e além disso, lembrando que a mão QQ tem em média $\frac{4}{5}$ de chances de vitória contra qualquer mão diferente dela e que não seja composta por ás ou rei, então vamos supor que se algum jogador der call no all-in do jogador A, esse jogador tem uma chance de vitória de $\frac{3}{4}$.

Desconsiderando que o jogador A é big blind $\frac{1}{9}$ das vezes e small blind $\frac{1}{9}$ das vezes, então podemos aproximar o EV por

$$\frac{8}{9}\left(\frac{BB}{2} + BB\right) - \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}(100BB) - \frac{3}{4}(100BB)\right] = \frac{4BB}{3} - \frac{50BB}{9} = \frac{-38BB}{9}.$$

Este EV é claramente muito desfavorável ao jogador A e consequentemente favorável a seus adversários. Com essa estratégia o jogador A perde em média 5 fichas por rodada se levarmos em consideração seu EV. É importante ressaltar que se diminuirmos o número de jogadores na mesa o EV do jogador A sobe. No entanto mesmo em um heads-up (1 contra 1) seu EV ainda seria negativo se seu adversário fosse com um número um pouco maior de mãos boas como AK, AQ, AJ,JJ e par de 10.

Agora vamos analisar uma outra estratégia. Suponha que o jogador B em uma mesa com mais 8 pessoas decida só pagar apostas pré-flop (inclusive blind) com as mão AK,AQ e pares, e ainda, na posição big blind ele paga com qualquer mão. Supondo que ele ganhe em media 10 big blinds quando leva o pote e perca 10 big blinds quando um adversário leva o pote em uma mão em que o jogador B joga. Além disso, estimando que ele ganhe e média $\frac{2}{3}$ das mãos em que joga, vamos demonstrar que o EV é positivo.

Primeiro verifiquemos a proporção de mãos que o jogador B joga. Dentre as 1326 possibilidades há 16 possibilidades para a mão AK e analogamente 16 possibilidades para a mão AQ. Ainda existem 6 possibilidades para cada um dos 13 pares, ou seja, o jogador B sempre joga 110 das 1326 mãos possíveis, ou seja, a chance do jogador B receber uma dessas mãos é de

$$\frac{110}{1326} \cong \frac{1}{12}.$$

Mas note que ele joga com qualquer mão na posição de big blind, e nessa posição em que ele joga $\frac{1}{9}$ das vezes, o jogador B não tem uma das mãos com que ele joga sempre em $\frac{11}{12}$ das vezes. Disto segue que ele joga com outras mãos sem ser as anteriormente especificadas em

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{11}{12} \cong \frac{1}{10}$$

das vezes.

Concluímos portanto que o jogador B joga aproximadamente

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{11}{60} \cong \frac{1}{6}$$

das vezes.

Portanto o EV da estratégia do jogador B é aproximadamente

$$\frac{11}{12}\left(-\frac{BB}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}(10BB) - \frac{1}{3}(10BB)\right) = \frac{-11BB}{24} + \frac{20BB}{18} = \frac{47BB}{72}.$$

O EV (antes de ver a mão) do jogador B é maior que zero, mas não é muito maior que zero. O principal motivo pelo qual isso ocorre é que o jogador tem ganhos quando vence em média não muito altos e quando perde o pote o jogador B não perde muito pouco. Isso nos leva a concluir que, mesmo indo com mãos boas o jogador não vai ter um EV muito alto se não souber explora-las. Por exemplo, mãos de cartas consecutivas e naipadas tem maiores chances de sequência e flush, que podem trazer lucros consideráveis se bem jogadas. Isto porque se um jogador só joga com mãos que tem chances altas de vencer no pré-flop, então ele se torna muito previsível, e consequentemente se torna mais difícil obter grandes ganhos de fichas com essas mãos.

É claro que a melhor estratégia pré-flop varia de situação para situação, mas a seguir temos uma tabela com exemplo de uma estratégia eficaz pré-flop para um jogador de cash game com stack médio para grande, em torno de 50-100BB.

	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
A	P	P	P	P	P	P	P/N	P/NL	P/NL	P/N	P/N	P/N	P/N
K	P	P	P	P	P	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
Q	P	P	P	P	P	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
J	P	P	P	P	P	P	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
10	P	P	P	P	P	P	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP
9	P	P/N	P/N	P	P	P	P	P/N	NP	NP	NP	NP	NP
8	P/N	NP	NP	NP	P/N	P	P	P	NP	NP	NP	NP	NP
7	P/NL	NP	NP	NP	NP	P/N	P	P	P	NP	NP	NP	NP
6	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	P	P/N	NP	NP	NP
5	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P/N	P	P/N	NP	NP
4	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P/N	P	NP	NP
3	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP
2	P/N	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P

- P=pagar blind
- P/N= pagar blind se mão estiver naipada (ambas as cartas da mão tem o mesmo naipe)
- P/NL= Pagar blind se estiver até 3 posições atrás do big blind
- NP= não pagar

A tabela a cima é para um jogador que pretende jogar um grande número de mãos. Ela é muito boa em uma mesa calma, em que os jogadores não estão apostando muito alto e raramente aumentam pré-flop. Para uma mesa mais agitada com rises mais frequentes, uma tabela mais apropriada é a seguinte:

	A	K	Q	J	10	9	8	7	6	5	4	3	2
A	P	P	P	P/NL	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
K	P	P	P/NL	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
Q	P	P/NL	P	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
J	P/NL	P/NL	P/NL	P	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
10	P/NL	NP	NP	P/NL	P	P/NL	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
9	NP	NP	NP	NP	P/NL	P	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP
8	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	NP	NP	NP	NP	NP
7	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	NP	NP	NP	NP
6	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	NP	NP	NP
5	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	NP	NP
4	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP	NP
3	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P	NP
2	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	NP	P

No caso do jogar estar short stack recomenda-se sair da mesa e pegar mais fichas para voltar, pois não é bom jogar cash game short stack. Se os jogadores na mesa estiverem estupidamente agressivos dando all-in com frequência, é mais recomendável ir só com mãos muito fortes, como pares altos e AK. Inúmeras outras tabelas poderiam ser feitas considerando diversos fatores que podem ocorrer, no entanto, a ideia principal, é saber quais as mãos com boa chance de vitória contra a maioria das outras e as que não tem grandes chances de vitória, mas por outro lado, uma boa chance de fazer um estrago no stack do adversário com sequência ou flush. Ao analisar a primeira tabela de cartas, fica evidente quais são essas mãos, ao analisar a segunda fica evidente quais são as mãos mais facilmente descartáveis quando o jogo começa a ficar perigoso e se torna necessário jogar menos mãos.

Uma última coisa a ser discutida no pré-flop é o blefe, é recomendável blefar somente nas duas ou 3 posições atrás do big blind dependendo da forma como os jogadores a sua frente estiverem jogando e a frequência com que estiverem dando call em raises pré-flop. Mesmo quando for blefar, é melhor tentar fazer isso de preferência com um par de cartas que tem maior chance de flush e sequência como as consecutivas naipadas.

A seguir vamos falar do flop que é para muitos a parte mais divertida e importante do Texas Hol'em. No flop uma mão ruim como 2 e 7 pode virar uma mão monstro e um par de ases uma mão inútil. Os cálculos para valor esperado de uma estratégia também ficam mais complexos, pois tem de considerar 3 estágios de apostas e a utilização dos conceitos desenvolvidos neste trabalho é imprescindível.

4.2 Flop

Nesta parte do jogo ganhamos mais informações. Ganhamos a informação das cartas que estão na mesa, do novo número de adversários, que é quase sempre menor do que o pré-flop e a nossa posição na mesa em relação a esses adversários. Ainda assim, é imprescindível a utilização das informações obtidas nas rodadas anteriores (se houver) e a aplicação do teorema de Bayes a elas, considerando sempre a situação em que se encontra.

Situação 1. *A primeira situação a ser considerada é a que você acerta uma mão monstro no flop, que é uma mão muito forte, com cerca de 90% ou mais de chances de vencer. Essa mão é conhecida como* nuts. *Alguns exemplos são straight flush, quadra, full house, flush, sequência e trinca.*

Se você tem um nuts, tudo que você vai querer é fazer com que seus adversários apostem o máximo possível. A posição em que estiver na mesa e a situação em que estiver (isso em relação a se já há apostas feitas no turno) vai determinar a forma ideal de se jogar. Caso você tenha alguma informação, a utilização do teorema de Bayes é indispensável.

Vamos estudar os principais casos nos atendo as situações mais comuns, que certamente ocorrerão com frequência.

Caso 1: Você é o primeiro a apostar na rodada. Neste caso você não possui nenhuma informação do turno. Então você vai ter que usar as informações do pré-flop e das rodadas anteriores. Existem N jogadores a sua frente. Quanto maior N, maior a chance de alguém ter acertado alguma coisa ou estar com algum draw (flush draw e straight draw por exemplo). Mas é claro que também existe uma outra variável, que é as cartas da mesa. Se forem cartas baixas, por exemplo, sem possibilidade de flush draw ou com poucas possibilidades de straight draw, então a chance de alguém ter acertado algo é pequena, mas como esses casos são exceção, deve-se sempre pensar em fazer uma aposta nestas situações. A aposta a ser feita, pode ser de duas formas.

A primeira é olhando o valor do pote P e fazer uma aposta que se valha a pena pagar com um flush draw ou stright draw, ou ainda, uma aposta que se valha a pena fazer com flush draw ou stright draw. Normalmente vai ser algo em torno de $\frac{P}{3}$. Obviamente se alguém der reraise, então você volta a aumentar pelo menos na mesma proporção do reraise do adversário.

A segunda é dar all-in. Deve-se fazer isso quando se tem indícios de que algum jogador vai pagar. Alguns casos como o adversário estar short stack (com poucas fichas) ou estar irritado, ou simplesmente estar jogando com repetidos all-in, podem ser considerado indícios.

Se N for menor como por exemplo 1,2, ou até 3 jogadores, então é pertinente considerar passar a vez, ou seja, dar check. As duas alternativas anteriores continuam válidas, assim como a alternativa de passar a vez agora é válida. Para decidir qual é a melhor alternativa é necessário verificar qual delas tem o EV mais alto. É claro que isso depende das informações que você tem a respeito da probabilidade de cada um dos adversários de dar call e da probabilidade de cada um deles blefar ou simplesmente apostar tendo uma mão razoável (entendesse por razoável, como uma mão com boas chances de vitória).

Para decidir qual a melhor alternativa, basta verificar se P(call) que é a probabilidade de alguém dar call é maior ou menor do que P(bet) que é a probabilidade de alguém apostar. Caso P(call)>P(bet), então você aposta seguindo a lógica para $N > 3$. Caso P(bet)>P(call), então você dá check. Se houver aposta de algum adversário você verifica se a chance dele estar blefando é maior ou menor do que não estar. Caso a chance dele estar blefando seja maior, então é melhor dar check, caso contrário a melhor estratégia é dar raise na medida em que imaginar que o adversário deva pagar (é claro que para fazer essa aposta é recomendável utilizar as informações dos folds e calls que você já viu do adversário), inclusive dando all-in.

Antes de ir para o caso 2, será explicado como calcular P(call) e P(bet).

Sejam $K_1, K_2, ..., K_n$ seus adversários e $P(K_i)$ a probabilidade de K_i dar fold, então

$$P(call) = 1 - \prod_{i=1}^{i=n} P(K_i).$$

Para estimar $P(K_i)$ com alguma precisão é preciso analisar o estilo de jogo do jogador K_i e se temos alguma informação sobre fold ou call do jogador K_i em situação similar, então aplicar o teorema de Bayes, como exemplificado na seção 3.

Sejam $J_1, J_2, ..., J_n$ seus adversários e $P(J_i)$ a probabilidade de J_i dar check. Então

$$P(bet) = 1 - \prod_{i=1}^{i=n} P(J_i).$$

Para calcular $P(J_i)$ com desejável precisão também é necessário analisar o estilo de jogo do jogador J_i. Por exemplo, alguns jogadores dão raise com draws muito frequentemente, enquanto outros, preferem dar check. A aplicação do teorema de Bayes também é útil caso já tenha havido situação similar para J_i.

Uma observação útil a ser feita é que obviamente esses cálculos são feitos de cabeça através de aproximações. Esse é um dos motivos pelos quais para mais de 3 jogadores na mesa esse tipo de conta se inviabiliza, mas felizmente não é comum ter muitas pessoas no pote já na parte do flop.

Caso 2: Você é o último a apostar na rodada. Neste caso você viu cada jogador fazer pelo menos uma ação e há dois sub-casos possíveis. O primeiro é que há uma aposta na mesa, ou seja, pelo menos um jogador apostou no flop. O segundo é que todos passaram a vez e chegou sua vez de apostar. Cada um dos dois sub-casos será abordado a seguir.

No primeiro sub-caso em que pelo menos um jogador apostou na etapa do flop, para você que tem como objetivo maximizar as apostas dos adversários só há duas opções plausíveis, ou você da raise ou da call.

Suponha que só um adversário apostou. Se o adversário estiver blefando vale muito mais a pena dar call, visto que é provável correr para um raise. Mas se o adversário possui alguma coisa como um draw, dois pares ou maior par, vale a pena aumentar, dependendo da situação, até dar all-in. A estratégia aqui é simples. Basta verificar se a probabilidade do adversário estar blefando é alta (a partir de aproximadamente 50%). Caso tenha constatado através de suas observações (obervações estas que devem ser feitas através de métodos científicos validados através de ramos da psicologia) que o adversário muito provavelmente está blefando, então dar call é a melhor estratégia. Caso contrário dar um raise que faça sentido (preferencialmente igual ou maior que o do adversário) em relação ao pote, sempre olhando para os draws.

Caso tenha mais de um jogador que tenha apostado ou pago aposta, então é quase sempre viável dar raise, porque é muito improvável que ambos estejam blefando simultaneamente, principalmente aquele que deu call ou reraise.

No segundo sub-caso, todos passam a vez. Nesse caso você deve calcular P(call), caso P(call)>0,5 (isso pode variar um pouco de acordo com a estratégia). Então vale a pena fazer uma aposta que faça sentindo, como por exemplo $\frac{1}{3}$ do pote em caso de haver cartas possibilitando um forte draw ou o próprio pote se suspeitar que alguém tem uma mão forte (mas mais fraca que a sua). Caso decida que não vale a pena apostar, então passe a vez.

Caso 3: Você não é o último e nem o primeiro a apostar. Aqui as coisas ficam complicadas. Vamos dividir novamente em dois sub-casos.

No primeiro sub-caso alguém já apostou no flop. No caso 2 em sub-caso semelhante, considera-se a possibilidade de blefe, mas neste caso devemos primeiro analisar quantos já apostaram no flop. Caso tenha sido mais de um, prossegue-se como no caso 2. Caso tenha sido apenas um jogador a apostar, estima-se a probabilidade dele estar blefando, que chamaremos de P(bleff), e a probabilidade de call de um possível raise nosso dos jogadores que estão adiante, que, chamaremos (como definido a cima) de P(call). Se $P(bleff) \cdot (1 - P(call)) < 0,5$ (esse valor pode variar de acordo com a estratégia) então é melhor darmos raise, caso contrário é melhor darmos call.

No segundo sub-caso todos os jogadores que o antecedem na mesa tenham passado a vez e você não é o último jogador a apostar na rodada. Nesse caso basta verificar se P(call)>0,5 (esse valor pode variar de acordo com a estratégia). Se isso ocorre, então vale a pena fazer uma aposta (criteriosa como já foi insistentemente pontuado neste trabalho), caso contrário é melhor dar check.

Situação 2. *Agora vamos considerar uma outra situação bem diferente, uma situação em que você tem um flush draw ou straight draw (não simultaneamente).*

Embora a posição na mesa mude alguma coisa no EV das decisões; neste caso não vamos dividir em tantos casos como na situação de termos nuts. Vamos apenas analisar duas possibilidades que englobam todas. A primeira é a possibilidade de alguém já ter feito uma aposta no flop. A segunda é de ninguém ter apostado ainda no flop.

Primeiro suponhamos que alguém já tenha feito uma aposta. Vamos considerar que se acertarmos o out vencemos (isso quase sempre vai acontecer). Precisamos analisar o EV até o river para saber se vale a pena dar call, raise ou fold. Para isso precisamos fixar uma razão desejada entre valor ariscado no flop e EV até o river. Vamos supor que se não acertamos o out no turn, então vamos dar fold (essa suposição é para simplificar o cálculo, mas não interfere na eficácia do método). Vamos fixar EV até o river igual a 0,9V (é um EV proporcionalmente maior do que até mesmo all-in com AA pré-flop), em que V é o valor do call. Considerando que a chance de acertar o out no turn é em torno de $\frac{1}{6}$, teremos:

$$EV = \frac{1}{6}\bigg(K + V + C\bigg) - \frac{5V}{6},$$

em que K é o pote e C é o valor que você espera fazer com que o seus adversários apostem até o river. Vamos definir uma aposta como suficientemente favorável se EV>0,9V, ou seja,

$$K + V + C > 5V + \frac{27V}{5} = \frac{52V}{5} \cong 10V.$$

Desta forma, se $K+C > 9V$, então vale a pena pagar a aposta. Para estimar C é necessário estudar o comportamento de seus adversários e o padrão de apostas no turn e river. Para isso você precisa de alguma informação, mas mesmo assim, se V for muito pequeno (ex:1-2BB, ou até mais dependendo do tamanho dos stacks) quase sempre vale a pena pagar.

OBS: não consideramos a possibilidade de um jogador dar raise a sua frente, mas a menos que haja um jogador muito agressivo que ainda não apostou no flop. Isso não compromete o método, mas caso houver, é melhor não se comprometer no pote e dar fold.

OBS2: Apenas verificamos se vale a pena dar call, em relação ao raise. Ele está condicionado a duas situações. A primeira é forte suspeita de blefe e a segunda é comprometer emocionalmente o adversário com o pote. Mas é claro que você precisa de indícios que isso vai funcionar (obtidos através de analise comportamental).

Ainda considerando a situação do flush draw ou straight draw, vamos supor agora que ninguém tenha apostado. Há duas opções: apostar ou passar. Nesse caso, se você apostar, tudo que você não quer é um reraise a ponto de levar boa parte do seu stack no pote apenas com um flush draw ou straight draw. Então para verificar se vale a pena fazer uma aposta, precisamos calcular risco de reraise.

Normalmente o risco de reraise é pequeno, só há duas possibilidades em que ele poderá ser elevado. A primeira é alguém que já deu check possuir nuts ou uma mão razoavelmente forte. Nesse caso você vai precisar confiar na sua habilidade de analise comportamental.

A segunda possibilidade é haver um grande número de jogadores (3 ou mais) para apostarem ainda no flop. Se você for capaz de descartar ambas possibilidades, então certamente será conveniente fazer uma aposta.

Situação 3. *Nessa situação você tem aquilo que é chamado de* made hand. *É uma mão pronta. Essa situação engloba desde possuir um par até estar segurando uma mão monstro (situação já abordada). No entanto vamos excluir as mãos já abordadas na situação 1 e nos forcarmos nos outros casos de mãos prontas.*

As mãos prontas que vamos abordar no flop são pares, dois pares e eventualmente trincas (em alguns casos, como por exemplo ter um número elevado de pessoas no pote e ter 3 cartas de mesmo naipe na mesa, uma trinca pode não ser uma mão monstro no flop). Vamos dividir em casos esta situação.

Caso i: Você tem uma mão pronta forte, como por exemplo dois pares quando um dos pares não está na mesa, um par de ases com carta mais alta sendo rei ou dama, um par mais alto que as cartas na mesa, e até mesmo trinca na situação descrita no enunciado. Nessa situação sua mão provavelmente será favorita em relação a de seus adversários no flop. No entanto são mãos que tem uma boa chance de serem vencidas até o river, principalmente se houver um grande número de pessoas na mesa (3 ou mais jogadores).

Mãos como estas é aconselhável, sempre que não há uma aposta na mesa, faze-la. E faze-la de forma a amedrontar quem tem draws fortes, fazendo não ser tão conveniente pagar a aposta com flush draw ou straight draw. Levando em consideração que uma aposta de um terço do pote normalmente é bem conveniente a quem tem draws fortes, você vai apostar tentando fazer seus adversários correrem algo como metade do pote ou o próprio pote, ou até mais caso tenha confiança que os adversários vão correr.

A aposta é uma maneira de defender suas mãos de draws, que é normalmente muito eficiente. É claro que existem exceções (sempre existem exceções). Nessas exceções, em que houver jogadores que dão muito call com draw, você irá explora-los de outras maneiras e abrir mão desta estratégia. Contra esses tipos de adversários é bom verificar todos os possíveis draws e apostar ainda mais alto no river caso não houver virado na mesa os possíveis outs de seus adversários até lá.

Caso já houver apostas na mesa, quase sempre é o caso de reraise. Um reraise que novamente inviabilize jogar com draws forte. No caso da aposta que estiver na mesa já inviabilizar calls com draws fortes, então dar call é a melhor opção.

Como sempre há exceções. Você normalmente não quer dar um all-in no flop com uma mão deste nível no cash game, por isso dependendo do histórico comportamental dos seus adversários, ou até mesmo da sequência de raises, as vezes é vantagem dar fold. Por exemplo, suponha que você apostou e os 3 jogadores a sua frente deram raise. Provavelmente o call seria alto, e muito provavelmente alguém tem alguma mão forte, dependendo da situação pode ser o caso de correr.

Caso ii: Você tem uma mão média, como por exemplo maior par da mesa, segundo maior par da mesa com kicker alto, par e draw forte, par na mão maior do que uma carta na mesa, etc...

Independentemente de haver ou não uma aposta na mesa, não vale a pena dar call ou apostar muito com mãos médias. O melhor é tentar avançar para o turn pra tentar uma mão mais forte sem, ou quase sem custos e, aí sim quem sabe, ariscar mais. Por outro lado blefar quase sempre é uma opção independentemente da mão com que estiver. Mas quando se tem uma mão média, você tem draws para mãos altas e isso aumenta o EV do blefe. Nesse caso, sempre que não houver apostas na mesa, vale a pena verificar EV do blefe, normalmente o EV do blefe é maior no 1 contra 1.

Caso iii: Você tem uma mão baixa, definida como todas as mãos prontas ainda não abordadas nesse trabalho, como por exemplo par baixo, menor par da mesa, par médio com kicker baixo, etc...

Não vale a pena gastar fichas com esse tipo de mão. É recomendável dar fold a apostas com chances não muito altas de ser blefe. Além disso, também como no caso ii vale a pena calcular o EV de blefar. Nesse caso na maioria das vezes você vai dar check ou fold.

Situação 4. *Nessa situação sua mão é muito raca. Você não tem nenhum par, tem poucos outs e esses outs são para mãos não muito boas.*

Nesse caso, só resta dar check ou fold quando não parecer muito conveniente blefar. O que decidirá sua ação é o EV da ação blefar. Se esse EV for suficientemente alto, então você blefa. Podemos utilizar por exemplo o critério da situação 2 e definir EV suficientemente alto como 0,9V em que V é o valor ariscado.

4.3 Turn

No turn as situações 1,2,3 e 4 são praticamente análogas as do flop, fazendo-se algumas ressalvas, como por exemplo o fato de que o flush draw e straight draw tornam-se ainda menores do que no flop. Por isso os raises e calls com essas mãos que fazem sentido, são algo em torno de até $\frac{1}{6}$ (isso pode variar de acordo com a chance de fold do adversário. Mas se presumirmos que a chance de fold é zero, então o valor é em torno de até $\frac{1}{6}$ do pote) do pote e não $\frac{1}{3}$ como no flop. Além disso, as mãos prontas ficam mais fracas do que no flop, isso faze-se que o modo de jogar mãos médias (caso ii) assemelhe-se a jogar mãos baixas (caso iii).

Feitas estas ressalvas, é importante apenas lembrar de utilizar as informações de como os jogadores jogaram no flop para estimar sua mão, o que pode fazer diferença no cálculo do EV.

4.4 River

Se você estiver na situação 1 no river, descarte a possibilidade de não apostar. Check raramente faz sentido no river quando se tem uma mão monstro. Uma vez que não vai virar mais nenhuma carta e a mão do seu adversário não vai melhorar, então esta é a ultima oportunidade de apostar. A única forma de fazer sentido dar check no river é tendo muita certeza de que o adversário vai blefar, mas em cash game isso não é tão comum.

A situação 2 no river inexiste.

Na situação 3 no river você vai apenas calcular a chance de um adversário possuir uma mão melhor que a sua e calcular o EV, mantendo o critério de fazer apostas cujo EV é maior do que 0,9V, em que V é o valor da aposta.

OBS: Você pode mudar esse critério dependendo da situação para por exemplo 0,8V ou 0,7V (ou até menos), pois em algumas situações na mesa o nível dos adversários é alto e não tem muito o que fazer. Mas como isso é cash game, sempre se pode levantar e sair da mesa, para quem sabe tentar a sorte outro dia em uma mesa mais fácil.

Na situação 4 apenas calcula-se o EV do blefe. Se ele for suficientemente alto de acordo com os critérios estabelecidos (nesse caso 0,9V), então blefa-se, caso contrário corre-se ou passa-se.

A seguir veremos alguns exemplos da aplicação destes critérios, utilizando-se muito do que desenvolvemos até então neste trabalho.

Exemplo 4.2. *Suponha que você receba no início da rodada a mão J♥10♥ na posição do dealer. No pré-flop um jogador paga o blind, um outro jogador em seguida aumenta a aposta para 2BB, chega a sua vez de apostar e você dá call. O small blind dá fold, o big blind dá call, e então o primeiro jogador a pagar o blind dá call. O stack de todos os jogadores é de 98BB. Vira no flop as cartas*

Q♥9♥8♥.

Você acertou uma mão invencível na rodada. Agora você tem straight flush, o big blind aposta 2BB, o primeiro jogador seguinte corre e outro jogador que joga antes de você que vamos chamar de J paga a aposta do big blind, que vamos chamar de H. O pote agora é de 8,5BB e é nossa vez de apostar. Supondo que não tenhamos informações relevantes em relação a J e H, vamos desenvolver nossa estratégia de acordo com a situação 1.

Primeiro notemos que quem apostou no flop foi o big blind. É logicamente possível que ele esteja blefando. No entanto o jogador J dá call, por isso não faz sentido o jogador J não ter nada, pelo menos algum bom draw ele deve ter, pois dar call sem nada é totalmente ilógico. Lembremos que a nossa mão está ganha, ela é invencível nesta rodada, por isso devemos olhar para situação 1.

Observe que não é muito provável que o jogador J vá correr à uma aposta moderada pelas observações já feitas. Pensando nisso vamos aumentar para um valor que faça sentido pagar mesmo com um draw forte. Uma bom raise aqui é para 6BB, uma vez que o pote vai para 14,5BB e mesmo que o jogador H (big blind) corra, o jogador J que já sabemos que é menos propenso a correr vai ter que pagar 4BB que é menos de $\frac{1}{3}$ do pote. Utilizando essa mesma lógica é fácil de ver que a aposta de 7BB também é viável, no entanto vamos supor que por ter menos chances de todos correrem, nós optamos por apostar 6BB.

Vamos dar continuidade ao exemplo supondo que todos deram call e no turn as cartas são

Q♥9♥8♥2♥.

Suponha que o jogador H passou a vez e o jogador J apostou 6BB, o pote agora é de 28,5BB e é nossa vez de apostar.

Norteando-se pela situação 1, podemos verificar que 9,5BB seria uma boa aposta. No entanto o jogador J apostou após ter virado uma carta de copas e é bem provável que ele tenha acertado um flush. Pensando nisso suponha que nós tenhamos aumentado para 15BB, o jogador H corre e o jogador J dá call. No river nós passamos a ter na mesa as seguintes cartas

Q♥ 9♥ 8♥ 2♥ 6♣.

Após ver o river suponha que o jogador J apostou 25BB, o pote agora é de 78,5BB, nosso stack é de 77BB, já o stack do adversário é de 52BB. Considerando que se dermos all-in o pote vai para 155,5BB. Supondo que o adversário tenha uma mão alta, um call para ele de um all-in em que ele julga-se ter mais de 50% de chances de vencer pode fazer o adversário concluir que tem um EV alto, por isso é bem provável um call em um all-in. Supondo que não tenhamos obtido nenhuma informação que vá contra isso (informação essa encontrada através de estudos comportamentais que fogem ao escopo deste trabalho), então all-in com certeza é uma boa estratégia. Caso contrário, deve-se fazer um raise menor, por exemplo para 40BB.

Exemplo 4.3. *Suponha que tenhamos recebido a mão* 2♠ 2♣ *na posição anterior a do dealer e que todos tenham dado fold até jogarmos. Então aumentamos para 2BB e apenas o big blind pagou a aposta. No flop, vira na mesa*

3♥ 7♣ J♠.

Nosso adversário passa a vez. Por outro lado, através de notável conhecimento de ciências comportamentais, ao avaliarmos nosso adversário durante as rodadas anteriores, concluímos que ele tem 90% de chance de ser um jogador que corre em 90% das vezes à um raise de 4BB nessa situação e 10% de chances de ser um jogador que corre apenas 50% das vezes à este mesmo raise. Supondo que você já tenha visto ele correr uma vez em situação análoga, vamos analisar a viabilidade do raise para 4BB.

Primeiro vamos calcular a chance do adversário correr, para isso será necessário aplicarmos o teorema de Bayes. Sejam:

- A=Jogador deu fold em situação similar;
- B=Jogador dá fold 90% das vezes nesse tipo de situação.

Note que:

- P(A|B)=0,9
- P(B)=0,9
- P(A|B^c)=0,5
- P(B^c)=0,1

Aplicando teorema de Bayes verificamos que

$$P(B|A) = \frac{0.9 \cdot 0,9}{0,9 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,5} = \frac{81}{86}.$$

Logo P($B^c|A$)=$\frac{5}{86}$, que implica que a chance do adversário ser do tipo que dá fold só 50% das vezes é muito pequena, e por isso mesmo vamos ignora-lá, fazendo isso podemos estimar que o adversário corre aproximadamente 90% (se não ignorássemos P($B^c|A$) seria 87,6%) das vezes nesta situação. Assim, se supormos que a chance de levar o pote até o final é de $\frac{1}{4}$ se o adversário dar call, aproximamos o EV até river por

$$EV = \frac{9}{10}\left(4,5BB\right) - \frac{1}{10}\left(\frac{3}{4} \cdot 4BB - \frac{1}{4} \cdot 8,5BB\right) = 3,7BB.$$

Isso é exatamente 0,925V em que que V é o valor apostado. Com toda certeza esta aposta é muito favorável. OBS: O pote no flop era 4,5BB (só somar de acordo com enunciado para verificar este fato).

Exemplo 4.4. *Suponha que você tenha recebido a mão* A♠K♥ *na posição de big blind. Todos os jogares apostam e apenas um jogador J paga o blind, além do small blind que vamos chamar de jogador S, então aumentamos para 3 BB a aposta, J e S pagam, todos aqui tem o mesmo stack de 100BB. Vira no flop as cartas*

K♠9♦A♥.

Supondo que nós tenhamos 90% de chances de certeza de que pelo menos um jogador adversário tem ás e em particular 75% *de certeza que J tem ás, decidamos uma boa forma de jogar olhando para a situação 3.*

Note que se um jogador tem ás, então esse jogador tem uma mão razoavelmente forte, é bem improvável que vá dar fold a uma aposta não muito alta. Sabendo que o pote é de 9BB, olhando parra situação 3, é possível verificar que uma aposta de 3BB certamente é uma aposta razoável. Suponha que tenhamos feito essa a aposta e apenas J tenha dado call, então o pote agora é de 15BB. Suponha que no turn tenhamos

K♠9♦A♥Q♠.

Agora é possível que o adversário tenha acertado sequência. No entanto é muito mais provável que ele tenha straight draw ou flush draw. Mas vale lembrar que suspeitamos seriamente que o adversário tenha um ás, e o de espada não é. Logo um flush draw se torna bem mais improvável, assim como uma sequência, com certeza um straight draw é bem mais plausível.

Ao analisarmos esta situação, suponha que decidimos apostar 5BB, suponha também que o adversário ao ver nossa aposta tenha aumentado para 10BB. Agora estamos em uma situação complicada. Muito provavelmente o adversário tem alguma coisa na mão, mas é muito improvável que ele tenha trinca ou sequência. Por outro lado não é recomendável se ariscar tanto com 2 pares, por mais de sejam os maiores pares possíveis. Então olhando para isso damos call. O pote agora é de 45BB. Chega a hora do river e olhamos para mesa e vemos

K♠ 9♦ A♥ Q♠ J♣.

Se o adversário estiver segurando um 10 ele tem sequência. Isso é preocupante, mas como ele tem segundo a nossa avaliação 80% de chances de ter ás. Então basta fazer algumas contas para concluir que a chance do adversário ter 10 não é muito grande.

Verifiquemos a chance da mão dele ser melhor que a nossa. Como ele tem 80% de chances de ter ás, ele nos vence com A10 ou AA aproximadamente $\frac{1}{11}$ das vezes que tem pelo menos um ás. Além disso, dentro dos outros 20% das vezes ele nos vence quando tem KK,QQ,99,JJ, ou qualquer mão com 10 que não seja ás, verificamos que dentre as possíveis por volta de 1000 possibilidades (é um arredondamento lógico excluindo as cartas que nós já sabemos que ele não tem), estas somam por volta de 60 possibilidades. Calculamos assim que ele tem por volta de

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{1}{11} + \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{100} = \frac{8}{110} + \frac{12}{1000} \cong 9\%$$

de chances de ter uma mão melhor que a nossa.

É fácil de ver que para qualquer valor apostado V, o EV será maior do que 0,9V desde que J cubra a aposta. Então nossa preocupação passa a ser fazer uma aposta que o adversário cubra. Levando em conta a aposta anterior do adversário de 10BB que deve ser o mínimo que imaginemos que ele esteja disposto a ariscar. Uma aposta de 15BB pode fazer com que ele tenha um EV muito alto sob sua própria ótica, pois o pote vai para 60BB e um call para ele com chance de $\frac{2}{3}$ de vencer tem um EV maior que 70% do seu valor apostado.

Nessa mesma lógica, ainda pensando na ótica do adversário, nenhum call tem EV menor que $\frac{2}{3}$ do valor apostado para ele. Mas é importante frisar que uma aposta alta nossa pode aumentar a expectativa do adversário em relação a nossa mão. Por essa razão, a menos que nós tivermos muita certeza de que ele vai dar call, um all-in não deve ser uma alternativa tão boa como uma aposta moderada como a de 15BB. Por outro lado, se o adversário der reraise, então um all-in deve ser uma opção muito mais atraente, visto que o pote vai ser bem maior que o stack de ambos.

5 Torneio

Neste capítulo vamos trabalhar estratégias para torneios de pôquer, mas antes é necessário explicar como funciona um torneio.

Um torneio é um campeonato de pôquer em que existem múltiplas mesas e os blinds aumentam periodicamente. Além disso, a partir de determinado momento é possível existir uma aposta obrigatória antes de qualquer rodada, em que todos na mesa pagam uma taxa que chamaremos de ante.

Normalmente se A_i é o i-ésimo aumento no blind do torneio, então $A_{i+1} \geq A_i$. Isto ocorre para que o torneio não demore semanas para acabar, afinal de contas existem torneios de pôquer com milhares de participantes.

Normalmente os jogadores começam o torneio com um grande número de big blinds. No entanto, ao aumentarem, isso na maioria das vezes muda, tornando normal chegar ao final de um torneio (entre os 5% remanescentes) com short stack. Por isso não é possível passar o torneio todo utilizando critérios para uma aposta suficientemente favorável de cash game. Isto porque, caso o jogador espere por oportunidades muito raras, o aumento dos blinds pode pulverizar seu stack antes mesmo que tenha oportunidade de dar um all-in. Mas ainda é importante e quase sempre possível fazer apostas favoráveis.

Para isso existe um critério muito simples em que podemos definir uma aposta suficientemente favorável (aplicável às apostas grandes) em determinado momento do torneio.

Primeiro defina uma aposta suficientemente favorável I para o momento inicial do torneio. Depois defina uma aposta suficientemente favorável no momento em que restarem 2 jogadores que chamaremos de F (F<I). Escrevemos I,F como $I = iV$ e $F = fV$, em que V é o valor médio ariscado e $1 > i > f > 0$.

Seja N, o menor número de all-ins que precisamos vencer para ganhar o torneio. Defina

$$M = \frac{I - F}{N}.$$

Se o número de jogadores no torneio estiver entre K e $\frac{K}{2}$ em que K é o valor inicial, então dizemos que uma aposta (estamos falando das apostas grandes) é suficientemente favorável se o EV dela está entre I e I-M.

Generalizando este conceito, definimos uma aposta suficientemente favorável se quando temos no torneiro um número de jogadores J tal que

$$\frac{k}{2^n} < J \leq \frac{k}{2^{n+1}},$$

então

$$I - (n+1)M \leq EV.$$

Note que para apostas muito pequenas, as vezes esse critério não faz sentido, até porque elas podem ter intuito de coletar informações do adversário, com EV muitas vezes bem difícil de se calcular.

Verifiquemos agora a eficácia do método supondo que estamos em um torneio com 1024 pessoas e que apostamos o equivalente ao nosso stack em media até o torneio ter 512 pessoas, e se vencermos, apostamos novamente o equivalente ao nosso stack até o torneio ter 252 jogadores, e assim por diante. Desprezando os blinds e antes (no sentido de ante, como definido o início deste capítulo), verifiquemos a chance de vencer o torneio, e a chance chegar no final, aqui definido entre os 64 primeiros. OBS: o final do torneio perto das posições premiadas é também chamado de bolha.

Primeiro verifiquemos que o número de all-ins mínimo para vencer o torneio é 10, e definindo I=0,95V e F=0,65V, aplicando a fórmula antes desenvolvida, temos que a chance de vencer o torneio sob essas hipóteses é maior do que

$$0,92 \cdot 0,89 \cdot 0,86 \cdot 0,83 \cdot 0,80 \cdot 0,77 \cdot 0,74 \cdot 0,71 \cdot 0,68 \cdot 0,65 \cong 8\%,$$

por outro lado a chance de terminar na bolha é maior do que

$$0,92 \cdot 0,89 \cdot 0,86 \cdot 0,83 \cong 58\%.$$

OBS: Utilizamos aqui o fato de que se apostamos durante um determinado período o equivalente a nosso stack com EV superior a kV. Logo a chance dobrarmos o stack nesse período é superior a k.

No entanto, a realidade é que existem blind e ante, o que faz desse resultado ainda impreciso. Mesmo se supormos, que o gasto destes blinds e antes, nos sujeite a apostar com risco de vitória menor, diminuindo em $0,05V$ o seu EV médio sujeito a fórmula desenvolvida anteriormente, teremos que a chance de vencer o torneio é maior do que

$$0,87 \cdot 0,84 \cdot 0,81 \cdot 0,78 \cdot 0,75 \cdot 0,72 \cdot 0,69 \cdot 0,66 \cdot 0,63 \cdot 0,60 \cong 4\%,$$

enquanto isso a chance de terminar na bolha é maior do que

$$0,87 \cdot 0,84 \cdot 0,81 \cdot 0,78 \cong 46\%.$$

É claro que as condições iniciais I e a final F de aposta suficientemente favoráveis são muito difíceis de se obedecer a menos que você tenha um conhecimento muito grande em relação a ciências comportamentais e sua aplicação no pôquer através do cálculo do EV, ou seja, esses números não podem ser levados a sério em um torneio por qualquer pessoa. As condições I e F devem ser estabelecidas de forma mais realista possível, levando em conta seus conhecimentos.

Entrar em um torneio de 1024 pessoas com chances de 4% de vencer é algo incrível. Se levarmos em conta que o primeiro colocado leva por volta de 15% da premiação do torneio, esta que por sua vez é equivalente ao preço de 900 inscrições, fica nítido o quão vantajo é se inscrever, basta calcular o EV!

Uma observação útil a ser feita, é que 4% ainda é uma chance não tão alta (deixando de levar em conta o número de participantes). Por esse motivo esses cálculos que são relativos ao jogo de um jogador genial revelam que é muito mais fácil se perceber no nível em que se está no jogo de pôquer, olhando para a frequência que se chega na bolha, e não a frequência que se ganha torneio.

A seguir vamos discutir as estratégia do torneio por etapas dividindo o torneio entre começo, meio e fim.

5.1 Começo do torneio

Definimos o começo do torneio como a parte do torneio que tem início literalmente no início do torneio (é literalmente quando começa o torneio) até a parte em que há apenas 25% dos jogadores no torneio.

Esta é a parte do torneio em que o EV tende a ser proporcionalmente maior em relação a V (valor médio ariscado), e isso ocorre por vários motivos.

O primeiro é que os blinds tendem a ser menores em relação ao stack e normalmente não tem ante no início do torneio.

O segundo é que os adversários são em média mais fracos, no sentido de que eles tem pouco conhecimento em ciências comportamentais e tão pouco são habilidosos para aplica-los com conhecimento matemático básico, é comum inclusive encontrar adversários que mal sabem fazer contas.

O terceiro e último motivo a ser apontado é a frequência com que se paga os blinds no início. Ela tende a ser menor do que no final, pois os jogadores normalmente jogam mais tempo com a mesa cheia, com o número máximo de jogadores (embora possam existir regras para diminuir essa diferença). Não vamos considerar desgaste físico ou emocional pois esse critério é subjetivo demais.

Por as apostas terem em média EV maior em relação ao valor apostado, é recomendável aproveitar o início do torneio para ganhar a maior quantidade de fichas possível. No exemplo apresentado no início do capítulo, supomos que em média um jogador quadruplicasse seu stack nesse início, mas a verdade é que em torneios cuja os quais os blinds não sobem muito rapidamente é possível fazer muito mais do que quadruplicar seu stack nessa parte inicial, jogando de forma séria procurando EVs suficientemente altos.

No início do torneio uma tática inteligente é observar os jogadores e decidir quais jogadores da sua mesa são mais fáceis de tirar grandes apostas com mãos não tão altas (com mais frequência). Ao fazer isso você pode pagar blind com mãos mais fracas no pré-flop contra esses jogadores, sabendo que se acertar uma mão muito boa no flop, será mais fácil de tirar fichas deles. Por outro lado, contra jogadores que apostam muito menos, mas ainda assim apostam muito mal, você deve enfrenta-los com mãos mais fortes (pré-flop), pois é muito mais fácil defender mãos fortes com apostas contra esse tipo de jogador.

No início de torneios o teorema de Bayes deve ser utilizado com frequência para tentar traçar tendências comportamentais que influenciam diretamente no EV. Basicamente, se você viu o jogador fazer um movimento em situação parecida anteriormente, então você considera a decisão deste jogador para aplicar o teorema de Bayes na situação atual, e quanto mais rápido utilizar a informação, melhor.

Explorar rapidamente o adversário utilizando informações adquiridas recentemente é uma das formas de fazer seu stack multiplicar varias vezes na fase inicial do torneio. Quanto menor o número de oportunidades perdidas através do uso destas informações e aplicação do teorema de Bayes, maior tende a ser seu stack após o término da fase inicial.

5.2 Parte intermediaria do torneio

Definimos como parte intermediaria do torneio, a parte do torneio que vai do final da parte inicial do torneio até quando houver apenas 5% dos participantes do torneio.

Nessa parte do torneio, os blinds estão mais altos e os jogadores que restaram já são em média mais fortes, dificilmente você vai encontrar algum que não sabe fazer conta. Por esses motivos o EV tende a ser menor do que na parte inicial em relação ao valor apostado.

Nesta parte do torneio passa a ser uma idéia muito mais ruim pagar blind com mãos muito fracas, ou com mãos medianas nas posições iniciais na mesa. É recomendável pagar blind nas posições iniciais apenas com pares altos (JJ,QQ,KK,AA) ou AK, AQ. Nas posições medianas de 4 a 6 jogadores atrás do big blind, considera-se pagar com pares menores como 99,88,77. Nas posições de 1 a 3 jogadores atrás do big blind, já considera-se pagar com qualquer par e AK,AQ,AJ,A10, além disso, em algumas situações nessas posições também pode ser conveniente pagar blind com mãos como J10 e 10-9 naipados. Essa cautela já contribui para aumentar o EV pré-flop consideravelmente, que é indispensável, uma vez que o blind nessa fase já passa a ser uma parte maior do stack em média do que na parte inicial.

Nessa parte do jogo ja é de se esperar que seus adversários tenham melhores habilidades analíticas, considerando isso você deve imaginar que seus folds, calls, raises e a situação em que os faz serão analisados. Por esses motivos para não tornar-se muito previsível sua estratégias, é recomendável jogar conjuntos de mãos de formas parecidas. Por exemplo, podemos jogar com todos os pares 2-2 até 10-10 da mesma forma, também jogar com os pares QQ,JJ da mesma forma e AA,KK do mesmo jeito. Além disso, jogar as mãos com ás (com exceção de AA) da mesma forma, e jogar as mãos de cartas consecutivas naipadas do mesmo jeito.

Se você conseguir diminuir a previsibilidade de sua estratégia de jogo, mantendo seu EV suficientemente alto em relação ao valor apostado, é bem provável que alcance a bolha, que nada mais é do que a parte final do torneio que será discutida a seguir.

5.3 Parte final do torneio

Definimos a parte final do torneio, como a parte que corresponde do fim da parte intermediaria do torneio até o final do torneio (literalmente o final, até restar somente 1 jogador).

Nesta parte dos blinds estão muito altos em relação a média de ficha dos jogadores, por esse motivo, o EV em relação a apostas tende a ser menor, uma vez que se tem certa urgência de fazer apostas, e apostas grandes.

As mãos com que se deve pagar blind (que nesse momento já é uma aposta considerável) devem ser ainda mais mais criteriosas. Enquanto em determinadas situações se é recomendável dar all-in com praticamente qualquer mão (como por exemplo quando o pote é muito maior que seu stack), em outras situações é recomendável dar fold com praticamente todas as mãos (como por exemplo quando tem 3-4 pessoas no pote em all-in e você tem uma mão forte, mas suspeita seriamente que alguém tem uma muito mais forte). O fato é que all-ins pré-flop vão se tornar muito recorrentes e dar all-in pré-flop deve se tornar cada vez mais vantajoso.

Será então útil sempre que um adversário dar all-in, considerar a posição da mesa em que ele está, o valor do pote que ele almejava e o número de fichas que ele possuía, ao analisar isso, cabe a você verificar quais mãos tinham um bom EV nessa situação, dessa forma nós podemos estimar a força da mão do adversário (faremos isso em um exemplo a seguir) e considerar isso no calculo de EV.

Roubar blinds nessa altura do campeonato pode ser vital para a sobrevivência de um jogador, então blefe em posição (que é o blefe na posição de dealer ou próximo a ela) será utilizado frequentemente, pois quase sempre o EV desta ação será positivo, até mesmo em muitas situações blefando com all-in.

Nesta fase, uma postura agressiva sem dúvidas sera muito mais frutífera do que uma postura passiva na mesa, os antes e os blinds devorarão o stack daqueles que se absterem do jogo, não deve-se pagar blinds em mãos que não se está disposto a ir fundo, tal ação não faz sentido, já que nessa fase há uma chuva de raises, reraises e all-ins.

A seguir veremos alguns exemplos de situações em todas as partes do torneio e como agir nelas. Estas situações ilustram as instruções de forma explícita, veremos que os exemplos são de certa forma muito mais explicativos do que os próprios textos a respeito das partes do torneio.

5.4 Exemplos

Exemplo 5.1. *Suponhamos que estamos na parte inicial de um torneio (com cerca de 1000 pessoas) e pouco menos da metade das pessoas foram eliminadas, nosso stack é de 4150 fichas e o blind é 50/100. Pagamos o blind com a mão* J♦ 10♦ *, como ninguém mais pagou o blind, então nosso único adversário é o big blind, após ver o flop*

A♠ 6♣ K♦

o adversário passa a vez, sabendo que o pote é de 250 fichas e que esse adversário é muito conservador, ou seja, é um jogador de poucos raises e poucos calls, e ele tem uma taxa de 90% de folds após dar check, verifiquemos uma estratégia razoável.

Primeiro precisamos decidir o que é uma aposta suficientemente favorável nessa altura do torneio. Utilizando a fórmula do início deste capítulo e verificando que N=10 e n=1, temos que o EV é suficientemente favorável se

$$I - 2M \leq EV.$$

Como

$$M = \frac{I - F}{N}$$

em que I é um EV suficientemente favorável no início do torneio e F um EV suficientemente favorável no final do torneio, podemos reescrever o EV suficientemente favorável deste exemplo como

$$\frac{4I - F}{5} \leq EV.$$

Agora vamos estimar nosso EV até o river. Suponha que façamos a aposta mínima, temos cerca de $\frac{1}{6}$ de chances de acertar sequência até o river e $\frac{1}{3}$ de chances de acertar um par. Vamos então supor que caso o adversário der call, temos $\frac{1}{3}$ de chances de vencer (que é razoável, pois ele é um jogador conservador, que implica que muito dificilmente vai dar call com uma mão muito ruim). Então o EV até o river desta aposta será,

$$EV = \frac{9}{10} \cdot 250 - \frac{1}{10}\left(\frac{2}{3} \cdot 100 - \frac{1}{3} \cdot 350\right) = 225 + 5 = 230.$$

Observe que 230=2,3V em que V é o valor apostado e como

$$\frac{4I - F}{5} < V$$

sempre, logo nosso EV é suficientemente favorável. Se ao invés disso tivéssemos supondo que perderíamos sempre que o adversário desse call, ainda assim nosso EV seria suficientemente favorável, uma vez que nosso EV seria 215=2,15V. Para ser ainda mais preciso, mesmo que o adversário nesse exemplo corresse 60% das vezes o EV ainda seria suficientemente favorável nessa aposta, uma vez que teríamos EV>V.

Nesse exemplo não consideramos nenhuma estratégia para o turn ou river, pois o EV de apostar 100 fichas é tão favorável no flop, o que não valia a pena considerar isso. No entanto, quando jogadores muito conservadores na mesa pagam uma aposta, normalmente eles não tem uma mão ruim, o que faz o nosso EV despencar.

Exemplo 5.2. *Suponhamos que estamos no início de um campeonato com nove jogadores (incluindo-nos), com blind 15/30 e stack 3000, com todos os jogadores na mesa tendo aproximadamente o mesmo stack. Somos o quarto jogador após o big blind, no pré-flop, dos 3 jogadores que já fizeram seu movimento, apenas um tenha pago o blind, vamos chamar esse jogador de* J_1. *Nossa mão é 10♣9♣, ao analisarmos o jogador que tenha pago o blind, concluímos que é um jogador que paga apostas com muita frequência, e caso acertemos uma mão forte, tendemos a ter calls altos e temos contra ele:*

- *9% de chances de acertar uma mão forte ganhar em média 600 fichas;*
- *1% de chances de acertar uma mão forte e perder em média 600 fichas*
- *25% de chances de acertar uma mão média e ganhar em média 90 fichas;*
- *15% de chances de acertar uma mão média e perder em média 60 fichas;*
- *50% de chances de acertar uma mão fraca e perder as 30 fichas apostadas.*

Suponhamos também que contra o big blind temos números parecidos e 2 dos outros 4 jogadores tem também um perfil parecido. Se considerarmos que em 80% das vezes iremos enfrentar só jogadores com esse tipo de perfil se caso nós formos pagar o blind, então verifiquemos o quanto é vantajoso o call.

Primeiro vamos supor que estamos enfrentando só um jogador com estas características, então nosso EV até o final da mão será

$$EV = 0,08 \cdot 600 + 0,25 \cdot 90 - 0,15 \cdot 60 - 0,5 \cdot 30 = 46,5.$$

Por outro lado, o valor em média apostado é

$$0,1 \cdot 600 + 0,25 \cdot 90 + 0,15 \cdot 60 + 0,5 \cdot 30 = 106,5.$$

Note que se tivermos 2 jogadores na mesa com esses números em relação a cada um deles, o EV vai praticamente dobrar e o valor médio apostado deve ser em média o mesmo, por isso nós teremos um EV de aproximadamente 0,9V em que V é o valor apostado.

Ainda não consideramos o fato de que em 20% das vezes temos adversários em relação aos quais esses números não se aplicam. No entanto, muito dificilmente eles deixarão o EV muito baixo em relação a V, uma vez que nós já temos 2 adversários no pote que já sabemos que temos muita vantagem em relação eles quanto ao EV. Suponhamos por exemplo que eles derrubem nosso EV para 0,7V enquanto estiverem no pote, neste caso teremos que o EV médio será

$$0,2 \cdot 0,7V + 0,8 \cdot 0,9V = 0,86V.$$

Mas esse ainda é um EV alto.

OBSERVAÇÃO: Existem situações em que somos obrigados a reduzir o EV suficientemente favorável, mesmo em início de torneio. Isto se deve pelo motivo de que nem sempre existe jogadores na mesa que podem ser facilmente explorados (no bom sentido).

Exemplo 5.3. *Estamos aproximadamente com metade dos jogadores eliminados do torneio. O blind é 50/100 e nosso stack é de 5500 fichas. após pagarmos um blind com a mão 10♥ K♣, um adversário a nossa frente que não era o small blind e nem o big blind, apostou 300 fichas e nós cobrimos. O pote no flop era de 750 fichas, e nele virou as seguintes cartas*

Q♥ J♦ 7♣,

nós apostamos 300 fichas, o adversário cobriu e, então no turn tivemos

Q♥ J♦ 7♣ 8♣,

após isso demos check, em resposta o adversário apostou 300 fichas, nós demos call, então virou

Q♥ J♦ 7♣ 8♣ A♠,

timidamente apostamos 400 fichas, o adversário deu reraise para 800, nesse momento o pote é de 3150 fichas e o nosso stack é de 4200 fichas. Supondo que o stack do adversário seja maior que o nosso, resta-nos duas opções, dar um reraise ou all-in. Supondo que a estimativa de um jogador nessa situação, seja de ter uma chance de 90% dar call em um reraise para 2400 e, além disso, 50% de chances de dar call nos all-ins. Verifiquemos qual é a melhor alternativa.

Desconsiderando a chance do adversário ter a mesma mão que nós temos (que é realmente pequena), o EV no caso de reraise é

$$3150 + \frac{9 \cdot 1600}{10} = 4590.$$

Além disso, no caso de all-in nosso EV é

$$3150 + \frac{1}{2} \cdot 4200 = 5250.$$

Note que em caso de reraise, o EV é proporcionalmente muito maior em relação ao valor apostado e não ao valor médio ariscado. No entanto, mesmo que o EV do reraise fosse maior em relação ao valor médio ariscado, contanto que o all-in fosse uma aposta suficientemente favorável, então daríamos all-in da mesma forma. Inspirados nisso, vamos determinar que quando tivermos cogitando duas apostas com EV suficientemente favorável, sempre optaremos por aquela com maior EV.

Exemplo 5.4. *Suponha que estamos na parte intermediária de um torneio com stack de 5600 fichas e blind 200/400, neste momento estamos tomando como um EV suficientemente favorável qualquer EV maior do que 0,7V em que V é o valor apostado. Nossa posição é de dealer e apenas um jogador até agora pagou blind, nossa mão é A♥K♥ e o pote é de 1000 fichas, além de nós termos o menor stack da mesa. Supondo que a chance de cada um dos adversários dar fold seja de 80% e que a nossa chance de vitória contra uma mão aleatória seja 60% no pré-flop, vamos estimar o EV de um all-in e decidir se é viável.*

Não vamos considerar os casos em que 2 ou 3 jogadores dão call no all-in, pois a mudança no EV será pequena já que esses casos são raros. Vamos assumir por hora que a variação é de menos de 0,005V, que é bem razoável.

Sendo assim temos que em

$$(0,8)^3 = 0,512 \cong 0,5$$

é a chance aproximada de todos darem fold. Por outro lado consideraremos que existe aproximadamente 50% de chances de um jogador dar call. Portanto o EV é aproximado

$$0,5 \cdot 1000 + 0,5(0,6 \cdot 6200 - 0,4 \cdot 5600) = 500 + 740 = 1240.$$

No entanto o valor médio ariscado é de 2650 fichas, nesse caso o EV é menor do que 0,5V. Portanto, mesmo que a variação de 0,05V fosse positiva, esta não seria uma aposta suficientemente favorável, pois para que assim fosse, seria necessária uma chance bem maior de fold dos adversários. Neste caso, seria muito mais viável só pagar o blind, uma vez que a mão é muito boa, pois se virar uma A ou K no flop, a mão passa a ser bem forte, e muito provavelmente o EV se tornaria suficientemente favorável.

Exemplo 5.5. *Suponha que estamos com stack de 40.000 fichas que é o menor da mesa, com blind 2.000/4.000 e ante de 400, estamos na posição imediatamente após o big blind em uma mesa de nove jogadores, definimo como EV suficientemente favorável um EV de 0,5V. Ao olharmos para nossa mão, vemos um par de damas, neste momento o pote é de 9600 fichas. Supondo que exista uma chance de 30% de ninguém dar call no nosso all-in e que nós temos 70% de vencer um adversário em média no pré-flop. Calculemos o EV aproximado e decidamos o quão vantajoso é o all-in.*

Não vamos considerar as situações em que mais de uma pessoa da call no all-in, embora nessas situações em que temos par alto, a variação que temos a considerar nesses casos é positiva, por isso não vamos ter grande prejuízo no resultado final (isso foi um *spoiler*).

Primeiro vamos calcular o EV aproximado. O nosso EV será aproximadamente

$$0,3 \cdot 9600 + 0,7 \cdot (0,7 \cdot 49600 - 0,3 \cdot 40000) = 2880 + 15904 = 18720.$$

Note que o valor ariscado em média é

$$0,3 \cdot 0 + 0,7 \cdot 40000 = 28000.$$

Claramente EV é maior do que 0,5V em que V é o valor médio ariscado. Portanto essa aposta é suficientemente favorável.

Exemplo 5.6. *Após pagarmos o blind enquanto somos big blind nosso stack vai de 600 para 200, supondo que todos até o small blind corram e o small blind dê all-in em valor superior ao nosso stack. Seja neste momento uma aposta suficientemente favorável qualquer aposta superior a 0,5V, vamos mostrar que para qualquer mão, este call é suficientemente favorável.*

A primeira coisa que devemos observar é qualquer mão nessa situação tem em média mais de 30% de chances de vitória no pré-flop. Além disso o pote atual é de 800 fichas. Sabendo disso, note que o EV é maior do que

$$0,3 \cdot 1000 - 0,7 \cdot 200 = 160.$$

Portanto concluímos que EV é maior do que 0,5V, que é uma aposta suficientemente favorável.

Uma importante observação a ser feita nesse exemplo, é que não faz sentido definir um EV suficientemente favorável muito alto, pois na rodada seguinte pagaríamos o small blind e estaríamos em all-in com uma mão totalmente aleatória. Portanto muito provavelmente o EV seria bem menor na mão seguinte. Isto nos leva a concluir que nessa situação, deve-se ignorar qualquer método pré definido como a noção de EV suficientemente favorável e ir all-in com qualquer mão.

6 Pôquer online e Sit e Go

6.1 Pôquer online

Embora no pôquer online nós tenhamos uma quantidade muito menor de informações sobre nosso adversário, principalmente informações comportamentais que nos permitiriam criar padrões de estado psicológico do adversário, também temos acesso a outros tipos úteis de informação. Um grande exemplo é o fato de que vários sites de pôquer disponibilizam informações sobre todas as nossas mãos jogadas, possibilitando assim, desvendarmos nossos próprios padrões de jogo, analisa-los e melhora-los. Dois exemplos destes sites são 888POKER e PokerStars.

6.2 Sit e Go

Sit e Go é um mini torneio, tem a mesma estrutura de um torneio, no entanto tem um número pequeno de jogadores. É muito comum no Sit e Go, que os blinds subam muito rápido e os jogadores continuem na mesa, ou seja, o ritmo de eliminação é diferente de torneios normais. Nesse caso abandona-se as estratégias já desenvolvidas pra torneio e foca-se a penas em maximizar o EV, considerando blind, posição na mesa e aspectos dos outros jogadores que tenha notado.

O jogo de pôquer online normalmente é bem agressivo, ou seja, aposta-se muito. Isto é logicamente viável, uma vez que é bem mais difícil detectar blefes nessa modalidade.

Conclusão

A utilização prática dos conceitos da Matemática sempre foi um desafio para os educadores. Essa temática tem sido comum em muitos contextos em vários níveis, desde o ensino fundamental até o nível superior. Reter a atenção de um aluno padrão ou até mesmo de pessoas com formação fora das ciências exatas para temas que utilizam destes conceitos, ainda hoje é uma tarefa difícil.

A abordagem do pôquer que é um jogo extremamente popular por meio de conceitos centrais da Matemática, proporciona uma reflexão positiva para esta ciência fundamental. Neste trabalho os conceitos centrais foram a probabilidade condicional e o valor esperado. Esses conceitos permeiam outras importantes aplicações da vida moderna.

Foi demonstrada nesse trabalho a aplicação do conceito de valor esperado em todas as decisões tomadas na mesa de pôquer, tornando fácil concluir assim, que este conceito foi não só o mais importante a ser abordado, como também imprescindível para construção de toda e qualquer estratégia neste trabalho abordada.

Além disso, através da noção de probabilidade condicional, trabalhamos também com o teorema de Bayes, que é a ferramenta matemática para o tratamento de informações adquiridas na mesa de pôquer. Embora à utilização desse teorema prescinda da captação de informações dos adversários, sem dúvidas, para qualquer jogador com aspirações profissionais em relação ao pôquer, ele mais cedo ou mais tarde se tornará uma ferramenta poderosa na hora de se tomar decisões.

Utilizando princípios de contagem, exploramos o conceito intuitivo de probabilidade para calcular e avaliar eventos do jogo em questão, no sentido de estabelecer as chances reais de sucesso no jogo, proporcionando assim, uma aplicação direta da Matemática. Enfim, uma forma atrativa de abordar conceitos importantes para uma atividade de entretenimento extremamente famosa e, que ocupa o imaginário de milhões de indivíduos nas mais variadas parte do globo terrestre.

Apêndice

Vamos tratar neste apêndice de números que podem ser úteis para o entendimento da raridade das mãos em várias situações. Para isso começaremos a tratar das probabilidades de acertar cada mão, antes mesmo de conhecer se quer qual é o par de cartas dado a você pré-flop.

Primeiramente notemos que antes de sabermos nossa mão pré-flop, existe

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = 2.598.960$$

possibilidades de mãos distintas após o flop. Sabendo disto basta calcular o número de possibilidades P de cada tipo de mão após o flop, e teremos que a probabilidade de acertar cada tipo de mão após o flop é

$$\frac{P}{2.598.960}.$$

Desta forma, calculando a probabilidade de acertar cada tipo de mão após o flop, temos que essas probabilidades são dadas pela tabela a seguir.

Mão	Número de possibilidades	Probabilidade
Straight flush	40	0,000015
Quadra	624	0,000250
Full house	3744	0,001441
Flush	5108	0,001965
Sequência	10200	0,003925
Trinca	54912	0,021128
Dois pares	123552	0,047539
Par	1098240	0,422569
Nada	1302540	0,501177

A tabela a cima deixa muito claro, o quão provável é acertar um par ou simplesmente nada após o flop e o quão improvável é acertar trinca ou mãos melhores. Mas nessa tabela, consideramos não sabermos qual mão temos no pré-flop. Ao saber de nossa mão as coisas mudam, por exemplo, se tivermos um par pré-flop, então a chance de trinca no flop é aproximadamente $\frac{1}{8}$, isso é cerca de 6 vezes a chance de acertar trinca com uma “mão qualquer”.

Mas o ranking de mãos também leva em conta critérios de desempate entre essas mãos, o que faz dessa divisão na tabela a cima um pouco obsoleta em alguns casos. Por exemplo, a mão AA em algumas situações pode ser bem forte, mas um par de 2 geralmente é uma mão fraca. Por esse motivo, a tabela a seguir é mais útil a titulo de utilidade e não somente de curiosidade.

Tabela de Probabilidades de mãos após o flop:

Mãos	Probabilidade
Straight flush	0,000015
Quadra ou melhor	0,000255
Full house ou melhor	0,001696
Flush ou melhor	0,003661
Sequência ou melhor	0,007586
Trinca de ás ou melhor	0,009211
Trinca de rei ou melhor	0,010836
Trinca de dama ou melhor	0,012461
Trinca de valete ou melhor	0,014086
Trinca de 10 ou melhor	0,015711
Trinca de 9 ou melhor	0,017336
Trinca de 8 ou melhor	0,018961
Trinca de 7 ou melhor	0,020586
Trinca de 6 ou melhor	0,022211
Trinca de 5 ou melhor	0,023836
Trinca de 4 ou melhor	0,025461
Trinca de 3 ou melhor	0,027086
Trinca de 2 ou melhor	0,028711
Dois pares ou melhor	0,076254
Flush draw ou melhor	0,119171
Straight draw de 8 outs ou melhor	0,152913
AA ou melhor	0,184403
KK ou melhor	0,215602
QQ ou melhor	0,246509
JJ ou melhor	0,277126
Par de 10 ou melhor	0,307452
Par de 9 ou melhor	0,337778
Par de 8 ou melhor	0,368104
Par de 7 ou melhor	0,398430
Par de 6 ou melhor	0,428756
Par de 5 ou melhor	0,459082
Par de 4 ou melhor	0,489699
Par de 3 ou melhor	0,520607
Par de 2 ou melhor	0,551805
Staight draw de 4 outs ou melhor	0,603223
Nada	0,396777

Existem algumas considerações a serem feitas sobre a tabela a cima. A primeira é que o "Nada" desta ultima tabela não é o mesmo do que o "Nada" da primeira, uma vez que na última excluímos flush draw e straight draw do conjunto de possibilidades de “Nada”. A segunda observação a ser feita é que definimos arbitrariamente a posição no ranking de mãos dos draws no flop, esta definição arbitrária pode mudar de acordo com a situação, mas normalmente é melhor ter um flush draw ou stright draw de 8 outs do que um par.

Vamos agora verificar as probabilidades de acertar cada mão até o final de cada rodada, ou seja, a probabilidade de acertar cada mão após o river. Novamente vamos considerar que não sabemos nossa mão pré-flop.

Para fazer estes cálculos, primeiro é necessário considerar o número total de possibilidades de mãos até o final do river. Calculando, temos que existe

$$\binom{52}{7} = \frac{52!}{7!45!} = 133.784.560$$

possibilidades de mãos distintas até o final da rodada. Sabendo disto basta calcular o número de possibilidades N de cada tipo de mão após o river, e teremos que a probabilidade de acertar cada tipo de mão após o river é

$$\frac{N}{133.784.560}.$$

Desta forma, calculando a probabilidade de acertar cada tipo de mão após o river, temos que essas probabilidades são dadas pela tabela a seguir.

Mão	Número de possibilidades	Probabilidade
Straight flush	41.584	0,000311
Quadra	224.848	0,001681
Full house	3.473.184	0,025961
Flush	4.047.644	0,.030255
Sequência	6.180.020	0,046194
Trinca	6.461.620	0,048299
Dois pares	31.433.400	0,234955
Par	58.627.800	0,438225
Nada	23.294.460	0,174119

Se comparada esta última tabela com a primeira deste apêndice, fica evidente o quão mais provável ficam as mãos mais fortes de ocorrerem. Para maior detalhamento das probabilidades de atingir uma mão com ranking alto, a seguir veremos mais uma tabela.

Tabela de Probabilidades de mãos após o river:

Mãos	Probabilidade
Straight flush	0,000311
Quadra ou melhor	0,001992
Full house ou melhor	0,027953
Flush ou melhor	0,058207
Sequência ou melhor	0,104401
Trinca de ás ou melhor	0,108131
Trinca de rei ou melhor	0,111860
Trinca de dama ou melhor	0,115581
Trinca de valete ou melhor	0,119296
Trinca de 10 ou melhor	0,123002
Trinca de 9 ou melhor	0,126709
Trinca de 8 ou melhor	0,130415
Trinca de 7 ou melhor	0,134122
Trinca de 6 ou melhor	0,137828
Trinca de 5 ou melhor	0,141535
Trinca de 4 ou melhor	0,145249
Trinca de 3 ou melhor	0,148971
Trinca de 2 ou melhor	0,152700
Dois pares ou melhor	0,387655
AA ou melhor	0,421843
KK ou melhor	0,456031
QQ ou melhor	0,489952
JJ ou melhor	0,523607
Par de 10 ou melhor	0,556996
Par de 9 ou melhor	0,590429
Par de 8 ou melhor	0,623862
Par de 7 ou melhor	0,657295
Par de 6 ou melhor	0,690728
Par de 5 ou melhor	0,724117
Par de 4 ou melhor	0,757772
Par de 3 ou melhor	0,791693
Par de 2 ou melhor	0,825881
Nada	0,174119

A próxima tabela será referente a probabilidade de algumas mãos (as mais importantes) no pré-flop terminar sendo a melhor após a rodada, calcularemos isto para N jogadores na mesa, em que N=2,N=3,N=6 ou N=9. A letra “s” após o par de cartas significa mão naipada e a letra “o” significa a mão não estar naipada.

Mão	N=2	N=3	N=6	N=9
AA	85,3%	73,4%	49,2%	34,7%
AKs	67,0%	50,7%	31,1%	22,7%
AKo	65,4%	48,2%	27,9%	19,2%
AQs	66,1%	49,4%	29,4%	21,1%
AQo	64,5%	46,8%	25,9%	17,5%
AJs	65,4%	48,2%	27,8%	19,9%
AJo	63,6%	45,6%	24,4%	16,1%
A10s	64,7%	47,1%	26,7%	18,9%
A10o	62,9%	44,4%	23.1%	15,1%
A9s	63,0%	44,8%	24,2%	16,9%
A9o	60,9%	41,8%	20,3%	12,8%
A8s	62,1%	43,7%	23,3%	16,2%
A8o	60,1%	40,8%	19,4%	12,0%
A7s	61,1%	42,6%	22,5%	15,7%
A7o	59,1%	39,4%	18,4%	11,4%
A6s	60,0%	41,3%	21,7%	15,3%
A6o	57,8%	38,0%	17,5%	10,9%
A5s	59,9%	41,4%	22,2%	15,9%
A5o	57,7%	38,2%	18,0%	11,5%
A4s	58,9%	40,4%	21,6%	15,5%
A4o	56,4%	36,9%	17,3%	11,0%
A3s	58,0%	39,4%	21,0%	15,1%
A3o	55,6%	35,9%	16,7%	10,7%
A2s	57,0%	38,5%	20,4%	14,6%
A2o	54,6%	35,0%	16,1%	10,2%
KK	82,4%	68,9%	43,0%	29,2%
KQs	63,4%	47,1%	28,3%	20,4%
KQo	61,4%	44,4%	25,1%	16,9%
KJs	62,6%	45,9%	26,9%	19,3%
KJo	60,6%	43,1%	23,5%	15,6%
K10s	61.9%	44,9%	25,8%	18,5%
K10o	59,9%	42,0%	22,3%	14,7%
K9s	60,0%	42,4%	23,2%	16,3%
K9o	58,0%	39,5%	19,5%	12,3%
QQ	79,9%	64,9%	37,9%	22,2%
QJs	60,3%	44,1%	26,1%	17,1%
QJo	58,2%	41,4%	22,9%	13,7%
Q10s	59,5%	43,1%	25,2%	16,6%
Q10o	59,5%	40,2%	21,6%	12,9%
Q9s	57,9%	40,7%	22,5%	14,5%
Q9o	55,5%	37,6%	19,0%	10,7%

Mão	N=2	N=3	N=6	N=9
JJ	77,5%	61,2%	33.6%	21,6%
J10s	57,5%	41,9%	24,7%	17,9%
J10o	55,4%	39,0%	21,5%	14,5%
J9s	55,8%	39,6%	22,4%	15,9%
J9o	53,4%	36,5%	18,7%	12,1%
J8s	54,2%	37,5%	20,5%	14,4%
J8o	51,7%	34,2%	16,8%	10,7%
1010	75,1%	57,7%	30,0%	19,2%
109s	54,3%	38,9%	22,5%	16,2%
109o	51,7%	35,7%	18,9%	12,6%
108s	52,6%	36,9%	20,6%	14,8%
108o	50,0%	33,6%	16,9%	11,0%
99	72,1%	53,5%	30,9%	17,2%
98s	51,1%	36,0%	20,2%	14,5%
98o	48,4%	32,9%	16,6%	10,9%
97s	49,5%	34,2%	18,9%	13,6%
97o	46,7%	30,9%	15,1%	9,8%
88	69,1%	49,9%	24,0%	15,8%
87s	48,2%	33,9%	18,9%	13,7%
87o	45,5%	30,6%	15,4%	10,3%
77	66,2%	46,4%	21,9%	14,8%
76s	45,7%	32,0%	18,0%	13,2%
76o	42,7%	28,5%	14,2%	9,6%
66	63,3%	43,2%	20,1%	14,0%
65s	43,2%	30,2%	17,0%	12,7%
65o	40,1%	26,7%	13,3%	9,2%
55	60,3%	40,1%	18,5%	13,2%
54s	41,1%	28,8%	16,5%	12,5%
54o	37,9%	25,2%	12,6%	8,9%
44	57,0%	36,8%	17,3%	12,9%
33	53,7%	33,5%	16,2%	12,6%
22	50,3%	30,7%	15,5%	12,5%

Ao observarmos esta última tabela atentamente, é possível notar a diferença que faz ter uma mão naipada, ela interfere positivamente nas chances de vitória e consequentemente no EV.

A seguir também será apresentada uma tabela com algumas probabilidades úteis de se saber, em relação a chances de receber certas mãos pré-flop.

Mão inicial	Probabilidade de receber
Ax (x qualquer)	15,08%
Par qualquer	5,88%
Par fixo (ex:AA)	0,45%
AKs	0,30%
AK	1,21%
Mão naipada	23,53%

Agora veremos algumas probabilidades úteis de se saber em relação ao flop.

Flop	Probabilidade
Acertar trinca tendo um par	13,3%
Acertar flush tendo cartas naipadas	0,85%
Ficar em flush draw tendo cartas naipadas	13,4%
Acertar sequência com cartas consecutivas entre 45-J10	1,3%

Uma observação útil a se fazer é que as cartas que tem maior chance de sequência pré-flop são as consecutivas que vão de 4-5 a J10.

Referências

[1] G. Carson. The complete book of hold'em poker. *New York: Kensington*, 2001.

[2] B. Chen and J. Ankenman. *The mathematics of poker.* ConJelCo LLC, 2006.

[3] D. W. Dec. Hold'em project.

[4] P. Dittmar. *Practical Poker Math.* ECW Press, 2008.

[5] E. Miller, D. Sklansky, and M. Malmuth. *Small stakes Hold'em: Winning big with expert play.* Two Plus Two Publishing LLC, 2004.

[6] D. Sklansky. *The theory of poker.* Two Plus Two Publishing LLC, 1999.

[7] D. Sklansky and M. Malmuth. *Hold'em poker for advanced players.* Two Plus Two Publishing LLC, 1999.